Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 17

Die Aufgabensammlung erscheint periodisch auf Vorschlag des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und enthält Aufgaben mit Lösungen, die im Rahmen der Vorbereitung auf die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR die Arbeit von mathematischen Arbeitsgemeinschaften und die individuelle Beschäftigung interessierter Schüler mit der Mathematik unterstützen sollen. Die veröffentlichten Aufgaben sind in der Regel aus Vorschlägen zu Internationalen Mathematik-Olympiaden (IMO), aus den Klausuren in mathematischen Vorbereitungslagern und Aufgaben des mathematischen Korrespondenzzirkels ausgewählt. Sie sind für fortgeschrittene Schüler der Klassenstufe 11/12 der Erweiterten Oberschule vorgesehen.

Die Aufgabe 2 des vorliegenden Heftes wird als Preisaufgabe gestellt. Die Leser der Aufgabensammlung werden aufgefordert, Lösungen zu dieser Aufgabe bis zum 31.10. 76 an

Dr. W. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
25 Rostock, Universitätsplatz 1, Sektion Mathematik,

einzusenden. Dabei geben die Schüler bitte ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse ihrer Schule an. Die Lösung der Preisaufgabe wird im nächsten Heft veröffentlicht. Für die besten Lösungen erhalten deren Einsender Anerkennungsschreiben.

Die Aufgabensammlung wird über die Bezirkskabinette für außerunterrichtliche Tätigkeit in beschränkter Anzahl kostenlos vertrieben.

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu hier veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar. Sie sind zu richten an: Dr. Harnau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock.

Die hier veröffentlichten Aufgaben und Lösungen wurden von einem Autorenkollektiv zusammengestellt.

Autoren: H.-D. Gronau
Dr. W. Harnau
Dr. M. Krüppel
W. Moldenhauer
Gutachter: Prof. Dr. habil. G. Burosch.
Bestell-Nr. 30 06 44-1 . Lizenz Nr. 203/1000/76 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Gesamtherstellung: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin

Sonderaufgabe

Eine Folge aus n Einsen und (n+1) Nullen sei zyklisch angeordnet. Jemand spielt folgendes Spiel. Eine Marke wird auf eine Position gesetzt, auf der eine Null steht. Diese Null wird in eine Eins verwandelt. Gleichzeitig wird die Marke von der bisherigen Position aus zur (im Sinne der zyklischen Anordnung) nächsten Position gesetzt, auf der eine Eins steht. Diese Eins wird in eine Null verwandelt, wir erhalten eine Folge aus n Einsen und (n+1) Nullen, und die Marke wird auf die nächste Null-Position gesetzt. Dieses Verfahren wird wiederholt.
In welchen Fällen lassen sich mit diesem Spiel alle Null-Eins-Folgen mit n oder n+1 Nullen und n+1 oder n Einsen erzeugen?

Bemerkung: Die Folge der Nullen und Einsen ergibt sich nach jedem Wechsel beginnend mit der Position, auf der zu Beginn des Spieles die Marke stand. Ein Fall, der der Aufgabenstellung genügt, ist vollständig durch die Angabe der Ausgangsfolge beschrieben.

Aufgaben

Aufgabe 1
ABCD sei ein Sehnenviereck und P ein Punkt auf seinem Umkreis. Mit A_1, B_1, C_1 bzw. D_1 werden die Fußpunkte der Lote von P auf AB, BC, CD bzw. DA bezeichnet. Man beweise:

$$|PA_1| \cdot |PC_1| = |PB_1| \cdot |PD_1| .$$

Aufgabe 2
Sei $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ein Sechseck. P_1, P_2 bzw. P_3 seien die Mittelpunkte der Diagonalen $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_5}$ bzw. $\overline{A_3A_6}$ und $M_1, M_2, \ldots, M_5$ bzw. M_6 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., bzw. $\overline{A_6A_1}$. Bezeichnet S, S' bzw. S" den orientierten Flächeninhalt der Vielecke $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, $P_1P_2P_3$ bzw. $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$, so beweise man

$$S' + S'' = \frac{3}{4} S.$$

Der orientierte Flächeninhalt A^o des (konvexen) Vielecks $P_1P_2 \ldots P_n$ mit dem Flächeninhalt A ist definiert durch

$$A^o := \begin{cases} A, & \text{falls das Vieleck positiv orientiert ist,} \\ -A, & \text{falls das Vieleck negativ orientiert ist.} \end{cases}$$

Das Vieleck selbst heißt positiv (negativ) orientiert, falls die Eckpunkte entgegen (im) dem Uhrzeigersinn durchnumeriert werden.

Aufgabe 3

$A_1A_2 \ldots A_{2n}$ sei ein Vieleck. Auf die Punkte mit ungeradem Index werde jeweils die gleiche Verschiebung angewandt. Das liefere das Vieleck $A_1'A_2A_3'A_4 \ldots A_{2n-1}' A_{2n}$. Man zeige, daß die Flächeninhalte beider Vielecke gleich sind.

Aufgabe 4

Das Dreieck $\triangle ABC$ habe den Flächeninhalt 1. M bzw. H sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$, P und K mögen so auf $\overline{AB}$ liegen, daß $|AP| = |PK| = |KB|$ ist. E bzw. D seien die Schnittpunkte von MP bzw. CK mit AH. Man zeige, daß das Viereck PKDE den Flächeninhalt $\frac{1}{5}$ besitzt.

Aufgabe 5

Auf einem Kreis seien drei verschiedene Punkte B, C, P gegeben. Von P aus werden die Lote auf BC und auf die Tangenten an den Kreis in den Punkten B bzw. C gefällt. Die Fußpunkte seien A_1, B_1 bzw. C_1. Man beweise

$$|PA_1|^2 = |PB_1| \cdot |PC_1| .$$

Aufgabe 6

F_o sei ein beliebiges Fünfeck. Für $n \geqq o$ mögen sich die Eckpunkte des Fünfecks F_{n+1} aus den Mittelpunkten der Seiten von F_n ergeben. S_n bezeichne den orientierten Flächeninhalt des n-ten Fünfecks. Man beweise für $n \geqq o$:

$$16 \cdot S_{n+2} - 12 \cdot S_{n+1} + S_n = o.$$

Aufgabe 7

Es sei ABCD ein Viereck, in dem sich die Geraden AB und CD im Punkt O schneiden mögen. M und H bzw. K und J seien diejenigen Punkte auf den Seiten BC bzw. AD, für die

$$|BM| = |MH| = |HC| \text{ und } |AK| = |KJ| = |JD|$$

ist. Man zeige, daß die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle$ OKM und $\triangle$ OJH gleich sind.

Aufgabe 8

Kann man jedes Dreieck $\triangle$ ABC durch senkrechte Projektion auf eine Ebene in ein gleichseitiges Dreieck $\triangle$ A'B'C' überführen?
(Bundeswettbewerb Mathematik der BRD, 2. Runde, 1982)

Aufgabe 9

Es sei x_o eine Nullstelle der (nichttrivialen) Gleichung

$$\sum_{k=o}^{n} (a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n)\, x^{n-k} = o, \quad a_i \in R, \; i = 0,1,\ldots,n, \; n \geqq 1.$$

Man zeige:

(a) Gilt $\sum\limits_{o \leqq i < j \leqq n} a_i a_j \geqq o$, so folgt $|x_o| < \sqrt{2}$.

(b) Gilt $a_i > o$, $i = 0,1,\ldots,n$, so folgt $|x_o| < 1$.

(Gazeta Matematica, 8-1982, S. 335)

Aufgabe 10

Es sei $q(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, wobei p eine ungerade Primzahl sei. Möge n eine gerade natürliche Zahl > o bezeichnen. Man beweise, daß

$$-1 + \prod_{k=o}^{n-1} q\left(x^{p^k}\right) \text{ durch } x^2+1 \text{ teilbar ist.}$$

(Vorbereitungsklausur in Rumänien auf die IMO 1982)

Aufgabe 11

Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = y \cdot x_1 & (1) \\ x_1 + x_3 = y \cdot x_2 & (2) \\ x_2 + x_4 = y \cdot x_3 & (3) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x_3 + x_5 = y \cdot x_4 & (4) \\ x_4 + x_1 = y \cdot x_5 & (5) \end{array}\right.$$

(Niels-Henrik-Abel-Wettbewerb, Norwegen 1982)

Aufgabe 12

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a,b,c. Es möge einen Punkt M im Innern von $\triangle ABC$ geben, der Eckpunkt dreier kongruenter gleichseitiger Dreiecke D_1, D_2, D_3 ist, wobei die anderen beiden Ecken dieser Dreiecke auf den Seiten des Ausgangsdreiecks gemäß der Abbildung 1 liegen.

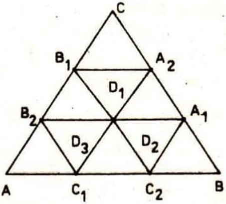


Abb. 1

Man beweise:

(a) Die Seitenlänge von D_1, D_2, D_3 ist

$$\frac{2abc}{a^2 + b^2 + c^2 + 4A \cdot \sqrt{3}}$$

(b) Mit M_1, M_2, M_3 als Fußpunkt der Lote von M auf die Dreiecksseiten ist das Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ gleichseitig.

(Nach S. Graubner, Lehrer in Wittgensdorf)

Aufgabe 13

Für welche Primzahlen p hat die Gleichung

$$2^n - 3p = x^2$$

im Bereich der natürlichen Zahlen mindestens zwei Lösungspaare (n_1, x_1), (n_2, x_2)?

Aufgabe 14

Seien mit a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ und mit s, R bzw. r sein halber Umfang, sein Umkreisradius bzw. sein Inkreisradius bezeichnet. Man beweise:

$$5 \cdot \min\left\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\right\} \leqq s^2 - 8Rr - 2r^2.$$

Aufgabe 15

Sei $(a_k)_{k \geqq 1}$ eine nichtkonstante Folge mit $a_k \in \{+1, -1\}$, $k \geqq 1$. Man zeige, daß es eine endliche Menge M natürlicher Zahlen gibt, für die

$$\sum_{m \in M} \frac{a_m}{m} = 0$$

ist.

Lösungen

Im weiteren stellen wir einen Ansatz zur Lösung geometrischer Aufgabenstellungen mittels komplexer Zahlen vor. Trotz der Analogie zu Methoden der analytischen Geometrie erspart er in vielen Fällen einen großen Rechenaufwand.
Wir gehen von einem kartesischen Koordinatensystem aus. Jedem Punkt Q mit den Koordinaten (x,y) ordnen wir die komplexe Zahl $q = x + iy$ zu. Mit den Bezeichnungen $\bar{q} = x - iy$ bzw. $|q| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für die konjugiert komplexe Zahl bzw. den Betrag von q gilt

$$q \cdot \bar{q} = |q|^2. \tag{6}$$

Die Länge der Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ ist gleich

$$|Q_1Q_2| = |q_2 - q_1| . \tag{7}$$

Schließlich betrachten wir zwei Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2, die den Winkel $\varphi = \sphericalangle(P_1P_2, Q_1Q_2)$ einschließen mögen. Die komplexen Zahlen

$$\frac{p_2 - p_1}{|p_2 - p_1|}, \quad \frac{p_2 - q_1}{|q_2 - q_1|}$$

sind vom Betrag 1 und es gilt

$$\frac{p_2 - p_1}{|p_2 - p_1|} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \frac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|}$$

bzw. unter Beachtung von (6)

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^2 = \frac{(q_2-q_1)^2}{(p_2-p_1)^2} \cdot \frac{|p_2-p_1|^2}{|q_2-q_1|^2} = \frac{(q_2-q_1)(\bar{p}_2-\bar{p}_1)}{(p_2-p_1)(\bar{q}_2-\bar{q}_1)}.$$

Sind nun die Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel, so ist $\varphi = k \cdot \pi$ und $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = 1$. Sind die Geraden orthogonal zueinander, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ und $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^2 = -1$. Wir erhalten

$$(p_2-p_1)(\bar{q}_2-\bar{q}_1)=(q_2-q_1)(\bar{p}_2-\bar{p}_1), \text{ falls } P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, \tag{8}$$

$$-(p_2-p_1)(\bar{q}_2-\bar{q}_1)=(q_2-q_1)(\bar{p}_2-\bar{p}_1), \text{ falls } P_1P_2 \perp Q_1Q_2. \tag{9}$$

<u>Aufgabe 1</u>
Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß der Mittelpunkt O des Umkreises um ABCD der Koordinatenursprung sei und P die Koordinaten (1,0) habe. Die Behauptung lautet:

$$|1-a_1| \cdot |1-c_1| = |1-b_1| \cdot |1-d_1| . \qquad (10)$$

Wir stellen jetzt a_1 bis d_1 in Abhängigkeit von a bis d dar. Durch die Wahl des Koordinatensystems ist der Umkreis gleich dem Einheitskreis und es gilt

$$|a| = |b| = |c| = |d| = 1. \qquad (11)$$

Zur Berechnung von a_1 benutzen wir $A_1A \parallel AB$ und $PA_1 \perp AB$. Nach (8) bzw. (9) gilt:

$$(a_1-a)\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = (\bar{a}_1-\bar{a})\cdot(a-b),$$
$$-(1-a_1)\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = (1-\bar{a}_1)(a-b).$$

Wegen (6) und (11) ist $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ und wir erhalten

$$a_1(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})-\bar{a}_1(a-b) = a\ (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{a}\ (a-b) = \frac{b}{a} - \frac{a}{b},$$

$$a_1(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})+\bar{a}_1(a-b) = a - b + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Und daraus

$$2a_1\ (\frac{b-a}{ab}) = a - b + \frac{b-a}{a\cdot b} + \frac{b^2-a^2}{a\cdot b}$$

Wegen $b \neq a$ folgt daraus

$$a_1 = \frac{1}{2}\ (-ab + 1 + a+b),$$
$$1-a_1 = \frac{1}{2}\ (1-a-b+ab) = \frac{1}{2}(1-a)(1-b). \qquad (12)$$

Analog ergibt sich

$$1-b_1 = \frac{1}{2}\ (1-c)(1-b),$$
$$1-c_1 = \frac{1}{2}\ (1-c)(1-d),$$
$$1-d_1 = \frac{1}{2}\ (1-d)(1-a).$$

Daraus schließt man unmittelbar auf die Richtigkeit von (10).

Aufgabe 2

Sei O der Ursprung des verwendeten kartesischen Koordinatensystems.

Hilfssatz 1: Der orientierte Flächeninhalt S eines Vielecks $P_1P_2 \ldots P_n$ ist gleich

$$S = \frac{1}{2}\, I_m\ (\sum_{j=1}^{n} p_{j+1} \cdot \bar{p}_j).$$

Dabei wird hier wie auch im weiteren der Index stets modulo n betrachtet.

Beweis des Hilfssatzes: P_j habe die Koordinaten $(r_j \cdot \cos \varphi_j, r_j \cdot \sin \varphi_j)$. Der orientierte Flächeninhalt S_j des Dreiecks $\triangle OP_j \cdot P_{j+1}$ ist

$$S_j = \frac{1}{2} \cdot r_{j+1} \cdot r_j \cdot \sin(\varphi_{j+q} - \varphi_j), \; j = 1, \ldots, n.$$

Nun gilt:

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n} r_{j+1} \cdot r_j \cdot \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j).$$

Wegen

$$P_{j+1} \cdot \bar{P}_j = r_{j+1}(\cos \varphi_{j+1} + i \sin \varphi_{j+1}) \cdot r_j \cdot (\cos(-\varphi_j) + i \sin(-\varphi_j)$$

$$= r_{j+1} \cdot r_j (\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + i \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j))$$

ist

$$I_m \, P_{j+1} \cdot \bar{P}_j = r_{j+1} \cdot r_j \cdot \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$$

und der Hilfssatz ist bewiesen.

Danach gilt:

$$S = \frac{1}{2} I_m \left(\sum_{j=1}^{6} a_{j+1} \bar{a}_j \right),$$

$$S' = \frac{1}{2} I_m \left(\sum_{j=1}^{3} p_{j+1} \bar{p}_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} I_m \left(\frac{(a_2+a_5)(\bar{a}_1+\bar{a}_4)}{4} + \frac{(a_3+a_6)(\bar{a}_2+\bar{a}_5)}{4} + \frac{(a_1+a_4)(\bar{a}_3+\bar{a}_6)}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{8} I_m \left(\sum_{j=1}^{6} a_{j+1} \bar{a}_j + \sum_{j=1}^{6} a_j \bar{a}_{j+2} \right)$$

$$S'' = \frac{1}{2} I_m \left(\sum_{j=1}^{6} m_{j+1} \cdot \bar{m}_j \right) = \frac{1}{2} I_m \left(\sum_{j=1}^{6} \frac{(a_{j+2}+a_{j+1})(\bar{a}_{j+1}+\bar{a}_j)}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{8} I_m \left(2 \sum_{j=1}^{6} a_{j+1}\bar{a}_j + \sum_{j=1}^{6} a_{j+2}\bar{a}_j + \sum_{j=1}^{6} a_j \cdot \bar{a}_j \right)$$

und

$$S'+S'' = \frac{1}{8} I_m \left(3 \sum_{j=1}^{6} a_{j+1}\bar{a}_j + \sum_{j=1}^{6} (a_j\bar{a}_{j+2} + a_{j+2}\bar{a}_j) + \sum_{j=1}^{6} a_j \cdot \bar{a}_j \right)$$

$= \frac{3}{4} S + \frac{1}{8} I_m(\sum_{j=1}^{6} (a_j\bar{a}_{j+2}+a_{j+2}\ \bar{a}_j)) + \frac{1}{8} I_m (\sum_{j=1}^{6} a_j\ \bar{a}_j).$

Für beliebige komplexe Zahlen p und q gilt nun

$p \cdot \bar{p} = |p|^2$, d. h. $I_m\ p \cdot \bar{p} = o$ und
$\bar{p}\ \ q = p\bar{q}$, d. h. $I_m\ (\bar{\bar{p}} \cdot q + p\ \bar{q}) = o.$

Damit ergibt sich $S' + S'' = \frac{3}{4} S.$

<u>Aufgabe 3</u>

Die auf die Eckpunkte mit ungeradem Index ausgeführte Verschiebung überführe den Ursprung des verwendeten kartesischen Koordinatensystems in den Punkt V. Bezeichne T_i die i-te Koordinate des 2n-Tupels

$T = (v, o, v, o, v, o, \ldots, v, o).$

Möge S bzw. S' den Flächeninhalt des ursprünglichen bzw. des durch Verschiebung der Eckpunkte mit ungeradem Index entstehenden Vielecks bedeuten. Nach dem Hilfssatz 1 gilt

$$S' = \left|\frac{1}{2} I_m\ (\sum_{j=1}^{2n} (a_{j+1} + T_{j+1})\ (\bar{a}_j + \bar{T}_j))\right| \text{ und}$$

$$S\ = \left|\frac{1}{2} I_m\ (\sum_{j=1}^{2n} a_{j+1}\ \bar{a}_j)\right| .$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_{j+1}+T_{j+1})(\bar{a}_j+\bar{T}_j) = \sum_{j=1}^{2n} a_{j+1}\ \bar{a}_j + h \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{2j} + \bar{h} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2_j}.$$

Da für zwei komplexe Zahlen p,q gilt:

$Im\ (\bar{p}q + p\bar{q}) = o,$

so ist

$$I_m\ (\sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} + T_{j+1})(\bar{a}_j+\bar{T}_j)) = I_m(\sum_{j=1}^{2n} a_{j+1}\ \bar{a}_j) + I_m(h \cdot \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{2_j}} + \bar{h} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2_j})$$

$= I_m\ (\sum_{j=1}^{2n} a_{j+1}\ \bar{a}_j)$. Das liefert die Behauptung.

