Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 9

Die Aufgabensammlung erscheint periodisch auf Vorschlag des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und enthält Aufgaben mit Lösungen, die im Rahmen der Vorbereitung auf die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR die Arbeit von mathematischen Arbeitsgemeinschaften und die individuelle Beschäftigung interessierter Schüler mit der Mathematik unterstützen sollen. Die veröffentlichten Aufgaben sind in der Regel aus Vorschlägen zu Internationalen Mathematik-Olympiaden (IMO), aus den Klausuren in mathematischen Vorbereitungslagern und Aufgaben des mathematischen Korrespondenzzirkels ausgewählt. Sie sind für fortgeschrittene Schüler der Klassenstufe 11/12 der Erweiterten Oberschule vorgesehen.

Die Aufgabe 2 des vorliegenden Heftes wird als Preisaufgabe gestellt. Die Leser der Aufgabensammlung werden aufgefordert, Lösungen zu dieser Aufgabe bis zum 31.10. 76 an

Dr. W. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
25 Rostock, Universitätsplatz 1, Sektion Mathematik,

einzusenden. Dabei geben die Schüler bitte ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse ihrer Schule an. Die Lösung der Preisaufgabe wird im nächsten Heft veröffentlicht. Für die besten Lösungen erhalten deren Einsender Anerkennungsschreiben.

Die Aufgabensammlung wird über die Bezirkskabinette für außerunterrichtliche Tätigkeit in beschränkter Anzahl kostenlos vertrieben.

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu hier veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar. Sie sind zu richten an: Dr. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock.

Die hier veröffentlichten Aufgaben und Lösungen wurden von einem Autorenkollektiv zusammengestellt.

Autoren: H.-D. Gronau
Dr. W. Harnau
Dr. M. Krüppel
W. Moldenhauer
Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Burosch.
Bestell-Nr. 30 06 44-1 . Lizenz Nr. 203/1000/76 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Gesamtherstellung: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin

Sonderaufgabe

Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist, so bezeichne $h(n)$ den größten Primteiler von n.
Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n mit
$h(n) < h(n+1) < h(n+2)$?

Aufgaben

Aufgabe 1

Auf einem internationalen Kongreß mit 70 Teilnehmern stellt sich heraus, daß für je zwei Teilnehmer A und B gilt, daß A mindestens eine Sprache spricht, die B nicht spricht, und B mindestens eine Sprache spricht, die A nicht spricht.
Man bestimme die kleinste Anzahl von Sprachen, die von diesen 70 Teilnehmern insgesamt mindestens gesprochen werden!
(Ungarische math. Probleme, 1979, Aufgabe 19)

Aufgabe 2

Es sei K eine Menge der Mächtigkeit 5. F sei eine Menge von Teilmengen von K, wobei je drei Elemente von F mindestens ein Element von K gemeinsam haben sollen.

a) Welche Mächtigkeit kann F höchstens haben?
b) Welche Mächtigkeit kann F höchstens haben, wenn nicht alle Elemente von F ein Element aus K gemeinsam haben sollen?

(IMO-Vorschlag Israel, 1979, verallgemeinert)

Aufgabe 3

Es seien a, b, c und d ganze Zahlen mit $a \neq 0$. Wann hat die Gleichung

$$axy + bx + cy + d = 0$$

höchstens endlich viele Lösungen (x,y) im Bereich der ganzen Zahlen?
(American Mathematical Monthly (AMM), 1964, Problem E1631, verallgemeinert)

Aufgabe 4

Man beweise: Wenn die Längen der Seiten eines Vierecks (bzgl. einer vorgegebenen Einheitslänge) ganzzahlig sind und die Länge jeder Seite ein Teiler der Summe der Längen der anderen drei Seiten ist, so gibt es mindestens zwei Seiten im Viereck, die gleichlang sind.
(Mathematics Magazine, Problem Q315)

Aufgabe 5

Welches ist die größte natürliche Zahl n, für die es eine reelle Zahl x gibt, die die Ungleichungen

$$k < x^k < k+1$$

für $k = 1,2,\dots,n$ erfüllt?
(AMM, 1960, Problem E 1388)

Aufgabe 6

Es sei N die Menge der natürlichen Zahlen und

$$M_n = \{ x : x \in N \text{ und } 1 < x \leq n \}.$$

A_1, A_2, A_3 seien drei Teilmengen von M_n mit folgenden Eigenschaften:

1. Für $1 \leq i < j \leq 3$ haben A_i und A_j keine Elemente gemeinsam.
2. Wenn $x \in M_n$ ist, so gibt es ein i mit $1 \leq i \leq 3$ und $x \in A_i$.
3. Für $i = 1,2,3$ gilt: Wenn $a,b \in A_i$ und $a < b$ ist, so ist a kein Teiler von b.
4. Für $i = 1,2,3$ gilt: Wenn $a,b,c \in A_i$ und $a < b < c$ ist, so ist
$$b \neq \frac{a+c}{2}.$$
5. Für $i = 1,2,3$ gilt: Wenn $a,b,c,d \in A_i$ und $a < b < c < d$ ist, so ist
$$a + d \neq b + c.$$

Man bestimme die größte natürliche Zahl n, für die M_n alle fünf genannten Eigenschaften erfüllt!

Aufgabe 7

Für jede positive ganze Zahl n sei F(n) die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe dreier verschiedener positiver ganzer Zahlen darzustellen, wobei Darstellungen, die sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden, als gleich gelten.

Man gebe $F(n)$ explizit an!
Für welche n ist $F(n)$ ungerade?
(IMO-Vorschlag Israel, 1979, verallgemeinert)

Aufgabe 8

Es sei N die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 \text{ mit } 0 \leq x,y,z,t \leq 10^6$$

und M die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^2 - y^2 = z^3 - t^3 + 1 \text{ mit } 0 \leq x,y,z,t \leq 10^6.$$

Man beweise, daß $N > M$ gilt!
(IMO-Vorschlag UdSSR, 1979)

Aufgabe 9

Es sei $f(x) \leq x$ für alle reellen Zahlen x und $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle reellen Zahlen x und y.
Man zeige, daß $f(x) = x$ für alle reellen Zahlen x gilt!
(IMO-Vorschlag USA, 1979)

Aufgabe 10

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Zahlenfolgen mit $a_1 = 3$, $b_1 = 100$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$, $b_{n+1} = 100^{b_n}$ für $n \geq 1$. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl m mit $b_m > a_{100}$.
(IMO-Vorschlag Rumänien, 1979)

Aufgabe 11

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. K sei die Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkt C und einem Radius, der kleiner als $\overline{AC}$ ist.
Gibt es auf K einen Punkt P, so daß die Tangente an K im Punkte P den Winkel $\sphericalangle$ APB halbiert?
(AMM, 1927, Problem 3170)

Aufgabe 12

Man bestimme alle ganzen Zahlen x, für die der Ausdruck

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

das Quadrat einer ganzen Zahl ist!
(AMM, 1926, Problem 2784)

Aufgabe 13

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.
Man bestimme die maximale Mächtigkeit einer Menge M von geordneten Paaren (j,k), wobei j und k ganze Zahlen mit $1 \leq j < k \leq n$ sind, mit folgender Eigenschaft:

Wenn $(j,k) \in M$ ist, so ist $(k,m) \notin M$ für jedes m.

(IMO-Vorschlag ČSSR, 1979)

Aufgabe 14

Man zeige, daß es für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ eine zusammengesetzte natürliche Zahl M_n gibt, die zu 10 teilerfremd ist und deren Quersumme (bei Darstellung von M_n im Dezimalsystem) n ist!
(Mathematikolympiade der UdSSR, 1979)

Aufgabe 15

Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt O. $\overline{AB}$ sei eine Sehne in K, die weder Durchmesser noch Tangente von K sei. $\overline{NN'}$ sei der Durchmesser von K, der senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Der Schnittpunkt von NN' mit AB sei mit M bezeichnet. Die Sehne $\overline{AB}$ zerlegt die Peripherie von K in zwei Kreisbögen unterschiedlicher Länge. N liege auf dem kleineren Kreisbogen. Es sei nun P ein beliebiger Punkt auf dem größeren Kreisbogen und $P \notin \{A,B,N'\}$. $\overline{PQ}$ sei die Sehne von K durch M und R sei der Schnittpunkt der Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{PN}$.
Man beweise, daß dann $\overline{QM}$ stets länger als $\overline{RN}$ ist!

Lösungen

Aufgabe 1

Es sei n diese Minimalanzahl von Sprachen. Wir bezeichnen die Sprachen mit $1,2,\ldots,n$ und M_n sei die Menge $\{1,2,\ldots,n\}$. Unsere Aufgabe ist offenbar äquivalent zu folgender:
Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, für die M_n 70 Teilmengen enthält, wobei keine dieser 70 Mengen Teilmenge einer der restlichen 69 Mengen ist?
Wir werden nachweisen, daß $n = 8$ gelten muß.
Wir zeigen zunächst, daß $n \leq 8$ ist.
Es gibt $\binom{8}{4} = 70$ Teilmengen der Mächtigkeit 4 in M_8. Diese seien $A_1, A_2, \ldots, A_{70}$. Für $i \neq j$ und $1 \leq i,j \leq 70$ gilt offensichtlich $A_i \not\subseteq A_j$.
Nun zeigen wir indirekt, daß $n \geq 8$ ist.
Dazu nehmen wir an, daß wir in M_7 70 Teilmengen derart finden können, daß für $i \neq j$ und $1 \leq i,j \leq 70$ die Menge A_i keine Teilmenge von A_j ist.
Es gibt $2^6 = 64$ verschiedene Teilmengen von M_6. Folglich findet man unter $A_1, A_2, \ldots, A_{70}$ zwei verschiedene Teilmengen A_i und A_j mit $A_i \cap M_6 = A_j \cap M_6$. Da $A_i \neq A_j$, $A_i \subseteq M_7$ und $A_j \subseteq M_7$ gilt, ist entweder $A_i \subset A_j$ oder $A_j \subset A_i$, womit wir einen Widerspruch zu unserer Annahme erzielt haben.
Damit ist $n = 8$ bewiesen.
Die Minimalanzahl von Sprachen ist also 8.

Aufgabe 2

Es sei $K = \{1,2,3,4,5\}$ und $\underline{P}(K)$ die Menge aller Teilmengen von K. Die Mächtigkeit von $\underline{P}(K)$ ist 32. Die Elemente von $\underline{P}(K)$ ordnen wir folgendermaßen zu Paaren (A,B):

$A,B \in \underline{P}(K)$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = K$, $1 \in A$.

($\emptyset$ bezeichne die leere Menge.)
Wir erhalten 16 verschiedene Paare.
Im Falle a) kann die Mächtigkeit von F höchstens 16 sein, denn wäre sie größer als 16, gäbe es ein Paar (A,B) mit $A,B \in F$. Da $A \cap B = \emptyset$ gilt, erhielten wir sofort einen Widerspruch zur Bedingung für F. Andererseits existiert im Falle a) ein F der Mächtigkeit 16, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ein solches F ist offenbar:

$A \in F$ genau dann, wenn $1 \in A$ ist.

Wir kommen nun zur Behandlung des Falles b).
Wir betrachten zwei beliebige Elemente A und B aus F. Offenbar muß $|A \cap B| \geq 1$ sein. ($|M|$ bezeichne die Mächtigkeit der Menge M.) Wenn $A \cap B \doteq \{x\} \subset K$ ist, so muß $x \in C$ für alle $C \in F$ gelten. Somit gilt stets $|A \cap B| \geq 2$. Wenn ein $C \in F$ mit $|C| = 2$ existiert, so folgt nunmehr, daß $C \subseteq A$ für alle $A \in F$ ist.
Folglich kommen als Elemente von F nur folgende Teilmengen von K in Betracht (Mengenklammern und Kommata wurden weggelassen).

123	135	245	1245
124	145	345	1345
125	234	1234	2345
134	235	1235	12345

Offenbar ist F_1, das aus den nachstehend aufgeführten Mengen besteht, ein Mengensystem, das der Aufgabe im Falle b) genügt:

123	125	1235	1345	12345
124	1234	1245	2345	

Folglich hat ein F maximaler Mächtigkeit im Falle b) mindestens 9 Elemente und enthält somit mindestens 3 Elemente der Mächtigkeit 3. O.B.d.A. kann 123 als Element von F betrachtet werden, wenn F von maximaler Mächtigkeit sein soll. Da $|A \cap B| \geq 2$ gelten muß, kommen 145, 245 und 345 nicht als Elemente von F in Betracht. Von den verbleibenden dreielementigen Teilmengen von K kann nun o.B.d.A. 124 als Element von F gewählt werden. Damit müssen 135 und 235 als Elemente von F ausgeschlossen werden.
Wenn 125 Element von F ist, kann weder 134 noch 234 Element von F sein, womit wir höchstens F_1 als F erhalten.
Wenn 125 kein Element von F ist, so kann F höchstens die Mächtigkeit 10 haben und das nur dann, wenn das System

123	134	1234	1245	2345
124	234	1235	1345	12345

den Bedingungen der Aufgabe im Falle b) genügt.
Da dies der Fall ist, lautet 10 die Antwort im Falle b).

Aufgabe 3

Da $a \neq 0$ ist, können wir $axy + bx + cy + d = 0$ mit a multiplizieren und erhalten die zu ihr äquivalente Gleichung

$$a^2xy + abx + acy + ad = 0.$$

Hierzu ist äquivalent

$$(ax + c)(ay + b) = bc - ad.$$

Von dieser Gleichung ausgehend unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

Fall 1. $bc - ad \neq 0$. Hier muß jeder der Terme $(ax + c)$ und $(ay + d)$ ein Teiler von $bc - ad$ sein. Da $bc - ad \neq 0$ ist, besitzt $bc - ad$ nur eine endliche Anzahl von Teilern und somit auch nur eine endliche Anzahl von möglichen Werten für $(ax + c)$ und $(ay + b)$. Folglich kann unsere Ausgangsgleichung in diesem Falle auch nur höchstens eine endliche Anzahl ganzzahliger Lösungen (x,y) haben.

Fall 2. $bc - ad = 0$. Hier entartet unsere Gleichung zu

$$(ax + c)(ay + d) = 0.$$

Wenn jetzt a weder Teiler von b noch Teiler von c ist, gibt es offenbar keine ganzzahlige Lösung (x,y) unserer Gleichung. Anderenfalls besitzt sie sicher unendlich viele ganzzahlige Lösungen.

Somit besitzt unsere Ausgangsgleichung genau dann höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn $bc - ad \neq 0$ ist oder falls $bc - ad = 0$ ist, so darf a weder Teiler von b noch Teiler von c sein.

Aufgabe 4

Wir werden den Beweis indirekt führen.
Dazu nehmen wir an, daß die Längen s_1, s_2, s_3, s_4 der Seiten des Vierecks paarweise voneinander verschiedene positive ganze Zahlen mit den in der Aufgabe geforderten Teilereigenschaften seien.
O.B.d.A. kann $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$ gesetzt werden. Es sei $p = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$. Es soll $s_i/p - s_i$ für $i = 1,2,3,4$ gelten. (Für zwei ganze Zahlen a und b bedeute a/b, daß a ein Teiler von b ist.) Damit muß auch s_i/p für $i = 1,2,3,4$ sein. Da s_1 die Länge der größten Seite des Vierecks sein soll, ist $\frac{p}{4} < s_1 < \frac{p}{2}$. Da s_1/p ist, muß $s_1 = \frac{p}{3}$ gelten. Da auch s_i/p für $i = 2,3,4$ gelten soll und $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$ vorausgesetzt ist, erhalten wir $s_2 \leq \frac{p}{4}$, $s_3 \leq \frac{p}{5}$ und $s_4 \leq \frac{p}{6}$. Somit gilt

$$p = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq \frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} = \frac{57}{60}p < p.$$

Da $p < p$ nicht gelten kann, haben wir einen Widerspruch erhalten. Folglich müssen mindestens zwei Seiten im Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügen soll, gleichlang sein.

Aufgabe.5

Wir zeigen zunächst indirekt, daß $n \leq 4$ gelten muß.

Dazu nehmen wir an, daß $n > 4$ gilt. Dann muß $3 < x^3$ und $x^5 < 6$ gelten. Aus diesen beiden Ungleichungen erhält man

$$243 = 3^5 < x^{15} < 6^3 = 216.$$

Damit haben wir einen Widerspruch ($243 < 216$) erhalten, und es muß $n \leq 4$ gelten.

Wie man andererseits leicht nachrechnen kann, ist $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$ und für alle x mit $\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[4]{5}$ sind die Ungleichungen $k < x^k < k + 1$ für $k = 1,2,3,4$ erfüllt.

Somit ist 4 das maximale n.

Aufgabe 6

Wir zeigen zunächst, daß $n \geq 13$ ist.

Das wird durch das Beispiel $A_1 = \{2,3,11,13\}$, $A_2 = \{4,6,9,10\}$, $A_3 = \{5,7,8,12\}$ bewiesen, denn es erfüllt 1. bis 5. für M_{13}.

Indirekt beweisen wir nun, daß $n < 14$ sein muß.

Dazu nehmen wir an, daß wir A_1, A_2, A_3 derart finden können, daß diese Mengen 1. bis 5. für M_{14} erfüllen.

Wegen 2. kann o.B.d.A. 2 als Element von A_1 gewählt werden. Dann darf wegen 3. keines der Elemente 4,6,8,10,12,14 in A_1 vorkommen und wegen 1. darf 2 weder in A_2 noch in A_3 liegen.

Wegen 2. kann o.B.d.A. 4 als Element von A_2 gewählt werden. Dann darf wegen 3. weder 8 noch 12 in A_2 vorkommen und wegen 1. muß $4 \notin A_3$ gelten.

Wegen 2. müssen 8 und 12 Elemente von A_3 sein. Wegen 3. und 4. darf keines der Elemente 3,6,10 in A_3 liegen.

Wegen 2. müssen 6 und 10 Elemente von A_2 sein. Wegen 3. und 4. darf keines der Elemente 3,5,7,14 in A_2 vorkommen.

Wegen 2. muß $14 \in A_3$ sein. Wegen 3. und 4. darf keines der Elemente 7,11,13 in A_3 liegen.

Wegen 2. müssen 3 und 7 in A_1 vorkommen. Wegen 3. und 4. darf keines der Elemente 5,9,11 in A_1 liegen.

Wegen 2. muß $5 \in A_3$ sein. Wegen 5. muß $9 \notin A_3$ gelten.

Wegen 2. müssen nun 9 und 11 Elemente von A_2 sein. Somit haben wir $\{9,10,11\} \subseteq A_2$ erhalten, was ein Widerspruch zu 4. ist.

Somit muß $n < 14$ sein.

Damit ist 13 als größtes n nachgewiesen.

Aufgabe 7

$F(n)$ ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (a_1, a_2, a_3) der Gleichung $n = a_1 + a_2 + a_3$, wobei n eine positive ganze Zahl und $0 < a_1 < a_2 < a_3$ ist.

Da $i \leq a_i$ für $i = 1,2,3$ gilt, ist $F(n) = 0$ für $n < 6$ und $F(6) = 1$.

Im folgenden sei $n > 6$ stets vorausgesetzt.

Offenbar besitzt die Gleichung $n = a_1 + a_2 + a_3$ genau $\left[\frac{n-4}{2}\right]$ ganzzahlige Lösungen (a_1, a_2, a_3) mit $a_1 = 1$ und $1 < a_2 < a_3$. ($[x]$ bezeichne für eine reelle Zahl x die ganze Zahl, die $[x] \leq x < [x] + 1$ erfüllt.)

Wir bestimmen nun die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (a_1, a_2, a_3) unserer Gleichung mit $a_1 > 1$ und $a_1 < a_2 < a_3$. Wir setzen dazu $a_i' = a_i - 1$ für $i = 1,2,3$. Dann gilt $0 < a_1' < a_2' < a_3'$ und die a_i' sind ganze Zahlen mit $n-3 = a_1' + a_2' + a_3'$.

Somit ist $F(n-3)$ die Anzahl der Lösungen mit $a_1 > 1$. Somit ist

$$F(n) = F(n-3) + \left[\frac{n-4}{2}\right] \quad \text{und} \quad F(n-3) = F(n-6) + \left[\frac{n-7}{2}\right]$$

Da von den Zahlen $(n-4)$ und $(n-7)$ genau eine gerade ist, gilt

$$\left[\frac{n-4}{2}\right] + \left[\frac{n-7}{2}\right] = \frac{n-4}{2} + \frac{n-7}{2} - \frac{1}{2} = n-6.$$

Damit gilt

$$F(n) = F(n-6) + n - 6.$$

Für $n > 12$ erhalten wir hieraus unmittelbar

$$F(n) = F(n-12) + 2n - 18.$$

Für $n > 12$ ist somit $F(n)$ genau dann ungerade, wenn $F(n-12)$ ungerade ist.

Es ist $F(n) = 0$ für $n < 6$ und $F(6) = 1$. Für $7 \leq n \leq 11$ ist $F(n) = F(n-6) + n - 6 = n-6$ und $F(12) = F(6) + 6 = 1 + 6 = 7$.

Damit gilt: Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so ist $F(n)$ genau dann ungerade, wenn $n \equiv k \bmod 12$ mit $k \in \{0,6,7,9,11\}$ ist.

Wir kommen nun zur expliziten Darstellung von $F(n)$ und behaupten: Für alle positiven ganzen Zahlen n ist

$$F(n) = (n-2)\left[\frac{n}{6}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{6}\right]$$

Wir werden diese Behauptung durch vollständige Induktion von n auf n+6 beweisen.

Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so ist $\left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n-1}{6}\right] = 0$ und folglich $(n-2)\left[\frac{n}{6}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{6}\right] = 0.$

Für n = 6 erhalten wir

$$(6-2)\left[\frac{6}{6}\right] - 3\left[\frac{6}{6}\right]^2 - \left[\frac{6-1}{6}\right] = 4 - 3 - 0 = 1.$$

Damit ist die Gültigkeit der Behauptung für alle natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n \leq 6$ nachgewiesen.
Es sei nun n eine natürliche Zahl mit $n > 6$. Wir beweisen damit:

Wenn $F(n-6) = (n-8)\left[\frac{n-6}{6}\right] - 3\left[\frac{n-6}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-7}{6}\right]$ ist, so gilt

$$F(n) = (n-2)\left[\frac{n}{6}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{6}\right].$$

Beweis. Es ist $F(n) = F(n-6) - n - 6$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
F(n) &= (n-8)\left[\frac{n-6}{6}\right] - 3\left[\frac{n-6}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-7}{6}\right] + n - 6\\
&= (n-8)\left(\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right) - 3\left(\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right)^2 - \left(\left[\frac{n-1}{6}\right] - 1\right) + n - 6\\
&= (n-2)\left[\frac{n}{6}\right] - 6\left[\frac{n}{6}\right] - n + 8 - 3\left[\frac{n}{6}\right]^2 + 6\left[\frac{n}{6}\right] - 3 - \left[\frac{n-1}{6}\right] +\\
&\qquad + 1 + n - 6\\
&= (n-2)\left[\frac{n}{6}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{6}\right].
\end{aligned}$$

Damit folgt nach dem Induktionsprinzip die Richtigkeit der Behauptung für alle positiven ganzen Zahlen n, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

<u>Aufgabe 8</u>

In dieser Aufgabe seien x,y,z,t,k stets nichtnegative ganze Zahlen mit $x,y,z,t \leq 10^6$.
h_k bezeichne die Anzahl der Lösungen (x,t) der Gleichung $x^3 + t^3 = k$.
Dann ist h_k^2 die Anzahl der Lösungen (x,y,z,t) des Gleichungssystems $x^2 + t^3 = y^2 + z^3 = k$ und für $k > 0$ ist $h_k h_{k-1}$ die Anzahl der Lösungen (x,y,z,t) des Gleichungssystems $x^2 + t^3 = y^2 + z^3 + 1 = k$.

Wir setzen $p = 10^{12} + 10^{18}$. Dann ist offenbar $N = \sum\limits_{k=0}^{p} h_k^2$ und

$$M = \sum_{k=1}^{p} h_k h_{k-1}.$$

Da $h_0 = 1$ ist, erhalten wir

$$0<\frac{1}{2}(h_0^2+\sum_{k=1}^{p}(h_k - h_{k-1})^2+h_p^2) = \frac{1}{2}(h_0^2+\sum_{k=1}^{p}h_k^2 - 2\sum_{k=1}^{p} h_k h_{k-1} + \sum_{k=1}^{p}h_{k-1}^2 + h_p^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{p}h_k^2 - \sum_{k=1}^{p}h_k h_{k-1} = N - M.$$

Damit ist $N > M$ nachgewiesen.

Aufgabe 9

Wir setzen

$$f(x) \leq x \quad \text{und} \tag{1}$$

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y). \tag{2}$$

Für $x = 0$ folgt aus (1)

$$f(0) \leq 0 \tag{3}$$

und für $x = y = 0$ folgt aus (2)

$$f(0) = f(0 + 0) \leq f(0) + f(0),$$

woraus

$$f(0) \geq 0 \tag{4}$$

folgt. Aus (3) und (4) erhalten wir

$$f(0) = 0. \tag{5}$$

Indem wir $y = -x$ setzen, erhalten wir wegen (1), (2) und (5)

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x) \leq x + (-x) = 0,$$

woraus $f(x) + f(-x) = 0$ folgt. Damit ist

$$-f(-x) = f(x). \tag{6}$$

Wegen (1) ist $f(-x) \leq -x$ oder $-f(-x) \geq x$, woraus mit (6) $f(x) \geq x$ folgt. Zusammen mit (1) ergibt das die Behauptung der Aufgabe, denn, daß die Funktion $f(x) = x$ den Bedingungen der Aufgabe genügt, ist offenbar.

Aufgabe 10

Da $a_2 = 3^3 = 27 < b_1$ ist, folgt hieraus sofort

$$a_{n+1} < b_n \quad \text{für alle } n \geq 1. \tag{7}$$

Wir definieren noch eine Zahlenfolge (c_n) für alle $n \geq 1$ durch

$$c_1 = 243 = 3^5 \text{ und } c_{n+1} = 243^{c_n} \text{ für } n \geq 1.$$

Offensichtlich gilt

$$c_n > b_n \quad \text{für alle } n \geq 1. \tag{8}$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= 3^{27} > 3^5 = c_1 \qquad \text{und} \\ a_4 &= 3^{3^{27}} > 3^{5.243} = 243^{243} = c_2. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Behauptung: Wenn $n \geq 2$ ist, so folgt aus $a_{n+2} > c_n$, daß $a_{n+3} > c_{n+1}$ gilt.

Beweis: Es ist $3^{a_{n+1}} = a_{n+2} > c_n = 243^{c_{n-1}} = 3^{5.c_{n-1}}$

Somit ist $a_{n+1} > 5c_{n-1}$. Da $n \geq 2$ ist, ist 3 ein Teiler von c_{n-1} und a_{n+1}. Deshalb gilt sogar: $a_{n+1} > 2 + 5c_{n-1}$. Da $\log_3 5 < 2$ ist, ist $a_{n+1} > \log_3 5 + 5c_{n-1}$. Damit ist

$$a_{n+2} = 3^{a_{n+1}} > 3^{\log_3 5 + 5c_{n-1}} = 5.3^{5c_{n-1}} = 5.243^{c_{n-1}} = 5c_n,$$

womit wir $a_{n+2} > 5c_n$ erhalten haben. Somit gilt nun

$$a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} > 3^{5c_n} = 243^{c_n} = c_{n+1},$$

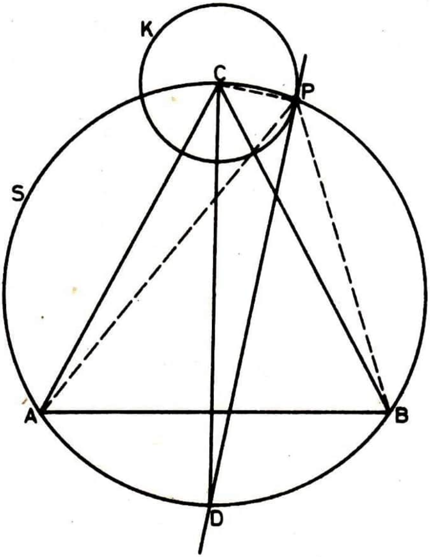
womit wir den Beweis der Behauptung erbracht haben.
Aus (9) und der soeben bewiesenen Behauptung folgt nach dem Induktionsprinzip die Gültigkeit von

$$a_{n+2} > c_n \text{ für alle } n \geq 1. \qquad (10)$$

Aus (7), (8) und (10) erhalten wir, daß $b_{99} > a_{100} > c_{98} > b_{98}$ gilt.
Damit gilt $m = 99$.

Aufgabe 11

Es sei S die Peripherie des Umkreises des Dreieckes ABC. Da der Radius von K kleiner als $\overline{AC}$ ist, schneidet S den Kreis K in zwei Punkten. Irgendeinen dieser beiden Schnittpunkte nennen wir P und behaupten, daß P die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
$\overline{CD}$ sei der Durchmesser von S durch C. Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle CPD = 90^\circ$. Folglich ist PD Tangente an K in P. Da $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, ist auch $\overline{AD} = \overline{BD}$. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt nun $\sphericalangle APD = \sphericalangle DPB$, womit auch nachgewiesen ist, daß PD den Winkel $\sphericalangle APB$ halbiert.



<u>Aufgabe 12</u>

Die Gleichung

$$y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \tag{11}$$

ist in ganzen Zahlen x und y zu lösen.

Es ist

$$(x^2 + \frac{x}{2})^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (\frac{3}{4}x^2 + x + 1),$$

wonach mit (11)

$$(x^2 + \frac{x}{2})^2 = y^2 - \frac{1}{4}(3x^2 + 4x + 4) \tag{12}$$

gilt.

Es ist $3x^2 + 4x + 4 = 3(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3}$. Damit ist $3x^2 + 4x + 4 > 0$ für alle reellen x und aus (12) folgt die Ungleichung

$(x^2 + \frac{x}{2})^2 < y^2$ oder

$$\left|x^2 + \frac{x}{2}\right| < |y| \ . \qquad (13)$$

Es ist $x^2 + \frac{x}{2} = x(x + \frac{1}{2})$. Folglich ist $x^2 + \frac{x}{2} \geq 0$, wenn $x \geq 0$ oder $x \leq -1$ ist. Somit gilt $x^2 + \frac{x}{2} \geq 0$ für alle ganzen Zahlen x.
Aus (13) folgt jetzt

$$x^2 + \frac{x}{2} < |y| \qquad (14)$$

Da x und y ganze Zahlen sind, gilt anstelle von (14) auch

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leq |y|$$

Hieraus erhalten wir

$$y^2 \geq (x^2 + \frac{x+1}{2})^2 = x^4 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$= x^4 + x^2 + x^2 + x + 1 + (\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}),$$

woraus wegen (11)

$$y^2 \geq y^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 3)$$

folgt. Somit muß $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \leq 0$ sein. Wenn $x \leq -2$ oder $x > 3$ ist, wird offenbar $(x + 1)(x - 3) > 0$.
Damit kommen als Lösungen der Aufgabe für x höchstens die Werte $-1, 0, 1, 2, 3$ in Frage.
Wir setzen $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Es ist $f(-1) = 1$, $f(0) = 01$, $f(1) = 5$, $f(2) = 31$, $f(3) = 121$.
(11) wird also genau dann für eine ganze Zahl x das Quadrat einer ganzen Zahl, wenn $x \in \{-1, 0, 3\}$ ist.

<u>Aufgabe 13</u>

(Das Symbol $\emptyset$ und die Bezeichnungen $|M|$ für eine Menge M bzw. $[x]$ für eine reelle Zahl x sind in den Lösungen zu den Aufgaben 2 bzw. 7 erklärt.)
Für jedes M, das den Bedingungen der Aufgabe genügt, definieren wir zwei Mengen A und B:

$$A = \{j : \text{es gibt ein } k \text{ mit } (j,k) \in M\}$$
$$B = \{k : \text{es gibt ein } j \text{ mit } (j,k) \in M\}.$$

Offenbar gelten die Beziehungen: $A \cap B = \emptyset$ und $|A \cup B| \leq n$.
Hieraus folgert man leicht die Gültigkeit von

$$|M| \leq |A| \; |B| \qquad \text{und} \tag{15}$$

$$|A| + |B| \leq n \, . \tag{16}$$

In (15) erhalten wir genau dann Gleichheit, wenn

$$M = \left\{(j,k) \, : \, j \in A \text{ und } k \in B\right\} \tag{17}$$

gilt, was nur dann möglich ist, wenn

$$\text{für alle } j \in A \text{ und für alle } k \in B \quad j < k \text{ gilt.} \tag{18}$$

In (16) erhalten wir genau dann Gleichheit, wenn gilt:

$$|A \cup B| = n \, . \tag{19}$$

(18) und (19) gelten genau dann gleichzeitig, wenn gilt:

$$A = \left\{1,2,\ldots,r\right\} \quad \text{und } B = \left\{r+1,r+2,\ldots,n\right\} \text{ mit } 1 \leq r < n. \tag{20}$$

Wir erhalten also für ein M, das durch (17) definiert ist,

$$|M| = r(n - r).$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß unser ursprüngliches Problem zu folgendem gleichwertig ist:

> Gegeben ist eine natürliche Zahl n mit $n > 1$. Man bestimme eine natürliche Zahl r mit $1 \leq r < n$, für die das Produkt $r(n - r)$ maximal wird!

Offenbar gilt: Wenn für die natürliche Zahl a mit $1 \leq a < n$ das Produkt $a(n - a)$ maximal wird, so wird es auch für die natürliche Zahl $n - a$ maximal, die $1 \leq n - a < n$ erfüllt.
Somit reicht es aus, sich auf die natürlichen Zahlen r mit $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ zu beschränken.
Es sei nun x eine natürliche Zahl mit $0 \leq x < \left[\frac{n}{2}\right]$ und $r = \left[\frac{n}{2}\right] - x$.
Damit erhalten wir

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right] - x\right)\left(n - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - x\right)\right) = \left[\frac{n}{2}\right] \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + x\left(2 \left[\frac{n}{2}\right] - n\right) - x^2$$

$$\leq \left[\frac{n}{2}\right] \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) - x^2,$$

da $2 \, \frac{n}{2} - n \leq 0$ ist.

Somit wird der Ausdruck $r(n - r)$ mit $1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ genau dann maximal, wenn $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ ist. Da $n - \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ gilt, ist stets

$$M \leq \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

erfüllt, wobei das Gleichheitszeichen gilt, wenn M durch (17), A und B durch (20) definiert sind und $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ gesetzt wird.

Aufgabe 14

Wir lösen die Aufgabe zunächst für den Fall, daß n eine Primzahl ist. Wenn wir $M_2 = 1001$ und $M_5 = 203$ setzen, ist die Aufgabe für $n = 2$ und $n = 5$ gelöst, denn M_2 und M_5 sind zu 10 teilerfremd, die Quersumme von M_i für $i \in \{2,5\}$ ist i, und es ist $1001 = 7.11.13$ und $203 = 7.29$. Nun sei n eine Primzahl mit $n \notin \{2,5\}$. Hier setzen wir

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{(n-1)i}.$$

Offenbar stimmt die Quersumme von M_n mit n überein. Da $M_n \equiv 1 \bmod 10$ ist, ist M_n zu 10 teilerfremd. Nach dem kleinen Fermat'schen Satz ist, da n prim und zu 10 teilerfremd ist, $10^{n-1} \equiv 1 \bmod n$. Damit gilt:

$$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{(n-1)i} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = n \equiv 0 \bmod n.$$

Da nach Konstruktion $M_n > n$ ist, ist somit M_n zusammengesetzt. Damit haben wir für jede Primzahl p ein M_p gefunden, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Nun sei n zusammengesetzt. Dann ist $n = p.m$, wobei p eine Primzahl und m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$ ist. Wir setzen jetzt

$$M_n = M_p \cdot \sum_{i=0}^{m-1} 10^{r.i}, \text{ wobei } r = \,]\log_{10} M_p[\quad \text{ist.}$$

(Es bezeichne $]x[$ für eine reelle Zahl x die ganze Zahl, die $x < \,]x[\, \leq x + 1$ erfüllt.) Damit hat M_n die Dezimaldarstellung

$$\underbrace{\overline{M_p M_p \ldots M_p}}_{m\text{-mal}}$$

Damit erfüllt M_n offenbar alle Bedingungen der Aufgabe.

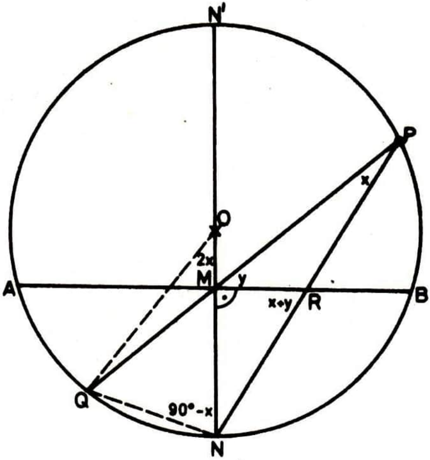
Aufgabe 15

Mit x bzw. y bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle$ QPN bzw. $\sphericalangle$ PMR. Nach den Voraussetzungen der Aufgabe ist $0^\circ < x < 90^\circ$. Nach dem Zentrierwinkelwatz ist $\sphericalangle$ QON = 2x. Da das Dreieck QNO gleichschenklig ist und die Basis $\overline{QN}$ hat, gilt $\sphericalangle$ OQN = $\sphericalangle$ ONQ = $90^\circ - x$. Weiterhin gilt nun offenbar (siehe Abbildung) $\sphericalangle$ QMN = $90^\circ - y$, $\sphericalangle$ MQN = x + y und $\sphericalangle$ MRN = x + y.

Wir wenden nun den Sinussatz auf die Dreiecke MQN und MNR an und erhalten:

$$\frac{\overline{QM}}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{\overline{MN}}{\sin(x + y)} = \frac{\overline{RN}}{\sin\ 90^\circ}\ .$$

Da $0 < \sin(90^\circ - x) < 1$ ist, folgt hieraus sofort, daß $\overline{QM} < \overline{RN}$ gilt.



Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 10

Aufgaben

Aufgabe 1

Es seien a_v und b_v ($v = 1, 2, \ldots, n$) reelle Zahlen mit

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0$$

und $b_1 \geqq a_1$, $b_1 b_2 \geqq a_1 a_2$, ..., $b_1 b_2 \ldots b_n \geqq a_1 a_2 \ldots a_n$.

Man zeige

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Aufgabe 2

Es seien a_0 und a_1 irgendwelche reellen Zahlen. Weiterhin sei

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man beweise, daß die Folge $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent ist und bestimme den Grenzwert.

(Ungarische VR)

Aufgabe 3

Es sei $\{a_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) eine Folge paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen. Man beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

gilt!

Aufgabe 4

Die Mitglieder einer internationalen Gesellschaft stammen aus 6 verschiedenen Ländern. Die Liste der Mitglieder enthält 1978 Namen, welche mit 1, 2, ..., 1978 numeriert sind.

Man beweise, daß es ein Mitglied gibt, dessen Nummer gleich der Summe der Nummern zweier Mitglieder aus seinem eigenen Land, oder gleich dem Doppelten der Nummer eines Mitgliedes aus seinem eigenen Land ist.

(IMO 1978, SR Rumänien)

Aufgabe 5

Es sei $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades, dessen sämtliche Koeffizienten aus $\{0, +1, -1\}$ sind.
Man zeige, daß alle Nullstellen im Intervall $(-2, +2)$ liegen.

Aufgabe 6

a, b und c seien reelle Zahlen und m sei eine positive Zahl mit

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Man zeige, daß die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(mindestens) eine Wurzel im Intervall $[0, 1]$ hat.

Aufgabe 7

Es seien r, r_a, r_b, r_c der In- und die Ankreisradien eines Dreiecks $\triangle ABC$.
Man zeige, daß

$$\sqrt{\frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r}} \;\square\; \frac{1}{2}(r + r_a + r_b + r_c)$$

gilt. Dabei bedeute $\square$ das Zeichen $>$, $=$ beziehungsweise $<$, wenn das Dreieck $\triangle ABC$ spitz-, recht- beziehungsweise stumpfwinklig ist.

Aufgabe 8

Es sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$(*)\quad x_1^{2n} + (x_1x_2)^{2n} + \ldots + (x_1x_2 \ldots x_n)^{2n} = 1,$$

$$(**)\quad x_1^{2n+1} + (x_1x_2)^{2n+1} + \ldots + (x_1x_2 \ldots x_n)^{2n+1} = 1.$$

Über der Menge R der reellen Zahlen.

Aufgabe 9

Es sei $\{m_1, m_2, \ldots\}$ eine (endliche oder unendliche) Menge von positiven ganzen Zahlen. Man betrachte das System von Kongruenzen

$$x \equiv 2\, m_i^2 \pmod{2m; -1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Gesucht wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Systems.

Aufgabe 10

Man bestimme alle Polynome 2. Grades in zwei Variablen, die als einzige Nullstelle (a, b) besitzen (a, b seien beliebige reelle Zahlen).

Aufgabe 11

Man beweise, daß die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $(x, y, z) = 1$ ((x, y, z) bedeute den größten gemeinsamen Teiler von x, y und z) von genau denjenigen Zahlentripeln x, y, z befriedigt wird, bei denen eine der Zahlen x oder y die Form 2 uv, die andere die Form $u^2 - v^2$ und z schließlich die Form $u^2 + v^2$ hat; dabei sei $u > v > 0$, $(u, v) = 1$, $u \cdot v$ gerade.

Aufgabe 12

Man beweise, daß die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

und sogar die allgemeinere Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nicht in ganzen positiven x, y, z lösbar ist.
(Man benutze die Ergebnisse der Aufgabe 11.)

Aufgabe 13

Gegeben sei ein Kreis C mit dem Umfang u. p_n bezeichne den Umfang eines regelmäßigen n-Ecks, das C einbeschrieben ist, während P_n dem Umfang eines regelmäßigen n-Ecks, das C umschrieben ist, bezeichne ($n \geq 3$).

Man beweise

1. Die Folge $\{p_n\}$ ist monoton wachsend, und die Folge $\{P_n\}$ ist monoton fallend.
2. Für alle $n \geq 3$ gilt: $\frac{2}{3} p_n + \frac{1}{3} P_n > U$.

Aufgabe 14

Man gebe ein Beispiel einer Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$, so daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty \text{ , aber } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{n_k}} = \infty \text{ .}$$

Aufgabe 15

Für alle natürlichen Zahlen m zeige man

$$\left(2 - \frac{1}{m}\right)\left(2 - \frac{3}{m}\right) \ldots \left(2 - \frac{2m-1}{m}\right) \geq \frac{1}{m!}$$

Aufgabe 16

16 Schüler sollen in Arbeitsgruppen zu je genau 4 Schülern arbeiten. Alle vier Gruppen arbeiten täglich und gleichzeitig, so daß ein Schüler immer nur an genau einer Veranstaltung teilnehmen kann. Damit sich das gesamte Kollektiv festigt, sollen täglich neue Gruppen gebildet werden, so daß nach einer Arbeitswoche (5 Tage) jeder Schüler mit jedem anderen genau einmal in einer Gruppe zusammengearbeitet hat.

Man gebe eine Anordnung der Schüler an (falls diese existiert), die das Verlangte leistet.

Lösungen

Aufgabe 1

Offenbar sind auch alle b_v positiv.

Es sei $\lambda_v = \frac{b_v}{a_v}$ $(v = 1, 2, \ldots, n)$.

