Unterhaltsame Mathematik von J. I. Perelman

Zusammenstellung aus "Heitere Mathematik", "Geometrische Denkaufgaben", "Mathematik im Spiel", "Ein Frühstück mit Denkaufgaben", "Denkaufgaben mit Zahlenriesen"
Übersetzung durch H. Asemissen
Illustrationen von W. Riegenring, R. Meissner

Abschrift, Zusammenstellung und LaTex-Satz: Steffen Polster 2020
`https://mathematikalpha.de`

1 EIN FRÜHSTÜCK MIT DENKAUFGABEN

1.1 Das Eichhörnchen auf der Wiese

"Heute morgen habe ich mit einem Eichhörnchen Versteck gespielt", erzählte beim Frühstück im Erholungsheim einer der um den Tisch Versammelten.

"Kennen Sie in unserem Wald die kleine runde Wiese mit einer einzelnen Birke in der Mitte? Hinter dieser Birke hatte sich das Eichhörnchen vor mir versteckt. Als ich aus dem Gehölz auf die Wiese trat, bemerkte ich gleich sein Schnäuzchen und die lebhaften Äuglein, mit denen es hinter dem Baumstamm zu mir herüberguckte. Vorsichtig, ohne mich zu nähern, ging ich am Rand der Wiese entlang um den Baum herum, um mir das Tierchen anzusehen. Viermal wohl habe ich es so gemacht, aber der kleine Schelm versteckte sich immer hinter dem Baumstamm und zeigte nach wie vor nur das Schnäuzchen. So ist es mir tatsächlich nicht gelungen, das Eichhörnchen zu umkreisen."

"Wie", warf jemand ein, "Sie sagen doch, dass Sie viermal um den Baum herumgegangen sind?"
"Um den Baum, aber nicht um das Eichhörnchen."
"Aber das Eichhörnchen war doch auf dem Baum?"
"Ja, und?"
"Dann haben Sie auch das Eichhörnchen umkreist."

"Ein schönes Umkreisen, wenn ich nicht ein einziges Mal seinen Rücken zu Gesicht bekommen habe!"
"Was hat das mit dem Rücken zu tun? Das Eichhörnchen befindet sich in der Mitte, Sie gehen im Kreis herum - also umkreisen Sie das Eichhörnchen."
"Ganz und gar nicht. Stellen Sie sich vor, ich ginge im Kreis um Sie herum, indessen Sie sich mir dauernd mit dem Gesicht zuwendeten und den Rücken verdeckten. Würden Sie dann etwa sagen, ich habe Sie umkreist?"
"Gewiss würde ich das sagen. Was denn sonst?"
"Ich hätte Sie umkreist, obwohl ich keinmal hinter Ihnen gewesen wäre, Ihren Rücken nicht zu Gesicht bekommen hätte?"
"Lassen wir doch den Rücken! Sie schließen um mich einen Kreis - darauf kommt es an, und nicht darauf, ob Sie den Rücken sehen."
"Erlauben Sie: Was heißt es, etwas zu umkreisen? Meines Erachtens kann es nur dieses bedeuten: den Standpunkt so zu wechseln, dass man den betreffenden Gegenstand nacheinander von allen Seiten zu sehen bekommt. Nicht wahr, Professor?" wandte sich der Sprechende an einen am Tisch sitzenden älteren Herrn.

"Bei Ihrem Streit handelt es sich im Grunde genommen um eine Wortfechterei", entgegnete der Gelehrte. "Und in solchen Fällen muss man zuvor stets die Frage klären, die Sie eben erst aufgeworfen haben: Man muss sich über die Bedeutung der Worte einigen. Wie ist das zu verstehen: ‚einen Gegenstand umkreisen'? Der Sinn kann zweifach sein. Erstens kann man darunter verstehen, dass ein Kreis geschlossen wird, in dem sich der Gegenstand befindet. Das ist die eine Möglichkeit.
Die andere: den Standpunkt im Verhältnis zum Gegenstand so zu wechseln, dass man ihn von allen Seiten zu sehen bekommt. Nach der ersteren Auslegung haben Sie also das Eichhörnchen viermal umkreist. Sofern Sie sich dagegen an die zweite Auslegung halten, war dies nicht der Fall. Es kann hier also, wie Sie sehen, keine Meinungsverschiedenheit geben, wenn beide Parteien die gleiche Sprache sprechen und den Sinn der Worte in gleicher Weise auslegen."
"Schön, es ist zweierlei Auslegung möglich. Aber welche ist dann richtiger?"

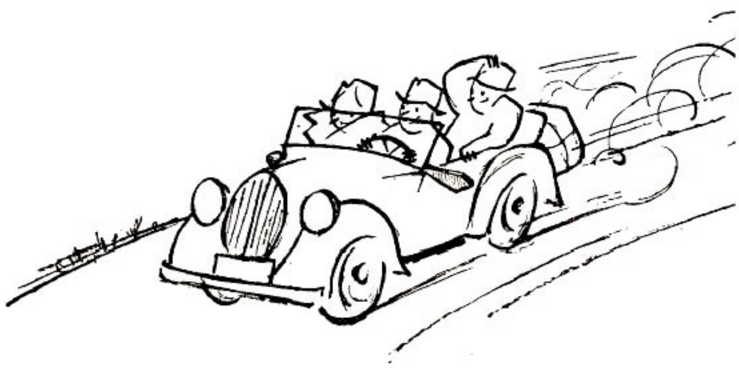
"So kann man an diese Frage nicht herangehen. Einigen kann man sich über alles. Es fragt sich nur, was der landläufigen Auffassung mehr entspricht. Ich möchte sagen, dass die erste Auslegung mit dem Sinn der Sprache besser in Einklang steht, und zwar aus folgendem Grund: Die Sonne dreht sich bekanntlich in 26 Tagen einmal um ihre Achse ..."
"Die Sonne dreht sich?"
"Natürlich, ebenso wie die Erde sich um ihre Achse dreht. Nehmen wir einmal an, dass die Sonne sich langsamer drehen und für eine volle Umdrehung nicht 26, sondern 365 $\frac{1}{4}$ Tage, das heißt ein Jahr, brauchen würde. Dann wäre die Sonne der Erde immer mit ein und derselben Seite zugekehrt, und die entgegengesetzte Seite, den 'Rücken' der Sonne, könnten wir nie sehen. Aber kreist deswegen die Erde nicht um die Sonne?"
"Ja, nun ist es klar, dass ich das Eichhörnchen doch umkreist habe."
"Ein Vorschlag, Freunde!" sagte jemand von denen, die der Auseinandersetzung gefolgt waren. "Wir wollen beisammen bleiben! Es regnet, und niemand kann spazierengehen. Wir wollen uns hier die Zeit mit Denkaufgaben vertreiben. Der Anfang ist gemacht.
Einer nach dem anderen soll irgendeine Denkaufgabe aufgeben. Und Sie, Professor, werden dabei den Schiedsrichter spielen."
"Wenn die Denkaufgaben mit Algebra oder Geometrie zu tun haben werden, kann ich mich nicht beteiligen", erklärte eine junge Frau.
"Nein, nein, teilnehmen müssen alle! Aber die Anwesenden werden gebeten, Algebra und Geo-

metrie beiseite zu lassen oder höchstens in den allereinfachsten Grundzügen heranzuziehen. Einverstanden?"
"Dann bin ich einverstanden und bereit, als erste eine Denkaufgabe aufzugeben."
"Lassen Sie hören!" ertönte es von allen Seiten.

1.2 Die gemeinsame Autofahrt

"Meine Denkaufgabe hat sich aus der Praxis ergeben. Es ist ein alltägliches Exempel, kann man sagen.
Drei Buchhändler wollen zur Messe fahren, um für ihre Buchhandlungen Kinderbücher einzukaufen. Sie verabreden, gemeinsam ein Auto zu benutzen. Der eine von ihnen - der Anschaulichkeit halber wollen wir ihn Herrn Dreier nennen - hat drei Liter Benzin zur Verfügung, der zweite namens Fünfer bringt fünf Liter Benzin mit, während der dritte, Herr Benzinlos, kein Benzin zur Verfügung hat. Zum Ausgleich der Unkosten zahlt er an die beiden Mitreisenden acht Mark. Wie müssen diese den Betrag teilen?"

"In die Hälfte", beeilte sich jemand zu erklären. "Herr Benzinlos hat das Benzin von beiden in gleicher Weise mitbenutzt."
"O nein ", widersprach ein anderer, "man muss die Menge berücksichtigen, die jeder zu der Fahrt beigetragen hat. Derjenige, der drei Liter Benzin gegeben hat, muss drei Mark bekommen, dem anderen, der fünf Liter gegeben hat, stehen fünf Mark zu. Das wäre eine gerechte Teilung."
"Hört", nahm derjenige das Wort, der das Spiel angeregt hatte. "Die endgültige Auflösung der Aufgaben wollen wir vorläufig noch zurückhalten. Jeder soll Zeit haben, darüber nachzudenken. Die richtigen Antworten wird uns der Schiedsrichter beim Abendessen bekanntgeben. Nun der nächste!"



1.3 Die Arbeit der Pioniergruppen

"In unserer Schule", begann der Pionier, "gibt es fünf Arbeitsgemeinschaften, eine für Biologie, eine für Modellbau, eine für Physik, eine für Geographie und eine für Elektrotechnik. Die Gruppe, die sich mit Biologie beschäftigt, kommt jeden zweiten Tag zusammen; diejenige, die sich mit Modellbau beschäftigt, jeden dritten Tag; die Physikgruppe jeden vierten Tag; die Gruppe für Geographie jeden fünften Tag und die Gruppe für Elektrotechnik jeden sechsten Tag.
Am l.Januar fingen alle fünf Gruppen an, und die Arbeitsgemeinschaften fanden dann ohne Abweichung an den planmäßig festgelegten Tagen statt. Die Frage lautet: An wieviel Abenden im ersten Quartal sind die Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammengekommen?"

"War es ein gewöhnliches Jahr oder ein Schaltjahr?"wurde der Pionier gefragt.
"Ein gewöhnliches."
"Das erste Quartal, aus Januar, Februar und März bestehend, ist also mit 90 Tagen anzusetzen?"
"Ja."
"Erlauben Sie, dieser Frage der Denkaufgabe eine weitere hinzuzufügen", sagte der Professor. "Und zwar: Wieviel Abende gab es in dem betreffenden Quartal, an denen in der Schule überhaupt keine Gruppenabende stattfanden?"
"Aha, ich verstehe!"rief jemand. "Eine Aufgabe mit einer Falle! Es hat keinen Tag mit allen fünf Gruppen gleichzeitig gegeben und auch keinen Tag ganz ohne Gruppenabend. Das steht schon fest!"
"Warum ?" fragte der Professor.
"Erklären kann ich es nicht, aber ich fühle, dass es sich um eine Falle handelt."
"Nun, das ist kein Beweis. Am Abend wird es sich zeigen, ob Ihr Gefühl richtig war. - Sie sind jetzt an der Reihe, lieber Freund!"

1.4 Wer zählte mehr?

"Zwei Menschen zählten eine Stunde lang alle Personen, die an ihnen auf dem Bürgersteig vorüberkamen.
Der eine von ihnen hatte sich an der Haustür aufgestellt während der andere auf dem Bürgersteig auf und ab ging. Welcher von ihnen hat mehr gezählt?"

"Beim Aufundabgehen kann man mehr zählen, das ist klar", meinte jemand am anderen Ende des Tisches.
"Beim Abendessen werden wir die Antwort hören", erklärte der Schiedsrichter. "Der nächste!"

1.5 Großvater und Enkel

"Das, was ich Ihnen vortragen will, hat sich im Jahre 1932 abgespielt. Ich war damals genauso viele Jahre alt, wie es die beiden letzten Ziffern meines Geburtsjahres ausdrücken. Als ich von diesem Zusammentreffen meinem Großvater erzählte, überraschte er mich durch die Erklärung, dass dies auch bei seinem Lebensalter so sei. Ich hielt das für unmöglich ..."
"Das ist natürlich unmöglich", rief ein Zuhörer.

"Stellen Sie sich vor, es ist durchaus möglich. Mein Großvater hat es mir bewiesen. Wie alt war demnach jeder von uns?"

1.6 Eisenbahnfahrkarten

"Ich bin Eisenbahnerin und sitze am Fahrkartenschalter", begann die nächste Spielteilnehmerin. "Viele halten das für eine sehr einfache Sache. Sie ahnen nicht, wie groß die Anzahl der Fahrkarten ist, mit der es der Fahrkartenverkäufer selbst auf einer kleinen Station zu tun hat.

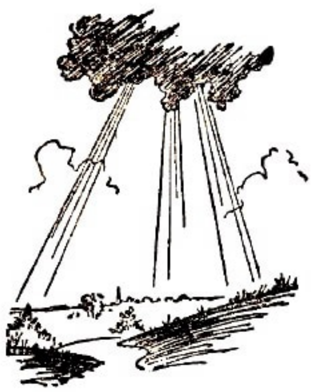
Die Reisenden müssen ja die Möglichkeit haben, von der betreffenden Station eine Fahrkarte bis zu jeder beliebigen Station derselben Strecke zu erhalten, und zwar in beiden Richtungen. Ich habe Dienst auf einer Strecke mit 25 Stationen.
Was meinen Sie wohl, wieviel verschiedene Arten von Fahrkarten die Bahn für alle ihre Schalter in Vorbereitung hat?"Jetzt begann der nächste:

1.7 Der Flug des Luftschiffs

"Ein Luftschiff stieg in Leningrad auf und flog direkt nach Norden. Nachdem es 500 Kilometer in nördlicher Richtung geflogen war, bog es nach Osten ab. Nachdem es wieder 500 Kilometer zurückgelegt hatte, machte das Luftschiff abermals eine Wendung - diesmal nach Süden - und flog in dieser Richtung ebenfalls 500 Kilometer. Dann schwenkte es nach Westen ein und landete, nachdem es auch in westlicher Richtung 500 Kilometer geflogen war.
Die Frage lautet:
Wo befindet sich die Landungsstelle des Luftschiffs im Verhältnis zu Leningrad - westlich, östlich, nördlich oder südlich?"
"Sie spekulieren auf einen Einfaltspinsel", ließ sich jemand vernehmen. "500 Schritte nach vorn, 500 nach rechts, 500 zurück und 500 nach links - wohin kommen wir auf solche Weise? Dorthin, von wo wir ausgegangen sind!"
"Wo ist also das Luftschiff gelandet?"
"Doch auf demselben Leningrader Flugplatz, von dem es aufgestiegen ist?"
"Eben nicht."
"Dann kann ich nichts mehr verstehen!"

"Etwas stimmt hier nicht", mischte sich ein Nachbar ein. "Ist das Luftschiff denn nicht in Leningrad gelandet? Würden Sie wohl die Aufgabe noch einmal wiederholen?"
Der Tischnachbar kam der Bitte bereitwillig nach. Die Teilnehmer hörten ihm aufmerksam zu und sahen sich ratlos an.
"Schön", sagte der Professor. "Bis zum Abendessen werden wir noch dazu kommen, über diese Aufgabe nachzudenken. Jetzt aber wollen wir fortfahren."

1.8 Der Schatten



"Erlauben Sie", sagte der Nächste, "dass ich dasselbe Luftschiff zum Gegenstand meiner Denkaufgabe nehme. Was ist länger — das Luftschiff oder sein Kernschatten?"
"Besteht hierin die ganze Denkaufgabe?"
"Jawohl.""Der Schatten ist natürlich länger als das Luftschiff"hatte jemand sofort die Lösung gefunden. "Die Sonnenstrahlen fallen ja fächerartig auf die Erde."
"Ich würde sagen", bemerkte ein anderer, "dass die Sonnenstrahlen, im Gegenteil, parallel sind. Das Luftschiff und sein Schatten sind von gleicher Länge."

"Was sagen Sie da? Haben Sie nie die Strahlen beobachtet. die von der Sonne ausgehen, wenn sich diese hinter einer Wolke verborgen hat? Dann sieht man ganz deutlich, wie die Strahlen auseinandergehen.
Der Schatten des Luftschiffs muss bedeutend länger sein als Luftschiff, ebenso wie der Schatten von der Wolke größer ist als die Wolke selbst."
"Warum wird denn allgemein angenommen, dass die Sonnenstrahlen parallel sind? Die Seeleute, die Astronomen - alle sind dieser Ansicht."
Der Vorsitzende unterbrach den Streit und erteilte dem Nächsten das Wort.

1.9 Eine Aufgabe mit Streichhölzern

Der an die Reihe gekommene Teilnehmer schüttete eine volle Streichholzschachtel auf dem Tisch aus und fing an, die Hölzer in drei Häufchen aufzuteilen.
"Wollen Sie etwa ein Feuer anzünden?" scherzten die Zuhörer.
"Bei meiner Denkaufgabe handelt es sich um Streichhölzer", erklärte der Sprecher. "Hier sehen Sie drei ungleiche Häufchen. In allen dreien zusammen sind 48 Streichhölzer. Wieviel es in den einzelnen Häufchen sind, sage ich Ihnen nicht. Statt dessen beachten Sie bitte folgendes:

Wenn ich aus dem ersten Häufchen ebenso viele Hölzer wegnehme und dem zweiten Häufchen hinzufüge, wie dort bereits vorhanden waren, wenn ich dann aus dem zweiten Häufchen ebenso viele dem dritten Häufchen hinzufüge, wie dort schon lagen, und wenn ich endlich aus dem dritten Häufchen zu dem ersten Häufchen so viele Hölzer hinüberlege, wie das erste Häufchen in diesem Augenblick enthielt - wenn ich alles dies ausgeführt habe, dann wird die Anzahl der Streichhölzer in allen Häufchen die gleiche sein. Wieviel sind nun ursprünglich in jedem Häufchen gewesen?"

1.10 Der tückische Baumstumpf

"Meine Denkaufgabe", begann der Nachbar des letzten Sprechers, "erinnert an eine Aufgabe, die mir vor langer Zeit einmal von einem Dorfschullehrer aufgegeben wurde. Es war eine spaßige Geschichte, die sich, wie er behauptete, im alten russischen Zarenreich (es kann auch in einem anderen Land gewesen sein) zugetragen haben soll. Ein Bauer trifft im Wald einen ihm unbekannten alten Mann. Sie kommen ins Gespräch. Der Alte mustert aufmerksam den Bauern und sagt:
"Ich weiß hier im Wald ein Baumstümpfchen, ein sehr wunderliches. Es hilft sehr in der Not."
"Wie hilft es? Heilt es Krankheiten?"
"Heilen, nein, heilen kann es nicht, aber Geld verdoppelt es. Man legt unter das Stümpfchen einen Beutel mit Geld, zählt bis hundert - und schon hat sich das Geld im Beutel verdoppelt. Solch eine Fähigkeit hat es. Ein wunderbares Baumstümpfchen!"

"Das möchte ich ausprobieren", sagte nachdenklich der Bauen
"Warum nicht? Das lässt sich machen. Aber gezahlt muss dafür werden."
"Muss viel gezahlt werden? Und an wen?"
"An den muss gezahlt werden, der den Weg zeigt. An mich also. Und wieviel, das ist eine andere Frage!"
Sie begonnen zu handeln. Als der Alte erfuhr, dass der Bauer nur wenig Geld im Beutel hatte, erklärte er sich mit 1 Rubel 20 Kopeken nach jeder Verdopplung einverstanden. Darauf einigten sie sich.
Der Alte führte den Bauern ins Innere des Waldes, irrte dort lange mit ihm umher und fand schließlich im Gebüsch den alten moosbedeckten Stumpf einer Tanne. Er nahm dem Bauern den Beutel ab und steckte ihn zwischen die Wurzeln des Stumpfes. Sie zählten bis hundert. Der Alte machte sich dann wieder am Stumpf zu schalten, scharrte lange an den Wurzeln herum und zog endlich den Beutel hervor, den er nun dem Bauern übergab.
Der Bauer blickte in den Beutel, und siehe da - das Geld hatte sich tatsächlich verdoppelt! Er zählte dem Alten den ihm versprochenen Betrag von 1 Rubel und 20 Kopeken ab und bat ihn, den Beutel nochmals unter den wundertätigen Baumstumpf zu stecken.

Abermals zählten sie bis hundert, abermals machte sich der Alte im Gebüsch am Baumstumpf zu schaffen, und abermals war das Wunder geschehen: Das Geld hatte sich verdoppelt. Der Alte bekam wiederum den verabredeten Betrag von 1 Rubel 20 Kopeken.
Ein drittes Mal wurde der Beutel unter den Baumstumpf gesteckt. Auch diesmal hatte sich das Geld verdoppelt. Aber nachdem der Bauer dem Alten die versprochene Vergütung ausgezahlt

hatte, war in dem Beutel keine einzige Kopeke mehr enthalten. Der arme Tropf hatte auf diese Weise sein ganzes Geld eingebüßt. Es gab nun nichts mehr zu verdoppeln, und der Bauer trottete traurig aus dem Wald nach Hause.

Das Geheimnis der zauberhaften Geldverdoppelung ist Ihnen natürlich klar: Nicht ohne Grund hat der Alte beim Herausziehen des Beutels so lange an den Wurzeln des Stumpfes herumhantiert. Können Sie aber auch die andere Frage beantworten:
Wieviel Geld besaß der Bauer, bevor die Versuche mit dem tückischen Baumstumpf begonnen?"

1.11 Eine Aufgabe über den Dezember

"Ich bin ein Sprachforscher, dem alle Mathematik fernliegt", begann ein älterer Mann, der jetzt an der Reihe war, eine Denkaufgabe zu stellen.
"Erwarten Sie also keine Rechenaufgabe von mir. Ich kann nur eine Frage aus dem mir bekannten Gebiet aufwerfen. Erlauben Sie, dass ich meine Aufgabe aus dem Kalender stelle?"
"Bitte sehr!"

"Der zwölfte Monat des Jahres wird Dezember genannt. Wissen Sie aber auch, was das Wort Dezember [1] bedeutet? Es kommt vom lateinischen Wort 'decem', das heißt zehn, und von diesem sind auch die Worte 'Dezimeter' (das ist ein Zehntelmeter), 'Dezimalsystem' und andere auf der Rechnung mit zehn beruhende Bezeichnungen abgeleitet. Es ergibt sich hieraus, dass der Dezember als zehnter Monat bezeichnet wird.
Wie ist diese Unstimmigkeit zu erklären?" Nun kam noch eine Denkaufgabe heran.

1.12 Die erdachte Zahl

"Ich bin als letzter an der Reihe. Zur Abwechslung will ich Ihnen ein Rechenkunststück verführen, dessen Geheimnis ich Sie aufzuklären bitte. Möge einer - Sie zum Beispiel, Herr Professor - auf einen Zettel, für mich nicht sichtbar, eine beliebige dreistellige Zahl schreiben."
"Darf die Zahl auch Nullen enthalten?"
"Ich mache keinerlei Einschränkungen. Eine beliebige dreistellige Zahl. Ganz nach Ihrem Gutdünken."
"Gemacht! Und weiter?"
"Schreiben Sie zu dieser Zahl die gleiche Zahl nochmals hin. Sie haben nunmehr eine sechsstellige Zahl vor sich."

[1] Da das Buch in russischer Sprache geschrieben ist, steht hier natürlich die russische Bezeichnung "dekabrj". Das Wort ist vom griechischen Wort "deka" abgeleitet, das gleichfalls zehn bedeutet. Ihr kennt es zum Beispiel von "Dekade", das sind zehn Tage.

"Ganz recht, eine sechsstellige Zahl."
"Geben Sie den Zettel jetzt einem, der möglichst weit von mir weg sitzt. Dieser soll die sechsstellige Zahl durch sieben teilen."
"Leicht gesagt: durch sieben teilen! Vielleicht ist das nicht möglich."
"Keine Sorge! Es geht ohne Rest auf."
"Sie kennen die Zahl nicht und wollen sicher sein, dass sie sich teilen lässt."
"Teilen Sie erst, dann reden wir weiter."
"Zu Ihrem Glück ist es aufgegangen."
"Das Resultat übergeben Sie nun, ohne es mir mitzuteilen, Ihrem Nachbarn. Er wird es durch elf teilen."
"Sie meinen wohl, Sie haben wieder Glück, und die Teilung geht auf?"
"Teilen Sie nur, es geht ohne Rest auf."
"Tatsächlich, ohne Rest! Und nun?"
"Reichen Sie das Resultat weiter. Wir teilen es, sagen wir mal, durch dreizehn."
"Das haben Sie nicht gut gewählt. Durch dreizehn lassen sich wenige Zahlen ohne Rest teilen ... Aber doch - es ist aufgegangen. Sie haben wirklich Glück!"
"Geben Sie mir den Zettel mit dem Resultat, aber falten Sie ihn so, dass ich die Zahl nicht sehen kann."
Ohne den Zettel auseinanderzufalten, überreichte der 'Zauberkünstler' ihn dem Professor. "Auf dem Zettel finden Sie die von Ihnen erdachte Zahl. Stimmt sie?"
"Vollkommen!" antwortete jener verwundert, nachdem er einen Blick auf den Zettel geworfen hatte.
"Genau diese Zahl habe ich mir gedacht ... Da die Reihe der Aufgabensteller nun beendet ist, erlauben Sie, dass ich unsere Versammlung schließe, zumal auch der Regen aufgehört hat. Die Lösungen der Denkaufgaben werden noch heute nach dem Abendessen bekanntgemacht. Zettel mit den Lösungen können Sie mir übergeben."

1.13 Auflösungen der Denkaufgaben 1.1 bis 1.12

1. Die Denkaufgabe mit dem Eichhörnchen auf der Wiese ist bereits gründlich aufgeklärt. Gehen wir zur nächsten über.

2. Man kann nicht, wie es viele tun, davon ausgehen, dass 8 Mark für 8 Liter Benzin, also 1 Mark für jedes Liter gezahlt wurden. Der Betrag wurde für den dritten Teil von 8 Litern gezahlt, da ja das Benzin von drei Personen in gleichem Ausmaß benutzt wurde.
Hieraus ergibt sich, dass die 8 Liter Benzin zusammen mit $8 \cdot 3$, das heißt mit 24 Mark bewertet wurden und dass der Unkostenbeitrag je Liter 3 Mark ausmacht. (In dem Preis von 3 Mark sollen sämtliche Spesen, wie Öl, Abnutzung des Wagens, eventuelle Reparaturen, enthalten sein.)

Hiernach ist leicht zu errechnen, wieviel jedem zukommt. Herr Fünfer hat für seine 5 Liter 15 Mark zu bekommen; aber für 8 Mark hat er selbst Benzin verbraucht, und ihm sind daher $15 - 8$, also 7 Mark auszuzahlen.
Herr Dreier hat für die von ihm gegebenen 3 Liter 9 Mark zu erhalten; wenn man aber die 8 Mark berücksichtigt, die ihm für die Benutzung des Autos anzurechnen sind, hat er nur Anspruch auf $9 - 8$, also 1 Mark.
Bei einer richtigen Teilung hat demnach Herr Fünfer 7 Mark und Herr Dreier 1 Mark zu bekommen.

3. Die Frage, nach wieviel Tagen alle fünf Arbeitsgemeinschaften wieder gleichzeitig in der Schule zusammentreffen, ist leicht zu beantworten, wenn wir die kleinste Zahl finden, die sich ohne Rest durch 2, durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilen lässt.
Es ist nicht schwer herauszubekommen, dass dies die Zahl 60 ist. Am 61. Tage treffen also die fünf Gruppen erneut zusammen: die Biologiegruppe nach 30 zweitägigen, die Modellbaugruppe nach 20 dreitägigen, die Physikgruppe nach 15 viertägigen, die geographische nach 12 fünftägigen und die Gruppe für Elektrotechnik nach 10 sechstägigen Unterbrechungen.

Früher als nach 60 Tagen ergibt sich ein solcher Abend nicht. Ein gleicher Abend wird sich nach abermals 60 Tagen, das heißt also erst im zweiten Quartal wiederholen. Im Laufe des ersten Quartals gibt es somit nur einen einzigen Abend, an dem alle fünf Gruppen wieder im Klub zu ihren Übungen zusammentreffen.

Mehr Mühe macht es, die Frage zu beantworten, an wieviel Tagen keine Gruppenabende stattgefunden haben. Um dies festzustellen, muss man der Reihe nach alle Zahlen von 1 bis 90 aufschreiben und die Abende der Biologiegruppe, als die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 und so weiter abstreichen.
Hierauf streicht man die Abende der Modellbaugruppe ab, das heißt die Zahlen 4, 10 und so weiter (die 7 war bereits abgestrichen). Nachdem wir dann auch noch die Abende für Physik, Geographie und Elektrotechnik abgestrichen haben, bleiben nur die Tage des ersten Quartals stehen, an denen keiner der Gruppenabende stattgefunden hat.

Wer sich diese Arbeit macht, wird feststellen, dass die Anzahl der freien Abende im ersten Quartal ziemlich groß war: 24.
Im Januar waren es acht freie Abende, und zwar: am 2., 8., 12., 14., 18., 20., 24. und 30. Im

Februar kommen wir auf sieben und im März auf neun freie Abende.
Wir haben dabei der Einfachheit halber angenommen, dass die Gruppenabende auch sonntags stattfinden. Ihr könnt aber jetzt leicht selber feststellen, wie die Rechnung ohne Sonntags aussieht, wenn wir annehmen, dass der 1. Januar ein Sonntag ist.

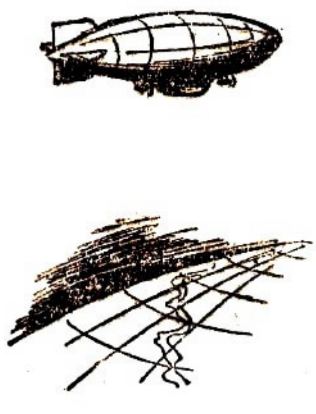
4. Beide haben die gleiche Anzahl Passanten gezählt. Derjenige, der an der Haustür stand, hat zwar die Vorüberkommenden in beiden Richtungen gezählt, aber dafür sind dem anderen, der auf und ab ging, alle diese Passanten begegnet.

5. Auf den ersten Blick könnte man wirklich meinen, dass an der Aufgabe etwas nicht stimmt:
Es hat den Anschein, als ob der Großvater und der Enkel gleichaltrig seien. Die Bedingungen der Aufgabe lassen sich, wie wir gleich sehen werden, indessen leicht in Einklang bringen.
Der Enkel ist offenbar im 20. Jahrhundert geboren. Die ersten beiden Ziffern seines Geburtsjahres heißen demnach 1 und 9. Die durch die restlichen Ziffern ausgedrückte Zahl muss, wenn man sie zweimal nimmt, 32 ergeben.

Es ist also die Zahl 16. Der Enkel ist demnach im Jahre 1916 geboren und im Jahre 1932 16 Jahre alt gewesen.

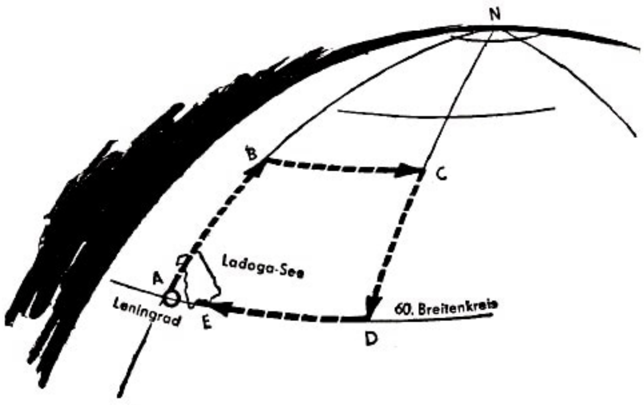
Vom Großvater müssen wir annehmen, dass er im 19. Jahrhundert geboren ist. Die ersten beiden Ziffern seines Geburtsjahres sind demnach 1 und 8. Verdoppelt muss die durch die restlichen Zittern ausgedrückte Zahl 132 (100 Jahre des 19. Jahrhunderts + 32 Jahre des 20. Jahrhunderts) ausmachen.
Die in Frage kommende Zahl entspricht also der Hälfte von 132, das ist 66. Der Großvater ist im Jahre 1866 geboren und war im Jahre 1932 66 Jahre alt. Somit entsprach das Alter sowohl des Großvaters als auch des Enkels im Jahre 1932 der Zahl, die durch die beiden letzten Ziffern ihres Geburtsjahres ausgedrückt wird.

6. Auf jeder der 25 Stationen können die Reisenden nach einer beliebigen Station, das heißt nach 24 Orten gelangen. Es müssen infolgedessen $25 \cdot 24 = 600$ verschiedene Fahrkarten gedruckt werden.



7. Diese Aufgabe birgt keinerlei Widersprüche. Man darf nicht annehmen, dass das Luftschiff nach dem Schema eines Quadrats geflogen ist, sondern muss die Kugelgestalt der Erde berücksichtigen. Nach Norden zu nähern sich die Meridiane (siehe Zeichnung).
Nachdem das Luftschiff auf einem Breitenkreis, der sich 500 Kilometer nördlich der Breite von Leningrad erstreckt, 500 Kilometer geflogen war, hatte es sich infolgedessen nach Osten um mehr Längengrade entfernt, als es nachher beim abermaligen Erreichen der Breite von Leningrad in umgekehrter Richtung geflogen war.
Im Resultat befand sich das Luftschiff am Ende seines Fluges an einem Punkt, der östlich von Leningrad liegt.

Und wie weit östlicher? Das lässt sich errechnen.
Auf der Zeichnung seht ihr die Flugstrecke des Luftschiffes $ABCDE$. Der Punkt N bezeichnet den Nordpol. An diesem Punkt vereinigen sich die Meridiane AB und DC. Das Luftschiff ist zuerst 500 Kilometer nach Norden, das heißt längs des Meridians AN geflogen. Da ein Grad des Meridians 111 Kilometer lang ist, enthält ein Meridianbogen von 500 Kilometern den 111. Teil, also 4,5 Grad.
Leningrad liegt auf dem 60. Breitenkreis; der Punkt B befindet sich also auf 60 Grad + 4,5 Grad = 64,5 Grad. Dann flog das Luftschiff nach Osten, das heißt längs des Breitenkreises BC, und legte auf dieser Strecke 500 Kilometer zurück.