Aufgabe 4

Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liege in A. Nach dem Hilfssatz 1 ist der Flächeninhalt des Vielecks $P_1P_2 \dots P_n$ gleich

$$\frac{1}{2} \cdot \left| I_m \left(\sum_{j=1}^{n} p_{j+1} \; \bar{p}_j \right) \right| .$$

Sei A_1 bzw. A_2 der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ bzw. des Vierecks PKDE. Es gilt

$$A_1 = \frac{1}{2} \left| I_m \, c \cdot \bar{b} \right| = 1, \tag{13}$$

denn nach Wahl des Ursprungs ist $a = o$. Wir haben zu zeigen, daß

$$A_2 = \frac{1}{2} \left| I_m \left(p \cdot \bar{e} + k \cdot \bar{p} + d \cdot \bar{k} + e \, \bar{d} \right) \right| = \frac{2}{5} \tag{14}$$

ist. Dazu drücken wir p,e,k und d durch b,c aus. Aus der Konstruktion folgt sofort

$$p = \frac{b}{3}, \; k = \frac{2b}{3}, \; h = \frac{b+c}{2}, \; m = \frac{c}{2}. \tag{15}$$

Zur Berechnung von e benutzen wir EP $\parallel$ MP und EA $\parallel$ AH. Aus (8) folgt

$$(e-p)(\bar{m}-\bar{p}) = (\bar{e}-\bar{p})(m-p) \text{ und } e \cdot \bar{h} = \bar{e} \cdot h.$$

Das liefert

$$e \cdot \bar{h}(m-p) = \bar{e} \, h \, (m-p) = h \left((e-p)(\bar{m}-\bar{p}) + \bar{p}(m-p) \right)$$

und

$$e(\bar{h}(m-p) - h(\bar{m}-\bar{p})) = \bar{p}(m-p)h - p(\bar{m}-\bar{p})h = h(\bar{p}m - p\bar{m}).$$

Nun gilt

$$\bar{h}(m-p) - h(\bar{m}-\bar{p}) = \bar{h}(m-p) - \overline{\bar{h}(m-p)} = 2 \, I_m \, \bar{h} \, (m-p)$$

$$= 2 \, I_m \, \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{3} \right) = \frac{1}{6} \, I_m \, (3\bar{b}c - 2b\bar{c} + 3c\bar{c} - 2b\bar{b})$$

$$= \frac{1}{6} \, I_m \, (3\bar{b}c - 2\overline{\bar{b}c}) = \frac{5}{6} \, I_m \, \bar{b}c.$$

Analog erhalten wir

$$\bar{p}m - p\bar{m} = 2 \, I_m \, \bar{p} \, m = \frac{1}{3} \, I_m \, \bar{b}c,$$

woraus sich wegen $I_m \, \bar{b} \cdot c \neq o$ schließlich e wie folgt ergibt

$$e = \frac{2}{5} \, h = \frac{1}{5} \, (b+c). \tag{16}$$

Zur Berechnung von d benutzen wir DC $\parallel$ CK und DA $\parallel$ AH, gehen analog vor und erhalten

$$(d-c)(\bar{c}-\bar{k}) = (\bar{d}-\bar{c})(c-k) \text{ und } d\cdot\bar{h} = \bar{d}\, h$$

also

$$d\cdot\bar{h}(c-k) = \bar{d}\, h\, (c-k) = h\,((d-c)(\bar{c}-\bar{k}) + \bar{c}\,(c-k))$$

folglich

$$d\,(\bar{h}\,(c-k)-h(\bar{c}-\bar{k})) = h(c\bar{k}-\bar{c}k).$$

Weiter gilt

$$\bar{h}(c-k)-h(\bar{c}-\bar{k}) = 2\, I_m\, \bar{h}(c-k) = 2\, I_m\, \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\cdot\left(c-\frac{2b}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\, I_m\, \bar{b}c,$$

$$c\cdot\bar{k} - \bar{c}\, k = 2\, I_m\, c\cdot\bar{k} = \frac{4}{3}\, I_m\, \bar{b}c.$$

Das liefert

$$d = \frac{4}{5}\, h = \frac{2}{5}\,(b + c). \qquad (17)$$

Unter Berücksichtigung von (15), (16) und (17) ergibt sich

$$I_m(p\bar{e}+k\bar{p}+d\bar{k}+e\bar{d}) = I_m\left(\frac{b}{3}\cdot\frac{\bar{b}+\bar{c}}{5} + \frac{2b}{3}\cdot\frac{\bar{b}}{3} + \frac{2(b+c)}{5}\cdot\frac{2\bar{b}}{3}\right.$$

$$\left. + \frac{(b+c)}{5}\cdot\frac{2(\bar{b}+\bar{c})}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\, I_m\left(b\bar{b} + b\bar{c} + \frac{10}{3}\, b\bar{b} + 4\, b\bar{b} + 4\, c\bar{b} + \frac{6}{5}\,(b+c)\,\overline{(b+c)}\right)$$

$$= \frac{1}{15}\, I_m\,(b\bar{c} + 4\,\bar{b}c) = \frac{1}{15}\, I_m\,(4\,\bar{b}c - \bar{b}c) = \frac{1}{5}\, I_m\, b\bar{c}.$$

Setzt man dies in (14) ein, so erkennt man

$$A_2 = \frac{1}{10}\,|\,I_m\, b\bar{c}\,| = \frac{1}{10}\,|I_m\, c\bar{b}\,| = \frac{1}{5}.$$

<u>Aufgabe 5</u>

Verlaufen beide Tangenten parallel, so ist $\overline{BC}$ ein Durchmesser und folglich $\triangle BCP$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel in P. A_1 ist der Fußpunkt der Höhe von P auf BC und es gilt

$$|A_1B| = |PB_1| \quad , \quad |A_1C| = |PC_1| \text{ und daher } |PA_1|^2 = |PB_1| \; |PC_1| \; !$$

Verlaufen die Tangenten nicht parallel, so sei ihr Schnittpunkt mit A bezeichnet. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem derart, daß der Ursprung im Mittelpunkt O des Kreises liegt und P die Koordinaten (1,0) hat. Die Behauptung lautet dann

$$|1-a_1|^2 = |1-b_1| \cdot |1-c_1| . \tag{18}$$

Wir drücken a_1, b_1, c_1 durch b und c aus. Jedenfalls ist

$$|a| = |b| = |c| = 1. \tag{19}$$

Die Größe $1-a_1$ ergibt sich aus der Formel (12). Zur Berechnung von b_1 benutzen wir $AB \parallel B_1B$ und $PB_1 \perp AB$. Nach (8) und (9) ist

$$(a-b)(\bar{b}_1-\bar{b}) = (\bar{a}-\bar{b})(b_1-b),$$
$$-(1-b_1)(\bar{a}-\bar{b}) = (1-\bar{b}_1)(a-b)$$

bzw. wegen $a \neq b$

$$b_1-b = (\bar{b}_1-\bar{b}) \cdot \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}},$$
$$1-b_1 = (1-\bar{b}_1) \cdot \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}.$$

Wegen $AB \perp OB$ gilt nach (9)

$$(a-b) \cdot \bar{b} = (\bar{a} - \bar{b})\, b$$

bzw.

$$\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = - \frac{b}{\bar{b}} = - b^2.$$

Die letzte Identität folgt aus (19) und $b \cdot \bar{b} = |b|^2$.
Wir erhalten folglich

$$b_1 + \bar{b}_1 \cdot b^2 = \bar{b}\, b^2 + b = 2\, b,$$
$$b_1 - \overline{b_1}\, b^2 = 1 - b^2$$

und

$$b_1 = \frac{1}{2}(1 + 2b - b^2)$$

und schließlich

$$1 - b_1 = \frac{1}{2}(1 - b)^2. \tag{20}$$

Analog ergibt sich

$$1 - c_1 = \frac{1}{2}(1 - c)^2. \tag{21}$$

Aus (12), (20), (21) ergibt sich (18) und damit die Behauptung.

Aufgabe 6

Es ist ausreichend, die Behauptung für n = o zu beweisen. Wir verwenden zur Flächenberechnung den Hilfssatz 1. Dabei rechnen wir mit den Indizes der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ modulo n. Sei $B_1B_2B_3B_4B_5$ bzw. $C_1C_2C_3C_4C_5$ das Fünfeck F_1 bzw. F_2. Offenbar ist für $1 \leqq j \leqq 5$

$$b_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2},$$

$$c_j = \frac{1}{2}(b_j + b_{j+1}) = \frac{1}{4}(a_j + 2a_{j+1} + a_{j+2}).$$

Wir erhalten

$$S_o = \frac{1}{2} \cdot I_m \sum_{j=1}^{5} a_{j+1} \cdot \bar{a}_j,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot I_m \sum_{j=1}^{5} \frac{a_{j+2} + a_{j+1}}{2} \cdot \frac{\bar{a}_{j+1} + \bar{a}_j}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot I_m \left(2 \sum_{j=1}^{5} a_{j+1} \cdot \bar{a}_j + \sum_{j=1}^{5} a_{j+2} \bar{a}_j + \sum_{j=1}^{5} a_j \cdot \bar{a}_j\right),$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot I_m \left(\sum_{j=1}^{5} \frac{a_{j+3} + 2a_{j+2} + a_{j+1}}{4} \cdot \frac{\bar{a}_{j+2} + 2\bar{a}_{j+1} + \bar{a}_j}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot I_m \left(6 \cdot \sum_{j=1}^{5} a_{j+1} \bar{a}_j + 4 \sum_{j=1}^{5} a_j \bar{a}_j + \right.$$

$$+ \left. 4 \sum_{j=1}^{5} a_{j+2} \bar{a}_j + \sum_{j=1}^{5} a_j \bar{a}_{j+1} + \sum_{j=1}^{5} a_{j+3} \cdot \bar{a}_j\right).$$

Unter Berücksichtigung von $I_m(\bar{p}q + p\bar{q}) = I_m(p\bar{p}) = o$ ergibt sich

$$32 \cdot S_2 - 24 \cdot S_1 = I_m \sum_{j=1}^{5} a_{j+2} \cdot \bar{a}_j + I_m \sum_{j=1}^{5} a_j \bar{a}_{j+1} + I_m \sum_{j=1}^{5} a_{j+3} \bar{a}_j$$

$$= - I_m \sum_{j=1}^{5} a_{j+1} \bar{a}_j + I_m \sum_{j=1}^{5} (a_{j+2} \bar{a}_j + a_j \bar{a}_{j+2})$$

$$= - 2\, S_o.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 7

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$k = \frac{2a + d}{3},\ m = \frac{2b + c}{3},\ j = \frac{a + 2d}{3},\ h = \frac{b + 2c}{3}. \qquad (22)$$

Aus dem Hilfssatz 1 ergibt sich der Flächeninhalt S_1 bzw. S_2 des Dreiecks $\triangle$ OKM bzw. $\triangle$ OJH zu

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot |I_m\ (m \cdot \bar{k})|\ ,\ S_2 = \frac{1}{2} \cdot |I_m\ (h \cdot \bar{j})|\ , \qquad (23)$$

wenn wir noch voraussetzen, daß der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems im Punkt 0 liegt. Aus (22) und (23) ergibt sich

$$18 \cdot S_1 = |I_m(2b+c)(2\bar{a}+\bar{d})| = |I_m\ (4\bar{a}b+2b\bar{d}+2\bar{a}c+c\bar{d})|\ ,$$

$$18 \cdot S_2 = |I_m(2c+b)(\bar{a}+2\bar{d})| = |I_m\ (4c\bar{d}+2\bar{a}c+2b\bar{d}+\bar{a}b)|\ .$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$A = (r_1\ \cos\varphi_1,\ r_1\ \sin\varphi_1),\ B = (r_2\ \cos\varphi_2,\ r_2\ \sin\ \varphi_2)$$

ist $\varphi_1 = \varphi_2$, da 0, A, B auf einer Geraden liegen, also $a = \lambda\, b$, $c = \mu \cdot d$ für geeignete Zahlen λ, μ. Damit ist

$$I_m\ \bar{a} \cdot b = \lambda\, I_m\ \bar{a}\ a = \lambda I_m\ |a|^2 = 0 \text{ und}$$

analog $I_m\ c\ d = 0$ und daher

$$18\ S_1 = 2 \cdot |I_m(\bar{a}c + b\bar{d})| = 18\ S_2, \text{ also } S_1 = S_2.$$

Bei der Gestaltung der Aufgaben 1 bis 7 wurde auf eine bulgarische Aufgabensammlung aus dem Jahre 1981 zurückgegriffen.

Aufgabe 8

Die Seitenlängen des Dreiecks seien a, b und c und o. B. d. A. sei $a \leqq b \leqq c$. Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2}$$

ist auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,a]$ stetig und wegen $f(o) = a + b - c > o$, $f(a) = \sqrt{b^2 . a^2} - \sqrt{c^2 - a^2} \leqq o$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine reelle Zahl r mit

$$o < r \leqq a, \sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2} = \sqrt{c^2 - r^2}.$$

Sei $\triangle A_1B_1C_1$ ein beliebiges gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge r in irgendeiner Ebene E. A_o bzw. C_o seien Punkte auf der gleichen Seite von E, die auf den Senkrechten zu E durch A_1

bzw. C_1 liegen und für die

$$|A_0A_1| = \sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2}, \quad |C_0C_1| = \sqrt{a^2 - r^2} .$$

ist. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$|B_1C_0|^2 = (\sqrt{a^2 - r^2})^2 + r^2 = a^2$$

$$|A_0C_0|^2 = (\sqrt{b^2 - r^2})^2 + r^2 = b^2$$

$$|A_0B_1|^2 = (\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{b^2 - r^2})^2 + r^2 = (\sqrt{c^2 - r^2})^2 + r^2 = c^2.$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_0B_1C_0$ sind demnach kongruent. Die Bewegung, die das Dreieck $\triangle A_0B_1C_0$ in das Dreieck $\triangle ABC$ überführt, überführt die Ebene E in eine Ebene E'. Die Punkte A_1, B_1 und C_1 werden in die Fußpunkte der Lote von A, B und C auf E' überführt.

Damit wurde gezeigt, daß man jedes Dreieck durch senkrechte Projektion auf eine Ebene in ein gleichseitiges Dreieck überführen kann.

Aufgabe 9 (nach Karin Gröger, Berlin)

Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung. Es sei x_o eine beliebige (reelle oder komplexe) Nullstelle der Ausgangsgleichung. Dann ist

$$0 = (x_o - 1) \cdot \sum_{k=o}^{n} (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) \cdot x_o^{n-k} = \sum_{i=o}^{n} a_i (x_o^{n+1} - x_o^{n-i})$$

und damit

$$x_o^{n+1} \cdot \sum_{i=o}^{n} a_i = \sum_{i=o}^{n} a_i x_o^{n-i}$$

sowie

$$|x_o|^{n+1} \cdot \left| \sum_{i=o}^{n} a_i \right| = \left| \sum_{i=o}^{n} a_i x_o^{n-i} \right|. \tag{24}$$

a) Die Voraussetzung $\sum\limits_{o \leq i < j \leq n} a_i a_j \geqq o$ ist äquivalent zu

$$\left(\sum_{i=o}^{n} a_i\right)^2 \geqq \sum_{i=o}^{n} a_i^2.$$

Da wegen der Nichttrivialität nicht alle a_i verschwinden, folgt

$\sum\limits_{i=o}^{n} a_i^2 > 0$ und damit $\sum\limits_{i=o}^{n} a_i \neq o$. Aus (24) folgt mittels der

Dreiecksungleichung

$$|x_o|^{n+1} \cdot \left|\sum_{i=o}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=o}^{n} |a_i| \cdot |x_o|^{n-i}. \tag{25}$$

Da in der letzten Summe a_i und $|x_o|^{n-i}$ reelle Zahlen sind, $i = o, 1, \ldots, n$, ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\sum_{i=o}^{n} |a_i| \cdot |x_o|^{n-i} \leq \sqrt{\sum_{i=o}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=o}^{n} |x_o|^{2(n-i)}} \leq \sqrt{\sum_{i=o}^{n} a_i} \cdot \sqrt{\sum_{i=o}^{n} |x_o^2|^i}$$

$$= \left|\sum_{i=o}^{n} a_i\right| \cdot \sqrt{\frac{|x_o^2|^{n+1} - 1}{|x_o^2| - 1}}.$$ (Für $|x_o^2| = |x_o|^2 = 1$ gilt die Behauptung ohnehin). Mit (25) und $\sum_{i=o}^{n} a_i \neq o$ folgt

$$|x_o|^{n+1} \leq \sqrt{\frac{{x_o^2}^{n+1} - 1}{x_o^2 - 1}}$$

und weiter

$$\frac{|x_o^2|^{n+1}\,(|x_o^2| - 2) + 1}{|x_o^2| - 1} \leq o. \tag{26}$$

Wäre $|x_o^2| \geq 2$, so wäre $|x_o^2|^{n+1} \cdot (|x_o^2| - 2) + 1 \geq 1$ und $|x_o^2| - 1 \geq 1$ im Widerspruch zur Ungleichung (26). Damit gilt $|x_o^2| = |x_o|^2 < 2$, also $|x_o| < \sqrt{2}$.

b) Angenommen, es wäre $|x_o| \geq 1$. Aus (24) folgt

$$|x_o|^{n+1} \cdot \sum_{i=o}^{n} a_i = \left|\sum_{i=o}^{n} a_i x_o^{n-i}\right|.$$

In der Dreiecksungleichung $\left|\sum_{i=o}^{n} a_i \cdot x_o^{n-i}\right| \leq \sum_{i=o}^{n} a_i \cdot |x_o|^{n-i}$ gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn die komplexen Zahlen $a_i x_o^{n-i}$ ($i = o, 1, \ldots, n$) das gleiche Argument haben, d. h., wenn alle x_o^{n-i} das gleiche Argument haben. Für $i = n$ ist dies Argument Null. Folglich hat auch $x_o^{n-(n-1)} = x_o$ (für $n \geq 1$) das Argument Null, d. h., es muß $x_o > 0$ sein. Wie man aber sofort sieht, kann in der Ausgangsgleichung für positive reelle Zahlen x und a_i niemals Gleichheit eintreten.

Damit gilt

$$|x_o|^{n+1} \cdot \sum_{i=o}^{n} a_i = \left| \sum_{i=o}^{n} a_i \, x_o^{n-i} \right| < \sum_{i=o}^{n} a_i \, |x_o|^{n-i}$$

und folglich

$$0 < \sum_{i=o}^{n} a_i \left(\frac{1}{|x_o|^{i+1}} - 1 \right). \tag{27}$$

Für $|x_o| \geqq 1$ ist $|x_o|^{i+1} \geqq 1$ und damit $\frac{1}{|x_o|^{i+1}} - 1 \leqq o$ im Widerspruch zu (27). Folglich ist $|x_o| < 1$.

Aufgabe 10

Für $x \neq 1$ ist $q(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ und damit

$$q(x^{p^k}) = \frac{x^{p^{k+1}} - 1}{x^{p^k} - 1} \tag{28}$$

also

$$f(x) = -1 + \prod_{k=o}^{n-1} q(x^{p^k}) = -1 + \prod_{k=o}^{n-1} \frac{x^{p^{k+1}} - 1}{x^{p^k} - 1}$$

$$= -1 + \frac{x^{p^n} - 1}{x - 1}.$$

(28) gilt auch für $x = i$ und $x = -i$, da aus $2 \nmid p$, $2 \nmid p^k$ folgt, daß $x^{p^k} \neq 1$ ist.

Für $p \equiv 1 \bmod 4$ ist $p^n \equiv 1 \bmod 4$. Daher ist

$$f(i) = -1 + \frac{i^{p^n} - 1}{i - 1} = -1 + \frac{i-1}{i-1} = o \text{ und}$$

$$f(-i) = -1 + \frac{(-i)^{p^n} - 1}{-i - 1} = -1 + \frac{-i - 1}{-i - 1} = o.$$

Mithin ist $f(x)$ durch $(x-i)(x+i) = x^2+1$ teilbar. Für $p \equiv -1 \bmod 4$ ist $p^n \equiv +1 \bmod 4$. Daher ist

$$f(i) = -1 + \frac{i^{p^n} - 1}{i - 1} = -1 + \frac{i-1}{i-1} = o \text{ und analog } f(-i) = o.$$

Daher ist $f(x)$ durch x^2+1 teilbar.

Für $x = 1$ ist $q(x) = p$ und

$$-1 + \prod_{k=o}^{n-1} q(x^{p^k}) = -1 + p^n \equiv 0 \bmod 2.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Diese Lösung stammt von Jochen Lattermann, Dresden.

<u>Aufgabe 11</u> (nach I. Witt)

Angenommen, es gibt reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, die Lösung des Gleichungssystems (1) bis (5) sind. Aus (1) folgt

$$x_5 = yx_1 - x_2. \tag{29}$$

Aus (29) und (5) folgt

$$x_4 = (y^2 - 1) \cdot x_1 - yx_2. \tag{30}$$

Analog erhält man aus (2) und (3)

$$x_3 = y \cdot x_2 - x_1, \tag{31}$$

$$x_4 = (y^2 - 1)x_2 - yx_1. \tag{32}$$

Aus (30) und (32) folgt somit

$$(y^2 + y - 1) \cdot x_1 = (y^2 + y - 1) \cdot x_2. \tag{33}$$

<u>1. Fall:</u> $y^2 + y - 1 \neq 0$. Aus (33) folgt $x_1 = x_2$. Analog kann man die Beziehungen $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$, $x_4 = x_5$ und $x_5 = x_1$ herleiten, d. h., es gilt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Die Ausgangsgleichungen geben damit in $2x_1 = yx_1$ über. Für $y = 2$ gelten diese Gleichungen. Für $y \neq 2$ folgt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = o$. Das liefert offenbar ebenfalls eine Lösung.