Dann ist

$$\lambda_1 \geqq 1, \ \lambda_1 \lambda_2 \geqq 1, \ \ldots, \ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \geqq 1$$

und die zu beweisende Ungleichung läßt sich in der Form

$$H_n = (\lambda_1-1)\, a_1 + (\lambda_2-1)\, a_2 + \ldots + (\lambda_n-1)\, a_n \geqq 0 \quad (1)$$

schreiben.

Mit

$$L_v := (\lambda_1-1) + (\lambda_2-1) + \ldots + (\lambda_v-1) \quad (v = 1,2,\ldots,n)$$

haben wir

$$\begin{aligned} H_n &= L_1 a_1 + (L_2-L_1)\, a_2 + \ldots + (L_n - L_{n-1})\, a_n \\ &= L_1\, (a_1-a_2) + L_2\, (a_2-a_3) + \ldots + L_{n-1}(a_{n-1}-a_n) + \\ &\qquad + L_n\, a_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Um (1) zu beweisen, reicht also schon

$$L_v \geqq 0 \quad \text{für} \quad v = 1, 2, \ldots, n$$

zu zeigen.

Nach der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_v}{v} \geqq \sqrt[v]{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_v} \geqq 1$$

und damit für $v = 1, 2, \ldots, n$:

$$L_v = (\lambda_1-1) + (\lambda_2-1) + \ldots + (\lambda_v-1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_v - v \geqq 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $a_v = b_v$ $(v = 1, 2, \ldots, n)$.

Die Hinlänglichkeit ist offensichtlich. Es sei jetzt

$$b_1+b_2+ \ldots + b_n = a_1+a_2+ \ldots + a_n, \text{ d. h. } H_n = 0. \quad (3)$$

Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} L_v\, (a_v-a_{v+1}) &= 0 \quad (v = 1, 2, \ldots, n-1), \\ L_n\, a_n &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $a_n > 0$ folgt aus der letzten Gleichung $L_n = 0$, also

$$\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} = \sqrt[n]{\lambda_1 \ldots . \lambda_n} \ .$$

Bekanntlich gilt diese Gleichung nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ ($\lambda_v > 0$ ist erfüllt).
Mithin ist wegen (3) $\lambda_1 = 1$ und die Notwendigkeit ist auch gezeigt.

Aufgabe 2

Wir betrachten zunächst den Fall, daß a_0 und a_1 positiv sind. Dann ist $\{a_n\}$ offenbar monoton wachsend.
Mithin ist

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}}{(n+1)^2} < \frac{a_n + \frac{2}{n+1} a_n}{(n+1)^2} = a_n \frac{n+3}{(n+1)^3} .$$

Wegen

$$(n+3)\, n^2 = n^3 + 3n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \text{ folgt}$$

$$\frac{n+3}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^2}$$

und

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} < \frac{a_n}{n^2},$$

d. h. $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ ist eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen.
Also ist $\{a_n\}$ konvergent.
Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Sind a_0', a_1', a_0'', a_1'' positive reelle Zahlen mit $a_0' a_1'' \neq a_0'' a_1'$, so gibt es für beliebige reelle a_0 und a_1 reelle Zahlen λ nn μ mit

$$a_0 = \lambda a_0' + \mu a_0'', \quad a_1 = \lambda a_1' + \mu a_1''.$$

Die durch die Aufgabenstellung definierten Folgen $\{a_n\}$, $\{a_n'\}$, $\{a_n''\}$ erfüllen dann die Gleichung

$$a_n = \lambda a_n' + \mu a_n''.$$

für alle n.
Die Folgen $\left\{\frac{a_n'}{n^2}\right\}$ und $\left\{\frac{a_n''}{n^2}\right\}$ gehören zum zunächst betrachteten Fall und daher sind sie konvergent.
Folglich konvergiert auch $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$.
Wir bestimmen nun den Grenzwert. Da $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ konvergiert, konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} an\ z^n$$

für $|z| < 1$; deren Summe bezeichnen wir mit $f\,(z)$.

Nach der Voraussetzung ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}\ z^{n+1} = \sum_{u=1}^{\infty} a_n\ z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_{n-1}}{n+1}\ z^{n+1},$$

also

$$f(z) - a_0 - a_1 z = z\ (f(z) - a_0) + 2 \int_0^z t\ (f(t))dt.$$

Durch Differentration folgt

$$f'(z) - a_1 = f(z) - a_0 + z\ f'\ (z) + 2\ z\ f(z),$$

d. h.

$$f'(z) - \frac{1+2z}{1-z}\ f(z) = \frac{a_1 - a_0}{1-z}.$$

Die einzige Lösung dieser Differentialgleichung ist für $f(0) = a_0$:

$$f(z) = \frac{1}{4}\ (1-z)^{-3}\ \left[(a_1-a_0)(2z^2-6z+5) + (9a_0 - 5a_1)\ e^{-2z}\right] = \frac{g(z)}{(1-z)^3}$$

Durch direktes Ausrechnen ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[g(1)\ \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} + h\ (n)\right]\ z^n,$$

wobei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(n)}{n^2} = 0$ ist.

Also $\quad a_n = \frac{g(1)}{2}\ (n+1)\ (n+2) + h\ (n),$

und $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{g(1)}{2} = \frac{1}{8}\ \left[\left(\frac{9}{e^2} - 1\right) a_0 + \left(1 - \frac{5}{e^2}\right) a_1\right]$

Aufgabe 3

Ist $(a_1, \ldots, a_n)$ irgendeine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$, so sei $s\ (a_1,a_2,\ldots,a_n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$. Die Aufgabe ist nun gelöst, wenn für jede Permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$

$$S(a_1,a_2, \ldots, a_n) \geq S\ (1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

nachgewiesen ist. Sollten in $\left\{a_k\right\}_{k=1}^{n}$ auch Zahlen größer als n existieren, so gilt die Behauptung dann erst recht.
Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gibt mindestens eine Permutation mit

$$s\ (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\ <\ s\ (1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Unter allen diesen Permutationen gibt es eine (da nur endlich viele Permutationen existieren) Permutation $(a_1', \ldots, a_n')$ mit

$$s(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \geq s(a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n') \qquad (5)$$

für alle Permutationen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Mithin gibt es aber 2 Indizes i, j mit

$$i < j \quad \text{und} \quad a_i' > a_j'.$$

Damit ist $\dfrac{a_i' - a_j'}{i^2} > \dfrac{a_i' - a_j'}{j^2}$ und $\dfrac{a_i'}{i^2} + \dfrac{a_j'}{j^2} > \dfrac{a_j'}{i^2} + \dfrac{a_i'}{j^2}$.

Für

$$a_l'' := \begin{cases} a_i' & \text{für } l = j, \\ a_j' & \text{für } l = i, \\ a_l' & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $s(a_1', a_2', \ldots, a_n') > s(a_1'', a_2'', \ldots, a_n'')$ im Widerspruch zu (5). Unsere Annahme muß damit falsch sein und (4) ist bewiesen.

<u>Aufgabe 4</u>
(nach Frank Eisenhaber)
Wir beweisen die Behauptung indirekt, d. h., wir nehmen an, es gibt kein Mitglied, dessen Nummer gleich der Summe der Nummern zweier (nicht notwendig verschiedener) Mitglieder aus seinem eigenen Land ist.
Die 6 verschiedenen Länder seien mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
O. B. d. A. sind mindestens 330 Mitglieder aus dem Land A. Die Nummern (der Größe nach aufsteigend geordnet) dieser Mitglieder seien $a_1, a_2, \ldots, a_{330}$.
Wir betrachten die Nummern

$$a_{330} - a_{329},\ a_{330} - a_{328},\ \ldots,\ a_{330} - a_1,$$

die wegen unserer Annahme sämtlich zu Mitgliedern der Länder B, C, D, E und F gehören.
Ein Land, o. B. d. A. B, hat (mindestens) 66 Mitglieder mit Nummern aus

$$\bigcup_{i=1}^{329} \{a_{330} - a_i\}$$

Diese Nummern, der Größe nach aufsteigend geordnet, seien

$$b_1, b_2, \ldots, b_{66}.$$

Wir betrachten die Nummern

$$b_{66} - b_{65}, b_{66} - b_{64}, \ldots, b_{66} - b_1,$$

die wegen unserer Annahme sämtlich nicht zu Mitgliedern aus B gehören. Sie gehören aber auch sämtlich nicht zu A, denn aus

$$b_{66} - b_i = a_j$$

würde wegen $b_{66} = a_{330} - a_r$ und $b_i = a_{330} - a_p$ sofort

$$a_p - a_r = a_j$$

im Widerspruch zu unserer Annahme folgen.
Mithin sind die Mitglieder mit den Nummern $b_{66} - b_i$ ($i = 65, 64, \ldots, 1$) sämtlich aus den Ländern C, D, E und F. Dieses Schlußprinzip setzen wir fort.
17 Mitglieder (mit Nennern aus $\bigcup_{i=1}^{65} \{b_{66} - b_i\}$) sind o. B. d. A aus C.
Diese Nummern seien, der Größe nach aufsteigend geordnet,

$$c_1, c_2, \ldots, c_{17}.$$

Die Mitglieder mit den Nummern

$$c_{17} - c_{16}, c_{17} - c_{15}, \ldots, c_{17} - c_1$$

sind sämtlich aus D, E und F.
6 Mitglieder (mit Nummern aus $\bigcup_{i=1}^{16} \{c_{17} - c_i\}$) sind o. B. d. A. aus D, mit den Nummern (der Größe nach geordnet)

$$d_1, d_2, \ldots, d_6.$$

Die Mitglieder mit den Nummern

$$d_6 - d_5, d_6 - d_4, \ldots, d_6 - d_1$$

sind sämtlich aus E und F.
Mindestens 3 Mitglieder mit Nummern aus $\bigcup_{i=1}^{5} \{d_6 - d_i\}$ sind aus E (o. B. d. A.). Deren Nummern seien

$$e_1, e_2, e_3 \qquad (e_1 < e_2 < e_3).$$

Die Nummern $e_3 - e_2$ und $e_3 - e_1$ gehören zu Mitgliedern aus F;
$f_1 = e_3 - e_2$, $f_2 = e_3 - e_1$.
$f_2 - f_1$ kann nach unserer Schlußweise zu keinem Mitglied aus einem der 6 Länder gehören.
Da $1 \leqq f_2 - f_1 < 1978$ ist, muß ein Mitglied aber diese Nummer haben. Folglich ist unsere Annahme falsch.und die Behauptung bewiesen.

Bemerkung:
Mit dieser Methode läßt sich zeigen, daß bereits bei 1957 Mitgliedern der gleiche Sachverhalt gilt.

<u>Aufgabe 5</u>

P(x) hat die Form

$$P(x) = a_n x^2 + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o,$$

wobei $a_i \in \{o, +1, -1\}$ für $i = o, 1, 2, \ldots, n$ und $a_n \neq o$.
Wir beweisen die Behauptung indirekt.
Wir nehmen an, es gibt ein x_o mit $|x_o| \geqq 2$ und $P(x_o) = o$.

<u>1. Fall:</u> $x_o \geqq 2$.

1.1. $a_n = 1$. Dann ist

$$P(x_o) \geqq x_o{}^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_o{}^i = x_o{}^n - \frac{x_o{}^n - 1}{x_o - 1}$$

$$\geqq \frac{x_o{}^{n+1} - 2x_o{}^n + 1}{x_o - 1} > o \,.$$

1.2. $a_n = -1$. Dann ist

$$P(x_o) \leqq - x_o{}^n + \sum_{i=o}^{n-1} = \frac{- x_o{}^{n-1} + 2x_o{}^n - 1}{x_o - 1} < o \,.$$

<u>2. Fall:</u> $x_o \leqq -2$.

2.1. n - gerade.

2.1.1. $a_n = 1$. Dann ist

$$P(x_o) \geqq |x_o|^n - \sum_{i=o}^{n-1} |x_o|^i = \frac{|x_o|^{n+1} - 2|x_o|^n + 1}{|x_o| - 1} > o$$

2.1.2. $a_n = -1$. Dann ist

$$P(x_o) < -|x_o|^n + \sum_{i=o}^{n-1} |x_o|^i = \frac{-|x_o|^{n+1} + 2|x_o|^n - 1}{|x_o| - 1} < o$$

2.2. n - ungerade

2.2.1. $a_n = 1$ s. 2.1.2.

2.2.2. $a_n = -1$ s. 2.1.1.

In allen Fällen konnten wir $P(x_o) \neq o$, im Widerspruch zu unserer Annahme, nachweisen.

Folglich ist unsere Annahme falsch, die Behauptung der Aufgabe richtig.

Aufgabe 6

O. B. d. A. können wir $a > o$ annehmen, denn ist $a < o$, so ersetzen wir a, b und c durch -a, -b und -c und man erhält den gleichen Sachverhalt; ist $a = o$, so folgt für $b = o$ auch $c = o$ und $ax^2 + bx + c$ hat beliebig viele Nullstellen in $[o, 1]$, während für $b \neq o$ als Nullstelle $x = -\frac{c}{b} = \frac{m}{m+1} \in [o, 1]$ folgt.

Die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist wegen $a > o$ eine nach oben geöffnete Parabel. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen hat f(x) (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $[o, 1]$, wenn

$$\min_{x\in[o,1]} f(x) \leqq o \quad \text{und} \quad \max_{x\in[o,1]} f(x) \geqq o \quad \text{ist.}$$

Der Scheitelpunkt der Parabel f(x) liegt bei $x = -\frac{b}{2a}$. Für $x < -\frac{b}{2a}$ ist f(x) streng monoton fallend und für $x > -\frac{b}{2a}$ ist f(x) streng monoton wachsend.

Es reicht also aus, wenn wir folgende Aussagen beweisen:

1. Ist $b < -2a$, so ist $f(o) \geqq o$ und $f(1) \leqq o$.
2. Ist $-2a \leqq b \leqq o$, so ist $f(o) \geqq o$ und $f(-\frac{b}{2a}) \leqq o$,

   oder $f(1) \geqq o$ und $f(-\frac{b}{2a}) \leqq o$.
3. Ist $b > o$, so ist $f(o) \leqq o$ und $f(1) \geqq o$.

Wegen $f(o) = c$, $f(1) = a + b + c$ und $f(-\frac{b}{2a}) = \frac{1}{4a}(4ac - b^2)$, können wir die drei Aussagen folgendermaßen aufschreiben:

1'. Ist $b < -2a$, so ist $c \geqq o$ und $a + b + c \leqq o$.

2'. Ist $-2a \leq b \leq o$, so ist $c \geq o$ und $4ac - b^2 \leq o$
oder $a+b+c \geq o$ und $4ac - b^2 \leq o$.

3'. Ist $b > o$, so ist $c \leq o$ und $a+b+c \geq o$.

In der Tat gilt für die einzelnen Fälle:

1'. Wegen $a>o$ und $2a+b < o$ ist

$$0 = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a}{m+1} - \frac{2a}{m+1} + \frac{c}{m} = -\frac{a}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{c}{m}, \text{ d.h. } c>0, \text{ und}$$

$$a+b+c = a+b - \frac{m}{m+2} a - \frac{m}{m+1} b = \frac{2}{m+2} a + \frac{1}{m+1} b < \frac{2a+b}{m+1} < 0$$

2'. α) Ist $c \leq o$, so gilt offenbar $4ac - b^2 \leq o$ und weiter

$$\frac{a+b+c}{m+1} > \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = o, \text{ also } a+b+c > o.$$

β) Ist $c > o$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 4ac - b^2 &= 4ac - \left(\frac{m+1}{m+2} a + \frac{m+1}{m} c\right)^2 \\ &= 4ac - \left(\frac{m+1}{m+2} a - \frac{m+1}{m} c\right)^2 - 4 \frac{(m+1)^2}{(m+2) . m} . ac \\ &= \frac{-4}{(m+2)m} ac - \left(\frac{m+1}{m+2} a - \frac{m+1}{m} c\right)^2 \\ &< o. \end{aligned}$$

3'. $c < o$ ist trivialerweise wegen $a > o$, $b > o$ klar. Aus gleichem Grund ist

$$o = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} < \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}, \text{ also } a + b + c > o.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>Aufgabe 7</u>

Nach dem tan-Additionstheorem ist für die Dreieckswinkel α, β, γ:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} \quad \text{und}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} . \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 1. \qquad (6)$$

Für die Radien gilt

$$\sqrt{\frac{r_a r}{r_b r_c}} = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \sqrt{\frac{r_b r}{r_a r_c}} = \tan \frac{\beta}{2} \text{ und } \sqrt{\frac{r_c r}{r_a r_b}} = \tan \frac{\gamma}{2}.$$

Den Beweis dieser Standardformeln geben wir hier nicht. Der Leser möge sich ihn selber überlegen oder in einer einschlägigen Formelsammlung nachlesen.

Sign x bezeichne folgende Funktion

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 . \end{cases}$$

Z. B. ist sign (x.y) = sign x . sign y.

Dann ist

$$\operatorname{sign}\left\{\sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{r}} - \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}\right\} = \underbrace{\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{r}}\right)}_{+1} \cdot \operatorname{sign}\left(2 - \sqrt{\frac{r^3}{r_a r_b r_c}} - \sqrt{\frac{r\, r_a}{r_b r_c}} - \sqrt{\frac{r . r_b}{r_a . r_c}} - \sqrt{\frac{r . r_c}{r_a . r_b}}\right)$$

$$= \operatorname{sign}\left(2 - \sqrt{\frac{r\, r_a}{r_b r_c}} \cdot \sqrt{\frac{r . r_b}{r_a . r_c}} \cdot \sqrt{\frac{r . r_c}{r_a . r_b}} - \tan\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sign}\left(2 - \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} - \tan\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sign}\left(1 - \tan\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sign}\left(\left(1 - \tan\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \tan\frac{\beta}{2}\right)\left(1 - \tan\frac{\gamma}{2}\right)\right),$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

__Aufgabe 8__

Angenommen, es gibt eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des Gleichungssystems (✱), (✱✱).

Dann folgt aus (✱), da alle Summanden nichtnegativ sind:

$$|x_1 x_2 \ldots x_i| \leqq 1 \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad .$$

Folglich ist

$$(x_1 x_2 \ldots x_i)^{2n+1} \leqq (x_1 x_2 \ldots x_i)^{2n} \tag{7}$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei Gleichheit in (7) nur für $x_1 x_2 \ldots x_i = 0$ oder $x_1 . x_2 \ldots x_i = 1$ eintritt.

Gibt es nun ein $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit

$$(x_1 x_2 \ldots x_{i_0})^{2n+1} < (x_1 x_2 \ldots x_{i_0})^{2n},$$

so folgt aus (7)

$$\sum_{i=o}^{n} (x_1 x_2 \ldots x_i)^{2n+1} < \sum_{i=1}^{n} (x_1 x_2 \ldots x_i)^{2n},$$

was im Widerspruch zu (✱) und (✱✱) steht.
Mithin gilt für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$x_1 x_2 \ldots x_i = o \quad \text{oder}$$
$$x_1 x_2 \ldots x_i = 1.$$

$x_1 = o$ impliziert $x_1 x_2 \ldots x_i = o$ für alle $i \geqq 1$, und (✱) kann nicht erfüllt sein.
Also ist $x_1 = 1$. Wegen (✱) und (✱✱) erhalten wir

$$x_1 x_2 \ldots x_i = o \quad \text{für} \quad i \in \{2, 3, \ldots, n\} . \tag{8}$$

Speziell für $i = 2$ folgt $x_2 = o$. Dann sind aber sofort alle Gleichungen ✱ und ✱✱ erfüllt.
Man erkennt nun leicht, daß $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ genau dann eine Lösung des vorgegebenen Gleichungssystems ist, wenn $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ ist und $x_3, x_4, \ldots, x_n$ beliebige reelle Zahlen sind.

<u>Aufgabe 9</u>
Wegen $2 m^2 \equiv m \pmod{2 m - 1}$, für alle ganzen Zahlen m, kann man die Kongruenzen auch folgendermaßen schreiben:

$$x \equiv m_i \pmod{2 m_i - 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Weiter ist äquivalent

$$2x \equiv 2 m_i \pmod{2 m_i - 1} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

und

$$2x \equiv 1 \quad \pmod{2 \cdot m_i - 1} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ist x_o eine Lösung des Systems, so ist $2x_o-1$ durch $2m_i-1$, für alle i, teilbar. Also muß die Zahl der m_i's endlich sein.
Wir betrachten jetzt das endliche System

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod{2m_1 - 1} \\ &\vdots \\ 2x &\equiv 1 \pmod{2m_k - 1}. \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2} \left[(2m_1-1) \ldots (2m_k-1) + 1\right]$ ist eine ganze Zahl und, offenbar, auch Lösung des Systems.
Das System von Kongruenzen ist genau dann lösbar, wenn es endlich ist.

Aufgabe 10

Die allgemeine Form eines Polynoms $f'(x,y)$ vom Grade 2 ist

$$f'(x,y) = A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F'.$$

Ist $A' = o$, so hat $f'(x,y)$ für alle y mit $B'y + D' \neq o$ in Gestalt von

$$x = \frac{-C'y^2 - E'y - F'}{(B'y+D')}$$

Nullstellen. Sind nicht beide Koeffizienten B' und D' gleichzeitig Null, so haben wir schon unendlich viele Nullstellen. Ist $B'=D'=o$, so muß $f'(x,y) = g(y) = C'y^2+E'y+F$, (als Polynom in y) Nullstellen haben. Mit jeder Nullstelle y_o haben wir für beliebige x in Gestalt der Paare (x, y_o) Nullstellen, also auch beliebig viele.

Mithin muß $A' \neq o$ und analog $C' \neq o$ sein. Wir betrachten des Polynom $\frac{f'(x,y)}{A'}$, das die gleichen Nullstellen hat.
Der Einfachheit halber bezeichnen wir $f(x,y) = \frac{f'(x,y)}{A'}$ neu:

$$f(x,y) = x^2 + (Ay + B)\ x + Cy^2 + Dy + E.$$

Wir wollen zunächst eine Bedingung dafür herleiten, daß $f(x,y)$ genau eine Nullstelle hat.
Es sei (a,b) die einzige Nullstelle von $f(x,y)$.
Dann ist

$$a_{1,2} = - \frac{A_b+B}{2} \pm \sqrt{\frac{(A_b+B)^2}{4} - C_b{}^2 \dot{-} D_b - E}\ . \tag{9}$$

Der Ausdruck

$$h(y) = \frac{(Ay+B)^2}{4} - Cy^2 - Dy - E\ ,$$

die Diskriminante von (9), muß für alle y nichtpositiv sein und genau für b verschwinden. Wäre $h(y) > o$ für irgendein y, so hätten wir zwei (verschiedene) x, für die (x,y) Nullstellen von $f(x,y)$ sind. Ist $h(y_1) = h(y_2) = o$, für $y_1 \neq y_2$) so erhalten wir auch zwei verschiedene x und damit zwei verschiedene Nullstellen. (x,y) von $f(x,y)$. Also muß

$$h(y) = \frac{1}{4}(A^2-4C)y^2 + \frac{1}{2}(AB-2D)y + \frac{1}{4}(B^2-4E) \leqq o \tag{10}$$

für alle y und $h(b) = o$ sein.
Aus (10) folgt

$$A^2 - 4C < o, \tag{11}$$

denn für $A^2-4C > o$ wird $h(y)$ für hinreichende große y positiv, und für $A^2-4C = o$ wird $h(y)$, bei $AB - 2D \neq 0$, ebenfalls positiv für geeignete y. Für $A^2-4C = o$ und $AB-2D = o$ ist im Widerspruch

zu unseren Anforderungen $h(y) \equiv o$ oder $h(y) < o$, für alle y.
Aus $h(y_o) = o$, für genau ein y_o, folgt, daß die Gleichung

$$y^2 + 2\,\frac{AB - 2D}{A^2 - 4C}\,y + \frac{B^2 - 4E}{A^2 - 4C} = o \tag{12}$$

genau eine Lösung hat, d. h., die Diskriminante verschwindet.
Also ist

$$\left(\frac{AB - 2D}{A^2 - 4C}\right)^2 - \frac{B^2 - 4E}{A^2 - 4C} = o$$

und

$$E = \frac{ABD - D^2 - CB^2}{A^2 - 4C} \tag{13}$$

Da $f(x,y)$ genau die Nullstelle (a,b) haben soll, ist b Lösung von (12) also

$$b = -\,\frac{AB - 2D}{A^2 - 4C} \tag{14}$$

und für a wegen (9)

$$a = -\,\frac{Ab + B}{2} \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (13), (14) und (15) lassen sich um B, D und E, jeweils als Funktionen von A, C, a und b darstellen:

$$B = -\,(Ab + 2a),$$
$$D = -\,(Aa + 2Cb),$$
$$E = Aab + Cb^2 + a^2.$$

Mithin folgt

$$f(x,y) = \left[(x-a) + \frac{A}{2}\,(y-b)\right]^2 - \frac{1}{4}\,(A^2 - 4C)\,(y-b)^2;\ A^2 - 4C < o.$$

Dieses Polynom hat wegen $A^2 - 4C < o$ nur für

$$(x-a) + \frac{A}{2}\,(y-b) = o \quad \text{und}$$
$$y-b = o\ ,$$

also für (a,b) eine Nullstelle.
Führen wir schließlich den Faktor A' wieder ein, so ergibt sich als allgemeinstes Polynom mit den geforderten Eigenschaften:

$$A'\left\{(x-a)^2 + A(x-a)(y-b) + C(y-b)^2\right\}\ ;\ A^2 - 4C < o,\ A' \neq o,\ C \neq o$$

oder

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy - (2\alpha a + \gamma b)\,x - (2\beta b + \gamma a)y + \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma ab,$$

wobei α, β, γ beliebige reelle Zahlen mit $\alpha \neq o$, $\beta \neq o$ und $4\,\alpha\beta > \gamma^2$ sind.

Aufgabe 11

1. Eine der Zahlen x oder y ist gerade. Wären x und y beide ungerade, so wäre $x^2 \equiv 1 \pmod 4$, $y^2 \equiv 1 \pmod 4$ und folglich $z^2 \equiv 2 \pmod 4$, was jedoch für kein z erfüllt wird.
2. Sei x gerade. Wegen $(x,y,z) = 1$ sind y und z ungerade. Aus

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$$

folgt für $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = 1$, daß positive ganze Zahlen u und v mit

$$\frac{x}{2} = uv, \ \frac{z+y}{2} = u^2, \ \frac{z-y}{2} = v^2$$

existieren. Der Fall $\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = d > 1$, ist unmöglich. Man hätte sonst $d / \frac{z+y}{2}$, $d / \frac{z-y}{2}$ und d / z und damit d / y. Schließlich wäre wegen $x^2 + y^2 = z^2$: d / x, was $(x, y, z) = 1$ widerspricht.

Die Bedingung $x = 2\,uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ ist also notwendig und (wie man leicht prüft) auch hinreichend.

Aufgabe 12

Wir beweisen, daß die Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{16}$$

keine Lösungen in positiven ganzen x, y, z hat.

Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ ist offenbar damit auch erfaßt.

Wir nehmen an, (16) habe eine Lösung x, y, z, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Dann können wir $(x, y, z) = 1$ voraussetzen. Gibt es mehrere Lösungstripel, so wählen wir eines mit minimalem z.

O. B. d. A. sei x gerade. Dann ist, wegen Aufgabe 11

$x^2 = 2uv$, $y^2 = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ mit $u > v \geq 1$, $(u, v) = 1$, $u \cdot v$ gerade.

Ist u gerade, so folgt $y^2 = 4N + 1$, $u^2 = 4\,N_1$, $v^2 = 4\,N_2 + 1$ und, wegen $y^2 = u^2 - v^2$,

$$4\,N + 1 = 4\,N_1 - 4\,N_2 - 1,$$

was unmöglich ist.

Also ist v gerade. $v = 2\,w^2$ und $u = z_1^{\,2}$ wegen $2 \cdot u \cdot v = x^2$ und $(u, v) = 1$. Aus $y^2 = u^2 - v^2$ ergibt sich $y^2 + 4\,w^4 = z_1^{\,4}$. Nochmals Aufgabe 11 angewandt: $2\,w^2 = 2\,u_1 v_1$. Wegen $(u_1, v_1) = 1$ folgt

$u_1 = x_1^2$, $v_1 = y_1^2$ und $x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$, was wegen $z_1 < z$ unmöglich ist. Damit ist der Beweis erbracht.

Aufgabe 13

1. Eine Seite des einbeschriebenen n-Ecks ergibt sich zu $2\ r\ .\ \sin\ (\frac{\pi}{n})$, während man für eine Seite des umschriebenen n-Ecks $2\ r\ \tan\ (\frac{\pi}{n})$ erhält; r bezeichne den Radius des Kreises C.

   Dann ist

$$p_n = 2\ r\ n\ \sin\ (\frac{\pi}{n}) = 2\pi r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}, \tag{17}$$

$$P_n = 2\ r\ n\ \tan\ \frac{\pi}{n} = 2\pi r \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}, \text{ und} \tag{18}$$

$$U = 2\pi r.$$

   Für $o < x < \frac{\pi}{2}$ ist die Funktion $p(x) = \frac{\sin x}{x}$ monoton fallend, und die Funktion $P(x) = \frac{\tan x}{x}$ ist monoton wachsend, wegen

$$p'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < o,$$

$$P'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2\ x - \sin 2\ x}{2\ x^2 \cos^2 x} > 0.$$

   Wegen $o < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$ folgt unmittelbar die Behauptung.

2. Die zu beweisende Ungleichung läßt sich wegen (17), (18) und (19) in folgender Form schreiben:

$$\frac{2\ r}{3}\ n\ (2 \sin \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n}) > 2\pi r \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

   oder

$$2 \sin \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n} > 3\ \frac{\pi}{n} \quad (n = 3, 4, \ldots). \tag{20}$$

   Es sei $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$.

   Um (20) zu beweisen, reicht es zu zeigen, daß

$$f(x) > o \qquad \text{für } o < x < \frac{\pi}{2}.$$

Wegen $f(o) = o$ ist hierfür $f'(x) > o$, $o < x < \frac{\pi}{n}$, hinreichend.
Nun ist $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$ und $f'(o) = o$ ausreichend, wenn wir $f''(x) > o$ zeigen $(o < x < \frac{\pi}{2})$.
Es ist
$$f''(x) = -2\sin x + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}(1 - \cos^3 x) > 0$$
$$\text{für } o < x < \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Aufgabe 14

Wir betrachten die Folge $\{n_k\}$, für die $n_{k^3} = k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist und deren restlichen Glieder (der Reihe nach)
$$1, 2^3, 2^3, 3^3, 3^3, 3^3, \ldots, \underbrace{k^3, \ldots, k^3}_{k}, \ldots \text{ sind.}$$

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.

Daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, ist vielleicht allgemeinbekannt; ihre Summe ist $\frac{\pi^2}{6}$. Die Konvergenz kann man aber auch sehr einfach folgendermaßen zeigen:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2.$$
Andererseits ist für die Folge $\{n_{u_k}\}$, die als Unterfolge
$$1, 2^2, 2^2, 3^2, 3^2, 3^2, \ldots, \underbrace{k^2, \ldots, k^2}_{k}, \ldots \text{ enthält:}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{n_k}} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty .$$

Aufgabe 15

Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent mit
$$(2m-1)\,(2m-3)\,(2m-5)\,\ldots\,.\,3\,.\,1 \geqq \frac{m^m}{m!} \qquad (21)$$

Nun ist

$$(2m - 1) \cdot 1 \geqq \frac{m^2}{m.1} \tag{22}$$

und für $2 \leqq i \leqq m - 1$:

$$(2i - 2)\ (i+1) = (2i - 1)i + i - 2 \geqq (2i - 1)\ i,$$

$$(2i - 2)\ m \geqq (2\ i - 2)\ (i + 1) \geqq (2i - 1)\ i\ ,$$

$$(2i - 1)\ m - (2i - 1)\ i \geqq m \qquad \text{und}$$

$$(2i - 1)\ (m - i) \geqq m \qquad \text{, d. h.}$$

$$2i - 1 \geqq \frac{m}{m-i}. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt nunmehr für $m \geqq 2$:

$$\prod_{i=1}^{m} (2i-1) \geqq \frac{m^2}{m.1} \cdot \prod_{i=2}^{m-1} (2i-1) \geqq \frac{m^2}{m.1} \prod_{i=2}^{m-1} \frac{m}{m-i} = \frac{m^m(m-1)}{m!},$$

also sogar eine kleine Verschärfung von (21). - Für m = 1 liefert bereits (22) das Gewünschte.

Aufgabe 16

Wir bezeichnen die Schüler mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 16. Insgesamt gibt es $\binom{16}{2}$ Paare von Schüler; $\binom{16}{2} = 120$. An jedem Tag arbeiten $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$ Schülerpaare zusammen. Falls es eine Anordnung gibt, die das Verlangte leistet, kommt jedes Paar (i, j), $1 \leqq i < j \leqq 16$, genau einmal vor.

O. B. d. A. arbeiten am ersten Tag folgende Gruppen (zeilenweise):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Da jedes Paar genau einmal auftritt, müssen die 4 Zahlen jeder Zeile jetzt in verschiedenen Zeilen auftreten. Die folgenden Tage haben Anordnungen von der Struktur (o. B. d. A.)

1	a	e	k
2	b	f	l
3	c	g	m
4	d	h	n ,

wobei (a, b, c, d) eine Permutation von $\{5, 6, 7, 8\}$,
(e, f, g, h) eine Permutation von $\{9, 10, 11, 12\}$ und
(k, l, m, n) eine Permutation von $\{13, 14, 15, 16\}$ ist.

Durch geschicktes Probieren erhält man z. B. folgende Anordnungen:

2. Tag	1 5 9 13	**3. Tag**	1 6 11 16	**4. Tag**	1 7 12 14	**5. Tag**	1 8 10 15
	2 6 10 14		2 5 12 15		2 8 11 13		2 7 9 16
	3 7 11 15		3 8 9 14		3 5 10 16		3 6 12 13
	4 8 12 16		4 7 10 13		4 6 9 15		4 5 11 14.

Es kann nun leicht verifiziert werden, daß die Anordnung tatsächlich die gewünschten Eigenschaften hat.
Interessanterweise sei bemerkt, daß man jede andere Anordnung, die man finden kann, durch eine geeignete Permutation der Elemente 1, 2, ..., 16 in die oben angegebene überführen kann.

Zur Sonderaufgabe aus Heft 7

Zu dieser Aufgabe gingen Lösungen von den drei Schülern
Bodo Heise, Klasse 10, EOS "F. J. Curie", Görlitz,
Jürgen Gräfenstein, Klasse 11, EOS "M. A. Nexö", Dresden und
Torsten Siebert, Klasse 11, EOS "F. J. Curie", Görlitz
ein, die sämtlich richtig waren.
In allen Fällen wurde versucht, von e^x (ableitungszyklisch vom Grade 1) ausgehend ein Beispiel zu finden. Die Schüler Gräfenstein und Siebert machten den Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$ und fanden als notwendige Bedingung $\lambda^n = 1$. Läßt man auch komplexe λ zu, so findet man als Beispiel

$$f_1(x) = e^{(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})x} .$$

Den Nachweis, daß $f_1(x)$ ableitungszyklisch vom Grade n ist, überlassen wir dem Leser.

Diese Lösung setzt jedoch eine Kenntnis der Analysis im Komplexen voraus. Der Schüler Gräfenstein gewann aber aus $f_1(x)$ auch eine reellwertige Funktion $f_2(x)$ mit geforderter Eigenschaft, indem er den Realteil von $f_1(x)$ (analog natürlich auch Imaginärteil) betrachtete:

$$f_2(x) = e^{(\cos \frac{2\pi}{n})x} \cdot \cos((\sin \frac{2\pi}{n})x).$$

Eine sehr einfache und eindrucksvolle Funktion $f_3(x)$ gab Bodo Heise an:

$$f_3(x) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{x^{in}}{(in)!}$$

Diese Reihe konvergiert für jedes reelle x wegen

1. $f_3(x) \leqq \sum_{i=o}^{\infty} \frac{|x|^{in}}{(in)!}$ und

2. $\{s_k\}$ mit

$$s_k = \sum_{i=o}^{k} \frac{|x|^{in}}{(in)!}$$

ist eine monoton wachsende Folge, die durch $\sum_{i=o}^{n.k} \frac{|x|^i}{i!} < e^{|x|}$ beschränkt ist.

Folglich konvergiert $f_3(x)$ in jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig und $f_3(x)$ kann gliedweise differenziert werden usw. Die Konvergenzbegründung war bei Bodo Heise leider nicht ganz ausreichend. Offenbar ist nun $f_3^{(n)}(x) = f_3(x)$ für alle x und $f_3(o) = 1$, $f_3^{(k)}(o) = o$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$, d. h. $f_3(x)$ ist tatsächlich ableitungszyklisch vom Grade n.
Die Schüler erhielten Anerkennungsschreiben.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 11

Sonderaufgabe

Zu einer Beratung treffen sich n Mathematiker ($n > 2$), wobei jeder mit höchstens $\frac{n}{2} - 1$ anderen bekannt ist. (Alle Bekanntschaften seien gegenseitig.) Man zeige: Es können alle so an einem runden Tisch Platz nehmen, daß nicht zwei miteinander bekannte Personen nebeneinander sitzen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Man zeige, daß für ein beliebiges Viereck ABCD die Ungleichung $|AB|.|CD| + |BC|.|AD| \geqslant |BD|.|AC|$ gilt.

Hinweis: Man benutze zwei Hilfspunkte E und F, wobei E Schnittpunkt z. B. des Umkreises von $\triangle ABD$ mit g_{BC} und F ein gewisser Punkt auf g_{AE} ist, ferner beachte man die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 2

Es sei ein konvexes n-Eck gegeben ($n \geqq 6$), bei dem keine drei Diagonalen durch genau einen inneren Punkt des Vielecks gehen. Man bestimme die Anzahl aller Dreiecke ABC mit folgender Eigenschaft: A, B, C sind Eckpunkte des n-Ecks oder Schnittpunkte von Diagonalen im Innern des Vielecks, und es liegen A und B, B und C bzw. A und C auf genau einer Diagonale oder Seite des n-Ecks.

Aufgabe 3

Die 28 Schüler einer Klasse gehen an jedem Schultag in einer vom Lehrer neuzusammengestellten Zweierreihe zum Essen.
Man zeige: Der Lehrer kann die Zweierreihen so bilden, daß im Laufe eines 27 Schultage umfassenden Monats jeder Schüler einmal neben jedem anderen gegangen ist.

Aufgabe 4

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ und alle reellen Zahlen φ, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ die Ungleichung

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi + \frac{1}{2}\sin(n+1)\varphi \geq 0$$

gilt.

Wann tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 5

Bei einem Schachturnier mit 3n Teilnehmern sind genau 3n + 1 Spiele ausgetragen.

Man zeige, daß es vier (paarweise verschiedene) Teilnehmer A, B, C und D gibt, wobei A und B, B und C und C und D bereits miteinander gespielt haben.

Aufgabe 6

Man konstruiere ein Dreieck, von dem gegeben sind:

h_c - Höhe auf der Seite c,

s_c - Seitenhalbierende zur Seite c und

w_c - Winkelhalbierende des der Seite c gegenüberliegenden Winkels.

Aufgabe 7

Elf Mitglieder einer Kommission sollen Zutritt zu einem Safe haben.

Welches ist die kleinste Zahl von Schlössern, mit denen der Safe ausgestattet sein muß, so daß je sechs, aber keine fünf Mitglieder der Kommission den Safe öffnen können.

Man ermittle ferner, in welcher Weise die Schlüssel in diesem Fall verteilt sein können.

Aufgabe 8

Es sei f(x) im Intervall $a \leq x \leq b$ positiv und beschränkt.

Man beweise, daß es in diesem Intervall zwei Zahlen x_1; x_2 gibt, für die

$$\frac{(x_2 - x_1) \cdot f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4}(b-a)\,f(a).$$

(O. Reutter: Elemente der Mathematik)

Aufgabe 9

$\sigma(n)$ bezeichne die Summe aller Teiler von n. Ist n eine gerade Zahl, so gilt $\sigma(\sigma(n)) = 2.n$ genau dann, wenn n die Form 2^r hat, wobei $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl ist.

(D. Saryanarayana: Elemente der Mathematik)

Aufgabe 10

Unter r + 1 positiven ganzen Zahlen, in deren Primfaktorenzerlegungen insgesamt höchstens r verschiedene Primzahlen auftreten, gibt es eine Menge von Zahlen, deren Produkt gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist.

(Mathematical Spectrum)

Aufgabe 11

Wir betrachten ein m x n-Gitter, d. h. ein Gitter aus m Zeilen (Waagerechte) und n Spalten (Senkrechte). Die Gitterpunkte mögen blau oder rot gefärbt sein.

Man zeige, daß es für ein festes s $(0 \leqq s \leqq m)$ gewisse s Zeilen gibt, in denen

$$\left] n \cdot \frac{\binom{[\frac{m}{2}]}{s} + \binom{]\frac{m}{2}[}{s}}{\binom{m}{s}} \right[$$

Spalten auftreten, deren sämtliche Gitterpunkte jeweils rot oder blau gefärbt sind. Dabei bedeuten $[x]$ bzw. $]x[$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x bzw. die kleinste ganze Zahl größer gleich x.

Aufgabe 12

Sei $g_m(n,r)$ die Anzahl der möglichen Verteilungen der Zahlen von 1 bis n auf r Zeilen, so daß jede Zeile mindestens eine Zahl, aber keine mehr als m aufeinanderfolgende Zahlen enthält (die Reihenfolge der Zeilen spielt keine Rolle).

Man zeige für $m < n$:

$$g_m(n,r) = \sum_{i=1}^{m} \left[g_m(n-i, r-1) + (r-1).g_m(n-i, r)\right]$$

Man zeige weiter, daß die Anzahl f(n) der möglichen Verteilungen der Zahlen von 1 bis n auf zwei Zeilen, so daß jede Zeile höchstens zwei aufeinanderfolgende Zahlen enthält, die Fibouacci-Zahlen liefert, d. h.

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (n > 2)$$
$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 2.$$

Aufgabe 13

Sind x, y, z positive Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

so gilt

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geqq 8.$$

(Mathematical Spectrum)

Aufgabe 14

Man zeige für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x_1 \geqq 1$, $x_2 \geqq 1, \ldots, x_n \geqq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geqq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}}$$

Wann tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 15

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $0 < x_i \leqq \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Man beweise die Ungleichung

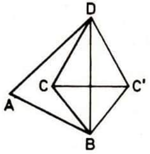
$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} \leqq \frac{(1-x_1)(1-x_2) \ldots (1-x_n)}{\left[(1-x_1)+(1-x_2)+ \ldots +(1-x_n)\right]^n} \quad !$$

Ferner zeige man, daß Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ eintritt.

Lösungen

Aufgabe 1

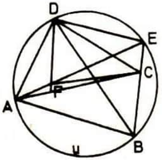
Wir zeigen zuerst, daß es ausreicht, die Ungleichung für konvexe Vierecke zu beweisen. Sei ABCD ein konkaves Viereck, und es liege C im Innern von $\triangle ABD$. O.B.d.A. mögen die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle BDA$ spitz sein. Ist nun C' der zu C bez. der Geraden g_{BD} symmetrisch gelegene Punkt, so ist offenbar ABC'D konvex, und es gilt



$|BC| = |BC'|$, $|CD| = |C'D|$, $|AC'| > |AC|$.

Ist also die Ungleichung für ABC'D richtig, so gilt sie auch für ABCD.