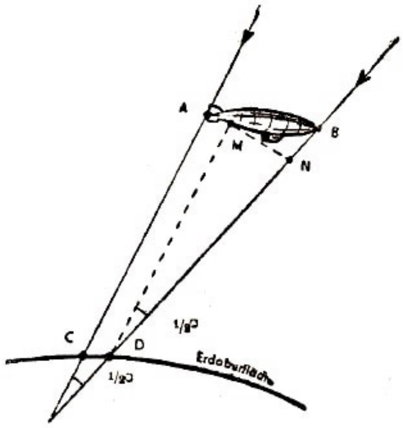
Die Länge eines Bogengrades auf diesem Breitenkreis kann man errechnen oder aus Tabellen ersehen; sie entspricht 48 Kilometern. Hiernach ist leicht festzustellen, um wieviel Bogengrade das Luftschiff nach Osten geflogen ist, nämlich 500 : 48, also 10,4 Grad.

Anschließend ist das Luftschiff in südlicher Richtung, das heißt längs des Meridians CD geflogen, worauf es sich nach einem Flug über 500 Kilometer abermals auf dem Breitenkreis von Leningrad befinden musste.
Nun führt der Weg nach Westen, das heißt die Linie AD entlang. Diese Linie ist offensichtlich länger als 500 Kilometer. Sie enthält ebensoviel Bogengrade wie die Linie BC, nämlich 10,4 Grad. Aber die Länge eines Bogengrades auf dem 60. Breitenkreis beträgt 55,5 Kilometer.
Demnach beträgt die Entfernung zwischen den Punkten A und D $55,5 \cdot 10,4 = 577$ Kilometer.
Wir sehen, dass das Luftschiff nicht in Leningrad landen konnte. Es hat die übriggebliebene Strecke von 77 Kilometern nicht überflogen, sondern ist noch vor Leningrad auf dem Ladogasee niedergegangen.

8. Bei der Besprechung dieser Aufgabe ist den Teilnehmern eine Reihe von Fehlern unterlaufen. Es trifft nicht zu, dass die auf die Erde niederfallenden Sonnenstrahlen merkbar auseinandergehen.
Die Erde ist im Verhältnis zu ihrer Entfernung von der Sonne so klein, dass die Sonnenstrahlen, die irgendeinen Teil ihrer Oberfläche treffen, nur in einem unmerklich kleinen Winkel auseinandergehen; praktisch kann man die Sonnenstrahlen als parallel ansehen. Wenn uns die hinter einer Wolke herausbrechenden Sonnenstrahlen fächerartig erscheinen, so liegt dies lediglich an der Perspektive.

In der Perspektive sieht es aus, als ob parallele Linien sich vereinigen; man denke nur an die sich in der Ferne verlaufenden Eisenbahnschienen oder an den Anblick einer langen Allee.

Daraus aber, dass die Sonnenstrahlen auf die Erde parallel niederfallen, ergibt sich durchaus nicht, dass der Kernschatten des Luftschiffes von der gleichen Länge sein muss wie das Luftschiff selbst.
Wenn ihr die Zeichnung anseht, werdet ihr erkennen, dass sich der auf die Erde niederfallende Schatten des Luftschiffes im Raum verengt und daher kürzer sein muss als das Luftschiff selbst: CD ist kürzer als AB.



Falls die Höhe des Luftschiffes bekannt ist, lässt sich auch feststellen, wie groß der Unterschied ist.
Nehmen wir an, das Luftschiff befände sich in einer Höhe von 1000 Metern über der Erdoberfläche. Der Winkel, der von den Geraden AC und BD gebildet wird, entspricht dem Winkel, unter dem man die Sonne von der Erde aus sieht; dieser Winkel ist bekannt: etwa 1/2 Grad.
Andererseits weiß man, dass jeder Gegenstand, den man unter einem Winkel von 1/2 Grad sieht, sich vom Auge in einer Entfernung befindet, die das 115fache seines Durchmessers beträgt.

Der Ausschnitt MN (diesen Ausschnitt sieht man von der Erde aus unter dem Winkel von 1/2 Grad) entspricht also dem 115. Teil von AC. Die Linie AC ist länger als eine solche, die vom Punkt A senkrecht zur Erde führen würde.
Wenn der Winkel zwischen der Richtung der Sonnenstrahlen und der Erdoberfläche 45 Grad beträgt, ist die Länge der Linie AC (falls sich das Luftschiff in 1000 m Höhe befindet) etwa 1400 m, und der Ausschnitt MN beträgt dann $\frac{1400}{115}$, also 12 m.

Aber das Stück, um das die Länge des Luftschiffes diejenige des Schaffens übertrifft, nämlich der Ausschnitt MB, ist größer als der Ausschnitt MN, und zwar 1,4 mal größer, weil der Winkel MBD fast genau 45 Grad ausmacht. MB ist demnach gleich 12 $\cdot 1,4$; das ergibt nahezu 17 m.

Alles hier Gesagte bezieht sich auf den Kernschatten des Luftschiffes, einen dunklen und scharfen Schatten, und hat nichts mit dem sogenannten Halbschatten zu tun, der schwach und verschwommen erscheint.
Unsere Berechnung zeigt übrigens, dass, wenn sich an Stelle des Luftschiffes ein kleiner Luftballon mit einem Durchmesser von weniger als 17 m befände, dieser überhaupt keinen vollen Schatten werfen würde: man sähe nur seinen unklaren Halbschatten.

9. Bei der Lösung dieser Aufgabe beginnt man am Ende. Wir gehen davon aus, dass nach den Umgruppierungen die Anzahl der Streichhölzer in allen Häufchen die gleiche war. Da sich die Gesamtzahl der Hölzchen, nämlich 48, durch die Umgruppierung nicht verändert hat, enthielt also jedes der drei Häufchen zum Schluss 16 Hölzchen.
Es ergibt sich demnach folgendes Bild:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
16	16	16

Unmittelbar vorher sind dem 1. Häufchen soviel Hölzchen hinzugefügt worden, wie es bereits enthielt; mit anderen Worten, die Anzahl seiner Hölzchen wurde verdoppelt. Bis zur letzten

Umgruppierung enthielt das 1. Häutchen nicht 16, sondern 8 Hölzchen. Im 3. Häufchen dagegen, dem 8 Hölzchen entnommen wurden, haben sich zuvor 16 + 8 = 24 Streichhölzer befunden.
Nunmehr ergibt sich folgende Verteilung:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
8	16	24

Weiter: Wir haben gehört, dass vorher aus dem 2. Häufchen so viele Hölzer zu dem 3. Häufchen hinübergelegt wurden, wie dort bereits vorhanden waren. Demnach ist 24 die verdoppelte Anzahl der Hölzchen, die sich vor der Umgruppierung im 3. Häufchen befunden haben. Es ergibt sich die Verteilung der Hölzchen nach der ersten Umgruppierung:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
8	16+12=28	12

Hiernach ist leicht festzustellen, dass vor der ersten Umgruppierung (das heißt bevor aus dem 1. Häufchen so viele Hölzchen ins 2. Häufchen gelegt wurden, wie es bereits enthielt) die Verteilung der Hölzchen folgendermaßen aussah:

1. Häufchen	2. Häufchen	3. Häufchen
22	14	12

Diese Zahlen entsprechen der Anzahl der Streichhölzer, die sich ursprünglich in den einzelnen Häufchen befunden haben.

10. Auch diese Denkaufgabe ist am einfachsten vom Ende aus zu lösen. Wir wissen, dass sich nach der dritten Verdoppelung 1 Rubel 20 Kopeken im Beutel befanden (diesen Betrag erhielt der Alte beim letzten Mal).
Wieviel Geld war es also vor dieser Verdoppelung?
Selbstverständlich 60 Kopeken. Diese 60 Kopeken blieben übrig, nachdem dem Alten zum zweitenmal 1 Rubel 20 Kopeken ausgezahlt waren, so dass sich vor der Auszahlung 1 Rubel 20 Kopeken + 60 Kopeken = 1 Rubel 80 Kopeken im Beutel befanden.

Weiter: 1 Rubel 80 Kopeken befanden sich im Beutel nach der zweiten Verdoppelung; vorher waren im ganzen 90 Kopeken übriggeblieben, nachdem der Alte erstmalig 1 Rubel 20 Kopeken erhalten hatte.
Vor der Auszahlung an den Alten befanden sich folglich 90 Kopeken + 1 Rubel 20 Kopeken = 2 Rubel 10 Kopeken im Beutel. Dies ist der Betrag, der nach der ersten Verdoppelung vorhanden war, während sich vorher um die Hälfte weniger, das heißt 1 Rubel 5 Kopeken im Beutel befanden.
Und eben mit diesem Betrag hat der Bauer sein missglücktes Geldgeschäft begonnen. Machen wir die Gegenprobe:

Inhalt des Beutels:	1 Rubel 5 Kopeken
Nach der 1. Verdoppelung:	1 Rubel 5 Kopeken · 2 = 2 Rubel 10 Kopeken
Nach der 1. Zahlung:	2 Rubel 10 Kopeken - 1 Rubel 20 Kopeken = 90 Kopeken
Nach der 2. Verdoppelung:	90 Kopeken · 2 = 1 Rubel 80 Kopeken
Nach der 2. Zahlung:	1 Rubel 80 Kopeken - 1 Rubel 20 Kopeken = 60 Kopeken
Nach der 3. Verdoppelung:	60 Kopeken · 2 = 1 Rubel 20 Kopeken
Nach der 3. Zahlung:	1 Rubel 20 Kopeken - 1 Rubel 20 Kopeken = 0

12. Unser Kalender ist aus dem Kalender der alten Römer hervorgegangen. Die alten Römer aber begannen das Jahr (bis zu Julius Cäsar) nicht mit dem 1. Januar, sondern mit dem 1. März. Infolgedessen war der Dezember damals der zehnte Monat.
Nach der Vorverlegung des Jahresbeginns auf den 1. Januar im Jahre 46 vor unserer Zeitrechnung wurden die Monatsnamen unverändert beibehalten. Hierauf ist es zurückzuführen, dass bei einigen Monaten eine Unstimmigkeit zwischen ihren Namen und ihrer Stellung im Jahresablauf besteht, wie es aus der nachstehenden Tabelle hervorgeht:

	Name des Monats	Bedeutung
9. Monat	September	siebenter
10. Monat	Oktober	achter
11. Monat	November	neunter
12. Monat	Dezember	zehnter

11. Wiederholen wir, was mit der gedachten Zahl vorgenommen wurde. Gleich zu Anfang wurde zu dieser dreistelligen Zahl dieselbe Zahl nochmals hinzugefügt. Das ist dasselbe, als ob man hinter die Zahl drei Nullen setzt und dann die ursprüngliche Zahl hinzuzählt, zum Beispiel:

$$872872 = 872000 + 872.$$

Nun sehen wir, was eigentlich mit der Zahl vorgenommen wurde: Man hat sie mit 1000 multipliziert und sie dann ein weiteres Mal hinzugefügt; kürzer gesagt, man hat sie mit 1001 multipliziert.
Und was wurde mit dem Ergebnis weiter gemacht? Man teilte es der Reihe nach durch 7, durch 11 und durch 13.
Das läuft schließlich darauf hinaus, dass man es durch $7 \cdot 11 \cdot 13$, das heißt durch 1001 geteilt hat.
Die fragliche Zahl wurde also zuerst mit 1001 multipliziert und anschließend durch 1001 geteilt. Ist es da verwunderlich, dass als Ergebnis die ursprüngliche Zahl herauskam?

2 DREI RECHENKUNSTSTÜCKE

Nachdem wir das Kapitel über die im Erholungsheim vorgebrachten Denkaufgaben abgeschlossen haben, wollen wir auch noch drei Rechenkunststücke mitteilen, mit denen ihr euren Freunden die Zeit vertreiben könnt. Zwei bestehen im Erraten von Zahlen, beim dritten sind die Eigentümer von Gegenständen ausfindig zu machen.
Es handelt sich um alte, euch vielleicht sogar bekannte Rechenkunststücke, aber wahrscheinlich sind sich nicht alle darüber im klaren, worauf sie beruhen.
Ohne die theoretische Grundlage eines Rechenkunststückes zu kennen, kann man es aber nicht bewusst und sicher durchführen. Die Ergründung des ersten Kunststückes erfordert einen sehr bescheidenen und durchaus nicht anstrengenden Ausflug in das Gebiet der Anfangsgründe der Algebra.

2.1 Die durchgestrichene Ziffer

Fordere einen deiner Freunde auf, sich irgendeine mehrstellige Zahl zu denken. Nehmen wir an, er habe die Zahl 847 gewählt.
Von dieser Zahl soll er jetzt die Quersumme (8 + 4 + 7 = 19) ermitteln und sie von der gedachten Zahl abziehen. Er kommt dann auf 847 - 19 = 828.

Von der so ermittelten Zahl soll dein Freund jetzt eine beliebige Ziffer durchstreichen und dir die übrigen Ziffern mitteilen. Du bist dann in der Lage, ihm sofort die fehlende Ziffer zu nennen, obwohl du die gedachte Zahl nicht kennst und nicht gesehen hast, was mit ihr vorgenommen wurde.

Auf welche Weise ist das möglich, und wie ist dieses Rätsel zu erklären?

Die Suche ist sehr einfach. Du findest die Ziffer heraus, die zusammen mit der Summe der dir mitgeteilten Ziffern die nächste Zahl ergibt, die sich ohne Rest durch 9 teilen lässt.
Wenn zum Beispiel an der Zahl 828 die erste Ziffer (8) durchgestrichen wurde und dir die Ziffern 2 und 8 genannt sind, ermittelst du, dass nach einer Addition der Ziffern (2 + 8 = 10) die nächste Zahl, die sich durch 9 teilen lässt, 18 ist, und dass zu dieser Zahl 8 fehlen. 8 ist zugleich die durchgestrichene Ziffer.

Warum sich das so ergibt? Aus folgendem Grunde:
Wenn man von einer beliebigen Zahl ihre Quersumme abzieht, muss eine Zahl übrigbleiben, die sich durch 9 teilen lässt, mit anderen Worten eine solche, deren Ziffern in ihrer Quersumme eine durch 9 teilbare Zahl ergeben. Und in der Tat: Bezeichnen wir einmal bei der gedachten Zahl die Ziffer der Hunderter mit a, die Ziffer der Zehner mit b und die Ziffer der Einer mit c. Die Anzahl der Einer in dieser Zahl ist also

$$100a + 10b + c.$$

Nun wird von dieser Zahl die Summe ihrer Ziffern $a + b + c$ abgezogen:

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$$

lässt sich natürlich durch 9 teilen. Wenn von einer Zahl die Summe ihrer Ziffern abgezogen wird, muss sich stets ein Rest ergeben, der sich durch 9 teilen lässt.
Es kann bei diesem Rechenkunststück vorkommen, dass auch schon die Summe der dir mitgeteilten Ziffern durch 9 teilbar ist (zum Beispiel 4 und 5).
In einem solchen Falle handelt es sich bei der durchstrichenen Ziffer entweder um eine 0 oder um eine 9. Die Antwort muss daher lauten: 0 oder 9.

Hier noch einmal dasselbe Rechenkunststück in abgeänderter Form:
Anstatt von der gedachten Zahl die Summe ihrer Ziffern abzuziehen, kann man eine Zahl zum Abzug bringen, die sich aus einer beliebigen Umstellung der Zittern ergibt.
Aus der Zahl 8247 zum Beispiel kann man durch Umstellung der Zittern die Zahl 2748 bilden und diese von der ursprünglichen Zahl abziehen. (Wenn die neugebildete Zahl größer als die ursprüngliche ist, wird die kleinere von der größeren abgezogen.)
Weiter verfährst du in gleicher Weise wie bei dem ersten Beispiel: 8247 - 2748 = 5499. Wenn die Ziffer 4 durchgestrichen wurde und dir die Ziffern 5, 9, 9 genannt sind, stellst du fest, dass die Summe dieser Ziffern 23 beträgt und dass die nächste durch 9 teilbare Zahl 27 ist. Die durchgestrichene Zahl ist also 27 - 23 = 4.

2.2 Das Erraten einer Zahl

Veranlasse deinen Freund, sich eine dreistellige Zahl zu denken, deren erste und dritte Ziffer nicht Nullen sind und sich um mindestens zwei Ziffern unterscheiden, und dazu eine zweite Zahl zu bilden, die die gleichen Ziffern, nur in umgekehrter Reihenfolge enthält.
Nun soll er die kleinere Zahl von der größeren abziehen. Dann ist die sich ergebende Restzahl mit der Zahl in umgekehrter Ziffernfolge zu addieren. Ohne deinem Kameraden irgendeine Frage zu stellen, teilst du ihm dann das Endresultat mit.

Wenn sich dein Freund zum Beispiel die Zahl 467 gedacht hätte, müsste er folgende Rechnung ausführen:

$$467; \quad 764; \quad 764 - 467 = 297; \qquad 297 + 792 = 1089$$

Dieses Endresultat hast du deinem Kameraden auch mitgeteilt. Wie ließ es sich ermitteln?

Betrachten wir die Aufgabe in allgemeiner Form. Wir nehmen eine Zahl mit den Ziffern a, b, c. Sie wird sich folgendermaßen darstellen: $100a + 10b + c$

Mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern sieht die Zahl so aus: $100c + 10b + a$

Die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist $99a - 99c$

Wir nehmen nun folgende Umgestaltungen vor:

$$\begin{aligned}99a - 99c &= 99(a-c) = 100(a-c) - (a-c)\\ &= 100(a-c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c = 100(a-c-1) + 90 + (10a + c)\end{aligned}$$

Die Differenz besteht demnach aus folgenden drei Ziffern:

Ziffer der Hunderter:	$a - c - 1$
Ziffer der Zehner:	9
Ziffer der Einer:	$10 + c - a$

Mit umgekehrter Reihenfolge der Ziffern stellt sich die Zahl folgendermaßen dar: $100(10+c-a) + 90 + (a-c-1)$. Die Addition beider Formeln

$$100(a-c-1) + 90 + (10a + c) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$$

ergibt $100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089$.

Wie immer die Ziffern a, b, c lauten mögen, das Endergebnis ist jedesmal das gleiche: 1089. Somit ist es nicht schwer, das Resultat der Ausrechnungen zu erraten: du weißt es im voraus. Begreiflicherweise lässt sich dieses Rechenkunststück nicht zweimal im selben Kreise vorführen; das Geheimnis würde entdeckt werden.

2.3 Wer hat was genommen?

Zur Vorführung dieses Kunststücks muss man drei kleine Gegenstände bei der Hand haben, die sich bequem in die Tasche stecken lassen - zum Beispiel einen Bleistift, einen Schlüssel und ein Taschenmesser.

Außerdem wird ein Teller mit 24 Nüssen auf den Tisch gestellt; wenn Nüsse nicht vorhanden sind, kann man statt ihrer auch Dominosteine, Zündhölzchen oder dergleichen nehmen.
Du forderst drei Freunde auf, während deiner Abwesenheit aus dem Zimmer je einen der vorgenannten Gegenstände in ihre Tasche zu verbergen, und erbietest dich zu erraten, wer welchen Gegenstand genommen hat.

Das weitere spielt sich folgendermaßen ab: Nachdem deine Freunde die Gegenstände in die Tasche gesteckt haben und du ins Zimmer zurückgekehrt bist, beginnst du zunächst damit, dass du ihnen einige Nüsse aus dem Teller zur Aufbewahrung aushändigst.
Dem ersten gibst du eine Nuss, dem zweiten zwei und dem dritten drei Nüsse. Dann verlässt du erneut das Zimmer, nachdem du deinen Freunden zuvor folgende Anweisung gegeben hast: Jeder von ihnen soll sich vom Teller weitere Nüsse nehmen, und zwar in folgender Anzahl: der Inhaber des Bleistifts nimmt genausoviel Nüsse, wie ihm ausgehändigt wurden; der Inhaber des Schlüssels nimmt die doppelte Anzahl der ihm ausgehändigten Nüsse und der Inhaber des Taschenmessers die vierfache Anzahl der ihm übergebenen Nüsse. Die restlichen Nüsse bleiben auf dem Teller.

Sobald das getan ist und du zur Rückkehr aufgefordert wurdest, wirfst du beim Eintritt ins Zimmer einen Blick auf den Teller und sagst jedem der Freunde, welchen Gegenstand er in der Tasche verborgen hat.
Dieses Kunststück ist um so verblüffender, als es ohne jede heimliche Mithilfe ausgeführt wird und niemand da ist, der dir etwa verabredete Zeichen geben könnte. Es enthält keinerlei Vortäuschung, sondern beruht ausschließlich auf mathematischer Berechnung.
Du ermittelst den Inhaber jedes einzelnen Gegenstandes einzig und allein auf Grund der Anzahl der auf dem Teller zurückgebliebenen Nüsse. Diese Anzahl ist nicht groß (zwischen 1 und 7) und kann auf den ersten Blick festgestellt werden.
Aber wie ist es möglich, an Hand der restlichen Nüsse zu ermitteln,wer welchen Gegenstand genommen hat?

Sehr einfach: Je nachdem, wie die Gegenstände auf die Freunde verteilt sind, ergibt sich eine unterschiedliche Zahl restlicher Nüsse. Wir werden uns hiervon gleich überzeugen.
Nehmen wir an, deine Freunde heißen Dieter, Georg und Klaus.
Wir bezeichnen sie mit den Anfangsbuchstaben der Namen: D, G, K. Die Gegenstände bezeichnen wir ebenfalls durch Buchstaben: den Bleistift mit a, den Schlüssel mit b, das Messer mit c. Wie können die Gegenstände unter drei Personen verteilt sein? Auf sechs Arten:

D	G	K
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Die vorstehende Tabelle erschöpft alle Umstellungsmöglichkeiten. Wir untersuchen nun, welche Restzahlen jeder einzelne dieser sechs Möglichkeiten entsprechen.

DGK	Anzahl der genommenen Nüsse	Summe	Rest
abc	$1+1=2, 2+4=6; 3+12=15$	23	1
acb	$1+1=2; 2+8=10; 3+6=9$	21	3
bac	$1+2=3; 2+2=4; 3+12=15$	22	2
bca	$1+2=3; 2+8=10; 3+3=6$	19	5
cab	$1+4=5; 2+2=4; 3+6=9$	18	6
cba	$1+4=5; 2+4=6; 3+3=6$	17	7

Du siehst, dass die Restzahl jedesmal anders ist. Ist die Restzahl festgestellt, gehst du nochmals, zum drittenmal, aus dem Zimmer und blickst in dein Notizbuch, in dem die vorstehend aufgeführte Tabelle enthalten ist (eigentlich brauchst du nur die erste und letzte Rubrik).
Sie im Gedächtnis zu behalten ist schwer und auch nicht erforderlich. Aus der Tabelle ersiehst du, wer welchen Gegenstand in der Tasche hat. Wenn sich zum Beispiel auf dem Teller 5 restliche Nüsse befinden, so besagt dies (der Fall b, c, a), dass sich der Schlüssel bei Dieter, das Messer bei Georg, der Bleistift bei Klaus befinden.

Damit das Kunststück gelingt, musst du dir genau merken, wieviel Nüsse du jedem deiner Freunde gegeben hast. Es empfiehlt sich daher, die Verteilung nach dem Alphabet vorzunehmen, wie wir es auch im vorliegenden Fall getan haben.

3 NOCH EIN PAAR DENKAUFGABEN

3.1 Der Bindfaden

Diese Aufgabe stammt von dem englischen Erzähler Barry Peine.

"Schon wieder Bindfaden?" fragte die Mutter und zog die Hände aus dem Wäschekübel. "Man könnte meinen, ich bestünde aus Bindfaden. Dauernd dasselbe: Bindfaden und nochmals Bindfaden. Ich habe dir doch gestern ein tüchtiges Knäuel gegeben. Wozu brauchst du eine solche Unmenge? Was hast du damit gemacht?"

"Was ich damit gemacht habe?" entgegnete der Junge. "Erstens hast du die Hälfte selbst wieder zurückgenommen."
"Ja, was meinst du denn, womit ich die Wäschepakete verschnüren sollte?"
"Und die Hälfte von dem, was übriggeblieben ist, hat Tom genommen, weil er im Tümpel Stichlinge angeln wollte."
"Seinem älteren Bruder darf man nichts abschlagen."
"Ich hab's auch nicht getan. Es war ganz wenig übriggeblieben, und auch davon hat noch die Hälfte der Vater genommen, um seine Hosenträger zu reparieren, die ihm gerissen sind, als er so über die Panne mit dem Auto lachte. Und dann brauchte die Schwester vom Rest noch zwei Fünftel, um den Haarknoten zusammenzubinden."
"Und was hast du mit dem Rest angefangen?"
"Mit dem Rest? Übriggeblieben waren ja nur noch dreißig Zentimeter! Und aus solch einem Endchen soll man eine Telefonleitung machen ..."
Wie lang war der Bindfaden ursprünglich?

3.2 Die Lebensdauer des Haars

Wieviel Haare hat der Mensch durchschnittlich auf dem Kopf? Man hat das berechnet: etwa 150000.
Mancher wird sich vielleicht wundern, dass man das feststellen konnte; sollten wirklich alle Haare eins nach dem anderen gezählt sein?
Nein, das nicht; man hat nur gezählt, wieviel Haare sich auf einem Quadratzentimeter der Kopffläche befinden. Wenn man dies weiß und außerdem die mit Haaren bedeckte Fläche kennt, ist es nicht schwer, die Durchschnittszahl der Haare auf dem Kopf festzustellen. Kurz

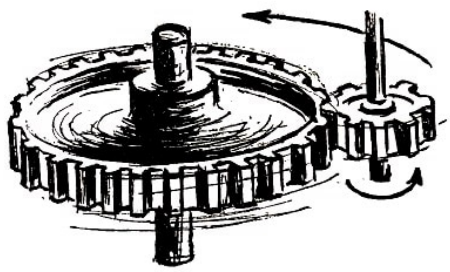
gesagt, die Zahl der Haare ist von den Anatomen mit derselben Methode berechnet worden, die bei der Forstkultur zum Zählen der Bäume angewandt wird.
Festgestellt ist auch, wieviel Haare durchschnittlich im Monat ausfallen: etwa 3000.
Auf welche Weise kann man an Hand dieser Unterlagen berechnen, wie lange sich jedes Haar - im Durchschnitt natürlich - auf dem Kopf hält?

3.3 Zwei Arbeiter

Zwei Arbeiter, ein alter und ein junger, wohnen im selben Hause und arbeiten in derselben Fabrik. Der junge Arbeiter braucht für den Weg vom Hause bis zur Fabrik 20, der alte 30 Minuten.
In wieviel Minuten holt der junge den alten ein, wenn letzterer 5 Minuten eher aus dem Hause gegangen ist?

3.4 Die beiden Zahnräder

Ein Zahnrad mit 8 Zähnen ist mit einem Rad verbunden, das 24 Zähne hat (siehe Zeichnung).



Wie oft dreht sich das Zahnrädchen mit seinen 8 Zähnen um seine eigene Achse, bis es einmal um das große Zahnrad herumkommt?

3.5 Wie alt?

Ein Freund von Denkaufgaben wurde gefragt, wie alt er sei. Die Antwort war verwickelt:
"Multiplizieren Sie mein Alter nach drei Jahren mit drei und ziehen Sie davon mein mit drei multipliziertes Alter von vor drei Jahren ab - dann haben Sie gerade mein jetziges Alter."
Wie alt ist er?

3.6 Vater und Tochter

"Wie alt ist eigentlich Herr Schulze?"
"Wir wollen einmal überlegen. Vor achtzehn Jahren, als ich ihn kennenlernte, war er, wie ich mich erinnere, genau dreimal so alt wie seine Tochter."
"Wie ist das möglich? Soviel ich weiß, ist er jetzt gerade doppelt so alt wie seine Tochter. Hat er vielleicht noch eine zweite Tochter?"
"Nein, er hat nur die eine - und es ist daher auch nicht schwer festzustellen, wie alt Vater und Tochter sind."
Nun, wie alt sind sie wohl?

3.7 Socken und Handschuhe

In einem Textilgeschäft liegen in einer Schublade 10 Paar braune und 10 Paar schwarze Socken, in der anderen 10 Paar braune und ebensoviel Paar schwarze Handschuhe.
Wieviel Socken und Handschuhe müssen aus jeder Schublade genommen werden, um je ein Paar Socken und Handschuhe (gleich welcher Farbe) zusammenzustellen?

3.8 Der Monatsverdienst

Als Anfängerin habe ich im vergangenen Monat einschließlich der Überstunden 250 Mark verdient Das Grundgehalt macht 200 Mark mehr aus als die Überstunden.
Wie hoch ist mein Verdienst ohne Überstunden!

3.9 Der Schilauf

Ein Schiläufer hat berechnet, dass er, wenn er 10 km in der Stunde laufen würde, eine Stunde nach 12 Uhr mittags am Bestimmungsort ankäme; bei einer Geschwindigkeit von 15 km in der Stunde würde er hingegen eine Stunde vor 12 Uhr mittags eintreffen.
Mit welcher Geschwindigkeit muss er laufen, um genau um 12 Uhr mittags einzutreffen?

3.10 Das Abtippen des Berichts

Zwei Maschinenschreiberinnen wurde des Abtippen eines Berichts übertragen. Die geübtere von ihnen könnte die ganze Arbeit in zwei Stunden, die weniger geübte in drei Stunden ausführen. Wieviel Zell benötigen Sie für das Abschreiben des Berichts, wenn sie die Arbeit so verteilen, dass sie sich innerhalb der kürzesten Frist ausführen lässt?

Aufgaben dieser An werden in der Regel nach dem Muster der bekannten Aufgabe von der Badewanne und den beiden Wasserhähnen gelöst. Man würde also in diesem Falle feststellen, welchen Teil der ganzen Arbeit jede der Maschinenschreiberinnen in einer Stunde erledigt, würde beide Bruchzahlen addieren und eine Eins durch ihre Summe teilen.
Könnt ihr vielleicht für die Lösung derartiger Aufgaben eine andere, von dem üblichen Schema abweichende Methode finden?

3.11 Einkäufe

Als ich, so erzählt der Verfasser dieses Heftes, neulich einkaufen ging, hatte ich ungefähr 15 Rubel in der Geldtasche, und zwar in Rubelstücken und in Zwanzigkopekenstücken. Als ich zurückkam, enthielt die Geldtasche soviel Rubelstücke, wie sie ursprünglich Zwanzigkopekenstücke enthalten hatte, und soviel Zwanzigkopekenstücke, wie es vorher Rubelstücke gewesen sind.
Der ganze Rest in der Geldtasche aber machte ein Drittel der Summe aus, die ich mitgenommen hatte.
Wieviel habe ich für die Einkäufe ausgegeben?

3.12 Auflösungen der Denkaufgaben 3.1 bis 3.11

1. Nachdem die Mutter die Hälfte zurückgenommen hatte, war nur noch die Hälfte da; nach der Abgabe an den älteren Bruder war noch 1/4, nach der Abgabe an den Vater 1/3 und an die Schwester 1/3 - 3/5 = 3/40 vorhanden.
Wenn 30 Zentimeter 3/40 der ursprünglichen Länge ausmachen, so betrug diese 30 : 3/40 = 400 Zentimeter oder 4 Meter.

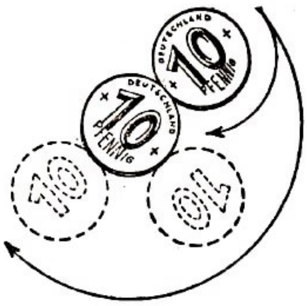
2. Zuletzt fällt naturgemäß das Haar aus, das heute am jüngsten von allen, nämlich einen Tag alt, ist. Untersuchen wir nun, nach welcher Zeit es zum Ausfallen an die Reihe kommt.
Von den 150000 Haaren, die sich heute auf dem Kopf befinden, fallen im ersten Monat 3000, in zwei Monaten 6000, in einem Jahr $3000 \cdot 12 = 36000$ aus. Es werden folglich etwas mehr als vier Jahre vergehen, bis das letzte Haar ausfällt.
Damit haben wir das Durchschnittsalter des menschlichen Haares ermittelt: etwas über 4 Jahre.

3. Diese Aufgabe lässt sich gleichfalls ohne Gleichungen und obendrein auf verschiedene Arten lösen. Zunächst die eine Art:
Der junge Arbeiter legt in 5 Minuten 1/4, der alte 1/6 des Weges zurück, nämlich weniger als der junge.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Da der alte Arbeiter 1/6 des Weges voraus hat, wird er von dem jungen in 1/6 : 1/12 = 2, das heißt in zwei fünfminütigen Zeitspannen, also in 10 Minuten eingeholt.

Eine andere Art ist einfacher: Für den ganzen Weg braucht der alte Arbeiter 10 Minuten mehr als der junge. Wenn der alte 10 Minuten früher als der junge aus dem Hause gehen würde, kämen beide gleichzeitig in der Fabrik an.
Wenn er aber nur 5 Minuten früher weggeht, holt ihn der junge gerade auf der Mitte des Weges, das heißt nach 10 Minuten, ein; denn den ganzen Weg legt der junge in 20 Minuten zurück.
Es sind auch noch einige weitere Lösungsarten möglich.



4. Wenn ihr etwa meinen solltet, dass sich das Zahnrädchen dreimal um seine Achse dreht, so irrt ihr euch:
Es macht nicht drei, sondern vier Umdrehungen. Um sich deutlich vor Augen zu führen, wie das zusammenhängt, lege man auf ein glattes Stück Papier zwei gleichartige Münzen, etwa zwei Zweimarkstücke. (Der Versuch ist mit gleichgroßen Münzen leichter durchzuführen.)