<u>2. Fall:</u> $y^2 + y - 1 = o$. Das gilt genau für $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dann ist Gleichung (33) gewiß erfüllt. Die Gleichungen (30) und (32) sind wegen $y^2 - 1 = -y$ äquivalent zu

$$x_4 = -y\,(x_1 + x_2). \tag{34}$$

Man erhält sämtliche Lösungen, indem man x_1 und x_2 beliebig wählt und für x_3, x_4 und x_5 in (31) (34) bzw. (29) einsetzt. Dann gelten (29) und (31) auch (1) und (2), folglich mit (30) und (32) auch (5) und (3). Die Gültigkeit von (4) ergibt sich aus

$$x_3 + x_5 = y \cdot x_2 - x_1 + y\,x_1 - x_2 = (y-1)(x_1 + x_2) = -y^2(x_1 + x_2)$$
$$= -yx_4.$$

Insgesamt stellten wir fest:

Für $y^2+y-1 \neq 0$ ist jedes 6-Tupel $(x_1, \ldots, x_5, y) = (0, \ldots, 0, \neq 2)$ eine Lösung. Für $y^2+y-1 \neq 0$ ist auch jedes 6-Tupel $(x_1, \ldots, x_5, y) = (t, t, t, t, t, 2)$ eine Lösung, t beliebig reell.

Für $y^2+y-1 = 0$ ist jedes 6-Tupel

$$(x_1,\dots,x_5,y) = (s,t,yt-s,\ -y(t+2),\ ys-t,y)$$

mit beliebigen reellen Zahlen s, t sowie $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ eine Lösung.

Weitere Lösungen gibt es nicht.

Aufgabe 12

a) Es sei $\delta = |\sphericalangle AC_1B_2|$. Dann gilt $\delta = |\sphericalangle BC_2A_1|$, da das Dreieck C_1C_2M gleichschenklig mit der Basis C_1C_2 und $|\sphericalangle MC_1B_2| = |\sphericalangle MC_2A| = 60^\circ$ ist. Im Dreieck BA_1C_2 folgt $|\sphericalangle BA_1C_2| = 180^\circ - \beta - \delta$ und analog ergibt sich $|\sphericalangle CA_2B_1| = 180^\circ - \beta - \delta$ und $|\sphericalangle CB_1A_2| = |\sphericalangle AB_2C_1| = \beta + \delta - \gamma$. Damit gilt im Dreieck AC_1B_2:
$\alpha + \delta + \beta + \delta - \gamma = 180^\circ$. Also folgt $\delta = \gamma$, $180^\circ - \beta - \delta = \alpha$ und $\beta + \delta - \gamma = \beta$, d. h., die Dreiecke AB_2C_1, A_1BC_2 und A_2B_1C sind dem Dreieck ABC ähnlich, x sei die Seitenlänge von D_1, D_2 und D_3. Es gilt $|AC_1| = \frac{b}{a}\cdot x$ und $|C_2B| = \frac{a}{b}\cdot x$ und $|\sphericalangle MC_1C_2| = 120^\circ - \gamma$ und mit $\cos(120^\circ - \gamma) = -\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\gamma$ folgt $|C_1C_2| = 2x\cdot\cos(120^\circ - \gamma) = x\cdot(\sqrt{3}\sin\gamma - \cos\gamma)$.
(Für $120^\circ - \gamma > 90^\circ$, d. h. $\gamma < 30^\circ$, wird der Strecke C_1C_2 eine negative Länge zugeordnet.) Mit $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ und $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ist

$$\frac{b}{a}\cdot x + x(\sqrt{3}\sin\gamma - \cos\gamma) + \frac{a}{b}x = c,$$

$$\frac{x}{2ab}(2b^2 + 2ab\sqrt{3}\sin\gamma - 2ab\cos\gamma + 2a^2) = c,$$

$$x\cdot(a^2 + b^2 + c^2 + 4A\sqrt{3}) = 2abc$$

und die Behauptung ist bewiesen.

b) (Nach A. Schmidt) Wir verwenden komplexe Zahlen.
Es gilt:

$$m_1 = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2),\ m_2 = \tfrac{1}{2}(a_1+a_2),\ m_3 = \tfrac{1}{2}(b_1+b_2),$$

$$c_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot b_2,\ b_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot a_2,\ a_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot c_2.$$

Nun ist $e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} - e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} + 1 = 0$, $b_2(e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} - e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} + 1) = c_2\cdot(e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} - e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} + 1)$, $b_2 + e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}a_2 - e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot b_2 - c_2 =$

$e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi} \cdot c_2 + e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \cdot a_2 - e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi} \cdot b_2 - e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \cdot c_2$,

$\frac{1}{2}(b_2 + b_1 - c_1 - c_3) = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}(a_1 + a_2 - c_1 - c_2)$, also

$m_3 - m_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}(m_2 - m_1)$. Damit gilt $|m_3 - m_1| = |m_2 - m_1|$, also $|M_3M_1| = |M_2M_1|$ und analog $|M_3M_2| = |M_2M_1|$, also ist das Dreieck $M_1M_2M_3$ gleichseitig.
Eine Berechnung von $|M_1M_2|^2$ mittels des Kosinussatzes unter Benutzung von $|MM_1|$, $|MM_2|$ und $|\sphericalangle M_1M_2M_3| = \alpha + \beta$ ist ebenfalls möglich. Das Ergebnis ist in α, β, γ symmetrisch und folglich gilt $|M_1M_2|^2 = |M_2M_3|^2 = |M_3M_1|^2$.

Aufgabe 13

Sei (n,x) eine Lösung der gegebenen Gleichung, n,x natürliche Zahlen. Da $2^n \equiv (-1)^n \mod 3$ ist, wird $(-1)^n \equiv x^2 \mod 3$. Bei Division durch 3 läßt x^2 aber nur den Rest 0 oder 1 und es muß n gerade $(n = 2m)$ und $x > 0$ sein. Wir erhalten

$$(2^m - x)(2^m + x) = 3p.$$

Damit sind folgende Fälle möglich:
(i) $2^m - x = 1$ und $2^m + x = 3p$,
(ii) $2^m - x = 3$ und $2^m + x = p$ $(p \geqq 5)$.
Die Fälle $2^m - x = p = 2$, $2^m + x = 3$ sowie $2^m - x = 3$, $2^m + x = p < 5$ entfallen, da die Differenz zwischen $2^m - x$ und $2^m + x$ mindestens zwei betragen muß. Wir diskutieren die obigen Fälle.

(i) $x = 2^m - 1$ und $2^{m+1} - 1 = 3p$, d. h., $p \geqq 5$. Weiter folgt, daß $2^{m+1} \equiv 1 \mod 3$ ist. Folglich ist $m + 1$ gerade, $m + 1 = 2k$, und wir erhalten $(2^k - 1)(2^k + 1) = 3p$. Das ist aber nur für $p = 5$ möglich. In diesem Fall wird $n = 6$ und $x = 7$.

(ii) $x = 2^m - 3$ und $2^{m+1} - 3 = p$. Dann gibt es für jede Primzahl $p > 5$ höchstens eine Lösung (n,x) in natürlichen Zahlen. Damit kommt nur $p = 5$ in Frage. Tatsächlich sind für $p = 5$ die Paare $(6,7)$ und $(4,1)$ Lösungen der Gleichung.

Damit hat die Gleichung $2^n - 3p = x^2$ nur für $p = 5$ zwei Lösungen (n_1,x_1), (n_2,x_2) in natürlichen Zahlen. Aus den Überlegungen folgt sogar, daß es die einzigen Lösungspaare für $p = 5$ sind.

Aufgabe 14

Wir überführen die Behauptung zunächst in eine äquivalente, indem wir R und r aus der rechten Seite der behaupteten Ungleichung eliminieren. Dazu sei o. B. d. A. $a \geqq b \geqq c$ und $\triangle ABC$ ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ($|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$). Da ein Dreieck durch die Seitenlängen eindeutig bestimmt ist, stimmen auch R, r und s mit den entsprechenden Größen des Dreiecks $\triangle ABC$ überein. Schließlich bezeichne F den Flächeninhalt des Dreiecks. Bekanntlich gilt

$$F^2 = s(s-a)\ (s-b)\ (s-c), \tag{35}$$

$$r \cdot s = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = F. \tag{36}$$

Bezeichnen wir die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$ mit γ , so ist $\gamma < 90^\circ$, da der Winkel der kürzesten Seite gegenüberliegt. Folglich ist

$$\cos\ (90^\circ - \gamma) = \frac{c}{2R}$$

und damit

$$4FR = (2ab\ \sin \gamma)\ R = abc. \tag{37}$$

Die rechte Seite der Behauptung läßt sich unter Beachtung von (35), (36), (37 in folgender Form schreiben:

$$s^2 - 8Rr - 2r^2 = s^2 - \frac{2abcr}{F} - 2 \cdot \frac{F}{s^2}$$

$$= s^2 - \frac{2abc}{s} - \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

$$= \frac{1}{s}(s^3-2abc-2s^3+2s^2(a+b+c)-2s(ab+ac+bc)+2abc)$$

$$= \frac{1}{s}(3s^3-2s(ab+ac+bc))$$

$$= \frac{1}{4}(3\ (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc))$$

$$= \frac{1}{4}\ (a^2+b^2+c^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2).$$

Sei $m = \min \{ a-b,\ a-c,\ b-c\}$. Wegen $a \geqq b \geqq c$ ist $m \geqq o$.
Aus $b + c > a$ folgt

$$c > a - b \geqq m \text{ und } b > a - c = (a-b) + (b-c) \geqq 2m.$$

Schließlich ist

$$a = (a-b) + b \geqq 3\ m.$$

Wir erhalten

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 > 9m^2 + 4m^2 + m^2 + m^2 + 4m^2 + m^2 = 20\,m^2$$

und es folgt

$$5\,m^2 < s^2 - 8Rr - 2r^2.$$

Aufgabe 15

Angenommen, es gibt keine solche Menge M, d. h., für jede Menge M gilt

$$\sum_{m \in M} \frac{a_m}{m} \neq 0.$$

a_3	a_6	a_4	a_{12}	M
1	1			{2,3,6}
-1	-1			{1,2,3,6}
1	-1	1	1	{2,3,4,6,12}
1	-1	1	-1	{4,6,12}
1	-1	-1	1	{3,4,6,12}
1	-1	-1	-1	{3,4,12}
-1	1	1	1	{3,4,12}
-1	1	1	-1	{3,4,6,12}
-1	1	-1	1	{4,6,12}
-1	1	-1	-1	{1,2,3,4,6,12}

Sie o. B. d. A. $a_1 = 1$. Wäre $a_2 = -1$, so müßte einer der in der Tabelle angegebenen Fälle eintreten. Die dazu angegebene Menge aber erfüllt

$$\sum_{m \in M} \frac{a_m}{m} = 0,$$

und daher darf keiner dieser Fälle eintreten. Es folgt $a_2 = +1$ und allgemein $a_k = a_{2k}$ für $k \geqq 1$. Anderenfalls führt eine analoge Fallunterscheidung für die Glieder a_{3k}, a_{4k}, a_{6k}, a_{12k} zum Widerspruch. Sei p nun die kleinste Primzahl, für die eine natürliche Zahl k^* mit $a_{k^*} \neq a_{k^* p}$ existiert. Wir zerlegen $p - 1$ in Primfaktoren und erhalten

$$p - 1 = q_1 q_2 \ldots q_t$$

mit $q_i < p$, $i = 1, \ldots, t$. Für alle diese q_i und alle natürlichen Zahlen k gilt folglich $a_k = a_{q_i \cdot k}$. Wir erhalten

$$a_{p\cdot k^*} = a_{q_1 \cdot p \cdot k^*} = \ldots = a_{q_1 q_2 \ldots q_t \cdot p \cdot k^*} = a_{(p-1)p\,k^*} \quad \text{und}$$

$$a_{k^*} = a_{(p-1)k^*}.$$

Folglich gilt

$$\frac{a_{(p-1)k^*}}{(p-1)\cdot k^*} + \frac{a_{pk^*}}{p\cdot k^*} + \frac{a_{p(p-1)k^*}}{p(p-1)k^*} = \frac{a_{k^*}}{k^*} \cdot \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{(p-1)p}\right) = 0.$$

Das darf aber nicht eintreten und damit kann es keine solche Primzahl geben. Für alle Primzahlen p und alle natürlichen Zahlen $k \geqq 1$ gilt $a_k = a_{pk}$. Hieraus folgt $a_k = a_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung, nach der (a_k) eine nichtkonstante Folge sein soll. Daher war die Annahme falsch und unsere Behauptung ist bewiesen.

Lösung der Sonderaufgabe aus Heft 13

Aufgabe: An einem Schachturnier, an dem n Personen teilnehmen und bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielt, seien schon s Spiele absolviert. Man zeige, daß es zwei Spieler A,B mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) A und B haben schon gegeneinander gespielt und
b) die Anzahl der absolvierten Spiele, bei denen A oder B mitgespielt hat, beträgt mindestens

$$\left]\frac{4 \cdot s}{n}\right[- 1.$$

Hierbei bedeutet $]x[$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.

Die folgende Lösung stammt von Oliver Geupel aus Dresden, EOS "Romain Rolland".
Ich numeriere die Personen mit den natürlichen Zahlen $k = 1,\ldots,n$ durch und bezeichne die Zahl der Partien, an denen der Spieler k nach s absolvierten Spielen beteiligt war, mit Z_k. Da jede Partie zwischen genau zwei Personen ausgetragen wird, ist

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = 2\,s. \qquad (38)$$

Da jeder Teilnehmer gegen jeden anderen Teilnehmer genau einmal zu spielen hat, existieren nach s Spielen genau s Paare $\{i,j\}$ von Spielern i,j, $1 \leqq i,\ j \leqq n$, $i \neq j$, die schon gegeneinander gespielt haben. Es sei P_{ij} die Zahl der Spiele, an denen nach s Partien mindestens einer der beiden Spieler i,j beteiligt war, d. h., $P_{ij} = Z_i + Z_j - 1$. Summiert man P_{ij} über alle s obengenannten $\{i,j\}$, so erhält man, da jeder Spieler k in genau Z_k Partien vorkommt (nämlich zusammen mit den Z_k Gegnern in seinen bisherigen Partien),

$$\sum_{\{i,j\}} P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} z_k^{\,2} - s. \qquad (39)$$

Nach der Beziehung zwischen dem quadratischen und dem arithmetischen Mittel von n nichtnegativen reellen Zahlen ist

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^{\,2} \geqq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2$$

und wegen (38) folgt damit aus (39)

$$\sum_{\{i,j\}} P_{ij} \geqq \frac{4\,s^2}{n} - s. \qquad (40)$$

Wegen (40) gibt es unter den s Paaren $\{i,j\}$ ein solches Paar $\{A, B\}$ mit

$$P_{AB} \geqq \left] \frac{1}{s} \sum_{\{i,j\}} P_{ij} \right[\geqq \left] \frac{4s}{n} - 1 \right[= \left] \frac{4s}{n} \right[- 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Auswertung der Sonderaufgabe aus Heft 16

Aufgabe: Es seien $a_1,\ldots,a_n$ und $b_1,\ldots,b_n$ reelle Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &a_1 \leqq \ldots \leqq a_n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \\ &b_1 \leqq \ldots \leqq b_n, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (41)$$

Man zeige, daß $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \geqq 0$ ist.

Bisher sandten zwei Schüler eine richtige Lösung ein:
Oliver Geupel, EOS "Romain Rolland", Dresden,
Jörg Stahnke, Willi-Sänger-OS, Pasewalk.

Die folgende Lösung stammt von Oliver Geupel.

Es gilt auch die allgemeinere Behauptung: Sind a_i und b_i, $i = 1,\ldots,n$, reelle Zahlen mit $a_i \leqq a_j$ und $b_i \leqq b_j$ für $1 \leqq i < j \leqq n$, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \qquad (42)$$

Beweis: Für $i = 1,\dots,n$ und $j = 1,\dots,n$ gilt laut Voraussetzung $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0$ und folglich $a_ib_i + a_jb_j \geqq a_ib_j + a_jb_i$, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_ib_i + a_jb_j) \geqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_ib_j + a_jb_i)$,

$$2n \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqq 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_ib_j = 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

und hieraus folgt (42).
Gleichheit kann in (42) höchstens dann eintreten, wenn in allen Beziehungen $(a_i-a_j)(b_i-b_j) \geqq 0$ Gleichheit herrscht, wenn also insbesondere $(a_1-a_n)(b_1-b_n) = 0$ gilt, d. h., wenn $a_i = a_j$ oder $b_i = b_j$ für alle $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ gilt. Aus (42) ist ablesbar, daß in diesen Fällen tatsächlich Gleichheit eintritt.

Unter den speziellen Voraussetzungen (41) der Aufgabe folgt nach obigen Überlegungen $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqq 0$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn alle a_i oder alle b_i Null sind.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 18

Sonderaufgabe

Man entscheide, ob es eine Menge M von natürlichen Zahlen gibt, die folgenden Bedingungen genügt:

(a) Für jede natürliche Zahl $m > 1$ gibt es Elemente $a, b \in M$ mit $a + b = m$

und

(b) wenn für die Elemente a,b,c,d aus M gilt: $a, b, c, d > 10$ und $a + b = c + d$, so ist $a = c$ oder $a = d$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Über den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ seien drei ähnliche gleichschenklige Dreiecke APB ($\overline{AP} = \overline{PB}$), AQC ($\overline{AQ} = \overline{QC}$) und BRC ($\overline{BR} = \overline{RC}$) so gezeichnet, daß die ersten beiden außerhalb des Dreiecks ABC liegen und das dritte in der gleichen durch BC begrenzten Halbebene wie das Dreieck ABC liegt.
Man beweise, daß das Viereck APRQ ein Parallelogramm ist.
(IMO-Vorschlag Belgien 1983, Mai-Klausur 1984)

Aufgabe 2

Wir betrachten die Menge aller streng monoton fallenden Folgen von n natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, daß kein Glied einer Folge ein anderes Glied dieser Folge teilt.
Seien $A = (a_i)$ und $B = (b_i)$; $i = 1, \dots, n$, zwei solcher Folgen.
Wir sagen
$A < B$, falls es ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k \text{ gibt.}$$

Man ermittle die kleinste Folge bezüglich dieser Ordnung z. B. durch eine rekursive Beschreibung.
(IMO-Vorschlag Brasilien 1983, Mai-Klausur 1984)

Aufgabe 3

Man löse das Gleichungssystem in reellen Zahlen:

$$x_1 \cdot |x_1| = x_2 \cdot |x_2| + (x_1 - a) \cdot |x_1 - a|$$
$$x_2 \cdot |x_2| = x_3 \cdot |x_3| + (x_2 - a) \cdot |x_2 - a|$$
$$\cdots\cdot$$
$$x_n \cdot |x_n| = x_1 \cdot |x_1| + (x_n - a) \cdot |x_n - a| \;,$$

wobei $a > o$ eine reelle Zahl sei.

(IMO-Vorschlag Rumänien 1983, Mai-Klausur 1984)

Aufgabe 4

Seien $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ positive und natürliche Zahlen mit der Eigenschaft

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2(n+1).$$

Man zeige, daß ein Index r, $1 \leqq r \leqq n$, existiert, für den folgende $n - 1$ Ungleichungen erfüllt sind:

$$\forall i \; (1 \leqq i \leqq n-r) \; x_{r+1} + \ldots + x_{r+i} \leqq 2i+1 \qquad (1)$$

und

$$\forall i \; (1 \leqq i \leqq r-1) \; x_{r+1} + \ldots + x_n + x_1 + \ldots + x_i =$$
$$\leqq 2(n-r+1)+1. \qquad (2)$$

Man beweise, daß r eindeutig bestimmt ist, falls in allen diesen Ungleichungen das Zeichen $<$ steht, und daß es anderenfalls genau zwei derartige r gibt.

(IMO-Vorschlag Kanada 1983, Februar-Klausur 1984)

Aufgabe 5

Man bestimme die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich

$$\sum_{k=1}^{2^{1983}} \frac{1}{k^{1983}} - 1$$

ist.