Wir betrachten nun das konvexe Viereck ABCD. Sei o.B.d.A. $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| \geqslant 180^\circ$. Dann liegt C nicht außerhalb des Umkreises U von $\triangle ABD$. Sei E der von B verschiedene Schnittpunkt von g_{BC} mit U. (Es kann $E \equiv C$ sein.) Wir definieren den auf g_{AE} gelegenen Punkt F so, daß



$$\sphericalangle CDF \cong \sphericalangle BDA \text{ ist.} \tag{1}$$

Jetzt gilt

$$\triangle AFD \sim \triangle BCD. \tag{2}$$

Es ist nämlich $\sphericalangle FDA \cong \sphericalangle CDB$ (man beachte (1)) und $\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAE \cong \sphericalangle DBE = \sphericalangle DBC$ nach dem Peripheriewinkelsatz.

Weiterhin gilt

$$\triangle ABD \sim \triangle FCD. \tag{3}$$

Es ist nämlich $\sphericalangle BDA \cong \sphericalangle CDF$ (nach (1)) und die zweite Beziehung $\sphericalangle FCD \cong \sphericalangle ABD$ gilt für $F \equiv C$ nach dem Peripheriewinkelsatz. Für $F \not\equiv C$ beweisen wir diese wie folgt:

Es ist $\sphericalangle CEF = \sphericalangle BEA \cong \sphericalangle BDA \cong \sphericalangle CDF$ (Peripheriewinkelsatz und (1)). Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes ist dann FCED ein Sehnenviereck und somit

$\sphericalangle FCD \cong \sphericalangle FED = \sphericalangle AED \cong \sphericalangle ABD$ (Peripheriewinkelsatz).

Aus (2) und (3) folgt

$\frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$ und $\frac{|FC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ also

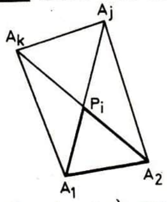
$|BD|\left(|AF| + |FC|\right) = |BC||AD| + |AB||CD|$. Wegen $|AF| + |FC| \geq |AC|$ gilt $|BD||AC| \leq |AB||CD| + |BC||AD|$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 2

Wir bezeichnen die Eckpunkte des n-Ecks mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und die Schnittpunkte von Diagonalen im Innern des Vielecks mit $P_1, \ldots, P_r$ $(r \in\ )$. Es sei $\mathfrak{A} := \{ A_1, \ldots, A \}$. Es gibt genau vier Typen von Dreiecken der gesuchten Art.

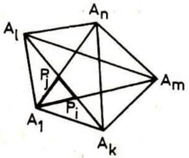
1. Typ: Alle Eckpunkte des Dreiecks sind aus $\mathfrak{A}$. Hiervon gibt es offenbar genau $\binom{n}{3}$ Stück.

2. Typ: Genau zwei Eckpunkte des Dreiecks sind aus $\mathfrak{A}$. Sei o.B.d.A.



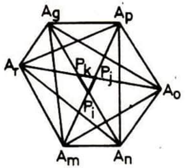
$A_1 A_2 P_i$ ein Dreieck dieses Typs. Dann möge P_i auf den Diagonalen $\overline{A_1 A_j}$ und $\overline{A_2 A_k}$ liegen. Wir können so dem Dreieck $A_1 A_2 P_i$ eindeutig die Viererteilmenge $\{A_1, A_2, A_j, A_k\}$ von $\mathfrak{A}$ zuordnen. (Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß P_i nur auf zwei Diagonalen des n-Ecks liegt.) Umgekehrt entsprechen jeder Vierermenge $\{A_1, A_2, A_j, A_k\}$ genau vier Dreiecke des 2. Typs, nämlich $A_1A_2P_i$, $A_2A_jP_i$, $A_jA_kP_i$ und $A_kA_1P_i$. Da es $\binom{n}{4}$ Viererteilmengen von $\mathfrak{A}$ gibt, existieren genau $4 \cdot \binom{n}{4}$ Dreiecke des 2. Typs.

3. Typ: Genau ein Eckpunkt des Dreiecks ist aus $\mathfrak{A}$. Sei o.B.d.A.



$A_1 P_i P_j$ ein Dreieck dieses Typs. P_i und P_j mögen auf der Diagonalen $\overline{A_k A_l}$ liegen, des weiteren seien P_i und P_j Punkte auf $\overline{A_1 A_m}$ bzw. $\overline{A_1 A_n}$. Dem Dreieck $A_1 P_i P_j$ wird also eindeutig eine Fünferteilmenge $\{A_1, A_k, A_m, A_n, A_l\}$ von $\mathfrak{A}$ zugeordnet. Umgekehrt entsprechen jeder Fünfermenge $\{A_1, A_k, A_m, A_n, A_l\}$ genau fünf Dreiecke des 3. Typs, d. h., es gibt genau $5 \cdot \binom{n}{5}$ Dreiecke des 3. Typs.

4. Typ: Kein Eckpunkt des Dreiecks ist aus $\mathfrak{A}$. Sei o.B.d.A. $P_iP_jP_k$ ein Dreieck dieses Typs. Aus der Skizze ersehe man, auf welchen Diagonalen P_i, P_j und P_k liegen. Man kann somit dem Dreieck $P_iP_jP_k$ eindeutig die Sechserteilmenge $\{A_m, A_n, A_o, A_p, A_q, A_r\}$ von $\mathfrak{A}$ zuordnen. Umgekehrt entspricht jeder Sechserteilmenge $\{A_m, \ldots, A_r\}$ genau ein Dreieck des 4. Typs, d. h., es gibt genau $\binom{n}{6}$ Dreiecke des 4. Typs.



Die Anzahl von Dreiecken der in der Aufgabe angegebenen Art beträgt also $\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}$.

Aufgabe 3

Wir beweisen die Behauptung allgemein für 2n Schüler und 2n-1 Schultage. Mit Ausnahme z. B. des Klassenbesten denken wir uns alle Schüler in Form eines regelmäßigen (2n-1)-Ecks aufgestellt.

Zu jeder Seite des (2n-1)-Ecks gibt es offenbar genau n-2 parallele Diagonalen.

Die Seite und die dazu parallelen Diagonalen enthalten alle Eckpunkte des (2n-1)-Ecks mit Ausnahme eines einzigen. Die Zweierreihen bilden wir nun wie folgt: Jeden Tag wählen wir eine neue Seite des (2n-1)-Ecks aus und betrachten die n-2 dazugehörenden parallelen Diagonalen. Die Schüler, welche Ecken entsprechen, die durch diese Seite bzw. Diagonale verbunden sind, mögen nebeneinander gehen, und der Klassenbeste wählt sich als Partner denjenigen Schüler, der dem übriggebliebenen Eckpunkt entspricht. Da jede Diagonale des (2n-1)-Ecks zu genau einer Seite des (2n-1)-Ecks parallel ist, geht so jeder Schüler genau einmal neben jedem anderen.

Aufgabe 4

Die linke Seite der gegebenen Ungleichung kann in der Form

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin k\varphi + \sum_{k=1}^{n+1} \sin k\varphi\right)$$

geschrieben werden.
Für alle φ, $0 < \varphi < \pi$, besteht die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\varphi \equiv \frac{\sin \frac{n}{2}\varphi \cdot \sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

was auch leicht durch Induktion gezeigt werden kann.
Dann folgt für alle φ, $0 < \varphi < \pi$.

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi + \frac{1}{2} \sin (n+1)\varphi$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{n}{2}\varphi \cdot \sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi \ \sin \frac{n+2}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left(\sin \frac{n}{2}\varphi + \sin \frac{n+2}{2}\varphi\right)$$

$$\equiv \sin^2 \frac{n+1}{2}\varphi \cdot \cot \frac{\varphi}{2}$$

Dieser Ausdruck ist sicher für alle $\varphi \in (0, \pi)$ nichtnegativ und verschwindet genau für $\frac{n+1}{2}\varphi = \pi m$, $m \in G$; also für

$$\varphi = \frac{2m}{n+1}\pi \text{ mit } m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gilt trivialerweise Gleichheit.

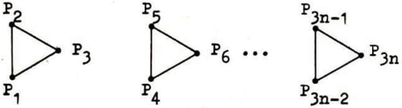
Aufgabe 5

Wir interpretieren die 3n Teilnehmer als Punkte P_i in einer Ebene und verbinden zwei Punkte genau dann durch eine Kante, wenn die, durch die Punkte repräsentierten Teilnehmer bereits miteinander gespielt haben. Auf diese Weise erhalten wir einen (schlichten ungerichten) Graphen. Wir haben zu zeigen, daß dieser Graph einen Weg der Länge 4 besitzt, d. h., daß es vier Punkte P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}, $P_{i_j} \neq P_{i_k}$ für $1 \leqq j < k \leqq 4$, gibt, so daß die drei Kanten $P_{i_1}P_{i_2}$, $P_{i_2}P_{i_3}$, $P_{i_3}P_{i_4}$ zum Graphen gehören.

Wir beweisen die Behauptung, indem wir die Klasse aller Graphen mit 3n Punkten betrachten, die keinen Weg der Länge 4 hat und zeigen, daß die Anzahl der Kanten 3n nicht übersteigt.
G bezeichnet einen beliebigen Graphen mit 3n Punkten, ohne Wege

der Länge 4 und <u>maximaler</u> Anzahl von Kanten $f(n)$. Da es nur endlich viele Graphen mit $3n$ Punkten gibt, ist die Existenz von G gesichert.
Wir geben zunächst ein Beispiel für solch einen Graphen an, der außerdem sogar $3n$ Kanten hat:

G_1:

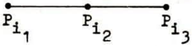


Also $f(n) \geqq 3n$.

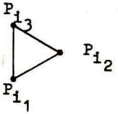
Wir beweisen $f(n) \leqq 3n$ (und damit $f(n) = 3n$) per Induktion.

1. $n = 1$. Klar.
2. $n \to n+1$. Sei G ein Graph mit $3n+3$ Punkten, $f(n+1)$ Kanten und ohne Weg der Länge 4.

Dann ist klar, daß G mindestens $3n+3$ Kanten haben muß. Dann gibt es in G aber sicher drei Punkte P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3},
$P_{i_1} \neq P_{i_2} \neq P_{i_3} \neq P_{i_1}$, so daß
mindestens die Kanten $P_{i_1}P_{i_2}$ und $P_{i_2}P_{i_3}$ in G vorkommen.



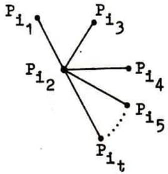
(1) Existiert die Kante $P_{i_1}P_{i_3}$, dann ist keiner der Punkte P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3} mit irgendeinem anderen Punkt durch eine Kante verbunden, d. h., G enthält als isolierten Teilgraph das Dreieck



.

(2) Existiert die Kante P_{i_1}, P_{i_3} nicht in G, so ist keiner dieser beiden Punkte mit irgendeinem anderen Punkt verbunden. Aber von P_{i_2} können weitere Kanten ausgehen; sagen wir zu den Punkten P_{i_4}, P_{i_5}, ..., P_{i_t}, die paarweise verschieden sind, $P_{i_j} \neq P_{i_k}$, $4 \leqq j < k \leqq t$, und untereinander durch

keine Kante verbunden sind. Die Punkte $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_t}$ bilden dann einen isolierten Teilgraphen und formen einen Stern



Ist t = 3, so ist G nicht maximal, denn die Kante $P_{i_1}P_{i_2}$ könnte zusätzlich eingeführt werden. Für $t \geqq 4$ ändern wir den Graphen G zu einem Graphen G' um, indem wir die drei Kanten $P_{i_1}P_{i_2}$, $P_{i_2}P_{i_3}$, $P_{i_2}P_{i_4}$ streichen und die Kanten $P_{i_1}P_{i_3}$, $P_{i_1}P_{i_4}$ und $P_{i_3}P_{i_4}$ neu einführen. G' hat alle Eigenschaften von G, insbesondere die gleiche Anzahl der Kanten.

In beiden Fällen können wir also annehmen, daß G ein isoliertes Dreieck enthält. Der Restgraph mit 3n Punkten enthält natürlich auch keinen Weg der Länge 4, hat also höchstens f(n) = 3n Kanten. Mithin gilt für die Anzahl der Kanten f(n+1) von G:

$$f(n+1) \leqq 3 + f(n) = 3(n+1).$$

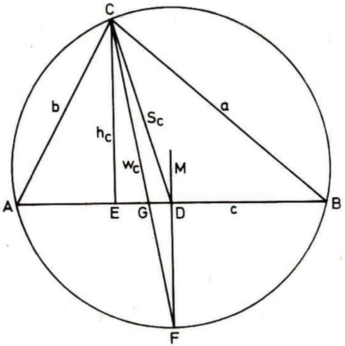
<u>Bemerkung:</u>

1. Analog kann man das Problem für beliebige Punktzahl betrachten. Der Induktionsschritt kann unverändert übernommen werden. Die Induktionsanfänge für Graphen mit einem bzw. zwei Punkten sind sofort klar, so daß man insgesamt erhält:

Anzahl der Punkte n		Anzahl der Kanten
n	$3 \mid n$	n
n	$3 \nmid n$	n-1

2. Man kann durch unsere Überlegungen auch alle maximalen Graphen charakterisieren.
   <u>$3 \mid n$:</u> G besteht aus $\frac{n}{3}$ isolierte Dreiecke.
   <u>$3 \nmid n$:</u> G besteht aus einem Stern und isolierte Dreiecke (wobei wir die Graphen • und •—• auch als Sterne bezeichnen).

Aufgabe 6



Die Schnittpunkte von c mit h_c bzw. w_c bzw. s_c seien E bzw. G bzw. D. M bezeichne den Mittelpunkt des Umkreises. D ist dann auch der Fußpunkt des Lotes von M auf c. Wir verlängern w_c und MD über G bzw. D und erhalten Schnittpunkte mit dem Umkreis. Wir zeigen, daß diese Schnittpunkte identisch sind. Es sei F der Schnittpunkt von MD mit dem Umkreis. Dann gilt wegen Symmetrie $\overline{AF} = \overline{BF}$. Da Peripheriewinkel genau dann gleich groß sind, wenn sie Winkel über gleiche Bögen sind, folgt, daß $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF$. Also ist CF die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$, d. h. $w_c = CF$.

Zur Konstruktion: Auf einer Geraden g wird der Punkt E festgelegt. Über die Senkrechte zu g in E läßt sich C konstruieren und sodann G und D*. Man verlängert CG über G und konstruiert die Senkrechte zu g in D. Der Schnittpunkt ist F. Da CF eine Sehne vom Umkreis ist, liegt M auf der Mittelsenkrechten zu CF. Andererseits liegt M auf DF. Somit erhalten wir M. CM ist der Radius des Umkreises. Die Schnittpunkte des Umkreises mit g sind A und B. Damit ist ABC konstruiert.
Die Konstruktion ist sicher immer eindeutig ausführbar, wenn E, G und D verschiedene Punkte sind, d. h. für $h_c < w_c < s_c$.
Sind mindestens zwei der Punkte gleich, so sind alle drei Punkte identisch, d. h. $h_c = s_c = w_c$. Dann ist das Dreieck gleichschenklig, doch ist es nicht eindeutig konstruierbar.

---

* Dabei ist zu beachten, daß G zwischen E und D liegt.

Aufgabe 7

R bezeichne die Menge der Schlösser und mit K_i ($i = 1, 2, \ldots, 11$) bezeichnen wir die Menge der Schlösser, die das i-te Mitglied der Kommission aufzuschließen vermag.

Aus der Aufgabe folgt:

(1) $K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \ldots \cup K_{i_6} = R$ für alle i_j mit $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_6 \leqq 11$,

(2) $K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \ldots \cup K_{i_5} = R$ für alle i_j mit $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_5 \leqq 11$.

Für jede 5-elementige Menge $\left\{K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_5}\right\}$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_5 \leqq 11$, existiert ein $\nu \in R$ mit $\nu \notin K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \ldots \cup K_{i_5}$.

Je zwei verschiedene dieser 5-elementigen Mengen liefern paarweise verschiedene $\nu_1 \in R$ und $\nu_2 \in R$, denn ansonsten enthält die Vereinigungsmenge, in die mindestens 6 der K_{i_j} eingehen, das Element ν_1 ($= \nu_2$) nicht, was (1) widerspricht.

Also ist die Anzahl der Schlösser mindestens so groß wie die Anzahl von 5-elementigen Teilmengen einer 11-elementigen Menge; also $\binom{11}{5} = 462$.

Eine geeignete Verteilung können wir folgendermaßen erzeugen: $I_1, I_2, \ldots, I_{462}$ seien die 462 paarweise verschiedenen 5-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Dann definieren wir für $i = 1, 2, \ldots, 462$:

$$i \in K_j \quad \text{für} \quad j \in I_i$$

$$i \notin K_j \quad \text{für} \quad j \notin I_i.$$

Aufgabe 8

Angenommen, die Behauptung wäre nicht richtig, so würde für alle x_1, x_2 mit $a \leqq x_1 \leqq b$, $a \leqq x_2 \leqq b$ gelten

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} \leqq \frac{1}{4}\,(b - a)\, f(a)$$

also

$$f(x_2) \geqq \frac{4\,(x_2 - x_1) \cdot f^2(x_1)}{(b - a) \cdot f(a)} \qquad (1)$$

Betrachten wir nun die Folge, die definiert ist durch

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_k = c_{k-1} + \frac{b-a}{2^k} \qquad (k > 1).$$

Für alle $k \geqq 1$ gilt zunächst $a \leqq c_k \leqq b$. Weiter werden wir mit vollständiger Induktion über k zeigen, daß

$$f(c_k) \geqq 2^k \cdot f(a) \tag{2}$$

gilt. Dazu wählen wir zunächst $x_1 = a$, $x_2 = c_1$ und erhalten wegen (1):

$$f(c_1) \geqq \frac{4\ (\frac{b-a}{2})\ f^2(a)}{(b-a)\ .\ f(a)} = 2 \cdot f(a).$$

Setzen wir nun $x_1 = c_k$, $x_2 = x_{k+1}$ in (1) und wenden die Induktionsvoraussetzung an, so erhalten wir

$$f(c_{k+1}) \geqq \frac{4\ (c_{k+1} - c_k)\ f^2(c_k)}{(b-a)\ .\ f(a)} \geqq \frac{4\ (b-a)\ \left[2^k \cdot f(a)\right]^2}{2^{k+1}(b-a)\ .\ f(a)}$$
$$= 2^{k+1} \cdot f(a).$$

Das widerspricht aber der Beschränktheit der Funktion $f(x)$ und wir erhalten die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 9

Sei zunächst $n = 2^r$ und $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl. Dann ist

$$\sigma(\sigma(n)) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{r} 2^i\right) = \sigma(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1} = 2 \cdot n.$$

Sei nun n eine gerade Zahl mit $\sigma(\sigma(n)) = 2n$. Wir schreiben $n = 2^r \cdot g$, wo $r \geqq 1$ ist und g eine ungerade Zahl. Wir erhalten:

$$\sigma(\sigma(n)) = \sigma(\sigma(2^r \cdot g)) = \sigma(\sum_{i=0}^{r} 2^i \cdot \sigma(g)) = \sigma(2^{r+1}-1)\ \sigma(g)$$

Nehmen wir nun $g > 1$ an, so sind $(2^{r+1} - 1)\sigma(g)$, $\sigma(g)$, 1 verschiedene Teiler von $(2^{r+1} - 1) \cdot \sigma(g)$ und wegen $\sigma(g) > g$ erhalten wir:

$$2^{r+1} \cdot g = \sigma(\sigma(n)) \geqq (2^{r+1} - 1)\sigma(g) + \sigma(g) + 1 =$$
$$= 2^{r+1} \cdot \sigma(g) + 1 > 2^{r+1} \cdot g.$$

Folglich muß $g = 1$ sein und wir erhalten die Bedingung:

$$\sigma(2^{r+1} - 1) = 2^{r+1},$$

die aber nur für $2^{r+1} - 1$ Primzahl erfüllt ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 10

Seien $a_1, \ldots, a_{r+1}$ die ganzen Zahlen sowie $p_1, \ldots, p_r$ die Primzahlen und

$$a_i = p_1^{\alpha_{i_1}} \cdot p_2^{\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_{i_r}} \qquad (1 \leq i \leq r+1)$$

wobei $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ nichtnegative ganze Zahlen sind.

Das Produkt gewisser dieser Zahlen läßt sich dann darstellen als

$$a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_{r+1}^{\lambda_{r+1}} = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\mu_r}$$

wobei die λ_i gleich 0 oder 1 sind und

$$\mu_j = \lambda_1 \alpha_{1j} + \ldots + \lambda_{r+1} \alpha_{r+1,j} \qquad (1 \leq j \leq r).$$

Nun gilt die Behauptung offenbar genau dann, wenn es $\lambda_i \in \{0, 1\}$ so gibt, das mindestens eines von ihnen verschieden von Null ist und die μ_j gerade sind. Das ist aber äquivalent zu der Tatsache, daß es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$ gibt, die die Zahlenkongruenz

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} X_1 + \alpha_{21} X_2 + \ldots + \alpha_{r+1,1} X_{r+1} \equiv 0 \pmod 2 \\ \\ \alpha_{15} X_1 + \alpha_{25} X_r + \ldots + \alpha_{r+1,r} X_{r+1} \equiv 0 \pmod 2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

lösen und für die $\lambda_i \in \{0, 1\}$ gilt sowie eines der λ_i von Null verschieden ist. Daß dies aber stets möglich ist, zeigen folgende Überlegungen.

Wir werden (1) in ein System von Kongruenzen mit gleicher Lösungsmenge überführen. Dazu numerieren wir die Kongruenzen von 1 bis r von oben nach unten durch. Zunächst lösen wir die erste Kongruenz nach einer Variablen mit ungeraden Koeffizienten auf und eliminieren diese Variable aus allen anderen Kongruenzen. Gibt es keine Variable mit einem ungeraden Koeffizienten in dieser Kongruenz, wenden wir uns der nächsten zu. Dieses Verfahren wenden wir nun auf die Kongruenzen 2 bis r-1 an (die durch das bisherige Verfahren eventuell bereits verändert wurden). Das so entstandene System (1') von Kongruenzen hat offenbar die gleiche Lösung wie (1) und außerdem folgende Eigenschaft: Gibt es in der k-ten Kongruenz von (1') einen ungeraden Koeffizienten, so gibt es eine Variable, die in dieser Kongruenz einen ungeraden Koeffizienten hat, aber in keiner l-ten Kongruenz auftritt (l > k).

Nun können wir bez. der k-ten Kongruenz folgende Fälle unterscheiden:

Fall 1: Es gibt höchstens eine Variable, die in der k-ten Kongruenz einen ungeraden Koeffizienten hat, in allen anderen l-ten Kongruenzen ($l > k$) aber einen geraden.

Fall 2: Es gibt mehr als eine Variable mit dieser Eigenschaft.

Wir werden nun ein Lösungstupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1})$ von (1') angehen mit der Eigenschaft $\lambda_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, r+1$ und $\lambda_j = 1$ für eines der λ_i. Dabei gehen wir von der r-ten Kongruenz aus und bestimmen die freien Variablen so, daß die Kongruenzen richtig gelöst werden.
Tritt dabei für jede der r-Kongruenzen Fall 1 ein, so wird durch jede Kongruenz auch höchstens eine Variable festgelegt. Setzen wir diese gleich Null, so haben wir bereits (1') gelöst. Die übrigen Variablen können beliebige Werte annehmen. Da wir aber bisher höchstens r Variable bestimmt haben, gibt es mindestens ein λ_j ($j \in \{1, \ldots, r+1\}$), das wir 1 setzen können.
Gibt es nun ein k, für das Fall 2 eintritt, so können wir zunächst alle Variablen, die durch l-ten Kongruenzen ($l > k$) bestimmt werden, gleich Null setzen und lösen diese Kongruenzen richtig. Zwei der Variablen mit ungeradem Koeffizienten in der k-ten Kongruenz setzen wir nun Eins, die restlichen Null. Nun gibt es aufgrund der angeführten Eigenschaft von (1') in jeder l-ten Kongruenz ($l < k$) entweder gar keine Variable mit ungeradem Koeffizienten oder eine, die auf keinen Fall durch die nachfolgenden Kongruenzen bestimmt ist. Im ersten Fall hat diese Kongruenz keinen Einfluß auf die Lösung. Im zweiten Fall wählt man die oder eine der noch nicht bestimmten Variablen mit ungeradem Koeffizienten so, daß die Kongruenz aufgeht.
Damit haben wir aber in jedem Fall eine solche geforderte Lösung gefunden und es gilt die Behauptung.

<u>Aufgabe 11</u>

In jeder der Spalten gibt es k blaue und m-k rote Gitterpunkte, wo $k \in \{0, \ldots, m\}$ ist. Dann gibt es aber

$$\binom{k}{s} + \binom{m-k}{s}$$

verschiedene Teilspalten der Länge s mit jeweils Punkten nur einer Farbe. Betrachten wir für $k = 0, \ldots, m$:

$$a_k = \binom{k}{s} + \binom{m-k}{s}$$

so gilt:

$$a_k \lesseqgtr a_{k+1} \Longleftrightarrow \binom{m-k}{s} - \binom{m-(k+1)}{s} \lesseqgtr \binom{k+1}{s} - \binom{k}{s}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(m-k-1)\cdot \ldots \cdot (m-k-s+1)}{s!}\Big((m-k)-(m-k-s)\Big) \lesseqgtr$$

$$\frac{k \cdot \ldots \cdot (k-s+2)}{s!}\,(k+1-(k+1-s))$$

$$\Longleftrightarrow (m-k-1)\cdot \ldots \cdot (m-k-s+1) \lesseqgtr k \cdot \ldots \cdot (k-s+2)$$

$$\Longleftrightarrow m-k-1 \lesseqgtr k$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m-1}{2} \lesseqgtr k.$$

Für $k \leqq \frac{m-1}{2}$ wird demnach $a_k \geqq a_{k+1}$ und

für $k \geqq \frac{m-1}{2}$ erhalten wir $a_k \leq a_{k+1}$.

Damit wird aber für $k = 0, 1, \ldots, m$: $a_k = a_{\left[\frac{m}{2}\right]}$ bzw.

$$\binom{k}{s} + \binom{m-k}{s} \geqq \binom{\left[\frac{m}{2}\right]}{s} + \binom{m - \left[\frac{m}{2}\right]}{s} = \binom{\left[\frac{m}{2}\right]}{s} + \binom{\left]\frac{m}{2}\right[}{s}.$$

Dann gibt es aber mindestens

$$n \cdot \left(\binom{\left[\frac{m}{2}\right]}{s} + \binom{\left]\frac{m}{2}\right[}{s}\right)$$

Teilspalten der Länge s, deren Gitterpunkte gleichgefärbt sind. Jede dieser Spalten kommt in einem s x n Gitter mit gewissen s Zeilen des m x n Gitters vor. Offenbar gibt es aber $\binom{m}{s}$ Möglichkeiten der Auswahl von s aus m Zeilen. Demnach muß es eine Menge von s Zeilen geben, in der

$$\left] n \cdot \frac{\binom{\left[\frac{m}{2}\right]}{s} + \binom{\left]\frac{m}{2}\right[}{s}}{\binom{m}{s}} \right[$$

die Teilspalten der Länge s auftreten, die gleichfarbige Gitterpunkte enthalten, womit die Behauptung nachgewiesen ist.

<u>Aufgabe 12</u>

Für eine Verteilung, die bei $g_m(n,r)$ mitgezählt wird, gilt bezüglich der Zahl n genau einer der folgenden Fälle:

- n tritt in einer Zeile auf, die nicht n-1 enthält

- n tritt in einer Zeile mit n-1 auf, die aber nicht n-2 enthält
- n tritt in einer Zeile mit n-1, n-2 auf, die aber nicht n-3 enthält

⋮

- n tritt in einer Zeile mit n-1, n-2, ..., n-m+1 auf, die aber nicht n-m enthält.

Sei $a(n,i)$ die Anzahl, so daß eine Zeile die Zahlen n, n-1, ..., n - i+1 enthält, aber nicht n-i.
Enthält die Zeile mit n, n-1, ..., n - i+1 keine weitere Zahl, so sind die restlichen n-i Zahlen auf die übrigen r-1 Zeilen zu verteilen. Die Anzahl der Möglichkeiten ist aber $g_m(n-i, r-1)$.

Soll noch eine weitere Zahl in der Zeile, die n, n-1, ..., n - i+1 enthält, vorkommen, so sind die restlichen n-i Zahlen auf r Zeilen zu verteilen. Nun können n, n-1, ..., n - i+1 in jeder der r Zeilen auftreten, außer in der, die die Zahl n-i enthält. Es gibt in diesem Fall also $(r-1) \cdot g_m(n-i, r)$ Möglichkeiten. Wir erhalten für i = 1, ..., m:

$$a(n, i) = g_m(n-i, r-1) + (r-1)\, g_m(n-i, r).$$

Hieraus ergibt sich aber wegen

$$g_m(n, r) = \sum_{i=1}^{m} a(n,i)$$

die Rekursionsformel.
Es ist offenbar

$$f(n) = g_2(n, 1) + g_2(n, 2).$$

Für $n > 2$ ist weiter $g_2(n,1) = 0$ und wegen der Rekursionsformel gilt:

$$g_2(n, 2) = g_2(n-1, 1) + g_2(n-1, 2) + g_2(n-2, 1) + g_2(n-2,2)$$

Für $n > 4$ wird folglich:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Wegen $g_2(2, 2) = g_2(2, 1) = g_2(1, 1) = 1$ und $g_2(1, 2) = 0$ wird

$$f(4) = f(3) + 2$$
$$f(3) = 3.$$

Da nun $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sind, was sofort aus der Definition von $f(n)$ folgt, ergibt sich auch die zweite Behauptung.

Aufgabe 13

Für positive Zahlen x, y gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Folglich sind:

$$(x+y+z)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 9$$

und aufgrund der Voraussetzung

$$(x + y + z) \geq 9.$$

Andererseits gilt:

$$xy + yz + xz = xyz.$$

und wir erhalten durch Ausmultiplizieren

$$(x-1)(y-1)(z-1) = x + y + z - 1 \geq 8.$$

Aufgabe 14

Wir beweisen die Ungleichung mittels Induktion; und zwar beweisen wir die Behauptung für $n = 2^s$, $s = 1, 2, \ldots$, und dann für $n \to n-1$.

1. $n = 2$ Dann ist

$$\left(\sqrt{x_1x_2}-1\right)\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geqq 0,$$ wobei Gleichheit genau für $x_1 = x_2$ eintritt.

Weiter folgt

$$2\sqrt{x_1x_2} + x_1\sqrt{x_1x_2} + x_2\sqrt{x_1x_2} \geqq x_1 + x_2 + 2x_1x_2,$$

$$1+x_2 + \sqrt{x_1x_2} + x_2\sqrt{x_1x_2} + 1+x_1 + \sqrt{x_1x_2} + x_1\sqrt{x_1x_2} \geqq 2+2x_1+2x_2+2x_1x_2,$$

$$\left(1+\sqrt{x_1x_2}\right)\left(1+x_2\right) + \left(1+\sqrt{x_1x_2}\right)\left(1+x_1\right) \geqq 2\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)$$

und

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \geqq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}},$$

wobei Gleichheit genau für $x_1 = x_2$ gilt.

2. $n \to 2n$, $n = 2^s$, $2n = 2^{s+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung und wegen $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqq 1$, $\sqrt[n]{x_{n+1}\cdot x_{n+2}\cdot \ldots \cdot x_{2n}} \geqq 1$ nach dem Fall $n = 2$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{1+x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{1+x_i} \geqq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}} + \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_{n+1}\ldots x_{2n}}}$$

$$= n\left(\frac{1}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}\right) + \left(\frac{1}{1+\sqrt[n]{x_{n+1}\ldots x_{2n}}}\right) \geqq$$

$$\geqq n\ \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\cdot\sqrt[n]{x_{n+1}\ldots x_{2n}}}}$$

$$\geqq \frac{2n}{1+\sqrt[2n]{x_1x_2\ \ldots\ x_{2n}}}\ .$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ und $x_{n+1} = \ldots = x_{2n}$ (nach Induktionsvoraussetzung) und

$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = \sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\ldots x_{2n}}$ (Fall n = 2) ist, d. h.

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n}$.

3. $n \to n-1$. Wir fixieren $x_n = \sqrt[n-1]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}$. Dann erhalten wir nach 2.:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ \frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+\sqrt[n-1]{x_1\ldots x_{n-1}}} \geqq$$

$$\geqq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1-x_2\ldots x_{n-1}\ \sqrt[n-1]{\cancel{x_1-}x_{n-1}}}}$$

$x_1\ldots$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

<u>**Bemerkung:**</u>

Durch elegante Kombination von 2. und 3. läßt sich auch ein Induktionsschritt $n \to n+1$ durchführen: Es sei der Einfachheit halber

$$g = \sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_{n+1}}.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1}\ \frac{1}{1+x_i} + \frac{n-1}{1+g} = \sum_{i=1}^{n}\ \frac{1}{1+x_i} + \underbrace{\frac{1}{1+x_{n+1}} + \frac{1}{1+g} + \ldots + \frac{1}{1+g}}_{n\ \text{Summanden}}$$

$$\geqq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}} + \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_{n+1}\ g^{n-1}}}$$

$$\geq \frac{2n}{1+\sqrt[2n]{x_1x_2\ldots x_{n+1}g^{n-1}}} = \frac{2n}{1+\sqrt[2n]{g^{n+1}\cdot g^{n-1}}} =$$

$$= \frac{2n}{1+g},$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

<u>Aufgabe 15</u>

Wir beweisen zunächst folgenden

<u>**Hilfssatz:**</u> Es sei n eine natürliche Zahl, $n \geqq 1$. a und b seien positive reelle Zahlen mit $a \leqq \frac{n}{2}$, $b \leqq \frac{n}{2}$.

Dann gilt

$$\frac{a\cdot b}{(a+b)^2} \leqq \frac{(n-a)\,(n-b)}{[2n-a-b]^2}\ .$$

Gleichheit tritt genau für $a = b$ ein.

<u>Beweis des Hilfssatzes:</u>

Es gilt $\quad n^2(a-b)^2 \geqq n\,(a+b)\,(a-b)^2, \qquad (1)$

$$n^2a^2 + n^2b^2 + 2a^2bn + 2ab^2n \geqq 2abn^2 + a^3n + b^3n + a^2bn + ab^2n,$$

$$(n^2-an-bn+ab)\,(a^2+2ab+b^2) \geqq ab\,(4n^2-4an-4bn+2ab+a^2+b^2)$$

$$(n-a)(n-b)(a+b)^2 \geqq ab\,(2n-a-b)^2. \qquad (2)$$

Genau für $a = b$ tritt in (1) und (2) Gleichheit ein, da für $a \neq b$ (1) in $n \geqq a + b$ übergeht und hier nur für $a = b = \frac{4}{2}$ Gleichheit eintritt. Q.e.d.

Wir beweisen nunmehr die allgemeine Ungleichung.

Wir benutzen vollständige Induktion und zeigen die Behauptung zunächst für $n = 2^s$, $s = 1, 2, \ldots$

1. $n = 2$ $(s=1)$. Die Behauptung folgt aus dem Hilfssatz für $n = 1$.
2. $n \longrightarrow 2n$ $(s \longrightarrow s+1)$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir

$$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{2n}}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{2n})} =$$

$$= \left[\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}\right]\cdot\left[\frac{x_{n+1}\cdot x_{n+2}\cdot\ldots\cdot x_{2n}}{(1-x_{n+1})(1-x_{n+2})\ldots(1-x_{2n})}\right]$$

$$\leqq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n}{(n-x_1-x_2- \dots -x_n)^n} \cdot \frac{(x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n})^n}{(n-x_{n+1} - x_{n+2} - \dots - x_{2n})^n}$$

$$\leqq \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) \quad (\sum_{i=n+1}^{2n} x_i)}{(n - \sum_{i=1}^{n} x_i) \ (n - \sum_{i=n+1}^{2n} x_i)} \right)^n$$

und nach dem Hilfssatz für $a = \sum_{i=1}^{n} x_i$ und $b = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i$

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots x_{2n}}{(1-x_1)(1-x_2)\ (1-x_{2n})} \leqq \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i)^2}{(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=n+1}^{2n} x_i)^2} \right)^n$$

$$\leqq \left(\frac{\sum_{i=1}^{2n} x_i}{2n - \sum_{i=1}^{2n} x_i} \right)^{2n} .$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n} = \frac{b}{n}$ (Induktionsvoraussetzung) und $a = b$ (Hilfssatz), also

$x_1 = x_2 = \dots = x_{2n}$ gilt.

3. $n \rightarrow n-1$. Wir wählen

$$x_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i .$$

Dann gilt:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot (\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x \ )^n} \leqq$$

$$\leq \frac{(1-x_1)(1-x_2)\ \dots\ (1-x_{n-1})\cdot\left(\frac{1}{n-1}\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}\ (1-x_i)\right)}{\left[(1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_{n-1})+\frac{1}{n-1}\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}\ (1-x_i)\right]^n}$$

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot\ \dots\ \cdot x_{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}\ (\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ x_i)}{(\frac{n}{n-1})^n\ (x_1+x_2+\dots+x_{n-1})^n}\ \leq$$

$$\leq \frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ \dots\ \cdot(1-x_{n-1})\ \frac{1}{n-1}\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ (1-x_i)\right)}{(\frac{n}{n-1})^n\left((1-x_1)+(1-x_2)+\dots+(1-x_{n-1})\right)^n}$$

und die Behauptung folgt, auch bez. Gleichheit, unmittelbar.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 12

Sonderaufgabe

Möge jeder von n Schülern einen den anderen Schülern unbekannten Sachverhalt kennen. Es finden nacheinander Konferenzgespräche

$$E_1, E_2, \ldots, E_t$$

für jeweils $k \geqq 2$ Schüler statt. In jedem dieser Gespräche findet ein vollständiger Informationsaustausch statt. Dabei sei $1 \leqq n \leqq k^2$. Bezeichne $f(n,k)$ die minimale Anzahl der Gespräche, die nötig sind, damit jeder der n Schüler jeden der unter ihnen bekannten Sachverhalte kennt. Man beweise

$$f(n,k) = \left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right],$$

wobei $[x]$ die kleinste ganze Zahl z bezeichnet, für die $x \leqq z$ gilt.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Folge a_n, $n = 1,2,3,\ldots$, mit $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = 18 \cdot a_n - a_{n-1}$.
Man beweise, daß alle Zahlen $5a_n^2 - 1$ Quadratzahlen sind.
(Heft 8, Aufgabe 4; hier mit anderen Lösungen)

Aufgabe 2

Die 6 Ecken eines regulären Oktaeders mit den Kantenlängen 1 sollen durch ein zusammenhängendes Netz N aus neun Strecken verbunden werden, wobei N folgende Eigenschaften haben soll:

1. Jede Ecke des Oktaeders ist Eckpunkt genau einer Strecke von N.
2. a) Jeder Endpunkt E einer Strecke von N, der nicht Eckpunkt des Oktaeders ist, ist Eckpunkt von genau drei Strecken aus N.
2. b) Je zwei dieser Strecken treffen sich in E unter einem Winkel von 120°.

Man finde zwei zueinander inkongruente Netze der verlangten Art, berechne jeweils deren Gesamtlänge und vergleiche diese der Größe nach.
(Aufgabe von Prof. Pirl)

Aufgabe 3

Es gelte für alle reellen x und y die Beziehung

$$f(x+y) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y). \tag{1}$$

Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

a) f ist periodisch genau dann, wenn g periodisch ist,

b) f ist periodisch, wenn g periodisch ist,

c) g ist periodisch, wenn f periodisch ist.

Man ersetze (1) durch

$$f(x+y) = f(x)\, f(y) - g(x)\, g(y) \tag{2}$$

und untersuche für (2) ebenfalls a), b) und c).

Aufgabe 4

Man bestimme alle reellen stetigen Funktionen g, f_1, f_2, f_3, für die alle reellen x, y, z

$$g(x+y+z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) \tag{3}$$

gilt. Man verallgemeinere die Aufgabenstellung und löse auch die verallgemeinerte Aufgabenstellung.

Aufgabe 5

Man bestimme alle reellen Polynome P(x) mit folgenden Eigenschaften: dividiert man P(x) durch seine Ableitung P'(x), so ist der Quotient erneut ein Polynom.
(Zentraler Korrespondenzzirkel 1980)

Aufgabe 6

Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{k=2}^{n} \sqrt[n]{k!} < \frac{n^2 + 3n + 4}{4}. \tag{4}$$

(Zentraler Korrespondenzzirkel 1980)

Aufgabe 7

Man berechne die Ausdrücke

$$A := \sin^2 19^\circ + \sin^2 41^\circ \cdot \sin^2 19^\circ + \sin^2 41^\circ$$

und

$$B := \cos^2 74^\circ + \cos^2 74^\circ \cdot \cos^2 46^\circ + \cos^2 46^\circ.$$

(Zentraler Korrespondenzzirkel 1980)

Aufgabe 8

Man beweise folgenden Satz: Keine Primzahl $p > 2$ ist als Summe von $p - 1$ $(p-1)$-ten Potenzen rationaler Zahlen darstellbar.
(Aufgabe von Prof. Pirl)

Aufgabe 9

Man ermittle alle Lösungen von $2^k + 1 = 5^n$ im Bereich der natürlichen Zahlen.

Aufgabe 10

Man bestimme alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen $(n_1, n_2, \dots, n_{14})$ von $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 = 1599$.
Zwei Lösungen $(n_1, \dots, n_{14})$ und $(n_1', \dots, n_{14}')$, die sich nur durch die Reihenfolge der Koordinaten unterscheiden, sollen als gleich gelten.
(8. USA- Olympiade)

Aufgabe 11

Man kann den Mantel gewisser Fußbälle als Polyeder auffassen, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünf- bzw. Sechsecke sind. Jeder Eckpunkt des Polyeders ist hierbei Eckpunkt genau zweier Sechsecke und genau eines Fünfecks. Aus wieviel Fünfecken bzw. Sechsecken ist der Fußballmantel zusammengesetzt?
(Hinweis: Für jedes Polyeder gilt nach der Eulerschen Formel $v - b + f = 2$, wobei v die Anzahl der Ecken, b die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen des Polyeders ist.)

Aufgabe 12

Man beweise: Gibt es bei zehn Personen 34 Bekanntschaften, so existieren unter ihnen vier Personen, die sich alle gegenseitig kennen. ("Bekanntschaften" bestehen nur gegenseitig zwischen je zwei Personen.)