Indem man die untere Münze mit dem Finger festhält, lässt man die obere Münze um den Rand der ersteren rollen. Dabei zeigt sich eine überraschende Tatsache. Sobald die obere Münze die untere zur Hälfte umrollt hat und an deren unterem Rand angelangt ist, hat sie bereits eine volle Drehung um ihre Achse ausgeführt, was an der Stellung der Ziffern erkennbar ist. Und wenn sie ganz um die festliegende Münze herumgekommen ist, hat sie sich nicht einmal, sondern zweimal um ihre Achse gedreht.
Wenn ein Körper kreist und sich zugleich um seine Achse dreht, führt er eine Umdrehung mehr aus, als man unmittelbar errechnet.
Deshalb dreht sich auch unsere Erde, während sie einmal die Sonne umkreist, nicht $365\frac{1}{4}$ mal, sondern $366\frac{1}{4}$ mal um ihre eigene Achse, wenn man die Drehung nicht in bezug auf die Sonne,

sondern in bezug auf die Sterne zählt. Ihr werdet nun begreifen, warum ein Sterntag kürzer ist als ein Sonnentag.

5. Die Lösung scheint zuerst ziemlich verwickelt zu sein, aber die Aufgabe lässt sich sehr einfach lösen, wenn man sich der Algebra bedient und eine Gleichung aufstellt.
Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit dem Buchstaben x. Das Alter nach 3 Jahren ist dann $x + 3$, und das Alter vor 3 Jahren $x - 3$. Wir kommen zu der Gleichung

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$$

und zu dem Resultat $x = 18$. Er ist also 18 Jahre alt.
Nehmen wir eine Nachprüfung vor. Nach 3 Jahren ist er 21 Jahre alt, vor 3 Jahren war er 15 Jahre alt. Die Differenz

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18$$

entspricht dem jetzigen Alter des Betreffenden.

6. So wie die vorige, lässt sich auch diese Aufgabe unter Anwendung einer recht einfachen Gleichung lösen.
Wenn die Tochter jetzt x Jahre alt ist, so ist das Alter des Vaters $2x$. Vor 18 Jahren war jeder von ihnen um 18 Jahre jünger: der Vater war $2x - 18$, die Tochter $x - 18$ Jahre alt. Dabei wissen wir, dass der Vater damals dreimal so alt war wie die Tochter:

$$3(x - 18) = 2x - 18$$

Als Resultat dieser Gleichung erhalten wir $x = 36$; die Tochter ist jetzt 36 Jahre, der Vater 72 Jahre alt.

7. Es genügen 3 Socken, da 2 von ihnen in jedem Falle von der gleichen Farbe sein werden.
Nicht ganz so einfach ist es mit den Handschuhen. weil sich diese nicht nur durch die Farbe unterscheiden, sondern auch dadurch, dass es sich zur Hälfte um rechte und zur Hälfte um linke handelt. Es müssen mindestens 21 Handschuhe sein.
Nimmt man eine kleinere Anzahl, zum Beispiel 20 Stück, heraus, so könnte es vorkommen, dass alle für dieselbe Hand sind (10 braune und 10 schwarze für die linke Hand).

8. Mancher wird, ohne zu überlegen, die Antwort zur Hand haben: 200 Mark. Aber das stimmt nicht: denn dann würde das Grundgehalt ja nur um 150 Mark und nicht um 200 Mark größer sein als der Betrag für die Überstunden.

Die Aufgabe ist folgendermaßen zu lösen:
Wir wissen, dass wir, wenn wir zu dem Betrag für Überstunden 200 Mark hinzufügen, auf des Grundgehalt kommen. Wenn wir zu 250 Merk 200 Mark hinzufügen, kommen wir also auf den Betrag, der zwei Grundgehältern entspricht. Das verdoppelte Grundgehalt macht demnach 450 Mark aus.
Hieraus ergibt sich, dass das Grundgehalt für einen Monat 225 Mark beträgt und dass der Rest der 250 Mark, nämlich 25 Mark, den für Überstunden erhaltenen Betrag darstellt.
Prüfen wir nach: des Grundgehalt von 225 Mark übersteigt den für Überstunden erhaltenen Betrag von 25 Mark um 200 Mark . wie es in der Aufgabe verlangt ist.

9. Diese Aufgabe ist in zweifacher Hinsicht interessant.
Erstens kann sie leicht zu dem Gedanken verleiten, dass die gesuchte Zahl in der Mitte zwischen 10 und 15 km liegt, also $12\frac{1}{2}$ km in der Stunde entspricht. Wir können uns aber leicht davon überzeugen, dass diese Annahme nicht richtig ist.

Angenommen, dass die Strecke a km lang sei: dann wäre der Läufer bei einer Stundengeschwindigkeit von 15 km $\frac{a}{15}$ Stunden, bei einer Stundengeschwindigkeit von 10 km $\frac{a}{10}$ Stunden und bei einer Stundengeschwindigkeit von $12\frac{1}{2}$ km $\frac{a}{12\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2a}{25}$ Stunden unterwegs.
Aber dann gilt die Gleichung:

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25}$$

denn jede dieser Differenzen entspricht einer Stunde. Kürzen wir durch a, so erhalten wir:

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{a}{25} \qquad \text{oder umgestellt} \qquad \frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

also eine falsche Gleichung, denn:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

das heißt $\frac{4}{24}$ und nicht $\frac{4}{25}$.

Die zweite Eigenart der Aufgabe besteht nämlich darin, dass sie sich nicht nur ohne Gleichungen, sondern sogar einfach im Kopf lösen lässt.
Wir folgern so: wenn der Schiläufer bei einer Stundengeschwindigkeit von 15 km zwei Stunden länger (das heißt so lange wie bei einer 10-km- Geschwindigkeit) unterwegs wäre, würde er 30 km mehr zurücklegen, als er es tatsächlich getan hat. In einer Stunde legt er, wie wir wissen, 5 km mehr zurück; er würde also 30 : 5 = 6 Stunden unterwegs sein.

Hieraus ergibt sich die Dauer des Laufs bei einer 15-km-Geschwindigkeit, nämlich 6 - 2 = 4 Stunden. Zugleich steht auch die Länge der zurückgelegten Strecke fest: $15 \cdot 4 = 60$ km.
Nun kann man leicht ermitteln, mit welcher Stundengeschwindigkeit der Schiläufer laufen muss, um den Bestimmungsort genau um 12 Uhr mittags zu erreichen beziehungsweise um die Strecke in 5 Stunden zurückzulegen: 60 : 5 = 12 km.
Durch eine Nachprüfung kann man sich leicht davon überzeugen, dass die Rechnung stimmt.

10. Eine von der Schablone abweichende Lösung der Aufgabe ist folgende:
Zunächst legen wir uns die Frage vor, wie die Maschinenschreiberinnen die Arbeit unter sich verteilen müssen, um gleichzeitig mit ihr fertig zu werden. Selbstverständlich kann die Arbeit innerhalb der kürzesten Frist nur dann erledigt werden, wenn sie keine Unterbrechung erleidet.

Da die geübtere von beiden $1\frac{1}{2}$ mal schneller schreibt als die weniger geübte, muss der Anteil der ersteren natürlich $1\frac{1}{2}$ mal größer sein als der Anteil der anderen, damit beide gleichzeitig fertig werden.
Hieraus ergibt sich, dass die erste Maschinenschreiberin $\frac{3}{5}$ und die zweite $\frac{2}{5}$ des Berichts zum Abschreiben zu übernehmen hat.

Damit ist die Aufgabe beinahe schon gelöst. Zu ermitteln bleibt nur noch, in welcher Zeit die erste Maschinenschreiberin mit den $\frac{3}{5}$ des Berichts fertig wird.
Die ganze Arbeit könnte sie, wie wir wissen, in 2 Stunden ausführen; für $\frac{3}{5}$ der Arbeit braucht sie demnach $2 \cdot \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ Stunden.
In der gleichen Zeit muss auch die zweite mit ihrem Anteil an der Arbeit fertig werden. Die kürzeste Frist, innerhalb welcher der Bericht von den beiden Maschinenschreiberinnen abgetippt werden kann, ist also 1 Stunde 12 Minuten.

11. Wir bezeichnen die ursprüngliche Zahl von Rubelstücken mit x und diejenige der Zwanzigkopekenstücke mit y. Als ich aus dem Hause ging, um Einkäufe zu machen, hatte ich also 100 x + 20 y Kopeken und als ich zurückkehrte 100 y + 20 x Kopeken.
Da letztere Summe, wie wir wissen, dreimal so klein wie die erstere ist, ergibt sich:

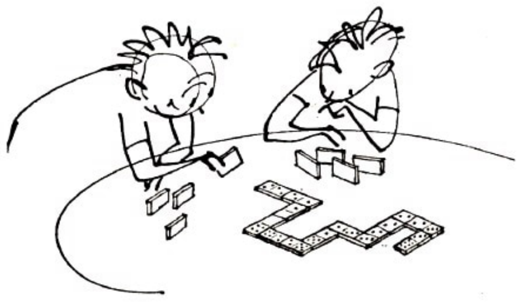
$$3(100y + 20x) = 100x + 20y$$

Vereinfachen wir diese Gleichung, so erhalten wir $x = 7y$.

Wenn wir y mit 1 annehmen, so ist $x = 7$. Das heißt, ich hätte ursprünglich 7 Rubel 20 Kopeken gehabt, das steht nicht in Einklang mit den Bedingungen der Aufgabe ("etwa 15 Rubel").
$y = 3$ ergibt eine zu hohe Summe, nämlich 21 Rubel 60 Kopeken. Also ist $y = 2$. Die einzig zutreffende Antwort lautet folglich: 14 Rubel 40 Kopeken.

Nach Beendigung der Einkäufe halle ich 2 Rubelstücke und 14 Zwanzigkopekenstücke, das heißt 200 + 280 = 480 Kopeken, was wirklich ein Drittel des ursprünglichen Betrages ausmacht; denn 1440 : 3 = 480.
Ich hatte somit 1440 - 480 = 960 Kopeken ausgegeben. Die Einkäufe kosteten also 9 Rubel 60 Kopeken.

4 MATHEMATIK IM SPIEL



Domino

Domino haben die meisten von euch wohl schon gespielt. Für diejenigen, die es nicht kennen, wollen wir es kurz erklären.
Es besteht aus rechteckigen Steinen (ihr könnt auch solche Täfelchen selbst aus Pappe anfertigen), die durch einen Strich in zwei quadratische Hälften geteilt sind. Auf jeder Steinhälfte sind "Augen"(gewöhnlich von 0 bis 6). Ein "Satz" besteht aus 28 Steinen, von $\boxed{0|0}$, $\boxed{0|1}$ bis $\boxed{6|6}$.
Die Steine werden gleichmäßig unter die Mitspieler verteilt, oder man lässt eine Anzahl Steine in der Mitte verdeckt zum "Kaufen" liegen, wie beim Quartett.

Aus den Steinen wird eine Kette von beliebiger Form gebildet, indem die Spieler der Reihe nach passende Steine so anlegen, dass die aneinanderstoßenden Hälften zweier Steine stets die gleiche Augenzahl aufweisen.
Heute wollen wir dieses Spiel einmal als Denkaufgabe betrachten.

4.1 Eine Kette aus 28 Steinen

Wie ist es möglich, 28 Dominosteine unter Einhaltung der Spielregel zu einer ununterbrochenen Kette aneinanderzulegen?

4.2 Anfang und Ende der Kette

Nachdem die 28 Dominosteine zu einer Kette ausgelegt waren, ergaben sich an dem einen Ende der Kette 5 Augen.
Wieviel Augen wies das andere Ende auf?

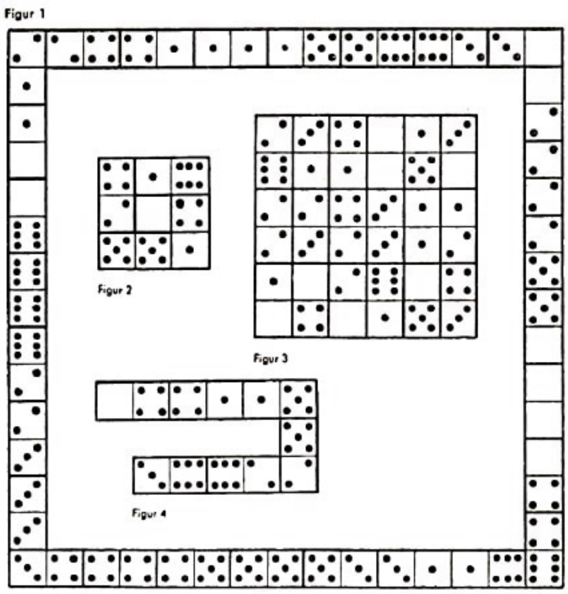
4.3 Ein Dominokunststück

Ein Mitspieler nimmt einen der Steine und fordert euch auf, aus den übrigen 27 Steinen eine ununterbrochene Kette zu bilden. Er behauptet, dass dies in jedem Fall möglich sei, unabhängig davon, welcher Stein herausgenommen wird. Dann verlässt er das Zimmer, um nicht zu sehen, wie ihr die Kette zusammenstellt.
Ihr geht ans Werk und stellt fest, dass euer Mitspieler recht hat:
Die 27 Steine ließen sich zu einer Kette zusammenlegen. Noch erstaunlicher ist es, dass er euch vom anderen Zimmer aus, also ohne die Kette zu sehen, zuruft, wieviel Augen sich an ihren Enden befinden.

Wie kann er das ohne hinzusehen wissen? Und aus welchem Grund ist er überzeugt, dass sich auch aus 27 Dominosteinen eine ununterbrochene Kette zusammenstellen lässt?

4.4 Der Rahmen

Figur 1 stellt einen Rahmen dar, der unter Beachtung der Spielregel aus Dominosteinen gebildet ist. Die Seiten des Rahmens sind von gleicher Länge, enthalten aber nicht die gleiche Augensumme:



Die obere und linke Seite weisen je 44 Augen auf, die beiden anderen Seiten 59 und 32 Augen. Könnt ihr einen quadratischen Rahmen zusammenstellen, bei dem jede der Seiten die gleiche Summe von 44 Augen enthält?

4.5 Sieben Quadrate

Man kann 4 Dominosteine auswählen, die sich zu einem kleinen Quadrat mit der gleichen Augensumme auf jeder Seite zusammenstellen lassen. Eine entsprechende Darstellung seht ihr in Figur 2:
Jede der Seiten weist 11 Augen auf. Könnt ihr aus einem vollen Satz von Dominosteinen gleichzeitig 7 solcher Quadrate bilden?

Es ist nicht erforderlich, dass die Augensumme einer Seite bei allen Quadraten dieselbe ist; zu beachten ist nur, dass bei jedem einzelnen dieser Quadrate alle 4 Seiten die gleiche Augensumme aufweisen müssen.

4.6 Magische Quadrate aus Dominosteinen

Figur 3 stellt ein Quadrat aus 18 Dominosteinen dar, das dadurch bemerkenswert ist, dass jede waagerechte Reihe, jede senkrechte Reihe und jede diagonale Reihe die gleiche Augensumme, nämlich 13, ergibt.
Derartige Quadrate hat man von jeher als "magische Quadrate" bezeichnet.

Versucht einmal, einige weitere aus 18 Steinen bestehende Quadrate dieser Art zusammenzustellen, aber mit einer anderen Augensumme. 13 ist die niedrigste, 23 die höchste Augensumme, die in den Reihen eines magischen Quadrats aus 18 Steinen möglich ist.

4.7 Arithmetische Reihe aus Dominosteinen

Figur 4 (siehe Seite 29) zeigt 12 Steine, die nach der Spielregel aneinandergefügt sind und sich dadurch auszeichnen, dass die Summe der Augen (auf beiden Hälften des Steins) bei jedem folgenden Stein um 1 Auge wächst.
Angefangen mit 4, besteht die Reihe aus folgenden Augenzahlen: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Eine solche Zahlenfolge, die stets um die gleiche Einerzahl ansteigt (oder absinkt), wird "arithmetische Reihe" genannt. In unserer Reihe steigert sich die Augenzahl jeweils um 1; aber auch jede beliebige andere Steigerung ist möglich.
Die Aufgabe besteht darin, noch einige andere arithmetische Reihen aus 6 Steinen zu bilden.

Das Fünfzehnerspiel

Das allgemein bekannte Kästchen mit den 15 nummerierten quadratförmigen Steinen hat, was mancher Spieler nicht vermutet, eine interessante Geschichte.
Wir berichten darüber nach dem Buch des deutschen Mathematikers W. Ahrens, "Mathematische Unterhaltungen und Spiele", einem Erforscher des Spiels.

Vor etwa einem halben Jahrhundert - Ende der siebziger Jahre - kam in den Vereinigten Staaten von Amerika das "Fünfzehnerspiel" (auch Kästchenspiel, im Russischen "Taken" genannt) auf; es fand schnell Verbreitung und wuchs sich dank der unzählbaren Menge eifriger Spieler zu einer förmlichen Volksleidenschaft aus.
Dasselbe konnte man diesseits des Ozeans, in Europa, beobachten. Da sah man selbst in den Pferdebahnwagen die kleinen Kästen mit den 15 Holzklötzchen und unruhige Hände, die darin hin und her schoben.
Die Inhaber von Büros und Läden gerieten durch die Spielleidenschaft ihrer Angestellten schier in Verzweiflung und verboten durch Anschläge das Spielen während der Geschäftszeit aufs strengste.

Besitzer von Vergnügungsstätten nutzten die Situation geschickt aus und veranstalteten große Spielturniere. Selbst in die Säle des deutschen Reichstags drang das Spiel ein.
"Ich sehe noch im Reichstag alte Herren vor mir, die starr auf das in der Hand gehaltene Viereck hinblicken", erinnert sich der bekannte Mathematiker und Geograph Siegmund Günther, der in jenen Jahren der Spielepidemie, nämlich 1878 bis 1884, Reichstagsabgeordneter war.

In Paris fand das Spiel auf den Boulevards, den breiten Alleen, unter freiem Himmel reißenden Absatz und verbreitete sich von der Hauptstadt aus schnell über das ganze Land. Bald gab es selbst in der Provinz kein noch so einsames Landhaus mehr, in dem sich nicht in irgendeinem Winkel das unvermeidliche "Taquin" (wie es französisch heißt) befand, "wie eine Spinne der Opfer lauernd, die es in seine Netze verstricken könnte", schrieb ein französischer Schriftsteller.

Im Jahre 1880 hatte das Spielfieber offensichtlich seinen Höhepunkt erreicht. Doch bald darauf wurde dieser Dämon, der so viele Menschen gequält und tyrannisiert hatte, gestürzt; die Mathematik war es, die ihn überwunden hatte. Die mathematische Untersuchung des Spiels ergab, dass von den vielen Auf- gaben, die gestellt werden können, nur gerade die Hälfte lösbar ist, während die andere durch kein auch noch so anhaltendes Sinnen und Brüten bezwungen werden kann.

Jetzt war es offenbar, warum so manche Aufgabe auch den hartnäckigsten Bemühungen hatte trotzen können. Jetzt war es klar, warum die Veranstalter von Turnieren für die Lösung gewisser Aufgaben es hatten wagen dürfen, hohe Preise auszulosen, ohne dass auch nur einer der zahlreich herbeigeströmten Preisbewerber die Siegespalme zu erringen vermocht hatte.
In dieser Beziehung schoss der Erfinder des Spiels den Vogel ab, indem er das Sonntagsblatt einer New-Yorker Zeitung veranlasste, einen Preis von 1000 Dollar für die Lösung einer bestimmten Aufgabe auszusetzen.

Als der Verleger zauderte, erklärte sich der Erfinder ohne weiteres bereit, den genannten Betrag aus seiner Tasche zu hinterlegen. Die Aufgabe gehörte natürlich zu den unlösbaren, und der Preis fiel daher niemandem zu.
Der Name des Erfinders ist Sam Loyd. Er ist als Verfasser geistreicher Denkaufgaben und zahlreicher Kunststücke bekannt geworden. Bemerkenswert ist, dass es ihm nicht gelang, in Amerika ein Patent auf das von ihm erfundene Spiel zu erhalten. Den Vorschriften gemäß war er verpflichtet, ein "Arbeitsmodell" für die Probepartie vorzulegen; er unterbreitete dem Beamten des Patentamtes eine Aufgabe, und als dieser sich erkundigte, ob sie lösbar sei, musste der Erfinder zugeben, dass dies mathematisch nicht möglich ist.
"In diesem Fall", lautete die Entgegnung, "kann von einem Arbeitsmodell nicht die Rede sein, und wenn kein Arbeitsmodell vorliegt, gibt es auch kein Patent."

Loyd gab sich mit diesem Bescheid zufrieden, wäre aber wahrscheinlich hartnäckiger gewesen, wenn er den unerhörten Erfolg seiner Erfindung vorausgesehen hätte. (Diese Episode wurde von dem bekannten amerikanischen Schriftsteller Mark Twain, der im 19. Jahrhundert lebte, für seinen Roman "Der amerikanische Prätendent" benutzt.)

Hier sei ein eigener Bericht des Erfinders über einige Einzelheiten aus der Geschichte des Spiels wiedergegeben:

"Die ältesten Leute, die im Reiche des Scharfsinns zu Hauses sind", schreibt Loyd, "erinnern sich noch, dass ich Anfang der siebziger Jahre die ganze Welt dazu brachte, sich über einem Kästchen mit verschiebbaren Steinen den Kopf zu zerbrechen, das unter dem Namen 'Fünfzehnerspiel' bekannt geworden ist.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figur 5

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figur 6

In dem quadratischen Kästchen waren 15 Steine in der richtigen Reihenfolge untergebracht, bis auf die Steine 14 und 15, deren Plätze (wie aus der Abbildung ersichtlich) vertauscht waren (Figur 5 und 6). Die Aufgabe bestand darin, die Steine nacheinander zu verschieben

und die normale Stellung herzustellen, in der auch die Steine 14 und 15 ihren richtigen Platz einnehmen.
Die für die erste richtige Lösung dieser Aufgabe ausgesetzte Prämie von 1000 Dollar hat niemand gewonnen, obwohl sich alle unermüdlich damit beschäftigten. Man erzählte von Kaufleuten, die darüber das Öffnen ihrer Geschäfte vergaßen, von ehrbaren Beamten, die ganze Nächte unter einer Straßenlaterne standen und auf der Suche nach der richtigen Lösung waren. Niemand wollte seine Bemühungen aufgeben, denn jeder war davon überzeugt, dass ihm schließlich der Erfolg beschieden sein würde.
Steuerleute, sagt man, die vom Spiel gebannt waren, ließen ihre Schiffe stranden, Zugführer fuhren mit den Zügen über die Stationen hinaus, Farmer ließen ihre Pflüge im Stich."

Wir wollen den Leser jetzt mit der Theorie dieses Spiels bekannt machen. In ihrer Gesamtheit ist sie sehr kompliziert und hängt eng mit einem Gebiet der Algebra (der Theorie der Determinanten) zusammen. Wir beschränken uns auf einige von W. Ahrens entwickelte Gedanken.

Die Aufgabe besteht gewöhnlich darin, dass die 15 Steine aus einer beliebigen Anfangsstellung durch aufeinanderfolgende Verschiebungen, die durch das Vorhandensein eines freien Feldes möglich sind, in die normale Stellung gebracht werden sollen, das heißt in eine solche, in der die Steine in der Reihenfolge ihrer Zittern liegen: in der oberen linken Ecke 1, rechts davon 2, dann 3 und in der oberen rechten Ecke 4; in der nächsten Reihe von links nach rechts 5, 6, 7, 8 und so fort. Eine solche normale Stellung zeigt Figur 5.

Stellt euch eine Stellung vor, in der die Steine in buntem Durcheinander gesetzt sind. Durch eine Reihe von Verschiebungen ist es in jedem Fall möglich, den Stein 1 auf den Platz zu bringen, den er in der Abbildung einnimmt.
Ebenso besteht die Möglichkeit, ohne den Stein 1 zu verschieben, den Stein 2 auf das Feld rechts daneben zu bringen. Dann kann man, ohne die Steine 1 und 2 zu verschieben, die Steine 3 und 4 auf ihre normalen Plätze bringen.
Wenn sie sich zufällig nicht in den beiden letzten senkrechten Reihen befinden, so lassen sie sich leicht in diesen Bereich bringen, so dass man durch eine Reihe von Verschiebungen das gewünschte Ergebnis erreicht. Nun ist die obere Reihe 1, 2, 3, 4 in Ordnung gebracht, und bei den weiteren Verschiebungen der Steine lassen wir sie unberührt.

Auf dieselbe Weise bemühen wir uns, auch die zweite Reihe 5, 6, 7, 8 in Ordnung zu bringen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies stets erreichbar ist. Sodann ist es erforderlich, in den letzten beiden Reihen die Steine 9 und 13 in die richtige Stellung zu bringen; auch dies ist immer möglich.
Von den jetzt ordnungsmäßig gesetzten Steinen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 13 wird in der Folge keiner mehr verschoben.

Es bleibt der kleine Abschnitt aus 6 Feldern übrig, von denen das eine frei ist und die anderen von den Steinen 10, 11, 12, 14 und 15 in willkürlicher Anordnung eingenommen werden. Innerhalb der Grenzen dieser sechs Felder lassen sich die Steine 10, 11, 12 stets auf die normalen Plätze bringen.
Nachdem dies erreicht ist, werden die Steine 14 und 15 in der letzten Reihe entweder in der normalen oder in der umgekehrten Reihenfolge liegen (Figur 6).
Auf diesem Weg, den ihr leicht in der Praxis nachprüfen könnt, gelangen wir zu folgendem Ergebnis:

Jede beliebige Anfangsstellung kann entweder in die Anordnung von Figur 5 (Stellung I) oder in diejenige der Zeichnung von Figur 6 (Stellung II) gebracht werden.

Wenn eine beliebige Stellung, die wir der Einfachheit halber mit dem Buchstaben S bezeichnen wollen, in die Stellung I umgewandelt werden kann, dann muss es umgekehrt auch möglich sein, die Stellung I in die Stellung S umzuwandeln.
Alle Züge lassen sich ja rückgängig machen: Wenn wir zum Beispiel in Stellung I den Stein 12 auf das freie Feld schieben können, so lässt sich dieser Zug sofort wieder durch eine umgekehrte Bewegung zurücknehmen.

Wir haben somit zwei Gruppen von Aufstellungen: die Stellungen der einen Gruppe, die sich in die normale Stellung I, und diejenigen der anderen Gruppe, die sich in die Stellung II umändern lassen. Umgekehrt kann man aus der normalen Stellung zu einer beliebigen Stellung der ersten Gruppe und aus der Stellung II zu einer beliebigen Stellung der zweiten Gruppe gelangen. Und endlich ist es möglich, zwei verschiedene Stellungen, die beide zu ein und derselben Gruppe gehören, ineinander umzuwandeln.

Kann man nicht noch weitergehen und die Stellungen I und II miteinander vereinigen? Es lässt sich nachweisen (auf Einzelheiten wollen wir dabei nicht eingehen), dass sich diese Stellungen auch durch eine noch so große Zahl von Zügen nicht eine in die andere umwandeln lassen.
Die ungeheure Anzahl verschiedenartiger Stellungen zerfällt daher in zwei unterschiedliche Gruppen: erstens in solche, die in die normale Stellung I verwandelt werden können und somit eine lösbare Aufgabe darstellen, und zweitens in solche, die in die Stellung II verwandelt werden können und sich folglich unter keinen Umständen in die normale Stellung bringen lassen.
Um Stellungen der letzteren Art handelt es sich, wenn für die Lösung der Aufgabe riesenhafte Prämien ausgesetzt wurden. Wie kann man feststellen, ob die jeweils vorliegende Stellung zu der ersten oder zweiten Gruppe gehört? Ein Beispiel wird dies erklären:

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Figur 7

Untersuchen wir einmal die Stellung, die in Figur 7 dargestellt ist. Die erste Reihe ist in Ordnung, und das gleiche trifft auch für die zweite Reihe bis auf den letzten Stein (9) zu. Dieser Stein nimmt das Feld ein, auf dem sich bei einer normalen Anordnung der Stein 8 zu befinden hat.
Der Stein 9 steht also vor dem Stein 8; eine solche Abweichung von der normalen Ordnung wird "Unregelmäßigkeit" genannt.

Mit Bezug auf den Stein 9 sagen wir, dass hier die erste Unregelmäßigkeit vorliegt. Beim Durchsehen der weiteren Steine entdecken wir eine "Abweichung" beim Stein 14; er steht drei Felder vor dem Platz, auf den er normalerweise hingehört, und zwar vor den Steinen 12, 13, 11.
Hier haben wir drei Unregelmäßigkeiten (14 vor 12, 14 vor 13, 14 vor 11). Im ganzen haben wir nun schon $1 + 3 = 4$ Unregelmäßigkeiten festgestellt.
Weiter: Der Stein 12 liegt vor dem Stein 11 und der Stein 13 ebenfalls vor dem Stein 11. Das ergibt nochmals 2 Unregelmäßigkeiten. Somit liegen 6 Unregelmäßigkeiten vor.

In ähnlicher Weise wird für jede Aufstellung die Gesamtzahl der Unregelmäßigkeiten ermittelt, nachdem man vorher das letzte Feld in der unteren rechten Ecke frei gemacht hat. Wenn es sich bei der Gesamtzahl der Unregelmäßigkeiten wie in dem eben untersuchten Fall um eine gerade Zahl handelt, dann kann die vorliegende Aufstellung in die normale Stellung umgewandelt werden; mit anderen Worten, die Aufgabe gehört zu den lösbaren.
Wenn hingegen eine ungerade Zahl von Unregelmäßigkeiten festgestellt wird, dann gehört die Stellung in die zweite Gruppe, das heißt zu den unlösbaren Aufgaben (null Unregelmäßigkeiten gelten als gerade Zahl).

Nachdem die Mathematik einmal Klarheit geschaffen hat, ist die damalige fieberhafte Leidenschaft für dieses Spiel ganz unvorstellbar. Die Mathematiker haben eine erschöpfende Theorie des Spiels aufgestellt, eine Theorie, die in keinem Punkt einen Zweifel hinterlässt.
Der Ausgang des Spiels hängt nicht wie bei anderen Spielen von irgendwelchen Zufällen oder von der Erfindungsgabe der Spieler ab, sondern von rein mathematischen Gegebenheiten, die ihn mit unbedingter Genauigkeit vorausbestimmen.

Wir gehen nun zu den Denkaufgaben auf diesem Gebiet über. Nachstehend ein paar lösbare, vom Erfinder des Spiels erdachte Aufgaben.

4.8 Erste Aufgabe von Loyd

Ausgehend von der in Figur 6 gezeigten Stellung bringen wir die Steine in die richtige Reihenfolge, aber mit einem freien Feld in der linken oberen Ecke (Figur 8).

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Figur 8

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figur 9

4.9 Zweite Aufgabe von Loyd

Ausgehend von der Stellung in Figur 6 machen wir mit dem Kästchen eine Vierteldrehung und verschieben die Steine so lange, bis sie die Stellung von Figur 9 einnehmen.

4.10 Dritte Aufgabe von Loyd

Wir verschieben die Steine (ausgehend von Figur 6) so, dass aus ihnen ein "magisches Quadrat" gebildet wird, in dem die Summe der waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihen gleich 30 ist.

Krocket

Dieses Spiel werden nur wenige von euch kennen, aber das ist zur Lösung der folgenden Denkaufgaben auch gar nicht notwendig. Es genügt, wenn ihr wisst, dass Krocket ein Rasenspiel ist, bei dem es darauf ankommt, eine Holzkugel mit einem langstieligen Holzhammer so durch die in bestimmter Ordnung aufgestellten "Tore" zu schlagen, dass sie diese, ohne anzustoßen, mit einer möglichst geringen Anzahl von Schlägen durchläuft. Die Tore sind eckig oder rund gebogene Rundeisen (starker Draht), die in den Rasen gesteckt werden.

In der Mitte des Spielfeldes sind zwei Tore über Kreuz aufgestellt, die "Glocke" genannt, die besonders schwierig zu passieren ist.
Am Anfang und Ende des Spielfeldes steht je ein hölzerner Stab, der "Pfahl", den die Kugel berühren muss. Liegt die Kugel eines anderen Spielers an einer Stelle des Spielfeldes, die für die eigene Kugel eine günstige Ausgangsposition für den nächsten Schlag bietet, so versucht man, diese Kugel zu treffen. Man kann dann die fremde Kugel wegschlagen und sich an ihre Stelle setzen. Das nennt man "krockieren".
Versucht nun, nachstehende fünf Aufgaben zu lösen.

4.11 Durchs Tor gehen oder krockieren?

Die Krockettore sind rechteckig. Sie sind doppelt so breit wie der Durchmesser der Kugel.
Was ist unter diesen Umständen leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem und, ohne den Draht zu berühren, durchs Tor zu schlagen (der Krocketspieler nennt das "durchs Tor gehen") oder von derselben Entfernung aus eine Kugel zu krockieren?

4.12 Die Kugel und der Pfahl

Der Pfahl hat unten eine Breite von 6 cm. Der Durchmesser der Kugel beträgt 10 cm. Um wievielmal leichter ist es, die Kugel zu treffen, als von derselben Entfernung aus den Pfahl zu treffen?

4.13 Durchs Tor oder an den Pfahl gehen?

Die Kugel ist halb so breit wie das rechteckige Tor und doppelt so breit wie der Pfahl.
Was ist leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem durchs Tor zu schlagen oder aus derselben Entfernung den Pfahl zu treffen?

4.14 Durch die Glocke gehen oder krockieren?

Die Tore sind rechteckig und dreimal so breit wie der Durchmesser der Kugel. Was ist leichter: die Kugel von der günstigsten Stellung aus bequem durch die Glocke zu schlagen oder aus derselben Entfernung eine Kugel zu krockieren?

4.15 Die unpassierbare Glocke

Bei welchem Verhältnis zwischen der Breite rechteckiger Tore und dem Durchmesser der Kugel wird das Passieren der Glocke unmöglich?