(IMO-Vorschlag Schweden 1983, Februar-Klausur 1984)

Aufgabe 6

Seien p und $q > o$ natürliche Zahlen. Man zeige, daß es ein Intervall I von der Länge $\frac{1}{q}$ und ein Polynom $p(x)$ mit natürlichen Zahlen als Koeffizienten gibt, so daß für alle x aus I gilt:

$$\left| p(x) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

(IMO-Vorschlag Finnland 1983, Februar-Klausur 1984)

Aufgabe 7

Sei M eine nichtleere Menge natürlicher Zahlen, die mit jedem Element x auch die Elemente 4x und $[\sqrt{x}]$ enthält.
Man beweise, daß jede positive natürliche Zahl zu M gehört.
(Bundeswettbewerb Mathematik der BRD, 1981, 2. Runde)

Aufgabe 8

Man beweise, daß jede Zerlegung des 3-dimensionalen Raumes in drei disjunkte Teilmengen folgende Eigenschaft hat:
mindestens eine der drei Teilmengen realisiert alle Abstände, d. h. für diese Teilmenge gibt es zu jeder reellen Zahl $a > o$ zwei Punkte M und N in der Teilmenge, deren Abstand $d(M,N) = a$ ist.
(IMO-Vorschlag UdSSR 1983, Juni-Klausur 1984)

Aufgabe 9

Sei n eine positive natürliche Zahl und sei

$$\sigma(n) := \sum_{d/n} d$$

gesetzt.
Die Zahl n hieße "speziell", wenn für alle $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ gilt:

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}.$$

Man zeige, daß es unendlich viele spezielle Zahlen gibt.
(IMO-Vorschlag Belgien 1983, Juni-Klausur 1984)

Aufgabe 10

Im Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Strecke AB.
Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf AC. Man konstruiere nur mit Hilfe eines Lineals einen Punkt Q auf der Strecke BC, der von MC denselben Abstand wie P hat.
(Juni-Klausur 1984)

Aufgabe 11

Sei F(n) die Menge aller Polynome

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_o, a_1, \ldots, a_n$, für die

$0 \leqq a_0 \leqq a_n \leqq a_1 \leqq a_{n-1} \leqq \ldots \leqq a_{\left[\frac{n}{2}\right]} = a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ gilt.

Man beweise, daß aus $f \in F(n)$, $g \in F(m)$ auch $f \cdot g \in F(m+n)$ folgt.

(IMO-Vorschlag DDR 1983, Juni-Klausur 1984)

Aufgabe 12

Sei a eine positive natürliche Zahl und sei die Folge (a_n) definiert durch

$$a_0 := 0,$$

$$a_{n+1} := (a_n + 1) \cdot a + (a+1)\, a_n + 2\sqrt{a \cdot (a+1)\, a_n\, (a_n + 1)},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Man zeige, daß für jede Zahl $n > 0$ die Zahl a_n eine positive ganze Zahl ist.

(IMO-Vorschlag Kanada 1983, Juni-Klausur 1984)

Aufgabe 13

Man bestimme alle Polynome p(x) mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Beziehung

$$x\,[\,p(x) - b\,] = (x-a)\; p\,(x + a)$$

erfüllen. Dabei seien a und b zwei gegebene reelle Zahlen.

(Gazeta Matematica 2-3 (1982), S. 7 g)

Aufgabe 14

Eine Menge A natürlicher Zahlen heißt N-Sidon-Menge, wenn für alle $a \in A$ gilt

$$1 \leqq a \leqq N \tag{3}$$

und für alle $a, b, c, d, \in A$ mit

$$\{a, b,\} \neq \{c, d\} \tag{4}$$

auch $a + b \neq c + d$ gilt.

Man beweise:

a) Ist $n \geqq 2 \cdot \sqrt{N}$, so gibt es keine N-Sidon-Menge der Mächtigkeit n.

b) Ist $n \leqq \sqrt[3]{N - 1}$, so gibt es eine N-Sidon-Menge der Mächtigkeit n.

Aufgabe 15

Sei $n = 1984^{1984}$. Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $n^2 + 2$ und $n^3 + 1$.

Lösungen

Aufgabe 1

1. Lösung - Elementargeometrie (nach J. Wenzel)

Wegen $\triangle$ APB $\triangle$ BRC

ist $\frac{\overline{PB}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$.

Da auch

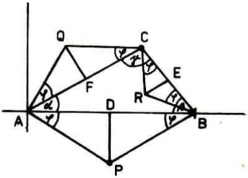
$\sphericalangle PRB = (\beta - \varphi) + \varphi = \beta$ ist,

gilt $\triangle$ PBR $\sim$ ABC. (Bezeichnungen siehe Skizze!)

Analog folgt $\triangle$ QRC $\sim$ ABC.

Damit ist auch $\triangle$ PBR $\sim$ QRC und wegen $\overline{RB} = \overline{RC}$ sogar

$\triangle PBR \cong \triangle QRC$



Und damit $\overline{PR} = \overline{QC}$ sowie $\overline{PB} = \overline{QR}$.

Wegen $\overline{AP} = \overline{PB}$ und $\overline{AQ} = \overline{QC}$ folgt schließlich

$\overline{AP} = \overline{QR}$ und $\overline{AQ} = \overline{PR}$.

Somit ist gezeigt, daß $\square$ APEQ ein Parallelogramm ist.

2. Lösung - Koordinatengeometrie (nach O. Geupel)

Das $\triangle$ ABC sei in kartesisches Koordinatensystem gelegt (s. Abb.). O.B.d.A. können wir annehmen, daß die Eckpunkte die folgenden Koordinaten haben

A (o,o), B (2,o), C (2c, 2d).

Das Verhältnis von Höhe zur Grundseite ist in den drei ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken stets gleich und sei $\frac{v}{2}$.

Dann ist P(1, - v).

Die Gleichung der Geraden durch AC ist $y = \frac{d}{c}x$.

(Im Fall c = o ist offenbar Q (- vd, d).)

Wegen F(c,d) ist die Gleichung der Mittelsenkrechten

$$y = -\frac{c}{d}(x - c) + d.$$

Wegen

$$\frac{x_F - x_Q}{y_C - y_A} = \frac{\overline{QF}}{\overline{AC}} = \frac{v}{2} \text{ (Ähnlichkeit von Dreiecken)}$$

folgt $\frac{c - x_Q}{2\,d} = \frac{v}{2}$, also $x_Q = v\,d + c$

und $\quad y_Q = vc + d$, d. h.

$\quad Q\ (-vd + c,\ vc + d).$

In analoger Weise erhalten wir

$\quad R\ (c + 1 - vd,\ vc - d - v)$

Die Parallelität von g_{AQ} und g_{PR} bzw. g_{AP} und g_{RQ} weist man leicht durch Berechnung der Anstiege nach,

z. B. ist der Anstieg von g_{AQ} : $\dfrac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A} = \dfrac{vc + d}{-vd + c}$

und der von g_{PR} : $\dfrac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \dfrac{(vc - d - v) - (-v)}{(c+1 - vd) - 1} = \dfrac{vc - d}{-vd + c}$

<u>3. Lösung</u> - Vektorrechnung

Sei $\underline{e}$ ein Einheitsvektor senkrecht auf der Ebene ε des Dreiecks ABC, so daß $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\underline{e}$ ein Rechtssystem bilden.

Ist nun $\underline{x}$ ein Vektor in ε , so ist $\underline{y} = \underline{x}\mathrm{x}\underline{e}$ ein Vektor in ε , der senkrecht auf $\underline{x}$ steht, mit $\underline{y}$ und $\underline{e}$ ein Rechtssystem bildet und die Länge $|\underline{x}|$ hat.

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ist das Verhältnis von Höhe zu Grundseite konstant; es sei k.

Dann ist $\overrightarrow{DP} = k \cdot (\overrightarrow{AB}\mathrm{x}\underline{e})$,

$\overrightarrow{ER} = -k \cdot (\overrightarrow{BC}\mathrm{x}\underline{e})$ und $\overrightarrow{FQ} = k\ (\overrightarrow{CA}\mathrm{x}\underline{e})$

Nun ist

$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{PR} = \left[-\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{CA} + k(\overrightarrow{CA}\mathrm{x}\underline{e}) \right] - \left[\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - k(\overrightarrow{BC}\mathrm{x}\underline{e}) + \tfrac{1}{2}AB - k(\overrightarrow{AB}\mathrm{x}\underline{e}) \right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + k(\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\mathrm{x}\underline{e}\ )$$

$$= \underline{0}$$

Wegen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>4. Lösung</u> - Bewegungsgeometrie (nach J. Warncke)

Der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks sei α .

Wegen $\triangle APB \sim \triangle BRC$

ist $\quad \dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{RB}}{\overline{BC}}$.

Durch Drehung ϱ der Punkte R und P um das Drehzentrum B mit dem Drehwinkel $-\alpha$ gehen diese in Punkte R' und P' mit $R' \in BC$, $P' \in AB$ über.

Wegen $\overline{PB} = \overline{P'B}$ und $\overline{RB} = \overline{R'B}$ erhalten wir $\frac{\overline{P'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{R'B}}{\overline{BC}}$

und nach der Umkehrung des Strahlensatzes $P'R' \parallel AC$.
Da AQ bei der Drehung ϱ in eine Parallele p zu AC übergeht, ist also $p \parallel R'P'$ und mithin auch deren Urbilder parallel, also ist

$$AQ \parallel PR.$$

Anlaog zeigt man $AP \parallel QR$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

<u>5. Lösung</u> - Komplexe Zahlen (nach A. Schmidt)
Wegen der Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke gilt

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = \lambda$. Ist α der Basiswinkel dieser Dreiecke,

so gilt

$$P = B + (A - B) \cdot \lambda \cdot e^{+i\varphi},$$
$$R = B + (C - B) \cdot \lambda \cdot e^{i\varphi}$$

und
$$Q = A + (C - A) \cdot \lambda \cdot e^{i\varphi}.$$

Also ist
$$\begin{aligned} R - P &= \\ &= (C - B)\lambda e^{i\varphi} - (A - B)\lambda e^{i\varphi} \\ &= (C - A)\lambda e^{i\varphi} \\ &= (A + (C - A)\lambda e^{i\varphi}) - A \\ &= Q - A \end{aligned}$$

Also ist APRQ ein Parallelogramm.

<u>Aufgabe 2</u>
Bezeichne A_n das kleinste Element. Offenbar hat die Folge $(2n - 1, 2n - 2, \ldots, n)$ die geforderte Nichtteilbarkeitseigenschaft. Da es nur endlich viele Folgen der Länge n mit Zahlen aus $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ gibt, existiert A_n, und das erste Glied ist nicht größer als 2n-1. Wir konstruieren folgende Zerlegung $\mathcal{K}_k$ von $\{1,2,\ldots,k\}$ in $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ Klassen K_i, $i = 1,2,\ldots,\left[\frac{k+1}{2}\right]$:

$$K_i = \{2i - 1, 2(2i - 1), 4(2i - 1), \ldots, 2^t(2i - 1), \ldots\} \cap \{1,2,\ldots,k\},$$

d. h., K_i enthält mit der i-ten ungeraden Zahl auch alle Produkte dieser Zahl mit Zweierpotenzen, solange diese noch in der gegebenen Menge liegen. Innerhalb jeder Klasse teilt in jedem Paar eine Zahl die andere. Wir zeigen, daß A_n mit $2n - 1$

beginnt. Sei k das erste Glied von A_n. Angenommen, es ist $k \leq 2n - 2$. Da die Zerlegung $\mathcal{K}_k$ nicht mehr als

$$\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{2n-1}{2}\right] = n - 1$$

Klassen enthält, müssen mindestens zwei Elemente von A_n in einer Klasse liegen, was aber der Nichtteilbarkeitsbedingung widerspricht.

Also beginnt A_n mit $2n - 1$. Wir betrachten $\mathcal{K}_{2n-1}$. Nach obigem Argument enthält A_n aus jeder Klasse genau eine Zahl! Sei $l = \left[\frac{n+1}{3}\right]$. A_n enthält keine ungerade Zahl m mit $m \leq 2l-1$, da 3m eine ungerade Zahl mit $3m \leq 6l - 3 = 6\left[\frac{n+1}{3}\right] - 3 \leq 6 \cdot \frac{n+1}{3} - 3 = 2n - 1$, und damit ist m echter Teiler <u>jeder</u> Zahl der Klasse $K_{\frac{3m+1}{2}} = \{3m,\ 2 \cdot 3m,\ 4 \cdot 3m,\ \ldots\}$.

Aus den Klassen K_i mit $1 \leq i \leq l$ enthält A_n nur gerade Zahlen. Dann können wir aber auch aus jeder Klasse K_i mit $i > l + 1$ die kleinste Zahl, nämlich $2i - 1$ wählen.

Die Zahlen $2l+1, 2l+3, \ldots, 2n-1$ erfüllen die Nichtteilbarkeitsbedingung, da für i und j mit $l \leq i < j \leq n - 1$ gilt:

$$\frac{2j+1}{2i+1} \leq \frac{2n-1}{2l+1} = \frac{2n-1}{2 \cdot \left[\frac{n+1}{3}\right] + 1} \leq \frac{2n-1}{2 \cdot \frac{n-1}{3} + 1}$$

$$= 3 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} < 3$$

und die erwähnten Zahlen ungerade sind.

Offenbar erfüllen alle Zahlenpaare $(a, 2i - 1)$ die Nichtteilbarkeitsbedingungen, wobei a eine gerade Zahl aus einer Klasse K_j $(j \leq l)$ und $i \geq l+1$ ist. Die geraden Zahlen erfüllen für sich natürlich auch die Nichtteilbarkeitsbedingung. Denken wir uns jede dieser Zahlen durch 2 dividiert, so ist diese Folge nicht kleiner als A_l. Also besteht die Folge A_n genau aus den Zahlen

$$\{2n - 1, 2n - 3, \ldots, 2l + 1\} \cup 2 \cdot A_l,$$

wobei $2 \cdot A_l$ bedeute, daß jedes Element von A_l zu verdoppeln ist.

Offenbar ist $A_0 = \emptyset$, $A_1 = (1)$ und $A_2 = (3,2)$.

Zur Illustration geben wir noch einige Folgen an:

$n = 3, l = 1$: $A_3 = (5,3,2)$

$n = 4, l = 1$: $A_4 = (7,5,3,2)$

$n = 5, l = 2$: $A_5 = (9,7,6,5,4)$

$n = 14, l = 5$: $A_{14} = (27,25,23,21, 19,18,17,15,14,13,12,11,10,8)$.

Aufgabe 3

(nach J. Stahnke)

Wir bemerken zunächst $x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geqq o \\ -x^2 & \text{für } x < o \end{cases}$

Angenommen, es gibt eine Lösung $((x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Addition aller Gleichungen ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)\ |x_i - a| = o$$

Diese Gleichung hat die Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a, a \quad , a)$
Jede andere Lösung enthält ein x_{i_o}, $x_{i_o} > a$, denn aus $x_i \leqq a$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $x_{j_o} < a$ für ein $j_o \in \{1, 2, \ldots, n\}$, folgt

$\sum_{i=1}^{n}$, $(x_i - a)\ |x_i - a| < o$ im Widerspruch zu obiger Gleichung.

Aus $x_{i_o} > a$ folgt wegen $a > o$

$$\begin{aligned} x_{i_o+1}\ |x_{i_o+1}| &= x_{i_o}\ |x_{i_o}| - (x_{i_o} - a)\ |x_{i_o} - a| \\ &= x_{i_o}^2 - (x_{i_o} - a)^2 \\ &= 2x_{i_o} a - a^2 \\ &> 2a^2 - a^2 = a^2 \end{aligned}$$

Also ist $x_{i_o+1} > o$ und damit $x_{i_o+1}\ |x_{i_o+1}| = x_{i_o+1}{}^2 > a^2$ also

sogar $x_{i_o+1} > a$. Induktiv (setze $x_{n+1} := x_1$) folgt nun

$$x_i > a \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dann ist aber $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)\ |x_i - a| = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 > o$ im

Widerspruch zur obigen Gleichung.

Aufgabe 4

Sei $S = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_i - 2i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.
Möge das Maximum von S erstmalig für r angenommen werden.
Wenn r = n ist, dann ist

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i - 2i < 2$$

oder

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i \leqq 2i + 1$$

für $1 \leqq i \leqq n - 1$. Wenn $r < n$ ist, dann ist für $l < n - r$

$$x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_{r+l} = (x_1 + \dots + x_{r+l}) - (x_1 + \dots + x_r)$$

$$= (x_1 + \dots + x_{r+l} - 2(r+l)) - (x_1 + \dots + x_r - 2r) + 2l \leqq 2l$$

und für $i < r$

$$(x_{r+1} + \dots + x_n) + (x_1 + \dots + x_i - 2i) <$$
$$(x_{r+1} + \dots + x_n) + (x_1 + \dots + x_r - 2r)$$
$$= (x_1 + \dots + x_n) - 2r = 2(n - r) + 2$$

und daher

$$x_{r+1} + \dots + x_n + x_1 + \dots + x_i \leqq 2(n - i - r) + 1.$$

Damit ist Existenz von r nachgewiesen.

Falls in allen gegebenen Ungleichungen das Zeichen $<$ steht, so wähle man $r = 0$.

Man erhält $x_1 \leqq 2$, $x_1 + x_2 \leqq 4, \dots, x_1 + \dots + x_{n-1} \leqq 2n - 2$.

Nun ist

$$2n + 2 = (x_1 + \dots + x_k) + (x_{k+1} + \dots + x_n)$$
$$\leqq 2k + x_{k+1} + \dots + x_n$$

und daher

$$x_{k+1} + \dots + x_n \geqq 2(n - k) + 2 > 2(n - k) + 1.$$

So kann man nicht mit x_{k+1} beginnen für irgendein $k > 0$.

Schließlich liege nicht der eben betrachtete Fall vor. Wir betrachten wiederum den Fall $r = 0$.

<u>Fall 1</u>

Sei $x_1 \leqq 2$, $x_1 + x_2 \leqq 4, \dots, x_1 + \dots + x_k = 2k + 1$

$$x_1 + \dots + x_{k+l} \leqq 2(k + l) + 1, \quad 1 \leqq l \leqq n - 1 - k$$

Falls $i \leqq k - 1$ ist, so ist

$$x_{i+1} + \dots + x_n = 2(n + 1) - (x_1 + \dots + x_i) \geqq$$
$$2(n + 1) - 2i > 2(n - 1) + 1.$$

Daher kann man den Zyklus nicht mit x_{i+1} beginnen (d. h. $r = i$ setzen). Falls es ein j gibt mit

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+j} = 2(k + j) \text{ und } j \geqq 1,$$

dann ist

$$x_{k+j+1} + \dots + x_n \geqq 2(n - k - j) + 2 > 2(n - k - j) + 1$$

Wenn für jedes $j \geqq 1$

$$x_1 + \dots + x_{k+j} = 2(k + j) + 1 \text{ ist,}$$

so ist $x_n = 3$ und für $j \geqq 1$

$$x_{k+j+1} +\ldots+ x_n = 2 + 2 +\ldots+ 3 = 2\,(n - k - i) + 1.$$

So kann man wiederum nicht $r = k + j$ wählen.

Aber es ist

$$x_{k+1} = (x_1 +\ldots+ x_{k+1}) - (x_1 +\ldots+ x_k) \leqq 2\,k + 3 - (2\,k+1) = 2,$$

$x_{k+1} +\ldots+ x_{k+l} \leqq 2\,(k + l) + 1 - (2\,k + 1) = 2\,l$ für $k + l \leqq n - 1$

$$x_{k+1} +\ldots+ x_n = (2\,n + 2) - (2\,k + 1) = 2\,(n - k) + 1$$

und da auch $x_1 \leqq 2$, $x_1 + x_2 \leqq 4$ usw. gilt,
kann man auch $r = k$ wählen.

Fall 2

Sei $x_1 \leqq 2,\ x_1 + x_2 \leqq 4,\ \ldots,\ x_1 +\ldots+ x_i \leqq 2\,i$

$$x_1 +\ldots+ x_{n-1} = 2\,n-1,\ 1 \leqq i \leqq n - 2.$$

Dann ist $x_n = 3$, $x_n + x_1 \leqq 5$, ... usw. So kann man $r = n - 1$ wählen.

Andererseits hat man für $i \geqq 1$, $i \leqq n - 2$

$$x_{i+1} +\ldots+ x_{n-1} + x_n = (x_1 +\ldots+ x_{n-1}) - (x_1 +\ldots+ x_i(+ 3$$
$$\geqq 2\,n - 1 - 2\,i + 3 > 2\,(n - i) + 1$$

Dabei kann man nicht $r = i$, $1 \leqq i \leqq n - 2$, wählen.