Aufgabe 13

Beweise oder widerlege: Für alle positiven rationalen Zahlen k gibt es positive rationale Zahlen a,b,c, so daß ein Dreieck mit den Seitenlängen a,b,c und der Fläche k existiert.
(D. E. Daykin, Amer. Math. Monthly E 5499 (1967))

Aufgabe 14

Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wir betrachten die n symmetrischen Funktionen

$$s_1 := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$s_2 := \sqrt[2]{\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n}{\binom{n}{2}}}$$

$$\ldots$$

$$s_i := \sqrt[i]{\frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sum_{1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leqq n} x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdots x_{j_i}}$$

$$\ldots$$

$$s_n := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

Man beweise für alle $x_1, \ldots, x_n$ die Ungleichungskette

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_n!$$

Lösungen

Aufgabe 1

Die Schüler A. Goede, E. Scholz und R. Wunderlich gaben folgende Lösungen an. Wir beweisen durch vollständige Funktionen $a_i^2 + a_{i+1}^2 = 18 \cdot a_i \cdot a_{i+1} - 16$. Für i = 1 stimmt die Behauptung. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt

$a_{i+1}^2 + 16 = a_i\ (18 \cdot a_{i+1} - a_i) = (18a_{i+1} - a_{i+2}) \cdot a_{i+2}$, also

$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 = 18\ a_{i+1} \cdot a_{i+2} - 16.$

Es sei nun $b_i^2 : = 5a_i^2 - 1$ mit $b_1 = b_2 = 2$. Wir erhalten

$5(a_i^2 + a_{i+1}^2 = 90a_i\ a_{i+1} - 80,$

$25 \cdot a_i^2 \cdot a_{i+1}^2 - 5\ (a_i^2 + a_{i+1}^2) + 1 = (5a_i\ a_{i+1} - 9)^2,$

$b_i^2 \cdot b_{i+1}^2 = (5a_i\ a_i+1 - 9)^2$

und für $i > 1$ $b_i \cdot b_{i+1} = 5 \cdot a_i \cdot a_{i+1} - 9$. Damit ist

$324 + 36 \cdot b_i\ b_{i+1} = 180 \cdot a_i\ a_{i+1},$

$$5 \cdot 18^2 \cdot a_{i+1}^2 - 180 \cdot a_i\ a_{i+1} + 5a_i - 1 =$$
$$324 \cdot (5a_{i+1}^2 - 1) + (5a_i^2 - 1) - 36b_i \cdot\cdot b_{i+1}$$

also $5 \cdot (18a_{i+1} - a_i)^2 - 1 = (18 \cdot b_{i+1} - b_i)^2 = 5 \cdot a_{i+2}^2 - 1$

und der Beweis ist geführt.

Aufgabe 2

(Lösung nach B. Kreußler)

Wir konstruieren ein erstes Netz. In den Ebenen ε (ABCD), ε (BFDE) bzw. ε (AECF) finden wir Punkte P_1, P_2 bzw. P_3, die auf den Mittelsenkrechten von AB, DF bzw. EC liegen und für die

$$\sphericalangle\ AP_1B \cong \sphericalangle\ DP_2F \cong \sphericalangle\ EP_3C = 120^\circ$$

gilt. Nun liegen die Punkte P_1, P_2, P_3, S in einer Ebene (S sei der Schwerpunkt) und es ist

$$\sphericalangle\ P_1SP_2 \cong \sphericalangle\ P_2SP_3 \cong \sphericalangle\ P_3SP_1 = 120^\circ.$$

Dies folgt aus Symmetriegründen oder durch eine Bewegung des Oktaeders in sich mit $\overline{AB} \to \overline{EC} \to \overline{DF}$. Das damit beschriebene Netz erfüllt die geforderten Bedingungen. Für seine Gesamtlänge gilt

$$s_1 = 3 \cdot (\overline{AP_1} + \overline{BP_2} + \overline{P_1S}) = \frac{3}{2}\ (\sqrt{3} + 1).$$

Es sei nun ε die Ebene durch E und F, die $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in A' und B' halbiert. Die Punkte P_1 und P_2 in dieser Ebene werden so gewählt, daß $\sphericalangle AP_1D \cong \sphericalangle BP_2C = 120^\circ$ ist. Wir betrachten die kongruenten Dreiecke A'SF und B'SF, in denen P_1 bzw. P_2 liegen. P'_1 wird so konstruiert, daß $\sphericalangle B'P_1'F \cong \sphericalangle B'P_1'S \cong \sphericalangle SP_1'F$ ist (analog P_2').

Es gilt $P_1 \in g\ (A', P_1)$ und $P_2' \in g\ (B', P_2)$. Wegen der Symmetrie liegt S auf $g(P_1', P_2')$. Nach dieser Konstruktion erfüllt das beschriebene Netz die Bedingungen. Für seine Gesamtlänge gilt

$$s_2 = 2(\overline{A'P_1'} + \overline{SP_1'} + \overline{FP_1'} + 2\ \overline{AP_1} - \overline{A'P_1}).$$

Nach dem Kosinussatz ist

$$\frac{1}{2} = \overline{P_1'F}^2 + \overline{P_1'S}^2 + \overline{P_1'F} \cdot \overline{P_1'S},\ \frac{1}{4} = \overline{P_1'A'}^2 + \overline{P_1'S}^2 + \overline{P_1'A'} \cdot \overline{P_1'S},$$

$$\frac{3}{4} = \overline{P_1'F}^2 + \overline{P_1'A'}^2 + \overline{P_1'F} \cdot \overline{P_1'A'},\ \overline{P_1'A'}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ \overline{P_1'F}^2.$$

Aus diesen Bedingungen folgt unter Berücksichtigung von

$P_1'F < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\overline{P_1'F} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}},\ \overline{P_1'\ \ A'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}\ ,$$

$$\overline{P_1'S} = \frac{1}{4}\sqrt{3 - \sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}\ .$$

Ferner gilt $\overline{AP_1} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\overline{A'P_1} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Daraus ergibt sich $s_2 < 4{,}07$, $s_1 > 4{,}09$; so daß $s_1 > s_2$ ist.

Aufgabe 3

Eine reellwertige Funktion f(x) heißt genau dann periodisch, wenn es eine reelle Zahl $p > 0$ gibt, so daß $f(x+p) = f(x)$ für alle x des Definitionsbereiches D gilt.

Durch Angabe von Gegenbeispielen zeigen wir, daß die Aussagen 1 b) und 1 c) und damit auch 1 a) falsch sind.

1b) Mit $g = 1$ und $f = x$ ist g nach Definition periodisch.

Es gilt $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ für alle $x, y \in D$, aber f ist nicht periodisch.

1c) Mit $f = 0$ und $g = x^2$ ist f nach Definition periodisch und es gilt (1) für alle $x, y \in D$. g ist aber nicht periodisch.

Durch ein Gegenbeispiel weisen wir nach, daß die Aussage 2b) und damit auch die Aussage 2a) falsch sind.

Mit $g = 0$ und $f = e^x$ ist g periodisch und (2) ist für alle $x, y \in D$ erfüllt. f ist aber nicht periodisch.

Die Aussage 2c) ist wahr.

Beweis: Es sei f mit p periodisch. Dann ist

$$f(x+y) = f(x)f(y)-g(x)g(y) = f(x+y+p) = f(x)f(y+p)-g(x)g(y+p)$$
$$= f(x)f(y)-g(x)g(y+p) \text{ und es folgt}$$

$g(x) \left[g(y) - g(y+p)\right] = 0$. Damit gilt $g \equiv 0$ oder g hat die Periode p (wobei $g \equiv 0$ auch mit p periodisch ist), d. h. g hat die Periode p.

Bemerkung: Durch einfache Zusatzvoraussetzungen kann man den Wahrheitsgehalt der Aussagen leicht verändern. Zum Beispiel ist die Aussage 1c) wahr, wenn man $f(x) \neq 0$ voraussetzt.

Aufgabe 4

Wir lösen folgende verallgemeinerte Fragestellung:
Bestimmen Sie alle reellen stetigen Funktionen $g, f_1, f_2, \dots, f_n$, für die für alle reellen x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{x=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (5) \text{ gilt.}$$

Für n = 3 erhalten wir die ursprüngliche Aufgabenstellung.
Wir folgen einer Idee von B. Kreußler. Wir setzen $x_k = x$ und $x_i = 0$ $(i \neq k)$ und erhalten die n Gleichungen

$$g(x) = f_k(x) + \sum_{i \neq k} f_i(0) \qquad (6) \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Hieraus ergibt sich

$$f_k(x) = f_1(x) + f_k(0) - f_1(o) \qquad g(x) = f_1(x) + \sum_{i=2}^{n} f_i(0). \qquad (7)$$

Setzen wir dies in 5 ein, so folgt:

$$f_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) - (n-1)\, f_1(0). \qquad (8)$$

Für $x_i = 0$ $(i > k)$ folgt

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_1(x_i) - (k-1)\, f_1(0) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und insbesondere $f_1(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) - f_1(0)$.
Induktiv ergibt sich hieraus:

$$f_1\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_1(x_i) - (k-1) \cdot f_1(0) \qquad (9) \text{ für jedes}$$

$k \in N$, $k > 1$. Mit $x_i = 1$ für alle i folgt

$$f_1(k) = k\left[f_1(1) - f_1(0)\right] + f_1(0).$$

Mit $x_i = k^{-1}$ folgt aus (9) $f_1(1) = kf_1(\frac{1}{k}) - (k-1)\ f_1(0)$, also
$f_1(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}\ \left[f_1(0) - f_1(0)\right]\ + f_1(0)$.
Für $x_i = l^{-1}$ $(l \neq 0)$ ist $f_1(\frac{k}{l}) = k\ f_1(\frac{1}{l}) - (k-1)\ f_1(0)$
$\frac{k}{l}\left[f_1(1) - f_1(0)\right]\ + f_1(0)$. Damit gilt für jedes rationale r
$f_1(r) = r\ \left[f_1(1) - f_1(0)\right]\ + f_1(0)$.
(Für negative r folgt aus (9) $f_1(r+r-r) = 2\ f_1(r) + f_1(-r) - 2f_1(0)$,
also $f_1(-r) = -f_1(r) + 2f_1(0)$).
Sei r_n eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$,

wobei a beliebig reell ist. Dann ist wegen der Stetigkeit von f_1
$f_1(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f_1\ (r_n) - \lim\limits_{n\to\infty} r_n\ \left[f_1(1) - f_1\ (0)\right] + f_1(0)$

$= a\ \left[f_1(1) - f_1(0)\right]\ + f_1(0)$.
Mit (6) folgt:
$f_k(x) = x\ f_1(1) - f_1\ (0)\ + f_k(0)$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$.
und $g(x) = x\ \left[f_1(1) - f_1(0)\right]\ + \sum\limits_{i=1}^{n}\ f_i(0)$.
Mit $f_1(1) - f_1\ (0) = b$ und $f_k(0) = b_k$ folgt

$f_k(x) = bx + b_k$ und $g(x) = bx + \sum\limits_{i=1}^{n}\ b_i$, wobei $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$
beliebige reelle Zahlen sind. Durch die Probe bestätigt sich, daß diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.

Bemerkungen:

1. Aus Gleichung (7) könnte man durch die Substitution
$h(x) = f_1(x) - f_1(0)$ auch zur Jensenschen Gleichung

$h\ (\sum\limits_{i=1}^{n}\ )\ x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\ h(x_i)$ gelangen. Da mit f_1 auch h stetig ist,

ergibt sich als einzige Lösung $h(x) = ax$ mit beliebigen reellen a.

2. F. Eisenhaber löst anstelle (3) die Gleichung

$$g(\sum_{i=1}^{n}\ a_i x_i + b) = \sum_{i=1}^{n}\ b_i f_i\ (x_i) + B \qquad (3')$$

mit a_i, $b_i \neq 0$
Durch die Subsitutionen
$y_i = a_i x_i + bn^{-1}$ und $g_i(y_i) = b_i f_i(x_i) + Bn^{-1}$ folgt
aus (3') die Gleichung (3).

3. H. Rücker gibt eine Verallgemeinerung unter Benutzung der Hamel Basis. Er läßt die Stetigkeitsvoraussetzung fallen und ermittelt

alle Lösungen, d. h. auch die unstetigen.
Es leitet analog für rationales r die Beziehung
$g(r) = r\,[g(1) - g(0)] + g(0)$ her. Sei nun B eine Basis der reellen Zahlen.

Definition: Ist $x \in B$, so wählen wir g(x) beliebig. Gilt $x \notin B$, d. h., also $x = \sum_{n=1}^{m} b_n r_n$ mit $b_n \in B$ und rationalen Zahlen r_n, so ist

$$g(x) = g\left(\sum_{n=1}^{m} b_n r_n\right) = \sum_{n=1}^{m} g(b_n r_n) - (m-1)g(0)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} r_n \; g(b_n) - g(0) + mg(0) - (m-1)g(0) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} r_n \left[g(b_n) - g(0)\right] + g(0).$$

Sei nun $x,y,z \in P$ und $x = \sum_{n=1}^{m} r_n b_n$, $y = \sum_{n=1}^{m} s_n b_n$ und $z_n = \sum_{n=1}^{m} t_n b_n$.

Damit ist

$$g(x+y+z) = g\left[\sum_{n=1}^{m} (r_n+s_n+t_n)b_n = \sum_{n=1}^{m} (r_n+s_n+t_n)\left[g(b_n)-g(0)\right] + g(0)\right.$$

$$= \sum r_n \left[g(b_n)-g(0)\right] + \sum s_n \left[g(b_n) - g(0)\right] + \sum t_n \left[g(b_n)+g(0)\right] + g(0)$$

$$= g(x) + g(y) + g(z) - 2\,g(0).$$

Damit sind alle Lösungen ermittelt.

<u>Aufgabe 5</u>

Es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ ein Polynom n-ten Grades ($a_n \neq 0$, $n \geqq 1$).
Es ist $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1}$ und der Quotient ist ein Polynom $n-(n-1) = 1$.-ten Grades. Mit $Q(x) = ax+b$ ist

$$P(x) - P'(x)\,Q(x) = (ax+b) \sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} \left[iaa_i + (i+1)ba_{i+1}\right],$$

wobei wir $a_{n+1} = 0$ setzen. Durch Koeffizientenvergleich folgt $a_i = iaa_i + (i+1)ba_{i+1}$ für $i = 0,1,\dots,n-1$ und $a_n = na\,a_n$.
Ist $b = 0$, so folgt $a_i = 0$ für alle $i = 0,1,\dots,n-1$... Damit ist, wie die Probe zeigt, $P(x) = a_n x^n$ eine Lösung. O. B. d. A. sei $b \neq 0$. Ist $a_j = 0$ für ein $j \leqq n-1$, so folgt $a_i = 0$ für alle $i \geqq j$, d. h., P(x) ist nicht vom Grade n und damit nicht Lösung. Sei nun $a_i \neq 0$ für alle $i = 0,1,\dots,n$. Nun ist $nb = \frac{n-i}{i+1}\,\frac{a_i}{a_{i+1}}$ infolge der

Rekursionsformeln und damit $(nb)^k = \frac{1 \cdot a_{n-1}}{n \cdot a_n} \cdot \frac{2\, a_{n-2}}{(n-1)a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot$

$\frac{k\, a_{n.k}}{(n-k+1 a_{n-k+1}} = \frac{a_{n-k}}{\binom{n}{k} a_n}$. Wir erhalten:

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_n} a_{n-k} x^{n-k} = \sum_{k-0}^{n} \binom{n}{k})(nb)^k x^{n-k} = (x+nb)^n$$

und da $b = \frac{a_o}{a_1}$ ist, kommt $P(x) = a_n(x + n \frac{a_o}{a_1})^n$ als Lösung in Betracht.

Tatsächlich erfüllt das Polynom $P(x) = (px+q)^n$ mit $p \neq 0$ wegen $P'(x) = np(px+q)^{n-1}$ die Aufgabenstellung, welches wir durch eine Substitution erhalten.

Wir geben noch die Lösung von M. Hellmund wieder. Polynome sind im Intervall (-oo, oo) stetige und differenzierbare Funktionen. Wir fassen die gestellte Aufgabe als Differentialgleichung auf. Es ist $\frac{P(x)}{P'(x)} = ax + b$ mit $a \neq 0$ und damit $p = \frac{dp}{dx}(ax + b)$. Nach Trennung der Veränderlichen folgt $\frac{dx}{ax+b} = \frac{dp}{p}$, also $\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{dp}{p}$ und damit

$\frac{1}{2} \ln |ax + b| + C = \ln |p|$. Hieraus folgt $|p|^a = |c_1(ax+b)|$ und weiter $P(x) = c_2 (\frac{x}{a} + b)^a$. Da dies ein Polynom sein soll, ergibt sich, daß a eine natürliche Zahl ist und wir erhalten die obige Lösung.

Eine weitere Variante stammt von J. Franke und J.-U. Müller.
Es sei x_o eine Nullstelle von $P'(x)$. x_o ist dann auch Nullstelle von $P(x)$, da ansonsten $\frac{P(x)}{P'(x)}$ an der Stelle x_o eine Polstelle hätte. Die Vielfachheit der Nullstelle x_o von $P'(x)$ sei k.
$P(x)$ lasse sich darstellen als $P(x) = (x-x_o)^n P_1(x)$ mit $P_1(x_o) \neq 0$ und $n \geq 1$, $n \in N$. Es folgt $P'(x) = n(x-x_o)^{n-1} P_1(x) + (x-x_o)^n P_1'(x)$ $= (x-x_o)^{n-1} \left[nP_1(x) + (x-x_o)P'(x)\right]$ und da $nP_1(x_o) + (x_o-x_o)P'(x_o)$ $= n\, P_1(x_o) \neq 0$ ist, folgt $k = n - 1$. Es sei nun

$P'(x) = C\, (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r}$ mit $\sum_{j=1}^{r} k_j = k$.

x_j ist dann eine Nullstelle der Vielfachheit $k_j + 1$ von $P(x)$. Der Grad von $P(x)$ ist damit $\sum_{j=1}^{r} (k_j+1) = k+r$. Andererseits ist nach den bekannten Ableitungsregeln der Grad von $P(x)$ gleich $k+1$. Also ist $r = 1$ und damit $P'(x) = C(x-x_1)^k$ und schließlich $P(x) = C_1(x-x_1)^{k+1} = C_1(x-x_1)^n$. Tatsächlich erfüllt dies Polynom auch die Aufgabenstellung.

Aufgabe 6

Aus $k \leqq n$ folgt $(k!)^k = (k!)^n$, also $\sqrt[n]{k!} \leqq \sqrt[k]{k!}$. Somit ist

$$\sum_{k=2}^{n} \sqrt[n]{k!} \leqq \sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{k!} \leqq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} i\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{k(k+1)}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} (k+1) = \frac{n^2+3n-4}{4} < \frac{n^2+3n+4}{4}.$$

Für die zweite Ungleichung wurde der Satz vom arithmetisch-geometrischen Mittel verwendet.

Eine andere Beweismöglichkeit liefert die vollständige Induktion. Zunächst ist nach der Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel

$$\sqrt[n]{n!} = \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Für $n = 2$ ist $\sqrt{2} < 3{,}5$. Es gelte $\sum_{k=2}^{n-1} \sqrt[n-1]{k!} < \frac{(n-1)^2+3(n-1)+4}{4}$.

Dann ist $\sum_{k=2}^{n} \sqrt[n]{k!}\ \sum_{k=2}^{n-1} \sqrt[n-1]{k!} + \sqrt[n]{n!}\ \frac{(n-1)^2+3(n-1)+4}{4} + \frac{n+1}{2}$
$= \frac{n^2+3n+4}{4}$.

Aufgabe 7

(Lösung nach R. Hortig)

Es ist $A = (\sin 19^\circ + \sin 41^\circ)^2 + (\sin 41^\circ \sin 19^\circ - 1)^2 - 1$

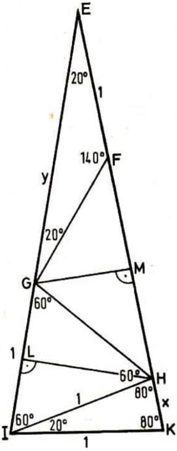
$= \left[\sin(30^\circ - 11^\circ) + \sin(30^\circ + 11^\circ)\right]^2 +$

$+ \left[\sin(30^\circ + 11^\circ) \sin(30^\circ + 11^\circ) - 1\right]^2 - 1$

$= \cos^2 11^\circ + \left[\frac{\cos 22^\circ - \cos 60^\circ}{2} - 1\right]^2 - 1$

$= \frac{1}{4}(\cos^2 22^\circ - 3 \cos 22^\circ + \frac{17}{4})$.

Analog folgt $B = \frac{1}{4}(\cos^2 28^\circ - 3 \cos 28^\circ + \frac{17}{4})$. Weiter ist (Herleitung am regelmäßigem Zehneck) $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ und damit $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1}{8}(5 + \sqrt{5})}$ und sind $18^\circ = \sqrt{\frac{1}{8}(3 - \sqrt{5})}$. Wir berechnen nun $\cos 20^\circ$.



Es ist Δ IKE $\sim$ IKH (vgl. Abb. 1) und damit $(y+1):1=1:x$. Weiter ist $\overline{EL} : \overline{EH} = \overline{EM} : \overline{EG}$, also $(y+\frac{1}{2}) : (y-x+1) = (\frac{y-x}{2} + 1):y$. Aus beiden Gleichungen folgt $x^3 - x + 3 = 0$.

Nach der Cardanischen Formel ist

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{239}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{239}{3}}}.$$

Im Δ HKI folgt aus dem Cosinussatz $\cos 20^\circ = \frac{1}{2}(2-x^2)$ und somit

$$\sin 20^\circ = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{2}\ (2-x^2)\right]^2}.$$

Mit $u = \cos 40^\circ = 2\cos^2 20^\circ - 1$ folgt $\sin 40^\circ = \sqrt{1-u^2}$. Da $\cos 22^\circ = \cos(40^\circ-18^\circ) = \cos 40^\circ \cos 18^\circ + \sin 40^\circ$ sind 18° ist, verbleibt nur noch das Einsetzen.

Weiter ist $\cos 44^\circ = 2\cos^2 22^\circ - 1$, $\sin 44^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 44^\circ}$, $v = \cos 14^\circ = \cos(44^\circ-30^\circ) = \cos 44^\circ \cos 30^\circ + \sin 44^\circ \cdot \sin 30^\circ$ und $\cos 28^\circ = 2v^2-1$. Auch für B ist nur noch einzusetzen.

Aufgabe 8

Wir führen einen indirekten Beweis von Th. Gundermann an.

Angenommen, die Darstellung

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{p-1} = p,\quad (a_i, b_i) = 1,\quad a_i b_i \neq 0,\quad a_i, b_i \in G \text{ ist möglich.}$$

Dann gilt

$$(a_1 b_2 b_3 \ldots b_{p-1})^{p-1} + (b_1 a_2 b_3 \ldots b_{p-1})^{p-1} + \ldots (b_1 b_2 \ldots b_{p-2} a_{p-1})^{p-1}$$
$$= p(b_1 \ldots b_{p-1})^{p-1} \text{ und damit}$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} x_i^{\,p-1} = py^{p-1}$$ mit ganzen x_i und y ($x_i, y \neq 0$). Alle Summanden der linken Seite sind nach dem kleinen Satz von Fermat kongruent oder Eins mod p. Da genau p-1 Summanden auftreten, ist ihre Summe genau dann durch p teilbar, wenn jeder Summand durch p teilbar ist. Dann ist jeder Summand und damit auch die rechte Seite durch p^{p-1} teilbar, d. h., es ist $y = O(p)$. Wir setzen $x_i^{(1)} = \frac{x_i}{p}$, $y^{(1)} = \frac{y}{p}$ und

erhalten $\sum_{i=1}^{p-1} x_i^{(1)^{p-1}} = py^{(1)^{p-1}}$ mit ($|y^{(1)}| < |y|$ und $x_i^{(1)}$, $y^{(1)} \in G$.

Durch analoge Schlußweise erhalten wir eine Folge $\{y^{(i)}\}$ mit

$$\left|y^{(i)}\right| > \left|y^{(i+1)}\right| , \tag{11}$$

die nicht abbrechen kann. Infolge (11) erhalten wir einen Widerspruch zur Annahme und mithin ist eine Summendarstellung der gewünschten Form nicht möglich.

Ein anderer möglicher Weg ist der folgende. Aus (10) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{p-1} s_i^{p-1} = pz^{p-1}, \tag{10}$$

wobei z = KGV $(b_1, \ldots, b_{p-1})$ ist. Nun ist nach dem kleinen Satz von Fermat

$$s_i^{p-1} = \begin{cases} 0(p), \text{ falls } s_i \equiv 0(p) \\ 1(p), \text{ falls } s_i \not\equiv 0(p). \end{cases}$$

Gibt es ein i mit $s_i \neq 0(p)$, dann ist $\sum_{i=1}^{p-1} s_i^{p-1} = t(p)$ mit $t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ im Widerspruch zu (12). Damit ist für alle i $s_i \equiv 0(p)$ und folglich auch $s_i^{p-1} \equiv 0(p^{p-1})$. Dies impliziert $\sum_{i=1}^{p-1} s_i^{p-1} \equiv 0\ (p^{p-1})$ und damit p^{p-2} / z^{p-1}. Da $p > 2$ ist, folgt p / z im Widerspruch zur Konstruktion von z. Damit ist die Annahme falsch und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 9

Eine Lösung ist $k = 2$, $n = 1$. Angenommen, es gibt eine Lösung mit $k > 2$. Dann ist k gerade, da sonst $2^k + 1 = 0 \bmod 3$ ist. Also hat man zu lösen

$$4^l + 1 = 5^n = (4+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot 4 + \binom{n}{2} \cdot 4^2 + \ldots + \binom{n}{l} \cdot$$

$4^l + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 4^n$. $(l > 1,\ n > 1)$, d. h.

$$4^l = 4 \cdot n + \binom{n}{2} \cdot 4^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 4^n.$$

Da die linke Seite durch 16 teilbar ist, muß n die Form $n = 4 \cdot q$ $(q \geq 1)$ haben. Also hat man zu lösen:

$4^l + 1 = 5^{4 \cdot q}$ bzw. $4^l = (5^{2q} - 1)(5^{2q} + 1)$.

Dann muß $5^{2q} - 1$ die Form $5^{2q} - 1 = 2^r$, $r \in N$, haben. Dann ist

aber $(5^{2q} - 1)\ (5^{2q} + 1) = 2^r \cdot (2^r + 2) = 2^{r+1} \cdot (2^{r-1} + 1) \neq 4^1$.
Daher gibt es keine Lösung mit $k > 2$ sondern nur die Ausgangslösung.

Aufgabe 10

Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung $(n_1 \ldots, n_{14})$.
Dann ist wegen $7^4 > 1599$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,14\}$ $n_i \in \{0,1,\ldots,6\}$.
Es bezeichne p_i die Anzahl der n_js mit $n_j = i$, $i = 0,1,\ldots,6$.
Dann ist

$$p_o + p_1 \cdots + p_6 = 14 \tag{13}$$

und

$$p_1 + 16 \cdot p_2 + 81 \cdot p_3 + 256 \cdot p_4 + 625 \cdot p_5 + 1296 \cdot p_6 = 1599. \tag{14}$$

Wir betrachten die Gleichung (14) modulo 16 und erhalten

$$p_1 + p_2 + p_5 = 15\ (16) \tag{15}$$

Wegen (13) ist aber $0 \leqq p_1 + p_3 + p_5 \leqq 14$, so daß die Kongruenz (15) keine Lösung hat. Mithin ist unsere Annahme falsch, d. h., die Gleichung hat eine Lösung.

Aufgabe 11

Bezeichne x die Anzahl der Fünfecke und y die Anzahl der Sechsecke.
Dann besagt die Eulersche Polyederformel.

$$v - b + x + y = 2. \tag{16}$$

Da jede Kante Seite genau zweier Vielecke ist, gilt

$$2b = 5x + 6y. \tag{17}$$

Aus der Eigenschaft der Eckpunkt des Polyeders folgt

$$3v = 5x + 6y. \tag{18}$$

Aus (16), (17), (18) ergibt sich

$$\frac{5x + 6y}{3} - \frac{5x + 6y}{2} + x + y = 2, \text{ also } x = 12.$$

Weiter ist wegen der Eckpunkteigenschaft jede Seite eines Fünfecks gleichzeitig Seite eines Sechsecks, und die Seiten jedes Sechsecks sind abwechselnd gleichzeitig Seite eines Fünf- bzw. Sechsecks.
Zählt man aber die Kanten, die Seiten von Fünfecken sind, so erhält man $5x=3y=60$. Also ist $y = 20$. Somit ist der Fußballmantel aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken zusammengesetzt.

Aufgabe 12

Wir bezeichnen die zehn Personen mit $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ und setzen $P := \{P_1, P_2, \ldots, P_{10}\}$. Ist $M \subseteq P$, so sei der Bekanntschaftsgrad $v(M)$ gleich der Anzahl der Bekanntschaften, die zwischen den Personen der Menge M bestehen. Die Behauptung der Aufgabe lautet: Es gibt eine Vierermenge $V \subseteq P$ mit $v(V) = 6$. Wir zeigen zunächst, daß eine Dreiermenge $D \subseteq P$ mit $v(D) = 3$ existiert. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Wir bilden sämtliche $\binom{10}{3}$ Dreierteilungen von P und addieren die zugehörigen Bekanntschaften. Da hierbei jede Bekanntschaft 8fach gezählt wird, erhält man als Summe $8 \cdot 34 = 272$. Andererseits kann diese Summe wegen der Annahme höchstens $2 \cdot \binom{10}{3} = 240$ betragen. Das ist ein Widerspruch. Sei also o.B.d.A. $v(\{P_8, P_9, P_{10}\}) = 3$. Wir setzen $P' := \{P_1, \ldots, P_7\}$. Ist eine Person $P_i \in P'$ mit P_8, P_9 und P_{10} bekannt, so gilt $v(\{P_i, P_8, P_9, P_{10}\}) = 6$ und wir sind fertig. Ansonsten ist jede Person $P_i \in P'$ mit höchstens zwei der Personen P_8, P_8, P_{10} bekannt und es folgt $34 = v(P) \leqq 3 + 2 \cdot 7 + v(P')$, also $v(P') \geqq 17$. Analog wie oben schließen wir, daß es eine Dreiermenge D' von P' mit $v(D') = 3$ gibt. Bilden wir nämlich wieder alle Dreierteilungen von P' und ist s die Summe der zugehörigen Bekanntschaftsgrade, so erhalten wir einerseits $s \geqq 5 \cdot 17 = 85$ und andererseits $s \leqq 2 \cdot \binom{7}{3} = 70$, falls kein solch D' existieren würde. Sei also o.B.d.A. $v(\{P_5, P_6, P_7\}) = 3$. Wir setzen $P'' = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Ist $P_i \in P''$ mit P_5, P_6 und P_7 bekannt, so ist $v(\{P_i, P_5, P_6, P_7\}) = 6$. Ansonsten gilt $17 \leqq v(P') \leqq 3 + 2 \cdot 4 + v(P'')$, also $v(P'') \geqq 6$, d. h. $v(P'') = 6$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 13

(Lösung nach D. E. Daykin)

Dieses Problem war lange Zeit ungelöst.

Vielleicht finden Leser noch andere Lösungen; diese bitte an Dr. Gronau (Adresse siehe Seite 2) schicken.

Es sei $k > 2$. Für $0 < k \leqq 2$ wähle man eine andere Maßeinheit. Dann setze man

$$a = \frac{5k^2 - 4k + 4}{k^2 - 4}, \quad b = \frac{k(k^2 - 4k + 20)}{2(k^2 - 4)}, \quad c = \frac{k + 2}{2}.$$

Wir weisen nach, daß diese Zahlen alle Bedingungen erfüllen; d. h., die drei Dreieckungleichungen und $F_{\Delta abc} = k$.

1) $a + b > c \Leftrightarrow \frac{5k^2 - 4k + 4}{k^2 - 4} + \frac{k(k^2 - 4k + 20)}{2(k^2 - 4)} > \frac{k + 2}{2}$

$$\Longleftrightarrow \frac{4(k - 2)^2}{2(k^2 - 4)} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2(k - 2)}{k + 2} > 0$$

2) $a + c > b \qquad \Longleftrightarrow \frac{8k}{k + 2} > 0$

3) $b + c > a \qquad \Longleftrightarrow \frac{(k - 2)^2}{2(k+2)} > 0.$

4) Nach der Heronischen Dreiecksflächenformel ist

$$F_{\Delta\, abc} = \sqrt{S(S - a)\ (s - b)\ (S - c)} \text{ mit } s = \frac{1}{2}\ (a + b + c).$$

Also ist $s = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2(k^2 - 4)}\ \big(10k^2 - 8k + 8 + k(k^2 - 4k + 20) + (k + 2)$

$. \ (k^2 - 4)\big)$

$$= \frac{2k^3 + 8k^2 + 8k}{2.2(k^2 - 4)}$$

$$= \frac{k\ (k + 2)}{2\ (k - 2)}$$

und weiter

$$s - a = \frac{(k - 2)^2}{2(k + 2)},$$

$$s - b = \frac{4k}{k + 2} \text{ und}$$

$$s - c = \frac{k + 2}{k - 2}.$$

Zusammenfassend folgt

$$F_{\Delta\, abc} = \sqrt{\frac{k\ (k + 2)}{2\ (k - 2)} \quad \frac{(k - 2)^2}{2(k + 2)} \quad \frac{4k}{k + 2} \quad \frac{k + 2}{k - 2}}$$

$$= \sqrt{k^2}$$

$$= k.$$

Aufgabe 14

Offenbar ist $s_1 \geqq s_n$ die bekannte Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. Diese Ungleichung werden wir mehrfach benutzen und sie kurz mit AGM bezeichnen. Für $x_1 = x_2 = .. =$ $= x_n$ gilt $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = x_1$.

Die Idee des folgenden Beweises stammt von J. Roßmann. Aus AGM folgt $s_{n-1} \geqq s_n$ und $s_i \geqq s_n$, $i = 1,\ldots,n-1$. Wir betrachten das Polynom

$$P(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ \dots\ (x - x_n).$$

$P(x)$ hat n nicht negative Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und ist ausmultipliziert

$$P(x) = x^n - \binom{n}{1} \cdot s_1 \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot s_2^2 \cdot x^{n-2} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} s_n^n .$$

Es sei $i \in \{2,3,\dots,n-1\}$. Wir betrachten die $(n-i)$-te Ableitung von $P(x)$:

$$\begin{aligned} P^{(n-i)}(x) = {} & n.(n-1)(n-2)\dots(i+1)x^i \\ & -(n-1)(n-2)(n-3)\dots i.\ \binom{n}{1} s_1 x^{i-1} \\ & +(n-2)(n-3)(n-4)\dots\ (i-1)\binom{n}{2} s_2{}^2\ x^{i-2} \\ & - + \dots \\ & +(-1)^i (n-i)(n-i-1)(n-i-2)\dots\ 1\ .\ \binom{n}{i} s_i{}^i \end{aligned}$$

$$= n(n-1)(n-2)\dots(i+1)\ \left[x^i - \binom{i}{1} s_1 x^{i-1} + \binom{i}{2} s_2{}^2\ x^{i-2} - \right.$$
$$\left. + \dots + (-1)^i \binom{i}{i} s_i{}^i\right]$$

Nach dem Satz von Rolle gilt:

Hat dein Polygramm zwei reelle Nullstellen x_1, x_2, so hat die 1. Abteilung dieses Polynoms mindestens eine Nullstelle $\bar{x}$ mit $\bar{x} \in [x_1, x_2]$. Ist insbesondere $x_1 = x_2$, so folgt $\bar{x} = x_1$. Mithin hat $P'(x)$ genau n-1 reelle Nullstellen $\bar{x}_1 \dots, \bar{x}_{n-1}$ mit $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1} \in [x_1, x_n]$, wenn x_1 eine kleinste und x_n eine größte Nullstelle von $P(x)$ ist. Insbesondere hat $P'(x)$ genau n-1 <u>nichtnegative</u>ereelle Nullstellen. Per Induktion folgt sofort, daß $P^{(n-i)}(x)$ genau i nichtnegative reelle Nullstellen $\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_i$ hat. Dabei ist $\bar{\bar{x}}_1 . \bar{\bar{x}}_2 . \dots . \bar{\bar{x}}_i = \binom{i}{i} s_i{}^i$ und $\bar{\bar{x}}_1 \cdot \bar{\bar{x}}_2 \dots \bar{\bar{x}}_{i-1} +$
$+ \bar{\bar{x}}_1 \cdot \bar{\bar{x}}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\bar{x}}_{i-2} \cdot \bar{\bar{x}}_i + \dots + \bar{\bar{x}}_2 \cdot \bar{\bar{x}}_3 \cdot \dots \cdot \bar{\bar{x}}_i =$
$= \binom{i}{i-1} s_{i-1}^{i-1}$.

Nach der AGM ist

$$\frac{1}{i} \binom{i}{i-1} s_{i-1}^{i-1} \geq \sqrt[i]{\bar{\bar{x}}_1{}^{i-1} \cdot \bar{\bar{x}}_2{}^{i-1} \cdot \dots \cdot \bar{\bar{x}}_i{}^{i-1}} = \sqrt[i]{(s_i{}^i)^{i-1}}$$

und

$$s_{i-1}^{i-1} \geq s_i^{i-1},$$

also

$$s_{i-1} \geq s_i \text{ -}$$

Sonderaufgabe aus Heft 11:

Ist $M_1, \ldots, M_n, M_{n+1} = M_1$ eine Sitzanordnung der Mathematiker, so sei der Bekanntschaftsgrad b (S) gleich der Anzahl der Paare (M_i, M_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n)$, die miteinander bekannt sind. Sei o. B. d. A. $M_1, \ldots, M_n, M_1$ eine Sitzanordnung S, für die b (S) minimal ist. Wir nehmen an, daß $b(S) > 0$ ist. Dann gibt es ein Paar (M_k, M_{k+1}) $(k \in \{1, \ldots, n\})$ zweier miteinander bekannter Mathematiker. Kennt M_k nicht M_j, so sind M_{k+1} und M_{j+1} miteinander bekannt $(j \in \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\})$. Sonst wäre nämlich $M_1, \ldots, M_j, M_k, M_{k-1}, \ldots, M_{j+1}, M_{n+1}, \ldots, M_n, M_1$ für $j < k$ bzw. $M_1, \ldots, M_k, M_j, M_{j-1}, \ldots, M_{k+1}, M_{j+1}, \ldots, M_n, M_1$ für $j > k$ eine Sitzanordnung mit kleinerem Bekanntschaftsgrad. Nach Voraussetzung gibt es wenigstens $n - 1 - (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}$ Mathematiker M_j $(j \in \{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\})$, die M_k nicht kennt, dann muß M_{k+1} aber die entsprechenden Mathematiker M_{j+1} kennen, wie wir eben sahen. Also hat M_{k+1} wenigstens $\frac{n}{2}$ Bekannte im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $b(s) = 0$, und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 13

Sonderaufgabe

An einem Schachturnier, an dem n Personen teilnehmen und bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielt, seien schon s Spiele absolviert. Man zeige, daß es zwei Spieler A, B mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) A und B haben schon gegeneinander gespielt und

b) die Anzahl der absolvierten Spiele, bei denen A oder B mitgespielt hat, beträgt mindestens

$$\left]\frac{4\cdot s}{n}\right[-1.$$

Hierbei bedeutet $]x[$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle sechsstelligen natürlichen Zahlen, deren Querprodukt gleich der Quersumme ist!

(Közep. Math. Lapok, 61 (1980) 2, S. 80)

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{n}{10^{[\lg n] + 1}},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Man zeige, daß die Folge zu jeder reellen Zahl A mit $0{,}1 \leqq A \leqq 1$ eine Teilfolge enthält, die gegen A konvergiert.

(Közep. Math. Lapok, 62 (1981) 3, S. 126)

Aufgabe 3

Es sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Man zeige: Es gibt genau dann natürliche Zahlen x und y mit

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad (1)$$

wenn n einen Primfaktor der Form $4k-1$ enthält.

(József Kürschák, Wettbewerb 1980)

Aufgabe 4

Man beweise für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ die Ungleichung

$$A_n := \frac{|\sin n|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} + \ldots + \frac{|\sin 2n|}{2n} > \frac{1}{6}. \qquad (2)$$

Aufgabe 5

Für welche Dreiecke Δ ABC gilt die Ungleichung

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 > \frac{8}{3} r^2, \qquad (3)$$

wobei r bzw. S der Umkreisradius bzw. der Schwerpunkt des Dreiecks Δ ABC ist?

(Közep. Math. Lapok, 62 (1981) 2, S. 78)

Aufgabe 6

Bestimmen Sie alle Paare (x,y) ganzer Zahlen, für die

$$x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = 8 (x^2 + xy + y^2 + 1) \qquad (4)$$

gilt!

(Luxemburg 1980, Vorschlag von Holland)

Aufgabe 7

Sei k eine feste natürliche Zahl. Die natürliche Zahl x kann im abgeschlossenen Intervall $[1,k]$ variieren. Man bestimme die von x abhängige Anzahl von Tripeln (a, b, c), für die

$$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq k \qquad (5)$$

und

$$a \leqq x \leqq c \qquad (6)$$

gilt. Für welches x ist die Anzahl maximal und wie groß ist diese maximale Anzahl?

Aufgabe 8

Für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ bestimme man die größte reelle Zahl c(n), so daß für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt: wenn $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 2$, so ist

$$a_1 a_2 \ldots a_n \geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + c(n), \qquad (7)$$

(Nach einer Idee von T. Eichner)

Aufgabe 9

Auf wieviel verschiedene Arten kann man die Zahlen 1, 2, ..., n mit je genau einer von r verschiedenen Farben so färben, daß je t ($t \leq r$) aufeinanderfolgende Zahlen paarweise verschieden gefärbt sind?

(Zwei Färbungen heißen genau dann gleich, wenn jede der Zahlen 1, ..., n beide Male die gleiche Farbe erhält.)

Aufgabe 10

Man zeige: Jede positive ganze Zahl m läßt sich für jede gegebene positive ganze Zahl k eindeutig in der Form

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_i}{i} \tag{8}$$

schreiben, wobei $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen sind und

$a_k > a_{k-1} > \ldots > a_i \geq i > 0$

gilt.

Aufgabe 11

Man charakterisiere alle Dreiecke, in denen der Umkreisradius r doppelt so groß wie der Inkreisradius ϱ ist.

Aufgabe 12

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen und

$$s := \frac{1}{n-1} \cdot (x_1 + \ldots + x_n),$$

wobei $s \geq x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten möge.

Man beweise:

$$(s-x_1) \cdot (s-x_2) \ldots (s-x_n) \leq \frac{x_1}{n-1} \cdots \frac{x_n}{n-1}. \tag{9}$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 13

Es seien n und k natürliche Zahlen mit $0 \leq k \leq n$. Man zeige:

$$\left(2 \cdot \frac{n-k+1}{k+1}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}} \tag{10}$$

(Wir setzen $0^0 := 1$)

Aufgabe 14

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen. Man ermittle alle Werte x, für die

$$\cos a_1 \cdot x = \cos a_2 \cdot x = \ldots = \cos a_n \cdot x = 1$$

gilt.

Aufgabe 15

Welche der Zahlen $\sin 10^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 70^\circ$, $\sin 80^\circ$, $\sin 90^\circ$ sind rational?