4.16 Auflösungen der Denkaufgaben 4.1 bis 4.15

1. Zur Vereinfachung der Aufgabe legen wir zunächst alle 7 Doppelsteine, 0-0, 1-1, 2-2 und so fort, beiseite. Es verbleiben nur 21 Steine, auf denen sich jede Augenzahl sechsmal wiederholt. Vier Augen (auf einer Steinhälfte) befinden sich zum Beispiel auf folgenden 6 Steinen:

$$4-0, 4-1, 4-2, 4-3, 4-5, 4-6$$

Jede Augenzahl wiederholt sich also, wie wir sehen, eine gerade Anzahl Male. Es ist klar, dass man aus einem solchen Satz Steine mit gleicher Augenzahl so lange aneinanderfügen kann, bis der ganze Satz erschöpft ist. Sobald das getan ist und die 21 Steine in einer ununterbrochenen Reihe liegen, schieben wir zwischen die Fugen 0-0, 1-1, 2-2 und so weiter die beiseite gelegten 7 Doppelsteine ein. Somit erhalten wir eine Kette, die aus den 28 Dominosteinen unter Einhaltung der Spielregeln zusammengesetzt ist.

2. Es ist leicht nachzuweisen, dass eine aus 28 Dominosteinen gebildete Kette mit der gleichen Augenzahl enden muss, mit der sie angefangen hat. In der Tat:
Wenn es anders wäre, würden sich die Augenzahlen, die die Enden der Kette aufweisen, eine ungerade Anzahl Male wiederholen (im Innern der Kette liegen die Augenzahlen ja paarweise). Wir wissen jedoch, dass sich in einem kompletten Dominosatz jede Augenzahl achtmal wiederholt, also eine gerade Anzahl Male.
Die in Betracht gezogene Möglichkeit, dass die Enden der Kette voneinander abweichende Augenzahlen aufweisen können, ist demnach hinfällig: Die Augenzahl muss übereinstimmen.

Schlussfolgerungen solcher Art nennt man in der Mathematik "Beweise aus dem Gegenteil" oder "indirekte Beweise".

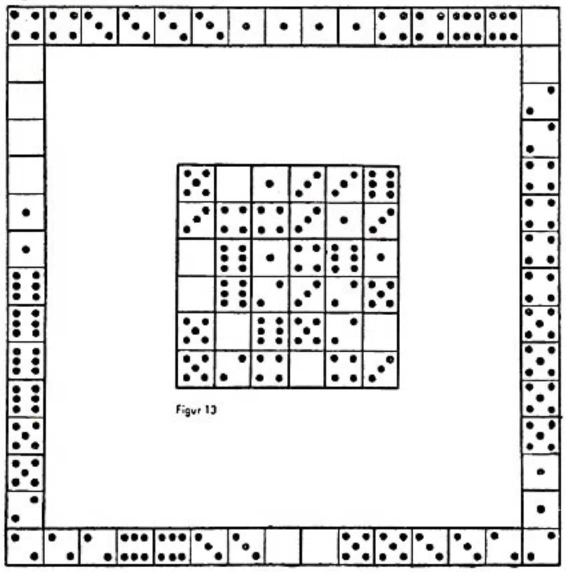
Übrigens ergibt sich aus der soeben nachgewiesenen Eigenart der Kette folgende interessante Begleiterscheinung:
Eine Kette aus 28 Steinen lässt sich immer zu einem Ring zusammenschließen. Aus einem kompletten Dominosatz kann man also unter Einhaltung der Spielregeln nicht nur eine Kette mit freien Enden, sondern auch einen geschlossenen Ring bilden.

Vielleicht interessiert euch, auf wieviel verschiedene Arten eine solche Kette oder ein solcher Ring gebildet wird. Ohne auf ermüdende Einzelheiten der Berechnung einzugehen, sei hier nur gesagt, dass die Zahl der Arten, auf die eine Kette (oder ein Ring) aus 28 Steinen gebildet werden kann, riesig groß ist: über 7 Billionen. Hier die genaue Zahl: 7959229931520. Sie stellt das Produkt nachstehender Multiplikationen dar $2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$.

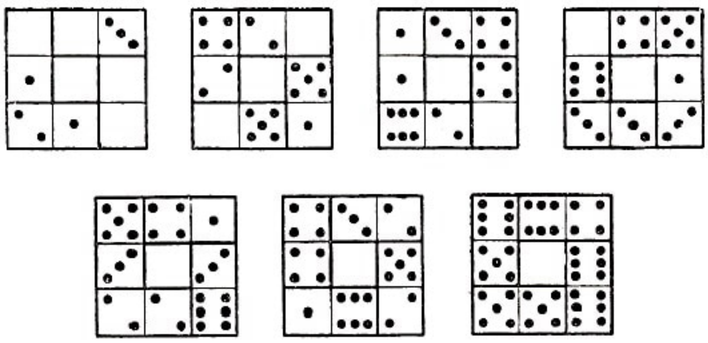
3. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus dem soeben Gesagten. Wir wissen, dass sich aus 28 Steinen in jedem Fall ein geschlossener Ring bilden lässt.
Wenn man also aus diesem Ring einen Stein entfernt, dann stellen erstens die restlichen 27 Steine eine ununterbrochene Kette mit freien Enden dar; zweitens wird die Augenzahl an den Enden der Kette die gleiche sein, die der herausgenommene Stein aufweist.
Wenn wir einen Dominostein wegnehmen, können wir im voraus sagen, welche Augenzahl die Enden einer aus den restlichen 27 Steinen gebildeten Kette aufweisen werden.

4. Die Summe aller Augen des gesuchten Quadrats muss $44 \cdot 4 = 176$, das heißt um 8 höher sein, als die Summe aller Augen eines kompletten Dominosatzes (168).
Dies kommt daher, dass die Eckfelder des Quadrats doppelt gezählt werden. Aus dem Gesagten ergibt sich, wie groß die Summe der Augen an den Ecken ist, nämlich 8. Hierdurch wird das Herausfinden der gesuchten Stellung etwas erleichtert, obwohl es immer noch recht mühevoll ist. Die Lösung wird durch Figur 10 dargestellt.

Figur 10

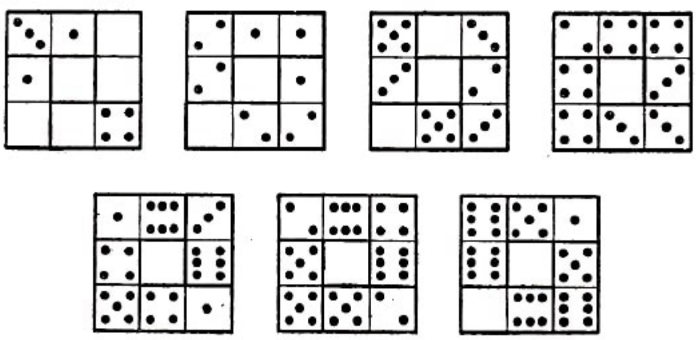


5. Aus der großen Anzahl der möglichen Lösungen führen wir hier zwei Beispiele an. Bei der ersten Lösung (Figur 11) haben wir:
1 Quadrat mit der Augensumme 3 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 6 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 8 in jeder Reihe,
2 Quadrate mit der Augensumme 9 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 10 in jeder Reihe,
1 Quadrat mit der Augensumme 16 in jeder Reihe.



Figur 11

Bei der zweiten Lösung (Figur 12):
2 Quadrate mit der Augensumme 4,
1 Quadrat mit der Augensumme 8,
2 Quadrate mit der Augensumme 10,
2 Quadrate mit der Augensumme 12.



Figur 12

6. Figur 13 zeigt das Muster eines magischen Quadrats mit der Augensumme 18 in jeder Reihe.

7. Hier als Beispiel zwei arithmetische Reihen, bei denen die Steigerung 2 Punkte beträgt:
a) 0-0; 0-2; 0-4; 0-6; 4-4 (oder 3-5); 5-5 (oder 4-6)
b) 0-1; 0-3 (oder 1-2); 0-5 (oder 2-3); 1-6 (oder 3-4), 3-6 (oder 4-5); 5-6.

Im ganzen lassen sich aus 6 Steinen 23 verschiedene arithmetische Reihen bilden. Sie fangen mit den folgenden Steinen an: a) Bei der Steigerung um 1 Punkt:
0-0, 0-1 (1-0), 0-2 (1-1, 2-0), 0-3 (1-2, 2-1, 3-0), 0-4 (1-3, 2-2, 3-1), 1-4 (2-3, 3-2), 2-4 (4-2...), 3-4 (4-3...), 3-5...

b) Bei der Steigerung um 2 Punkte:
0-0, 0-2...; 0-1, 0-3 ...

8. Die von der Aufgabe verlangte Anordnung kann von der Anfangsstellung aus durch folgende 44 Züge erreicht werden:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1

9. Die verlangte Stellung wird durch folgende 39 Züge erreicht:

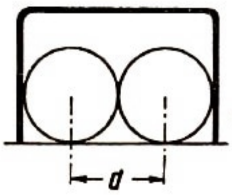
14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10,13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

10. Ein magisches Quadrat mit der Augensumme 30 ergibt sich nachfolgenden Zügen:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

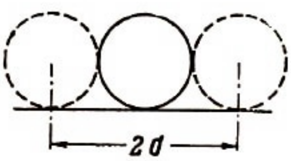
Solange wir uns mit den Aufgaben befassten, die sich auf das Domino- und Fünfzehnerspiel bezogen, hielten wir uns in den Grenzen der Arithmetik. Wenn wir jetzt zu den Aufgaben auf dem Krocketplatz übergehen, berühren wir zum Teil das Gebiet der Geometrie.

11. Selbst ein geübter Spieler wird vermutlich erklären, dass es unter den angegebenen Bedingungen leichter sei, durchs Tor zu gehen, als zu krockieren, da ja das Tor doppelt so breit ist wie die Kugel. Diese Annahme ist jedoch irrig:
Das Tor ist zwar breiter als der Durchmesser der Kugel, aber der glatte Durchgang durch das Tor ist für die Kugel halb so breit wie das Ziel für das Krockieren.



Figur 14

Figur 15

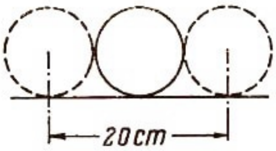


Betrachtet Figur 14, und des Gesagte wird euch einleuchten. Der Mittelpunkt der Kugel muss von dem Draht des Tors mindestens so weit entfernt sein, wie ihr Radius beträgt, da sie sonst den Draht berühren würde. Für den Mittelpunkt der Kugel bleibt folglich ein Ziel, das um zwei Radien geringer ist als die Breite des Tors. Ihr seht, zu den Bedingungen unserer Aufgabe gehört, dass die Breite des Ziels beim Passieren des Tors von der günstigsten Stellung aus gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

Prüfen wir nun, welche Breite das Ziel für den Mittelpunkt der rollenden Kugel beim Krockieren

hat. Die Kugel wird mit Sicherheit getroffen, wenn, wie in Figur 15, der Mittelpunkt der krockierenden Kugel von dem Mittelpunkt der Kugel, die man treffen (krockieren) will, um weniger als einen Kugelradius entfernt ist. Die Breite des Ziels entspricht also in diesem Falle dem doppelten Durchmesser der Kugel.
Im Gegensatz zu der Meinung der Spieler ist es demnach unter den gegebenen Umständen doppelt so leicht, die Kugel zu treffen, als von der günstigsten Stellung aus durchs Tor zu gehen.

12. Nach dem vorstehend Gesagten bedarf diese Aufgabe keiner weitläufigen Erläuterung.

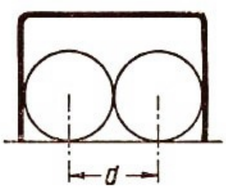


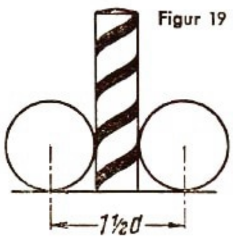
Figur 16

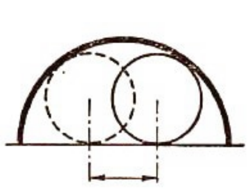
Figur 17


Man sieht ohne weiteres (Figur 16), dass die Breite des Ziels beim Krockieren dem doppelten Durchmesser der Kugel, das sind 20 cm, entspricht. Beim Zielen auf den Pfahl entspricht die Zielscheibe dagegen dem Durchmesser der Kugel plus demjenigen des Pfahls, das sind 16 cm (Figur 17).
Das Krockieren ist also um 20 : 16 = $1\frac{1}{4}$ mal (also um 25%) leichter als das Treffen des Pfahls. Von den Spielern wird jedoch die Chance beim Krockieren im Vergleich zu derjenigen für das Treffen des Pfahls in der Regel sehr überschätzt.

13. Mancher Spieler wird so denken: Da das Tor doppelt so breit ist wie die Kugel, ist das Ziel für das glatte Durchlaufen des Tors viermal so breit als für das Treffen des Pfahls. Belehrt durch die vorangegangenen Aufgaben, werdet ihr einen solchen Fehler nicht machen.
Ihr werdet euch sagen, dass das Ziel beim Angehen des Pfahls um $1\frac{1}{2}$ mal breiter ist als beim Passieren des Tors von der günstigsten Stellung aus. Das erkennt man deutlich an Figur 18 und 19. Wenn das Tor nicht rechteckig, sondern gewölbt wäre, würde der Durchgang für die Kugel noch schmäler sein. Ihr könnt euch beim Betrachten der Figur 20 leicht davon überzeugen.

Figur 18


Figur 19


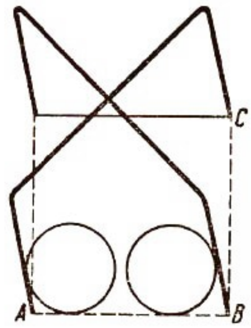
Figur 20


14. Aus Figur 21 und 22 ist ersichtlich, dass unter den Bedingungen, die wir in der Aufgabe stellten, für den Durchgang des Mittelpunkts der Kugel nur ein recht schmaler Zwischenraum (a) übriggeblieben ist. Wer mit der Geometrie vertraut ist, weiß, dass die Diagonale AC eines Quadrats knapp anderthalbmal so lang ist wie die Seite AB. (Der genaue Wert ist $\sqrt{2} = 1,4142...$)
Wenn das Tor $3d$ breit ist (d = Durchmesser der Kugel), dann beträgt AB rund gerechnet $3d : 1,4 = 2,1d$.
Der Zwischenraum a jedoch, der das Ziel für die Kugel bildet, die von der günstigsten Stellung aus durch die Glocke geht, ist noch schmäler. Er ist um einen ganzen Durchmesser schmäler, nämlich $2,1d - d = 1,1d$.

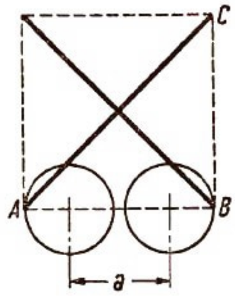
Für den Mittelpunkt der krockierenden Kugel ist das Ziel hingegen, wie wir wissen, gleich $2d$. Folglich ist das Krockieren unter den gegebenen Umständen doppelt so leicht wie das Passieren der Glocke.

15. Das Passieren der Glocke wird unmöglich, sobald die Breite des Tores den Durchmesser der Kugel um weniger als 1,4 mal übertrifft. Dies ergibt sich aus der in der vorigen Aufgabe gegebenen Erklärung.
Sofern das Tor gewölbt ist, verschlechtern sich die Bedingungen für den Durchgang noch mehr.

Figur 21

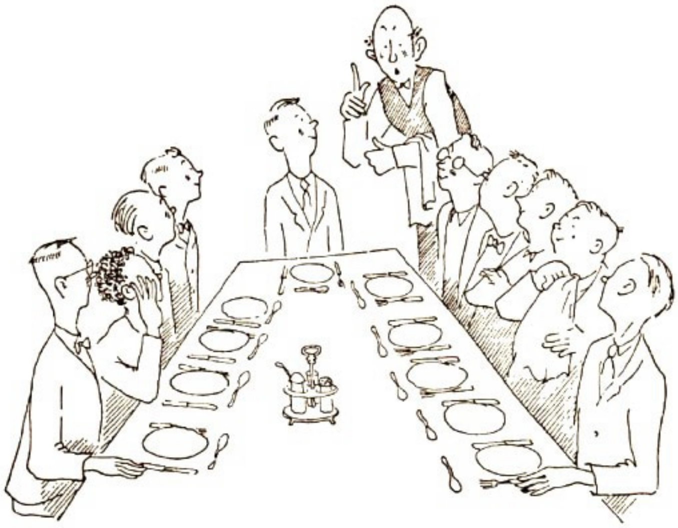


Figur 22



5 UMGRUPPIERUNGEN (PERMUTATIONEN)

5.1 Das kostenlose Mittagessen



Zehn Freunde wollten den Abschluss der Schulzeit durch ein gemeinsames Essen im Restaurant feiern. Als sich alle eingefunden hatten und der erste Gang gebracht war, konnten sie sich über die Tischordnung nicht einigen.
Der eine schlug eine Sitzordnung nach dem Alphabet vor, der andere nach dem Alter, ein dritter nach den Zeugnissen, ein vierter nach der Größe und so fort. Der Streit zog sich in die Länge, die Suppe wurde kalt, und niemand nahm Platz. Eine Einigung brachte der Kellner zustande, indem er sich mit folgender Ansprache an die jungen Leute wandte:

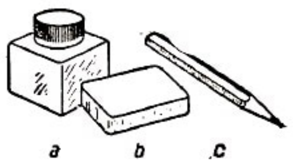
"Meine jungen Freunde, lassen Sie von Ihrem Streit ab. Setzen Sie sich so, wie es sich gerade ergibt, und hören Sie mich an."

Als alle Platz genommen hatten, fuhr der Kellner fort:

"Einer von Ihnen soll aufschreiben, in welcher Reihenfolge Sie jetzt sitzen. Morgen werden Sie wieder zum Mittagessen hierherkommen und sich in anderer Reihenfolge setzen. Übermorgen werden Sie sich wieder anders setzen und so fortfahren, bis Sie jede mögliche Tischordnung ausprobiert haben. Und von dem Tag an, an dem sich Ihre heutige Reihenfolge wiederholt, will ich Sie täglich - das verspreche ich Ihnen feierlich - kostenlos mit den ausgesuchtesten Gerichten bewirten."

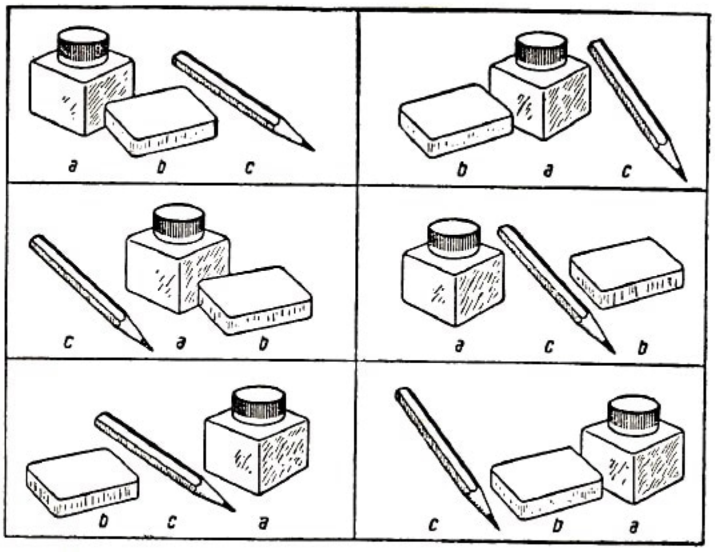
Der Vorschlag fand Anklang. Man kam überein, täglich in dem Restaurant zum Mittagessen zusammenzukommen und die Plätze jedesmal anders zu verteilen, um möglichst bald in den Genuss der kostenlosen Mittagessen zu gelangen.
Diesen Tag hat die Tischgesellschaft indessen nicht erlebt. Und das lag nicht etwa daran, weil der Kellner sein Versprechen nicht erfüllte, sondern daran, dass die Zahl der möglichen Reihenfolgen übermäßig groß ist. Sie beträgt nicht mehr und nicht weniger als 3628800. Eine solche Anzahl von Tagen entspricht, wie sich leicht errechnen lässt, nahezu 10000 Jahren!
Ihr werdet es vielleicht für unwahrscheinlich halten, dass unter 10 Personen eine so große Zahl von Möglichkeiten in Frage kommen kann. Überzeugen wir uns durch eine Berechnung.

Vor allem muss man die Zahl der Veränderungen in einer streng eingehaltenen Reihenfolge ermitteln. Der Einfachheit halber beginnen wir mit einer kleinen Anzahl — mit drei Gegenständen. Wir bezeichnen sie mit a, b und c.



Nun ist festzustellen, auf wieviel Arten sich die Plätze der Gegenstände untereinander auswechseln lassen.
Wir sagen uns, dass, wenn wir den Gegenstand c zunächst beiseite legten, sich die beiden anderen Gegenstände nur auf zwei Arten zu Paaren zusammenstellen ließen.

Sodann fügen wir den Gegenstand jedem dieser Paare hinzu. Wir können dies auf dreierlei Weise tun:
1. hinter dem Paar,
2. vor dem Paar,
3. zwischen den Gegenständen des Paares.
Außer diesen drei Möglichkeiten gibt es für den Gegenstand c keinen anderen Platz. Da wir aber zwei Paare, ab und ba, haben, beträgt die Zahl der Umstellungsmöglichkeiten also $2 \cdot 3 = 6$.



Wir fahren nun mit vier Gegenständen fort, die wir a, b, c und d nennen. Auch diesmal legen wir einen Gegenstand, etwa den mit d bezeichneten, zunächst beiseite und versuchen die verschiedenen Stellungen mit den drei anderen.
Wir wissen bereits, dass für diese 6 Gruppierungsmöglichkeiten bestehen. Auf wieviel Arten lässt sich nun der Gegenstand d jeder dieser 6 Gruppierungen hinzufügen? Offenbar auf 4 Arten:
1. d hinter den 3 anderen Gegenständen,
2. d vor den 3 anderen Gegenständen,
3. zwischen dem 1. und 2. Gegenstand,
4. d zwischen dem 2. und 3. Gegenstand.
Im ganzen sind es demnach $6 \cdot 4 = 24$ Arten; und da $6 = 2 \cdot 3$ und $2 = 1 \cdot 2$ ist, lässt sich die Zahl aller Arten durch nachstehende Formel darstellen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Wenn wir von denselben Erwägungen bei 5 Gegenständen ausgehen, ist für diese Zahlen der Gruppierungsmöglichkeiten gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Bei 6 Gegenständen: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, und so fort.

Kehren wir nun zu den 10 Mittagsgästen zurück. Die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten ergibt sich in diesem Fall aus dem Produkt von

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

und wenn wir uns die Mühe machen, die Ausrechnung vorzunehmen, kommen wir auf die schon erwähnte Zahl 3 628 800.

Die Berechnung wäre umständlicher, wenn es sich bei 5 der 10 Mittagsgäste um Mädchen handelte und diese mit den Jungen am Tisch unbedingt eine bunte Reihe bilden sollten. Die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten ist dann zwar bedeutend geringer, ihre Errechnung aber etwas schwieriger.

Nehmen wir an, einer der Jungen habe sich auf einen beliebigen Platz an den Tisch gesetzt. Die vier anderen können sich dann, falls sie jeden zweiten Stuhl für ein Mädchen frei lassen, auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedene Arten hinsetzen. Da es im ganzen 10 Stühle sind, kann sich der erste Junge auf 10 verschiedene Arten setzen; die Zahl der Sitzarten für alle Jungen ist folglich $10 \cdot 24 = 240$.

Auf wieviel Arten können sich hierauf die 5 Mädchen auf die freien Stühle zwischen den Jungen setzen?
Offenbar auch auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ verschiedene Arten. Und wenn wir nun jede der 240 für die Jungen in Frage kommenden Sitzarten mit jeder der 120 Sitzarten der Mädchen kombinieren, kommen wir auf $240 \cdot 120 = 28000$ mögliche Arten.

Diese Zahl ist um ein Vielfaches geringer als die vorige und würde im ganzen etwas weniger als 79 Jahre in Anspruch nehmen.
Sofern unsere jungen Mittagsgäste ein Alter von 100 Jahren erreichen würden, könnten sie es in diesem Fall dazu bringen, dass ihnen ein kostenloses Mittagessen aufgetragen wird - wenn nicht durch den jetzigen Kellner, dann von einem seiner Nachfolger.

Nachdem wir die Berechnung der Permutation (Veränderung in der Anordnung) kennengelernt haben, vermögen wir auch zu ermitteln, wieviel verschiedene Stellungen der Steine beim "Fünfzehnerspiel" möglich sind. Dabei muss immer das Feld in der unteren rechten Ecke frei bleiben. Mit anderen Worten, wir können die Zahl der Aufgaben errechnen, die uns dieses Spiel stellen kann.
Diese Berechnung läuft auf eine Feststellung der Permutationszahl bei 15 Gegenständen hinaus. Wie wir schon wissen, ist hierzu folgende Multiplikation erforderlich:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 14 \cdot 15$$

Das Resultat ergibt 1 307 674 365 000, das ist mehr als eine Billion.

Die Hälfte dieser riesigen Zahl von Aufgaben lässt sich nicht lösen. Es gibt also in dem genannten Spiel über 600 Milliarden unlösbare Stellungen. Dadurch, dass die Menschen von dieser großen Zahl der unlösbaren Aufgaben keine Ahnung hatten, mag sich zum Teil die Leidenschaft erklären, mit der sie sich dem Fünfzehnerspiel hingaben.
Bemerkt sei noch folgendes: Wenn es möglich wäre, den Steinen in jeder Sekunde eine andere Stellung zu geben und sich ununterbrochen Tag und Nacht damit zu beschäftigen, würde das Ausprobieren aller möglichen Stellungen mehr als 40000 Jahre in Anspruch nehmen.

5.2 Eine Aufgabe aus der Schule

Eine Klasse hat 25 Schüler. Auf wieviel verschiedene Arten können die Sitzplätze verteilt werden? Die Lösung ist für diejenigen, die sich das Vorhergesagte zu eigen gemacht haben, durchaus nicht schwierig. Man multipliziert:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot ... \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25$$

Die Mathematik weist viele Mittel auf, durch die sich eine Berechnung vereinfachen lässt, aber eine Aufgabe in der Art der vorstehenden vermag sie nicht zu erleichtern (falls man das Resultat bis auf die letzte Stelle genau ausrechnen will). Es gibt keine andere Möglichkeit, als diese Zahlen gewissenhaft zu multiplizieren. Nur eine günstige Gruppierung der Multiplikatoren kann die Zeit der Ausrechnung etwas abkürzen.
Das Ergebnis ist ungeheuerlich; es besteht aus 26 Ziffern und stellt eine Zahl dar, die jedes Vorstellungsvermögen übersteigt: 15 511 210 043 330 985 984 000000.

Von allen Zahlen, denen wir bisher begegnet sind, ist diese die größte, und mehr als allen anderen gebührt ihr die Bezeichnung "Zahlenriese".

5.3 Das Umlegen von Münzen

Aus meiner Kindheit - erzählt der Verfasser dieses Büchlein - erinnere ich mich an ein unterhaltsames Spiel mit Münzen, das mir mein älterer Bruder zeigte. Er stellte drei Untertassen nebeneinander und baute auf der ersten von ihnen ein aus 5 Münzen bestehendes Türmchen auf: Unten lag ein Rubelstück und über ihm, der Reihe nach aufgeschichtet, Münzen zu 50, 20, 15 und 10 Kopeken.

Die Münzen sollten auf die dritte Untertasse übertragen werden, wobei drei Vorschriften zu befolgen waren.
Erstens: Es darf auf einmal jeweils nur eine Münze umgelegt werden.
Zweitens: Eine größere Münze darf niemals auf eine kleinere gelegt werden.
Drittens: Vorübergehend können unter Einhaltung der ersten beiden Vorschriften Münzen auch auf die mittlere Untertasse gelegt werden, aber zum Schluss sollen alle Münzen in der ursprünglichen Reihenfolge auf der dritten Untertasse liegen.
Die Vorschriften waren, wie man sieht, nicht kompliziert. Nun hieß es, ans Werk zu gehen.

Ich begann mit dem Umlegen. Das Zehnkopekenstück legte ich auf die dritte, das Fünfzehnkopekenstück auf die mittlere Untertasse - und zauderte. Wohin sollte ich das Zwanzigkopekenstück legen? Es ist ja größer als die beiden zuerst umgelegten Münzen.

"Nun, was denn?" kam mir mein Bruder zu Hilfe. "Lege das Zehnkopekenstück auf die mittlere Untertasse über das Fünfzehnkopekenstück. Dann hast du für das Zwanzigkopekenstück die dritte Untertasse frei."
Das tat ich. Aber schon stand ich vor einer neuen Schwierigkeit. Wohin mit dem Fünfzigkopekenstück?

Doch fand ich bald einen Ausweg: Ich übertrug das Zehnkopekenstück zunächst auf die erste Untertasse, das Fünfzehnkopekenstück auf die dritte und dann auch das Zehnkopekenstück auf die dritte. Jetzt konnte ich das Fünfzigkopekenstück auf die freie mittlere Untertasse legen. Nach einer langen Reihe von Umgruppierungen gelang es mir, auch das Rubelstück von der ersten Untertasse umzulegen und schließlich das ganze Häufchen Münzen auf der dritten Untertasse zusammenzubekommen.

Der Bruder lobte meine Arbeit und fragte, wieviel Umstellungen ich im ganzen ausgeführt hätte.
"Ich habe nicht gezählt."
"Wir wollen einmal nachzählen. Es ist doch interessant zu erfahren, wie man mit der geringsten Zahl von Umstellungen das Ziel erreichen kann. Wenn das Häufchen nicht aus fünf, sondern nur aus zwei Münzen, einem Zehn- und einem Fünfzehnkopekenstück, bestände - wieviel Züge müsste man dann machen?"
"Drei: die zehn Kopeken auf die mittlere Untertasse, die fünfzehn Kopeken auf die dritte und dann auch die zehn Kopeken auf die dritte."

"Richtig. Nun wollen wir noch das Zwanzigkopekenstück hinzunehmen und sehen, wieviel Umstellungen dann nötig sind. Wir machen es so:
Zuerst übertragen wir die beiden kleineren Münzen nacheinander auf die mittlere Untertasse. Dazu brauchen wir, wie wir schon wissen, drei Züge. Dann legen wir das Zwanzigkopekenstück auf die freie dritte Untertasse - ein Zug. Und anschließend übertragen wir die beiden Münzen von der mittleren Untertasse ebenfalls auf die dritte - drei weitere Züge. Im ganzen waren es also $3 + 1 + 3 = 7$ Züge."

"Mit vier Münzen lass mich die Sache einmal selbst untersuchen. Zuerst übertrage ich die drei kleineren Münzen auf die mittlere Untertasse, das sind sieben Züge; dann das Fünfzigkopekenstück auf die dritte Untertasse - ein Zug, und hierauf auch die drei kleineren Münzen auf die dritte Untertasse - nochmals sieben Züge. Zusammen: $7 + 1 + 7 = 15$ Züge."
"Ausgezeichnet. Und bei fünf Münzen?"
"$15 + 1 + 15 = 31$", hatte ich sofort herausgefunden.
"Nun siehst du, du hast die Art der Berechnung schon begriffen. Aber ich will dir zeigen, wie man sie noch vereinfachen kann. Merke dir, dass die Zahlen drei, sieben, fünfzehn, einunddreißig, auf die wir gekommen sind, alle eine Zwei darstellen, die ein oder mehrere Male mit sich selbst multipliziert ist, aber unter Abzug einer Eins. Sieh her!"

Und mein Bruder schrieb folgende Tabelle hin:

$$\begin{aligned} &3 = 2 \cdot 2 - 1 \\ &7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \\ &15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \\ &31 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \end{aligned}$$

"Ich verstehe: So viele Münzen umzulegen sind, so viele Male multipliziert man die Zwei mit sich selbst und zieht zum Schluss eine Eins ab. Ich könnte jetzt die Züge für jede beliebige Zahl von Münzen ausrechnen, zum Beispiel für sieben Münzen:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128 - 1 = 127$$

"Ja, nun hast du dir dieses alte Spiel gut zu eigen gemacht."

Nur noch eine praktische Regel musst du dir merken: Wenn die Zahl der Münzen eine gerade ist, muss man die erste Münze auf die dritte, wenn es eine ungerade Zahl ist, auf die mittlere Untertasse legen."
"Du sagtest - ein altes Spiel. Hast du es denn nicht selbst ausgedacht?"

"Nein, ich habe es nur auf Münzen angewandt. Das Spiel ist sehr alten Ursprungs und soll, wie es heißt, in Indien entstanden sein. Es gibt eine alte Legende, die mit diesem Spiel zusammenhängt. Nach dieser soll es in der Stadt Benares einen Tempel geben, in dem der indische Gott Brahma bei der Schöpfung der Welt drei diamantene Stäbchen aufgestellt und auf einen von ihnen 64 goldene Ringe aufgeschichtet hat.
Der größte Ring liegt unten, und jeder folgende ist kleiner als der vorhergehende. Die Priester des Tempels sind verpflichtet, diese Ringe Tag und Nacht ununterbrochen von einem Stäbchen auf ein anderes zu übertragen, wobei sie das dritte als Hilfsstäbchen benutzen können und im übrigen die Regeln unseres Spiels einhalten müssen: jeden Ring einzeln zu übertragen und keinen größeren auf einen kleineren zu legen. In der Legende heißt es, dass, sobald alle 64 Ringe übertragen sein werden, das Ende der Welt gekommen ist."

"Dann müsste die Welt ja längst untergegangen sein, wenn diese Legende recht hätte!"
"Du scheinst zu glauben, dass die Übertragung der 64 Ringe nicht allzuviel Zeit in Anspruch nehmen kann?"
"Natürlich nicht. Wenn man in einer Sekunde einen Zug macht, sind es ja in einer Stunde 3600 Züge."
"Nun, und?"