Aufgabe 5

Unter Verwendung von

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-m-1}\, b^m$$

mit $a = k^{\frac{1}{n}}$ und $b = (k - 1)^{\frac{1}{n}}$ findet man

$$1 < (k^{\frac{1}{n}} - (k - 1)^{\frac{1}{n}})\, n \cdot k^{1-\frac{1}{n}}$$ für alle ganzen Zahlen $n > 1$ und $k \geqq 1$.

Auf ähnliche Art beweist man für $n > 1$ und $k \geqq 1$:

$$n \cdot (\,(k + 1)^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}) < k^{\frac{1}{n} - 1}$$

Daher ist für $n > 1$ und $m > 1$

$$\sum_{k=2}^{m} k^{\frac{1}{n} - 1} < n.\ (m^{\frac{1}{n}} - 1) < \sum_{k=1}^{m-1} k^{\frac{1}{n} - 1}$$

und folglich für $n > 1$ und $m > 1$

$$n(m^{\frac{1}{n}} - 1) < \sum_{k=1}^{m} k^{\frac{1}{n} - 1} < n \cdot (m^{\frac{1}{n}} - 1) + 1$$

Für $n = 1983$ und $m = 2^{1983}$ erhält man

$$1983 < \sum_{k=1}^{2^{1983}} k^{\frac{1}{1983} - 1} < 1984.$$

Die größte ganze Zahl kleiner oder gleich der gegebenen Summe ist also 1983.

Aufgabe 6

Man wähle $p(x) = \frac{p}{q}\left((q\,x - 1)^{2n+1} + 1\right)$ und $I = \left[\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q}\right]$. Dann sind alle Koeffizienten von $p(x)$ natürliche Zahlen und für alle $x \in I$ gilt

$$\left|p(x) - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p}{q}\,(q\,x - 1)^{2n+1}\right| \leq \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Folglich gilt die behauptete Ungleichung, wenn man n groß genug wählt.

Aufgabe 7

I. Wir beweisen zunächst folgende Behauptung:

Gibt es zu einer natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl k und ein Element $m_k \in M$ derart, daß $n^{2^k} \leq m_k < (n+1)^{2^k}$, so ist n ein Element von M. (5)

Dazu wenden wir vollständige Induktion über k an.

$k = 1$: Aus $n^2 \leq m_1 < (n+1)^2$ folgt $n \leq \sqrt{m_1} < (n+1)$ und damit

$$n \leq \left[\sqrt{m_1}\right] < n + 1, \text{ d. h. } n = \sqrt{m_1} \in M.$$

$k \rightarrow k+1$: Aus $n^{2^{k+1}} \leq m_{k+1} < (n+1)^{2^{k+1}}$ folgt $n^{2^k} \leq \left[\sqrt{m_{k+1}}\right] < (n+1)^{2^k}$ und wegen $m_k = \left[\sqrt{m_{k+1}}\right] \in M$ wird auf Grund der Induktionsvoraussetzung auch $n \in M$.

II. Da M nicht leer ist, gibt es eine natürliche Zahl $k \in M$. Für diese gilt

$$1^{2^k} \leq k < 2^{2^k}.$$ Nach (5) folgt hieraus $1 \in M$.

Da mit x auch 4x zu M gehört folgt per Induktion über m, daß für $m \geqq 0$ gilt $4^m \in M$.

Da mit x auch $[\sqrt{x}]$ zu M gehört erhalten wir schließlich

$$2^m \in M \text{ für } m \geqq 0 \tag{6}$$

Nun sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir können natürliche Zahlen k und m so wählen, daß

$2^k > 2n$ und $2^{m-1} < n^{2^k} \leqq 2^m$ gilt. Weiter folgt

$$2^m < 2\, n^{2^k} = 2n \cdot n^{2^k - 1} < 2^k \cdot n^{2^k - 1} < (n+1)^{2^k}.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$n^{2^k} \leqq 2^m < (n+1)^{2^k}$$

Nach (6) ist $2^m \in M$ und nach (5) wird $n \in M$.

Aufgabe 8

Angenommen die Behauptung sei falsch. Seien P_1, P_2, P_3 drei disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung gleich dem dreidimensionalen Raum ist und die positive Zahl a_i nicht als Abstand in P_i realisierbar, $i = 1,2,3$. O.B.d.A. sei $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3$.

Für $P_1 = P_2 = \emptyset$ wäre $P_3 = \mathbb{R}^3$ und a_3 doch realisierbar.

Für $P_1 = \emptyset$ und $x \in P_2$ wäre die Kugelfläche mit dem Radius a_2 und dem Mittelpunkt x in P_3 enthalten und $a_3 \leqq a_2$ wäre doch in P_3 realisierbar.

Schließlich sei $P_1 \neq \emptyset$ und $x_1 \in P_1$. Die Kugelfläche S vom Radius a_1 und dem Mittelpunkt x_1 ist in $P_2 \cup P_3$ enthalten. Wegen $a_1 \geqq a_3$ gilt $S \nsubseteq P_3$. Sei $x_2 \in P_2 \cap S$. Der Kreisbogen $\{y \in S \mid d(x_2, y) = a_2\}$ ist in P_3 enthalte . Es ist $a_2 \leqq a_1$ und dieser Kreisbogen hat den Radius

$$r = a_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{4 \cdot a_1^2}} \geqq a_2$$

und wegen $a_3 \leqq a_2 \leqq a_2 \cdot \sqrt{3} < 2r$ wäre a_3 in P_3 realisierbar.

So führt die Annahme auf einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 9

Nach Definition ist

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} \frac{1}{d}.$$

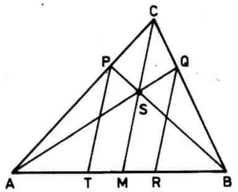
Folglich ist

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \text{ und insbesondere}$$

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} = \sum_{d|n!} \frac{1}{d} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Also ist mit $a_n = \frac{\sigma(n)}{n}$ die Folge (a_n) nicht beschränkt und folglich gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n mit $a_n > a_k$ für alle $k < n$.

Aufgabe 10



Sei S der Schnittpunkt der Strecken MC und BP. Ferner sei Q der Schnittpunkt der Geraden durch A und S bzw. B und C.

Offenbar ist Q nur unter Verwendung eines Lineals konstruierbar. Wir zeigen, daß Q der gesuchte Punkt ist, d. h., Q und P haben denselben Abstand von MC.

(Offensichtlich kann es nicht mehrere solche Punkte Q geben.)

Seien T und R diejenigen Punkte auf AB, für die $TP \parallel MC \parallel RQ$ ist. Es reicht aus zu zeigen, daß $\overline{TM} = \overline{MR}$ gilt. Unter Verwendung des Strahlensatzes und der Beziehung $\overline{AM} = \overline{MB}$ erhalten wir folgende Gleichungen.

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BT}},\ \frac{\overline{TP}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AM}},\ \text{also}$$

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} \text{ und} \tag{7}$$

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AR}},\ \frac{\overline{RQ}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BM}},\ \text{also}$$

$$\frac{\overline{MS}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) schließen wir

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}$$

bzw. nach Addition von 1 auf beiden Seiten

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AR}},$$

woraus wir $\overline{BT} = \overline{AR}$, $\overline{BT} - \overline{BM} = \overline{AR} - \overline{AM}$ und schließlich $\overline{TM} = \overline{MR}$ erhalten.

<u>Aufgabe 11</u>

Setze

$h_{n+i}(x) = x^i + \ldots + x^{n-i}$, $2i \leqq n$.

Die Menge $F(n)$ ist die Menge der Linearkombinationen mit nicht negativen Koeffizienten von den $h_{n,i}$'s. Dies ist ein konvexer Kegel. Dabei ist es hinreichend zu beweisen, daß

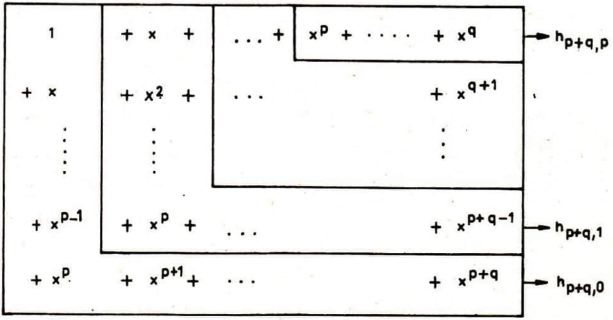
$$h_{n,i} \cdot h_{m,j} \in F(n+m)$$

ist. Wir können $n - 2i \leqq m - 2j$ annehmen und setzen

$p = n - 2i$, $q = m - 2j$. Dann gilt

$$h_{n,i}(x) \cdot h_{m,j}(x) = x^{i+j} \cdot (1 + x + \ldots + x^p)(1 + x + \ldots + x^q)$$

$$= x^{i+j} \cdot \sum_{k=o}^{p} h_{p+q,k} = \sum_{k=i+j}^{n-i+j} h_{m+n,k}$$



Aufgabe 12

Offenbar ist jedes $a_n > o$. Man prüft leicht:

$$\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} \cdot \sqrt{a+1} + \sqrt{a_n+1} \cdot \sqrt{a}$$

Außerdem gilt

$$\sqrt{a_{n+1} + 1} = \sqrt{a + 1}\,\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a}\,\sqrt{a_n},$$

da

$$(\sqrt{a+1}\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a}\sqrt{a_n})^2 = (a+1)(a_n+1) + aa_n + 2\sqrt{a(a+1)(a_n+1)a_n}$$

$$= a_{n+1}+1$$

ist. Folglich ist

$$(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n+1} - \sqrt{a_n}) = (\sqrt{a+1}\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a}\,\sqrt{a_n}). -$$
$$(\sqrt{a_n}\,\sqrt{a+1} + \sqrt{a_n+1}\,\sqrt{a})$$

$$= \sqrt{a_{n+1}+1} - \sqrt{a_{n+1}}.$$

Mittels Induktion erhält man

$$\sqrt{a_n+1} - \sqrt{a_n} = (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})^n$$

und analog

$$(\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a_n}) = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})^n$$

und daraus

$$\sqrt{a_n} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{a+1} + \sqrt{a})^n - (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})^n \right)$$

Daraus ergibt sich leicht die Behauptung.

Aufgabe 13

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: $a = o$. Durch Einsetzen erhalten wir $bx = o$ für alle reellen x. Ist $b \neq o$, so gibt es folglich kein Polynom mit den geforderten Eigenschaften. Ist $b = o$, so stellt die Ausgangsgleichung eine Identität dar, d. h., alle reellen Polynome haben die geforderte Eigenschaft.

Fall 2: $a \neq o$. Mit $x = o$ erhält man aus der Ausgangsgleichung $O = a \cdot p(a)$, also $p(a) = o$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt dann

$$p(x) = (x-a)\, q(x) \tag{9}$$

mit $q(x)$ als Polynom. Mit $x = a$ folgt aus der Ausgangsgleichung $a[p(a) - b] = o$, also $p(a) = b$. Gilt $b \neq o$, so ist $p(a) = o \neq b = p(a)$, d. h., es existiert kein Polynom mit der geforderten Eigenschaft.

Ist $b = o$, so ergibt sich aus (9) und der Ausgangsgleichung

$$x(x - a)(q(x) - q(x + a)) = 0 \text{ für alle } x.$$

Infolge der Stetigkeit eines Polynoms folgt hieruas

$q(x) = q(x + a)$. Wir wählen ein $x_o \neq o$. Dann folgt

$q(x_o) = q(x_o + a) = q(x_o + 2a) = \ldots = q(x_o + na) = \ldots$

für alle natürlichen Zahlen n. Folglich hat das Polynom $S(x) = q(x) - q(x_o)$ unendlich viele Nullstellen, ist also identisch gleich Null, da jedes nicht identisch verschwindende Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt.

Damit ist also $q(x)$ eine Konstante c und

$$p(x) = c \cdot (x - a).$$

Man erkennt leicht, daß das tatsächlich eine Lösung ist.

Aufgabe 14

a) Angenommen, es gäbe eine n-elementige N-Sidon-Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $n \geq 2\sqrt{N}$. Wir setzen $s_{ij} := a_i + a_j$ $(i,j \in \{1, \ldots, n\})$.

Wegen (4) sind die $\frac{n}{2}(n+1)$ Summen s_{ij} mit $1 \leq i \leq j \leq n$ paarweise verschieden und wegen (3) liegen sie im Interval $[2, 2N]$.

Also folgt $\frac{n}{2}(n+1) \leq 2N-1$ und insbesondere $\frac{n^2}{2} < 2N$, d. h. $n < 2\sqrt{N}$ im Widerspruch zur Annahme.

b) Sei $n \leq \sqrt[3]{N} - 1$. Wir konstruieren eine n-elementige N-Sidon-Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ auf folgende Weise:

1. Wir setzen $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_3 := 4$ (offenbar können wir $N \geq 4$ und $n \geq 3$ voraussetzen.)
2. Haben wir schon $a_1, \ldots, a_m$ $(3 \leq m < n)$ festgelegt, so setzen wir

$$V_m := \{a_i + a_j - a_n;\ 1 \leq i,j,k \leq m\} \cup \left\{\frac{a_i + a_j}{2};\ 1 \leq i,j, \leq m\right\}$$

und wählen a_{m+1} beliebig aus $\{1, \ldots, N\} \setminus V_m$.

Wir müssen uns nun davon überzeugen, daß

i) auf diese Weise n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ festgelegt werden können,

ii) die so konstruierte Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige N-Sidon-Menge ist.

Zu i): Eine Wahl von a_{m+1} ist sicher dann möglich, wenn $|V_m| < N$ ist. Offenbar gilt $|V_m| \leq m^3 + m^2 \leq m+1)^3$. Wegen $m < n \leq \sqrt[3]{N} - 1$ folgt $m + 1 < \sqrt[3]{N}$, d. h. $|V_m| < N$.

Zu ii): Wir zeigen durch Induktion über m, daß $\{a_1, \ldots, a_{m+1}\}$ eine m-elementige N-Sidon-Menge für alle m mit $0 \leq m < n$ ist.
Der Induktionsanfang m = 0,1 und 2 bietet keinerlei Schwierigkeiten. Nach Konstruktion gilt $a_1, \ldots, a_{m+1} \in \{1, \ldots, N\}$
Angenommen, es gäbe Zahlen $i,j,k.l \in \{1, \ldots, m+1\}$ mit $\{i,j,\} \neq \{k,l\}$, so daß $a_i + a_j = a_k + a_l$ ist.
Aufgrund der Induktionsvoraussetzung können wir o.B.d.A. annehmen, daß $l = m + 1$ ist.

<u>Fall 1:</u> Keine der Zahlen i,j,k ist gleich m + 1.
Dann gilt $a_{m+1} = a_i + a_j - a_k$ im Widerspruch zur Wahl von a_{m+1}.

<u>Fall 2:</u> Genau eine der Zahlen i,j,k ist gleich m + 1.

2.1. $k = m + 1$. Dann gilt $a_{m+1} = \frac{a_i + a_j}{2}$ im Widerspruch zur Wahl von a_{m+1}.

2.2. o.B.d.A. $i = m + 1$. Dann gilt $a_j = a_k$ bzw. $a_j + a_j = a_k + a_k$, jedoch $j,k \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \neq k$ (beachte $\{i,j\} \neq \{k,l\}$!)
Dies ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

<u>3. Fall:</u> Genau 2 der Zahlen i,j,k sind gleich m + 1.
Dann gilt o.B.d.A. $a_{m+1} = a_i = a_i + a_i - a_i$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ im Widerspruch zur Wahl von a_{m+1}.

<u>4. Fall:</u> $i = j = k = m + 1$. Dieser Fall ist wegen $\{i,j\} \neq \{k,l\}$ nicht möglich.

Aufgabe 15

Wir bezeichnen mit gg T (x,y) den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen x und y, wobei wir o.B.d.A. immer gg T $(x,y) > 0$ voraussetzen. Sind x,y und k beliebige ganze Zahlen, so gilt offenbar gg T (x,y) = gg T (y,x) = gg T $(x - ky,y)$, denn d teilt x und y genau dann, wenn d die Zahlen $x - ky$ und y teilt.

Hieraus schließen wir

$$\text{gg T } (n^3 + 1,\ n^2 + 2) = \text{gg T } (n^3 + 1 - n\,(n^2 + 2),\ n^2 + 2)$$
$$= \text{gg T } (1 - 2n,\ n^2 + 2).$$

Da $1 - 2n$ ungerade ist, folgt

$$\text{gg T } (1 - 2n,\ n^2 + 2) = \text{gg T } (1 - 2n,\ 2\,(n^2 + 2)\,)$$
$$= \text{gg T } (1 - 2n,\ 2(n^2 + 2) + n\,(1 - 2n)) = \text{gg T } (1 - 2n,\ 4 + n)$$
$$= \text{gg T } (1 - 2n + 2(4 + n), 4 + n) = \text{gg T } (9,\ 4 + n)).$$

Also ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler 1, 3 oder 9.

Es gilt

$$1984 = 1 \bmod 3, \text{ also}$$
$$n = 1984 = 1 \bmod 3 \text{ bzw.}$$
$$4 + n = 2 \bmod 3,$$

d. h., 3 teilt nicht $4 + n$.

Es folgt gg T $(n^2 + 2,\ n^3 + 1) = 1$.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 19

Sonderaufgabe

Bei einem Tischtennisturnier mit n Teilnehmern hat jeder gegen jeden genau einmal gespielt. Es gibt als Resultate nur Sieg oder Niederlage. Man zeige, daß man die Teilnehmer so mit $T_1, \ldots, T_n$ bezeichnen kann, daß T_{i+1} gegen T_i gewonnen hat ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Aufgaben

Aufgabe 1

Man bestimme alle Folgen $a_1, a_2, \ldots$ mit $a_1 = 1$ und

$$|a_n - a_m| \leq \frac{2 \cdot m \cdot n}{m^2 + n^2}$$

für alle positiven ganzen Zahlen m,n.
(Vorschlag Finnlands, IMO 1984)

Aufgabe 2

Die positiven Zahlen $a_{m,n}$, $m = 1,2,\ldots, n = 1,2,\ldots$ mögen für alle m und n den Bedingungen

1. $a_{m,1} = 1$,
2. $a_{m+1,\, n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_{m,n} + \frac{1}{3} \cdot a_{m+1,\, n}$,
3. $a_{1,n} > a_{1,n+1}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_{1,n} = 0$

genügen. Man beschreibe das Verhalten der Folgen
$(a_{k,n})$, $(a_{n+k,k})$, $(a_{m,k})$
für $k \to \infty$.
(Vorschlag Finnlands, IMO 1984)

Aufgabe 3

Man spiele folgendes Spiel:

(a) Beginne mit a weißen und b schwarzen Kugeln in einer Urne.
(b) Entnehme zufällig eine Kugel.

(c) Wenn die entnommene Kugel weiß ist, so beende man das Spiel. Anderenfalls lege man zwei neue schwarze Kugeln in die Urne und setze das Spiel mit (b) fort.

Sei S die Anzahl der Schritte (b) bis zum Stopp. Für $a = b = 1$ bzw. $a = b = 2$ ermittle man die Wahrscheinlichkeiten

$$a_n := P\ (S = n),\ b_n := P\ (S = n)$$

und den Erwartungswert

$$E\ (S) := \sum_{n \geqq 1} n \cdot a_n.$$

(Vorschlag der BRD, IMO 1984)

Aufgabe 4

Eine 2 x 2 x 12-Schachtel ist auszufüllen mit 24 Schachteln vom Format 1 x 1 x 2. Auf wieviel Arten ist das möglich?

(Vorschlag der BRD, IMO 1984)

Aufgabe 5

Man beweise, daß das Produkt von 5 aufeinander folgenden positiven natürlichen Zahlen kein vollständiges Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

(Vorschlag Großbritanniens, IMO 1984)

Aufgabe 6

Ein Land habe n Städte und eine direkte Eisenbahnverbindung $\{i,j\}$ zwischen allen Städten i,j, $1 \leqq i\ j \leqq n$. Ein Eisenbahner muß für alle $i \neq j$ die Verbindung $\{i,j\}$ genau einmal realisieren. Dabei darf er keine Strecke $\{i,j\}$ zweimal zurücklegen und nach Benutzen des Weges (i,j) ist ihm der Weg (j,i) verboten. Kann er dabei eine Verbindung $\{i,j\}$ nicht mehr auf der Eisenbahn realisieren, so muß er mit dem Flugzeug fliegen. Was ist die Minimalzahl der notwendigen Flüge?