Lösungen

Aufgabe 1

(Nach J. Lattermann, Dresden)

Angenommen, es gibt eine sechsstellige Zahl mit den Ziffern x_i $(i=1,2,\ldots,6)$, die die geforderte Eigenschaft hat. O. B. d. A. sei

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_6. \qquad (10)$$

Wir erhalten

$$6\,x_1 \geqq S = P, \qquad (11)$$

wobei S die Quersumme und P das Querprodukt bezeichnet. Da die erste Ziffer von 0 verschieden ist, gilt $0 < S = P$, also ist keine Ziffer gleich 0. Daher gilt $x_i \geqq 1$, $i = 1, \ldots, 6$. Angenommen, es gilt $x_4 \geqq 2$. Mit (11) und (10) erhalten wir

$6\,x_1 \geqq 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 16$, also $x_1 \geqq 3$. Mit (11) und (10) folgt

$6\,x_1 \geqq 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 24$, also $x_1 \geqq 4$. Analog folgt:

$6\,x_1 \geqq 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 32$, $\quad x_1 \geqq 6$,

$6\,x_1 \geqq 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 48$, $\quad x_1 \geqq 8$ und

$6\,x_1 \geqq 8\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 64$, also $x_1 > 10$. Dies ist wegen $x_1 \leqq 9$ ein Widerspruch. Damit ist wegen (10) $x_4 = x_5 = x_6 = 1$. Aus (10) und (11) ergibt sich

$$3x_1 + 3 \geqq x_1 + x_2 + x_3 + 3 = x_1\,x_2\,x_3. \qquad (12)$$

Angenommen, es gilt $x_3 \geqq 3$. Wegen (10) und (12) ist $3x_1 + 3 \geqq 3^3 = 27$, $x_1 \geqq 8$ und weiter $3x_1 + 3 \geqq 3^2\cdot 8 = 72$, $x_1 \geqq 23$. Dies ist wegen $x_1 \leqq 9$ ein Widerspruch. Also gilt $x_3 \leqq 2$. Es sei $x_3 = 2$. Wir erhalten aus der Voraussetzung der Aufgabe, die Bedingung $11 = (2x_1-1)(2x_2-1)$. Wegen $x_1 \geqq x_2$ folgt $2x_1-1 = 11$ und $2x_2-1 = 1$, also $x_2 = 1$ im Widerspruch zu $x_2 \geqq x_3 \geqq 2$. Also gilt $x_3 = 1$. Dann ist $5 = (x_1-1)(x_2-1)$, also $x_1-1 = 5$ und $x_2-1 = 1$. Wenn also eine sechsstellige Zahl die geforderte Eigenschaft besitzt, besteht sie aus den Ziffern 6, 2, 1, 1, 1, 1. Wegen $6 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ hat eine solche Zahl tatsächlich die geforderte Eigenschaft. Somit sind genau alle $\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!} = 30$ Permutationen der Zahl 111126 Lösung.

Wir geben nach V. Leutheuser (Sonneberg) und D. Spliering (Dresden) eine zweite Lösungsvariante an. Offenbar gilt $6\cdot 1 = 6 \leqq S = P \leqq 54 = 9\cdot 6$. (Die Abschätzung läßt sich verschärfen. Sind alle Ziffern größer gleich 2, so ist $P \geqq 64$, d. h., es gibt keine Lösung. Also

ist mindestens eine Ziffer gleich 1. Also ist $S = P \leqq 5 \cdot 9 + 1 = 46$.)
Für jede natürliche Zahl n mit $6 \leqq n \leqq 54$ betrachten wir alle möglichen Zerlegungen in sechs Faktoren. Ist die Summe dieser sechs Faktoren gleich n, so erhalten wir eine Lösung. Die Primzahlen zwischen 6 und 54 brauchen wegen $p = p \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq p + 5$ nicht betrachtet werden. Ferner entfallen alle ungeraden Zahlen, da $S = P$ gerade sein muß. Letztlich entfallen noch die Vielfachen von Primzahlen größer als 10. Die verbleibenden Möglichkeiten n = 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 50, 54 überprüft man leicht. (Man kann auch beweisen, daß bei $P \leqq 54$ die Ungleichung $S \leqq 19$ folgt.)

Eine weitere Lösungsmöglichkeit ergibt sich durch Fallunterscheidung für $i = 0, \ldots, 6$. Dabei enthält die gesuchte Zahl genau i mal die Ziffer 1.

Aufgabe 2

Die folgende Lösung stammt von J. Franke (Gera). Für A = 1 setze $k_n := 10^n - 1$, $n \geqq 1$. Dann ist $[\lg k_n] = n - 1$, $a_{k_n} = 1 - 10^{-n}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n} = A$.

Für $A \in [0, 1; 1]$ setze $k_n := [10^n \cdot A]$. Dann ist $10^{n-1} \leqq k_n < 10^n$ und mit $[\lg k_n] + 1 = n$ ist $a_{k_n} = 10^{-n} \cdot [10^n \cdot A]$. Folglich ist $|a_{k_n} - A| = 10^{-n} \cdot |[10^n \cdot A] - 10^n \cdot A| \leqq 10^{-n}$.

und wiederum $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n} = A$. Damit ist die Behauptung für alle $A \in [0, 1; 1]$ bewiesen.

Den gleichen Sachverhalt stellt J. Galley (Berlin) wie folgt dar:
Jede reelle Zahl $A = 0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ im Intervall $[0, 1; 1]$ ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen:

$$0, x_1;\ 0, x_1 x_2;\ 0, x_1 x_2 x_3;\ \ldots,$$

wobei die x_i Ziffern der Dezimaldarstellung von A sind.
Das ist eine Teilfolge von $\{a_n\}$, da

$$a_{x_1 x_2 \ldots x_n} = 0, x_1 x_2 \ldots x_n$$

ist. Für A = 1 wähle man die obige Teilfolge.

F. Schneevoigt (Salzwedel) wählt für $0{,}5 \leqq A \leqq 1$ bzw. $0{,}1 \leqq A < 0{,}5$ die Teilfolge $a_{[10^n \cdot A] - 1}$ bzw. $a_{[10^n \cdot A] + 1}$ aus.

Aufgabe 3

Falls n einen Primfaktor der Form 4k-1 enthält, also mit positiven natürlichen Zahlen k und m gilt: $n = (4k-1)\,m$, so erfüllen $x := mk$ und $y := m\cdot k\cdot(4k-1)$ die Bedingung (1), da

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{mk} + \frac{1}{(4k-1)mk} = \frac{4}{m(4k-1)} = \frac{4}{n}$$

ist.

Für die umgekehrte Richtung führen wir drei Beweise an. Die ersten beiden Beweise sind indirekt. Die Zahlen x, y, n mögen (1) erfüllen.

a) (Nach R. Hortig, Cottbus)

Angenommen, n enthält keinen Primfaktor der Form 4k - 1. Dann sind sämtliche Primfaktoren von n und damit auch n kongruent +1 modulo 4, also für eine gewisse natürliche Zahl a ist $n = 4a + 1$. Wir setzen $s := x - a$, $t := y - a$ und erhalten

$$(4a+1)\cdot x = y\cdot(4s-1)$$

$$(4a+1)\cdot y = x\cdot(4t-1)$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$(4a+1)^2 = (4s-1)(4t-1) \tag{13}$$

Die Zahl $4t - 1$ enthält mindestens einen Primteiler von der Form $4l - 1$, da sich sonst der Widerspruch $4t - 1 \equiv +1 \bmod 4$ ergibt. Nach (13) ist dieser Primteiler auch in $n = 4a + 1$ ein Faktor, was unserer Annahme widerspricht.

b) (Nach P. Zienicke, Berlin)

Die Annahme ist wie in Teil a). Offenbar ist $x = y$ unmöglich. O. B. d. A. sei $x < y$. Aus (1) ergibt sich

$$x = \frac{ny}{4y-n},\quad y = \frac{n\cdot x}{4x-n}. \tag{14}$$

Speziell ist $4x - n > 0$, also $x > \frac{n}{4}$. Falls $x \geqq \frac{n}{2}$ ist, so erhalten wir aus $2x \geqq n$, $4x^2 \geqq 2\cdot n\cdot x$, $4x^2 - nx \geqq nx$, $x\cdot(4x-n) \geqq n\cdot x$, $x \geqq \frac{nx}{4x-n} = y$ einen Widerspruch. Also ist

$$\frac{n}{4} < x < \frac{n}{2}.$$

Nach unserer Annahme ist $n \equiv 1 \ (4)$ und daher für die natürliche Zahl x

$$\frac{n+3}{4} \leqq x \leqq \frac{n-1}{2}.$$

Mit $a := \frac{n+3}{4} - x$ ist $0 \leqq a \leqq \frac{n-5}{4}$ und

$$y = \frac{n}{4}\cdot\frac{n+4a+3}{4a+3}.$$

Mit $b := 4a + 3$ ist $3 \leq b \leq n-2$ und

$$4yb = n\cdot(n+b) \tag{15}$$

Wegen $b \equiv -1$ (4) enthält b nur ungerade Primfaktoren, von denen mindestens einer, etwa k_o, kongruent -1 mod 4 ist. Mit der natürlichen Zahl c sei $b = k_o\cdot c$. Da n nur Primfaktoren der Form $4l+1$ enthält, gilt $k_o \nmid n$, also $n = k_o\cdot n_o + k_1$, $0 < k_1 < k_o$.

Daraus ergibt sich $n\cdot(n+b) \equiv k_1^2 \bmod k_o$. Wegen $k_o \nmid k_1$ ist $n(n+b) \not\equiv 0 \bmod k_o$.

Das widerspricht (15).

c) (Nach F. Schneevoigt, Salzwedel)

Da für den Fall $n \equiv -1$ mod 4 die Behauptung offensichtlich ist, sei $n \equiv +1$ mod 4. Dann ist $4y - n \equiv -1$ mod 4, also $4y - n \neq 1$. Aus (14) ergibt sich $4y - n \equiv 0 \bmod n\cdot y$, also $4y \equiv n \bmod y$, also $n \equiv 0 \bmod y$ und $n = s\cdot y$ mit einer natürlichen Zahl s. Die Zahl $4y - n$ muß mindestens einen Primfaktor q der Form $q = 4\cdot l - 1$ enthalten, da sonst $4y - n \not\equiv -1$m od 4 ist. Wegen $4y - n \equiv 0 \bmod n\cdot y$ ist $q \mid n\cdot y$. Für $q \mid n$ sind wir fertig und für $q \mid y$ gilt auch $q \mid n$.

Aufgabe 4

Wir geben mehrere Lösungen mit Verschärfungen an.

a) (Nach F. Schneevoigt, Salzwedel)

Für alle $x \in N$ gilt die Ungleichung

$$\cos(2x+1) < 1, \text{ da } x \neq (2h+1)\frac{\pi}{4} - 1 \text{ mit } h \in G.$$

Wir formen äquivalent um:

$\cos 1 + \cos(2x+1) < 1 + \cos 1$, $\cos x \cos(x+1) < \frac{1}{2}(\cos 1+1)$

$-2 \cos 1 \cos x \cos(x+1) > -\cos 1 (\cos 1+1)$

$$\begin{aligned}
1-\cos 1 < 1 + \cos^2 1 - 2 \cos x \cos 1 \cos(x+1) &= \\
&= 1+\cos^2 1-2 \cos^2 x \cos^2 1+2 \sin 1 \sin x \cos 1 \cos x \\
&= \sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x \cos^2 1+\cos^2 1-\cos^2 x \cos^2 1+2 \sin 1 \sin x \cos 1 \\
&\quad \cos x \\
&= \sin^2 x+\sin^2 1 \cos^2 x+\sin^2 x \cos^2 1+2 \sin 1 \cos x \sin x \cos 1 \\
&= \sin^2 x+\sin^2(x+1).
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
|\sin x| + |\sin(x+1)| &= \sqrt{\sin^2 x+2|\sin x \sin(x+1)| + \sin^2(x+1)} \\
&\geq \sqrt{\sin^2 x+\sin^2(x+1)} > \sqrt{1-\cos 1}
\end{aligned}$$

In $S = |\sin n| + |\sin(n+1)| + \ldots + |\sin 2n|$ existieren genau $\left[\frac{n+1}{2}\right] \geq \frac{n}{2}$ Summanden der Form $|\sin x| + |\sin(x+1)|$. Damit gilt $S > \frac{n}{2}\sqrt{1-\cos 1}$.

Weiter ist $A_n > \frac{S}{2n} > \frac{1}{4}\sqrt{1-\cos 1} \approx 0{,}1695$, womit die Ungleichung bewiesen ist.

b) (Nach J. Lattermann, Dresden)
Zunächst zeigen wir, daß $f(x) = |\sin(x-\frac{1}{2})| + |\sin(x+\frac{1}{2})| \geq \sin 1$ gilt. Wir unterscheiden folgende Fälle (k sei eine ganze Zahl)

1. $\frac{1}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi - \frac{1}{2}$,
2. $2k\pi + \pi - \frac{1}{2} \leq x \leq 2k\pi + \pi + \frac{1}{2}$,
3. $2k\pi + \pi + \frac{1}{2} \leq x \leq 2k\pi + 2\pi - \frac{1}{2}$,
4. $2k\pi + 2\pi - \frac{1}{2} \leq x \leq 2k\pi + 2\pi + \frac{1}{2}$.

Wir erhalten:

1. $f(x) = \sin(x-\frac{1}{2}) + \sin(x+\frac{1}{2}) = 2\cos\frac{1}{2}\sin x$,
2. $f(x) = \sin(x-\frac{1}{2}) - \sin(x+\frac{1}{2}) = -2\sin\frac{1}{2}\cos x$,
3. $f(x) = -\sin(x-\frac{1}{2}) - \sin(x+\frac{1}{2}) = -2\cos\frac{1}{2}\sin x$,
4. $f(x) = -\sin(x-\frac{1}{2}) + \sin(x+\frac{1}{2}) = 2\sin\frac{1}{2}\cos x$

und weiter

1. $f(x) \geq 2\cos\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} = 2\cos\frac{1}{2}\sin(\pi-\frac{1}{2}) = \sin 1$,
2. $f(x) \geq -2\sin\frac{1}{2}\cos(\pi+\frac{1}{2}) = \sin 1$,
3. $f(x) \geq -2\cos\frac{1}{2}\sin(2\pi-\frac{1}{2}) = \sin 1$,
4. $f(x) \geq 2\sin\frac{1}{2}\cos(2\pi-\frac{1}{2}) = \sin 1$, womit $f(x) \geq \sin 1$

gezeigt ist.
Nun ist

$$A_n > \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{|\sin(n+2k-2)| + |\sin(n+2k-1)|}{n+2k-1} \geq (\sin 1)\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{1}{n+2k-1} = B$$

($x=n+2k-2+\frac{1}{2}$!). Da $g(x) = \frac{1}{n-1+2x}$ für $x > 0$ streng monoton fallend ist, gilt weiter

$$B > \int_1^{\left[\frac{n+2}{2}\right]+1} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln |n-1+2x|\Big|_1^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{n+1+2\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n+1} \geq \frac{1}{2}\ln\frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2}\ln(2-\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Daher gilt $A_n > \frac{1}{2}\sin 1 \ln\frac{3}{2} \approx 0{,}17059$.

c) (Nach K. Bohnke und R. Hortig, beide Cottbus)

Analog zum Beweis unter b) wird zunächst

$|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| \geqq 2 \sin 1$ gezeigt. Weiter ist

$$3 A_n \geqq \left(\frac{|\sin n|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} + \frac{|\sin(n+2)|}{n+2}\right)$$

$$+ \left(\frac{|\sin(n+1)|}{n+1} + \frac{|\sin(n+2)|}{n+2} + \frac{|\sin(n+3)|}{n+3}\right)$$

$$+ \dots$$

$$+ \left(\frac{|\sin(2n-2)|}{2n-2} + \frac{|\sin(2n-1)|}{2n-1} + \frac{|\sin 2n|}{2n}\right)$$

$$> \frac{1}{n+2}\left(|\sin n| + |\sin(n+1)| + |\sin(n+2)| \right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2n}\left(|\sin(2n-2)| + |\sin(2n-1)| + |\sin 2n| \right)$$

$$\geqq 2 \sin 1 \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) > 2 \sin 1 \int_{n+2}^{2n+1} \frac{dx}{x} = 2 \sin 1 \ln \frac{2n+1}{n+2}$$

$$= 2 \sin 1 \ln\left(2 - \frac{3}{n+2}\right) \geqq 2 \sin 1 \ln \frac{3}{2} \text{ für } n \geqq 4.$$

Damit gilt für alle $n \geqq 4$

$$A_n > 2 \sin 1 \ln \frac{3}{2} \approx 0{,}68237.$$

Für $n = 1$ ist $A_1 = |\sin 1| + \frac{1}{2} |\sin 2| \approx 1{,}296 > \frac{1}{6}$. Ferner gilt

$$A_2 = \frac{|\sin 2|}{2} + \frac{|\sin 3|}{3} + \frac{|\sin 4|}{4} \approx 0{,}6909 \text{ und}$$

$$A_3 = \frac{|\sin 3|}{3} + \frac{|\sin 4|}{4} + \frac{|\sin 5|}{5} + \frac{\sin 6}{6} \approx 0{,}47459 \text{ und die}$$

Ungleichung (2) ist bewiesen.

d) (Nach J. Pietschmann, Magdeburg, und J. Frank, Gera)

Wegen

$|\sin x| \geqq \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ist

$$A_n \geqq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{\cos 2k}{k}\right). \quad \text{Nun gilt} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\, n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}.$$

und

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\cos 2k}{k} < \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \cos 2k = \frac{1}{n} \frac{\sin(4n+1) - \sin(2n-1)}{2 \sin 1} < \frac{1}{n \sin 1}.$$

Daher gilt $A_n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n \sin 1}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{\sin 1}\right)$

$$> \frac{1}{4} - \frac{1}{10n} > \frac{1}{6} \text{ für } n \geqq 2.$$

e) Nach D. Liebscher, Ilmenau)

Es ist $A_n > \sum_{k=n}^{2n} \frac{|\sin k|}{2n} = \frac{1}{4n} \left[\sin n + \sin 2n + \sum_{k=n}^{2n-1} (|\sin k + \sin(k+1)|)\right]$

$$> \frac{1}{4n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin 1 = \frac{\sin 1}{4} \approx 0{,}21037 \text{ (vgl. Lösung b)}$$

f) (Nach M. Ranzinger, Berlin)

Sei $n = 2m + 1$. Dann ist

$$A_{2m+1} = \sum_{k=m}^{2m} \left(\frac{|\sin(2k+1)|}{2k+1} + \frac{|\sin(2k+2)|}{2k+2}\right) > \sin 1 \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{2k+2}$$

$$= \sin 1 \, \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{2k+2} \, (m+1) \geqq \sin 1 \, \frac{m+1}{\sum\limits_{k=m}^{2m} 2k+2} \, (m+1)$$

$$= \sin 1 \, \frac{(m+1)^2}{(m+1)(3m+2)} > \frac{1}{3} \sin 1 \approx 0{,}28 \text{ nach der}$$

Ungleichung vom harmonischen und arithmetischen Mittel. Für gerade m verläuft der Nachweis durch Vernachlässigung von $\frac{|\sin 4m|}{4m}$ analog.

Aufgabe 5

Der folgende Lösungsgedanke wurde von V. Leutheuser (Sonneberg), F. Schneevoigt (Salzwedel), J. Lattermann (Dresden) und V. Liebscher (Ilmenau) angegeben.

Wir setzen folgende Beziehungen im Dreieck ABC als bekannt voraus:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}, \tag{16}$$

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \quad s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},$$
$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}, \tag{17}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \tag{18}$$

Wir erhalten aus (17)

$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2 = \frac{4}{9}(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$. Damit ist (3) äquivalent mit

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8 r^2. \tag{19}$$

Mit (16) folgt $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$ und mit (18) die zu (3) äquivalente Ungleichung

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma > 0. \tag{20}$$

(20) ist genau dann erfüllt, wenn das Dreieck ABC spitzwinklig ist. Damit gilt (3) genau dann, wenn $\triangle$ ABC spitzwinklig ist.

M. Ranzinger (Berlin) gibt folgenden Weg an: Die Ungleichung (3) wird mit (17) und

$$r = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

äquivalent umgeformt in

$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2) > 0$ und weiter mit dem Kosinussatz in (20) überführt.

Der Zugang über analytische Geometrie ist ebenfalls möglich.

Aufgabe 6

Der folgende Lösungsgedanke ist von K. Behnke (Cottbus).

Angenommen, es gibt Paare (x, y) ganzer Zahlen mit obiger Eigenschaft. (4) ist äquivalent zu $(x^2+y^2)(x+y-4) = 4(x+y)^2 + 8$. Da $x^2 + y^2 \geqq 0$ und $4(x+y)^2 + 8 \geqq 8$ ist, folgt $x + y > 4$. Angenommen, es gilt $x + y > 13$. Dann ist

$(x^2+y^2)(x+y-4) > 8(x^2+y^2) + x^2 + y^2 \geqq 4(x+y)^2 + x^2 + y^2 > 4(x+y)^2 + 8$

wegen $2(x^2+y^2) \geqq (x+y)^2 > 16$. Das liefert einen Widerspruch. Demnach gilt $4 < x + y \leqq 12$. Wir erhalten die Fälle

1. $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 108$ keine Lösung
2. $x + y = 6$, $x^2 + y^2 = 76$ keine Lösung
3. $x + y = 7$, $x^2 + y^2 = 68$ keine Lösung
4. $x + y = 8$, $x^2 + y^2 = 66$ keine Lösung
5. $x + y = 9$, $5(x^2+y^2) = 332$ $\quad 5 \nmid 332$
6. $x + y = 10$, $x^2 + y^2 = 68$ (2,8), (8,2)
7. $x + y = 11$, $7(x^2+y^2) = 492$ $\quad 7 \nmid 492$
8. $x + y = 12$, $x^2 + y^2 = 73$ keine Lösung.

Tatsächlich erfüllen die Paare (2,8) und (8,2) die Gleichung (4), denn es ist $2^3 + 2^2 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 + 8^3 = 8(2^2+2\cdot 8+8^2+1)$.

Die Schülerin T. Mittag (Karl-Marx-Stadt) substituierte $x^2 + y^2 = t$ und $x + y = s$. Da in der entstehenden Gleichung $t = 4s + 16 + \frac{72}{s-4}$ t ganzzahlig sein muß, ist s-4 ein Teiler von 72. Die 24 Fälle wurden durchgemustert.

M. Hübner (Leipzig) setzte $x - 2 = a$ und $y - 2 = b$ und erhielt

$(a^2+b^2-24)(a+b) = 72.$

Eine Teileranalyse folgte.

Die Substitution $x + y = t$, $xy = s$ führt auf

$s = \frac{t^2}{2} - 2t - 8 - \frac{36}{t-4}$ und damit auf einen analogen Lösungsweg.

Aufgabe 7

Mit $H(x)$ bzw. M bezeichnen wir die gesuchte Anzahl von Tripeln bzw. die Maximalzahl solcher Tripel. Sei $A(x)$ bzw. $B(x)$ die Anzahl derjenigen Tripel, für die

$$1 \leqq a \leqq b \leqq x \text{ und } x \leqq c \leqq k \text{ bzw.}$$

für die

$$1 \leqq a \leqq x \text{ und } x < b \leqq c \leqq k$$

ist. Offenbar ist $H(x) = A(x) + B(x)$.

Es gibt $\binom{x+2-1}{2} = \binom{x+1}{2}$ Möglichkeiten, a und b so zu wählen, daß $1 \leqq a \leqq b \leqq x$ ist. Ferner gibt es $\binom{k-x+1}{1}$ Möglichkeiten, c so zu wählen, daß $x \leqq c \leqq k$ ist.

Folglich erhält man

$$A(x) = \frac{x\cdot(x+1)}{2} \cdot (k - x + 1).$$

Analog ergibt sich

$$B(x) = x \cdot \frac{(k-x)(k-x+1)}{2}.$$

Also ist

$$H(x) = A(x) + B(x) = \frac{x}{2} \cdot (k-x+1)(k+1),$$

$$H(x) = \frac{k+1}{2} \left(\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{k+1}{2}\right)^2\right).$$

Für ungerade k nimmt $H(x)$ das Maximum nur für $x = \frac{k+1}{2}$ an und es ist $M = \left(\frac{k+1}{2}\right)^3$.

Für gerade k nimmt $H(x)$ das Maximum nur für $x = \frac{k}{2}$ oder $x = \frac{k+2}{2}$ an und es gilt $M = \frac{1}{8} \cdot k \cdot (k+1)(k+2)$.

Aufgabe 8

Wir zeigen zunächst, daß

$(\ast)$ $a_1 a_2 \ldots a_n \geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 2^n - 2n$ gilt:

Für $n = 1$ ist $a_1 \geqq a_1 + 2^1 - 2 = a_1$ eine wahre Aussage.

Die Ungleichung (7) gelte für n. Dann ist

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_{n+1} &\geqq 2a_1 a_2 \ldots a_n = a_1 a_2 \ldots a_n + a_1 a_2 \ldots a_n \\ &\geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 2^n - 2n + a_2 a_3 \ldots a_{n+1} \\ &\geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 2^n - 2n + 2^{n-1} a_{n+1} \\ &\geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 2^n - 2n + (2^{n-1}-1)\, a_{n+1} + a_{n+1} \\ &\geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + 2^n - 2n + (2^{n-1}-1)\, 2 \\ &\geqq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} + 2^{n+1} - 2(n+1). \end{aligned}$$

Damit ist $(\ast)$ bewiesen.

Für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2$ ist

$$2^n \geqq 2n + c(n), \text{ also } c(n) \leqq 2^n - 2n.$$

Somit gilt: $c(n) = 2^n - 2n$ ist die gesuchte Zahl.

Aufgabe 9

Es sei H_n die gesuchte Anzahl von Färbungen. Offenbar gilt für $n \leqq t$

$$H_n = r \cdot (r-1) \quad \ldots \quad (r-n+1) = \frac{r!}{(r-n)}, \tag{21}$$

denn 1 kann auf r Arten gefärbt sein, für die Färbung von 2, 3, ..., n gibt es dann noch (r-1), (r-2),..., (r-n+1) Möglichkeiten.

Jeder Färbung der Zahlen 1,..., n+1 ($n \geqq t$) können wir genau eine Färbung der Zahlen 1,..., n zuordnen, indem wir die Zahl n+1 einfach unberücksichtigt lassen.

Offenbar ist bei dieser Zuordnung jede Färbung der Zahlen 1,..., n Bild von genau (r-t+1) verschiedenen Färbungen der Zahlen 1,..., n+1, denn die Zahl n+1 kann hierbei auf r - t + 1 verschiedene Arten gefärbt sein (es sind nur die Farben, mit denen n, n-1, ...,n-t+2 gefärbt sind, unzulässig). Hieraus folgt

$$H_{n+1} = (r-t+1)\ H_n \quad (n \geqq t) \tag{22}$$

Aus (21) und (22) erhalten wir für $n \geqq t$

$$H_n = (r-t+1)^{n-t} \cdot H_t = (r-t+1)^{n-t} \cdot \frac{r!}{(r-t)!}.$$

Aufgabe 10

Im folgenden seien m und k immer positive ganze Zahlen.

Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion über m, daß für jedes m und jedes k eine Darstellung in der angegebenen Form existiert.

Ist m = 1, so gilt $m = \binom{k}{k}$, d. h., wir können $a_k := i := k$ wählen.

Wir setzen voraus, daß für jedes k alle Zahlen kleiner als m in der angegebenen Weise zerlegbar sind, und zeigen, daß dies auch für m gilt.

Die Folge $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \ldots$ ist offenbar streng monoton wachsend.

Sei a_k die größte natürliche Zahl, für die $\binom{a_k}{k} \leqq m$ ist.

Gilt k = 1, so ist $a_1 = m = \binom{a_1}{1}$, und wir sind fertig. Im Fall

$k > 1$ setzen wir $m' := m - \binom{k}{k}$. Ist $m' = 0$, so sind wir ebenfalls fertig. Gilt $0 < m' < m$, so können wir die Induktionsvoraussetzung auf m' anwenden und erhalten

$$m' = m - \binom{a_k}{k} = \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_i}{i} \text{ mit } a_{k-1} > \ldots > a_i \geqq i > 0$$

und

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_i}{i}.$$

Wir haben nur noch $a_k > a_{k-1}$ nachzuweisen.
Offenbar ist $m \geqq \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1}$. Wäre $a_k \leqq a_{k-1}$,

so würde $m \geqq \binom{a_k}{k} + \binom{a_k}{k-1} = \binom{a_k+1}{k}$ im Widerspruch zur maximalen Wahl von a_k gelten. Damit haben wir gezeigt, daß m in der angegebenen Weise darstellbar ist. Angenommen, es gäbe für gewisses m und gewisses k zwei verschiedene Darstellungen von m.

$$m = \binom{a_k}{k} + \ldots + \binom{a_i}{i} = \binom{b_k}{k} + \ldots + \binom{b_j}{j} \quad \begin{array}{l} a_k > \ldots > a_i \geqq i > 0, \\ b_k > \ldots > b_j \geqq j > 0. \end{array}$$

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß m die kleinste Zahl ist, für die zwei verschiedene Darstellungen existieren.
Offenbar ist $m \geqq 1$.
Wäre $a_k = b_k$, so würden auch für $m - \binom{a_k}{k} < m$ zwei verschiedene Darstellungen existieren im Widerspruch zur minimalen Wahl von m.
Sei also o. B. d. A. $a_k > b_k$. Dann gilt:

$$m \geqq \binom{a_k}{k} \geqq \binom{b_k-1}{k} \tag{23}$$

und

$$m < \binom{b_k}{k} + \binom{b_k-1}{k-1} + \ldots + \binom{b_k-(k-j)}{j} + \binom{b_k-(k-j)-1}{j-1} + \ldots + \binom{b_k-k}{0}, \tag{24}$$

denn es ist

$$b_k - 1 \geqq b_{k-1},\ b_k-2 \geqq b_{k-2}$$

usw. sowie $j > 0$.

Aus (23) und (24) folgt

$$\binom{b_k+1}{k} < \binom{b_k}{k} + \binom{b_k-1}{k-1} + \ldots + \binom{b_k-k}{0}. \qquad (25)$$

Es gilt jedoch

$$\binom{b_k-k}{0} + \binom{b_k-k+1}{1} = \binom{b_k-k+2}{1},$$

$$\binom{b_k-k+2}{1} + \binom{b_k-k+2}{2} = \binom{b_k-k+3}{2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{b_k}{k-1} + \binom{b_k}{k} = \binom{b_k+1}{k}, \text{ d. h.}$$

$$\binom{b_k-k}{0} + \ldots + \binom{b_k-1}{k-1} + \binom{b_k}{k} = \binom{b_k+1}{k},$$ was im Widerspruch zu (25) steht. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung bewiesen.

Offenbar gilt in allen gleichseitigen Dreiecken $r = 2\varrho$. Angenommen, es gäbe ein nichtgleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, für das $r = 2\varrho$ ist. Sei o. B. d. A. $a \neq b$. Bekanntlich gilt für den Flächeninhalt der Dreiecke

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \varrho \cdot s = \frac{abc}{4r}, \text{ wobei } s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist. (Vgl. z. B. Tafelwerk.) Hieraus folgt

$$r = \frac{abc}{4A} \text{ und } 2\varrho = \frac{2A}{s}.$$

Im folgenden werden wir beweisen, daß $r > 2\varrho$ gilt, so daß wir die Annahme zum Widerspruch führen. Es ist

$r > 2\varrho$ genau dann, wenn $\frac{abc}{4A} > \frac{2A}{s}$ bzw.

$\frac{abc}{8} > (s-a)(s-b)(s-c)$ gilt.

Offenbar ist

$$0 < s-a = \frac{b+c-a}{2},$$

$$0 < s-b = \frac{a+c-b}{2},$$

$$0 < s-c = \frac{a+b-c}{2} \text{ und}$$

$$(s-a)(s-b) = \frac{1}{4}(c^2-(a-b)^2) < \frac{1}{4}c^2$$

$$(s-a)(s-c) = \frac{1}{4}(b^2-(a-c)^2) \leq \frac{1}{4}b^2$$

$$(s-b)(s-c) = \frac{1}{4}(a^2-(b-c)^2) \leq \frac{1}{4}a^2.$$

Multiplizieren wir die linken und rechten Seiten der letzten drei Ungleichungen miteinander, erhalten wir

$$((s-a)(s-b)(s-c))^2 < \frac{1}{64}\ a^2b^2c^2 \text{ bzw.}$$

$(s-a)(s-b)(s-c) < \frac{abc}{8}$, d. h., es gilt wirklich

$$r > 2\varrho .$$

Aufgabe 12

Nach der Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel gilt

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[n-1]{(s-x_1)\ \dots\ (s-x_{i-1})(s-x_{i+1})\ \dots\ (s-x_n)} \leq \\ &\leq \frac{(n-1)s-(x_1+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_n)}{n-1} \\ &= \frac{x_i}{n-1}\ (i=1,\dots,n) \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn

$$s-x_1 = \dots = s-x_{i-1} = s-x_{i+1} = \dots = s-x_n, \text{ d. h.}$$

$$x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n \quad (27)$$

ist.

Wenn wir bei den n Ungleichungen (26) die linken sowie die rechten Seiten miteinander multiplizieren, erhalten wir

$$\sqrt[n-1]{(s-x_1)^{n-1}\ \dots\ (s-x_n)^{n-1}} \leq \frac{x_1}{n-1}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{x_n}{n-1}.$$

Da die Zahlen $x_1 \dots x_n$ alle positiv sein sollen, kann Gleichheit nur dann eintreten, wenn in allen n Ungleichungen von (26) das Gleichheitszeichen steht, d. h. wegen (27) muß $x_1 = \dots = x_n$ gelten. Daß in diesem Fall wirklich Gleichheit gilt, ist offensichtlich.

Aufgabe 13

Für $k = 0$ sind die Ungleichungen richtig, sei also $k \geqq 1$. Wir beweisen zunächst die erste Ungleichung. Es gilt

$$n(n-1) \quad \dots \quad (n-k+1) \;\geqq\; (n-k+1)^k,$$

und wegen der Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel ist

$$\sqrt[k]{1 \; \dots \; k} \leq \frac{1+\dots+k}{k}, \text{ also gilt}$$

$$\binom{k}{k} = \frac{n\cdot(n-1) \;\dots\; (n-k+1)}{1\cdot 2 \;\dots\; k} \geq \frac{(n-k+1)^k}{\left(\frac{k+1}{2}\right)^k} = \left(2\cdot\frac{n-k+1}{k+1}\right)^k.$$

Die zweite Ungleichung beweisen wir durch vollständige Induktion über $n = k, k+1, \dots$. Für $n = k$ ist diese richtig.

Wir setzen voraus, daß $\binom{n}{k} \leq \dfrac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$ schon bewiesen sei.

Nach der Ungleichung über das arithmetische und geometrische Mittel gilt für $n > k$

$$\sqrt[n]{\underbrace{1 \;\dots\; 1}_{k} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-k}\right)\cdot\;\dots\;\cdot\left(1+\frac{1}{n-k}\right)}_{n-k}} \leq \frac{n+1}{n}, \text{ also}$$

$$\left(\frac{n-k+1}{n-k}\right)^{n-k} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ bzw.}$$

$$\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}} \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1-k)^{n-k}}.$$

(Die letzte Ungleichung ist auch für $n = k$ richtig.)

Daher ist

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\cdot\binom{n}{k} \leq \frac{n+1}{n-k+1} \quad \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

$$\leq \frac{n+1}{n-k+1}\cdot\frac{(n+1)^n}{k^k(n+1-k)^{n+1-k}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{k^k(n+1-k)^{n+1-k}},$$

womit der Induktionsschritt durchgeführt ist.

Aufgabe 14

Sei $g := (a_1,\dots,a_n)$. (Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, wählen wir den größten gemeinsamen Teiler immer positiv.) Wir setzen

$$b_i := \frac{a_i}{g} \quad (i=1,\ldots,n).$$

Dann ist

$$(b_1,\ldots,b_n) = 1. \tag{28}$$

Aus $\cos b_1gx = \ldots = \cos b_ngx = 1$ folgt zunächst

$$b_igx = 2\,c_i\pi \quad (c_i \in G). \tag{29}$$

Hieraus folgt

$$\frac{gx}{\pi} = \frac{2\,c_1}{b_1} = \ldots = \frac{2c_n}{b_n}. \tag{30}$$

Wir setzen $\frac{p}{q} := \frac{2c_1}{b_1} = \ldots = \frac{2c_n}{b_n}$, wobei $(p,q) = 1$, $p, q \in G$ und $q > 0$ sei. (31)

Es gilt $p\,b_i = 2c_iq$ $(i = 1,\ldots,n)$, wegen $(p,q) = 1$ ist also b_i durch q teilbar $(i=1,\ldots,n)$.

Aus (28) folgt $q = 1$ und damit

$$p\,b_i = 2c_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Für ungerades p wäre b_i gerade $(i=1,\ldots,n)$, was (28) widerspricht, also gilt $p = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Aus (30) und (31) erhalten wir $\frac{gx}{\pi} = 2k$ bzw.

$$x = \frac{2k\pi}{g}.$$

Offenbar genügen auch diese x der Gleichung $\cos a_1x = \ldots = \cos a_nx = 1$, so daß die Lösungsmenge durch diejenigen x mit $x = \frac{2k\pi}{g}$ $(k \in \mathbb{Z})$ gegeben ist.

<u>Aufgabe 15</u>

Offenbar sind $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 90^\circ = 1$ rational, während $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ irrational ist.

Wir zeigen, daß auch alle anderen Werte irrational sind. Bekanntlich gilt $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Für $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ gilt $\sin 3\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Wäre $\sin\alpha$ für einen dieser Werte von α rational, so müßte es auch $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sein, was nicht der Fall ist.

Für $\alpha = 10^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ gilt $\sin 3\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

Angenommen, $\sin\alpha$ wäre für einen dieser Werte rational. Dann können wir $\sin\alpha = \frac{p}{q}$ mit p, q ganz und $(p,q) = 1$ setzen. Es ist nun

$$\pm \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{p}{q} - 4\left(\frac{p}{q}\right)^3 \text{ bzw.}$$

$$\pm q^3 = 6p\, q^2 - 8p^3.$$

Hieraus folgt, daß q^3 durch p teilbar sein muß, und wegen $(p,q) = 1$ ist $p = \pm 1$, also

$$\pm q^3 = 6q^2 - 8. \tag{32}$$

Die Gleichung besitzt keine ganzzahligen Lösungen, denn es muß 8 durch q^2 teilbar sein, also $q = \pm 1$ oder $q = \pm 2$ gelten und für diese Werte von q ist (32) nicht erfüllt. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme falsch war, also $\sin\alpha$ für $\alpha = 10^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ irrational ist.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 14

Sonderaufgabe

Es sei $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Eine nichtleere Menge F von Teilmengen von N heißt Filter, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Aus $A \in F$ und $N \supseteq B \supseteq A$ folgt $B \in F$,

b) aus $A \in F$ und $B \in F$ folgt $A \cap B \in F$ und

c) es ist $\emptyset \notin F$.

Aus wieviel Elementen kann ein Filter höchstens bestehen?
Man gebe alle Filter an, welche diese maximale Anzahl von Elementen enthalten.

Aufgaben

Aufgabe 1

Man beweise, daß sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten als Differenz zweier streng monoton wachsender Polynome darstellen läßt.

Aufgabe 2

Für welche natürlichen Zahlen a mit $0 < a < 10$ gibt es natürliche Zahlen $r \geqq 2$ und n mit

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{a}{9}\cdot(10^r - 1)?$$

Aufgabe 3

Sei f(x) ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Man beweise: Wenn es drei ganze Zahlen a,b,c mit $a < b < c$ und $|f(a)| = |f(b)| = |f(c)| = 1$ gibt, so gibt es keine ganze Zahl d mit $f(d) = 0$.

Aufgabe 4

Man beweise: Wenn a und b ganze Zahlen mit der Eigenschaft $2a^2 + a = 3b^2 + b$ sind, so sind $a-b$, $2a + 2b + 1$ und $3a + 3b + 1$ Quadrate ganzer Zahlen.

Aufgabe 5

Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^4 + 4\cdot y^4 = 2\cdot(z^4 + 4u^4) \qquad (1)$$

Aufgabe 6

Sei die natürliche Zahl p eine Primzahl und bezeichne G die Menge aller Gitterpunkte (a,b), wobei a und b natürliche Zahlen mit $0 \leqq a, b \leqq p-1$ sind. Zwei nicht notwendig verschiedene Punkte (a,b) und (c,d) aus G werden genau dann miteinander verbunden, wenn

$$a \cdot c + b \cdot d \equiv 1 \pmod p \qquad (2)$$

gilt.

a) Man zeige, daß mehr als $\frac{1}{2}(p^3 - p)$ Verbindungen eingezeichnet werden.

b) Gibt es vier verschiedene Punkte $P_i = (a_i, b_i)$, $i=1,\ldots,4$ in G, so daß P_i mit P_{i+1}, $i = 1,2,3$ sowie P_4 mit P_1 verbunden ist?

<u>Aufgabe 7</u>

Man bestimme alle Folgen $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ natürlicher Zahlen, die den Bedingungen

a) $x_n \leqq n \cdot \sqrt{n}$ für $n \geqq 1$ und

b) $n - m$ ist Teiler von $x_n - x_m$ für $n > m \geqq 1$ genügen.

(XV. Allunionsolympiade der UdSSR)

<u>Aufgabe 8</u>

Sei ABCD ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a. Man beweise:

a) Für jeden Punkt M auf der Umkugel des Tetraeders gilt für n=2 und für n=4

$$\overline{AM}^n + \overline{BM}^n + \overline{CM}^n + \overline{DM}^n = 3 \cdot a^n,$$

b) für $n \geqq 1$ und $n \neq 2,4$ existiert keine Konstante c, so daß für jeden Punkt M auf der Umkugel des Tetraeders gilt:

$$\overline{AM}^n + \overline{BM}^n + \overline{CM}^n + \overline{DM}^n = c$$

(Aufgabe von I. Janakijew, IMO-Preisträger 1981, Matematika <u>10</u> (1981))

<u>Aufgabe 9</u>

Sei R beziehungsweise r der Radius des Um- beziehungsweise des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Winkel dieses Dreiecks seien $\pi/5$, $\pi/5$, $3 \cdot \pi/5$. Man beweise:

$$\frac{r}{R} = \frac{5 - 1}{4} \qquad (3)$$

<u>Aufgabe 10</u>

Von dem Dreieck $\triangle ABC$ seien der Höhenschnittpunkt H, der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten sowie der Punkt A durch ihre Koordinaten

$$H = (4,3),\ M = (6,4),\ A = (2,1)$$

in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Aufgabe 11

Man finde einen geschlossenen Ausdruck für

$$f(x) = \sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 (2n-1)x.$$

Aufgabe 12

Die Felder eines 5 x 41-Schachbrettes seien mit zwei Farben gefärbt. Man beweise:

a) Es gibt ein einfarbiges 3 x 3-Quadrat (d. h. 9 Felder, die in den Zeilen a,b,c und den Spalten p,q,r stehen, $1 \leqq a < b < c \leqq 5$, $1 \leqq p < q < r \leqq 41$),

b) man kann ein 5 x 40-Schachbrett derart färben, daß kein einfarbiges 3 x 3-Quadrat vorkommt.

Aufgabe 13

Man beweise für alle reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichung

$$2^x \geqq 1 + x^2.$$

Aufgabe 14

Man ermittle alle Paare (x,y) natürlicher Zahlen, die der Gleichung

$$7^x = 2^y - 1$$

genügen.

Aufgabe 15

Man bestimme alle reellen Funktionen f, die der Funktionalgleichung

$$f(a + x) - f(a - x) = 4\,ax \qquad (4)$$

genügen, wobei a eine gegebene reelle Zahl ist.

Lösungen

Aufgabe 1

Sämtliche betrachtete Polynome mögen reelle Koeffizienten haben.

Lemma 1. Wenn sich die Polynome f_1 und f_2 als Differenz zweier streng monoton wachsender Polynome darstellen lassen und a eine beliebige reelle Zahl ist, so lassen sich auch die Polynome $f_1 + f_2$ und $a \cdot f_1$ als Differenz zweier streng monoton wachsender Polynome darstellen.

Bemerkung 1. Diejenigen Polynome, die sich als Differenz zweier streng monoton wachsender Polynome darstellen lassen, bilden also einen Teilvektorraum $W \subseteq V$ des Vektorraums V aller Polynome über dem Körper der reellen Zahlen.