"Und in 24 Stunden fast 100000. In zehn Tagen sind es eine Million Züge. Mit einer Million Zügen könnte man, will ich meinen, selbst 1000 Ringe übertragen."
"Du irrst dich. Um nur 64 Ringe umzuschichten, sind, rund gerechnet, 500 Milliarden Jahre erforderlich."
"Wieso denn? Die Zahl der Züge ist doch gleich dem Produkt von 64 Zweien nach Abzug einer Eins, und das beträgt ... Warte, ich werde es gleich ausrechnen!"
"Sehr schön. Und während du rechnest, werde ich Zeit haben, meine Besorgungen zu erledigen."

Der Bruder ging und ließ mich, vertieft in meine Rechenaufgabe, allein. Ich fand zuerst das Produkt von 16 Zweien, multiplizierte diese Zahl 65536 mit derselben Zahl und das Resultat dieser Multiplikation wiederum mit sich selbst. Zum Schluss vergaß ich nicht, eine Eins abzuziehen.
Ich kam auf nachstehende Zahl: 18 446 744 073 709 551 615.
Mein Bruder hatte also recht.

6 GEOMETRISCHE DENKAUFGABEN

Zur Lösung der folgenden Denkaufgaben braucht man nicht das ganze Gebiet der Geometrie zu beherrschen. Auch derjenige wird mit ihnen fertig werden, der nur in bescheidenem Umfang mit den geometrischen Anfangsgründen vertraut ist. Die hier vorgelegten Aufgaben können dem Leser als Prüfstein dafür dienen, ob er wirklich über die geometrischen Kenntnisse verfügt, die er sich ungeeignet zu haben glaubt.

Die wahre Kenntnis der Geometrie besteht nicht nur darin, dass man die Merkmale der Figuren aufzählen kann, sondern versteht, sie im praktischen Leben zur Lösung realer Aufgaben auszunutzen. Welchen Sinn hat der Besitz einer Geige für einen Menschen, der nicht darauf zu spielen versteht?

6.1 Der Wagen

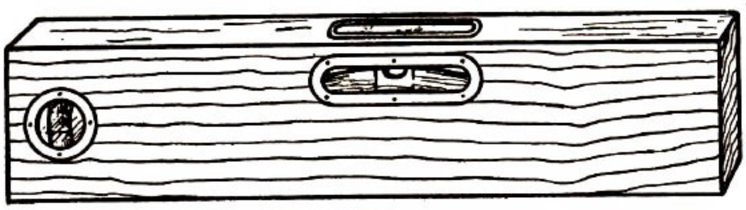
Es gibt Wagen, deren Vorderräder kleiner sind als die Hinterräder.
Warum nutzt sich die vordere Achse dieser Wagen schneller ab, und warum wird sie leichter heiß als die hintere?

6.2 Durch das Vergrößerungsglas betrachtet

Ein Winkel von $1\frac{1}{2}$ Grad wird durch eine Lupe mit vierfacher Vergrößerung betrachtet.
Mit wieviel Grad wird der Winkel unter der Lupe erscheinen?

6.3 Die Wasserwaage

Ihr kennt doch die Wasserwaage mit der kleinen Luftblase, die sich von dem Markierungspunkt entfernt, sobald die Basis der Waage geneigt wird.

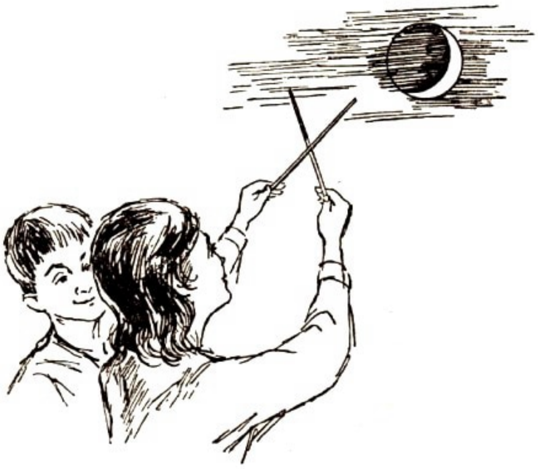


Je größer die Neigung ist, um so weiter entfernt sich das Bläschen von dem Markierungspunkt in der Mitte. Das liegt daran, dass das Bläschen leichter ist als die Flüssigkeit, in der es sich befindet, und daher an der Oberfläche bleibt.

Wenn das Röhrchen gerade wäre, würde das Bläschen bei der geringsten Neigung bis ans Ende des Röhrchens, das heißt bis zu dessen höchstem Punkt, entweichen. Eine solche Wasserwaage wäre sehr unpraktisch. Man benutzt deshalb meist ein gewölbtes Röhrchen.

Bei einer waagerechten Stellung der Wasserwaage befindet sich das Bläschen, das sich auf dem höchsten Punkt des Röhrchens hält, in seiner Mitte. Sobald aber die Wasserwaage geneigt wird, verlagert sich der höchste Punkt des Röhrchens seitwärts und stellt nun nicht mehr seine Mitte dar; das Bläschen entfernt sich daher von dem Markierungspunkt und nimmt in dem Röhrchen einen anderen Platz ein.
(Richtiger wäre es zu sagen: "Der Markierungspunkt entfernt sich vom Bläschen; denn dieses bleibt an seinem Platz, während das Röhrchen mit seinem Markierungspunkt an ihm vorbeigleitet.)

Die Aufgabe besteht darin, festzustellen, um wieviel Millimeter sich das Bläschen vom Markierungspunkt entfernt, wenn die Wasserwaage eine Neigung von 1/2 Grad aufweist und der Radius der Wölbung des Röhrchens 1 Meter beträgt.



6.4 Die Mondsichel

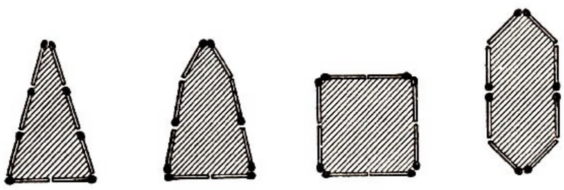
Die Figur der Mondsichel soll durch nicht mehr als 2 gerade Linien in 6 Teile geteilt werden.
Wie ist das zu machen?

6.5 Aus 12 Streichhölzern

Aus 12 Streichhölzern kann man eine kreuzförmige Figur bilden, deren Fläche fünf Streichholzquadraten entspricht.
Die Streichhölzer sollen so umgruppiert werden, dass die Figur eine Fläche umfasst, die nur vier Streichholzquadraten entspricht. Messinstrumente sollen dabei nicht benutzt werden.

6.6 Aus 8 Streichhölzern

Aus 8 Streichhölzern lassen sich recht verschiedenartige, in sich geschlossene Figuren zusammensetzen. Einige solcher Figuren, deren Flächeninhalte natürlich verschieden sind, zeigt die Zeichnung.



Bildet aus den 8 Streichhölzern eine Figur, die einen möglichst großen Flächeninhalt hat.

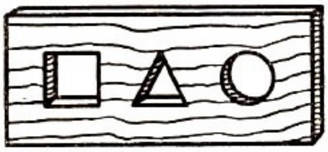
6.7 Der Weg der Fliege

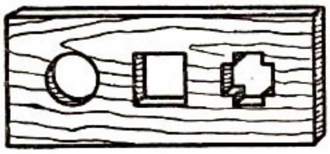
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 Zentimeter vom oberen Rand entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?

Das Gefäß ist 20 Zentimeter hoch und hat einen Durchmesser von 10 Zentimetern.

6.8 Der passende Pfropfen

Die Zeichnung (links) stellt ein Brettchen mit drei Öffnungen dar: einer quadratischen, einer dreieckigen und einer runden. Lässt sich ein Pfropfen von solcher Form herstellen, dass sich mit ihm jede dieser Öffnungen schließen lässt?

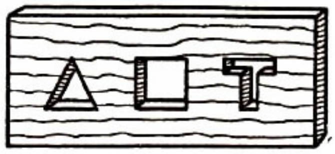




6.9 Der zweite Pfropfen

Wenn ihr mit der vorstehenden Aufgabe zurechtgekommen seid, gelingt es euch vielleicht auch, einen Pfropfen zum Schließen dieser Öffnungen (rechte Abbildung) zu finden.

6.10 Der dritte Pfropfen



Schließlich noch eine Aufgabe gleicher Art: Gibt es einen Pfropfen, der gleichzeitig für diese drei Öffnungen passt?

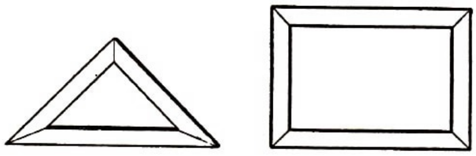
6.11 Durchstecken einer Münze

Nehmt zwei der jetzt in Umlauf befindlichen Münzen zur Hand: ein Zehnpfennigstück und ein Einpfennigstück.
Zeichnet auf ein Stück Papier einen Kreis, der genau dem Umfang des Pfennigstücks entspricht, und schneidet sorgfältig ein kreisrundes Loch aus.
Was meint ihr - lässt sich das Zehnpfennigstück durch diese Öffnung stecken? Hier handelt es sich nicht etwa um eine Falle, sondern um eine ernsthafte geometrische Aufgabe.

6.12 Die Turmhöhe

Wir stehen vor einem Turm, dessen Höhe uns nicht bekannt ist. Wir können jedoch seine Grundlinie messen. Außerdem besitzen wir eine Ansichtspostkarte mit einer fotografischen Abbildung des Turms. Wie lässt sich mit Hilfe dieses Bildes die Höhe des Turms ermitteln?

6.13 Ähnliche Figuren



Diese Aufgabe setzt voraus, dass man Weiß, was in der Geometrie unter 'ähnlich' zu verstehen ist. Es sollen die beiden folgenden Fragen beantwortet werden.
1. Sind bei einem dargestellten Zeichenwinkel das äußere und das innere Dreieck ähnlich?
2. Sind bei einem Bilderrahmen das äußere und das innere Rechteck ähnlich?

6.14 Das Ziegelsteinchen

Ein gewöhnlicher Bauziegel wiegt 3,5 Kilogramm.
Wieviel wiegt ein Spielzeugziegel aus gleichem Material, dessen Abmessungen nur 1/4 so groß sind?

6.15 Die Kirsche

Die Schicht des Fruchtfleisches, das den Stein einer Kirsche umschließt, hat dieselbe Dicke wie der Stein selbst.
Könnt ihr im Kopf berechnen, um wievielmal der Rauminhalt des saftigen Teils größer ist als der des Steins?

6.16 Modell des Eiffelturms

Zum Bau des Eiffelturms in Paris, der ganz aus Eisen besteht und 300 Meter hoch ist, sind etwa 8000000 Kilogramm Eisen gebraucht werden. Ich habe die Absicht, ein genaues Modell des berühmten Turms zu bestellen, das ebenfalls aus Eisen bestehen, aber nicht mehr als 1 Kilogramm wiegen soll.
Wie hoch wird das Modell?

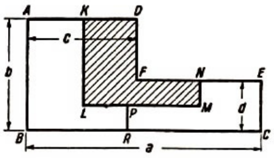
6.17 Zwei Kasserollen

Wir haben in der Küche zwei alte Kupferkasserollen von gleicher Form und gleich dicken Wänden. Das Fassungsvermögen der einen Kasserolle ist achtmal so groß wie das der anderen. Wievielmal so schwer ist die erste?

6.18 Zwei Teekessel

Zwei Teekessel, ein größerer und ein kleinerer von gleicher Form und gleichem Material, sind mit kochendem Wasser gefüllt.
Welcher von ihnen kühlt schneller ab?

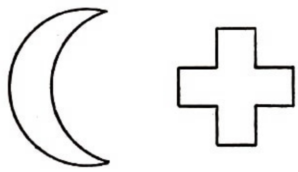
6.19 Wie teilen?



Bekannt ist die Aufgabe, eine Ecke (ein angeschnittenes Rechteck) in vier gleiche Teile zu teilen.
Versucht es, eine ähnliche Figur wie die Ecke unserer Abbildung so in drei Teile zu teilen, dass alle Teile gleich sind. Ist die Lösung dieser Aufgabe möglich?

6.20 Kreuz und Halbmond

Die Zeichnung stellt eine Mondsichel dar, die aus zwei Kreisbogen gebildet ist.
Die Aufgabe besteht darin, das Abzeichen des Roten Kreuzes so zu zeichnen, dass seine Fläche mit derjenigen der Mondsichel geometrisch genau übereinstimmt.



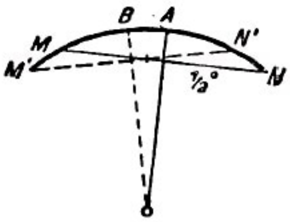
6.21 Auflösungen der Denkaufgaben 6.1 bis 6.20

1. Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe überhaupt nichts mit Geometrie zu tun zu haben. Aber darin besteht eben die Beherrschung dieser Wissenschaft, dass man den geometrischen Kern einer Aufgabe auch dann erkennt, wenn er hinter nebensächlichen Einzelheiten versteckt ist. Unsere Aufgabe ist zweifellos ohne Kenntnis der Geometrie nicht zu lösen.
Warum also nutzt sich die vordere Achse eines Wagens schneller ab als die hintere, wenn die Vorderräder kleiner sind als die Hinterräder?

Auf ein und derselben Fahrstrecke drehen sich die kleineren Räder häufiger als die größeren, weil bei den kleineren Rädern der Kreisumfang kleiner ist und sie deshalb auf der gleichen Strecke eine größere Anzahl Umdrehungen ausführen müssen.
Durch die größere Zahl der Umdrehungen läuft sich die Vorderachse heißer und nutzt sich stärker ab.

2. Wenn ihr etwa annehmen solltet, dass sich unter der Lupe ein Winkel von $1\frac{1}{2}$ Grad $\cdot\ 4 = 6$ Grad ergibt, so habt ihr falsch geraten.
Der Winkel vergrößert sich unter der Lupe nicht.

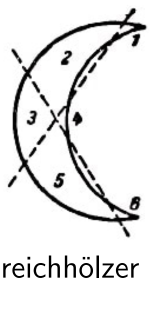
Gewiss, der von dem Winkel eingeschlossene Kreisbogen erscheint vergrößert, aber dasselbe trifft auch für die Radien dieses Kreises zu, so dass die Größe des Zentriwinkels unverändert bleibt.



3. Untersuchen wir die Zeichnung. Die ursprüngliche Stellung des Kreisbogens wird durch MAN und seine neue Stellung durch $M'BN'$ dargestellt, wobei die Sehne $M'N'$ mit der Sehne MN einen Winkel von 1/2 Grad bildet.
Das Bläschen, das sich am Punkt A befand, ist an diesem Punkt verblieben, aber die Mitte MN hat sich nach B verlagert.

Wir ermitteln nun, wie lang der Bogen AB ist, wenn sein Radius bei einem Zentriwinkel von $1/2$ Grad einen Meter beträgt. (Die Länge des Bogens folgt aus der Gleichheit des Winkels, den die Sehnen MN und $M'N'$ miteinander bilden, mit dem Winkel, den die auf den Sehnen senkrecht stehenden Radien AO und BO miteinander bilden.)

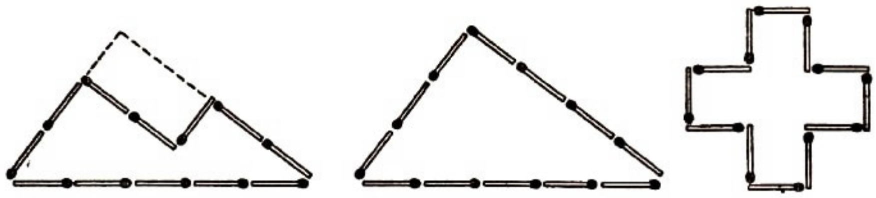
Die Ermittlung ist nicht schwierig. Bei einem Radius von 1 Meter (1000 Millimeter) ist die Länge des vollen Kreisumfangs gleich $2 \cdot 3,14 \cdot 1000 = 6280$ Millimeter.
Da der Kreis 360 Grad oder 720 halbe Grade enthält, erhält man die Länge des Kreisbogens über einen Zentriwinkel von 1/2 Grad durch die Division 6280 Millimeter : 720 = 8,7 Millimeter.
Das Bläschen entfernt sich von dem Markierungspunkt (richtiger: der Markierungspunkt vom Bläschen) etwa 9 Millimeter, also nahezu einen ganzen Zentimeter. Man erkennt leicht, dass die Wasserwaage um so empfindlicher ist, je größer der Radius für die Krümmung des Röhrchens ist.



4. Die geraden Linien muss man so ziehen, wie es in der Zeichnung gezeigt ist. Es ergeben sich dann 6 Teile, die der besseren Übersicht wegen nummeriert werden sind.

5. Die Streichhölzer sind so auszulegen, wie man es in der Zeichnung sieht. Die Fläche dieser

Figur entspricht der vervierfachten Fläche eines "Streichholzquadrats".

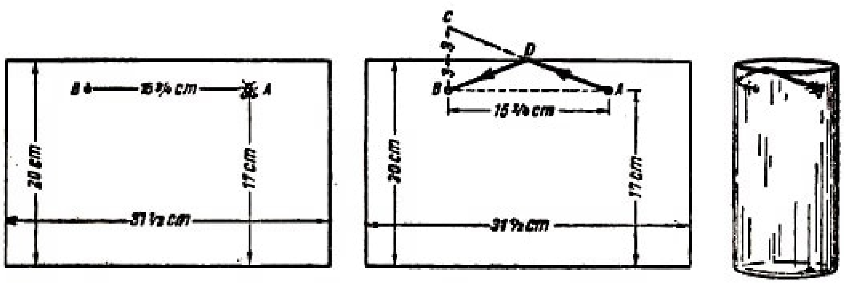


Wie kann man sich davon überzeugen? Wir ergänzen unsere Figur in Gedanken zu einem Dreieck. Nun haben wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Basis drei und dessen Höhe vier Streichhölzern entspricht (Leser, die den sogenannten Pythagoreischen Lehrsatz kennen, werden wissen, warum wir mit Bestimmtheit behaupten können, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist: $3^2 + 4^2 = 5^2$.)
Seine Fläche ist gleich der Hälfte des Produkts aus der Basis und der Höhe, nämlich $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ Quadraten, deren Seiten je eine Streichholzlänge haben. Unsere ursprüngliche Figur nimmt dagegen eine Fläche ein, die, wie aus der Zeichnung ersichtlich, um zwei Streichholzquadrate kleiner ist als die Flache des Dreieckes. Sie entspricht also vier solchen Quadraten.

6. Von allen Figuren mit gleichem Umfang nimmt nachweisbar der Kreis die größte Fläche ein. Aus Streichhölzern lässt sich allerdings kein Kreis bilden; immerhin kann man aus 8 Streichhölzern eine Figur zusammensetzen, die einem Kreis am nächsten kommt: ein regelmäßiges Achteck.

Letzteres stellt somit die Figur dar, die die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt: Sie hat den größtmöglichen Flächeninhalt.

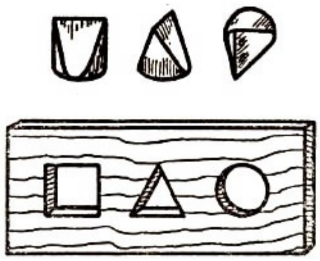
7. Zur Lösung dieser Aufgabe rollen wir die Seitenwand des zylinderförmigen Gefäßes auf eine ebene Fläche ab. Wir erhalten ein Rechteck, dessen Höhe 20 Zentimeter beträgt und dessen Basis dem Kreisumfang des Gefäßes, nämlich $10 \cdot 3\frac{1}{7}$ = rund $31\frac{1}{2}$ Zentimetern, entspricht.



Wir markieren auf diesem Rechteck den Platz der Fliege und den des Honigtropfens. Die Fliege befindet sich im Punkt A 17 Zentimeter von der Basis entfernt; der Honigtropfen im Punkt B auf der gleichen Höhe und vom Punkt A in einer Entfernung, die dem halben Kreisumfang des Gefäßes entspricht, nämlich $15\frac{3}{4}$ Zentimeter.

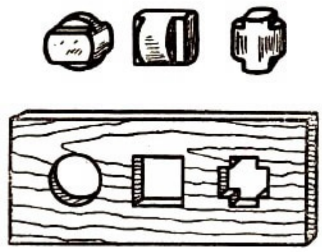
Um jetzt den Punkt zufinden, an dem die Fliege über den Rand des Gefäßes kriechen müsste, verfahren wir folgendermaßen:
Von B ziehen wir eine gerade Linie senkrecht zu der oberen Seite des Rechteckes und setzen sie in derselben Länge fort, wobei wir zu dem Punkt C kommen. Diesen Punkt verbinden wir durch eine gerade Linie mit Punkt A. Punkt D bezeichnet dann die Stelle, an der die Fliege über den Rand kriechen müsste, und die Strecke ADB stellt den kürzesten Weg der.

Nachdem wir auf dem abgewickelten Rechteck den kürzesten Weg gefunden haben, fügen wir es wieder zu einem Zylindermantel zusammen, damit wir sehen können, wie die Fliege kriechen müsste, um am schnellsten zu dem Honigtropfen zu gelangen.

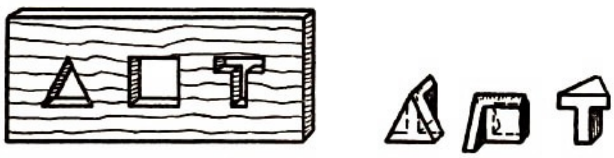


8. Einen Pfropfen von der in diesem Falle erforderlichen Art gibt es. Er hat die in der Zeichnung dargestellte Form. Man erkennt leicht, dass sich mit einem solchen Pfropfen sowohl eine quadratische als auch eine dreieckige oder runde Öffnung schließen lässt.

9. Auch für diese Öffnungen - eine quadratische, eine runde und eine kreuzförmige - gibt es einen für alle passenden Pfropfen. Wir sehen ihn in drei verschiedenen Stellungen dargestellt.

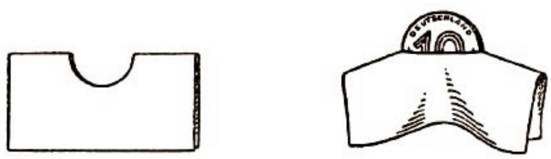


10. Auch einen solchen Pfropfen gibt es; er ist in der Zeichnung von drei Seiten gezeigt.



Vor Aufgaben der hier behandelten Art sehen sich häufig die technischen Zeichner gestellt, wenn sie auf Grund dreier Projektionen eines Maschinenteils dessen Form feststellen sollen.

11. So sonderbar es scheinen mag, aber es ist durchaus möglich, ein Zehnpfennigstück durch eine so kleine Öffnung zu stecken. Das Stück Papier wird so auseinandergebogen, dass die runde Öffnung einen geraden Schlitz bildet; durch einen solchen Schlitz geht das Zehnpfennigstück hindurch.



Eine geometrische Berechnung kann uns dazu verhelfen, diesen auf den ersten Blick komplizierten Kniff zu verstehen. Ein Einpfennigstück hat einen Durchmesser von 17 Millimetern und, wie sich leicht errechnen lässt, einen Kreisumfang von rund $53\frac{1}{2}$ Millimetern.
Die Länge des geraden Schlitzes muss naturgemäß halb so groß sein wie der Kreisumfang der Öffnung und beträgt demnach $26\frac{3}{4}$ Millimeter. Andererseits hat das Zehnpfennigstück einen Durchmesser von 21 Millimetern; es geht also durch einen $26\frac{3}{4}$ Millimeter breiten Schlitz bequem hindurch, selbst wenn man seine Dicke ($1\frac{1}{2}$ Millimeter) in Betracht zieht.

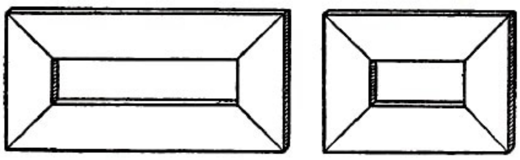
12. Um auf Grund einer fotografischen Aufnahme die tatsächliche Höhe des Turms festzustellen, muss man zunächst die Höhe des Turms und die Länge seiner Grundlinie (Basis) möglichst genau auf dem Bild ausmessen.

Nehmen wir die Höhe auf dem Bild mit 95 Millimetern und die Länge der Basis mit 19 Millimetern an. Dann messen wir die tatsächliche Länge der Turmbasis aus und wollen annehmen, wir seien dabei auf 14 Meter gekommen.
Nachdem wir dies getan haben, stellen wir folgende Erwägungen an: Die fotografische Abbildung des Turms und seine tatsächlichen Umrisse sind einander geometrisch ähnlich.

Das Verhältnis von Höhe zur Basis auf dem Bild entspricht folglich dem Verhältnis von tatsächlicher Turmhöhe zur Länge seiner Basis.

Das erstere Verhältnis ist 95:19, also 5; hieraus ergibt sich, dass die Höhe des Turms fünfmal so groß ist wie die Länge seiner Basis und in der Wirklichkeit $14 \cdot 5 = 70$ Meter beträgt.
Der Turm ist demnach 70 Meter hoch.

Bemerkt sei jedoch, dass für die Ermittlung der tatsächlichen Höhe eines Turms nicht jede Aufnahme geeignet ist, sondern nur eine solche, in der die Proportionen nicht verzerrt sind, wie es bei ungeübten Fotografen oft vorkommt (man spricht dann von "stürzenden Linien").



13. Oft wird auf beide in der Aufgabe gestellten Fragen bejahend geantwortet.
Tatsächlich aber sind nur die beiden Dreiecke ähnlich, das äußere und das innere Rechteck in der Figur des Rahmens sind es dagegen nicht.

Für die Ähnlichkeit der Dreiecke genügt eine Gleichheit ihrer Winkel, und da die Seiten des äußeren und des inneren Dreiecks parallel laufen, sind diese Figuren ähnlich. Aber für die Ähnlichkeit anderer vieleckiger Figuren ist die Gleichheit der Winkel (oder, was dasselbe ist, die Parallelität der Seiten) allein nicht genügend; außerdem müssen die Seiten vieleckiger Figuren proportional zueinander sein.

Für das äußere und innere Rechteck in der Figur eines Rahmens tritt dies nur bei Quadraten (und überhaupt bei Rhomben) zu. in allen anderen Fällen dagegen verhalten sich die Seiten des äußeren Vierecks nicht proportional zu den Seiten des inneren, so dass die Figuren nicht ähnlich sind. Bei den rechteckigen Rahmen mit breiten Leisten auf dieser Seite sehen wir das ganz deutlich.
Bei dem linken Rahmen verhalten sich die äußeren Seiten zueinander wie 2:1, die inneren wie 4:1. Beim rechten Rahmen verhalten sich die äußeren Seiten wie 4:3, die inneren wie 2:1.

14. Die Antwort, dass das Spielzeugziegelchen $1/4$ von 3,5 Kilogramm wiege, wäre völlig falsch. Das Ziegelchen hat nicht nur ein Viertel der Länge eines gewöhnlichen Ziegels, sondern ist auch ein Viertel so breit und ein Viertel so hoch; sowohl sein Rauminhalt als auch sein Gewicht sind deshalb $1/4 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/64$ des Normalziegels.
Die richtige Antwort lautet also: Das Spielzeugziegelchen wiegt 3500 Gramm : 64 = rund 55 Gramm.

15. Aus den Bedingungen der Aufgabe geht hervor, dass der Durchmesser der ganzen (als Kugel angenommenen) Kirsche dreimal so groß ist wie der Durchmesser des (ebenfalls kugelförmigen) Steins. Der Rauminhalt der Kirsche ist folglich $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mal so groß wie der des Steins;

auf den Stein entfällt 1/27 des gesamten Rauminhalts, der 26 mal so groß wie der des Steins ist.
Das Fruchtfleisch hat also den 26fachen Rauminhalt von dem des Steins.

16. Wenn der Originalbau 8000000 mal so schwer ist wie das Modell und beide aus dem gleichen Metall hergestellt sind, dann muss der Rauminhalt des Originalbaus 8000000 mal so groß sein wie der des Modells.
Wir wissen bereits, dass sich die Rauminhalte von Körpern zueinander verhalten wie die dritte Potenz ihrer Höhen. Folglich muss der Originalbau 200 mal höher sein als das Modell, denn

$$200 \cdot 200 \cdot 200 = 8000000$$

Die tatsächliche Höhe des Turms beträgt 300 Meter. Hiernach ist die Höhe des Modells 300 Meter : 200 $= 1\frac{1}{2}$ Meter. Das Modell hat nahezu Manneshöhe.

17. Beide Kasserollen dieser Aufgabe stellen geometrisch ähnliche Körper dar. Wenn das Fassungsvermögen der größeren Kasserolle achtmal so groß ist, sind ihre Längenmaße doppelt so groß; sie ist also doppelt so hoch und doppelt so breit.
Daraus ergibt sich, dass ihre Oberfläche $2 \cdot 2 = 4$ mal so groß ist, denn die Oberflächen derartiger Körper verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Längenmaße.
Bei gleicher Dicke der Wände hängt das Gewicht der Kasserolle von der Größe ihrer Oberfläche ab. Hieraus ergibt sich die Antwort auf die in unserer Aufgabe gestellte Frage:
Die größere Kasserolle ist viermal so schwer wie die kleinere.

18. Diese auf den ersten Blick nicht mathematische Aufgabe wird im Grunde genommen mit denselben geometrischen Schlussfolgerungen gelöst, die wir in der vorhergehenden Aufgabe angewandt haben.
Die Abkühlung erfolgt in der Hauptsache an der Oberfläche. Infolgedessen wird derjenige Kessel schneller abkühlen, bei dem auf jede Einheit seines Rauminhalts (Volumens) eine größere Oberfläche entfällt.

Wenn ein Kessel x-mal so hoch und so breit ist wie der andere, so ist seine Oberfläche um x^2, sein Volumen um x^3 mal so groß; auf eine Einheit der Oberfläche entfällt bei dem größeren Kessel ein x-mal so großes Volumen. Der kleinere Kessel muss demnach schneller abkühlen.

Hieraus erklärt sich unter anderem auch, warum die Finger oder die Nase frostempfindlicher sind und leichter erfrieren als andere Teile unseres Körpers, deren Oberfläche im Verhältnis zu ihrem Volumen nicht so groß ist.

Und hierhin gehört schließlich auch noch folgende Aufgabe:
Warum brennt ein Span schneller an als ein dickes Holzscheit, von dem er abgehackt ist?
Die Erhitzung geht von der Oberfläche aus (weil die Entflammbarkeit gleicher Stoffe von verschiedener geometrischer Form entscheidend von der Möglichkeit des Sauerstoffzutritts abhängt) und erstreckt sich über das ganze Volumen des Körpers. Daher muss man die Oberfläche und das Volumen des Spats (nehmen wir an, er habe einen quadratischen Querschnitt) mit der Oberfläche und dem Volumen eines Holzscheits von gleicher Länge und ebenfalls quadratischem Querschnitt vergleichen, um festzustellen, eine wie große Oberfläche in beiden Fällen auf jeden Kubikzentimeter Holzmasse entfällt.
Wenn das Scheit zehnmal so dick ist wie der Span, dann sind seine Seitenflächen ebenfalls zehnmal so groß wie die Oberfläche des Spans, während sein Volumen hundertmal so groß ist wie das Volumen des Spans. Folglich entfällt bei dem Span auf jede Einheit der Oberfläche ein zehnmal kleineres Volumen als beim Scheit: Die gleiche Wärmemenge erwärmt beim Spam

eine zehnmal so kleine Menge an Stoff, und daher fängt mit derselben Wärmemenge der Span schneller Feuer als das Scheit.
Wir haben dabei allerdings völlig außer acht gelassen, dass Holz ein schlechter Wärmeleiter ist. Unsere Berechnungen sind daher ungenau; sie sollen nur den allgemeinen Gang des Prozesses charakterisieren.

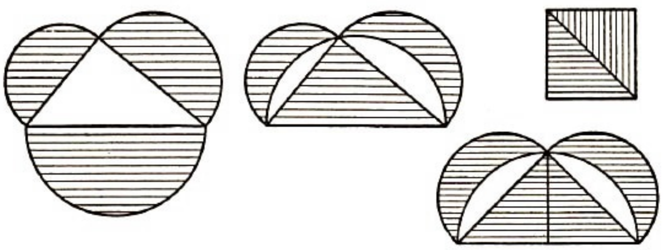
19. Das Charakteristische dieser Aufgabe besteht darin, dass sie sich nicht bei allen beliebigen a, b, c, d lösen lässt, sondern nur bei ganz bestimmten.
Wir wünschen, dass die schraffierte Ecke in der Abbildung jeder der unschraffierten Ecken entsprechen soll. Die Seite LM ist, wie man deutlich sieht, länger als KL und muss folglich AB entsprechen. LM muss aber andererseits RC entsprechen; folglich ist $LM = RC = b$. Hieraus folgt $BR = a - b$.
BR muss aber KL und CE entsprechen. Daher $BR = KL = CE$, also $a - b = d$ und $KL = d$.

Wir sehen, dass a, b und d nicht willkürlich gewählt werden können. Die Seite d muss der Differenz zwischen den Seiten a und b entsprechen. Doch damit nicht genug. Wir werden gleich sehen, dass alle Seiten bestimmten Teilen der Seite a entsprechen müssen.

Offensichtlich ist $PR + KL = AB$ oder $PR + (a - b) = b$, also $PR = 2b - a$. Wenn wir die entsprechenden Seiten der schraffierten und der rechten unschraffierten Ecke miteinander vergleichen, dann muss $PR = MN$ sein, also $PR = \frac{d}{2}$; hieraus folgt: $\frac{d}{2} = 2b - a$.
Aus dem Vergleich der letzten Gleichung mit $a - b = d$ kommen wir auf $b = \frac{3}{5}a$ und $d = \frac{2}{5}a$. Wenn wir jetzt die schraffierte und die linke unschraffierte Figur miteinander vergleichen, sehen wir, dass $AK = MN$ sein muss, also auch $AK = PR = \frac{1}{5}a$.