(Vorschlag der MVR, IMO 1984)

Aufgabe 7

In einem Raum sitzen in jeder von drei Reihen jeweils n Schüler. Im Moment t, $t = 1,2,\ldots$, verläßt jeweils ein Schüler den Raum. Möge $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ die Anzahl der Schüler in der 1., 2. bzw. 3. Reihe zum Moment t bezeichnen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während des gesamten Vorgangs (bis zur Leerung der Klasse) stets

$|N_i(t) - N_j(t)| < 2$ für $1 \leq i < j \leq 3$

ist.

(Vorschlag Spaniens, IMO 1983)

Aufgabe 8

Ist x eine positive reelle Zahl, so bezeichne s (x) die Folge

$[x], [2x], [3x], \ldots.$

Man beweise, daß die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 29x - 25 = 0$ zwei Wurzeln α und β besitzt, für die $s(\alpha)$ und $s(\beta)$ unendlich viele gemeinsame Glieder haben.

Aufgabe 9

Es seien r und s positive ganze Zahlen.

Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl der geordneten Quadrupel (a,b,c,d) von positiven ganzen Zahlen a,b,c.d mit

$3^r \cdot 7^s = \text{kgV}(a,b,c) = \text{kgV}(a,b,d) = \text{kgV}(a,c,d)$
$= \text{kgV}(b,c,d).$

(Die Antwort soll eine Funktion in r und s sein.)

Aufgabe 10

a) Man zeige, daß es ganze Zahlen a,b,c mit $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ und $|a|, |b|, |c| < 10^6$ gibt, für die
$|a + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3}| < 10^{-11}$
gilt.

b) Man zeige, daß es keine ganzen Zahlen a,b,c mit $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ und $|a|, |b|, |c| < 10^6$ gibt, für die $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-21}$ gilt.

Aufgabe 11

Sind P und Q zwei Punkte in einer Ebene E, so bezeichne M (P,Q) die folgende Menge von Punkten von E: Es sei $d = \overrightarrow{PQ}$ und R derjenige Punkt von E, der mit P und Q ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis PQ und der Höhe d auf PQ bildet und R rechts von $\overrightarrow{PQ}$ liegt. M (P,Q) ist die Menge der inneren Punkte eines Kreises um R mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot d$.

Man zeige, daß $T \in M(P,Q)$ genau dann, wenn $P \in M(Q,T)$ und $Q \in M(T,P)$ gilt.

Aufgabe 12

Für relle Zahlen a_i und b_i, $i = 1,2,\ldots,n$ mit $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ und $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ beweise man die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

$$\leqq \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Ferner ermittle man, wann Gleichheit eintritt.

Aufgabe 13

Ein gegebener Punkt hat die Abstände $2, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - 1$ von den Eckpunkten eines Dreiecks. Man bestimme die maximale Fläche des Dreiecks.

Autgabe 14

Die natürlichen Zahlen a,b seien so gewählt, daß $2a - 1$, $2b - 1$ und $a + b$ Primzahlen sind. Man zeige:

$a + b$ teilt die Zahlen

$a^b + b^a$ und $a^a + b^b$ nicht.

(Österreichische Bundesolympiade, 1982)

Aufgabe 15

Wie muß die reelle Zahl a gewählt werden, daß das folgende Gleichungssystem reelle Lösungen hat:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ xy + yz + zx &= 2 \\ xyx &= a \end{aligned}$$

(Österreichische Bundesolympiade, 1982)

Lösungen

Aufgabe 1

Wir zeigen, daß nur die Folge $a_i = 1$ für alle positiven Zahlen i der Bedingung der Aufgabe genügt.
Nehmen wir an, daß $a_j \neq i$, $j = \in \mathbb{N}_+$, ist.

Aus $0 \leq |a_n - a_n| \leq \dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$ folgt

$$\lim_{m\to\infty} 0 = \lim_{m\to\infty} |a_n - a_m| = \lim_{m\to\infty} \frac{2mn}{m^2 + n^2} = 0.$$

Daher gilt für alle $n \in N_+$: $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a_n$.

Mit $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a_i = 1$ und $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a_j \neq 1$ ergibt sich ein Widerspruch.
Andererseits sieht man leicht, daß die Folge $a_i = 1$ für alle positiven Zahlen i die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 2

Aus der Aufgabenstellung erkennt man schnell, daß die Zahlen $a_{m,n}$ folgendermaßen aussehen:

m \ n	1	2	3	4	.	.	.	k	.	.
1	1									
2	1	1								
3	1	1	1				?			
4	1	1	1	1						
.	.	.	.	.	.					
.	.	.	.	.	.	.				
.	.	.	.	.	.	.	.			
k	1	1	1	1	1	1	1	1		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Folglich gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n+k,k} = 1.$

1. Mittels Induktion zeigen wir, daß für beliebige $n \geqq 2$

   $a_{m,n} < a_{m+1,n} \quad 1 \leqq m \leqq n-1$ ... gilt.

   Nach Voraussetzung gilt $a_{1,2} < 1 = a_{2,2}$.

   Setzen wir nun voraus, daß für $i = 2,3,\ldots,k$

   $$a_{m,i} < a_{m+1,i} \,,\; 1 \leqq m \leqq i-1 \; \ldots \text{ gilt,}$$

   dann gilt

   $$a_{m,k+1} = \frac{2}{3}\, a_{m-1,k} + \frac{1}{3}\, a_{m,k}$$

   $$< \frac{2}{3}\, a_{m,k} + \frac{1}{3}\, a_{m+1,k} = a_{m+1,k+1}.$$

   Da offensichtlich $a_{k,k+1} < 1 = a_{k+1,k+1}$ ist, gilt die Behauptung.

2. Mittels Induktion zeigen wir nun, daß für beliebige $m \geqq 1$

   $$a_{m,n} > a_{m,n+1} \,,\; n \geqq m \; \ldots \text{ gilt.}$$

   Nach Aufgabenstellung gilt $a_{1,n} > a_{1,n+1}$ für $n = 1$.

   Gelte nun $a_{k,n} > a_{k,n+1}$ für $n \geqq k$.

   Wir erhalten dann

   $$a_{k+1,n+1} = \frac{2}{3}\, a_{k,n} + \frac{1}{3}\, a_{k+1,n} \qquad \text{(nach 1.)}$$

   $$> \frac{2}{3}\, a_{k+1,n} + \frac{1}{3}\, a_{k+1,n} = a_{k+1,n}.$$

   Da alle $a_{m,n}$ positiv sind, folgt aus 2., daß die Folge $a_{m,k}$, $k \geqq m$, monoton fallend und beschränkt ist. Daher existiert $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m,k}$.

   Aus $a_{m+1,n+1} = \frac{2}{3}\, a_{m,n} + \frac{1}{3}\, a_{m+1,n}$ folgt dann

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m+1,n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\, a_{m,n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\, a_{m+1,n}$, woraus sich

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m+1,n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n}$ ergibt.

   Mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{1,n} = 0$ folgt

   $$\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = 0 \text{ für } m \geqq 1.$$

<u>Aufgabe 3</u>

1. Sei $a = b = 1$.

   Vor dem i-ten Schritt sind in der Urne eine weiße und i schwarze Kugeln, da sich bei jedem Schritt (sofern kein Stopp) die Anzahl der schwarzen Kugeln um 1 erhöht.

Sei $P(i=w)$ die Wahrscheinlichkeit im i-ten Zug weiß zu ziehen und $P(i=s)$ die Wahrscheinlichkeit im i-ten Zug schwarz zu ziehen,

dann ist $P(S=n) = P(n=w) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} P(i=s) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{n} =$

$= \underline{\underline{\frac{1}{n(n+1)}}}.$

Aus $P(S \leq n) = \sum_{i=1}^{n} P(S=i)$ und mit $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ folgt

$P(S \leq n) = 1 - \frac{1}{n+1} = \underline{\underline{\frac{n}{n+1}}}.$

$E(S) = \sum_{n \geq 1} n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} = \underline{\underline{\infty}}$ (harmonische Reihe)

2. Sei $a = b = 2$.
Vor dem i-ten Schritt sind in der Urne zwei weiße und i+1 schwarze Kugeln (sofern kein Stopp vorher).
Analog i) gilt dann

$$P(S=n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{i+3} \cdot \frac{2}{n+3} = \frac{2 \cdot 3}{(n+1)(n+3)} \cdot \frac{2}{n+3} = \underline{\underline{\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}}}.$$

Mit $\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{6}{(n+2)(n+3)}$ folgt analog 1.

$$P(S \leq n) = 1 - \underline{\underline{\frac{6}{(n+2)(n+3)}}}.$$

Mit $a_k = \frac{12}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{18}{k(k+2)(k+3)} - \frac{6}{k(k+1)(k+2)}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{18}{(k+2)(k+3)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 6 - \frac{18}{n+3} \qquad - \left(3 - \frac{6}{n+2}\right).$$

Wir erhalten

$$E(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \underline{\underline{3}}.$$

Aufgabe 4

$A(n)$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, eine $2 \times 2 \times n$-Schachtel durch $2 \times 2 \times 1$-Schachteln auszufüllen.

$B(n)$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, eine $2 \times 2 \times n$-Schachtel durch $2 \times 2 \times 1$-Schachteln so auszufüllen, daß jeder Schnitt in der Höhe $i = 1,2,\ldots,n-1$ parallel zur 2×2-Grundfläche mindestens eine $2 \times 2 \times 1$-Schachtel zertrennt.

Durch Probieren erhält man schnell die Werte:

$A(1) = 2$. $A(2) = 9$. $B(2) = 5$.

Wir wollen nun zeigen, daß für $n \geq 3$ $B(n) = 4$ ist.

Jeder Schnitt der Höhe $i = 1,2,\ldots,n-1$ parallel zur Grundfläche muß genau zwei $2 \times 2 \times 1$-Schachteln zerschneiden. (Würde ein Schnitt eine ungerade Anzahl (1 oder 3) von $2 \times 2 \times 1$-Schachteln zerschneiden, so würden die beiden entstehenden Teile der $2 \times 2 \times n$-Schachtel jeweils eine ungerade Anzahl von $1 \times 1 \times 1$-Würfeln enthalten. Das ist unmöglich. Zerschneidet ein Schnitt vier $2 \times 2 \times 1$-Schachteln, so würde einer der Schnitte im Abstand 1 zu diesem Schnitt keine $2 \times 2 \times 1$-Schachtel zerschneiden. Das ist unmöglich.)

Nun gibt es genau vier verschiedene Anordnungen von $2 \times 2 \times 1$-Schachteln so, daß der Schnitt in der Höhe 1 genau zwei Schachteln zerschneidet. Durch Wahl einer dieser Anordnungen ist dann aber die Lage aller anderen $2 \times 2 \times 1$-Schachteln eindeutig bestimmt. Folglich ist für $n \geq 3$ $B(n) = 4$.

Indem man die Teilungen der $2 \times 2 \times n$-Schachteln in $2 \times 2 \times a$- und $2 \times 2 \times b$-Schachteln mit $a + b = n$ betrachtet, erhält man:

$$A(n) = 2\,A(n-1) + B(n) + \sum_{i=2}^{n-1} B(i) \cdot A(n-i).$$

Es ergeben sich rekursiv die Werte:

$A(3) = 32$
$A(4) = 121$
$A(5) = 450$
$A(6) = 1681$
$A(7) = 6272$
$A(8) = 23400$
$A(9) = 87362$
$A(10) = 326041$
$A(11) = 1216800$
$A(12) = 4541161$

Aufgabe 5

Wir betrachten modulo 6 (= 2 · 3) alle diejenigen Zahlen, die sich weder durch 2 noch durch 3 teilen lassen. Dies sind alle Zahlen $z \equiv 1$ bzw. 5 (6).

Daraus folgt, daß unter fünf aufeinanderfolgenden Zahlen es stets zwei gibt, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. (1)

Nehmen wir an, daß $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = m^2$, $m \in N$, sei.

Nach (1) gilt, daß zwei der Zahlen, seien dies a und b, weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

1. Seien $a,b > 1$. Folglich enthalten a,b nur Primfaktoren $p_i \geqq 5$. Da jeder dieser Primfaktoren in höchstens einer der Zahlen $n, n+1,\dots,n+4$ auftreten kann, müssen sie in a bzw. b in gerader Ordnung auftreten, da ansonsten das Produkt keine Quadratzahl wäre. Damit sind a und b selbst Quadratzahlen.
   Mit $a = (b + t)^2$, $b > 1$ $t \geqq 1$ folgt aus
   $$(b + t)^2 - b^2 = 2bt + t^2 > 4$$
   ein Widerspruch zu $a,b \in \{n, n + 1,\dots,n + 4\}$.

2. Sei $b = 1$. So folgt
   $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.
   Da 120 keine Quadratzahl ist, muß die Annahme falsch sein.

Aufgabe 6

1. Sei n ungerade.
   Betrachten wir den Graphen der Eisenbahnverbindungen. Für jeden der n Knoten (Städte) gilt, daß er mit allen anderen Knoten verbunden ist, d. h., die Valenz jeden Knotens ist gerade. Dies ist ein Eulerscher Graph, und wir können einen Weg finden, der vom Knoten A ausgehend jeden Knoten genau einmal durchläuft und zu A zurückkehrt. Streichen wir die so durchlaufenen Kanten aus dem Graph, so reduziert sich die Valenz eines jeden Knotens um 2, und wir erhalten wieder einen Eulerschen Graphen. Wiederum kann man einen Weg von A aus über jeden Knoten genau einmal zurück zu A finden, sowie Streichen der diesmal durchlaufenen Kanten usw. Schließlich ist die Valenz eines jeden Knotens gleich Null, was bedeutet, daß wir jede Verbindung genau einmal realisiert haben ohne einen Flug.

2. Sei n gerade.

Dann ist die Valenz eines jeden Knotens im Graphen der Eisenbahnverbindungen ungerade. Nehmen wir an, der Eisenbahner startet beim Knoten A. Schon realisierte Strecken werden wir stets gleich aus dem Graphen streichen. Da bei jedem Durchlaufen eines Knotens $B \neq A$ nur mit der Eisenbahn die Valenz eines jeden Knotens um genau 2 reduziert wird, muß jeder Knoten $B \neq A$ mindestens einmal Ausgangs- bzw. Endpunkt eines Fluges sein.

Da jeder Flug genau zwei Städte erfaßt, benötigen wir folglich mindestens (n-1)/2 Flüge.

Wir wollen nun zeigen, daß (n-1)/2 Flüge auch genügen. Betrachten wir beliebige n-1 der n Knoten (seien dies die Knoten 1,2,...,n-1). Da alle diese Knoten miteinander direkt verbunden sind, bilden sie einen Eulerschen Graphen. Nach 1. kann man nun alle Verbindungen unter diesen n-1 Knoten ohne Flug realisieren. Start und Endpunkt sei der Knoten 1. Nun realisieren wir die Verbindungen (1,n) und (n,2) per Bahn und fliegen von 2 nach 3. Dann realisieren wir (3,n) und (n,4) per Bahn und fliegen von 4 nach 5 usw. Schließlich fliegen wir von n-2 zu n-1 und realisieren (n-1,n) per Bahn. Somit haben wir alle Verbindungen bei (n-1)/2 Flügen realisiert.

Aufgabe 7

Unter Beachtung der Aufgabenstellung sind folgende Situationen möglich:

(S_1) $N_1(t) = N_2(t) = N_3(t)$.

(S_2) $N_i(t) = N_j(t) = h$, $N_k(t) = h + 1$, wo $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ ist.

In diesen Situationen muß als nächster ein Schüler der Reihe k den Raum verlassen und das führt zur Situation (S_1).

(S_3) $N_i(t) = h$, $N_j(t) = N_k(t) = h + 1$, wo $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ ist.

In dieser Situation müssen als nächste ein Schüler aus der j-ten und danach aus der k-ten (bzw. aus der k-ten und danach aus der j-ten) Reihe den Raum verlassen und das führt zur Situation (S_1).

Also ist die Ausgangssituation (S_1) und nach dem Verlassen des Raumes durch jeweils drei Schüler tritt wiederum (S_1) ein. Möge P_h die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, daß ausgehend von der Situation (S_1) für $3 \cdot h$ Schüler sich die Situation (S_1) für $3(h - 1)$ Schüler ergibt, $h \leqq n$. Dann ist

$$P_h = \frac{(3h)(2h)h}{3h \cdot (3h-1) \cdot (3h-2)} = \frac{3!\ h^3}{3h \cdot (3h-1) \cdot (3h-2)}.$$

Der Raum ist leer, nachdem dieser Prozeß n-mal durchgeführt wird und diese Einzelschritte sind unabhängig. Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \prod_{h=1}^{n} P_h = \frac{(3!)^n \cdot (n!)^3}{(3n)!}.$$

Aufgabe 8

Für die drei Nullstellen a,b,c des Polynoms $f(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 25$ gilt wegen $f(1) = -5 < 0$, $f(2) = 1 > 0$, $f(3) = -1 < 0$ und $f(6) = 5 < 0$: $1 < a < 2 < b < 3 < c < 6$. Wir beweisen die Behauptung indirekt, nehmen also an, daß je zwei der Folgen s(a), a(b) und s(c) höchstens endlich viele gemeinsame Elemente haben.

Bezeichne $\varphi(n,x)$ die Anzahl der Elemente der Folge s(x), die im Intervall $[1,n]$ liegen.

Mithin gibt es eine natürliche Zahl N, so daß für jede natürliche Zahl n

$$\varphi(n,a) + \varphi(n,b) + \varphi(n,c) < n + N \tag{2}$$

gilt.

Wegen $a,b,c > 1$ enthalten die Folgen s(a),s(b),(s(c) jeweils nur verschiedene Elemente und wir haben

$$[\varphi(n,a) \cdot a] = n, \quad [(\varphi(n,a)+1)a] > n$$

und $\quad (\varphi(n,a)+1)a > n,$

d. h. $\quad \varphi(n,a) > \frac{n}{a} - 1.$

Analog folgt $\quad \varphi(n,b) > \frac{n}{b} - 1$

und $\quad \varphi(n,c) > \frac{n}{c} - 1.$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist $ab+ac+bc = 29$, $abc = 25$, also

$$\varphi(n,a)+\varphi(n,b)+\varphi(n,c) > \frac{n}{a}+\frac{n}{b}+\frac{n}{c} - 3 = n\,\frac{ab+ac+bc}{abc} - 3 =$$

$$= \frac{29}{25}\,n-3.$$

Nach (2) ist $N > \frac{4}{25}\,n-3$ im Widerspruch zur Konstanz von N.

<u>Aufgabe 9</u>

Wegen KgV $[a,b,c] = \ldots = 3^r7^s$ folgt a,b,c,d sind Teiler von 3^r7^s, d. h. sind folgendermaßen darstellbar

$$a = 3^{r_a}\,7^{s_a},$$
$$b = 3^{r_b}\,7^{s_b},$$
$$c = 3^{r_c}\,7^{s_c} \text{ und}$$
$$d = 3^{r_d}\,7^{s_d}.$$

Die gegebene Bedingung ist dann äquivalent zu

$$\max({}^ra,{}^rb,{}^rc) = \max({}^ra,{}^rb,{}^rd) = \max({}^ra,{}^rc,{}^rd) =$$
$$\max({}^rb,{}^rc,{}^rd) = r \text{ und}$$
$$\max(s_a,s_b,s_c) = \max(s_a,s_b,s_d) = \max(s_a,s_c,s_d) =$$
$$\max(s_b,s_c,s_d) = s. \qquad (3)$$

Wir betrachten jetzt nur (2). Die Anzahl der Lösungen von (3) ergibt sich offenbar analog.

Mindestens zwei der Zahlen r_a,r_b,r_c,r_d sind gleich r, die restlichen liegen im Intervall $[c,r-1]$.

Sind also genau i ($i \in \{2,3,4\}$) der Zahlen r_a,r_b,r_c,r_d gleich r, so gibt es $\binom{4}{i}$ Möglichkeiten, diese i aus den vier Zahlen auszuwählen und für jede der restlichen (4-i) dieser Zahlen gibt es jeweils genau r Möglichkeiten.

Zusammen sind es also für (2):

$$\sum_{i=2}^{4} \binom{4}{i}\, r^{4-i} = 6\,r^2 + 4\,r + 1$$

und für die Anzahl der möglichen Quadrupel (a,b,c,d) erhalten wir

$$(6r^2 + 4r + 1)(6s^2 + 4s + 1).$$

Aufgabe 10

a) Wir betrachten die $10^{18} - 1$ Zahlen

$x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3}$

mit $x,y,z \in \{0,1,\ldots 10^6 - 1\}$ und $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

Sie liegen alle im Intervall $(0,6 \cdot 10^6]$,

wegen $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} \leqq 10^6\,(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) < 10^6\,(1+2+3) =$
$= 6 \cdot 10^6$.