Beweis von Lemma 1. Für i=1,2 sei $f_i = F_i - G_i$, wobei F_i und G_i streng monoton wachsende Polynome sind. Es ist

$$f_1 + f_2 = (F_1 + F_2) - (G_1 + G_2) \tag{5}$$

und

$$a \cdot f_1 = a \cdot F_1 - a \cdot G_1. \tag{6}$$

Bekanntlich sind für streng monoton wachsende Funktionen F und G und jede reelle Zahl $a \neq 0$ auch F + G und $|a| \cdot F$ streng monoton wachsende Funktionen. Daher sind $f_1 + f_2$ und für $a > 0$ auch $a \cdot f_1$ als Differenz streng monoton wachsender Polynome darstellbar. Für $a < 0$ erhält man aus der Darstellung

$$a \cdot f_1 = aF_1 - aG_1 = (-a)G_1 - (a)F_1$$

ein analoges Resultat, da $(-a)G_1$ und $(-a)F_1$ streng monoton wachsende Polynome sind. Für a = 0 hat man $0 \cdot f = x - x$ ebenfalls als Differenz streng monoton wachsender Polymone dargestellt. Daher ist Lemma 1 bewiesen.

Wegen Lemma 1 reicht der Nachweis, daß sich die Polynome $r_n(x)$, n=0,1,2,... mit

$$r_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ x^n & \text{für } n=1,2,\ldots \end{cases}$$

als Differenz zweier streng monoton wachsender Polymone darstellen lassen.

Bemerkung 2. Wir zeigen W = V, indem wir für eine Basis von V nachweisen, daß sie elementweise in W liegt.

Es ist $r_0(x) = (x+1) - x$ und für $n \geqq 1$

$$r_{2n-1}(x) = 2\,x^{2n-1} - x^{2n-1}$$

$$r_{2n}(x) = (x^{4n-1} + x^{2n} + 2nx) - (x^{4n-1} + 2nx).$$

Offenbar sind x, $x+1$ und für $n \geqq 1$ $2 \cdot x^{2n-1}$ und x^{2n-1} streng monoton wachsende Funktionen. Für die Funktionen $f(x) := x^{4n-1} + x^{2n} + 2nx$ und $g(x) := x^{4n-1} + 2nx$ zeigt man für $n \geqq 1$, daß die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ stets größer als Null sind. Daher sind auch $f(x)$ und $g(x)$ streng monoton wachsende Polynome.

Aufgabe 2

Wir setzen $t_n := \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$. Dann ist

$$8 \cdot t_n + 1 = (2n+1)^2. \tag{7}$$

Die Lösungsmenge L der Aufgabe ist eine Teilmenge von $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Wir nehmen an, daß $1 \in L$ ist. Dann muß es natürliche Zahlen $r \geqq 2$ und n mit $9 \cdot t_n = 10^r - 1$ geben. Dann ist $2 \cdot (10^r-1) = 9\, n \cdot (n+1)$, woraus $(3n+1)(3n+2) = 2 \cdot 10^r = 2^{r+1} \cdot 5^r$ folgt. Es ist $ggT(3n+1, 3n+2) = 1$, $ggT\ (2^{r+1}, 5^r) = 1$ und für $r \geqq 2$ ist $2^{r+1} \leqq 2^{2r} = 4^r < 5^r$. Daher muß $3n+1 = 2^{r+1}$ und $3n+2 = 5^r$ sein, woraus

$$1 = 5^r - 2^{r+1} > 4^r - 2^{r+1} = 2^r(2^r-2) \geqq 8$$

folgt. Das ist ein Widerspruch und folglich gilt $1 \notin L$. Es gilt

$$\frac{a}{9}\,(10^r - 1) = a \cdot \sum_{i=0}^{r-1} 10^i. \tag{8}$$

Wenn $t_n \equiv b \mod 10$ und $b \in \{2,4,7,9\}$ ist, so gilt $8 \cdot t_n + 1 \equiv c \mod 10$ mit $c \in \{3,7\}$. Das ist ein Widerspruch zu (7). Wegen (8) ist daher $L \wedge \{2,4,7,9\} = \emptyset$.

Wenn $t_n \equiv 33 \mod 100$ ist, so gilt $8 \cdot t_n + 1 \equiv 65 \mod 100$ und für $t_n \equiv 88 \mod 100$ ist $8\, t_n + 1 \equiv 5 \mod 100$. Beides bedeutet einen Widerspruch zu (7). Wegen (8) und $r \geqq 2$ ist somit $\{3,8\} \cap L = \emptyset$. Folglich gilt $L \leqq \{5,6\}$. Wie die folgenden Beispiele zeigen, gilt $L \geqq \{5,6\}$:

$$t_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 = \frac{5}{9} \cdot (10^2 - 1),$$

$$t_{11} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66 = \frac{6}{9} \quad (10^2 - 1),$$

$$t_{36} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 18 \cdot 37 = 666 = \frac{6}{9}\,(10^3 - 1).$$

Folglich sind genau die Zahlen $a = 5$ und $a = 6$ Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe 3

Lemma 2. Wenn $g(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und y eine ganze Zahl mit $g(y) = 0$ ist, so hat das durch $g(x) = (x-y)\,h(x)$ bestimmte Polynom $h(x)$ lauter ganzzahlige Koeffizienten.

Beweis. Sei $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot x^i$,

$g(x) = (x-y)\ h(x)$ und seien $a_o, a_1, \ldots, a_n$, y ganze Zahlen. Es ist zu zeigen, daß b_o, b_1, ..., b_{n-1} ganze Zahlen sind. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= (x-y)\cdot h(x) = (x-y)\cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot x^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot y x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}\cdot x^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot y\cdot x = \\ &= b_{n-1}\cdot x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - b_i\cdot y)x^i + (-b_o\ y). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$a_n = b_{n-1},\ a_o = -b_o y$$
$$a_i = b_{i-1} - b_i\cdot y,\ i = 1,2,\ldots,n-1$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{i-1} &= a_i + b_i\cdot y \\ & i = 1,2,\ldots,n-1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Daher sind die Koeffizienten von $h(x)$ ganzzahlig und das Lemma ist bewiesen.

Bemerkung 3. Ist $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i$ ein Polynom vom Grad $n \geqq 1$ mit Koeffizienten aus irgendeinem Körper K und $y \in K$ und ist $h(x)$ das bei der Division mit Rest

$$g(x) = h(x)\cdot(x-y) + r, \qquad r \in K$$

von $g(x)$ durch $x-y$ entstehende Polynom, so ist offenbar $r = g(y)$ und für die Koeffizienten $b_o, \ldots, b_{n-1}$ von

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\cdot x^i$$

erhält man durch eine zu (9) und anschließenden Koeffizientenvergleich analoge Rechnung wieder die Gleichungen (10). Die Rechnung ordnet man gewöhnlich in einem zweizeiligen Schema an, das man Horner-Schema nennt:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...
y	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+yb_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+y\cdot b_{n-2}$	...

a_1	a_o
$b_o=a_1+y\cdot b_1$	$f(y)=a_o+y\cdot b_o$

Für die Lösung der Aufgabe 3 führen wir jetzt einen indirekten Beweis. Angenommen $f(x)$ ist ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad n, für das es ganze Zahlen a,b,c,d mit $a < b < c$ und $|f(a)| = |(b)| = |f(c)| = 1$ und $f(d) = 0$ gibt. Dann ist $n \geqq 1$ und es gibt nach Lemma 2 ein Polynom $h(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und

$f(x) = (x-d) \cdot h(x)$.

Sei $q \in \{a,b,c,\}$. Dann ist

$$1 = |f(q)| = |(q-d) \cdot h(q)| = |q-d| \cdot |h(q)| .$$

Da $q-d$ und $h(q)$ ganze Zahlen sind, muß $|q-d| = 1$, also $q-d=1$ oder $q-d= -1$ sein. Es ergibt sich $q \in \{1+d,\ d-1\}$ und $\{a,b,c\} \leqq$ $\leqq \{d+1,\ d-1\}$. Das ist ein Widerspruch zu $a < b < c$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>Aufgabe 4</u>

Mögen die ganzen Zahlen a und b der Bedingung

$$2\,a^2 + a = 3\,b^2 + b \qquad (11)$$

genügen.

Ist $a=0$, so ist wegen $3\,b^2 + b = b(3b+1)$ auch $b=0$, da $3b + 1 \neq 0$ ist. In diesem Fall ist die Behauptung der Aufgabe richtig.

Sei im weiteren $a \neq 0$. Dann ist auch $b \neq 0$ und $b \neq a$. Sei $d := \text{ggT}\,(a,b)$ und

$$a = a_1 \cdot d,\ b = b_1\, d. \qquad (12)$$

Dabei sind a_1 und b_1 relativ prim zueinander und es ist $a_1 \neq b_1$. Folglich ist $b_1 = a_1 + r$, $r \neq 0$, und a_1 und r sind relativ prim zueinander. Aus (11) und (12) ergibt sich mit $b_1 = a_1 + r$:

$$2\,d\,a_1^2 + a_1 = 3d\,(a_1 + r)^2 + a_1 + r,$$

also

$$d\,a_1^2 + 6 \cdot d\,a_1\,r + 3dr^2 + r = 0. \qquad (13)$$

Daher ist $d \mid r$ und $r \mid da_1^2$. Wegen $(r,a_1) = 1$ gilt $r \mid d$. Mit $d \mid r$ und $r \mid d$ ist $d=r$ oder $d= -r$. Für $d=r$ erhält man aus (13):

$$a_1^2 + 6a_1 r + 3r^2 + 1 = 0$$

Diese Gleichung kann nicht erfüllt werden, da für keine ganze Zahl a_1 die Zahl $a_1^2 + 1$ durch 3 teilbar ist. Folglich muß $d = -r$ gelten. Dann ist $b_1 = a_1 - d$ und

$$b = d \cdot b_1 = da_1 - d^2 = a - d^2,$$

also

$$a - b = d^2. \qquad (14)$$

Aus (11) ergibt sich

$$(a-b)\ (2a + 2b + 1) = b^2. \qquad (15)$$

Aus (12), (14) und (15) ergibt sich wegen $d \neq 0$:

$$2a + 2b + 1 = b_1^2. \tag{16}$$

Weiterhin ist wegen (11):

$(3a + 3b + 1)(a-b) = 3a^2+a-3b^2 - b = 3a^2+a - 2a^2 - a = a^2.$

Daraus und aus (12) und (14) ergibt sich wegen $d \neq 0$:

$$(3a + 3b + 1) = a_1^2. \tag{17}$$

Da d_1, a_1 und b_1 ganze Zahlen sind, ist mit (14), (16) und (17) die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Aufgabe 5

Wir beweisen zunächst folgendes:

Lemma 3: Seien c und n positive ganze Zahlen.
Für $i = 1,2,\ldots,n$ sei $\alpha_i \in \{0,1\}$, k_i eine natürliche Zahl und x_i eine ganze Zahl, die kein ganzzahliges Vielfaches von c ist. Außerdem gelte $k_i \neq k_j$ für $1 \leqq i,j \leqq n$, $i \neq j$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\alpha_i} \cdot c^{k_i} \cdot x_i \neq 0. \tag{18}$$

Beweis: Da die Zahlen k_i, $1 \leqq i \leqq n$, voneinander verschieden sind, können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß $k_1 = \min k_i$ ist.
Wenn $n = 1$ ist, so gilt offenbar (18). Sei $n > 1$. Es ist

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\alpha_i} c^{k_i} x_i = c^{k_i} \left[(-1)^{\alpha_1} \cdot x_1 + c \cdot \sum_{i=2}^{n} c^{k_i - k_1 - 1} \cdot (-1)^{\alpha_i} \cdot x_i \right] \tag{19}$$

Nach den Voraussetzungen ist

$$\sum_{i=2}^{n} c^{k_i - k_1 - 1} \cdot (-1)^{\alpha_i} \cdot x_i \text{ eine ganze Zahl.}$$

Da x_1 kein Vielfaches von c ist, ist

$$(-1)^{\alpha_1} x_1 + c. \sum_{i=2}^{n} c^{k_i - k_1 - 1} \cdot (-1)^{\alpha_i} \cdot x_i$$

ebenfalls kein Vielfaches von c und somit von Null verschieden.
Da $c \neq 0$, ist auch $c^{k_1} \neq 0$. Damit ergibt sich aus (19) das Lemma 3.

Wir nehmen nun an, daß es ganze Zahlen x,y,z und u gibt, die der Gleichung (1) genügen. Dann gibt es natürliche Zahlen p,q,r,s, x_1, q_1, z_1 und u_1, so daß

$$x = 2^p \cdot x_1,\ y = 2^q \cdot y_1,\ z = 2^r \cdot z_1,\ u = 2^s \cdot u_1 \tag{20}$$

ist, wobei x_1, y_1, z_1, u_1 entweder Null oder ungerade sind.
Einsetzen der Ausdrücke (20) in (1) liefert

$$2^{4p} \cdot x_1^4 + 2^{4q+2} \cdot y_1^4 = 2^{4r+1} \cdot z_1^4 + 2^{4s+3} \cdot u_1^4$$

und folglich

$$2^{4p} \cdot x_1^4 + 2^{4q+2} \cdot y_1^4 - 2^{4r+1} \cdot z_1^4 - 2^{4s+3} \cdot u_1^4 = 0. \qquad (21)$$

Die Zahlen 4p, 4q+2, 4r+1 und 4s+3 sind paarweise verschieden, da sie modulo 4 paarweise verschiedene Reste haben. Wenn irgendwelche der Zahlen x_1, y_1, z_1, u_1 von Null verschieden sind, so sind sie und auch ihre weiteren Potenzen ungerade und daher nicht durch 2 teilbar. Aus (20), (21) und dem Lemma 3 folgt daher, daß höchstens $x = y = z = u = 0$ Lösung der Aufgabe sein kann. Offenbar ist das auch eine Lösung. Damit besitzt (1) genau die eine Lösung $x = y = z = u = 0$.

Aufgabe 6

Wir beweisen zunächst:

Lemma 4. Ist $a \not\equiv 0 \mod p$, so ist die Kongruenz $a \cdot x \equiv b \mod p$ bis auf Kongruenz mod p eindeutig lösbar.

Beweis: Angenommen, zwei der Zahlen $0, a, 2a, \ldots, (p-1) \cdot a$ lassen bei Division durch p den gleichen Rest. Dann gibt es natürliche Zahlen k, l mit $0 \leqq k < l \leqq p-1$, für die $p \mid a \cdot (l-k)$ also $p \mid a$ gilt. Das ist ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

a) Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Lösungen $(x,y) \in G$ der Kongruenz

$$a \cdot x + b \cdot y \equiv 1 \mod p \qquad (22)$$

für jedes feste $(a,b) \in G$.

Für $a = b = 0$ gibt es keine Lösung. Ist $a \neq 0$, so gibt es nach Lemma 4 für jedes y mit $0 \leqq y \leqq p-1$ genau ein x mit $0 \leqq x \leqq p-1$, so daß $a \cdot x \equiv 1 - b \cdot y \mod p$ ist. Gilt $a = 0$, so gibt es zu jedem x mit $0 \leqq x \leqq p-1$ nach Lemma 4 genau ein y mit $0 \leqq y \leqq p-1$, so daß (x,y) eine Lösung von (22) ist. Daher existieren zu jedem Punkt $(a,b) \in G$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ genau p verschiedene Lösungen von (22).

Folglich müssen als Beitrag von $(a,b) \neq (0,0)$ p Verbindungen eingezeichnet werden. Insgesamt erhalten wir $(p^2-1) \cdot p$ Verbindungen, wobei jede Verbindung zwischen verschiedenen Punkten doppelt und jede einen Punkt aus G mit sich selbst verbindende einfach gezählt wurde. Gibt es genau s Verbindungen, die einen Punkt mit sich selbst verbinden, so erhalten wir folglich

$$\frac{1}{2}(p^3 - p - s) + s = \frac{1}{2}(p^3 - p) + \frac{s}{2}$$

Verbindungen. Da für (0,1) gilt $0^2+1^2 \equiv 1 \bmod p$, so ist für jedes p dieser Punkt mit sich selbst zu verbinden und folglich $s \geqq 1$ und die Behauptung a) ist bewiesen.

b) Angenommen, es gibt vier Punkte $P_1 = (x,y)$, $P_2 = (a,b)$, $P_3 = (u,v)$, $P_4 = (c,d)$, die die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben. Dann gilt:

$$a\cdot x+by\equiv 1 \mod p, \text{ also } \begin{cases} ad\,x + bdy \equiv d \mod p, \\ ac\,x + bcy \equiv c \mod p, \end{cases}$$

$$c\cdot x+d\cdot y\equiv 1 \mod p, \text{ also } \begin{cases} a\cdot c\cdot x + ady \equiv a \mod p, \\ b\cdot c\cdot x + bdy \equiv b \mod p. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$(ad - bc)\cdot x \equiv d - b \mod p, \quad (ad - bc)\cdot y = a - c \mod p. \tag{23}$$

Fall 1: $ad - bc \not\equiv 0 \bmod p$.

Nach Lemma 4 sind x und y durch die Kongruenzen (23) eindeutig bestimmt. Da u auch die erste und v die zweite der Kongruenzen (23) erfüllt, ergibt sich $(u,v) = (x,y)$.

Fall 2: $ad - bc \equiv 0 \bmod p$.

Ist $a = 0$, so müssen wegen (22) sowohl b als auch y von Null verschieden sein. Aus $- bc \equiv 0 \bmod p$ folgt also $c = 0$. Ferner ergibt sich aus $b \cdot y = dy \equiv 1 \bmod p$ nach Lemma 4 $b = d$, also $(a,b) = (c,d)$.

Ist $a \neq 0$, so gibt es genau ein λ mit $0 \leqq \lambda \leqq p-1$, so daß $\lambda \cdot a \equiv c \bmod p$ ist.

Es folgt

$$a\,(d - b\cdot\lambda) = ad - bc \equiv 0 \mod p,$$

d. h. $b\cdot\lambda \equiv d \bmod p$. Dann ergibt sich

$$c\cdot x + d\cdot y \equiv \lambda\,(ax + by) \equiv \lambda \mod p.$$

Es folgt $\lambda = 1$ und damit $(a,b) = (c,d)$.

In beiden Fällen ergab sich die Identität von zwei Punkten. Damit gibt es keine vier Punkte P_1,P_2,P_3,P_4 mit den in der Aufgabe b) angeführten Eigenschaften.

<u>Aufgabe 7</u>

Wegen $x_1 \leqq 1$ und $x_2 \leqq 2\cdot\sqrt{2} < 3$ gilt $x_1 = 1$, $x_2 \in \{1,2\}$.

Fall 1: $x_2 = 1$. Aus b) ergeben sich für $n > 2$ folgende Teilbarkeitsaussagen:

$(n - 1) \mid (x_n - x_1) = x_n - 1$, $(n - 2) \mid (x_n - x_2)$, also $(n-2) \mid (x_n-1)$.

Für $n > 2$ sind $n - 1$ und $n - 2$ teilerfremd, also folgt

$$(n - 1) \cdot (n - 2) \mid (x_n - 1).$$

Wäre $x_n \neq 1$, so folgte daraus

$$(n - 1) \cdot (n - 2) \leqq x_n - 1 \leqq n \cdot \sqrt{n} - 1.$$

Diese Beziehung ist für genügend große n nicht richtig, z. B. nicht für $n \geqq n_o = 9$. Für diese n ist also $x_n = 1$. Für ein beliebiges festes $m \in \{3, 4, \ldots, n_o - 1\}$ und alle $n \geqq n_o$ gilt nun $n \mid (x_{n+m} - x_m)$, also $n \mid (1 - x_m)$, also ist $x_m = 1$.

Fall 2: $x_2 = 2$. Wir erhalten wie im Fall 1 für $k > 2$:
$(k - 1) \mid (x_k - 1)$ und $(k - 2) \mid (x_k - 2)$
also $(k - 1) \cdot (k - 2) \mid (x_k - k)$.
(beachte: $x_k - k = (x_k - 1) - (k - 1) = (x_k - 2) - (k - 2)$).
Ist $x_k \neq k$, so folgt

$$(k - 1)\ (k - 2) \leqq |x_k - k| \leqq k \cdot \sqrt{k} + k.$$

Auch dies kann für hinreichend großes $k \geqq k_o = 9$ nicht erfüllt werden und für diese k ergibt sich $x_k = k$.
Für beliebiges festes $m \in \{3, \ldots, k_o - 1\}$ und für alle $k \geqq k_o$ gilt $k \mid (x_{k+m} - x_m) = (k + m - x_m)$, also $x_m = m$. Wir erhalten die Folgen

a) $x_i = 1$ für $i \geqq 1$,
b) $x_i = i$ für $i \geqq 1$.

<u>Aufgabe 8</u>

Sei O der Mittelpunkt und R der Radius der Umkugel. H sei der Fußpunkt der Höhe von D auf das Dreieck $\triangle ABC$. Q sei derjenige Punkt auf der Umkugel, für den die Vektoren $\overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{HB}$ gleichgerichtet und gleichorientiert sind und P derjenige Punkt auf der Umkugel, für den die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleichgerichtet und gleichorientiert sind.
Die Länge h einer Höhe im $\triangle ABC$ ist gleich $\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Ferner gilt:
$\overline{DH}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BH}^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = \frac{2}{3}a^2$, also $\overline{DH} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$ und folglich $\overline{OH}^2 = \frac{a}{12}\sqrt{6}$. (Dabei setzen wir als bekannt voraus, daß der Umkreismittelpunkt O der Schnittpunkt der Lote von den Punkten A,B,C,D auf die jeweils gegenüberliegenden Flächen von ABCD ist und diese Lote durch O im Verhältnis 1:3 teilt.)
Wir betrachten nun das Koordinatensystem

$$\left(O, \frac{\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OD}|}, \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}, \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}\right).$$

Es ist:

$$\overrightarrow{OA} = - |\overrightarrow{OH}| \cdot \frac{\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OD}|} - |\overrightarrow{HB'}| \cdot \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|} - |\overrightarrow{B'A}| \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}, \text{ also}$$

$$\overrightarrow{OA} = - \frac{1}{3} \overrightarrow{OD} - \frac{\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{OQ} - \frac{\sqrt{6}}{3} \overrightarrow{OP} \qquad (24)$$

Analog erhält man:

$$\overrightarrow{OB} = - \frac{1}{3} \overrightarrow{OD} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OC} = - \frac{1}{3} \overrightarrow{OD} - \frac{\sqrt{2}}{3} \overrightarrow{OQ} + \frac{\sqrt{6}}{3} \overrightarrow{OP}. \qquad (25)$$

Die Zahlen λ, μ, ν seien durch $\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OD} + \mu \cdot \overrightarrow{OQ} + \nu \cdot \overrightarrow{OP}$ festgelegt. Offenbar ist $\overrightarrow{OM}^2 = R^2$. Andererseits ist

$\overrightarrow{OM}^2 = \lambda^2 \overrightarrow{OD}^2 + \mu^2 \overrightarrow{OQ}^2 + \nu^2 \overrightarrow{OP}^2 + 2\lambda\mu \overrightarrow{OD}\,\overrightarrow{OQ} + 2\lambda\nu \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\mu \cdot \nu \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$.

Also gilt:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \qquad (26)$$

Wir wenden jetzt den Kosinussatz auf das Dreieck AO M an und erhalten:

$$\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 2(R^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}). \qquad (27)$$

Analoge Ausdrücke erhält man für $\overrightarrow{BM}^2$, $\overrightarrow{CM}^2$ und $\overrightarrow{DM}^2$. Das ergibt $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{DM}^2 = 8R^2 - \overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 8R^2 = 3a^2$, da $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \underline{O}$ ist. Damit ist a) für n = 2 bewiesen.

Aus (25) erhält man

$\overrightarrow{AM}^4 = 4 \cdot R^4 - 8R^2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} + 4 \cdot (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM})^2$.

Analoge Ausdrücke erhält man für $\overrightarrow{BM}^4$, $\overrightarrow{CM}^4$, $\overrightarrow{DM}^4$. Das ergibt:

$\overrightarrow{AM}^4 + \overrightarrow{BM}^4 + \overrightarrow{CM}^4 + \overrightarrow{DM}^4 = 16R^4 - 8R^2 (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OM} + 4((\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OM})^2)$.

Wegen (24) gilt:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = -\frac{\lambda}{3} \overrightarrow{OD}^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mu \overrightarrow{OQ}^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \nu \overrightarrow{OP}^2 = R^2 \cdot (-\frac{\lambda}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mu - \frac{\sqrt{6}}{3}\nu)$.

Analog ergeben sich aus (25) die anderen Skalarprodukte.

Wir erhalten schließlich:

$$(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM})^2 = (\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{9}\mu^2 + \frac{6}{9}\nu^2 + \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda\mu + \frac{2\sqrt{6}}{9}\lambda\mu + \frac{4\sqrt{3}}{9}\mu\nu)\, R^4,$$

$$(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM})^2 = (\frac{\lambda^2}{9} + \frac{8}{3}\mu^2 - \frac{4\sqrt{2}}{9}\lambda\mu)\, R^4,$$

$$(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM})^2 = (\frac{\lambda^2}{9} + \frac{2}{9}\mu^2 + \frac{6}{3}\nu^2 + \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda\mu - \frac{2\sqrt{6}}{9}\lambda\nu - \frac{4\sqrt{3}}{9}\mu\nu)\, R^4,$$

$$(\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OM})^2 = \lambda^2 R^4.$$

Das ergibt unter Beachtung von (26) die Summe

$$(\frac{4}{3}\lambda^2 + \frac{4}{3}\mu^2 + \frac{4}{3}\nu^2) \cdot R^4 = \frac{4}{3} \cdot R^4.$$

Also gilt:
$$\overrightarrow{AM}^{\,4} + \overrightarrow{BM}^{\,4} + \overrightarrow{CM}^{\,4} + \overrightarrow{DM}^{\,4} = 16\ R^4 + \frac{16}{3} R^4 = \frac{64}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} a\right)^4 = 3a^4.$$

Damit ist a) für n = 4 bewiesen.

b) Angenommen, es gibt für ein gewisses n ein solches c. Setzen wir M = A, so erhalten wir $c = 3 \cdot a^n$.

A' sei der bezüglich O zu A symmetrische Punkt auf der Umkugel. Es ist $\overline{AA'} = 2\ R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Das Dreieck ABA' ist rechtwinklig und daher gilt $\overrightarrow{BA'}^2 = \overrightarrow{AA'}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \frac{a^2}{2}$ und folglich (nach analogen Betrachtungen für C und D):

$$|\overrightarrow{BA'}| = |\overrightarrow{CA'}| = |\overrightarrow{DA'}| = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Das ergibt:

$$\overline{AA'}^n + \overline{BA'}^n + \overline{CA'}^n + \overline{DA'}^n = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^n$$
$$= a^n \cdot \frac{(\sqrt{2})^n \cdot ((\sqrt{3})^n + 3)}{2^n}.$$

Daher gilt:

$$3 \cdot a^n = \frac{(\sqrt{2})^n \cdot ((\sqrt{3})^n + 3)}{2^n} \cdot a^n$$

oder gleichwertig

$$3 \cdot 2^n = (\sqrt{2})^n \cdot (3^{\frac{n}{2}} + 3)$$

Damit 3 auch Teiler der rechten Seite ist, muß $n = 2 \cdot k$ sein und

$$3 \cdot 2^k = 3^k + 3$$

also

$$2^k - 3^{k-1} = 1$$

gelten.

Wir suchen jetzt alle Lösungen der Gleichung $2^x - 3^y = 1$ in nicht negativen ganzen Zahlen. Ist $y = 0$, so folgt $x = 1$, d. h., es muß $n = 2$ sein. Ist $y > 0$, so gilt $2^x \equiv 1 \bmod 3$.

Das hat $x = 2r$ zur Folge und wir erhalten

$$3^y = (2^{2r} - 1) = (2^r - 1)\ (2^r + 1).$$

Die Zahlen $2^r - 1$ und $2^r + 1$ haben keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$. Mithin muß $2^r - 1 = 1$ sein, also $r = 1$, $x = 2$, $y = 1$ und $n = 4$. Folglich gibt es für $n \neq 2,4$ kein solches c und der Beweis für die Behauptung b) ist erbracht.

Aufgabe 9

Lösung 1. Es sei $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ CAB = \frac{\pi}{5}$. O beziehungsweise O_1 sei der Mittelpunkt des Um- beziehungsweise Inkreises von $\triangle$ ABC. Schließlich sei L der Schnittpunkt des Umkreises mit der Verlängerung von BO_1 über O_1 hinaus und M der Schnittpunkt von AD mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ ACB. Dann ist

$$\sphericalangle LOC = 2 \sphericalangle LBC = \frac{\pi}{5},$$

und

$$\sphericalangle OO_1L = \sphericalangle BO_1C = \pi - \left(\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{10}\right) = \frac{3\pi}{5}.$$

Die Dreiecke $\triangle OO_1L$ und $\triangle ABC$ sind folglich ähnlicne Dreiecke und wir erhalten:

$$\frac{\overline{OL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{BC}}. \tag{28}$$

Nun ist $\triangle OMB \cong \triangle O_1BM$ da $\sphericalangle OMB = \sphericalangle O_1MB = \frac{\pi}{2}$ ist, BM eine gemeinsame Seite ist und

$$\sphericalangle MBO = \sphericalangle OBC - \sphericalangle MBC = \sphericalangle OCB - \sphericalangle MBC = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{5} = \sphericalangle MBO_1$$

ist. Folglich gilt $\overline{O_1M} - \overline{MO} = r$. Aus (28) erhalten wir

$$\frac{R}{2r} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}. \tag{29}$$

Da BO_1 Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle MBO_1$ ist, ergibt sich im $\triangle$ MBC:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1C}} = \frac{r}{\overline{OC} - \overline{OO_1}} = \frac{r}{R - 2r}. \tag{30}$$

Wegen $\overline{AB} = 2\,\overline{BM}$ ergibt sich aus (29) und (30):

$$\frac{R}{2r} = \frac{2r}{R - 2r}, \text{ d. h. } R^2 - 2\,Rr = 4\,r^2.$$

Mithin ist

$$4 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Da $\frac{r}{R} > 0$ ist, erhalten wir $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Lösung 2. Wie bei Lösung 1 zeigt man $\triangle OMB \cong \triangle BMO_1$ und erhält im $\triangle OBM$:

$$\overline{OM} = r,\ \overline{OB} = R,\ \sphericalangle OMB = \frac{\pi}{2},\ \sphericalangle OMB = \frac{\pi}{10}$$

$$\frac{r}{R} = \sin\frac{\pi}{10}.$$

Es bleibt folglich $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ zu zeigen. Dazu beachten wir:

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 4\cos^3\frac{\pi}{10} - 3\cos\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 4\cos^2\frac{\pi}{10} - 3$$

$$4\sin^2\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0.$$

Die restliche Überlegung verläuft wie bei Lösung 1.

Aufgabe 10

Wir betrachten den Feuerbachschen Kreis K des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Mittelpunkt E von K hat wegen $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ die Koordinaten $(5;\ 3{,}5)$. Da der Radius r von K gleich der halben Länge des Umkreisradisus von $\triangle ABC$ ist, gilt

$$r = \frac{1}{2}\overline{AM} = 2{,}5.$$

Für den Höhenfußpunkt $F = F(x,y)$ auf BC ergeben sich als Schnittpunkt von AH mit dem Feuerbachschen Kreis die Bedingungen

$$y = x - 1,\quad (x-5)^2 + (y-3{,}5)^2 = 2{,}5^2.$$

Das liefert die Koordinaten $\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ für F (der gegenüberliegende Schnittpunkt von AH mit dem Feuerbachschen Kreis entfällt). Aus den Bedingungen $F \in BC$ und $AH \perp BC$ ergibt sich für die Gerade durch B,C die Gleichung $y = -x + 12$.

Da außerdem B und C auf dem Umkreis liegen, ergeben sich die Koordinaten

$$B \sim \left(7 + \sqrt{\frac{23}{2}},\ 5 - \sqrt{\frac{23}{2}}\right),\quad C \sim \left(7 - \sqrt{\frac{23}{2}},\ 5 + \sqrt{\frac{23}{2}}\right).$$

Das liefert $\overline{BC} = 2 \cdot \sqrt{23}$ und

$$F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\,|\overline{AF}| \cdot |\overline{BC}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{23} = \frac{9}{2}\sqrt{46}.$$

Aufgabe 11

Wegen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ haben wir

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(1-\cos 2x) + \ldots\ldots + (1 - \cos(4n-2)x)\right]$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 6x \ldots + \cos(4n-2)x\right]$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer läßt sich durch folgenden Trick vereinfachen. Erweitern wir mit $2 \cdot \sin 2x$ und benutzen $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\sin 2x} \cdot \left[\cos 2x + \cos 6x + \ldots\ldots + \cos(4n-2)x\right]$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sin 2x}\left[(\sin 4x - \sin 0\cdot x) + (\sin 8x - \sin 4x)+\ldots\ldots+(\sin 4nx - \sin (4n-4)\,x)\right]$$

$$= \frac{\sin 4n\,x}{2\cdot\sin 2x}.$$

Folglich gilt für $f(x)$ die Beziehung

$$f(x) = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}.$$

Aufgabe 12

Die Farben seien rot und blau. Es gibt genau 20 verschiedene Spalten aus 5 Feldern mit genau 2 roten und 3 blauen bzw. 3 roten und 2 blauen Feldern.
Zwei derartige 5 x 20-Schachbretter zu einem 5 x 40-Schachbrett zusammengesetzt, erfüllen die Bedingungen. Damit ist b) bewiesen.

Wir zeigen jetzt, daß jedes 2 - gefärbte 5 x n-Schachbrett ohne einfarbiges 3 x 3-Quadrat höchstens n = 40 Spalten hat.
S sei ein 5 x n-Schachbrett ohne einfarbiges 3 x 3-Quadrat. Enthält eine Spalte 5 rote Felder, so färben wir 2 Felder um. Enthält eine Spalte 4 rote und 1 blaues Feld, so färben wir ein rotes um. Analog verfahren wir bei 5 blauen bzw. 4 blauen Feldern. Trotz dieser Umfärbungen entsteht in S kein einfarbiges 3 x 3-Quadrat.
S enthält somit nur Spalten mit genau 2 Feldern der einen und 3 Feldern der anderen Farbe.
Es gibt nur 20 verschiedene derartige Spalten.
Da keine Spalte 3fach in S vorkommen kann, folgt $n \leqq 40$.
Damit ist a) bewiesen.

Aufgabe 13

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2^x - x^2$. Es ist $f(0) = f(1) = 1$. Die Funktion ist beliebig oft differenzierbar und nach der Taylorentwicklung ist:

$$f(x_0) = f(x)+(x_0-x)\cdot f'(x)+\tfrac{1}{2}(x_0-x)^2 \cdot f''(\xi) \tag{31}$$

mit $\xi \in (x_0,x)$.
Wegen $f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 2$
ist für $x \in (0,1)$ $f''(x) < 0$. Hieraus und für $x_0 = 0$ beziehungsweise $x_0 = 1$, erhalten wir aus (31):

$$1 = f(0) < f(x) - x \cdot f'(x) \tag{32}$$

und

$$1 = f(1) < f(x) + (1-x) \cdot f'(x). \tag{33}$$

Wird (32) mit $(1-x)$ und (33) mit x multipliziert und werden beide Ungleichungen addiert, so bekommen wir für alle $x \in (0,1)$

$$1 = (1-x) + x < (1-x)\, f(x) - x\, f(x) = f(x),$$

womit die Behauptung erwiesen ist. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $x = 0$ oder $x = 1$ ist.

Aufgabe 14

Für $x = 0$ und $x = 1$ erhält man die beiden Lösungspaare $(0,1)$ und $(1,3)$. Es bleibt nun zu untersuchen, ob es noch weitere Lösungspaare gibt. Wegen $x \geqq 2$ gilt $49 \mid 7^x$. Wir betrachten $2^y - 1$ modulo 49 und erkennen, daß der Rest die folgenden Werte durchläuft:
0,1,3,7,15,31,14,29,10,21,43,38,28,8,17,35,22,45,42,36,24,0,1... .
2^y-1 ist also genau für $y = 21 \cdot k$, $k = 0,1,2,\ldots$, durch 49 teilbar. Wir zerlegen $2^y - 1$ nun folgendermaßen in Faktoren $(k \geqq 1)$:

$$2^y - 1 = 2^{21\cdot k} - 1 = (2^{21} - 1) \cdot (\sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{21\cdot\nu})$$

$$= (2^3 - 1) \cdot (2^{18} + 2^{15} + 2^{12} + \ldots + 1) \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{21\cdot\nu})$$

$$= 7 \cdot 299593 \cdot (\sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{21\cdot\nu})$$

$$= 7 \cdot 7 \cdot 42799 \cdot (\sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{21\cdot\nu}).$$

Da 42 799 nicht durch 7 teilbar ist, kann $2^y - 1$ nicht nur aus Potenzen der Zahl 7 bestehen, d. h., es gibt außer den zwei oben angeführten Lösungen keine weiteren.

Aufgabe 15

Angenommen, die Funktion $f : R \longrightarrow R$ ist Lösung von (4).
Durch $g(x) = f(x) - x^2$, $g : R \longrightarrow R$, definieren wir eine neue Funktion. Mit (4) ist:

$$g(a+x) + (a+x)^2 - g(a-x)^2 - (a-x)^2 = 4\,a\,x,$$

also $g(a+x) = g(a-x)$.
Ferner ist $g(x+a) = g(-x+a) = g(\,|x|\, + a)$
und damit

$$f(x) = g(x) + x^2 = g((x-a) + a) + x^2 = g(\,|x-a|\, + a) + x^2,$$

f ist also höchstens dann Lösung, wenn

$$f(x) = g((\,|x-a|\, + a) + x^2 \qquad (34)$$

mit einer beliebigen reellen Funktion $g : R \longrightarrow R$ gilt.

Umgekehrt ist dann

$$f(a+x) - f(a-x) = g(\ |a+x-a| + a) + (a+x)^2 - g(\ |a-x-a| + a) - (a-x)^2$$

$= 4\,a\,x.$

Damit sind genau die in (34) beschriebenen Funktionen Lösung.
(Nach Karin Gröger, Berlin)

Weitere mögliche Darstellungen der Lösung sind:

a) $f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x \leqq a \\ g(2a - x) + 4a\,(x-a), & a \geqq x, \text{ wobei } g(x) \\ \text{eine beliebige Funktion mit } g : R \longrightarrow R \text{ ist.} \end{cases}$

(Nach Jochen Lattermann, Dresden)

b) $f(x) = 2ax + g(x)$ mit $g(a+x) = g(a-x)$, $g : R \longrightarrow R$
(Nach Ingo Witt, Berlin)

c) $f(x) = \begin{cases} g(x-a) & , \quad x \geqq a \\ g(a-x) + 4a\,(x-a) & , \quad x \leqq a \text{ mit } g : [0, \infty) \longrightarrow R \end{cases}$
beliebig.

(Nach Jens Franke, Gera)

Bemerkungen zu Aufgaben und Lösungen vorangegangener Hefte

Im folgenden geben wir zwei weitere Lösungen für die Aufgabe 11 aus Heft 8 an. Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks war

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqq \frac{9}{4}$$

zu zeigen.

Lösung 1:

Sei $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Es gilt $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqq \frac{1}{8}$. (35)

Denn falls einer der drei Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ ist, ist (35) trivial und im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist $y = \cos x$ konkav und nach der Jensenschen Ungleichung und der Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel erhält man

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqq \left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leqq \cos^3 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{1}{8}.$$

Die Ungleichung (35) formen wir äquivalent um,

$$2 \cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta) \geqq -\frac{1}{4},$$

$$2 \cos\alpha \cos\beta (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) \geqq -\frac{1}{4},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cos^2\beta + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot$$
$$\cdot \cos^2\beta - 2 \sin\alpha \cos\beta \sin\beta \cos\beta \geqq \frac{3}{4}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta - 2 \sin\alpha \cos\alpha \cdot$$
$$\sin\beta \cos\beta \geqq \frac{4}{3},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)^2 \geqq \frac{3}{4},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqq \frac{3}{4},$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqq \frac{9}{4}.$$

Lösung 2

Sind α, β, γ die Dreieckswinkel, so gilt sicher

$$2 \left[\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)\right]^2 - \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \geqq -\frac{1}{2}$$

und wegen $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ und $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$ gilt

$$\cos(2\alpha + 2\beta) + \cos 2\alpha + \cos 2\beta \geqq -\frac{3}{2}.$$

Ferner ist wegen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\gamma$.
Schließlich benutzt man $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ und erhält die Behauptung.

Berichtigung zu Heft 5, Aufgabe 6

In der Lösung muß es auf Seite 10, 4. und 5. Zeile von oben richtig heißen:

$$x + y + z \geqq p \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + q \cdot \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)$$

$$+ r \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \geqq 2 \cdot (p + q + r)$$

Berichtigung zu Heft 3, Aufgabe 17

Die Darstellung des indirekten Beweises enthält in der 9. Zeile von oben einen Fehler:
man darf nicht $ad \equiv r'\ (n')$ schließen. Darauf machte B. Kreußler (Berlin) aufmerksam. Wir führen noch einmal die Behauptung und einen Beweis an.

Aufgabe 17, Heft 3:

Seien a, b, c, d, n natürliche Zahlen und möge die Zahl n ein Teiler der Zahlen ac, bd und ad + bc sein. Man zeige, daß dann n auch die Zahlen ad und bc teilt.
Indirekter Beweis (nach P. Bartenstein)

Wir nehmen an, n teilt nicht ad. Dann gibt es eine natürliche Zahl r mit $0 < r < n$ und $ad \equiv r\ (n)$. (36)
Es sei $(r,n) = n_o$. Dann gibt es natürliche Zahlen n' und r' mit $0 < r' < n'$ und $n = n_o \cdot n'$ und $r = n_o \cdot r$.

Aus (36) folgt $\qquad \frac{ad}{n_o} = r'\ (n')$ (*)

und wegen $ad + bc = o(n)$, d. h. auch $\frac{ad}{n_o} + \frac{bc}{n_o} \equiv 0(n')$:

$$\frac{bc}{n_o} \equiv -r'(n'). \qquad (**)$$

Wegen $ac \equiv o(n)$ und $bd \equiv o(n)$ ist $\frac{ac}{n_o} \equiv o(n')$ und $\frac{bd}{n_o} \equiv o(n')$,

also einerseits $\frac{abcd}{n_o^2} = o(n')$ und andererseits wegen * und **

$\frac{abcd}{n_o^2} \equiv -(r')^2(n')$, d. h.

$$(r')^2 \equiv o(n').$$

Diese Kongruenz steht jedoch im Widerspruch zu $o < r' < n'$ und $(r',n') = 1$, also ist unsere Annahme falsch und es gilt $ad \equiv o(n)$. Wegen $ad + bc = o(n)$ erhalten wir auch $bc = o(n)$.

Zur Sonderaufgabe aus Heft 11

Im folgenden gehen wir, mit dem Ziel einer zusammenhängenden Darstellung, noch einmal auf diese Sonderaufgabe ein, obwohl eine Lösung auch schon in Heft 12 gegeben wurde.

Aufgabe:
Zu einer Beratung treffen sich n Mathematiker ($n > 2$), wobei jeder mit höchstens $\frac{n}{2} - 1$ anderen bekannt ist. (Alle Bekanntschaften seien gegenseitig.)
Man zeige: Es können alle so an einem runden Tisch Platz nehmen, daß nicht zwei miteinander bekannte Personen nebeneinander sitzen.