Auf dieselbe Weise überzeugen wir uns davon, dass $KD = PR = \frac{1}{5}a$ und folglich $AD = \frac{2}{5}a$ u sein muss.
Hieraus geht hervor, dass man die Seiten unserer Figur nicht willkürlich wählen kann. Sie müssen bestimmte Bruchteile, nämlich $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{5}$ der Seite a darstellen. Nur in diesem Falle ist die Lösung möglich.

20. Leser, die von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises gehört haben, werden wahrscheinlich der Ansicht sein, dass auch bei der vorliegenden Aufgabe eine streng geometrische Lösung unmöglich sei. Wenn sich aus einem vollen Kreis kein gleich großes Quadrat bilden lässt - so werden viele urteilen -, dann ist es auch unmöglich, aus einer aus zwei Kreisbogen zusammengesetzten Sichel ein Rechteck zu bilden.

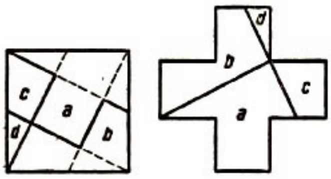


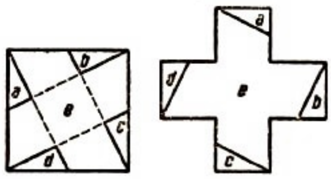
Indessen, die Aufgabe ist geometrisch einwandfrei lösbar, wenn man sich einer interessanten Folgerung des bekannten Pythagoreischen Lehrsatzes bedient. Sie besagt, dass die Summe der Flächeninhalte von Halbkreisen über den Katheten einem Halbkreise über der Hypotenuse entspricht.
Wenn wir den großen Halbkreis auf die andere Seite umklappen, sehen wir, dass die beiden schraffierten kleinen Sicheln zusammen so groß sind wie das Dreieck. (In der Geometrie kennt

man diese Stellung unter der Bezeichnung "Lehrsatz von den Hippokratischen Möndchen".) Wenn man ein gleichschenkliges Dreieck nimmt, dann entspricht jedes einzelne Sichelchen der Hälfte dieses Dreiecks.

Hieraus geht hervor, dass man ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bilden kann, dessen Fläche derjenigen der Sichel entspricht.
Und da ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck leicht in ein gleich großes Quadrat umzuwandeln ist, lässt sich auch aus unserer Sichel durch rein geometrische Konstruktion ein gleich großes Quadrat bilden.

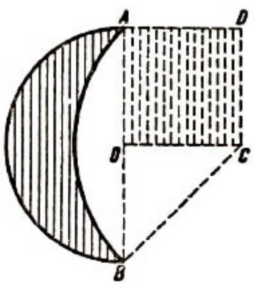
Es bleibt nur noch übrig, dieses Quadrat in ein gleich großes Abzeichen des Roten Kreuzes umzugestalten (das bekanntlich aus 5 aneinandergefügten gleich großen Quadraten besteht). Es gibt mehrere Arten zur Ausführung einer solchen Konstruktion; zwei von ihnen werden durch die Abbildungen veranschaulicht. Beide Konstruktionen sehen als erstes eine Verbindung der Quadratecken mit der Mitte der gegenüberliegenden Seiten vor.





Eine wichtige Bemerkung: Eine Sichel lässt sich nur dann in ein gleich großes Kreuz umgestalten, wenn sie aus zwei Kreisbogen gebildet ist: aus dem äußeren Halbkreis und einem Viertel des inneren Kreises, entsprechend dem größeren Radius. (Die Mondsichel, die wir am Himmel sehen, hat eine etwas andere Form: Ihr äußerer Bogen stellt einen Halbkreis, ihr innerer Bogen dagegen eine Halbellipse dar. Von Künstlern wird die Mondsichel oft falsch dargestellt, so als bestünde sie aus Kreisbogen.)

Ein Kreuz, das der Größe der Sichel entspricht, wird demnach folgendermaßen konstruiert: Man verbindet die Spitzen A und B der Sichel durch eine Gerade; von dem Punkt O in der Mitte dieser Geraden zieht man eine Senkrechte; $OC = OA$. Das gleichschenklige Dreieck OAC wird zum Quadrat $OADC$ ergänzt, das man auf eine der beiden gezeigten Arten in ein Kreuz umgestaltet.



7 OHNE METERMASS

7.1 Ausmessen eines Weges durch Schritte

Wenn ihr eine Strecke ausmessen wollt, wird ein Metermaß oder Messband nicht immer zur Hand sein. Es ist nützlich, zu wissen, wie man sich ohne Metermaß behelfen kann, um wenigstens ein ungefähr richtiges Ergebnis zu bekommen.

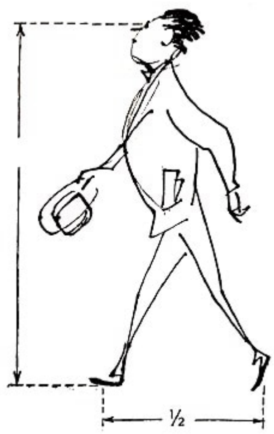
Das Ausmessen einer mehr oder weniger langen Strecke, zum Beispiel auf Wanderungen, geschieht am einfachsten durch Abschreiten.
Hierzu ist erforderlich, dass man die Länge seines Schrittes kennt und Schritte zu zählen versteht. Sie sind natürlich nicht immer gleich lang: Wir können kleine Schritte machen und können, wenn wir wollen, auch weiter ausschreiten.

Aber immerhin, bei normalem Gehen sind unsere Schritte ungefähr gleich lang, und wenn wir ihre Durchschnittslänge kennen, können wir eine Entfernung ohne große Fehler durch Schritte ausmessen.

Um die Durchschnittslänge seines Schrittes zu ermitteln, misst man die Gesamtlänge vieler Schritte und errechnet hiernach die Länge eines einzelnen. Hierbei kann man begreiflicherweise nicht ohne Messband auskommen.

Wir ziehen das Band über eine ebene Fläche und messen 20 Meter ab. Dann markieren wir diese Linie auf dem Boden und legen das Band beiseite. Nun gehen wir die Linie mit normalen Schritten ab und zählen die gemachten Schritte. Möglicherweise ergibt sich dabei zum Schluss ein Rest, der kleiner ist als ein ganzer Schritt.
Wenn der Rest weniger ausmacht als einen halben Schritt, kann man ihn einfach weglassen; ist er größer als ein halber Schritt oder gleich einem halben Schritt, zählt man ihn für einen ganzen. Indem wir die Gesamtlänge von 20 Metern durch die Zahl der Schritte dividieren, kommen wir auf die Durchschnittslänge eines Schrittes. Dieses Maß merken wir uns, um davon Gebrauch zu machen.

Damit man sich nicht verzählt, kann man, besonders wenn es sich um größere Entfernungen handelt, folgendermaßen verfahren:
Man zählt zunächst nur 10 Schritte; nach jeweils 10 Schritten wird ein Finger der linken Hand eingebogen. Sobald alle Finger der linken Hand eingebogen, also 50 Schritte zurückgelegt sind, biegt man einen Finger der rechten Hand ein.
Auf diese Weise kann man bis zu 250 Schritten zählen, worauf man wieder von vorn anfängt und sich nur zu merken hat, wieviel mal alle Finger der rechten Hand eingebogen wurden.



Wenn wir am Ende einer Strecke alle Finger der rechten Hand zweimal eingebogen hatten und dazu nochmals 3 Finger der rechten und 4 Finger der linken Hand, dann bedeutet das, dass wir

$$2 \cdot 250 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 10 = 690 \quad \text{Schritte}$$

gemacht haben. Hinzuzufügen wären noch die wenigen Schritte, die wir vielleicht gemacht haben, nachdem wir zum letztenmal einen Finger der linken Hand eingebogen haben.

Erwähnt sei bei dieser Gelegenheit folgende alte Regel: Die Durchschnittslänge eines Schrittes ist bei einem erwachsenen Menschen annähernd die Hälfte des Abstandes zwischen Augen und Fußsohlen.
Eine andere alte praktische Regel bezieht sich auf die Geschwindigkeit beim Gehen: der Mensch geht in einer Stunde soviel Kilometer, wie er Schritte in drei Sekunden macht.
Diese Regel trifft aber nur bei einer bestimmten und zudem ziemlich großen Schrittlänge zu. Nehmen wir an, die Länge eines Schrittes sei gleich x Meter und die Zahl der Schritte in 3 Sekunden gleich y. Dann geht der Fußgänger in 3 Sekunden xy Meter und in einer Stunde (3600 Sekunden) 1200 xy Meter oder 1,2 xy Kilometer.
Die Übereinstimmung dieser Entfernung mit der Anzahl der in 3 Sekunden gemachten Schritte drückt sich durch folgende Gleichung aus:

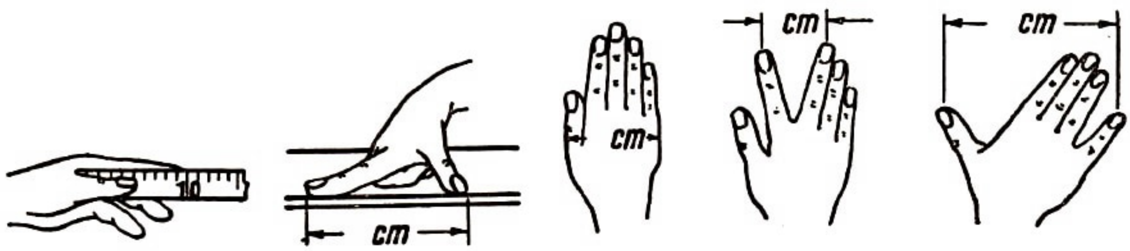
$$1,2xy = y \qquad \text{oder} \qquad 1,2x = 1 \qquad \text{somit} \qquad x = 0,83 \text{ Meter}$$

Wenn die erste Regel richtig ist, derzufolge die Schrittlänge vom Wuchs des Menschen abhängt, dann trifft die zuletzt untersuchte Regel nur für Menschen von mittlerem Wuchs (etwa 1,75 Meter) zu.

7.2 Das lebende Metermaß

Zum Ausmessen von Dingen mittlerer Größe kann man in Ermangelung eines Metermaßes folgendermaßen verfahren:
Man führt eine Schnur oder einen Stock von der Spitze des seitwärts ausgestreckten Armes bis zur Schulter der anderen Seite; wir erhalten ein Längenmaß, das bei einem erwachsenen Mann ungefähr einem Meter entspricht.
Eine andere Art, annähernd 1 Meter auszumessen, besteht darin, dass man Daumen und Zeigefinger möglichst weit auseinanderspreizt und den Abstand zwischen den beiden Fingerspitzen sechsmal an einer geraden Linie abmisst.

Der letzte Hinweis führt uns zu der Fertigkeit, mit "bloßen Händen" zu messen. Hierzu gehört nur, dass man seine Hand ausmisst und sich die einzelnen Maße gut merkt.

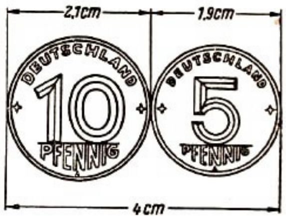


Aber was soll man an der Hand ausmessen? Vor allem die Breite der Handfläche. Bei einem erwachsenen Menschen ist sie etwa 10 Zentimeter breit. Eure Handfläche ist vielleicht etwas schmaler; ihr müsst euch dann den Unterschied merken.

Ferner misst man den Abstand zwischen den Spitzen von Zeige- und Mittelfinger, die möglichst weit auseinandergespreizt werden. Außerdem ist es zweckmäßig, die Länge des Zeigefingers zu kennen, den man von der Daumenbasis aus misst.
Und endlich messen wir den Abstand zwischen den Spitzen des Zeigefingers und des kleinen Fingers in auseinandergespreiztem Zustand.

Unter Ausnutzung dieses "lebenden Metermaßes" sind wir in der Lage, kleinere Gegenstände zu messen.

7.3 Messungen mit Hilfe von Münzen



Einen guten Dienst kann uns auch unser Kleingeld leisten. Viele wissen nicht, dass der Durchmesser des Einpfennigstückes genau 17 Millimeter und der Durchmesser des Fünfpfennigstückes genau 19 Millimeter beträgt, so dass diese beiden Münzen nebeneinandergelegt rund $3\frac{1}{2}$ Zentimeter ergeben.

Das Zehnpfennigstück hat einen Durchmesser von 21 Millimetern und das Fünfzigpfennigstück 23 Millimeter Durchmesser. Wenn ihr einige Münzen bei euch habt, könnt ihr nachstehende Längen ziemlich genau ausmessen:

1 Einpfennigstück + 1 Fünfpfennigstück rund	$3\frac{1}{2}$ Zentimeter
1 Fünfpfennigstück + 1 Zehnpfennigstück	4 Zentimeter
5 Fünfpfennigstücke	$9\frac{1}{2}$ Zentimeter
5 Zehnpfennigstücke	$10\frac{1}{2}$ Zentimeter
6 Einpfennigstücke rund	10 Zentimeter

Wenn ihr nun wisst, dass ein Fünf- und ein Zehnpfennigstück nebeneinandergelegt 4 Zentimeter ergeben, könnt ihr euch im Notfall selbst ein Zentimetermaß herstellen, indem ihr das so gefundene Maß auf einen Papierstreifen übertragt und diesen zweimal zusammenfaltet. Dann habt ihr ein Zentimetermaß von 4 Zentimeter Länge.
Ihr seht, dass man mit etwas Mühe und bei einiger Findigkeit auch ohne Metermaß praktisch brauchbare Messungen vornehmen kann.

Hinzugefügt sei noch, dass unsere Münzen in geeigneten Fällen nicht nur als Zentimetermaße, sondern auch als handliche Gewichte beim Auswiegen von Gegenständen dienen können. Ihre Gewichte könnt ihr mit Hilfe einer Briefwaage selbst feststellen. Die Geldstücke müssen freilich noch neu und nicht abgenutzt sein.

8 DENKAUFGABEN MIT ZAHLENRIESEN

8.1 Ein vorteilhaftes Geschäft

Wo und wann sich diese Geschichte ereignet hat, lassen wir dahingestellt sein. Vielleicht, und sogar wahrscheinlich, hat sie sich überhaupt nicht ereignet.
Aber wie dem auch sei, sie ist so unterhaltsam, dass es sich lohnt, sie anzuhören. Nehmen wir einmal an, sie habe sich folgendermaßen zugetragen:

Ein holländischer Millionär, der seine Kaffeeplantagen in Niederländisch-Indien inspiziert hatte, kam in ungewöhnlich gedrückter Stimmung von seiner Reise zurück. Er konnte es nicht fassen, dass das indonesische Volk, die Arbeiter und Bauern, für ihre Freiheit kämpfen und nicht mehr für die Plantagenbesitzer, sondern für sich selbst arbeiten wollen.
Während der ganzen Schiffsreise machte er sich Gedanken, wie er es anstellen sollte, für seine bisherigen riesigen Gewinne, die er jetzt entschwinden sah, einen Ausgleich zu finden. Er trank, um besser nachdenken zu können, ungeheure Mengen Tee und viel Gläschen "Advokatje" (Eierkognak), aber davon wurde er auch nicht schlauer.

Als er in Holland an Land ging und in den Zug nach Amsterdam einstieg, kam ihm der Zufall zu Hilfe:
Er machte eine Bekanntschaft. Als er sein Haus betraf, hatten sich seine Sorgenfalten geglättet, und sein rosiges Gesicht glänzte vor Zufriedenheit.

"Es gibt doch glückliche Zufälle", erzählte er zu Hause.
"Nicht umsonst heißt es, dass, wo viel ist, noch mehr hinzukommt. So geht es auch mit meinem Geld. Und ganz unerwartet! Da habe ich unterwegs einen Unbekannten getroffen. Unscheinbar sah er aus, und es wäre mir nicht eingefallen, mich mit ihm zu unterhalten. Aber er fing selbst an, als er merkte, dass ich wohlhabend bin.
Und zu guter Letzt hat er mir ein Geschäftchen vorgeschlagen - so vorteilhaft, dass mir beinahe der Atem wegblieb.

'Wollen wir', hat er gesagt, 'so einen Vertrag machen: Ich bringe dir einen Monat lang jeden Tag hunderttausend Gulden. Nicht umsonst, natürlich, aber die Bezahlung macht nicht viel aus.'

Am ersten Tag soll ich nach dem Vertrag - es ist lächerlich zu sagen - im ganzen einen Cent zahlen. Ich traute meinen Ohren nicht.
'Einen Cent?' fragte ich zurück.
'Einen Cent', antwortete er. 'Für das zweite Hunderttausend wirst du zwei Cent zahlen.'
'Nun - und weiter?' fragte ich ungeduldig.
'Weiter so: Für das dritte Hunderttausend zahlst du vier Cent, für das vierte acht, für das fünfte sechzehn. Und so den ganzen Monat, jeden Tag zweimal mehr als am vorhergehenden.'
'Und dann ?' fragte ich.
'Das ist alles', sagte er. 'Mehr verlange ich nicht. Aber der Vertrag muss genau erfüllt werden: Jeden Morgen bringe ich dir hunderttausend Gulden, und du zahlst, was vereinbart ist. Vor einem Monat darfst du nicht aufhören.'

Hunderttausend Gulden gibt er für einen Cent her! Wenn das Geld nicht falsch ist, kann der Mann nicht ganz bei Verstand sein. Aber das Geschäft ist gut, man muss es ausnützen.

'Gut', sage ich. 'bring das Geld! Meinen Teil werde ich pünktlich zahlen. Pass aber selbst auf, dass alles in Ordnung ist: Richtiges Geld musst du bringen!'
'Sei unbesorgt', sagte er. 'Morgen früh komme ich.'
Ich bin nur bange, dass er nicht kommt. Wenn er nur nicht dahinterkommt, dass er sich in ein allzu schlechtes Geschäft eingelassen hat! Nun, bis morgen ist nicht mehr lange zu warten."

Der Tag verging. Am nächsten Morgen wurde ans Fenster des Millionärs geklopft: Es war der Unbekannte, den er unterwegs getroffen hatte.
"Das Geld ist bereit", sagte er. "Meinen Teil habe ich gebracht."

Und in der Tat, nachdem er ins Zimmer getreten war, packte der merkwürdige Mann das Geld aus - richtiges Geld, kein Falschgeld. Er zählte genau hunderttausend Gulden ab und sprach:
"Hier hast du meine vertragliche Leistung. Jetzt bist du an der Reihe."
Der Millionär legte einen Cent auf den Tisch und beobachtete mit Bangen, ob der Gast die Münze nehmen oder sich eines anderen besinnen und sein Geld wieder einstecken würde. Der Fremde sah sich die Münze an, wog sie in der Hand und steckte sie in seinen Beutel.

"Morgen komme ich um dieselbe Zeit. Vergiss nicht, zwei Cent bereitzuhalten", sagte er und ging davon.
Der Millionär traute seinem Glück nicht: hunderttausend Gulden wie vom Himmel gefallen!
Er zählte das Geld noch einmal, prüfte es sorgfältig auf die Echtheit: Alles war in Ordnung. Nun brachte er das Geld in Sicherheit und sah der nächsten Zahlung entgegen. Nachts befielen ihn Zweifel. Sollte es sich etwa um einen Räuber handeln, der als Einfaltspinsel auftritt, um das geheime Versteck des Geldes auszukundschaften und später mit seiner Bande einen Überfall auszuführen?

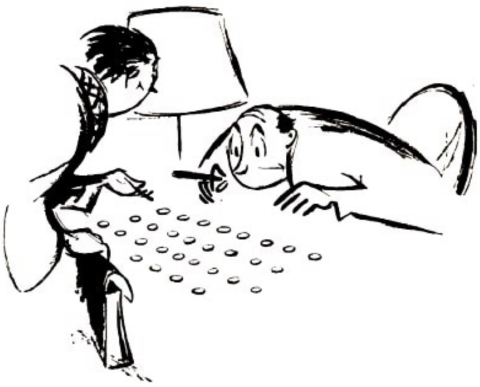
Der Millionär sicherte die Tür möglichst gut, hielt abends Ausschau aus dem Fenster und konnte lange nicht einschlafen. Morgens wiederum ein Klopfen am Fenster: Der Fremde war mit dem Geld da. Er zählte hunderttausend Gulden ab, nahm seine zwei Cent in Empfang und sagte im Weggehen: "Denk daran, morgen vier Cent bereitzuhaben!"

Wieder freute sich der Millionär; das zweite Hunderttausend ist ihm in den Schoß gefallen. Und nach einem Räuber sieht der Fremde nicht aus: Er schaut sich nicht um, spioniert nicht, sondern will nur seine Cents haben.
Ein komischer Kauz! Von dieser Art müsste es möglichst viele auf Erden geben, klugen Leuten ginge es dann gut.

Der Fremde stellte sich auch am dritten Tag ein, und der Millionär heimste für 4 Cent die dritten hunderttausend Gulden ein.

Ein weiterer Tag verging, und er erhielt auf dieselbe Weise das vierte Hunderttausend für 8 Cent. Das fünfte Hunderttausend folgte für 16 Cent, das sechste für 32 Cent.
Nachdem eine Woche seit Abschluss des Vertrages vergangen war, hatte der Millionär bereits siebenhunderttausend Gulden eingeheimst, selbst dagegen nur eine Kleinigkeit gezahlt:
1 Cent + 2 Cent + 4 Cent + 8 Cent + 16 Cent + 32 Cent + 64 Cent = 127 Cent oder 1 Gulden 27 Cent.

Unser habgieriger Millionär fand daran Gefallen und bedauerte schon, dass er diese Abrede nur für einen Monat getroffen hatte. Mehr als drei Millionen würde er nicht zusammenbekommen. Ob er es wohl versuchen sollte, den Tölpel zu einer Verlängerung der Frist zu Überreden? Doch das war riskant! Jener konnte merken, dass er das Geld umsonst hergab.
Der Fremde erschien pünktlich jeden Morgen mit seinen Hunderttausend. Am achten Tag erhielt er 1 Gulden 28 Cent, am neunten Tag 2 Gulden 56 Cent, am zehnten Tag 5 Gulden 12 Cent, am elften Tag 10 Gulden 24 Cent, am zwölften Tag 20 Gulden 48 Cent, am dreizehnten Tag 40 Gulden 96 Cent, am vierzehnten 81 Gulden 92 Cent.



Der Millionär zahlte diese Beträge gern; er hatte ja schon eine Million vierhunderttausend Gulden erhalten, seinerseits aber dem Fremden im ganzen nur etwa hundertfünfzig Gulden gezahlt.

Die Freude des Millionärs währte indessen nicht lange. Er erkannte bald, dass der sonderbare Gast kein Einfaltspinsel und die Abrede mit ihm nicht so vorteilhaft war, wie es zuerst den Anschein hatte.

Nach Verlauf von zwei Wochen war es nicht mehr mit Cents getan, sondern er musste jedesmal für die Hunderttausend Hunderte von Gulden zahlen, und die Beträge wuchsen sehr schnell an. In der Tat, der Millionär zahlte nach Beginn der zweiten Monatshälfte folgende Summen:

für das 15. Hunderttausend	163 Gulden 84 Cent
für das 16. Hunderttausend	327 Gulden 68 Cent
für das 17. Hunderttausend	655 Gulden 36 Cent
für das 18. Hunderttausend	1310 Gulden 72 Cent
für das 19. Hunderttausend	2621 Gulden 44 Cent

Übrigens, benachteiligt fühlte sich der Millionär noch lange nicht. Er hatte zwar über 5000 Gulden gezahlt, dafür aber 1900000 Gulden erhalten.
Der Gewinn verminderte sich von Tag zu Tag, und zwar immer schneller und schneller. Hier die weiteren Zahlungen:

für das 20. Hunderttausend	5 242 Gulden 88 Cent
für das 21. Hunderttausend	10 485 Gulden 76 Cent
für das 22. Hunderttausend	20 971 Gulden 52 Cent
für das 23. Hunderttausend	41 943 Gulden 04 Cent
für das 24. Hunderttausend	83 886 Gulden 08 Cent
für das 25. Hunderttausend	167 772 Gulden 16 Cent
für das 26. Hunderttausend	335 544 Gulden 32 Cent
für das 27. Hunderttausend	671 088 Gulden 64 Cent

Nun hatte er halb soviel gezahlt, als er bekommen hatte. Und ein Aufhören war nicht möglich. Der Vertrag musste eingehalten werden.

Es wurde immer schlimmer. Zu spät erkannte der Millionär, dass der Fremde ihn arg überlistet hatte und viel mehr Geld erhalten als selbst zahlen würde.
Vom 28. Tag an hatte der Millionär schon Millionenbeträge zu zahlen. Und die beiden letzten Tage ruinierten ihn vollends. Nachstehend diese Riesensumme:

für das 28. Hunderttausend	1 342 177 Gulden 28 Cent
für das 29. Hunderttausend	2 684 354 Gulden 56 Cent
für das 30. Hunderttausend	5 368 709 Gulden 12 Cent

Als der Gast ihn zum letztenmal verlassen hatte, rechnete sich der Millionär aus, wie teuer ihn die drei Millionen Gulden zu stehen gekommen waren, die er so billig zu erhalten gehofft hatte. Es stellte sich heraus, dass er dem Fremden 10737418 Gulden 23 Cent gezahlt hatte.

Nahezu 11 Millionen! Und angefangen hatte es doch mit einem einzigen Cent! Der Fremde hätte selbst dreimal hunderttausend Gulden bringen können und wäre doch nicht zu kurz gekommen.

Bevor wir diese Geschichte abschließen, will ich noch zeigen, wie sich die Berechnung der Verluste unseres Millionärs beschleunigen lässt; mit anderen Worten, wie man eine Reihe von Zahlen am schnellsten addiert:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

und sofort.
Bei diesen Zahlen fällt Folgende Eigentümlichkeit in die Augen:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 1 + 1 \\
4 &= (1 + 2) + 1 \\
8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \\
16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 \\
32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass jede Zahl dieser Reihe der Summe aller vorangegangenen plus 1 entspricht. Wenn alle Zahlen einer solchen Reihe, zum Beispiel von 1 bis 32768 addiert werden sollen, fügen wir nur zu der letzten Zahl 32768 die Summe aller vorangegangenen hinzu: mit anderen Worten, wir addieren die letzte Zahl mit derselben Zahl minus 1, also mit 32768 - 1. Ergebnis: 65 535.

Auf diese Weise lassen sich die gesamten Verluste unseres Millionärs sehr schnell errechnen, sobald man die Höhe des zuletzt gezahlten Betrages weiß.
Seine letzte Zahlung betrug 5368709 Gulden 12 Cent. Durch die Addition dieser Summe mit 5368709 Gulden 11 Cent erhalten wir daher sofort das gesuchte Resultat: 10 737418 Gulden 23 Cent.
Nun überlegt euch: Wieviel Geld musste der Unbekannte selber besitzen, oder wie lange musste er sich Geld leihen, um sich auf das Geschäft einlassen zu können?

8.2 Stadtgerüchte

Es ist erstaunlich, wie schnell sich Gerüchte in einer Stadt verbreiten! Es kommt vor, dass kaum zwei Stunden seit irgendeinem Vorfall verstrichen sind, den nur wenige Personen miterlebt haben - und schon hat die Kunde davon die ganze Stadt durchflogen: alle wissen davon, alle haben davon gehört. Diese außergewöhnliche Schnelligkeit erscheint uns verblüffend, geradezu rätselhaft.

Indessen, wenn man der Suche durch Berechnungen auf den Grund geht, erkennt man, dass durchaus nichts Verwunderliches dabei ist. Alles ist auf die Eigenschaft von Zahlenreihen und nicht auf irgendwelche geheimnisvolle Absonderlichkeiten der Gerüchte selbst zurückzuführen. Als Beispiel wollen wir einmal den folgenden Fall annehmen und untersuchen:

In einer Provinzstadt mit 50000 Einwohnern ist um acht Uhr morgens ein Reisender aus der Hauptstadt eingetroffen und hat eine interessante Neuigkeit mitgebracht. In dem Hause, in dem er abgestiegen ist, hat er die Neuigkeit nur drei Einheimischen mitgeteilt; das hat, nehmen wir an, eine Viertelstunde in Anspruch genommen.
Um 8.15 Uhr war die Nachricht in der betreffenden Stadt somit erst vier Personen bekannt - dem Ankömmling und drei Einheimischen.

Nachdem die drei Einheimischen die Neuigkeit erfahren hatten, beeilte sich jeder von ihnen, sie drei anderen mitzuteilen. Das nahm wiederum eine Viertelstunde in Anspruch. Somit hatten eine halbe Stunde nach Eintreffen der Neuigkeit in der Stadt schon $4 + (3 \cdot 3) = 13$ Personen von ihr Kenntnis.
Jede der 9 Personen, die eben von der Neuigkeit unterrichtet worden, teilte sie im Verlauf der nächsten Viertelstunde 3 weiteren Mitbürgern mit, so dass sie um 8.45 Uhr $13 + (3 \cdot 9) = 40$ Einwohnern bekannt war.

Wenn sich die Verbreitung des Gerüchts in der Stadt in dieser Weise fortsetzt, das heißt wenn jeder, der von der Neuigkeit Kenntnis erhalten hat, dazu kommt, sie in der nächsten Viertelstunde noch 3 Personen mitzuteilen, stellt sich ihr Bekanntwerden in der Stadt folgendermaßen dar:

Um 9.00 Uhr wissen von der Neuigkeit $40 + (3 \cdot 27) = 121$ Personen,
Um 9.15 Uhr ... $121 + (3 \cdot 81) = 364$ Personen,
Um 9.30 Uhr ... $364 + (3 \cdot 243) = 1093$ Personen,

Anderthalb Stunden nach dem ersten Auftauchen des Gerüchts in der Stadt werden also, wie wir sehen, im ganzen rund 1100 Personen von ihm gehört haben. Das scheint nicht viel zu sein bei einer Einwohnerzahl von 50000. Man könnte glauben, dass noch geraume Zeit verstreichen wird, bis sämtliche Einwohner der Stadt unterrichtet sein werden. Untersuchen wir indessen den weiteren Gang der Verbreitung:

Um 9.45 Uhr wissen von der Neuigkeit $1093 + (3 \cdot 729) = 3280$ Personen,
Um 10.00 Uhr ... $3280 + (3 \cdot 2187) = 9841$

Nach einer weiteren Viertelstunde wird bereits mehr als die Hälfte der Stadt von der Neuigkeit erfahren haben: $9841 + (3 \cdot 6561) = 29524$ Personen.

Und noch vor 10.30 Uhr werden samt und sonders alle Einwohner der großen Stadt die Neuigkeit wissen, die um 8 Uhr nur einer einzigen Person bekannt war.

Prüfen wir nun einmal nach, wie die vorhergehende Berechnung vorgenommen wurde. Sie lief im Grunde genommen darauf hinaus, dass wir nachstehende Reihe von Zahlen addiert haben:

$$1 + 3 + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 3 \cdot 3) + (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + ...$$

Aber ist es nicht möglich, das Resultat auf irgendeine kürzere Art zu ermitteln, ähnlich derjenigen, in der wir zuvor die Summe der Zahlenreihe 1 + 2 + 4 + 8 und so weiter festgestellt haben? Das ist möglich, wenn wir folgende Eigentümlichkeit der hier addierten Zahlen in Betracht ziehen:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 9 &= (1 + 3) \cdot 2 + 1 \\ 27 &= (1 + 3 + 9) \cdot 2 + 1 \\ 81 &= (1 + 3 + 9 + 27) \cdot 2 + 1 \qquad \text{und so fort} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: jede Zahl dieser Reihe entspricht der verdoppelten Summe aller vorausgegangenen Zahlen plus 1.
Um die Summe aller Zahlen unserer Reihe von 1 bis zu einer beliebigen Zahl zu errechnen, genügt es demnach, wenn man der letzten Zahl ihre Hälfte hinzufügt (nachdem man von der letzten Zahl eine Eins abgezogen hat). Die Summe der Zahlen

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

ist demnach 729 plus der Hälfte von 728, also 729 + 364 = 1093.

In unserem Falle hat jeder Einwohner die Neuigkeit, die er erfahren hat, nur drei Mitbürgern mitgeteilt. Wenn aber die Bewohner der Stadt noch gesprächiger wären und die von ihnen erfahrene Neuigkeit nicht drei, sondern beispielsweise fünf oder sogar zehn anderen mitteilten, würde sich die Kunde von ihr natürlich viel schneller ausbreiten.
Bei einer Weitergabe der Neuigkeit an jeweils fünf andere würde sich von dem Bekanntwerden in der Stadt folgen- des Bild ergeben:

Um 8.00 Uhr		1 Einwohner
um 8.15 Uhr	1 + 5 =	6 Einwohner
um 8.30 Uhr	6 + (5 · 5) =	31 Einwohner
um 8.45 Uhr	31 + (25 · 5) =	156 Einwohner
um 9.00 Uhr	156 + (125 · 5) =	781 Einwohner
um 9.15 Uhr	781 + (625 · 5) =	3906 Einwohner
um 9.30 Uhr	3906 + (3125 · 5) =	19531 Einwohner

Noch vor 9.45 Uhr hätte die gesamte fünfzigtausendköpfige Einwohnerschaft der Stadt die Neuigkeit erfahren.
Noch schneller würde sich die Neuigkeit verbreiten, wenn jeder einzelne sie zehn anderen mitteilte. Dann kämen wir zu der nachstehenden interessanten, schnell anwachsenden Zahlenreihe:

Um 8.00 Uhr		1 Einwohner
um 8.15 Uhr	1 + 10 =	11 Einwohner
um 8.30 Uhr	11 + 100 =	111 Einwohner
um 8.45 Uhr	111 + 1000 =	1111 Einwohner
um 9.00 Uhr	1111 + 10000 =	11111 Einwohner

Die nächste Zahl in dieser Reihe würde hiernach 111111 sein, woraus hervorgeht, dass die ganze Stadt kurz nach 9 Uhr die Neuigkeit erfahren hätte. Das Gerücht würde sich nahezu innerhalb einer Stunde verbreitet haben!