Wir zerlegen das Intervall $(0,6 \cdot 10^6]$ in die $6 \cdot 10^{17}$

Intervalle $\left(\frac{i-1}{10^{11}}, \frac{i}{10^{11}}\right]$, $i = 1,2,\ldots,6 \cdot 10^{17}$.

Wegen $10^{18} - 1 > 6 \cdot 10^{17}$ liegen nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip mindestens zwei der Zahlen in einem der Teilintervalle, d. h., es gibt zwei Zahlen

$$x_1 + y_1\sqrt{2} + z_1\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_2 + y_2\sqrt{2} + z_2\sqrt{3}$$

mit $|(x_1 + y_1\sqrt{2} + z_1\sqrt{3}) - (x_2 + y_2\sqrt{2} + z_2\sqrt{3})| < 10^{-11}$.

Setzen wir $a = x_1 - x_2$, $b = y_1 - y_2$, $c = z_1 - z_2$, so ist

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$$

mit $|a|, |b|, |c| < 10^6$ und $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

b) Das Produkt

$P = (a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})(-a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3})(a-b\sqrt{2} + c\sqrt{3})(a+b\sqrt{2} - c\sqrt{3})$

mit $|a|, |b|, |c| < 10^6$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ist wegen

$P = (-a^2 + b\,.\,\sqrt{2} + c\sqrt{3}\,^2)(a^2 - [b\sqrt{2} - c\sqrt{3}]^2)$
$= -a^4 + a^2\,[4b^2 + 6c^2] = [2b^2 - 3c^2]^2$

eine ganze Zahl.

Außerdem ist $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} \neq 0$ für $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Existieren nämlich x,y,z mit $x+y\sqrt{2} + z\sqrt{3} = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ so ist $(y\sqrt{2} + a\sqrt{3})^2 = (-x)^2$ und $2y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{6}\,yz = x^2$.

Wegen der Irrationalität von $\sqrt{6}$ muß $y = 0$ oder $z = 0$. Beide Fälle führen wegen Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sofort auf Widersprüche zu $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

Also ist $|P| \geqq 1$, d. h.

$$a+b\ 2+c\ 3 = \frac{1}{|-a+b\sqrt{2} + c\sqrt{3}||a-b\sqrt{2} + c\sqrt{3}||a+b\sqrt{2} - c\sqrt{3}|} =$$

$$\geqq \frac{1}{(|a| + |b|\sqrt{2} + |c|\sqrt{3})^3}$$

$|a|+|b|\sqrt{2}+|c|.\sqrt{3}<10^6\ (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$
$<10^6\,(1+1,5+1,8)=4,3\cdot 10^6$

ist für jede Zahl $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ mit $|a|,|b|,|c|<10^6$ und $a^2+b^2+c^2\neq 0$:

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|>\frac{1}{4,3^3}\,10^{-18}>\frac{1}{80}\cdot 10^{18}>10^{-20}.$$

Damit ist die Behauptung um eine Zehnerpotenz verbessert worden.

Aufgabe 11

(Nach Oliver Gaupel, Dresden)

Wir legen in E ein Kartesisches Koordinatensystem und wählen o.B.d.A. P (1,-2), Q (-1,-2) und R (0,0).

T (α,β) mit $T\neq P$, $T\neq Q$ sei ein beliebiger Punkt in E.

Dann ist $\left(\frac{\alpha-1}{2}\,.\,\frac{\beta-2}{2}\right)$ der Mittelpunkt von QT, und der Vektor $(\beta+2,\,-\alpha-1)$ ist das Bild von $\overrightarrow{QT}$ bei Drehung um -90°.

Folglich ist

A $\left(\frac{\alpha+2\beta+3}{2}\,.\,\frac{-2\alpha+\beta-4}{2}\right)$ der Mittelpunkt und

$\frac{1}{2}\overline{QT}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha+4\beta+5}$ der Radius von M (Q,T).

Analog ist

D $\left(\frac{\alpha-2\beta-3}{2},\,\frac{2\alpha+\beta-4}{2}\right)$ der Mittelpunkt und

$\frac{1}{2}\overline{TP}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta+5}$ der Radius von M (T,P).

Ferner ist

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\sqrt{5\alpha^2+5\beta^2+2\alpha+4\beta+1}$ und

$\overline{BQ}=\frac{1}{2}\sqrt{5\alpha^2+5\beta^2-2\alpha+4\beta+1}$

Nun ist $T\in M$ (P,Q) äquivalent mit $\alpha^2+\beta^2<1$ und damit auch mit

$5\alpha^2+5\beta^2+2\alpha+4\beta+1<\alpha^2+\beta^2+2\alpha+4\beta+5$ und
$5\alpha^2+5\beta^2-2\alpha+4\beta+1<\alpha^2+\beta^2-2\alpha+4\beta+5$,

also mit

$\overline{AP}<\frac{1}{2}\overline{QT}$ und $\overline{BQ}<\frac{1}{2}$ TP,

d. h. mit $P\in M$ (Q,t) und $Q\in M$ (T,P), wenn noch $5\alpha^2 + 5\beta^2 + 2\alpha + 4\beta + 1 = (\sqrt{5}\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{5}\beta + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 \geqq 0$

und $\qquad 5\alpha^2 + 5\beta^2 - 2\alpha + 4\beta + 1 = (\sqrt{5}\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{5}\beta + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 \geqq 0$

beachtet wird.

Aufgabe 12

Aus $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ und $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$
folgt

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqq 0 \text{ für } 1 \leqq j,\ i \leqq n \tag{4}$$

und

$$\sum_{\substack{i,j \\ 1 \leqq i < j \leqq n}} (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0,$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ 1 \leqq i < j \leqq n}} a_i b_j - \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leqq i < j \leqq n}} a_i b_j - \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leqq i < j \leqq n}} a_j b_i + \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leqq i < j \leqq n}} a_j b_i \geqq 0,$$

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i), \tag{5}$$

also die Behauptung.
Gleichheit tritt in (5) genau dann ein, wenn in (4) für alle i und j Gleichheit eintritt. Insbesondere muß

$$(a_n - a_1)(b_n - b_1) = 0$$

gelten. Aus $a_n = a_1$ folgt $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1$ und
aus $b_n = b_1$ folgt $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_1$.

Aufgabe 13

Es sei Δ ABC ein Dreieck mit $\overline{AP} = 2$, $\overline{BP} = \sqrt{2}$, $\overline{CP} = \sqrt{3}-1$ mit maximalem Flächeninhalt. Ein solches Dreieck existiert, denn ist $\sphericalangle APB = \alpha$ und $\sphericalangle BPC = \beta$, so ist $F(\Delta ABC) = f(\alpha,\beta)$ mit $\alpha \geqq 0, \beta = 0, \alpha + \beta \leqq 2\pi$, d. h., es liegt ein abgeschlossenes Gebiet für (α, β) vor.
Weiterhin ist Δ ABC spitzwinklig und P liegt in Δ ABC. Liegen z. B. die drei Punkte A,B,C sämtlich in einer Halbebene, die durch eine Gerade g durch P begrenzt wird, so spiegele man einen der Punkte an g und erhält ein flächengrößeres Dreieck, im Widerspruch zur Maximalität von Δ ABC, usw.

Ferner ist P Höhenschnittpunkt im Dreieck Δ ABC. Ist etwa $\sphericalangle (g(C,P), g(A,B)) \neq \frac{\pi}{2}$, so ersetze man C durch C', wobei C' der Punkt mit $\sphericalangle (g(C'P), g(A,B)) = \frac{\pi}{2}$, $\overline{PC'} = \sqrt{3} - 1$ und Abstand von P von g (A,B) < Abstand von C' von g (A,B) sei, und erhält ein flächengrößeres Dreieck, im Widerspruch zur Maximalität von Δ ABC.

Sei $x = \overline{PC'}$ und $y = \overline{PA'}$. Dann ist $o < X = \sqrt{2}$. Aus der Ähnlichkeit von den Dreiecken Δ APC' und Δ ABA' folgt

$$\frac{\overline{AC'}}{x} = \frac{2+y}{A'B} \text{ und nach Pythagoras } \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \frac{2+y}{\sqrt{2-y^2}}, \ \sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2-y^2} = x(2+y).$$

Außerdem ist APC' $\sim$ CPA', d. h. $\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{3}-1}$, $y\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ x$.

Zusammen $(4-x^2)\left(2-\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,x\right]^2\right) = x^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,x^2\right)$

und
$$x^3 + (1 + 2\sqrt{3})\,x^2 - 2\,(1 + \sqrt{3}) = o,$$
$$(x-1)\,(x^2 + 2\,(\sqrt{3} + 1)\,x + 2\,(\sqrt{3} + 1)) = 0.$$

Wegen $x^2 + 2\,(\sqrt{3} + 1)\,x + 2\,(\sqrt{3} + 1) > o$ für $x \geqq 0$ erhalten wir als eine Lösung $x = 1$.

Dann ist $\overline{CC'} = \sqrt{3}$, $\overline{AC'} = \sqrt{3}$, $\overline{BC'} = 1$, also $AB = \sqrt{3} + 1$.

Schließlich folgt

$$\begin{aligned} F(\Delta\, ABC) &= \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CC'} \\ &= \frac{1}{2}\,(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Es seien a und b natürliche Zahlen, 2a - 1, 2b - 1 und a + b Primzahlen. Damit muß $a \geq 2$, $b \geq 2$ und $a + b \geq 5$ sein.

Da a + b eine Primzahl sein soll, genügt es zum Beweis der Behauptung der Aufgabe, die Annahme, daß a + b ein Teiler von $(a^b + b^a)(a^a + b^b)$ ist, zum Widerspruch zu führen.

Diese Annahme ist gleichwertig mit
$$(a^b + b^a)(a^a + b^b) \equiv 0 \mod (a + b).$$

Äquivalent dazu ist
$$a^{a+b} + (ab)^b + (ab)^a + b^{a+b} \equiv 0 \mod (a + b).$$

Da $a + b$ eine Primzahl ist, folgt aus dem Kleinen Satz des Fermat

$$(ab)^a + (ab)^b \equiv 0 \mod(a + b). \tag{6}$$

Da $2 \leqq a, b < a + b$ und $a + b$ eine Primzahl ist, gilt

$$ab \not\equiv 0 \mod(a + b). \tag{7}$$

Somit ist (6) äquivalent zu

$$(ab)^{a + b} + (ab)^{2a} \equiv 0 \mod(a + b). \tag{8}$$

Wegen (7) folgt aus dem Kleinen Satz des Fermat, daß (8) äquivalent ist mit

$$a + (ab)^{2a - 1} \equiv 0 \mod (a + b). \tag{9}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$(ab)^{2(2a - 1)} \equiv \mod(a + b). \tag{10}$$

Da $2a - 1 \geqq 3$ ist, folgt aus (9), daß

$$ab \equiv 1 \mod(a + b) \tag{11}$$

ist. Wegen (7) folgt aus dem Kleinen Satz des Fermat:

$$(ab)^{a + b - 1} \equiv 1 \mod(a + b).$$

Damit gibt es eine positive ganze Zahl k mit:

$(ab)^k \equiv 1 \mod(a + b)$ und

für jede positive ganze Zahl l mit $l < k$ ist $(ab)^l \not\equiv 1 \mod(a + b)$.
Wegen (11) ist $k > 1$ und wegen (10) ist k ein Teiler von $2(2a - 1)$.
Wegen (9) und da $2a - 1$ eine Primzahl ist, muß $k = 2$ oder $k = 2(2a - 1)$ sein.
Falls $k = 2$ ist, so folgt aus der Definition von k, daß gilt:

$$ab \equiv - 1 \mod(a + b).$$

Wegen $b \equiv - a \mod(a + b)$ folgt, daß $a^2 \equiv 1 \mod(a + b)$ gilt.
Da $a < a + b$ ist, ist entweder $a = 1$ oder $a = a + b - 1$.
Falls $a = 1$ ist, ist $2a - 1 = 1$, womit wir einen Widerspruch dazu erhalten haben, daß $2a - 1$ eine Primzahl ist.
Somit kann in diesem Falle nur $a = a + b - 1$ gelten. Damit muß $b = 1$ gelten. Jetzt ist aber $2b - 1$ keine Primzahl. Wieder haben wir einen Widerspruch erhalten.
Damit muß $k = 2(2a - 1)$ sein.
Analog erhält man, indem man (6) mit $(ab)^b$ multipliziert $k = 2(2b - 1)$.
Folglich muß $a = b$ gelten. Da $a \geqq 2$ und $b \geqq 2$ gilt, ist $a + b$ keine Primzahl. Damit haben wir auch in diesem letzten Fall einen Widerspruch erhalten.
Folglich war die Annahme falsch, was die Behauptung der Aufgabe beweist.

Aufgabe 15

Es ist $9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$. Damit ist das in der Aufgabe gegebene Gleichungssystem äquivalent zum Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= 9 \\ xy + yz + zx &= 2 \\ xyz &= a \end{aligned}\right\} \quad (+).$$

(x,y,z) ist genau dann eine Lösung von (+), wenn es ein $c \in \{-3,3\}$ mit $f(t) := t^3 - ct^2 + 2t - a$ und $f(x) = f(y) = f(z) = 0$ gibt (Vietascher Wurzelsatz). Dabei sollen x, y und z reelle Zahlen sein.

Es ist $f'(t) = 3t^2 - 2ct + 2$. Genau dann ist $f'(t) = 0$, wenn $t \in \{t_1, t_2\}$ mit $t_1 := \frac{1}{3}(c - \sqrt{3})$ und $t_2 := \frac{1}{3}(c + \sqrt{3})$ ist. Offenbar ist $t_1 < t_2$. Da der Koeffizient von t^3 in $f(t)$ positiv ist, ist $f(t)$ für $t \leqq t_1$ und für $t \geqq t_2$ monoton wachsend und für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ monoton fallend.

Damit ist (x,y,z) genau dann ein reelles Lösungstripel von (+), wenn $f(t_1) \geqq 0$ (t_1 - lokales Maximum von $f(t)$) und $f(t_2)$ t_2 - lokales Minimum von $f(t)$) ist. Das ist aber offenbar genau dann der Fall, wenn $f(t_1)f(t_2) \leqq 0$ ist.

Es ist $f(t_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3} - a$ und $f(t_2) = -\frac{2}{9}\sqrt{3} - a$ (wegen $c^2 = 9$) und $f(t_1)f(t_2) = a^2 - \frac{4}{27}$. Genau dann ist $a^2 - \frac{4}{27} \leqq 0$, wenn $|a| \leqq \frac{2}{9}\sqrt{3}$ gilt. Damit ist $-\frac{2}{9}\sqrt{3} \leqq a \leqq \frac{2}{9}\sqrt{3}$ notwendig und hinreichend dafür, daß das in der Aufgabe gegebene Gleichungssystem ein reelles Lösungstripel besitzt.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 20

Sonderaufgabe

Seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ paarweise verschiedene Primzahlen und $a_o, a_1, \ldots, a_n$ irgendwelche ganze Zahlen. Wir wollen entscheiden, ob

$$a_o + a_1 \cdot \sqrt{p_1} + \ldots + a_n \cdot \sqrt{p_n} \geq 0 \qquad (1)$$

ist. Es sei aber eine Entscheidung, ob die Ungleichung $a \leq b$ für reelle Zahlen a, b gilt oder nicht, nur möglich, falls a und b ganz sind oder a und b verschiedene Vorzeichen haben. Jedoch sei es uns gestattet, im Rahmen der üblichen Rechenregeln zu beiden Seiten einer Ungleichung eine reelle Zahl zu addieren und beide Seiten zu quadrieren (u. U. mit Änderung des Relationszeichens).

Man zeigt, daß man nach höchstens

$$\frac{3^n - 1}{2}$$

Quadrierungen entscheiden kann, ob (1) gilt oder nicht.

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei P ein reguläres (konvexes) 2m-Eck.
Man zeige, daß es ein 2m-Eck P' auf der gleichen Punktmenge wie P gibt, so daß P' genau ein Paar reeller Seiten hat.

Aufgabe 2

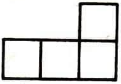
Zwei Personen schreiben abwechselnd genau eins der Symbole + (plus), - (minus) oder x (mal) in die freien Plätze zwischen die Zahlen der Folge 1, 2, 3, ..., 99, 100.
Man beweise, daß die erste Person ihre Zeichen derart setzen kann, daß das Resultat je nach ihrem Belieben gerade bzw. ungerade wird.

Aufgabe 3

Man beweise: Kann die ganze Zahl $3 \cdot a$ in der Form $x^2 + 2 \cdot y^2$ mit ganzen Zahlen x und y dargestellt werden (und ist a eine ganze Zahl), so gibt es auch für a eine solche Darstellung.

Aufgabe 4

Die Ebene sei in unendlich viele Einheitsquadrate zerlegt. Jedes dieser Quadrate werde mit einer Farbe gefärbt. Dabei mögen in jeder Teilfigur, die aus



durch Drehung oder Spiegelung entsteht, die vier Einheitsquadrate verschiedene Farben haben.

Man beweise, daß dann mindestens acht verschiedene Farben notwendig sind.

Aufgabe 5

Sei $p(n)$ die Zahl der (ungeordneten) Partitionen der natürlichen Zahl n in natürliche Summanden > 0. Die Verschiedenheit einer Partition ist nach Definition die Anzahl der verschiedenen Summanden in ihr. Bezeichne $q(n)$ die Summe der Verschiedenheiten von allen $p(n)$ Partitionen von n.

Zum Beispiel ist $p(4) = 5$, da

$4 = 4$, $4 = 3 + 1$, $4 = 2 + 2$, $4 = 2 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

sämtliche Partitionen von 4 sind und es ist

$$q(n) = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7.$$

Man beweise:

a) für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ ist
$$q(n) = 1 + p(1) + p(2) + \dots + p(n-1).$$

b) Die letztere Summe ist $\leqq \sqrt{2n} \cdot p(n)$.

Aufgabe 6

Man bestimme $xy + 2yz + 3z \cdot x$, wo x, y, z positive Zahlen sind, für die

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25,$$
$$\frac{y^2}{3} + z^2 = 9,$$
$$z^2 + zx + x^2 = 16$$

ist.

Aufgabe 7

Man beweise für beliebige positive reelle Zahlen a, b:

$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a \cdot \sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

Die Aufgabe 1 war ein Vorschlag von Australien zur IMO 1984. Die Aufgaben 2 bis 7 wurden von der Zeitschrift "Kvant" nach Vorschlägen der UdSSR für die IMO formuliert.

Aufgabe 8

In der Ebene seien N paarweise verschiedene Punkte gegeben. Ferner gelte $N \geq 2^{n/2}$ und $n > 2$.

Man zeige, daß man die Verbindungsstrecken zwischen je zwei der N Punkte mit genau einer der Farben blau und rot so färben kann, daß für beliebige n von den N Punkten gilt:

Unter den Verbindungsstrecken zwischen je zwei von den n Punkten gibt es sowohl eine rot als auch eine blau gefärbte.

Aufgabe 9

Eine Färbung f der Elemente der Gitterpunktmenge

$M = \{(x,y) \quad x = 0,1,\ldots,k \cdot n-1,\ y = 0,1,\ldots,k \cdot l - 1\}$

mit n Farben heiße zulässig, wenn jede Farbe in jeder Zeile bzw. Spalte k- bzw. l-mal auftritt und wenn es kein achsenparalleles Rechteck gibt, dessen Eckpunkte aus M sind und alle gleiche Farbe haben.

Zeige, daß für jede zulässige Färbung f gilt:

$k \cdot l \leq n \cdot (n+1)$.

(DDR-Vorschlag zur IMO 1985)

Aufgabe 10

Man bestimme alle reellwertigen, an der Stelle $x = 0$ stetigen Funktionen $f(x)$ mit dem Definitionsbereich P (reelle Zahlen), die der Funktionalgleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + x$$

genügen.

(Bulgarische OJM 1982)

Aufgabe 11

Man bestimme alle Paare natürlicher Zahlen (n,k), die der Bedingung

$$(n + 1)^k - 1 = n!$$

genügen.

(Bulgarische OJM 1982)

Aufgabe 12

Für welche positiven ganzen Zahlen n ist

$$p_n := 2^{F_n} + 1$$

eine Primzahl, wobei $F_1 := F_2 := 1$ und

$F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 2$ ist?