Nur die Schüler Ronald Lehmann, Klasse 12, EOS "Kreuzschule", Dresden, und Ralph Hortig, 1. EOS Cottbus, sandten eine richtige Lösung ein. Zum Beweis wandte R. Lehmann einen aus der Graphentheorie bekannten Satz von Dirac über die Existenz eines Hamiltonkreises für den komplementären Graphen an. R. Hortig gab einen Beweis ohne Verwendung von Sätzen aus der Graphentheorie.

Die folgende Lösung ist analog zu einem Beweis des Satzes von Dirac.
Lösung: Ist $M_1,\dots,M_n$, $M_{n+1} = M_1$ eine Sitzanordnung S der Mathematiker, so sei der Bekanntschaftsgrad b (S) gleich der Anzahl der Paare (M_i,M_{i+1}) $(i = 1,\dots,n)$, für die M_i und M_{i+1} miteinander bekannt sind.
Sei o.B.d.A. S eine solche Sitzanordnung, für die b(S) minimal ist. Wir haben $b(S) = 0$ nachzuweisen.
Angenommen, $b(S) > 0$. Dann gibt es ein Paar (M_k, M_{k+1}) zweier miteinander bekannter Mathematiker (o.B.d.A. sei $k \neq n$).
Kennt M_k nicht M_j, so sind aber M_{k+1} und M_{j+1} miteinander bekannt $(j = 1,\dots,n,\ j \neq k,\ j \neq k+1)$. Sonst wäre nämlich $M_1,\dots, M_j, M_k, M_{k-1}, \dots, M_{j+1}, M_{k+1}, \dots, M_n, M_1$ im Fall $j < k$ bzw.
$M_1, \dots, M_k, M_j, M_{j-1}, \dots, M_{k+1}, M_{j+1}, \dots, M_n, M_1$ im Fall $j > k$ eine Sitzanordnung mit kleinerem Bekanntschaftsgrad.

Es gibt nach Voraussetzung wenigstens
$n - 1 - (\frac{n}{2} - 1) = \frac{n}{2}$ Mathematiker M_j, die M_k nicht kennt.
Nach dem oben Gesagten, sind die Nachfolger M_{j+1} alle mit M_{k+1} bekannt, d. h., M_{k+1} hat mindestens $\frac{n}{2}$ Bekannte, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 15

Sonderaufgabe

Eine Organisation hat $n \geq 5$ Mitglieder und $(n + 1)$ verschiedene 3-Mitglieder-Komitees. Man beweise: Es gibt zwei Komitees, die genau ein Mitglied gemeinsam haben.

Aufgaben

Aufgabe 1

Man bestimme alle reellen Werte des Parameters a, so daß die Gleichung

$$16x^4 - a x^3 + (2a + 17)x^2 - a x + 16 = 0$$

genau vier verschiedene reelle Wurzeln hat, die eine geometrische Folge bilden.
(Vorschlag Bulgariens auf der IMO 1982)

Aufgabe 2

In einer Urne liegen genau p weiße und q schwarze Kugeln. Neben der Schachtel gibt es einen Haufen von genügend vielen schwarzen Kugeln. Wir entnehmen in jedem Schritt zwei Kugeln aus der Urne. Sind diese zwei Kugeln von gleicher Farbe, so legen wir eine schwarze Kugel vom Haufen in die Urne. Sind die zwei entnommenen Kugeln von verschiedener Farbe, so legen wir die weiße Kugel zurück in die Urne. Wir wiederholen dieses Verfahren, bis zum letzten Mal zwei Kugeln aus der Urne entnommen werden konnten und durch eine Kugel ersetzt wurden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese letzte Kugel weiß ist?
(Vorschlag Brasiliens auf der IMO 1982)

Aufgabe 3

Es sei ABCD ein konvexes ebenes Viereck und sei A_1, B_1, C_1 beziehungsweise D_1 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle BCD$, des Dreiecks $\triangle ACD$, des Dreiecks $\triangle ABD$ beziehungsweise des Dreiecks $\triangle ABC$.
Man beweise:

a) Die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 sind entweder alle gleich oder alle untereinander verschieden. Im letzten Fall liegen die Punkte A_1 und C_1 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B_1 und D_1

und die Punkte B_1 und D_1 liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade durch A_1 und C_1.

b) Sei A_2, B_2, C_2 beziehungsweise D_2 der Umkreismittelpunkt von $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ beziehungsweise $\triangle ABC$. Die Vierecke $A_2B_2C_2D_2$ und ABCD sind ähnlich.

(Vorschlag Australiens auf der IMO 1982)

Aufgabe 4

In einer Ebene seien $2 \cdot n$ paarweise verschiedene Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen und von denen jeweils n rot beziehungsweise blau gefärbt seien. Man beweise, daß man n paarweise disjunkte Strecken (d. h. die Strecken schneiden sich weder, noch berühren sie sich) finden kann, deren Endpunkte verschiedenfarbig sind.

Aufgabe 5

Gegeben seien n reelle Zahlen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit $0 \leqq P_i \leqq 1$. Man zeige, daß es eine reelle Zahl x mit $0 \leqq x \leqq 1$ gibt, für die

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x - P_i|} \leqq 8 \cdot n \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

ist.

Aufgabe 6

Es sei $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl und seien x_i $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n} > 1.$$

Ferner zeige man, daß man die rechte Seite dieser Ungleichung nicht vergrößern kann.

Aufgabe 7

Gegeben seien in einer Ebene drei Punkte X,Y,Z, die nicht in einer Geraden liegen. Man konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, so daß X mit AB, Y mit BC und Z mit CA gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke bilden, wobei AB, BC und CA jeweils die Hypothenusen sind. Die Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle ABX$, $\triangle BCY$, $\triangle CAZ$ sollen dabei so liegen, daß sie paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.

Aufgabe 8

Es sei $\{a_n\}$, $n = 1,2,3, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 + a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Man beweise, daß $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$ ist.

Aufgabe 9

Es sei $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k^2+1}\}$ eine Menge reeller Zahlen, $k \in N$.

Man zeige, daß es Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_{k+1}$ gibt, so daß $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_{k+1}}$ oder $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_{k+1}}$ gilt.

Aufgabe 10

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebige Zahlen aus dem Intervall $[0,2]$.
Man beweise, daß

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \leq n^2 \tag{1}$$

ist. In welchen Fällen steht das Gleichheitszeichen?
(31. Mathematikolympiade Bulgariens, 1982)

Aufgabe 11

Es seien $\underline{H}$ und $\underline{K}$ Familien von Teilmengen der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$, die folgenden Bedingungen genügen:

Ist $F \in \underline{H}$ und $F' \subseteq F$, so gilt $F' \in \underline{H}$; (2)

Ist $F \in \underline{K}$ und $F' \supseteq F$, so gilt $F' \in \underline{K}$. (3)

Man zeige, daß $|\underline{H} \cap \underline{K}| \leq \frac{1}{2^n} \cdot |\underline{H}| \cdot |\underline{K}|$ ist.

Hierbei bedeutet $\underline{H} \cap \underline{K}$ die Familie von Teilmengen von $\{1,2,\ldots,n\}$, die sowohl in $\underline{H}$ als auch in $\underline{K}$ enthalten sind und für eine Mengenfamilie $\underline{H}$ bedeutet $|\underline{H}|$ die Anzahl der Mengen, die diese Familie enthält.

Aufgabe 12

Man bestimme alle stetigen Funktionen $f: R \to R$, die der Gleichung $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$ genügen.

Aufgabe 13

Die Folge $\{x_n\}$ sei durch $x_0 = 1000$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

gegeben. Man beweise, daß

$$\left| x_{30} - \sqrt{2} \right| < 10^{-6} \text{ ist.}$$

Aufgabe 14

Man bestimme alle Paare (n,k) natürlicher Zahlen, für die

$$(n+1)^k - 1 = n!$$

gilt.

(31. Mathematikolympiade Bulgariens, 1982)

Aufgabe 15

In den Primzahlzerlegungen von r+1 gegebenen positiven natürlichen Zahlen ($r \geq 1$) mögen insgesamt nur r Primzahlen auftreten. Man beweise, daß es unter den r+1 natürlichen Zahlen gewisse Zahlen gibt, deren Produkt ein vollständiges Quadrat liefert.

(Mathematical Spectrum 11, 1978/79, Nr. 3)

Lösungen

Aufgabe 1

Angenommen, es gibt einen Parameter a, der den Bedingungen der Aufgabe genügt. Seien x, $q \cdot x$, $q^2 \cdot x$, $q^3 \cdot x$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Da sie voneinander verschieden sind, gilt $x \neq 0$, $q \neq 0, \pm 1$. Wir dürfen $|q| > 1$ annehmen und erhalten $|x| < |q\,x| < |q^2 x| < |q^3 x|$. Die Ausgangsgleichung ist symmetrisch. Daher sind auch die Zahlen $\frac{1}{q^i \cdot x}$ $(i = 0,1,2,3)$ Lösungen dieser Gleichung. Folglich ist

$$\frac{1}{x} = q^3 \cdot x,\ q = x^{-2/3} \text{ und die Wurzeln sind}$$

$$x,\ x^{1/3},\ x^{-1/3},\ x^{-1}.$$

Nach dem bekannten Zusammenhang zwischen den Wurzeln eines Polynoms und dessen Koeffizienten ist also

$x + x^{1/3} + x^{-1/3} + x^{-1} = \frac{a}{16}$ und

$x^{4/3} + x^{2/3} + 1 + 1 + x^{-2/3} + x^{-4/3} = (2a + 17) \cdot \frac{1}{16}$.

Sei $z := x^{1/3} + x^{-1/3}$ gesetzt. Dann ist $z^3 - 2z = \frac{a}{16}$ und

$$z^4 - 3z^2 = x^{4/3} + x^{2/3} + x^{-2/3} + x^{-4/3}$$
$$= (2a - 15) \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot (z^3 + 2z) - \frac{15}{16},$$

also $z^4 - 2z^3 - 3z^2 + 4z + \frac{15}{16} = 0$.

Diese Gleichung hat die Nullstellen $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Da $|z| = \left|x^{1/3} + x^{-1/3}\right| \geq 2$ ist, ist $z = \frac{5}{2}$ die einzige Möglichkeit. So ist $a = 16\,(\frac{125}{8} - 5) = 170$.

Andererseits hat die Ausgangsgleichung für $a = 170$ die Nullstellen $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2 und 8 und diese bilden tatsächlich eine geometrische Folge.

Aufgabe 2

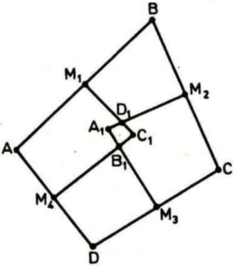
Die Eigenschaft der Anzahl der weißen Kugeln in der Urne, gerade beziehungsweise ungerade zu sein, ändert sich in keinem Schritt des Verfahrens. Daher kann für gerade Anzahl p die letzte Kugel nicht weiß sein und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist Null. Ist dagegen p ungerade, so muß die letzte Kugel weiß sein und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist Eins.

Aufgabe 3

a) Fallen irgendwelche zwei der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 im Punkt P zusammen, dann liegen alle Punkte A,B,C,D auf dem betrachteten Umkreis mit dem Mittelpunkt P, das Viereck ABCD ist Sehnenviereck und alle Umkreismittelpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 fallen zusammen.

Mögen nun alle Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 verschieden sein. Sei $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB < 180^\circ$. Dann liegt A außerhalb des Umkreises von $\triangle BCD$ und folglich ist $\overline{AA_1} > \overline{A_1C}$. Ähnlich ergibt sich $\overline{CC_1} > \overline{AC_1}$. Daher liegen die Punkte A_1 und C_1 auf verschiedenen Seiten der Mittelsenkrechten g auf der Diagonalen AC. Aber B_1 und D_1 liegen beide auf g. Analog überzeugt man sich davon, daß B_1 und D_1 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A_1 und C_1 liegen.

b)



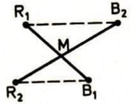
Sei M_1, M_2, M_3 beziehungsweise M_4 der Mittelpunkt der Strecke AB, BC, CD beziehungsweise AD. Da $B_1M_3D\,M_4$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle M_4B_1M_3 = 180^\circ - \sphericalangle ADC$. Analog schließt man für die anderen Winkel von $A_1B_1C_1D_1$. Da die Winkel $A_2B_2C_2D_2$ in entsprechender Weise aus den Winkeln von $A_1B_1C_1D_1$ hergeleitet werden, ist

$$\sphericalangle A_2B_2C = 180^\circ - \sphericalangle A_1D_1C_1 = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ABC) = \sphericalangle ABC$$

usw. für die anderen Winkel. Außerdem ist $A_2B_2 \perp C_1D_1$ und $AB \perp C_1D_1$ und folglich $A_2B_2 \parallel AB$. Daher sind die Seiten von $A_2B_2C_2D_2$ parallel zu den entsprechenden Seiten von ABCD. Schließlich ist die Gerade durch A_1 und C_1 die Mittelsenkrechte von BD kg und die Gerade durch B_2 und D_2 ist die Mittelsenkrechte von A_1C_1. Daher ist die Diagonale BD von ABCD parallel zu der Diagonalen B_2D_2 von $A_2B_2C_2D_2$. Daher sind die Seiten und Diagonalen von $A_2B_2C_2D_2$ parallel zu den entsprechenden Stücken von ABCD und mithin sind die beiden Vierecke ähnlich und ähnlich gelegen.

Aufgabe 4

Wir betrachten alle möglichen disjunkten Paarungen von Punkten verschiedener Farbe und verbinden die entsprechenden Punkte. Es ist also zu zeigen, daß es mindestens eine Paarung darunter gibt, deren Strecken disjunkt sind. Es gibt genau n! Paarungen. Für jede Paarung summieren wir die Länge ihrer Strecken. Unter allen diesen (endlich vielen) Paarungen gibt es eine mit minimaler Länge. Wir zeigen, daß bei dieser die Strecken disjunkt sind. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es zwei rote Punkte R_1 und R_2 und zwei blaue Punkte B_1 und B_2, für die die Strecken $\overline{B_1R_1}$ und $\overline{B_2R_2}$ zur minimalen Paarung gehören und sich schneiden.



Mit $\{M\} = \overline{R_1B_1} \cap \overline{R_2B_2}$ ist dann

$$\left|\overline{B_1R_2}\right| + \left|\overline{B_2R_1}\right| < \left|\overline{B_1M}\right| + \left|\overline{MR_2}\right| + \left|\overline{B_2M}\right| + \left|\overline{MR_2}\right| = \left|\overline{B_1R_1}\right| + \left|\overline{B_2R_2}\right| .$$

Ersetzt man also $\overline{B_1R_1}$ und $\overline{B_2R_2}$ durch $\overline{B_1R_2}$ und $\overline{B_2R_1}$, so erhält man eine Paarung mit kleinerer Streckenlängensumme, was der vorausgesetzten Minimalität widerspricht.

Aufgabe 5

Für $k = 0,1,2,\ldots,2n-2$ definieren wir $I_k := \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right)$ und $I_{2n-1} := \left[\frac{2n-1}{2n}, 1\right]$. Unter den 2n Intervallen I_1 gibt es mindestens n, die keine der Zahlen $P_1,\ldots,P_n$ enthalten. Unter diesen letzten wählen wir n aus und bezeichnen mit $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ihre Mittelpunkte.

Sei

$$B := 8n\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Wir fixieren ein $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ und betrachten P_i. Sei $d_{ij} := \left|x_j - P_i\right|$. Dann gilt

$$d_{ij} \geqq \frac{1}{4n} \text{ für alle } j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

$$d_{ij} \geqq \frac{3}{4n} \text{ für mindestens } n - 2 \text{ der } j\text{'s}, \ldots$$

Also ist

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leqq 2 \cdot \sum_{h=0}^{n-1} \frac{4n}{1+2h} = B.$$

Wegen

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\right)\leq n\cdot B$$

gibt es einen Index $j\in\{1,2,\dots,n\}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_{ij}}\leq B.$$

<u>Aufgabe 6</u>

Offenbar ist lediglich der Fall $0<x_i<1,\ i=1,2,\dots,n$, von Interesse. Dabei wurde der Fall $n=2$, d. h.

$$x_1^{x_2}+x_2^{x_1}>1$$

als Sonderaufgabe im Sonderheft 1977 (Lösung in Heft 7, Seite 21, unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung $(1+x)^n<1+n\cdot x$) behandelt. Für $n\geq 3$ sei $x_3=\min\limits_{i=1,\dots,n}x_i$ und $S:=x_1^{x_2}+x_2^{x_3}+\dots+x_{n-1}^{x_n}+x_n^{x_1}$.

Dann ist

$$S\geq x_1^{x_2}+x_2^{x_3}\geq x_3^{x_2}+x_2^{x_3}>1.$$

Für den zweiten Teil wählen wir eine reelle Zahl $r>o$ und setzen

$$x_n:=1,$$
$$x_{n-1}:=r^{-1},$$
$$x_{n-2}:=r^{-r},$$
$$x_{n-3}:=r^{-r^r},$$
$$x_{n-4}:=r^{-r^{r^r}},$$
$$\vdots$$

$$x_1:=r^{-\overbrace{r^{r^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{r}}}}}}^{(n-2)\,-\,\text{mal}}}$$

Dann ist wegen

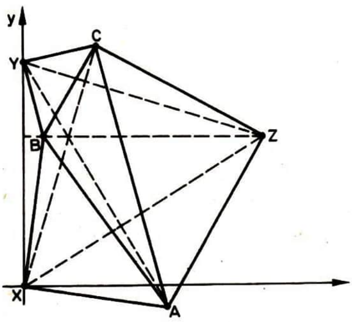
$$x_i^{x_{i+1}} = (r^{-r^{r^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{r}}}}}}) \cdot (r^{-r^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{r}}}}}) = r^{-1}$$

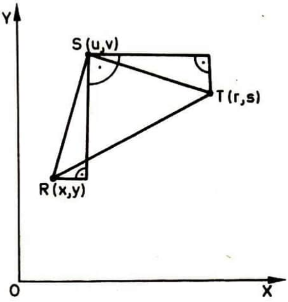
$$S = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{r}.$$

Also kann S beliebig nahe an 1 herankommen.

<u>Aufgabe 7</u>

Wir betrachten ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem. O.B.d.A. mögen X,Y,Z beziehungsweise B die Koordinaten (o,o), (o,a), (b,c) und (m,n) haben.





Bilden die Punkte R(x,y), S(u,v), T(r,s) ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei S, so folgt aus der Ähnlichkeit in Dreiecken

$$r = u + v - y, \quad s = v - u + x.$$

Somit ergeben sich aus B und Y für C: C(a−n, a+m) und aus C und Z für A: A(b+c−a−m, c−b+a−n) und aus A und X für B: B(−c+b−a+n, b+c−a−m).

Wegen B = B(m,n) folgt

$$m = -c+b-a+n,$$
$$n = b+c-a-m.$$

Also ist $m = b - a$ und $n = c$.
Dadurch haben wir auch sofort eine sehr einfache Konstruktionsmöglichkeit: Man fällt von Z das Lot auf $\overline{XY}$ und trägt auf dem Lot von Z aus die Länge $|\overline{XY}|$ der Strecke $\overline{XY}$ ab. Dabei entsteht B. Analog konstruiere man A und C. Es ergibt sich:

$$B(b-a,c),\ C(a-c,b),\ A\ (c,a-b). \tag{4}$$

Die Konstruktion von A,B und C ist stets eindeutig möglich. Es kann aber eintreten, daß die Punkte A,B,C auf einer Geraden liegen oder die rechtwinkligen Dreiecke nicht alle "nach außen" vom Dreieck $\triangle ABC$ liegen.
Die Punkte A,B,C liegen genau dann auf einer Geraden, wenn das Vektorprodukt $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ der Nullvektor ist, d. h., A,B,C bilden genau dann ein Dreieck, wenn

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \neq \underline{o}$$

ist. Aus $\overrightarrow{BA} = (c-b+a) \cdot \underline{i} + (a-b-c) \cdot \underline{j}$ und
$\overrightarrow{BC} = (2a-b-c) \cdot \underline{i} + (b-c) \cdot \underline{j}$
erhalten wir $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \left[(c-b+a)(b-c) - (2a-b-c)(a-b-c)\right] \cdot \underline{k}$
A,B,C bilden also genau dann ein Dreieck, wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2\,ab - ac \neq o \tag{5}$$

ist. Analog ist $\overrightarrow{YB} \times \overrightarrow{YC} = \left[(b-a)^2 + (c-a)^2\right] \cdot \underline{k}$
Y,B,C bilden also genau dann ein Dreieck, wenn

$$(b-a)^2 + (c-a)^2 \neq o \tag{6}$$

ist. Die Punkte Z,C,A bilden genau dann ein Dreieck, wenn $\overrightarrow{ZC}\times\overrightarrow{ZA} = \left[(a-b-c)^2 + (c-b)^2\right] \cdot \underline{k}$ nicht der Nullvektor, d. h., wenn

$$(a-b-c)^2 + (c-b)^2 \neq o \tag{7}$$

ist. Die Punkte X,A,B bilden genau dann ein Dreieck, wenn $\overrightarrow{XA} \times \overrightarrow{XB} = \left[c^2 + (a-b)^2\right] \cdot \underline{k}$ nicht der Nullvektor, d. h., wenn

$$c^2 + (a-b)^2 \neq o \tag{8}$$

ist. Nun folgt aus (5) leicht (6), (7) und (8).
Ferner liegen Y,Z und X genau dann außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn YBC, BAC, ZCA, XAB die gleiche Umlaufrichtung in der Ebene erzeugen, d. h., wenn die Vektoren $\overrightarrow{YB} \times \overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{ZC} \times \overrightarrow{ZA}$, $\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XB}$ und $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ gleichorientiert sind, also wenn sie im Vorzeichen ihrer $\underline{k}$-Koordinate übereinstimmen. Dieses Vorzeichen ist unter der Voraussetzung von (5) in den ersten drei Vektoren positiv. Daher muß für den letzten Vektor gelten:

$$-2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 4ab + 2ac > o. \tag{9}$$

oder gleichwertig $a^2+b^2+c^2-4ab-2ac < 0$.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die in der Aufgabe geforderte Konstruktion genau dann ausführbar ist, wenn die Bedingung (9) erfüllt ist. Die Bedingung (9) ihrerseits ist gleichwertig zu

$$(a-b)^2 + (\tfrac{a}{2} - c) < (\tfrac{a}{2})^2.$$

Sind also X und Y gegeben, so existiert ein $\triangle ABC$ mit den geforderten Eigenschaften genau dann, wenn Z innerhalb eines Kreises mit dem Radius $\frac{a}{2}$ um denjenigen Punkt M gelegen ist, der auf der Mittelsenkrechten von $\overline{XY}$ im Abstand a von der Geraden XY liegt. Dabei bezeichne a den Abstand von X und Y.

<u>Aufgabe 8</u>

Wir setzen

$$A_n := \sum_{\frac{n}{2} \leqq k \leqq n} a_k, \qquad b_n = \min_{\frac{n}{2} \leqq k \leqq n} a_k$$

Dann ist wegen $e^x > 1 + x$ für alle reellen $x > 0$
$(f(x) := e^x - x$ erfüllt $f(0) = 0$ und $f'(x) = e^x - 1 > 0)$:

$$\frac{a_n}{b_n} \leqq \prod_{\frac{n}{2} \leqq k \leqq n} (1 + a_k) < \prod_{\frac{n}{2} \leqq k \leqq n} e^{a_k} = e^{A_n}, \tag{10}$$

da $b_n = a_{i_o}$ mit $\frac{n}{2} \leqq i_o \leqq n$ und

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{i_o+1}}{a_{i_o}} \leqq (1+a_n)(1+a_{n-1})\ldots(1+a_{i_o+1})$$

nach Voraussetzung gilt. Aus (10) folgt somit wegen

$$A_n \geqq \frac{n}{2} \cdot b_n$$

$$a_n < b_n \cdot e^{A_n} \leqq \frac{2}{n} A_n \cdot e^{A_n},$$

d. h.

$$0 < n \cdot a_n \leqq 2 A_n e^{A_n}, \tag{11}$$

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} A_n = o$ und

schließlich wegen (11) $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = o$.

Aufgabe 9

Für $i \in \{1,2,\ldots,k^2+1\}$ definieren wir $f(i)$ als die größte natürliche Zahl, für die es Indizes $j_2,\ldots,j_{f(i)}$ gibt, so daß $i < j_2 < \ldots < j_{f(i)}$ und $a_i \leq a_{j_2} \leq \ldots \leq a_{f(i)}$ gilt.

Falls ein i existiert, für das $f(i) \geq k+1$ ist, haben wir bereits die gesuchten Indizes $i_1 := i,\ i_2 := j_2,\ldots,i_{k+1} := j_{k+1}$ gefunden. Sei also für alle $i \in \{1,\ldots,k^2+1\}$ die Beziehung $f(i) \leq k$ erfüllt.
Nach dem Schubfachprinzip finden wir dann $k+1$ Indizes $l_1,\ldots,l_{k+1}$ und ein $z \in \{1,\ldots,k\}$, so daß

$$f(l_1) = \ldots = f(l_{k+1}) = z \text{ und } l_1 < \ldots < l_{k+1} \tag{12}$$

ist. Wir werden zeigen, daß $a_{l_1} > \ldots > a_{l_{k+1}}$ ist. Dann sind wir mit dem Beweis fertig, denn wir können dann $i_1 := l_1,\ldots,i_{k+1} := l_{k+1}$ wählen.
Angenommen, es wäre für ein $r \in \{1,2,\ldots,k\}$ die Ungleichung $a_{l_r} \leq a_{l_{r+1}}$ erfüllt. Wegen $f(a_{l_{r+1}}) = z$ gibt es Indizes $j_2,\ldots,j_z$, so daß $l_{r+1} < j_2 < \ldots < j_z$ und $a_{l_{r+1}} \leq a_{j_2} \leq \ldots \leq a_{j_z}$ ist.
Wegen $l_r < l_{r+1}$ und $a_{l_r} \leq a_{l_{r+1}}$ wäre dann $f(l_{l_r}) \geq z+1$ im Widerspruch zu (12).

Aufgabe 10

Die Summe auf der linken Seite der Ungleichung (1) sei mit R_n bezeichnet. O.B.d.A. sei $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.
Man erkennt leicht, daß

$$R_n = 2 \cdot \sum_{i<j} |x_i - x_j| = 2 \cdot \sum_{i<j} (x_j - x_i) \text{ ist.}$$

In die Summe $\sum_{i<j} (x_j - x_i)$ geht jede Größe x_k (bei festem k) genau $(k-1)$-mal mit dem Vorzeichen + und $(n-k)$-mal mit dem Vorzeichen − ein. Folglich ist

$$R_n = 2 \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\, x_k - (n-k)\, x_k\right] = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-n-1) \cdot x_k.$$

Die Summanden $(2k - n - 1) \cdot x_k$ sind für $k < \frac{n+1}{2}$ nicht positiv und für $k \geqq \frac{n+1}{2}$ nicht negativ. Daher ist

$$\left\{\begin{aligned} R_n &= 2 \cdot \sum_{k<\frac{n+1}{2}} (2k-n-1)\, x_k + 2 \cdot \sum_{k \geqq \frac{n+1}{2}} (2k-n-1)\, x_k \\ &\leqq 2 \cdot \sum_{k \geqq \frac{n+1}{2}} (2k-n-1)\, x_k \leqq 4 \cdot \sum_{k \geqq \frac{n+1}{2}} (2k-n-1) =: 4 \cdot S_n \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Für gerades n, $n = 2m$, ist

$$S_n = 1+3+5+ \ldots + (2m - 1) = \frac{n^2}{4}$$

und für ungerades n ist

$$S_n = 2+4+6+ \ldots + (n - 1) = \frac{n^2-1}{4}.$$

Aus den Ungleichungen (13) und den letzten Gleichungen ergibt sich die Behauptung. Ferner erkennt man, daß in (1) genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn n gerade ist und $\frac{n}{2}$ der Zahlen gleich 0 und $\frac{n}{2}$ gleich 2 sind.

Aufgabe 11

Der Beweis verläuft durch Induktion über n. Für $n = o$ ist die zu beweisende Ungleichung erfüllt. Wir führen nun den Schritt von $n - 1$ auf n durch. Hierzu sei gesetzt:

$\underline{H}' := \{F \in \underline{K};\ n \notin F\}$, $\underline{H}'' := \{F \in \underline{H};\ n \in F\}$,

$\underline{K}' := \{F \in \underline{K};\ n \in F\}$, $\underline{K}'' := \{F \in \underline{H};\ n \in F\}$.

Offenbar ist

$$|\underline{H} \cap \underline{K}| = |\underline{H}' \cap \underline{K}'| + |\underline{H}'' \cap \underline{K}''| . \tag{14}$$

Da die Bedingungen (2) und (3) auch für $\underline{H}'$ und $\underline{K}'$ gelten, ist nach Induktionsvoraussetzung

$$|\underline{H}' \cap \underline{K}'| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\, |\underline{H}'| \cdot |\underline{K}'| \tag{15}$$

Um $|\underline{H}'' \cap \underline{K}''|$ abschätzen zu können, definieren wir

$\underline{H}''' := \{T \subseteq \{1,\ldots,n\}\ ;\ T \cup \{n\} \in \underline{H}''\}$ und

$\underline{K}''' := \{T \subseteq \{1,\ldots,n\}\ ;\ T \cup \{n\} \in \underline{K}''\}$.

Offensichtlich genügen sowohl $\underline{H}''$ als auch $\underline{K}''$ und ebenso $\underline{H}'''$ und $\underline{K}'''$ den Bedingungen (2) und (3).

Also ist nach Induktionsvoraussetzung

$$|\underline{H}''' \cap \underline{K}'''| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |\underline{H}'''| \cdot |\underline{K}'''| .$$

Wegen $|\underline{H}'' \cap \underline{K}''| = |\underline{H}''' \cap \underline{K}'''|$, $|\underline{H}''| = |\underline{H}'''|$ und $|\underline{K}''| = |\underline{K}'''|$ erhalten wir

$$|\underline{H}'' \cap \underline{K}''| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |\underline{H}''| \cdot |\underline{K}''| . \tag{16}$$

Aus (14), (15) und (16) ergibt sich

$$|\underline{H} \cap \underline{K}| \leq \frac{1}{2^n} (2 \cdot |\underline{H}'| \cdot |\underline{K}'| + 2 |\underline{H}''| \cdot |\underline{K}''|). \tag{17}$$

Gilt $F \in \underline{H}'$, so ist wegen (2) auch $F \setminus \{n\} \in \underline{H}''$, also $|\underline{H}'| \leq |\underline{H}''|$. Gilt $F \in |\underline{K}''|$, so ist wegen (3) auch $F \cup \{n\} \in |\underline{K}'|$, also $|\underline{K}'| \geq |\underline{K}''|$.

Daher ist

$$(|\underline{H}'| - |\underline{H}''|) \cdot (|\underline{K}'| - |\underline{K}''|) \leq o, \text{ also}$$

$$2 |\underline{H}'| \cdot |\underline{K}'| + 2 |\underline{H}''| \cdot |\underline{K}''| \leq (|\underline{H}'| + |\underline{H}''|)(|\underline{K}'| + |\underline{K}''|) = $$
$$= |\underline{H}| + |\underline{K}| .$$

Aus der letzten Ungleichung und (17) folgt die Behauptung.

Aufgabe 12

Wir setzen $g(x) := f(x) - x$. Es gilt $g(x^4) = - g(x^2) = - (-g(x)) = g(x)$. Mittels vollständiger Induktion nach n erhält man

$$g(x^{4^n}) = g(x).$$

Wir setzen $y = x^{4^n}$. Es ist $y > o$ und $x = y^{4^n}$ und damit

$$g(x) = g(x^{4^{-n}}) \text{ für } x > o.$$ Mit f ist auch g stetig.

Also gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x^{4^{-n}}) = g(\lim_{n\to\infty} x^{4^{-n}}) = g(1).$$

Weiter ist $g(1^2) = g(1) = - g(1)$, also $g(1) = o$ und für $x = o$ folgt $g(o) = o$.

Ferner ist $g(-x) = - g\left[(-x)^2\right] = - g(x^2) = g(x) = o$ für $x > o$.

Damit gilt $g(x) \equiv o$ für alle $x \in R$ und folglich $f(x) = x$.
Diese Funktion erfüllt tatsächlich die Ausgangsgleichunguund ist damit einzige Lösung.

Aufgabe 13

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $x_n > 0$. Weiter ist nach der Ungleichung vom arithmetisch-geometrischem Mittel für alle $n \geqq 0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geqq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}.$$

Ferner ist

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} - x_n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - x^2_n}{x_n} \leqq 0$$

d. h., die Folge $\{x_n\}$ ist monoton fallend. Aus der Monotonie und Beschränktheit folgt die Existenz eines Grenzwertes g der Folge. Wegen $g > 0$ ist $g = \frac{1}{2}\left(g + \frac{2}{g}\right)$, also $g = \sqrt{2}$.

Weiter ist für alle n

$$\frac{2}{x_n} \leqq \frac{2}{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)} = \frac{2}{x_{n+1}},$$

$$x_n + \frac{2}{x_n} - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \frac{2}{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)} \leqq x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}\right]$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left[x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right] .$$

also

$$x_{n+1} - x_{n+2} \leqq \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1}).$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion nach n

$$x_n - x_{n+1} \leqq \frac{1}{2^n}(x_0 - x_1)-$$

Für alle $k > 0$ ist

$$x_n - x_{n+k} = (x_n - x_{n+1}) + \dots + (x_{n+k-1} - x_{n+k})$$

$$\leqq \frac{1}{2^n}(x_0 - x_1) + \dots + \frac{1}{2^{n+k-1}}(x_0 - x_1) = \frac{1}{2^n}(x_0 - x_1)\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{2^{n-1}}(x_0 - x_1)$$

Mit $k \to \infty$ ergibt sich

$$x_n - \sqrt{2} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}(x_0 - x_1).$$

Speziell für $x_0 = 1000$; $n = 30$ folgt

$$|x_{30} - \sqrt{2}| = x_{30} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{29}} \cdot (1000 - 500,001)$$
$$< \frac{500}{2^{29}} < 10^{-6},$$

da $2^{10} = 1024 > 10^3$ ist.

Bemerkung: Für $x_0 > \sqrt{a}$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ kann man analog

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad |x_0 - x_1| \quad \text{beweisen.}$$

Aufgabe 14

Für $n = 1$ erhält man aus $2^k - 1 = 1!$ den Wert $k = 1$ und $(1,1)$ als eins der gesuchten Lösungspaare.

Für $n = 2$ muß $3^k - 1 = 2$, also $k = 1$ sein und $(2,1)$ ist ein weiteres Lösungspaar.

Für $n \geq 2$ ist $n!$ gerade und damit ist für jedes Lösungspaar (n,k) auch n gerade.

Für $n = 4$ muß $5^k - 1 = 24$, also $k = 2$ sein. Offenbar ist $(4,2)$ ein Lösungspaar.

Sei nun $n = 2 \cdot m > 4$ und gerade und (n,k) ein Lösungspaar. Dann ist

$$n! = (2m)! = 2m\,(2m-1)!$$

und $(2m-1)!$ enthält als Faktoren 2 und $m \neq 2$.

Dabei ist $n^2 \mid n!$ also $n^2 \mid ((n+1)^k - 1)$. Aber

$$(n+1)^k = n^k + \ldots + \binom{k}{2} n^2 + n + 1$$

und dabei gilt $n \mid k$ und mithin $n \leq k$. Das ergibt

$$(n+1)^k \geq (n+1)^n > n! + 1$$

im Widerspruch dazu, daß (n,k) ein Lösungspaar sein soll.

Folglich hat die Ausgangsgleichung für $n > 4$ keine Lösung.

Aufgabe 15

Seien $a_1, \ldots, a_{r+1}$ die gegebenen $r + 1$ positiven natürlichen Zahlen. Dann gibt es r verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, so daß

$$a_j = p_1^{b_{1j}} \cdot p_2^{b_{2j}} \ldots p_r^{b_{rj}}, \; j = 1, \ldots, r + 1 \text{ ist.}$$

Sind $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ natürliche Zahlen, so gilt

$$a_1^{c_1} \cdot a_2^{c_2} \ldots a_{r+1}^{c_{r+1}} = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \ldots p_r^{d_r},$$

wobei

$$d_i = b_{i1} \cdot c_1 + b_{i2} \cdot c_2 + \ldots + b_{i,r+1} \cdot c_{r+1}$$

$$i = 1, \ldots, r$$

ist. Wir suchen solche $c_1, \ldots, c_{r+1}$, die Null oder Eins sind, so daß nicht alle gleich Null sind, für die sämtliche d_1, $d_2, \ldots, d_r$ gerade Zahlen sind. Wir rechnen modulo 2 und ersetzen alle natürlichen Zahlen durch ihre Restklassen mod 2 (d. h. durch Elemente des Körpers Z_2). Möge ein Querstrich diese Restklassen bezeichnen. Dann haben wir für das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{c} \bar{b}_{11} \cdot x_1 + \bar{b}_{12} \cdot x_2 + \ldots + \bar{b}_{1,r+1} \cdot x_{r+1} = \bar{o} \\ \cdots\cdots \\ \bar{b}_{r1} \cdot x_1 + \bar{b}_{r2} \cdot x_r + \ldots + \bar{b}_{r,r+1} \cdot x_{r+1} = \bar{o} \end{array}\right\} \quad (18)$$

eine Lösung im Körper Z_2 zu finden, für die nicht alle Koordinaten gleich Null sind. Das ist möglich, da ein homogenes Gleichungssystem, für das die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist, stets eine nichttriviale Lösung besitzt.

Sei $(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{r+1})$ eine Lösung von (18) wobei nicht alle $\bar{q}_i$ gleich Null sind. Dann ergibt das Produkt derjenigen a_j mit $\bar{q}_j \neq o$ ein vollständiges Quadrat.

<u>Sonderaufgabe im Heft 9</u>

<u>Aufgabe</u>

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. $h(n)$ bezeichne den größten Primteiler von n. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n mit $h(n) < h(n+1) < h(n+2)$?

(IMO-Vorschlag Jugoslawien, 1979)

Lösung

Es sei p eine Primzahl mit $p > 2$. Wir werden beweisen, daß es eine positive ganze Zahl r mit

$$h(p^{2^r} - 1) < h(p^{2^r}) < h(p^{2^r} + 1) \qquad . \qquad (19)$$

gibt.

Als erstes zeigen wir, daß die Folge der Zahlen $F_r := p^{2^r} + 1$ $(r = 1,2,\dots)$ eine Zahl enthält, die einen Primteiler besitzt, der größer als p ist. Wir setzen noch

$F_0 := p + 1 = p^{2^0} + 1$. Dann ist für $r = 1,2,\dots$

$$F_r - 2 = (p - 1) \prod_{i=0}^{r-1} F_i. \qquad (20)$$

Hieraus folgt, daß für positive ganze Zahlen l und k mit $l \neq k$ gilt, daß F_l und F_k höchstens den Primteiler 2 gemeinsam haben können.

Für $r \geqq 1$ ist $F_r \equiv 2 \mod 4$ und $F_r > 2$. Folglich besitzt F_r für $r \geqq 1$ ungerade Primteiler. Wären alle ungeraden Primteiler von $F_1, F_1, \dots, F_p$ kleiner als p, so müßte es positive ganze Zahlen q und s mit $1 \leqq q < s \leqq p$ geben, für die F_q und F_s einen gleichen ungeraden Primteiler haben. Das ist aber bereits als unmöglich nachgewiesen.

Es sei n_0 die kleinste der positiven ganzen Zahlen r, für die F_r einen Primteiler größer als p hat. Dann ist $1 \leqq n_0 \leqq p$.

Wegen (20) enthält $F_{n_0} - 2 = p^{2^{n_0}} - 1$ nur Primteiler kleiner als p, $F_{n_0} - 1 = p^{2^{n_0}}$ nur den Primteiler p und nach Definition von n_0 enthält $F_{n_0} = p^{2^{n_0}} + 1$ einen Primteiler größer als p.

Damit gilt (19) mit $r = n_0$.

Da (19) für alle ungeraden Primzahlen gilt, und es unendlich viele Primzahlen gibt, die größer als 2 und ungerade sind, erfüllen also unendlich viele natürliche Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 16

Sonderaufgabe

Es seien $a_1,\dots,a_n$ und $b_1,\dots,b_n$ reelle Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 \leqq \dots \leqq a_n, & \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \\ b_1 \leqq \dots \leqq b_n, & \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Man zeige, daß $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \geqq 0$ ist.

Aufgaben

Aufgabe 1

Vier verschiedene Kreise K, K_1, K_2, K_3 und eine Gerade L seien in der Ebene gegeben. K und L seien disjunkt und jeder der Kreise K_1, K_2, K_3 berühre die anderen zwei und auch K und L. Die Radiuslänge von K sei Eins. Man bestimme den Abstand des Mittelpunktes M von K von der Gerade L.

(Vorschlag Finnlands zur IMO 1982)

Aufgabe 2

Das konvexe n-Eck K sei derart in der mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene gelegen, daß

$$(\text{Fläche von } K \cap Q_i) = \frac{1}{4} \cdot (\text{Fläche von } K),\ i = 1,2,3,4$$

gelte, wobei Q_i die durch das Koordinatensystem bestimmten Viertelebenen sind. Falls K keinen Gitterpunkt außer (0,0) enthält, beweise man:

$$(\text{Fläche von } K) < 4.$$

(Vorschlag Jugoslawiens zur IMO 1982)

Aufgabe 3

a) Man finde eine Permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$, für welche der Ausdruck

$$Q := a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1$$

maximal ist.

b) Man finde eine Permutation, für welche Q minimal ist.

(Vorschlag Kanadas zur IMO 1982)

Aufgabe 4

Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n definiert ist und nur nichtnegative ganze Werte annimmt. Es gelte für alle m und n:

a) $f(m+n) - f(m) - f(n)$ nimmt nur die Werte 0 oder 1 an.

b) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ und $f(9999) = 3333$.

Man bestimme $f(1982)$.

(IMO 1982 Nr. 1, Vorschlag Großbritanniens)

Aufgabe 5

Gegeben sei ein nichtgleichschenkliges Dreieck $A_1A_2A_3$ mit den Seiten a_1, a_2, a_3 (a_i ist die gegenüberliegende Seite zu A_i). Für alle $i = 1,2,3$ sei M_i der Mittelpunkt der Seite a_i und T_i sei der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite a_i. Die Spiegelung an der Halbierenden des Innenwinkels des Dreiecks mit dem Scheitel A_i überführe den Punkt T_i in den Punkt S_i. Man beweise: Alle drei Geraden M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 gehen durch einen gemeinsamen Punkt.