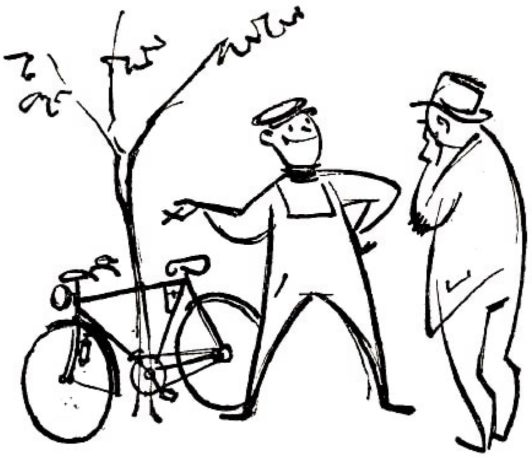
8.3 Eine Lawine billiger Fahrräder

In den kapitalistischen Ländern gibt es Unternehmer, die zu sehr eigenartigen Methoden greifen, um ihre in der Regel nicht gerade erstklassige Ware abzusetzen. Sie fangen damit an, dass sie in vielgelesenen Zeitungen und Zeitschriften Inserate mit etwa folgendem Inhalt erscheinen lassen:

Ein Fahrrad für 10 Dollar!
Jeder kann für nur 10 Dollar ein Fahrrad erwerben.
Nutzen Sie die seltene Gelegenheit!
Statt 50 Dollar — 10 Dollar.
Kaufbedingungen werden gratis zugesandt.

Nicht wenige Menschen lassen sich von dem verlockenden Inserat bestechen und bitten um Zusendung der Bedingungen für dieses ungewöhnliche Angebot. Als Antwort erhalten sie einen ausführlichen Prospekt, dem sie folgendes entnehmen:

Für die eingezahlten Dollars bekommt man zunächst nicht das Fahrrad selbst geliefert, sondern nur 4 Gutscheine, die man zu 10 Dollar je Stück an vier seiner Bekannten absetzen soll. Den auf diese Weise vereinnahmten Betrag muss man der Firma einsenden, und erst, wenn das geschehen ist, trifft das Fahrrad ein; es kostet für den Käufer also tatsächlich nur 10 Dollar, denn die weiteren 40 Dollar zahlt er ja nicht aus seiner Tasche.



Gewiss, abgesehen von den 10 Dollar in bar, hat der Käufer auch noch einige Umstände mit dem Absatz der Gutscheine unter seinen Bekannten, aber diese kleine Mühe wird nicht in Ansatz gebracht.

Was stellen diese Gutscheine nur vor? Welche Lebensgüter erwirbt sich ihr Käufer für die eingezahlten 10 Dollar? Er erhält das Recht, seinen Gutschein bei der Firma gegen 5 Gutscheine der gleichen Art einzutauschen.
Mit anderen Worten, er verschafft sich die Möglichkeit, 50 Dollar zum Kauf eines Fahrrades zu sammeln, für das er dadurch selber nur 10 Dollar - den Preis eines Gutscheines - zahlt. Die

neuen Besitzer des Scheines bekommen ihrerseits von der Firma 5 Gutscheine zum Weiterverkauf und so fort.

Auf den ersten Blick scheint die ganze Sache nichts Betrügerisches an sich zu haben. Das Versprechen des Inserates wird eingelöst: Den Käufer kostet das Fahrrad wirklich nur 10 Dollar. Und auch die Firma kommt nicht zu kurz: Sie erhält für ihre auf diese Weise verkaufte Ware den vollen Wert.

Und doch handelt es sich bei einem solchen Verfahren um eine ausgesprochene Gaunerei. Durch die "Lawine" oder das "Schneeballsystem", wie dieser Schwindel genannt wird, sind alle die zahlreichen Teilnehmer geschädigt, denen es nicht gelingt, die gekauften Gutscheine abzusetzen. Sie sind es, die der Firma die Differenz zwischen dem eigentlichen Preis von 50 Dollar und den für das Fahrrad gezahlten 10 Dollar entrichten.
Früher oder später muss unweigerlich der Fall eintreten, dass die Besitzer der Gutscheine keine Käufer mehr finden können. Dass dies unausbleiblich ist, werdet ihr erkennen, wenn ihr euch die Mühe macht, mit dem Bleistift in der Hand zu berechnen, wie steil die Anzahl der von der Lawine erfassten Menschen ansteigt.

Die erste Käufergruppe, die ihre Gutscheine direkt von der Firma erhalten hat, wird sie in der Regel ohne besonders große Mühe absetzen können; jedes Mitglied dieser Gruppe versorgt vier weitere Teilnehmer mit Gutscheinen.
Diese vier Teilnehmer müssen ihre Gutscheine an $4 \cdot 5 = 20$ andere verkaufen, indem sie sie von den Vorteilen eines solchen Kaufes überzeugen. Nehmen wir an, dass dies gelungen wäre und 20 weitere Käufer gefunden seien.

Die Lawine rollt weiter. Die 20 neuen Besitzer von Gutscheinen müssen $20 \cdot 5 = 100$ andere mit ihnen ausstatten.
Bis jetzt hat jeder "Stammvater" der Lawine $1 + 4 + 20 + 100 = 125$ Menschen in sie verwickelt, von denen 25 je ein Fahrrad, die übrigen 100 aber nur die Hoffnung haben, ein solches zu bekommen, und diese Hoffnung mit 10 Dollar bezahlten.

Jetzt tritt die Lawine aus dem engen Kreis miteinander bekannter Menschen hinaus und ergießt sich allmählich über die ganze Stadt, wobei es ihr aber immer schwerer und schwerer wird, neue Opfer zu finden.
Die letzten 100 Besitzer von Gutscheinen müssen 500 Abnehmer werben, die ihrerseits 2500 weitere Kauflustige ausfindig zu machen haben. Die Stadt wird schnell von Gutscheinen überschwemmt, und es ist durchaus keine leichte Aufgabe, sie loszuwerden.
Wie ihr seht, steigt die Zahl der von der Lawine erfassten Personen ungeheuer an. Nachstehend die Zahlenpyramide, die sich im vorliegenden Fall ergibt:

1
4
20
100
500
2500
12500
62500

Wenn die Stadt groß ist und 62500 Einwohner als Käufer für ein Fahrrad in Betracht kommen, hat die Lawine jetzt, also nach der achten Runde, den Umfang erreicht, wo sie nicht mehr wachsen kann. Alle sind von ihr erfasst werden.

Im Besitz eines Fahrrades ist aber nur der fünfte Teil von ihnen, während die übrigen 4/5 Gutscheine in Händen haben, die sie nicht absetzen können.

Für Großstädte und selbst für Weltstädte nach heutigen Begriffen mit ihren Millionen Einwohnern tritt der Moment der Übersättigung nur um wenige Runden später ein, weil die Lawine zahlenmäßig mit unglaublicher Schnelligkeit anwächst. Hier die nächsten Stufen unserer Zahlenpyramide:

312500
1562500
7812500
39062500

Nach der 12. Runde könnte die Lawine, wie ihr seht, die Bevölkerung eines ganzen Staates erfasst haben. Und 4/5 dieser Bevölkerung würden von den Veranstaltern der Lawine betrogen sein.

Überlegen wir, was die Firma schließlich mit der Veranstaltung erreicht. Sie zwingt 4/5 der Bevölkerung, Ware zu bezahlen, die das restliche Fünftel der Bevölkerung erworben hat; mit anderen Worten, vier Personen werden in die Zwangslage gebracht, einer fünften einen Vorteil zu verschaffen. Völlig unentgeltlich gelangt die Firma nebenher zu einem Stab von eifrigen Werbern für ihre Ware.

Einer unserer Schriftsteller hat diesen Schwindel sehr zutreffend als eine "Lawine gegenseitiger Prellung" bezeichnet. Das Zahlenungeheuer, das sich hinter einem solchen Geschäftskniff verbirgt, bestraft diejenigen, die es nicht verstehen, sich durch ein Rechenexempel gegen Anschläge von Schwindlern zu schützen.

8.4 Eine fürstliche Belohnung

Nachstehende Geschichte hat sich der Überlieferung zufolge vor vielen Jahrhunderten im alten Rom abgespielt. (Es handelt sich bei dieser Geschichte um eine freie Übertragung aus einer alten lateinischen Handschrift, die sich in einer Privatbibliothek Englands befindet.)

Der Feldherr Terentius hatte auf Befehl des Kaisers einen Feldzug unternommen und kehrte nach dessen siegreicher Beendigung mit reicher Beute nach Rom zurück. In der Hauptstadt angekommen, bat er um Zulass zum Kaiser.
Der Kaiser empfing den Feldherrn huldvoll, dankte ihm herzlich für die dem Reich geleisteten Kriegstaten und versprach ihm als Belohnung eine hohe Stellung im Senat.

Doch was Terentius brauchte, war etwas anderes. Er entgegnete:
"Viele Siege, mein Kaiser, habe ich errungen, um deine Macht zu erhöhen und deinen Namen mit Ruhm zu bedecken. Ich fürchtete nicht den Tod, und hätte ich nicht nur ein, sondern viele Leben, ich würde sie alle für dich opfern.

Aber ich bin des Krieges müde; die Jugend ist vorbei, und das Blut fließt langsam in meinen Adern. Die Zeit ist gekommen, im Haus meiner Ahnen auszuruhen und die Freuden des häuslichen Lebens zu genießen."
"Was wünschst du von mir zu erhalten, Terentius?"fragte der Kaiser.
"Hör mich gnädig an, mein Kaiser! Während der langen Kriegsjahre, in denen ich mein Schwert tagein, tagaus mit Blut gefärbt habe, bin ich nicht dazu gekommen, mir Wohlstand zu erwerben. Ich bin arm, mein Kaiser ..."
"Rede weiter, tapferer Terentius."
"Wenn du deinen bescheidenen Diener belohnen willst", fuhr der ermutigte Feldherr fort, "möge deine Freigebigkeit mir dazu verhelfen, meinen Lebensabend friedlich und gesichert am häuslichen Herd zu verleben. Ich trachte nicht nach Ehren und einer hohen Stellung im allmächtigen Senat. Ich habe den Wunsch, mich von der Macht und aus dem öffentlichen Leben zurückzuziehen, um ungestört auszuruhen. Gib mir Geld, mein Kaiser, zur Sicherung meines Lebensabends."

Der Kaiser, so lautet die Überlieferung, zeichnete sich nicht durch besondere Freigebigkeit aus. Er liebte es, das Geld für sich anzuhäufen und geizte damit anderen gegenüber. Die Bitte des Feldherrn machte ihn nachdenklich.
"Welche Summe, Terentius, würdest du für dich als ausreichend ansehen?" fragte er.
"Eine Million Denar, mein Kaiser."

Abermals versank der Kaiser in Nachdenken. Der Feldherr wartete mit gesenktem Kopf. Endlich sprach der Kaiser:
"Ruhmreicher Terentius! Du bist ein großer Feldherr, und deine heldenmütigen Taten verdienen eine hohe Belohnung. Ich werde dich reich machen. Morgen mittag sollst du meinen Beschluss hören."
Terentius verneigte sich und ging. Am nächsten Tag erschien der Feldherr zur festgesetzten Stunde im kaiserlichen Palast.
"Ich grüße dich, tapferer Terentius!" sprach der Kaiser.
Terentius neigte demütig das Haupt. "Ich bin gekommen, mein Kaiser, um deinen Beschluss anzuhören. Du hast gnädig versprochen, mich zu belohnen."
Der Kaiser entgegnete:

"Ich will nicht, dass ein so edler Krieger wie du für seine Heldentaten eine armselige Belohnung erhält. Hör mich also an.
In meiner Schatzkammer liegen zehn Millionen Kupferasse. (Das As war bei den Römern eine Scheidemünze, die einen Kaufwert von ungefähr 5 Pfennigen hatte. 1 Denar enthielt 10, später 16 Asse. Wir haben mit 10 gerechnet.)
Achte nun gut auf meine Worte. Du wirst in die Schatzkammer gehen, eine Münze in die Hand nehmen, mit ihr zurückkommen und sie mir zu Füßen legen.
Am nächsten Tag wirst du wieder in die Schatzkammer gehen, wirst eine Münze im Wert von 2 As nehmen und sie hierher neben die erste legen. Am dritten Tag wirst du eine Münze im Werte von 4 As, am vierten Tag im Wert von 8 As, am fünften im Wert von 16 As bringen und so fort, jedesmal mit verdoppeltem Wert der Münze.

Ich werde Befehl geben, dass für dich täglich entsprechende Münzen hergestellt werden. Und solange deine Kraft ausreicht, die Münzen aufzuheben, wirst du sie aus meiner Schatzkammer tragen.
Niemand darf dir helfen; du sollst nur von deiner eigenen Kraft Gebrauch machen. Sobald du merkst, dass du nicht mehr imstande bist, die Münze zu heben, halte ein: Unsere Abrede ist

dann erfüllt.
Aber alle Münzen, die du herausbringen konntest, sollen dein eigen und deine Belohnung sein."

Terentius nahm jedes Wort des Kaisers gierig in sich auf. Ihm schwebte eine Riesenmenge von Münzen vor, eine immer größer als die andere, die er aus der Schatzkammer holen würde.
"Ich bin befriedigt von deiner Gnade, mein Kaiser", antwortete er glückselig lächelnd. "Wahrhaft großmütig ist die Belohnung."

Die täglichen Besuche des Terentius in der Schatzkammer nahmen ihren Anfang. Diese war nicht weit von dem Empfangssaal des Kaisers gelegen, und zunächst bereitete Terentius das Holen der Münzen keinerlei Anstrengung.
Am ersten Tag brachte er aus der Schatzkammer nur ein As. Das ist eine kleine Münze. Nehmen wir einmal an, sie habe einen Durchmesser von 21 Millimetern, und ihr Gewicht betrage 5 Gramm.
Auch der zweite, der dritte, vierte, fünfte und sechste Gang war nicht schwer, als der Feldherr Münzen von doppeltem, vierfachem, achtfachem, 16fachem und 32fachem Gewicht brachte.

Die siebente Münze hatte einen Durchmesser von $8\frac{1}{2}$ Zentimetern (genauer 84 Millimetern) und wog 320 Gramm.
Beim Berechnen der weiteren Münzen müssen wir folgendes im Auge behalten: Verdoppeln wir den Durchmesser und die Dicke einer Münze, so erhöht sich der Rauminhalt und also auch das Gewicht auf das 8fache, da $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist.
Vervierfachen wir den Durchmesser und die Dicke, so erhöht sich das Gewicht auf das 64fache, da $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ist.
Verdoppeln wir aber das Gewicht, so beträgt der Durchmesser (und auch die Dicke) nur das 1,26fache, da $1,26 \cdot 1,26 \cdot 1,26 = 2$ ist.

Am achten Tag hatte Terentius aus der Schatzkammer eine Münze zu holen, die 128 einzelnen Münzen entsprach. Sie wog 640 Gramm und hatte einen Durchmesser von rund $10\frac{1}{2}$ Zentimetern (denn $84 \cdot 1,26 = 105,8$ Millimeter).
Die Münze, die Terentius am neunten Tag in den kaiserlichen Palast brachte, entsprach 256 einzelnen Münzen. Sie hatte einen Durchmesser von rund 13 Zentimetern und wog über $1\frac{1}{4}$ Kilogramm.
Am zwölften Tag erreichte die Münze einen Durchmesser von fast 27 Zentimetern und ein Gewicht von rund $10\frac{1}{4}$ Kilogramm.

Der Kaiser, der dem Feldherrn bis jetzt freundlich zugesehen hatte, machte nun aus seinem Triumph kein Hehl. Er sah, dass bereits 12 Gänge gemacht waren, im ganzen aber wenig mehr als der Wert von 4000 Kupfermünzen aus der Schatzkammer entfernt wurden.
Der dreizehnte Tag bescherte dem braven Terentius eine Münze, die 4096 einzelnen Münzen entsprach; sie hatte rund 34 Zentimeter Durchmesser und ein Gewicht von $20\frac{1}{2}$ Kilogramm.

Am vierzehnten Tag hatte Terentius eine rund 41 Kilogramm schwere Münze mit einem Durchmesser von etwa 42 Zentimetern zu tragen.

"Überanstrengst du dich nicht, mein tapferer Terentius?"fragte der Kaiser, ein Lachen unterdrückend.
"Nein, mein Kaiser", antwortete mürrisch Terentius, indem er sich den Schweiß aus der Stirn wischte.

Der fünfzehnte Tag war gekommen. Schwer war diesmal die Bürde des Terentius. Langsam schleppte er sich zum Kaiser mit der riesigen Münze, die aus l6384 Einzelmünzen hergestellt war. Sie erreichte einen Durchmesser von rund 53 Zentimetern und hatte ein Gewicht von über 80 Kilogramm - das Gewicht eines stattlichen Kriegers.
Der Feldherr war erschöpft und atmete schwer. Der Kaiser lächelte.

Als Terentius am nächsten Tag im Empfangssaal des Kaisers erschien, wurde er mit lautem Lachen empfangen. Er konnte seine Last jetzt nicht mehr tragen, sondern rollte sie vor sich her. Am nächsten Tag hatte die Münze einen Durchmesser von rund 84 Zentimetern und wog fast 328 Kilogramm; sie entsprach dem Gewicht von 65536 Einzelmünzen.

Der achtzehnte Tag setzte der Bereicherung des Feldherrn ein Ende. Mit diesem Tag hörten seine Besuche in der Schatzkammer auf. Er hatte diesmal eine Münze zu befördern, die 131 072 einzelnen Münzen entsprach.

Sie hatte einen Durchmesser von über 1 Meter und wog rund 655 Kilogramm. Seinen Speer als Hebel benutzend, rollte Terentius sie unter Aufbietung seiner ganzen Kraft in den Saal. Die gigantische Münze fiel mit lautem Gepolter zu Füßen des Kaisers auf den Boden. Terentius war völlig erschöpft.

"Ich kann nicht mehr... Es ist genug", murmelte er.
Der Kaiser unterdrückte mit Mühe ein wohlgefälliges Lachen, als er den vollen Erfolg seiner List sah. Er befahl dem Schatzmeister, zu berechnen, wieviel Asse Terentius in den Palast gebracht hatte.
Der Schatzmeister führte den Befehl aus und sagte: "Dank deiner Freigebigkeit, mein Kaiser, hat der siegreiche Feldherr Terentius 262143 As, das sind 26214 Denar, als Belohnung bekommen."

Der geizige Kaiser hat somit den Feldherrn, der eine Million Denar zu erhalten wünschte, mit etwa einem Vierzigstel dieser Summe abgespeist.
Überprüfen wir die Berechnung des Schatzmeisters und zugleich das Gewicht der Münzen. Terentius holte aus der Schatzkammer:

am 1. Tag	1 As	5 Gramm
am 2. Tag	2 Asse	10 Gramm
am 3. Tag	4 Asse	20 Gramm
am 4. Tag	8 Asse	40 Gramm
am 5. Tag	16 Asse	80 Gramm
am 6. Tag	32 Asse	160 Gramm
am 7. Tag	64 Asse	320 Gramm
am 8. Tag	128 Asse	640 Gramm
am 9. Tag	256 Asse	1 Kilogramm 280 Gramm

am 10. Tag	512 Asse	2 Kilogramm 560 Gramm
am 11. Tag	1024 Asse	5 Kilogramm 120 Gramm
am 12. Tag	2048 Asse	10 Kilogramm 240 Gramm
am 13. Tag	4096 Asse	20 Kilogramm 480 Gramm
am 14. Tag	8192 Asse	40 Kilogramm 960 Gramm
am 15. Tag	16384 Asse	81 Kilogramm 920 Gramm
am 16. Tag	32768 Asse	163 Kilogramm 840 Gramm
am 17. Tag	65536 Asse	327 Kilogramm 680 Gramm
am 18. Tag	131072 Asse	655 Kilogramm 360 Gramm.

Wir wissen bereits, wie sich die Summe solcher Zahlen am einfachsten errechnen lässt; sie beträgt 262143 - entsprechend den auf Seite 51 erwähnten Regeln.
Terentius hatte sich vom Kaiser 1 Million Denar, das sind 10 000 000 As, erbeten. Tatsächlich erhielt er 10000000 : 262143, also rund 38mal weniger.

8.5 Die Legende vom Schachbrett

Das Schachspiel ist eines der allerältesten Spiele. Er existiert bereits seit vielen Jahrhunderten, und man braucht sich nicht zu wundern, wenn mit ihm sagenhafte Geschichten verknüpft sind, deren Glaubwürdigkeit sich heute nicht mehr nachprüfen lässt.
Eine Geschichte dieser Art will ich hier erzählen. Um sie zu verstehen, braucht man gar nicht Schachspieler zu sein: es genügt zu wissen, dass Schach auf einem Brett gespielt wird, das in 64 Felder (abwechselnd weiße und schwarze) eingeteilt ist.

Das Schachspiel ist in Indien erfunden, und als der indische Herrscher Shehran es kennenlernte, war er von dem geistreichen Spiel und der Mannigfaltigkeit der in ihm möglichen Stellungen entzückt. Als der Herrscher erfuhr, dass das Spiel von einem seiner Untertanen erdacht sei, ließ er diesen zu sich rufen, um ihn persönlich für seine geistreiche Erfindung zu belohnen.

Der Erfinder - er hieß Sessa - erschien vor dem Thron des Gebieters. Es war ein bescheiden gekleideter Gelehrter, der die Mittel zum Lebensunterhalt von seinen Schülern erhielt.

"Ich habe den Wunsch, dich gebührend für das schöne Spiel zu belohnen, Sessa, das du erfunden hast", sprach der Herrscher.
Der Weise verneigte sich.
"Ich bin reich genug, um deine kühnsten Wünsche zu erfüllen", fuhr der Herrscher fort. "Nenne mir die Belohnung, die dich befriedigen würde, und du sollst sie haben.
Sessa schwieg.
"Scheue dich nicht", ermutigte ihn der Herrscher. "Sage mir deinen Wunsch. Es soll mir nichts zuviel sein, um ihn zu erfüllen."
"Groß ist deine Güte, mein Gebieter. Aber lass mir einen Tag Zeit, die Antwort zu bedenken. Morgen, nach reiflicher Überlegung, werde ich dir meine Bitte vortragen."

Als Sessa am nächsten Tage erneut vor den Stufen des Thron: erschien, setzte er den Herrscher durch die beispiellose Bescheidenheit seiner Bitte in Erstaunen.
"Mein Gebieter", sagte Sessa, "gib den Befehl, dass man mir für das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn ausliefert.

"Ein einfaches Weizenkorn ?" wunderte sich der Herrscher.
"Ja, mein Gebieter. Für das zweite Feld lass mir 2 Körner, für das dritte 4, für das vierte 8, für das fünfte 16, für das sechste 32...

"Genug", unterbrach ihn ungeduldig der Herrscher. "Du sollst deine Körner für alle 64 Felder des Bretts deinem Wunsche gemäß erhalten: für jedes zweimal mehr als für das vorhergehende. Aber wisse, dass deine Bitte meiner Freigebigkeit nicht würdig ist. Indem du eine so geringfügige Belohnung erbittest, lässest du es an Ehrerbietung für meine Gnade fehlen. Fürwahr, als Lehrer hättest du ein besseres Beispiel dafür geben können, wie man die Güte seines Herrschers zu achten hat. Gehe! Meine Diener werden dir deinen Sack mit Weizen herausbringen."

Sessa lächelte, verließ den Saal und stellte sich abwartend ans Tor.
Beim Mittagessen erinnerte sich der Herrscher wieder des naiven Sessa, und er befahl nachzusehen, ob er seine mögliche Belohnung bereits weggetragen habe.

"Dein Befehl wird ausgeführt, Gebieter", lautete die Antwort. "Die Hofmathematiker sind dabei, die nötige Menge von Körnern auszurechnen."
Der Herrscher zog die Stirn kraus. Er war es nicht gewöhnt, dass seine Befehle so schleppend ausgeführt wurden.
Abends beim Schlafengehen erkundigte sich der Herrscher wiederum, ob Sessa mit seinem Sack Weizen schon lange die Mauern des Palastes verlassen habe.

"Gebieter", erhielt er zur Antwort, "deine Mathematiker sind unermüdlich bei der Arbeit und hoffen, bis zum Sonnenaufgang mit der Berechnung fertig zu sein."
"Warum wird die Sache verzögert?" rief der Herrscher zornig aus. "Morgen, bevor ich erwache, soll alles bis aufs letzte Korn an Sessa abgeliefert sein. Ich befehle nicht zweimal!"

Am nächsten Morgen wurde dem Herrscher gemeldet, dass der Älteste der Hofmathematiker darum bitte, eine wichtige Mitteilung anzuhören. Der Herrscher ließ ihn kommen.
"Bevor du mit deiner Angelegenheit anfängst", erklärte Shehran, "wünsche ich zu hören, ob Sessa endlich die unbedeutende Belohnung erhalten hat, die er sich selbst festsetzte."
"Gerade darum habe ich es gewagt, zu einer so frühen Stunde vor dir zu erscheinen", antwortete der Greis. "Wir haben gewissenhaft die ganze Menge von Körnern ausgerechnet, die Sessa zu erhalten wünscht. Diese Menge ist so groß ..."

"Wie groß sie auch sein möge", fiel ihm der Herrscher anmaßend ins Wort, "meine Kornkammern werden dadurch nicht leer werden. Die Belohnung ist versprochen und muss ihm zuteil werden."

"Nicht in deiner Macht steht es, mein Gebieten derartige Wünsche zu erfüllen. in allen deinen Speichern ist keine solch große Menge Getreide vorhanden, wie Sessa sie verlangt.
Auch im ganzen Gebiete deines Reiches ist sie nicht vorhanden. Und auch auf der ganzen Erde wird sich eine solche Menge nicht finden. Wenn du die versprochene Belohnung unbedingt ausliefern willst, dann gib den Befehl, die Reiche der Erde in Äcker und Felder zu verwandeln, die Meere und Ozeane trockenzulegen, das Eis und den Schnee zu schmelzen, mit denen die fernen Wüsten des Nordens bedeckt sind.
Alle diese Flächen müssten zu Weizenfeldern werden. Und alles, was auf diesen Feldern geerntet wird, müsste an Sessa ausgeliefert werden. Aber selbst diese Menge würde noch nicht ausreichen."
Voller Erstaunen hörte der Herrscher den Greis an. "Nenne mir diese ungeheuerliche Zahl", sagte er nachdenklich.

"Achtzehn Trillionen vierhundertsechsundvierzigtausendsiebenhundertvierundvierzig Billionen dreiundsiebzig Milliarden siebenhundertneun Millionen fünfhunderteinundfünfzig Tausend sechshundertfünfzehn, o mein Gebieter!

Soweit die Legende. Ob sich wirklich alles so zugetragen hat, wie es hier überliefert wird, ist ungewiss; aber dass die Belohnung, von der in der Geschichte die Rede ist, sich tatsächlich durch die angeführte Zahl ausdrücken lässt, davon könnt ihr euch selbst überzeugen, wenn ihr die Geduld zu einer entsprechenden Berechnung aufbringt.

Angefangen mit eins müssen die Zahlen 1, 2, 4, 8 und so fort addiert werden.
Das Resultat einer 63fachen Verdoppelung ergibt die Anzahl Körner, die der Erfinder des Spiels für das 64. Feld des Bretts zu erhalten hatte. Indem wir nach der auf Seite 65 erläuterten Methode verfahren, ermitteln wir leicht, welche Gesamtzahl von Körnern in Frage kam, wenn wir die letzte Zahl verdoppeln und eine Eins abziehen. Die Berechnung läuft also nur auf eine Multiplikation von 64 Zweien hinaus:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ...$ und so fort, insgesamt 64 mal. Um die Berechnung zu erleichtern, teilen wir diese 64 Faktoren in 6 Gruppen mit je 10 Zweien und eine Gruppe mit 4 Zweien ein. Das Produkt von 10 Zweien ist, wie sich leicht nachrechnen lässt, 1024, und das Produkt von 4 Zweien ist 16. Folglich ist das gesuchte Resultat:

$$1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 16$$

Die Multiplikation $1024 \cdot 4024$ ergibt 1048576. Nachdem wir nun noch $1048576 \cdot 1048576 \cdot 1048576 \cdot 16$ ausrechnen und von dem Resultat eine Eins abziehen, kommen wir auf die gesuchte Körnerzahl: 18446744073709551615.

Um uns diesen Zahlenriesen in seiner ganzen Größe zu veranschaulichen, überlegen wir einmal, wie groß ein Speicher sein müsste, der diese Getreidemenge aufnehmen sollte.
Man weiß, dass ein Kubikmeter Weizen etwa 15 Millionen Körner enthält. Die dem Erfinder des Schachspiels als Belohnung zugesagte Menge würde also einen Raum von 1200000000000 Kubikmeter oder 1200 Kubikkilometer füllen. Ein 4 m hoher und 10 m breiter Speicher müsste demnach 30000000 km lang sein, um diese Weizenmenge zu fassen. Er würde 750 mal um den Äquator reichen!

Der indische Herrscher war nicht in der Lage, eine solche Belohnung zu geben.
Aber wenn er in der Mathematik beschlagen gewesen wäre, hätte er sich leicht aus der Klemme ziehen können. Er brauchte Sessa nur zu veranlassen, sich selbst Korn für Korn der ihm zukommenden Menge abzuzählen.
In der Tat, wenn Sessa Tag und Nacht ununterbrochen je ein Korn in der Sekunde abzählen würde, hätte er nach Ablauf der ersten 24 Stunden im ganzen nur 86400 Körner beisammen. Für eine Million Körner wäre ein mindestens zehntägiges ununterbrochenes Abzählen erforderlich. Zum Abzählen eines Kubikmeters Weizen würde er ungefähr ein halbes Jahr brauchen.

Im Laufe von 10 Jahren würde er bei ununterbrochenem Zählen nicht mehr als 20 Kubikmeter abgezählt haben, das sind 150 dz oder 200 Sack. Wir sehen also, dass Sessa, selbst wenn er den ganzen Rest seines Lebens mit Abzählen zubringen wollte, nur zu einem winzigen Teil der von ihm verlangten Belohnung gelangen würde.

8.6 Schnelle Vermehrung

Eine reife Mohnkapsel ist mit winzigen Körnern angefüllt. Aus jedem von ihnen kann eine Pflanze heranwachsen. Wieviel Pflanzen würde es ergeben, wenn aus jedem Körnchen ohne Ausnahme eine neue Pflanze heranwüchse?

Um dies festzustellen, müssen die Körnchen einer Kapsel gezählt werden. Ein mühseliges Unternehmen; aber das Ergebnis ist so interessant, dass sich die aufgebrachte Geduld lohnt. Es stellt sich heraus, dass eine Mohnkapsel rund gerechnet 3000 Körnchen enthält.

Hieraus ergibt sich folgendes: Wenn unsere Mohnpflanze von einem genügend großen und geeigneten Stück Land umgeben wäre, würde jedes zur Erde gefallene Körnchen keimen, und im nächsten Sommer würden auf dieser Fläche bereits 3000 Mohnpflanzen heranwachsen. Ein ganzes Mohnfeld aus einer einzigen Kapsel!
Doch sehen wir zu, was sich weiter ergibt. Aus jeder der 3000 Pflanzen geht mindestens eine Kapsel hervor (meist sind es mehrere), die 3000 Körnchen enthält.

Herangereift, ergibt der Samen jeder Kapsel 3000 neue Pflanzen, so dass wir im zweiten Jahr bereits auf nicht weniger als $3000 \cdot 3000 = 9000000$ Pflanzen kommen.
Im dritten Jahr beläuft sich die Zahl der Nachkommen unserer Mohnpflanze schon auf $9000000 \cdot 3000 = 27000000000$ und im vierten Jahr auf

$$27000000000 \cdot 3000 = 81000000000000$$

Nach Abbruch des fünften Jahres würde es dem Mohn auf unserer Erdkugel zu eng werden, denn die Zahl der Pflanzen wächst nun auf

$$81000000000000 \cdot 3000 = 243000000000000000$$

Stück an. Die ganze Landfläche der Erde, das heißt die Fläche aller Erdteile und Inseln, umfasst rund 150 Millionen Quadratkilometer oder 150 000 000 000 000 Quadratmeter.

Diese Zahl beträgt nur etwa 1/1600 der Zahl der Mohnpflanzen, das heißt: Auf jeden Quadratmeter würden etwa 1600 Mohnpflanzen entfallen.

Wenn aus jedem Mohnkörnchen eine Pflanze heranwüchse, könnte, wie wir sehen, die Nachkommenschaft einer einzigen Pflanze innerhalb von fünf Jahren die ganze Landfläche der Erdkugel mit einem Dickicht von sechzehnhundert Pflanzen je Quadratmeter bedecken. Ein solcher Zahlenriese verbirgt sich in dem winzigen Mohnkorn!

Wenn wir eine gleiche Berechnung statt mit dem Mohn mit einer anderen, nicht so samenreichen Pflanze anstellen würden, kämen wir zu einem ähnlichen Ergebnis, nur mit dem Unterschied, dass die Nachkommenschaft einer solchen Pflanze nicht in fünf Jahren, sondern erst nach einer etwas längeren Frist die ganze Erde bedecken würde.
Nehmen wir zum Beispiel den Löwenzahn, der jährlich etwa 100 Samenkörnchen hervorbringt. (Man hat sogar 200 Samenkörnchen bei einer Blüte festgestellt.) Wenn sie alle zum Keimen kämen, hätten wir:

nach 1 Jahr	1 Pflanze
nach 2 Jahren	100 Pflanzen
nach 3 Jahren	10 000 Pflanzen
nach 4 Jahren	1 000 000 Pflanzen
nach 5 Jahren	100 000 000 Pflanzen
nach 6 Jahren	10 000 000000 Pflanzen
nach 7 Jahren	1 000 000 000 000 Pflanzen
nach 8 Jahren	100 000 000 000 000 Pflanzen
nach 9 Jahren	10 000 000000 000 000 Pflanzen

Das sind fast 70mal soviel, wie die Landfläche der Erde Quadratmeter enthält.
Nach neun Jahren wären bei 70 Pflanzen auf einem Quadratmeter folglich alle Erdteile mit Löwenzahn bedeckt.

Wie kommt es, dass wir in Wirklichkeit keine so unglaublich schnelle Vermehrung beobachten? Das liegt daran, dass die Mehrzahl der Samenkörner umkommt: Entweder geraten sie auf ungeeigneten Boden und keimen überhaupt nicht, oder sie beginnen wohl zu keimen, werden dann aber von anderen Pflanzen erstickt, oder sie gehen durch Witterungseinflüsse oder durch Tiere zugrunde. Wenn das nicht der Fall wäre, würde jede Pflanze innerhalb kurzer Zeit die ganze Erdkugel überwuchern.

Untersuchen wir auch einmal, wie schnell sich zum Beispiel die uns allen bekannte Zimmerfliege vermehrt.
Jede Fliege legt schätzungsweise 120 Eier. Im Laufe des Sommers folgen einander 7 Generationen von Fliegen, die zur Hälfte aus Weibchen bestehen. Nehmen wir an, dass die Ablage von Eiern am 15. April begonnen hat und dass jedes Weibchen in 20 Tagen so weit heranwächst,

dass es selbst Eier legt. Die Vermehrung stellt sich dann folgendermaßen dar:

Am 15. April hat das Weibchen 120 Eier gelegt; Anfang Mai haben sich 120 Fliegen entpuppt, von denen die Hälfte Weibchen sind. Am 5. Mai legt jedes Weibchen 120 Eier; Mitte Mai entpuppen sich $60 \cdot 120 = 7200$ Fliegen, von denen 3600 Weibchen sind.
Am 25. Mai legt jedes dieser 3600 Weibchen 120 Eier; Anfang Juni entpuppen sich $3600 \cdot 120 = 432000$ Fliegen, von denen 216000 Weibchen sind.
Am 14. Juni legt jedes der 216000 Weibchen 120 Eier; Ende Juni entpuppen sich 25920000 Fliegen, darunter 12960000 Weibchen.
Am 5. Juli legen 12960000 Weibchen je 120 Eier; Mitte Juli entpuppen sich 1555200000 Fliegen, darunter 777600000 Weibchen. Am 25. Juli entpuppen sich 93 312000000 Fliegen, darunter 46656 000000 Weibchen.
Am 13. August entpuppen sich 5 598 720 000 000 Fliegen, darunter 2 799 360 000 000 Weibchen.
Am 1. September entpuppen sich 335 923 200 000 000 Fliegen.

Um uns diese gewaltige Menge von Fliegen zu veranschaulichen, die bei einer ungehinderten Vermehrung im Laufe des Sommers aus einem einzigen Fliegenpaar hervorgehen kann, stellen wir uns einmal vor, dass sie in einer geraden Linie aneinandergereiht wären.
Da eine Fliege etwa 7 Millimeter lang ist, würde sich diese Fliegenkette über 2350 Millionen Kilometer erstrecken - das ist etwa 18 mal soviel wie die Entfernung zwischen der Erde und der Sonne.

Zum Abschluss seien einige Fälle außergewöhnlich schneller Vermehrung von Tieren angeführt, die sich tatsächlich ereignet haben.

In Amerika gab es ursprünglich keine Sperlinge. Dieser bei uns so verbreitete Vogel wurde absichtlich in die Vereinigten Staaten eingeführt, damit er dort schädliche Insekten vertilge. Der Sperling verzehrt bekanntlich in großer Menge gefräßige Raupen und andere für Gärten und Gemüsezucht schädliche Insekten. Die neue Umgebung sagte den Sperlingen zu:
In Amerika gab es keine Raubvögel, die die Sperlinge verfolgten, und die letzteren begannen sich schnell zu vermehren.

Die Menge der schädlichen Insekten nahm zusehends ab, aber bald vermehrten sich die Sperlinge in einem solchen Maße, dass sie in Ermangelung ausreichender tierischer Nahrung über

die Saaten herfielen und sie vernichteten. Auf den Hawaiischen Inseln haben sie alle kleinen Vögel völlig verdrängt.
Man sah sich zu einer Bekämpfung der Sperlinge gezwungen; diese Bekämpfung stellte sich für die Amerikaner so teuer, dass die Einfuhr irgendwelcher Tiere nach Amerika für die Zukunft gesetzlich verboten wurde.

Ein zweites Beispiel: Als Australien von den Europäern entdeckt wurde, gab es in diesem Erdteil keine Kaninchen. Das Kaninchen wurde Ende des 18. Jahrhunderts in Australien eingeführt; und da dort keine Raubtiere vorhanden waren, die Kaninchen fressen, vermehrten sich diese Nagetiere außerordentlich schnell. Bald wurde Australien von ganzen Kaninchenherden überschwemmt, die der Landwirtschaft ungeheuren Schaden zufügten und sich zu einer förmlichen Landplage auswuchsen.
Die Landwirtschaft hat für ihre Bekämpfung ungeheure Mittel aufgeboten und ist nur dank der energisch durchgeführten Maßnahmen damit fertig geworden. Ungefähr dasselbe hat sich später mit Kaninchen in Kalifornien wiederholt.

Der dritte lehrreiche Fall hat sich auf der Insel Jamaika abgespielt. Dort hausten in großen Mengen giftige Schlangen. Um sich von ihnen zu befreien, beschloss man, Stelzengeier einzuführen, die als grimmige Schlangenvertilger bekannt sind.
Die Menge der Schlangen verringerte sich tatsächlich sehr bald, aber statt ihrer vermehrten sich die Feldratten außerordentlich stark, von denen sich bis dahin die Schlangen ernährt hatten.

Als Feind der Ratten kennt man den indischen Mungo. Man entschloss sich, vier Pärchen auf die Insel zu bringen und es ihnen zu überlassen, sich nach Belieben zu vermehren. Die Mungos passten sich ihrer neuen Heimat gut an und breiteten sich schnell über die ganze Insel aus. Es waren kaum zehn Jahre vergangen, da hatten sie fast alle Ratten auf der Insel vertilgt.
Aber, o weh! Nachdem die Mungos die Ratten ausgerottet hatten, blieb ihnen nichts anderes übrig, als sich von allem, dessen sie habhaft werden konnten, zu ernähren. Sie wurden zu Allesfressern und fielen über Kälber, Lämmer, Ferkel, Hausgeflügel und dessen Eier her.

Und bei weiter zunehmender Vermehrung drangen sie in die Obstgärten, Plantagen und Getreidefelder ein. Die Bevölkerung nahm nun die Vernichtung ihrer bisherigen Verbündeten auf, es gelang ihr aber nur bis zu einem gewissen Grad, den von den Mungos angerichteten Schaden einzudämmen.

8.7 Zahlenriesen um und in uns

Man braucht nicht nach außergewöhnlichen Umständen zu suchen, um auf Zahlenriesen zu stoßen. Sie umgeben uns allenthalben und sind sogar in uns selber enthalten - man muss sie nur zu finden verstehen. Der Himmel über uns, der Sand unter unseren Füßen, die Luft um uns, das Blut in unserem Körper - alles birgt in sich unsichtbare Riesen aus dem Reich der Zahlen.

Die gigantischen Zahlen, die sich auf den Weltraum beziehen, stellen für die Mehrzahl der Menschen nichts Überraschendes dar. Ob nun die Rede auf die Zahl der Sterne kommt oder auf ihre Entfernung von uns und untereinander, auf ihre Größe, ihre Maße, ihr Alter - in allen diesen Fällen sind wir es gewohnt, Zahlen zu begegnen, deren ungeheure Größe jedes Vorstellungsvermögen übersteigt.

Nicht ohne Grund ist der Ausdruck "astronomische Zahl" zu einem geflügelten Wort geworden. Viele indessen wissen nicht, dass selbst diejenigen Himmelskörper, die von den Astronomen

häufig als "klein" bezeichnet werden, sich als wahre Riesen herausstellen, wenn man auf sie den im täglichen Leben üblichen Maßstab anwendet.
Innerhalb unseres Sonnensystems gibt es Sterne [2], die die Astronomen im Hinblick auf ihre verhältnismäßig geringe Größe als "klein" bezeichnen. Unter ihnen gibt es solche, deren Durchmesser einige Kilometer beträgt. In den Augen des Astronomen, der an gigantische Maßstäbe gewöhnt ist, sind sie so klein, dass er sie, wenn er sie erwähnt, voller Geringschätzung "winzig" nennt. Aber "winzig" sind sie nur im Vergleich mit anderen riesigeren Himmelskörpern.

Die Oberfläche der kleinsten unter ihnen könnte die gesamte Bevölkerung der Sowjetunion aufnehmen. Nehmen wir einen "winzigen" Stern mit einem Durchmesser von 3 Kilometern. Ein solcher ist kürzlich entdeckt worden.
Nach den Regeln der Geometrie lässt es sich leicht berechnen, dass die Oberfläche eines solchen Körpers rund 28 Quadratkilometer oder 28 Millionen Quadratmeter umfasst. Auf einem Quadratmeter können 7 Menschen stehen. Auf 28 Millionen Quadratmetern haben also 196 Millionen Menschen Platz, das ist etwa die Bevölkerung der Sowjetunion.

Der Sand, auf den wir treten, führt uns ebenfalls in das Reich der Zahlengiganten. Jede Handvoll feiner Sand enthält nicht weniger einzelne Sandkörnchen, als die ganze Sowjetunion Einwohner zählt. Nicht umsonst hat sich seit uralten Zeiten für eine große Menge der Ausdruck "wie Sand am Meer"eingebürgert.
Die Alten haben übrigens den Sand hinsichtlich seiner Menge unterschätzt, indem sie die Zahl der Sandkörnchen derjenigen der Sterne gleichsetzten. Im Altertum gab es keine Fernrohre, und mit dem bloßen Auge sehen wir am Himmel im ganzen etwa 3500 Sterne (von einer Halbkugel).
Die Sandkörnchen am Meeresstrand sind um Millionen Male zahlreicher, als es die Sterne sind, die wir ohne Fernrohr sehen können.

Ein ungeheurer Zahlengigant verbirgt sich in der Luft, die wir atmen. Jeder Fingerhut enthält etwa 27 Trillionen (das ist eine 27 mit 18 Nullen) winzige Teilchen, die man "Moleküle" nennt. Es ist unmöglich, sich auch nur vorzustellen, wie groß diese Zahl ist. Wenn es ebensoviel Menschen gäbe, würde der Platz auf unserem Planeten Für sie buchstäblich nicht ausreichen. In der Tat: Die Oberfläche der Erdkugel umfasst unter Einbezug aller Erdteile und Ozeane rund 500 Millionen Quadratkilometer oder 500 000 000 000 000 Quadratmeter.

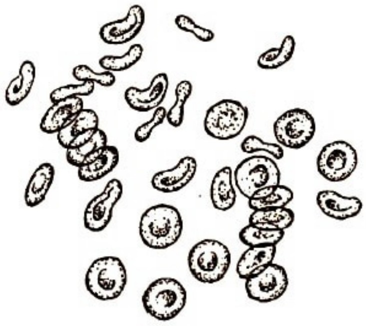
Wenn wir 27 Trillionen durch diese Zahl dividieren, kommen wir auf 54000. Dies bedeutet, dass auf jeden Quadratmeter der Erdoberfläche mehr als 50000 Menschen entfallen würden!

Und macht ihr euch eine Vorstellung davon, welchen Raum eine solche Menschenmenge ausfüllen würde?

[2] Es sind Planeten und Planetoiden gemeint.

Da ein menschlicher Körper im Durchschnitt etwa 50 Liter verdrängt, das heißt einen Raum von 1/20 Kubikmeter ausfällt, würden 27 Trillionen Menschen einen Raum von nicht weniger als 1350 Millionen Kubikkilometern in Anspruch nehmen.
Vergleichen wir ihn mit dem Rauminhalt aller Ozeane. Ihre Oberfläche beträgt rund 360 Millionen Quadratkilometer. Die mittlere Tiefe beträgt etwa 4 Kilometer; demnach füllen die Ozeane einen Raum aus, der $360000000 \cdot 4 = 1440$ Millionen Kubikkilometer umfasst und annähernd dem Raum entspricht, den 27 Trillionen menschliche Körper beanspruchen würden.

Eine Bevölkerung von dieser Zahl könnte folglich die Tiefe sämtlicher Ozeane und Meere der Erdkugel bis obenhin ausfüllen. Der gesamte Rauminhalt der 2000 Millionen (2 Milliarden) Menschen, die tatsächlich zur Zeit auf der Erde leben, ist dagegen sehr bescheiden, nämlich 0,1 Kubikkilometer.



Wie wir bereits erwähnt haben, gibt es Zahlenriesen auch im menschlichen Körper. Als Beispiel mag unser Blut dienen. Wenn wir einen Blutstropfen unter dem Mikroskop betrachten, entdecken wir, dass er aus einer Unmenge von winzigen roten Körpern besteht, die dem Blut auch seine Farbe geben. Jedes dieser "roten Blutkörperchen" hat die Form eines winzigen, in der Mitte eingedrückten Kissens.

Beim Menschen haben sie alle ungefähr die gleiche Größe: etwa 0,007 Millimeter im Durchmesser und 0,002 Millimeter Dicke. Dafür ist ihre Anzahl riesig groß. 5 Millionen von ihnen sind in einem winzigen Blutstropfen von einem Kubikmillimeter enthalten.

Wieviel solcher Blutkörperchen enthält unser Körper im ganzen? Die Literzahl der im menschlichen Körper enthaltenen Blutmenge ist etwa vierzehnmal kleiner, als sein Gewicht in Kilogramm ausmacht.
Wenn du 40 Kilogramm wiegst, beträgt die Blutmenge in deinem Körper rund 3 Liter oder 3000000 Kubikmillimeter. Da jeder Kubikmillimeter bis zu 5 Millionen rote Blutkörperchen enthält, beläuft sich ihre Gesamtzahl in deinem Blut auf $5000000 \cdot 3000000 = 15000000000000$. 15 Billionen Blutkörperchen!

Über welch eine Entfernung, würden sich diese winzig kleinen Körperchen erstrecken, wenn man sie in einer Reihe aneinanderfügen wollte?
Es lässt sich leicht errechnen, dass eine solche Reihe 105 000 Kilometer lang wäre. Über mehr als hunderttausend Kilometer würde sich ein Faden aus roten Körperchen deines Blutes hinziehen. Mit ihm könnte man die Erdkugel am Äquator $100000 : 40000 = 2{,}5$mal umspannen; mit dem Faden aus den Blutkörperchen eines erwachsenen Menschen wäre es dreimal möglich.

Wir wollen uns darüber klarwerden, welche Bedeutung so kleine Blutkörper für unseren Organismus haben. Sie sind dazu bestimmt, unseren Körper mit Sauerstoff zu versorgen. Den Sauerstoff nehmen sie auf, wenn sie die Lungen passieren, und stoßen ihn wieder ab, wenn sie durch die Zirkulation des Blutes in die Gewebe unseres Körpers bis zu den von den Lungen entferntesten Winkeln getragen werden. Gerade die Winzigkeit der Blutkörperchen erleichtert ihnen diese Aufgabe; denn je kleiner sie sind, um so mehr vergrößert sich ihre Oberfläche, und nur mit dieser sind sie imstande, den Sauerstoff aufzunehmen und abzustoßen.

Eine Berechnung ergibt, dass die gesamte Oberfläche der Blutkörperchen die Oberfläche des menschlichen Körpers um ein Mehrfaches übersteigt und 1200 Quadratmeter beträgt. Das entspricht der Fläche eines großen Gemüsegartens von 40 Meter Länge und 30 Meter Breite. Nun werdet ihr begreifen, welch große Bedeutung es für das Leben des Organismus hat, dass die Blutkörperchen in so viele kleine Teile zerlegt sind: Sie sind dadurch imstande, den aufgenommenen Sauerstoff über Flächen abzustoßen, die tausendmal größer sind als die Oberfläche unseres Körpers.

Ein Zahlenriese wäre auch das Resultat zu nennen, auf das wir kommen würden, wenn wir die Menge der verschiedenen Nahrungsmittel errechnen wollten, die der Mensch durchschnittlich im Laufe eines siebzigjährigen Lebens zu sich nimmt und verdaut. Ein ganzer Eisenbahnzug wäre erforderlich, um all die Tonnen Wasser, Brot, Fleisch, Kartoffeln, Gemüse und Obst, Tausende von Eiern, Tausende Liter Milch zu transportieren, die der Mensch während seines Lebens aufisst und austrinkt.

9 REGEN- UND SCHNEEGEOMETRIE

9.1 Regenmesser

Allgemein wird Leningrad für eine sehr regenreiche Stadt gehalten, für viel regenreicher als zum Beispiel Moskau. Die Wissenschaftler sind aber anderer Ansicht; sie behaupten, dass die durchschnittliche Niederschlagsmenge eines Jahres in Moskau größer sei als in Leningrad. Woher wissen sie das? Kann man den Regen denn messen?

Das scheint eine schwierige Aufgabe zu sein, und doch könnt ihr selbst die Berechnung der Regenmenge erlernen. Ihr dürft nicht glauben, dass man hierzu alles Wasser aufsammeln müsse, das als Regen auf die Erde niedergegangen ist. Es genügt, dass man die Höhe der Wasserschicht misst, die sich auf der Erde bilden würde, wenn sich das niedergegangene Wasser nicht verteilte und nicht in die Erde eindränge.
Und das zu machen, ist gar nicht so schwer. Denn wenn es regnet, fällt ja der Regen in der ganzen Umgegend gleichmäßig nieder: Es ist nicht so, dass das eine Beet mehr und das Beet daneben weniger Wasser abbekommen könnte. Um die Höhe der Wasserschicht für die ganze Fläche festzustellen, auf die der Regen niedergegangen ist, braucht man sie daher nur an einer beliebigen Stelle zu messen.

Nun werdet ihr euch wohl schon denken können, was man zu unternehmen hat, um die Höhe der mit dem Regen niedergegangenen Wasserschicht zu messen. Es kommt darauf an, wenigstens eine kleine Fläche zu haben, auf der das Regenwasser nicht auseinanderläuft und nicht in die Erde sickert. Hierzu eignet sich jedes beliebige offene Gefäß, zum Beispiel eine Konservendose. Wenn ihr ein solches zylinderförmiges Gefäß, das oben und unten den gleichen Durchmesser hat, besitzt, dann stellt ihr es beim nächsten Regen ins Freie. Die Dose muss auf einen erhöhten Platz gestellt werden, damit nicht die Spritzer hineingeraten, die durch den Aufschlag des Regens auf die Erde entstehen. Wenn der Regen aufgehört hat, messt ihr die Höhe des in der Dose angesammelten Wassers - und ihr habt alles, was ihr zur Berechnung braucht.

Befassen wir uns nun ausführlicher mit unserem selbstkonstruierten "Regenmesser" . Wie misst man die Höhe des Wasserspiegels in der Dose? Taucht man ein Zentimetermaß ins Wasser?
Das wäre nur dann angebracht, wenn sich viel Wasser in der Dose befände. Wenn es sich aber, wie es meist der Fall ist, um eine 2 bis 3 Zentimeter oder gar nur einige Millimeter hohe Wasserschicht handelt, ist es nicht möglich, sie auf diese Weise einigermaßen genau auszumessen. Hier ist indessen jedes Millimeter, ja selbst der zehnte Teil eines Millimeters von Wichtigkeit. Was tun?

Am besten gießt man das Wasser aus der Dose in ein schmales Glasgefäß, zum Beispiel ein Reagenzglas. In einem solchen Gefäß wird das Wasser einen höheren Stand haben, den man durch die Glaswand gut sehen kann. Die in dem schmalen Glasgefäß ermittelte Wasserhöhe stellt natürlich nicht die Höhe der Wasserschicht dar, die wir zu messen haben.
Es ist aber leicht, aus der Wasserhöhe in dem Glasgefäß die Wasserhöhe in der Dose zu berechnen. Angenommen, der Durchmesser des schmalen Gefäßes beträgt 1/10 des Durchmessers der Konservendose.

Der Boden der Glasröhre ist dann $1/10 \cdot 1/10 = 1/100$ des Bodens der Konservendose. Hieraus folgt, dass das aus der Dose umgefüllte Wasser in dem Glasgefäß hundertmal so hoch stehen muss. Wenn die Schicht des Regenwassers in der Dose eine Höhe von 2 mm hatte, wird also dieselbe Wassermenge in der Glasröhre einen Höhenstand von 200 mm = 20 cm haben.

Ihr seht aus dieser Berechnung, dass das Glasgefäß im Vergleich zu der als Regenmesser benutzten Dose nicht allzu schmal sein darf - sonst müsste man ein übermäßig hohes Gefäß wählen. Es genügt vollkommen, wenn der Durchmesser des Glasgefäßes 1/5 von dem Durchmesser der Dose beträgt; dann ist seine Bodenfläche 1/25 der Bodenfläche der Dose, und in dem gleichen Verhältnis steigt in ihm der Wasserspiegel.
Jedem Millimeter der Wasserhöhe in der Dose entsprechen 25 mm Wasserhöhe im schmalen Gefäß. Es ist daher zweckmäßig, auf die Außenseite des Glasgefäßes einen Papierstreifen zu kleben und auf diesem Abstände von je 25 mm einzuzeichnen, die man mit den Ziffern l, 2, 3 usw. nummeriert.
Mit einem Blick auf die Wasserhöhe im schmalen Gefäß hat man dann ohne lange Berechnungen auch gleich die Höhe der Wasserschicht in der Regenmesserdose. Wenn der Durchmesser des schmalen Gefäßes nicht 1/5, sondern nur 1/4 der Dose beträgt, müsste der Streifen auf dem Glasgefäß in Abstände von je 16 mm eingeteilt sein.

Das Wasser aus der Konservendose in das schmale Messgefäß auszukippen, ist sehr unbequem. Ratsamer ist es, in die Wand der Dose eine kleine runde Öffnung zu bohren und in diese ein Glasröhrchen mit einem Pfropfen einzuführen; mittels dieser Vorrichtung lässt sich das Wasser bedeutend bequemer umfüllen.
Somit steht euch bereits ein Gerät zur Verfügung, mit dem ihr die Höhe der Regenwasserschicht ausmessen könnt. Selbstverständlich lässt sich die Regenmenge mit der Dose und dem selbstkonstruierten Messgefäß nicht so genau berechnen, wie es mit einem richtigen Regenmesser und den Messgläschen möglich ist, die auf den meteorologischen Stationen benutzt werden. Immerhin werden euch eure einfachen und billigen Geräte behilflich sein, viele lehrreiche Berechnungen vorzunehmen.
Mit solchen Berechnungen wollen wir uns nun befassen.

9.2 Wie stark hat es geregnet?

Angenommen, wir haben einen 40 m langen und 24 m breiten Gemüsegarten vor uns. Es hat geregnet, und ihr möchtet wissen, wieviel Wasser sich im ganzen über den Gemüsegarten ergossen hat. Wie lässt sich das berechnen?
Anfangen muss man natürlich damit, dass man die Höhe der vom Regen gebildeten Wasserschicht feststellt, ohne diese Ziffer sind keinerlei Berechnungen möglich.
Nehmen wir an, euer selbstkonstruierter Regenmesser hatte eine Wasserschicht von 4 mm Höhe ergeben. Wir berechnen, wieviel Kubikzentimeter Wasser auf jedem Quadratmeter des Gemüsegartens stehen würden, wenn das Wasser nicht in die Erde eingesickert wäre.

Ein Quadratmeter hat 100 cm in der Breite und 100 cm in der Länge; auf ihm steht eine 4 mm = 0,4 cm hohe Wasserschicht. Der Rauminhalt einer solchen Wasserschicht ist also:

$$100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 0,4 \text{ cm} = 4000 \text{ cm}^3$$

Ihr wisst, dass 1 cm^3 Wasser 1 g wiegt. Folglich sind auf jedem Quadratmeter des Gemüsegartens 4000 g = 4 kg Regenwasser niedergegangen. Im ganzen umfasst der Gemüsegarten 40 m · 24 m = 960 m^2. Demnach sind auf ihn 4 kg · 960 = 3840 kg Regenwasser niedergegangen - nahezu 4 Tonnen.

Um einen Überblick zu gewinnen, wollen wir nun noch berechnen, wieviel Eimer Wasser herbeigeschafft werden müssten, wenn man dem Gemüsegarten durch Gießen dieselbe Wassermenge zuführen wollte, die ihm durch den Regen zuteil geworden ist. Ein großer Eimer enthält 12 kg Wasser.
Dann entspricht die Regenmenge dem Inhalt von 3840 : 12 = 320 Eimern.
Ihr würdet also zum Gießen 320 Eimer Wasser brauchen, um die Benetzung zu ersetzen, die durch den Regen erfolgt ist, der vielleicht eine knappe Viertelstunde angehalten hat.

Wie wird ein starker oder schwacher Regen durch Zahlen ausgedrückt? Zu diesem Zweck muss die "Niederschlagsstärke" festgestellt werden. Darunter versteht man die Höhe der Wasserschicht in Millimetern, die durch den Regen in einer Minute niedergegangen ist.
Wenn in jeder Minute durchschnittlich 2 mm Wasser niedergegangen sind, dann hat es sich um einen außerordentlich heftigen Regenguss gehandelt. Fällt dagegen im Herbst ein feiner Sprühregen, dann dauert es eine ganze Stunde oder sogar mehr, bis sich 1 mm Wasser ansammelt.

Wie ihr seht, ist das Messen der Regenmenge nicht nur möglich, sondern auch gar nicht besonders umständlich. Noch mehr: Wenn ihr wollt, könnt ihr sogar die ungefähre Zahl der niedergehenden Regentropfen berechnen. (Der Regen fällt immer in Tropfen auf die Erde, auch dann, wenn er scheinbar in dichten Strömen niedergeht.)
Warum auch nicht? Bei einem normalen Regen wiegen die einzelnen Tropfen so viel, dass durchschnittlich 12 von ihnen 1 g ausmachen. Folglich sind bei dem Regen, von dem vorhin die Rede war, auf jeden Quadratmeter des Gemüsegartens 4000 · 12 = 48000 Tropfen niedergegangen.

Ebenso kann man ohne weiteres die Anzahl der Tropfen berechnen, die auf den ganzen Gemüsegarten niedergegangen ist. Aber die Berechnung der Tropfenzahl ist nur interessant; einen praktischen Nutzen kann man aus ihr nicht ziehen. Wir haben sie lediglich erwähnt, um zu zeigen, dass man selbst zunächst ganz unmöglich scheinende Berechnungen vornehmen kann, wenn man sie richtig anzufassen weiß.

9.3 Wieviel Schnee ist gefallen?

Wir haben eben erfahren, wie man die durch Regen niedergehende Wassermenge misst. Wie aber misst man das Wasser, das der Hagel bringt? Auf die gleiche Weise. Die Hagelkörner fallen in euren Regenmesser und tauen dort; ihr messt das aus dem Hagel entstandene Wasser und ihr habt, was ihr braucht.
Anders verfährt man beim Messen des Wassers, das aus Schnee entsteht.

In diesem Falle wären die Feststellungen im Regenmesser sehr unzuverlässig, denn der Schnee, der in die Dose füllt, wird zum Teil vom Winde wieder hinausgeweht. Aber bei der Berechnung des Schneewassers kann man auch ohne Regenmesser auskommen: Man misst einfach mit

Hilfe einer Holzleiste (Messlatte) die Höhe der Schneedecke auf dem Hof, im Garten oder auf dem Feld.
Um dagegen die Höhe der Wasserschicht festzustellen, die aus diesem Schnee beim Tauen entstehen wird, müssen wir ein Experiment machen. Wir füllen die Dose bis an den Rand mit Schnee gleicher Festigkeit, lassen diesen tauen und lesen dann die Höhe der entstandenen Wasserschicht ab.

Man ermittelt die Gesamtmenge des Wassers, die in einem Jahr niedergeht, indem man während der warmen Jahreszeit Tag für Tag die Menge des Regenwassers misst und ihr dann die Wassermenge hinzufügt, die sich im Laufe des Winters in Form von Schnee angesammelt hat. Das ist ein sehr wichtiges Resultat, das die Niederschlagsmenge für die betreffende Gegend ergibt. ("Niederschläge" nennt man alles niedergehende Wasser, unabhängig davon, ob es in Form von Regen, Hagel oder Schnee zur Erde fällt.)

Nachstehend bringen wir eine Aufstellung, aus der die Niederschlagsmenge zu ersehen ist, die durchschnittlich im Laufe eines Jahres in verschiedenen Städten der Sowjetunion niedergeht. Sucht euch die Städte auf der Karte auf und stellt Vergleiche an mit den Niederschlagsmengen unserer deutschen Städte, soweit ihr diese Angaben in den Geographiebüchern findet.

Leningrad	47 cm	Kutaissi	179 cm	Wologda	45 cm
Baku	24 cm	Archangelsk	41 cm	Swerdlowsk	36 cm
Moskau	55 cm	Tobolsk	43 cm	Kostroma	49 cm
Semipalatinsk	21 cm	Kasan	44 cm	Alma-Ata	51 cm
Kuibyschew	39 cm	Taschkent	31 cm	Tschkalow	43 cm
Jenisseisk	39 cm	Odessa	40 cm	Irkutsk	44 cm
Astrachan	14 cm				

Von den angeführten Städten hat Kutaissi die reichsten Niederschläge (179 cm) und Astrachan die geringsten (14 cm), das ist nur 1/12 der Niederschläge von Kutaissi. Aber es gibt Orte auf der Erde, in denen die Niederschlagsmenge noch erheblich größer ist als in Kutaissi.
Eine Gegend in Indien zum Beispiel wird vom Regen buchstäblich überflutet: Dort beträgt die jährliche Niederschlagsmenge 1260 cm, das sind $12\frac{1}{2}$ m! Es ist vorgekommen, dass hier im Laufe von 24 Stunden über 100 cm Wasser niedergegangen sind.
Umgekehrt gibt es auch Gegenden, in denen die Niederschlagsmenge noch geringer ist als in Astrachan. In einem Teil Südamerikas, zum Beispiel in Chile, beträgt die Niederschlagsmenge eines ganzen Jahres nicht einmal 1 cm.
Gebiete, in denen die jährliche Niederschlagsmenge geringer ist als 25 cm, sind der Dürre ausgesetzt. Dort ist kein Getreideanbau möglich ohne künstliche Bewässerung.

Da ihr in keiner der eben genannten Städte wohnt und auch nicht jeder von euch seinen Wohnort im Schulbuch finden kann, müsst ihr es selber unternehmen, die Niederschlagsmenge für euren Wohnort zu messen. Wenn ihr ein ganzes Jahr hindurch unermüdlich nachmesst, wieviel Wasser bei jedem Regen und Hagelschauer niedergegangen ist und wieviel Wasser sich in Form von Schnee angesammelt hat, dann werdet ihr eine Vorstellung davon gewinnen, welchen Platz euer Wohnort hinsichtlich seiner Niederschlagsmenge unter den übrigen Orten der Erde einnimmt.

Auf Grund der Niederschlagsmengen eines Jahres, die man überall auf der Erdkugel festgestellt hat, kann man natürlich auch den Jahresdurchschnitt an Niederschlägen auf der ganzen Erde ermitteln. Dabei hat sich ergeben, dass auf dem Festlande (auf den Ozeanen finden Beobachtungen nicht statt) die durchschnittliche Niederschlagsmenge eines Jahres 78 cm beträgt. Es

wird angenommen, dass über den Ozeanen annähernd ebensoviel Wasser niedergeht wie auf einer Fläche des Festlandes von gleicher Größe.
Man kann also leicht ausrechnen, wieviel Wasser alljährlich auf unseren ganzen Planeten in Form von Regen, Hagel oder Schnee niedergeht. Hierzu muss man aber die Größe der Erdoberfläche kennen. Wenn ihr diese Größe nicht im Kopf habt, könnt ihr sie selbst ausrechnen.

Ihr wisst, dass ein Meter fast genau gleich dem vierzigmillionsten Teil des Erdumfangs ist. Mit anderen Worten, der Umfang der Erde beträgt rund 40 000 000 m = 40000 km. Der Umfang eines jeden Kreises ist π mal so groß wie der Durchmesser. Dabei ist π = rund 3,14... Hiervon ausgehend, ermitteln wir den Durchmesser unserer Erde: 40000 km : π = 12760 km.

Die Oberfläche einer Kugel aber errechnet man nach folgender Regel: Man multipliziert den Durchmesser mit sich selbst und mit π:

$$12760 \text{ km} \cdot 12760 \text{ km} \cdot 3,14 = \text{ rund } 510000000 \text{ km}^2$$

(Von der vierten Ziffer an drücken wir das Resultat durch Nullen aus, denn nur die ersten drei Ziffern sind zuverlässig.)
Die ganze Oberfläche der Erde beträgt somit rund 510 Millionen km^2. Wir berechnen nun, wieviel Wasser auf jeden Quadratkilometer der Erdoberfläche niedergeht. Auf einen Quadratmeter oder auf 10 000 cm^2 entfallen 78 cm · 10000 cm^2 = 780000 cm^3.
Ein Quadratkilometer besteht aus 1000 · 1000 = 1000000 m^2. Folglich beträgt die auf ihn niedergehende Wassermenge 780 000 000 000 cm^3 = 780000 m^3.
Für die gesamte Erdoberfläche beträgt die Niederschlagsmenge 780000 · 510000000 = 397 800 000 000 000 m^3.

Um diese Zahl von Kubikmetern in Kubikkilometer zu verwandeln, muss man sie durch 1000 · 1000 · 1000 = 1 Milliarde teilen. Wir kommen auf 397800 km^3. Somit ergießen sich aus der Atmosphäre alljährlich rund 400 000 Kubikkilometer Wasser auf die Oberfläche unserer Erde.
Und hiermit wollen wir unsere Unterhaltung über die Regen- und Schneegeometrie abschließen.
In meteorologischen Büchern könnt ihr euch ausführlicher über alles hier Gesagte unterrichten.

Inhaltsverzeichnis