(IMO 1982 Nr. 2, Vorschlag der Niederlande)

Aufgabe 6

Man betrachte nur Folgen (x_n), $n = 0,1,2,\ldots$ von positiven reellen Zahlen, die die Bedingungen erfüllen:

$$x_0 = 1 \text{ und für alle } i \geq 0 \text{ ist } x_{i+1} \leq x_i.$$

a) Man beweise, daß für jede solche Folge für ein geeignetes $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999$$

b) Man gebe eine solche Folge an, so daß für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

(IMO 1982 Nr. 3, Vorschlag der UdSSR)

Aufgabe 7

Es sei n eine positive ganze Zahl. Man beweise: Falls die Gleichung

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

eine Lösung (x,y) mit ganzen Zahlen x,y hat, so hat sie mindestens drei derartige Lösungen. Man zeige außerdem, daß die Gleichung für $n = 2891$ keine Lösung (x,y) mit ganzen Zahlen x,y hat.
(IMO 1982 Nr. 4, Vorschlag Großbritanniens)

Aufgabe 8

Die Diagonalen AC bzw. CE eines regelmäßigen Sechsecks ABCDEF werden durch innere Punkte M bzw. N derart geteilt, daß

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = s$$

gilt. Man bestimme s, falls B, M und N auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 9

Es sei S ein Quadrat mit der Seitenlänge 100 und es sei L ein in S gelegener Streckenzug, der sich selbst weder schneidet noch berührt und der aus den Strecken A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ mit $A_0 \neq A_n$ gebildet wird.
Außerdem gebe es für jeden Punkt P des Randes von S einen Punkt auf L, für den der Abstand von P nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist. Man zeige, daß es zwei Punkte X und Y auf L gibt, deren Abstand nicht größer als 1 ist und für der zwischen X und Y gelegene Teil von L nicht kürzer als 198 ist.
(IMO 1982 Nr. 6, Vorschlag Vietnams)

Aufgabe 10

Man beweise die Ungleichung

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)\left(\frac{x_1}{a_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n}\right) \leq (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 \cdot \frac{(a_1 + a_n)^2}{4\, a_1a_n}$$

mit $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ und $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Aufgabe 11

Ein konvexes n-Eck ist durch Diagonalen so in Dreiecke zerlegt, daß

a) von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Diagonalen ausgeht,

b) keine zwei Diagonalen sich im Innern des n-Ecks schneiden.

Man zeige, daß n durch 3 teilbar ist.

(Polnische Olympiade 1973/74)

Aufgabe 12

In einem sagenhaften Königreich gewährt der König einem seiner Bauern einen Wunsch. Dieser erbittet sich Gold. Und zwar sollen in Quadrate, deren Anzahl der Bauer festlegen möchte, auf folgende Art Gold gelegt werden: In das erste Quadrat eine Unze Gold, in das zweite Quadrat $\frac{1}{2}$ Unze, in das dritte Quadrat $\frac{1}{3}$ Unze usw. Nun weiß der König aber, daß die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert und er auf diese Art seinen ganzen Goldschatz verliert. Er besinnt sich auf seine Glückszahl 7 und fordert, daß alle diejenigen k-ten Quadrate nicht belegt werden, für die k als Dezimalzahl die Ziffer 7 enthält. Demnach erhält der Bauer also nur im n-ten Quadrat $\frac{1}{n}$ Unze Golkd, wenn n keine 7 enthält. Ist es möglich, daß der Bauer den Goldschatz des Königs, so groß er auch sein mag, vollständig bekommt?

(Aus Mathematical Spectrum)

Aufgabe 13

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\sqrt[2]{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[2]{1-x} - 1 = 0$$

genügen.

Aufgabe 14

Es sei (a_n), $n = 1,2,3,\ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für $n = 1,2,\ldots$ und

$$a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2 \cdot a_{n-2} - a_{n-1}} \qquad \text{für } n = 3,4,\ldots .$$

Gesucht ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß unendlich viele Folgeglieder ganzzahlig sind.

Aufgabe 15

Es sei A die Menge aller n-Tripel $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, wobei $a_i \in \{1,2,\ldots,k\}$ gilt. Man bestimme eine Teilmenge F von A mit maximaler Mächtigkeit, so daß für beliebige $\underline{a}$, $\underline{b}$ aus F gilt.

$\underline{a}$ und $\underline{b}$ stimmen in wenigstens einer Komponente überein. (2)

Lösungen

Aufgabe 1

Diese Aufgabe hat den Teilnehmern des zentralen Mai-Lagers 1982 außerordentliche Schwierigkeiten bereitet und wurde von keinem Schüler gelöst. Seien r_1, r_2, r_3 die Radien von K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte und x der Abstand von M zu L. Die

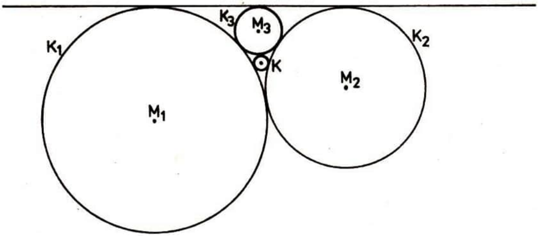


Abb. 1

Hauptschwierigkeit für die Schüler bestand darin, daß sie nur den Fall lösen konnten, daß zwei der Kreise, etwa K_1 und K_2 (vgl. Abb. 1) den gleichen Radius haben, aber der Nachweis fehlte, daß man sich auf diesen Fall beschränken kann. Für den Fall $r_1 = r_2$ erhält man unschwer durch mehrmalige Anwendung des Satzes von Pythagoras $x = 7$.

Die folgende elegante Lösung benötigt fast keine Rechnung, sondern nur die nachstehenden Kenntnisse über die Involution f an einem Kreis K_0 mit dem Mittelpunkt M_0.

1. f ist eine Involution, d. h. $f \cdot f$ ist die identische Abbildung.
2. Das Bild f (K_1) eines nicht durch M_0 verlaufenden Kreises ist ein nicht durch M_0 verlaufender Kreis.
3. Das Bild f(g) jeder nicht durch M_0 verlaufenden Geraden ist ein durch M_0 verlaufender Kreis.

4. Das Bild $f(g)$ jedes durch M_o verlaufenden Kreises ist eine nicht durch M_o verlaufende Gerade.
5. Zu jeder Geraden und jedem zu ihr disjunkten Kreis K findet man einen Kreis K_o, so daß die Mittelpunkte M und M_o auf verschiedenen Seiten von L liegen und die Bilder $f(K)$ und $f(L)$ konzentrische Kreise sind.

Nun wähle man zu den obigen K_1, K_2, K_3, K und L den Kreis K_o derart, daß für K_o, K, L die Aussage 5 richtig ist. Dann verlaufen K_1, K_2, K_3 nicht durch den Mittelpunkt M_o von K_o und die Bilder K_1', K_2', K_3', $K_i' := f(K_i)$, bei der Inversion f an K_o sind Kreise, die die anderen zwei und die beiden konzentrischen Kreise $L' = f(L)$ und $K' = f(K)$ berühren. Auf L' liegt der Punkt M_o. Durch eine Drehung g um den Mittelpunkt von L' kann man erreichen, daß das Bild $g(K_3')$ – durch M_o verläuft. Anschließend spiegele man wieder an K_o. Dann sind $K_1'' := f(g(K_1'))$, $K_2'' := f(g(K_2'))$ und $K'' := f(g(K')) = f(K')$ Kreise, die einander und die Gerade $K_3'' := f(g(K_3'))$ berühren. Außerdem berühren K_1'' und K_2'' die Gerade $f(g(L')) = f(L') = L$. L und K_3'' sind parallel, denn jeder Schnittpunkt würde einen von M_o verschiedenen Schnittpunkt von $g(K_3')$ und L' liefern. Dann würden sich K_3' und L' und damit K_3 und L nicht nur berühren. Die Kreise K_1'' und K_2'' zwischen den parallelen Geraden L, K_3'' sind notwendig kongruent und mit $d(K_1'',L) =: y$ ermittelt man leicht (vgl. Abb. 2).

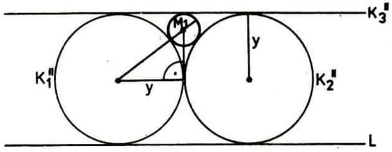


Abb. 2

$$y^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2, \text{ also}$$
$$y = 4 \text{ und } x = 2y - 1 = 7.$$

Da die Aussage 5 nicht so geläufig ist, soll sie noch bewiesen werden. Man benötigt folgende Aussagen über die Inversion f an dem Kreis

$$K_o : \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

6. Eine Gerade L: $Ax + By + C = 0$ ($C \neq 0$, d. h. $M_o \notin L$) geht bei f in einen Kreis

$$(x + \frac{A \cdot r^2}{2 \cdot C})^2 + (y + \frac{Br^2}{2C})^2 = \left[\frac{r^2 \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}{2C}\right]^2$$

über.

7. Ein Kreis $K : x^2, + y^2 + ax + by + c = 0$ ($c \neq 0$, d. h. $M_o \notin K$) geht bei f in einen Kreis

$$x^2 + y^2 + \frac{r^2}{c}(ax + by) + \frac{r^4}{c} = 0$$

über.

Wir wählen nun das kartesische Koordinatensystem derart, daß M_o der Anfangspunkt ist und K bzw. L die Gleichungen

$$K : x^2 + (y-q)^2 = 1, \text{ d. h. } x^2 + y^2 - 2qy + (q^2-1) = 0, \quad |q| \neq 1,$$
$$L : y - w = 0, \quad w \neq 0$$

haben. Dann gilt für die Bildkreise

$$f(K) : x^2 + y^2 + \frac{r^2}{q^2-1} \cdot (-2q)\, y + \frac{r^4}{q^2-1} = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$x^2 + (y - \frac{qr^2}{q^2-1})^2 + (\frac{r^4}{q^2-1} - \frac{q^2 r^4}{(q^2-1)^2}) = 0$$

und

$$f(L) : x^2 + (y - \frac{r^2}{2w})^2 - (\frac{r^2}{2w^2})^2 = 0.$$

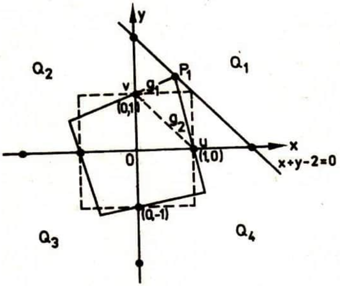
Es genügt also

$$\frac{qr^2}{q^2-1} = \frac{r^2}{2w}, \text{ also } w = \frac{q^2-1}{2q} \text{ zu wählen.}$$

Dabei ist offenbar $q > w$ und mit $a > 0$ als Abstand des gegebenen Mittelpunktes M von K von der gegebenen Geraden L ist $q = w + a$ und aus $2qw = q^2-1$ ergibt sich $w = \sqrt{a^2-1}$ (man beachte, daß wegen $K \cap L = \emptyset$ $a > 1$ gilt) und $q = a + \sqrt{a^2-1}$. Dabei trennt L die Punkte $M = (0, a+\sqrt{a^2-1})$ und $M_o = (0,0)$.

Aufgabe 2

Da K von allen Gitterpunkten höchstens den Punkt (0,0) enthält, ist das n-Eck beschränkt durch gewisse vier Geraden durch die Punkte $(\pm 1,0)$, $(0, \pm 1)$ (vgl. Abb. 3). Dabei kann man annehmen,



daß der Anstieg m_1 bzw. m_2 der Geraden g_1 bzw. g_2 den Bedingungen

$$-1 < m_1 < 1$$

$$m_2 < -1 \text{ oder } m_2 > 1$$

genügt. Sonst liefert einer der Quadranten Q_1 einen Beitrag $\leq \frac{1}{2}$ zur Fläche von K und letztere ist schon kleiner als 4. Sei P_1 der Schnittpunkt von g_1 und g_2. P_1 liegt in Q_1. Da K keinen Gitterpunkt $\neq (0,0)$ enthält, gilt

$$\text{Fläche } (K \cap Q_1) < \text{Fläche } (OUP_1V).$$

Falls P_1 in dem durch $x + y \leq 2$ gegebenen Teil von Q_1 liegt, so ist

Fläche (OUP_1V) = Fläche (OUV) + Fläche $(UP_1V) \leq 1$, also

Fläche $(K \cap Q_1) < 1$ und Fläche $(K) < 4$.

Falls P_1 in dem durch $x + y > 2$ gegebenen Teil von Q_1 liegt, so ist $\sphericalangle\, UP_1V$ spitzwinklig, da der Kreis über dem Durchmesser UV die Gerade $x + y - 2 = 0$ berührt.

Indem man für die anderen Quadranten analog schließt wie für Q_1 erkennt man: es gilt

$$\text{Fläche } (K) < 4$$

oder die Winkel $\sphericalangle\, UP_iV$, $i=1,2,3,4$ sind sämtlich spitze Winkel. Da letzteres für das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ nicht eintreten kann, ist Fläche $(K) < 4$.

Aufgabe 3

(a) Gibt es für eine vorgegebene Permutation $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ Indizes i und j mit

$$1 \leq i,\ i+2 \leq j < n \text{ und } (a_i-a_{j+1})(a_j-a_{i+1}) > 0, \qquad (3)$$

so kann man Q vergrößern, indem man

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \boxed{a_{i+1}}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, \boxed{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_n$$

durch

$$aa_1, a_2, \dots, a_i, \boxed{a_j}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, \boxed{a_{i+1}}, a_{j+1}, \dots, a_n$$

ersetzt. In der Tat erhält man den Zuwachs

$$a_i \cdot a_j + a_{i+1} \cdot a_{j+1} - a_i \cdot a_{i+1} - a_j a_{j+1} = (a_i - a_{j+1})(a_j - a_{i+1}) > 0.$$

Sei A eine Permutation, die den Ausdruck Q maximiert. Da die Anzahl aller Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ endlich ist, gibt es eine derartige Anordnung A. Im folgenden verwenden wir, daß eine zyklische Vertauschung bzw. eine Spiegelung der Indizes (die man sich entsprechend A auf einen Kreis geschrieben vorstelle) den Wert von Q nicht ändert. Durch eine eventuelle zyklische Vertauschung erreicht man

$$A = (1, a_2, \dots, a_n).$$

Sei $2 = a_i$. Dann ist $i = 2$ oder $i = n$, da man andererseits $(1 - a_{i+1})(2 - a_2) > 0$ hätte und nach (3) den Wert von Q vergrößern könnte. Dabei können wir durch eine eventuelle Spiegelung $i = n$ erreichen. Sei $3 = a_j$. Dann ist $j = 2$, da man ansonsten wegen $(1 - a_{j+1}) \cdot (3 - a_2) > 0$ wiederum Q vergrößern könnte. Durch eine Spiegelung erhält man die Anordnung

$$A' = (2, b_2, \dots, 3, 1)$$

für die Q ebenfalls einen maximalen Wert annimmt. Dann beweist man analog wie oben, daß $b_2 = 4$ ist. Durch Fortsetzung dieser Überlegung erhält man die Anordnung

$$\left(1, 3, 5, \dots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1, 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right], \dots, 4, 2\right),$$

für die Q einen maximalen Wert annimmt.

(b) Durch analoge Überlegungen erkennt man, daß Q für die Permutation

$(1, n, 2 \cdot 1, n-2, 2 \cdot 2, n-4, \dots, 2(q-1), n-2(q-1), 2q,$
$, \underline{n-2q-1, n-2q-1}, 2q+1, n-2(q-1)-1, 2(q-1)+1, n-2(q-2)-1,$
$, \dots, 3, n-1)$

für $n = 4q+3$,

$(1, n, 2 \cdot 1, n-2, 2 \cdot 2, n-4, \dots, 2(q-2), n-2(q-2), 2(q-1),$
$, n-2(q-1), \frac{n}{2}, n-2(q-1)-1, 2(q-1)+1, n-2(q-2)-1, 2(q-2)+1,$
$, n-2(q-3)-1, \dots, 3, n-1)$

für $n = 4q$

$(1, n, 2 \cdot 1, n-2, 2 \cdot 2, n-4, \dots, 2(q-1), n-2(q-1), \underline{2q, n-2q},$
$n-2(q-1)-1, 2(q-1)+1, n-2(q-2)-1, 2(q-2)+1, \dots, 3, n-1)$

für $n = 4q+1$,

$(1, n, 2\cdot 1, n-2\cdot 1, 2\cdot 2, n-2\cdot 2, 2\cdot 3, \ldots, 2(q-1), n-2(q-1),$
$2q, \underline{n-2q}, 2q+1, n-2(q-1)-1, 2(q-1)+1, n-2(q-2)-1, \ldots,$
$3, n-1)$

für $n = 4q+2$

ein Minimum annimmt. Der Grundgedanke der Minimumkonstruktion, die Zahl Eins mit den <u>beiden</u> größten Zahlen zu multiplizieren und danach unter den noch möglichen Produkten die größte Zahl mit der kleinsten zu multiplizieren, wurde von den Schülern des Mai-Lagers 1983 nicht erkannt.

<u>Aufgabe 4</u>

Es gilt $f(2) = 2\cdot f(1)$ oder $f(2) = 2\cdot f(1)+1$. Wegen $f(2)=0$ gilt $f(1) = 0$. Ferner ist $f(3) = f(1)+f(2)$ oder $f(3)=f(1)+f(2)+1$. Wegen $f(3) > 0$ ist $f(3) = 1$. Man erhält $f(3n+3) \geqq f(3n)+f(3) = f(3n)+1$ und daraus durch Induktion

$$f(3\cdot n) \geqq n. \tag{4}$$

Gilt in (4) das Zeichen $>$ für irgendeine Zahl n, so gilt es auch für alle Zahlen $n' > n$. Da $f(9999) = 3333$ ist, so ergibt sich $f(3\cdot n) = n$ für $n \leqq 3333$. Insbesondere ist

$$1982 = f(3\cdot 1982) \geqq f(2\cdot 1982)+f(1982) \geqq 3\cdot f(1982)$$

also

$$661 > \frac{1982}{3} \geqq f(1982) \geqq f(1980) + f(2) = 660.$$

Daher ist $f(1982) = 660$.

Bemerkung: Es gibt eine Funktion mit den betrachteten Eigenschaften: $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$.

<u>Aufgabe 5</u>

Auf dem Inkreis überführt die Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch A_1 den Bogen T_3S_1 in den Bogen T_2T_1. Analog geht der Bogen T_3S_2 bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch A_2 in den Bogen T_1T_2 über. Dabei ist $\overset{\frown}{T_3S_1} = -\overset{\frown}{T_2T_1} = \overset{\frown}{T_1T_2} = -\overset{\frown}{T_3S_2}$ und folglich $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ und daher $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Analog erhält man

$$S_1S_3 \parallel M_1M_3,\ S_2S_3 \parallel M_2M_3.$$

Die Dreiecke $M_1M_2M_3$ und $S_1S_2S_3$ haben parallele Seiten und gehen daher auseinander durch eine Translation (Verschiebung) oder eine Homothetie hervor. Eine Translation ist nicht möglich, da der Kreis durch M_1, M_2, M_3 größer als der Kreis durch S_1, S_2, S_3 (Inkreis von $A_1A_2A_3$) ist. An dieser Stelle verwenden wir, daß $\triangle A_1A_2A_3$ nicht regulär ist. Folglich ist das Zentrum der $S_1S_2S_3$ in $M_1M_2M_3$ überführenden Homothetie der gesuchte Punkt auf allen Geraden M_iS_i, $i = 1,2,3$. (Beachte, daß $M_i \neq S_i$ ist, da $\triangle A_1A_2A_3$ nicht gleichschenklig ist!)

Bemerkung: Es ist schwieriger zu beweisen, daß dies Homothetiezentrum derjenige Punkt ist, in dem sich die Umkreise der Dreiecke $S_1S_2S_3$ und $M_1M_2M_3$ berühren (vgl. den Satz von Feuerbach).

Aufgabe 6

a) Angenommen wir haben eine positive Zahl $c_n > 0$, so daß für jede Folge $x_0 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq c_n \cdot x_0.$$

Dann gilt für jede Folge

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right) \geq \frac{x_0^2}{x_1} + c_n \cdot x_1 \geq 2 \cdot \sqrt{x_0^2 \cdot c_n} = x_0 \cdot 2\sqrt{c_n}$$

nach der Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y}$. Daher kann man dann $c_{n+1} = 2 \cdot \sqrt{c_n}$ verwenden. Wegen

$$\frac{x_0^2}{x_1} \geq x_0$$

kann man $c_1 = 1$ wählen und hat

$$c_2 = 2,\ c_3 = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}},\ c_4 = 2 \cdot \sqrt{c_3} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

und allgemein

$$c_n = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}} = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{2^{n-2}}}.$$

Nun überzeugen wir uns davon, daß wir für $n = 14$ $c_n > 3{,}999$ ist, wonach die erste Teilaufgabe gelöst ist. In der Tat

$$c_n = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{2^{n-2}}} > 3{,}999$$

gleichwertig zu

$$2 < \left(\frac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}}$$

und es gilt

$$\left(\frac{4}{3{,}999}\right)^{2^{n-2}} > \left(1 + \frac{1}{4000}\right)^{2^{n-2}} > 1 + \frac{2^{n-2}}{4000} = 1 + \frac{4096}{4000} > 2.$$

b) Sei $x_n = 2^{-n}$. Dann gilt

$$\frac{x_o^2}{x_1} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 2^1 + 2^o + \ldots + 2^{-n+2} = 4 - 2^{-n+2} < 4$$

Diese Folge ist sogar eindeutig bestimmt. Wegen

$$4 > \frac{x_o^2}{x_1} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq \frac{x_o^2}{x_1} + c_{n-1}x_1$$

für alle n und $\lim c_n = 4$ ergibt sich

$$4 \geq \frac{x_o^2}{x_1} + 4x_1 = 4 + \frac{1}{x_1}(x_o - 2x_1)^2, \text{ also } x_o = 2x_1.$$

Daraus folgert man mittels Induktion über n auf $x_n = 2x_{n+1}$ und erhält obige Folge.

Aufgabe 7

Wegen $x^3-3xy^2+y^3 = (y-x)^3-3x^2y+2x^3 = (y-x)^3-3(y-x)x^2-x^3$ ist mit (x,y) auch $(y-x, -x)$ eine Lösung. Ähnlich schließt man für $(-y,x-y)$. Man prüft leicht, daß man aus der Gleichheit von mindestens zwei der Paare (x,y), $(y-x,-x)$, $(-y,x-y)$ auf $x=y=o$ schließen kann. Wegen $n \neq o$ ist aber $x=y=o$ ausgeschlossen.
Angenommen, es gilt

$$x^3-3xy^2+y^3 = 2891 = 9 \cdot 321 + 2.$$

Dann prüft man leicht durch Rechnen modulo 9 unter Beachtung dessen, daß x^3 und y^3 kongruent 0, $\pm$ 1 sind, daß sich ein Widerspruch ergibt.

Aufgabe 8

Wegen CM = EN sind die Dreiecke BMC und DNE kongruent und es ist $\sphericalangle$ NBC = $\sphericalangle$ EDN. Ferner ist $\sphericalangle$ ECB = 90°, $\sphericalangle$ CED = 30° und daher

$$\sphericalangle BND = \sphericalangle BNC + \sphericalangle CND = (90^\circ - \sphericalangle NBC) + (\sphericalangle CED + \sphericalangle NDE)$$
$$= 120^\circ.$$

Daher wird die Strecke BD von N aus wie auch vom Mittelpunkt des Umkreises aus unter dem Winkel von 120° gesehen. Daher liegt N auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Radius CD = CB, d. h., es ist CN = CB. Nun ist

$s = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, da in dem rechtwinkligen Dreieck BCE gilt:

$\sphericalangle$ EBC = 60°.

Aufgabe 9

Für Punkte oder Mengen U,V sei ihr Abstand mit d(U,V) bezeichnet. Für Punkte $P,Q \in L$ bezeichne L(P,Q) den zwischen P und Q gelegenen Teil von L und l(P,Q) die Länge des Streckenzuges L(P,Q). Mit B und C bzw. mit D_1, D_2, D_3, D_4 seien die Endpunkte von L bzw. die Eckpunkte von S bezeichnet. Wir fixieren Punkte $D_i' \in L$ mit $d(D_i, D_i') \leq \frac{1}{2}$, $i = 1,2,3,4$. O. B. d. A. seien die Indizes derart gewählt, daß

1. $l(B,D_1') < l(B,D_i')$, $i = 2,3,4$,
2. D_2 und D_3 adjazent zu D_1 sind,
3. $l(B,D_3') < l(B,D_2')$

ist. Sei

$$D := \left\{P \in D_1D_2 : d(P, L(B,D_3')) \leq \frac{1}{2}\right\}$$
$$E := \left\{P \in D_1D_2 : d(P, L(D_3', C)) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Man erkennt leicht, daß $D_1 \in D$, $D_2 \in E$, also $D, E \neq \emptyset$ sowie $D \cup E = D_1D_2$ ist. Da D und E jeweils aus endlich vielen abgeschlossenen Intervallen bzw. Punkten bestehen und nicht leer sind, gilt $D \cap E \neq \emptyset$. Sei $P \in D \cap E$ und $X \in L(B,D_3')$, $Y \in (D_3', C)$ derart, daß

$$d(P,X) \leq \frac{1}{2} \text{ und } d(P,Y) \leq \frac{1}{2} \text{ gilt.}$$

Dann haben wir einerseits $d(X,Y) \leq 1$ und außerdem gilt $l(X,D_3') \geq 99$ wegen $d(P,L(X,D_3')) \leq \frac{1}{2}$ und $d(D_3,L(X,D_3')) \leq \frac{1}{2}$. Analog erhält man $l(D_3',Y) \geq 99$ und insgesamt

$$l(X,Y) = l(X,D_3') + l(D_3',Y) \geq 2\cdot 99 = 198.$$

Aufgabe 10 .

Wegen $(a_n - a_i)(a_i - a_1) \geq 0$, $i = 2,3,\ldots,n-1$

gilt

$$a_i\,(a_n + a_1) \geq a_i^2 + a_1 a_n$$

und

$$a_n + a_1 \geq a_i + \frac{a_1 a_n}{a_i}$$

oder

$$a_n + a_1 - a_i \geq \frac{a_1 a_n}{a_i} \qquad (5)$$

Nach der Ungleichung für das geometrische und arithmetische Mittel gilt

$$\sqrt{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)(x_1(a_1+a_n-a_1)+x_2(a_1+a_n-a_2)+\ldots+x_n(a_1+a_n-a_n))}$$
$$\leq (x_1+\ldots+x_n) \cdot \frac{a_1+a_n}{2}.$$

Daher ist

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)\cdot(x_1\cdot a_n+x_2\cdot(a_1+a_n-a_2)+\ldots+x_n\cdot a_1)$$
$$\leq (x_1+\ldots+x_n)^2 \cdot \frac{(a_1+a_n)^2}{4}$$

und daher nach (5)

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)(x_1a_n+x_2\cdot\frac{a_1a_n}{a_2}+x_3\cdot\frac{a_1a_n}{a_3}+\ldots+x_n\cdot a_n)$$
$$\leq (x_1+\ldots+x_n)^2 \cdot \frac{(a_1+a_n)^2}{4}$$

oder

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}) \leq (x_1+\ldots+x_n)^2 \cdot \frac{(a_1+a_n)^2}{4\,a_1a_n}.$$

<u>Aufgabe 11</u>

Wir verwenden im weiteren folgende Aussage:

Ist P eine Menge von Diagonalen eines n-Ecks und gehen von jedem von gewissen n-1 festen der n Eckpunkte jeweils eine gerade Anzahl von Diagonalen aus P aus, so trifft das auch für den n-ten Eckpunkt zu. (6)

Die Begründung ist einfach: Vom i-ten Eckpunkt mögen k_i Diagonalen aus P ausgehen. Dann ist $k_1+\ldots+k_n=2\cdot|P|$ und
$k_n \equiv 2\cdot|P| - (k_1+\ldots+k_{n-1}) \equiv 0 \bmod 2$.

Die Behauptung der Aufgabe beweisen wir durch Induktion über n. Für n = 3 ist die Aussage richtig. Sei n > 3 und sei die Richtigkeit für alle n' mit $3 \leq n' < n$ als richtig angenommen. P bezeichne die Menge der Diagonalen des n-Ecks, die den Bedingungen

a) und b) genügt. Offenbar gibt es mindestens einen Eckpunkt, von dem mehr als zwei Diagonalen aus P ausgehen. Sei A ein solcher Punkt, Dann wählen wir die Punkte B und C derart, daß alle weiteren Diagonalen aus P, die von A ausgehen, auf demjenigen Streckenzug L aus Endpunkten des n-Ecks von A nach C gelegen sind, der B nicht enthält.

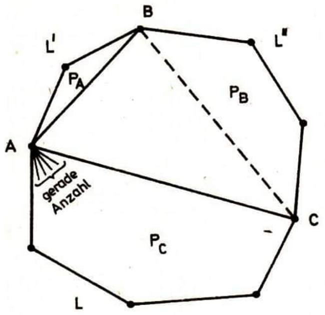


Abb. 3

P_A sei das aus AB und aus dem Streckenzug L' (vgl. Abb. 3) von A nach B gebildete n_1-Eck. P_B sei das aus BC und dem Streckenzug L" von B nach C (vgl. Abb. 3) gebildete n_2-Eck. P_C sei das aus AC und L gebildete n_3-Eck. Bezeichne P_A', P_B' bzw. P_C' die Menge derjenigen Diagonalen aus P, die Diagonalen in P_A, P_B bzw. P_C sind. Wir werden zeigen, daß jede dieser drei Mengen P_A', P_B' bzw. P_C' das entsprechende Vieleck in Dreiecke zerlegt, wobei die Bedingungen a) und b) erfüllt sind.

Von A geht keine Diagonale aus P_A' aus. Von jedem Eckpunkt $Q \neq A, B$ von P_A gehen gleichviel Diagonalen aus P_A' wie aus P, also eine gerade Anzahl, aus. Dann gehen noch (6) auch von B eine gerade Anzahl von Diagonalen aus P_A' aus. Damit sind offenbar die Bedingungen a) und b) für P_A erfüllt. Analog schließt man für P_C.

Von B gehen nach der vorigen Überlegung eine gerade Anzahl von in P_A' gelegenen Diagonalen sowie AB aus. Da das Ausgangs-n-Eck in Dreiecke zerlegt ist und b) erfüllt ist, muß auch $BC \in P$ gelten. Dann gehen aber von B gerade viele Diagonalen aus P_B' aus und wiederum sind die Bedingungen a) und b) für P_B erfüllt.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $3 \mid k_i$, $i = 1,2,3$, also $3 \mid k_1+k_2+k_3$, also wegen $n = k_1+k_2+k_3-3$ auch $3 \mid n$.

Aufgabe 12

Zunächst erkennt man leicht induktiv, daß es für $n \geqq 1$ im Intervall $[0,\ 10^n-1]$ genau $s_n = 9^n$ ganze Zahlen gibt, die in ihrer Dezimaldarstellung keine Ziffer 7 enthalten.

In der Tat: offenbar ist $s_1 = 9$. Gilt die Behauptung für s_n so ist $s_{n+1} = 9 \cdot s_n = 9^{n+1}$.

Dann gilt:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} < \frac{9}{10} \\
\qquad \ldots \\
\frac{1}{60} + \frac{1}{61} + \ldots + \frac{1}{66} + \frac{1}{68} + \frac{1}{69} < \frac{9}{10} \\
\frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{86} + \frac{1}{88} + \frac{1}{89} < \frac{9}{10} \\
\frac{1}{90} + \frac{1}{91} + \ldots + \frac{1}{96} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} < \frac{9}{10}
\end{array}\right\} 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{106} + \frac{1}{108} + \ldots + \frac{1}{199} < 9^2 \cdot \frac{1}{100} \\
\qquad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\frac{1}{600} + \frac{1}{601} + \ldots + \frac{1}{606} + \frac{1}{608} + \ldots + \frac{1}{699} < 9^2 \cdot \frac{1}{100} \\
\frac{1}{800} + \frac{1}{801} + \ldots + \frac{1}{806} + \frac{1}{808} + \ldots + \frac{1}{899} < 9^2 \cdot \frac{1}{100} \\
\frac{1}{900} + \frac{1}{901} + \ldots + \frac{1}{906} + \frac{1}{908} + \ldots + \frac{1}{999} < 9^2 \cdot \frac{1}{100}
\end{array}\right\} = 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

usw. Insgesamt erhält der Bauer weniger als

$$8 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots = 8 \cdot \sum_{i=o}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^i.$$

Da die Summe der geometrischen Reihe $\sum\limits_{i=o}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^i$ gleich 10 ist, erhält der Bauer weniger als 80 Unzen Gold. Folglich ist es ihm nicht möglich, einen hinreichend großen Goldschatz vollständig zu erhalten.

Aufgabe 13

Für alle reellen x, die die gegebene Gleichung erfüllen, sind alle Diskriminanten nichtnegativ, d. h.

$1 - x^2 \geqq o$ und damit $|x| \leqq 1$,

$x^2 + x - 1 \geqq 0$ und damit $x \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oder $x \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,
$1 - x \geqq 0$ und damit $x \leqq 1$.
Insgesamt kommen als Lösung nur reelle Zahlen aus dem Intervall

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq x \leqq 1$$

in Frage, was wegen $\sqrt{5} < 3$ eine nichtleere Menge ist. Für $x = 1$ ist die gegebene Gleichung erfüllt. Für

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq x < 1$$

ist jede Diskriminante positiv und kleiner als 1. Für alle reellen Zahlen a mit $0 < a < 1$ ist $a < \sqrt[2]{a} < \sqrt[4]{a}$, d. h., es ist

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt{1-x} - 1 > 1-x^2+x^2+x-1+1-x-1 = 0,$$

womit gezeigt ist, daß die Zahl $x = 1$ und nur sie eine Lösung ist.

Aufgabe 14

Ist $a_1 = a_2 = m$, wobei m eine ganze Zahl $\neq 0$ ist, so folgt $a_n = m$ für alle $n \geqq 1$.
Ist $a_1 = a_2$ aber dies keine ganze Zahl, so enthält die Folge (a_n) überhaupt keine ganzen Zahlen.
Betrachten wir nun

$$r_n := \frac{1}{a_n}, \text{ so}$$

schreibt sich die Rekursionsgleichung als

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_{n-2} \cdot r_{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{r_{n-2}} - \frac{1}{r_{n-1}}}$$

und $\qquad r_n = 2 \cdot r_{n-1} - r_{n-2}$,

d. h. (r_n) ist eine arithmetische Folge. Da (a_n) unendlich viele ganze Zahlen enthalten soll, sind unendlich viele Glieder von (r_n) im Intervall $[-1, +1]$ enthalten. Folglich ist (r_n) stationär und gleiches gilt für (a_n).
Nach den obigen Bemerkungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß unendlich viele Glieder von (a_n) ganzzahlig sind:
$a_1 = a_2 = m \neq 0$, m eine ganze Zahl.

Aufgabe 15

Bezeichne $|F|$ die Mächtigkeit der Menge F. Sei

$$F := \{\underline{a} \in A : a_1 = 1\}.$$

Offenbar gilt $|F| \leq k^{n-1}$. Wir zeigen, daß F eine gesuchte Teilmenge ist, d. h., für jede andere Teilmenge G von A, deren Elemente die Bedingung (2) erfüllen, gilt $|G| \leq k^{n-1}$. Jedem Element $\underline{a} \in G$ ordnen wir die folgende Menge

$$M_{\underline{a}} := \{(a_1,\ldots,a_n),\ (a_1+1,\ldots,a_n+1),\ldots,\ (a_1+k-1,\ldots,a_n+k-1)\}$$

zu. Die Addition in den Komponenten möge hierbei mod k durchgeführt werden, wobei wir 1, 2,...,k als Repräsentanten verwenden.

Da für beliebige $\underline{a}, \underline{b} \in G$ die Bedingung (2) erfüllt ist, gilt $M_{\underline{a}} \cap G = \{\underline{a}\}$, also $|M_{\underline{a}} \cap G| = 1$. Sind ferner $\underline{a}$ und $\underline{b}$ zwei verschiedene Elemente von G, so ist $M_{\underline{a}} \cap M_{\underline{b}} = \emptyset$. Wäre nämlich $\underline{c} \in M_{\underline{a}} \cap M_{\underline{b}}$, so würde für gewisse i, j mit $0 \leq i,\ j \leq k-1$ gelten:

$$c_1 = a_1+i,\ \ldots,\ c_n = a_n+i,$$
$$c_1 = b_1+j,\ \ldots,\ c_n = b_n+j.$$

Wegen $\underline{a} \neq \underline{b}$ müßte $i \neq j$ sein und die Bedingung (2) wäre für a, b nicht erfüllt. Das wäre ein Widerspruch.

Ist $M(G) := \bigcup_{\underline{a} \in G} M_{\underline{a}}$ gesetzt, so gilt

$$|M(G)| = k \cdot |G|.$$

Da $M(G) \subseteq A$ und $|A| = k^n$ ist, erhalten wir

$$|G| \leq \frac{k^n}{k} = k^{n-1}.$$

<u>Auswertung der Sonderaufgabe aus Heft 12</u>

Aufgabe: Möge jeder von n Schülern einen den anderen Schülern unbekannten Sachverhalt kennen. Es finden nacheinander Konferenzgespräche $E_1, E_2, \ldots, E_z$ für jeweils $k \geq 2$ Schüler statt. In jedem dieser Gespräche findet ein vollständiger Informationsaustausch statt. Dabei sei $1 \leq n \leq k^2$. Bezeichne f(n,k) die minimale Anzahl der Gespräche, die nötig sind, damit jeder der n Schüler jeden der unter ihnen bekannten Sachverhalte kennt. Man beweise

$$f(n,k) = \left\lceil \frac{n-k}{k-1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil,$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl z bezeichnet, für die $x \leq z$ gilt.

Zu dieser Sonderaufgabe gingen nur Lösungen von den beiden Schülern

Bodo H e i s e , Spezialklasse an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt und

Klaus M o h n k e , EOS "G. Schumann", Calau

ein. Beide Lösungen sind korrekt und vollständig; doch ist die Darstellung der Lösung von Bodo Heise brillanter. Die folgende Musterlösung ähnelt sehr dieser.

1. Für n = 1 ist offenbar $f(1,k) = 0$. Wegen $\left[\frac{-k}{k-1}\right] + \left[\frac{1}{k}\right] = 0$ ist auch hier die Behauptung wahr.
2. Für $2 \leq n \leq k$ ist offenbar $f(n,k) = 1$. Wegen $\left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right] = 0 + 1 = 1$ ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen.
3. Im folgenden sei stets $k < n \leq k^2$. Wir zeigen zunächst

a) $f(n,k) \geq \left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]$.
Wir betrachten die Konferenz, nach der zum erstenmal Schüler (und dann natürlich genau k) existieren, die sämtliche Sachverhalte kennen. Ist dieses die c-te Konferenz, so können wir $f(n,k)$ mittels c abschätzen.

<u>1. Fall:</u> Es gibt einen Schüler, der in der c-ten Konferenz zum erstenmal an einer Konferenz teilnahm.
Wegen $n > k$ muß es aber sicher einen anderen Schüler geben, der neben der c-ten Konferenz an mindestens einer der vorangegangenen Konferenzen teilgenommen hat. Folglich ist

$$c \cdot k \geq n + 1$$
$$c \geq \left[\frac{n+1}{k}\right] ,$$

wegen der Ganzzahligkeit von c. Von den restlichen n-k Schülern (nach der c-ten Konferenz) kennt keiner den Sachverhalt des Schülers, der an der c-ten Konferen zum erstenmal teilgenommen hat, d. h., bei jeder folgenden Konferenz können maximal k-1 Schüler hinzukommen, die alle Sachverhalte kennen. Also

$$f(n,k) - c \geq \left[\frac{n-k}{k-1}\right]$$

und damit

$$f(n,k) \geqq \left[\frac{n+1}{k}\right] + \left[\frac{n-k}{k-1}\right]$$
$$\geqq \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n-k}{k-1}\right].$$

2. Fall: Für alle Schüler, die an der c-ten Konferenz teilnahmen, war dieses mindestens die zweite Konferenz, an der sie beteiligt waren. Mithin

$$(c-1)\, k \geqq n,$$
$$c \geqq \left[\frac{n}{k}\right] + 1.$$

Die restlichen n-k Schüler müssen an mindestens noch einer Konferenz jeweils teilnehmen, d. h.,

$$f(n,k) - c \geqq \left[\frac{n-k}{k}\right]$$

also $f(n,k) \geqq \left[\frac{n}{k}\right] + 1 + \left[\frac{n-k}{k}\right] = \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]$

$$\geqq \left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{n-k}{k-1}\right], \text{ wegen}$$

$$\frac{n}{k} \geqq \frac{n-k}{k-1}, \text{ d. h. } nk-n \geqq nk-k^2.$$

b) Jetzt zeigen wir $f(n,k) \leqq \left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]$

durch Angabe eines Beispiels von Konferenz-Folgen, die das Gewünschte mit $\left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]$ Konferenzen realisiert.

1. Fall: $k \mid n$. Sei $a = \frac{n}{k}$. Dann ist a eine natürliche Zahl mit $2 \leqq a \leqq k$.

Wir bezeichnen die Schüler mit $S_{i,j}$, $1 \leqq i \leqq a$, $1 \leqq j \leqq k$.

Zunächst führen wir die a Konferenzen

$$\left\{S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots, S_{i,k}\right\}, \quad 1 \leqq i \leqq a,$$

und dann die a Konferenzen

$$\left\{S_{i,1}, S_{i+1,2}, S_{i+2,3}, \ldots, S_{i+a-1,a}, S_{i,a+1}, \ldots, S_{i,k}\right\},$$
$$1 \leqq i \leqq a,$$

wobei die Addition der ersten Indizes von $S_{i,j}$ modulo a zu verstehen sind.

Man prüft leicht nach, daß nach diesen 2a Konferenzen alle Schüler alle Sachverhalte kennen. Schließlich ist auch

$$\left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{ak-k}{k-1}\right] + [a] = \left[a + \frac{a-k}{k-1}\right] + a = 2a$$

wegen $-1 < \frac{a-k}{k-1} \leqq 0$ da $2 \leqq a \leqq k$.

2. Fall: $k \nmid n$. Sei $a = \left[\frac{n}{k}\right]$. Dann ist auch hier $2 \leqq a \leqq k$. Ferner $\frac{n}{k} < a$. Für $b = ak-n$ gilt somit $1 \leqq b \leqq k-1$. Also ist $-k + 2 < a + b$ und $-2 < \frac{a-b-k}{k-1} < 0$, d. h.

$$\left[\frac{n-k}{k-1}\right] = \left[a \; \frac{ak - b - k}{k-1}\right] = \begin{cases} a & \text{falls } a > b + 1, \\ a-1 & \text{falls } a \leqq b. \end{cases}$$

Schließlich ist

$$\left[\frac{n-k}{k-1}\right] + \left[\frac{n}{k}\right] = \begin{cases} 2a & \text{falls } a > b + 1, \\ 2a-1 & \text{falls } a \leqq b + 1. \end{cases}$$

Für $a > b + 1$ gehen wir von der Konferenzen-Folge des 1. Falls aus. Unvollständige Konferenzen (mit weniger als k Schülern) werden durch beliebige freie Schüler komplettiert. Das ist wegen $n > k$ natürlich stets möglich.

Sei jetzt $a \leqq b + 1$. Dann wählen wir zunächst die $a-1$ Konferenzen

$$\left\{S_{1,1}, S_{1,2}, \ldots, S_{1,k}\right\}, \quad 1 \leqq i \leqq a-1.$$

Als a-te Konferenz wählen wir

$$\left\{S_{a,1}, S_{a,2}, \ldots, S_{a,k-b}, S_{1,1}, S_{2,1}, \ldots, S_{a-1,1}, \ldots\right\},$$

wobei $S_{a,k-b}$ der n-te Schüler ist. Weiterhin bemerken wir, daß $k - b + a - 1 \leqq k$ ist. Eventuell freie Plätze werden in beliebiger Weise vervollständigt.