(Bulgarische OJM 1982)

Aufgabe 13

Man beweise: ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ, dem Umkreisradius R und der Fläche A gilt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \leq \frac{9 \cdot R^2}{4A}.$$

Aufgabe 14

Man bestimme die kleinste Anzahl von Schlüsseltypen, die ein Tresor haben muß, damit beliebige k der n Direktoren den Tresor mit den insgesamt in ihrem Besitz befindlichen Schlüsseln öffnen können, während jeweils k - 1 der Direktoren mit all ihren Schlüsseln den Tresor nicht öffnen können.

Aufgabe 15

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ und n positive ganze Zahlen.

Man zeige, daß die Kongruenz

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_k \cdot x_k \equiv 0 \text{ modulo } n$$

eine Lösung $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ hat, so daß

$$|n_i| \leq \sqrt[k]{n},\ i = 1, \ldots, k,$$

gilt.

Lösungen

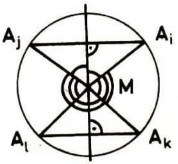
Aufgabe 1

(Konstruktion nach G. Hein, M. T. Tok, A. Schüler, M. Sagorje, S. Günther)

Seien die Eckpunkte des regulären 2m-Ecks der Reihe nach mit $A_1,\dots,A_{2m}$ bezeichnet. Wir rechnen im folgenden mit den Indizes modulo 2m, d. h., es sei $A_{2m+1} = a_1$ usw. Zunächst beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma. Die Strecken A_iA_j und A_kA_l sind genau dann parallel, wenn $i + j = k+l \pmod{2m}$ ist.

Beweis: Sei M der Mittelpunkt des 2m-Ecks $A_1,\dots,A_{2m}$.
Zunächst sei $A_iA_j \parallel A_kA_l$, und die Lage der Punkte A_i, A_j, A_k, A_l sei so, wie es aus den Figuren ersichtlich ist.



Es ist leicht zu sehen, daß die Gerade, die durch M geht und senkrecht auf A_iA_j (d. h. auch auf A_kA_l) steht, entsprechende Winkelhalbierende der gleichschenkligen Dreiecke MA_iA_j und MA_lA_k enthält. Daraus folgt dann $\overline{\sphericalangle A_iMA_k} = \overline{\sphericalangle A_lMA_j}$, d. h., auf dem Kreisbogen A_iA_k, der A_j und A_l nicht enthält, liegen genauso viele Eckpunkte vom 2m-Eck wie auf dem Kreisbogen A_lA_j, der A_i und A_k nicht enthält. Mithin ist $k-i \equiv j-l \pmod{2m}$, also $i + j = k + l \pmod{2m}$.

Gilt umgekehrt $i + j \equiv k + l \pmod{2m}$, also $k - i \equiv j - l \pmod{2m}$, so können wir folgern, daß auf den entsprechenden Kreisbögen $\overset{\frown}{A_iA_k}$ und $\overset{\frown}{A_lA_j}$ gleichviele Eckpunkte des 2m-Ecks liegen und deshalb $\overline{\sphericalangle A_iMA_k} = \overline{\sphericalangle A_lMA_j}$ ist. Folglich halbiert die Gerade durch M, die den Winkel A_iMA_j halbiert, auch gleichzeitig den Winkel A_kMA_l. Da die Dreiecke A_lMA_j und A_kMA_l gleichschenklig sind, steht diese Gerade senkrecht auf A_iA_j wie auch auf A_kA_l, d. h., es ist $A_iA_j \parallel A_kA_l$. q.e.d.

Das gesuchte 2m-Eck P' kann durch eine Permutation π von $\{1,\ldots,2m\}$ beschrieben werden ($P' = A_{\pi(1)},\ldots, A_{\pi(2m)}$).
Hierbei ist die Bedingung:
$A_{\pi(i)}A_{\pi(i+1)} \parallel A_{\pi(j)}A_{\pi(j+1)}$ genau für eine Zweiermenge $\{i,j\}$ aus $\{1,\ldots,2m\}$.
Wir definieren nun π wie folgt:

$$\pi(2k) = k+m, \quad k = 1,\ldots,m,$$
$$\pi(2k-1) = k, \quad k = 1,\ldots,m.$$

Dann ist

$$\pi(2k) + \pi(2k+1) = k+m+k+1 = m+2k+1, \quad k = 1,\ldots,m-1,$$
$$\pi(2k-1) + \pi(2k) = k+k+m = m+2k, \quad k = 1,\ldots,m,$$

und alle diese Zahlen sind paarweise inkongruent modulo 2m, d. h., nach dem obigen Lemma ist $A_{\pi(i)}A_{\pi(i+1)} \nparallel A_{\pi(j)}A_{\pi(j+1)}$ für jede Zweiermenge $\{i,j\}$ aus $\{1,\ldots,2m-1\}$.
Jedoch ist $\pi(2m) + \pi(2m+1) = \pi(2m) + \pi(1) = 2m+1 =$

$$\begin{cases} \pi(2\frac{m}{2}) + \pi(2\frac{m}{2}+1), & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \pi(2\frac{m+1}{2} - 1) + \pi(2\frac{m+1}{2}), & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Das heißt, die Seiten $A_{\pi(2m)}A_{\pi(1)}$ und $A_{\pi(m)}A_{\pi(m+1)}$ sind die einzigen zueinander parallelen Seiten des 2m-Ecks $A_{\pi(1)},\ldots, A_{\pi(2m)}$, und damit ist die Existenz des gesuchten 2m-Ecks nachgewiesen.

Aufgabe 2

Sei A der erste Spieler und B der zweite Spieler. Wir geben die Strategie von A an. Will A ein gerades bzw. ungerades Resultat erzielen, so setzt er zwischen 1 und 2 das Zeichen x bzw. +.
Setzt nun B irgendein Zeichen zwischen die Zahlen n und n+1, so setzt A das Zeichen x dazwischen.

n-1 und n, falls n ungerade,
n+1 und n+2, falls n gerade

ist. Wir zeigen nun, daß diese Strategie ausführbar ist und tatsächlich das Gewünschte leistet.
Nach dem Setzen des Zeichens zwischen 1 und 2 gibt es noch 98 freie Plätze, die gepaart auftreten, wobei immer die freien Plätze vor und nach einer ungeraden Zahl zusammengefaßt seien.
Die Strategie ist nun so aufgebaut, daß ein solches Paar immer

zunächst von B und sogleich danach von A durch Zeichen besetzt wird, also ist die Strategie bis zu Ende durchführbar.
Es wird nun jede ungerade Zahl mit einer geraden Zahl durch x verknüpft (bis auf die Zahl 1 im Fall, daß A ein ungerades Resultat erzielen möchte). Das Resultat - als Summe aufgefaßt - besteht also nur aus geraden Summanden (und dem Summand 1, falls A ein ungerades Resultat wünscht). Also ist das Resultat wirklich gerade bzw. ungerade.

Aufgabe 3

Es ist leicht zu sehen, daß wegen $x^2+2y^2 = 3a \equiv 0 \pmod 3$ entweder $x \equiv y \pmod 3$ oder $x \equiv -y \pmod 3$ gilt. Im ersten Fall ist

$$a = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{3}\right)^2$$

eine Darstellung der gesuchten Art, denn es gilt $x-y \equiv 0 \pmod 3$ und $x+2y = x-y+3y \equiv 0 \pmod 3$, und im zweiten Fall ist

$$a = \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x+y}{3}\right)^2$$

eine Darstellung der gesuchten Art, denn es ist $x+y \equiv 0 \pmod 3$ und $x-2y = x+y-3y \equiv 0 \pmod 3$.

Aufgabe 4

Angenommen, es würden sieben Farben ausreichen, um die Ebene wie gefordert zu färben. Dann müßten auch die 16 Felder des 4 x 4-Schachbretts (siehe linke Figur)

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

1	2	3	
4	5	6	4
3	7	1	?
	2		

so mit 7 Farben färbbar sein, daß alle 4 Felder einer Figur unterschiedliche Farben haben. Sei $\{1,\dots,7\}$ die Menge der Farben, und wir schreiben z. B. $\varphi(A) = 1$, falls A mit der Farbe 1 gefärbt ist. Wir können nun offenbar o.B.d.A. unter Beachtung der Forderungen annehmen: $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = 2$, $\varphi(C) = 3$, $\varphi(E) = 4$, $\varphi(F) = 5$, $\varphi(G) = 6$ und $\varphi(J) = 7$. Ferner ist leicht zu sehen, daß $\varphi(I) \neq \varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(E)$, $\varphi(F)$, $\varphi(G)$, $\varphi(J)$, also $\varphi(I) = \varphi(C) = 3$ ist, weil sonst eine Figur der angegebenen Form zwei Felder gleicher Farbe hätte. Analog gilt $\varphi(K) = \varphi(A) = 1$. Ferner überlegt man sich leicht, daß $\varphi(H) \neq \varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(E)$, $\varphi(G)$, $\varphi(J)$, $\varphi(K)$, also $\varphi(H) = \varphi(E) = 4$ und $\varphi(N) \neq \varphi(E)$, $\varphi(F)$, $\varphi(G)$, $\varphi(L)$, $\varphi(J)$, $\varphi(K)$, also $\varphi(N) = \varphi(B) = 2$ ist. Nun benötigen wir aber zur Färbung von L eine weitere Farbe, denn $\varphi(L) \neq \varphi(C)$, $\varphi(F)$, $\varphi(G)$, $\varphi(H)$, $\varphi(J)$, $\varphi(K)$, $\varphi(N)$. Mithin war unsere Annahme falsch.

Die Schüler U. Bellack und V. Brundisch wiesen nach, daß acht Farben wirklich reichen. V. Brundisch gab hierfür folgende Färbung an:

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	.
.	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	.
.	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	.
.	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	.
.	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Aufgabe 5

a) Sei $\Pi(n)$ die Menge aller (ungeordneten) Partitionen der Zahl n in natürliche Summanden > 0. Für eine Partition $\pi \in \Pi(n)$ bezeichne $v(\pi)$ die Verschiedenheit, also die Anzahl der verschiedenen Summanden, von π. Es ist dann
$$q(n) = \sum_{\pi \in \Pi(n)} v(\pi).$$
Schließlich sei M(i) die Menge aller Partitionen aus $\Pi(n)$, die die Zahl i als Summand enthalten ($i = 1,\ldots,n$). Nach Definition gilt $p(n) = |\Pi(n)|$. Ferner ist $p(n-i) = |M(i)|$, $i = 1,\ldots,n-1$, denn jeder Partition aus M(i) entspricht in eindeutiger Weise eine Partition aus $\Pi(n-i)$ (man lasse i als Summand weg).

Im Falle $i = n$ haben wir $|M(n)| = 1$. Wir zählen nun die Anzahl A aller Paare (π, i), für die $\pi \in M(i)$ ist, auf zwei verschiedene Arten. Für festes π gibt es offenbar $v(\pi)$ verschiedene Zahlen i, so daß $\pi \in M(i)$ gilt.
Also erhalten wir
$$A = \sum_{\pi \in \Pi(n)} v(\pi) = q(n). \tag{1}$$

Andererseits gibt es für die feste Zahl i genau $|M(i)|$ Partitionen π mit $\pi \in M(i)$. Folglich gilt

$$A = \sum_{i=1}^{n} |M(i)| = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} p(n-i). \qquad (2)$$

Mit (1) und (2) haben wir

$$q(n) = 1 + p(1) + p(2) + \ldots + p(n-1).$$

b) Wir zeigen zunächst, daß $v(\pi) \leqq \sqrt{2n}$ für alle $\pi \in \Pi(n)$ gilt. Sei π eine Partition von n der Verschiedenheit $v(\pi) = t$ und seien $a_1, \ldots, a_t$ paarweise verschiedene Summanden in π.
Dann ist

$1 + 2 \ldots + t \leqq a_1 + \ldots + a_t \leqq n$, also

$$t(t+1) = 2n \text{ und erst recht}$$
$$t^2 \leqq 2n, \text{ d. h.}$$
$$t \leqq \sqrt{2n}.$$

Unter Beachtung von a) folgt

$$1+p(1)+p(2)+\ldots+p(n-1) = q(n) = \sum_{\pi \in \Pi(n)} v(\pi)$$
$$\leqq \sum_{\pi \in \Pi(n)} \sqrt{2n}$$
$$= \sqrt{2n}\, p(n).$$

Aufgabe 6

(Lösung nach M. Sagorje)

Angenommen, es gibt drei Zahlen $x, y, z > 0$, so daß

$$x^2 + xy + y^2/3 = 25, \qquad (1)$$
$$y^2/3 + z^2 = 9, \qquad (2)$$
$$z^2 + zx + x^2 = 16 \qquad (3)$$

gilt. Wegen $25 = 9 + 16$ folgt dann

$x^2 + xy + y^2/3 = (y^2/3 + z^2) + (z^2 + zx + x^2)$, also

$$y = \frac{2z^2 + zx}{x}. \qquad (4)$$

Nach Einsetzen von (4) in (2) und Multiplikation mit $3x^2$ erhalten wir $(2z^2 + zx)^2 + 3z^2x^2 = 27x^2$, d. h.
$4z^2(z^2 + zx + x^2) = 27x^2$, woraus sich wegen (3) $64z^2 = 27x^2$, d. h.

$$x^2 = \frac{64}{27} z^2 \text{ bzw.} \tag{5}$$

$$x = \frac{8}{3\sqrt{3}} z \tag{6}$$

ergibt. Setzen wir (5) und (6) in (3) ein, bekommen wir

$$z^2 + \frac{8}{3\sqrt{3}} z^2 + \frac{64}{27} z^2 = 16, \text{ also}$$

$$z^2 = \frac{432}{91+24\sqrt{3}} \text{ bzw.} \tag{7}$$

$$z = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{91+24\sqrt{3}}}. \tag{8}$$

(6) und (8) führen dann zu

$$x = \frac{32}{\sqrt{91+24\sqrt{3}}} \tag{9}$$

Schließlich folgt aus (2) und (7)

$$y^2 = \frac{1161+648\sqrt{3}}{91+24\sqrt{3}} \text{ bzw.}$$

$$y = \frac{27+12\sqrt{3}}{91+24\sqrt{3}}. \tag{10}$$

Man prüft leicht nach, daß die in (8), (9) und (10) erhaltenen Werte für z, x bzw. y wirklich den Gleichungen (1), (3) genügen. Nach weiterer Rechnung erhält man dann

$$xy + 2yx = 24\sqrt{3}.$$

Aufgabe 7

Durch Addition der zwei Ungleichungen

$$(\sqrt{a} - 1/2)^2 \geqq 0,$$
$$(\sqrt{b} - 1/2)^2 \geqq 0$$

erhalten wir

$$a + b + 1/2 \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Wegen

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

gilt dann

$$\frac{a+b}{2}(a+b+1/2) \geqq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \text{ also}$$

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Aufgabe 8

Sei P die Menge der N Punkte. F sei eine beliebige Färbung der Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten von P mit genau einer der Farben blau und rot und $\mathcal{F}$ die Menge aller solcher Färbungen. Wir müssen zeigen, daß es ein $F \in \mathcal{F}$ gibt, so daß für beliebiges $X \subseteq P$ mit $|X| = n$ gilt:

Die Verbindungsstrecken in X sind nicht alle mit der gleichen Farbe gefärbt. Hierzu zählen wir die Paare (F,X), wobei

$$F \in \mathcal{F}, \; X \subseteq P \text{ und } |X| = n \tag{2}$$

gilt und

die Verbindungsstrecken in X bei F alle gleich gefärbt sind. (3)

Halten wir ein beliebiges $X \subseteq P$ mit $|X| = n$ fest, so können die Verbindungsstrecken in X gleichzeitig alle entweder blau oder rot gefärbt sein. Die restlichen Verbindungsstrecken - es sind $\binom{N}{2} - \binom{n}{2}$ - können beliebig gefärbt sein. Also gibt es genau

$2 \cdot 2^{\binom{N}{2}-\binom{n}{2}}$ solcher Paare (F,X) wobei X fest ist.

Da es aber $\binom{N}{n}$ Teilmengen von P der Mächtigkeit n gibt, erhalten

wir genau $\binom{N}{n} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{N}{2}-\binom{n}{2}}$

Paare (F,X) und (2) und (3).

Es gibt $2^{\binom{N}{2}}$ Färbungen der Verbindungsstrecken in P. Können wir zeigen, daß

$$2^{\binom{N}{2}} > \binom{N}{n} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{N}{2}-\binom{n}{2}} \tag{4}$$

ist, so sind wir fertig, denn gäbe es für jedes $F \in \mathcal{F}$ ein $X \subseteq P$ mit $|X| = n$ und (3), so wäre der Anzahl der Paare (F,X) mit (2) und (3) mindestens gleich

$$2^{\binom{N}{2}}. \tag{5}$$

(4) ist äquivalent mit $\binom{N}{n} < \frac{1}{2} 2^{\binom{n}{2}}$.

Offenbar gilt $\binom{N}{n} \le \frac{N^n}{n!}$, und durch Induktion zeigt man leicht, daß $n! > 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ für $n > 2$ ist.

Nach Aufgabenstellung gilt $N \geq 2^{\frac{n}{2}}$. Also ist

$$\binom{N}{n} \leq \frac{N^n}{n!} < \frac{1}{2} \frac{N^n}{2^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{(2^{\frac{n}{2}})^n}{2^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2}\, 2^{\frac{n}{2}(n-1)} = \frac{1}{2}\, 2^{\binom{n}{2}}$$

d. h., (5) ist erfüllt.

Aufgabe 9

O.B.d.A. sei $k \leq l$. Für die Mengen

$M_j := \{\{i_1, i_2\} \mid i_1, i_2 \in \{0, 1, \ldots, k\cdot n-1\},\ f(i_1, j) = f(i_2, j) = 0,$
$i_1 \neq i_2\}$

$\quad j = 0, 1, \ldots, l\cdot n-1$

gilt nach Voraussetzung $M_j \cap M_q = \emptyset$ und $|M_j| = \binom{k}{2}$ für $0 \leq j < q \leq l \cdot n-1$.

Daher ist $l\cdot n\cdot\binom{k}{2} \leq \binom{k\cdot n}{2}$ und folglich $l \leq n + \frac{n-1}{k-1}$ und $k \leq n + \frac{n-1}{k-1}$.

In der letzten Ungleichung wächst bzw. fällt die linke bzw. rechte Seite mit k und für $k = n + 1$ ist die Ungleichung falsch. Folglich ist $k \leq n$.

Da $k\cdot n \leq k\cdot n + \frac{k}{k-1}\cdot(n-1) =: g(k)$ gilt und man $g(k)$ leicht als monoton wachsende Funktion nachweist, ist $k\cdot l \leq g(n) = n\cdot(n+1)$.

Aufgabe 10

Annahme: $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind zwei Funktionen von P in P (reelle Zahlen), die an der Stelle 0 stetig sind und der Funktionalgleichung genügen.

Es sei $g(x) := f_1(x) - f_2(x)$. (6)

Dann ist $g(x)$ eine Funktion von P in P, die an der Stelle 0 stetig ist, und es ist:

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) + x - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{x}{2}\right) - x =$$

$$= \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right)$$

$g(x)$ genügt also der Funktionalgleichung

$$g(x) = \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (7)$$

Aus (7) folgt sofort $g(0) = 0$. (8)

Aus (7) erhält man durch Induktion für alle $n \in N$

$$2^n\, g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right). \tag{9}$$

Wegen der Stetigkeit von $g(x)$ an der Stelle 0 ist

$$\lim_{n \to \infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0 \text{ für alle } x \in P.$$

Damit folgt aus (9), daß für alle $x \in P$

$$g(x) = 0$$

ist. Damit gibt es höchstens eine Funktion, die allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Offenbar ist $f(x) = \frac{4}{3}x$ eine solche Funktion. Damit ist $f(x) = \frac{4}{3}x$ die einzige Funktion, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 11

a) Wenn das Paar (n,k) natürlicher Zahlen der Bedingung $(n+1)^k-1 = n!$ genügt, so ist $n > 0$ und $k > 0$, denn für $n = 0$ oder $k = 0$ ist $(n+1)^k-1 = 0$ und $n! > 0$ gilt für alle natürlichen Zahlen.

b) Wenn das Paar (n,k) der Bedingung $(n+1)^k-1 = n!$ genügt, so muß $(n+1)$ eine Primzahl sein.

Beweis: Wegen a) ist $n+1 > 1$.

Annahme: Es gibt ein (n,k) mit $(n+1)^k-1 = n!$ und $(n+1) = a \cdot b$ mit $a > 1$, $b > 1$ und $a,b \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. sei $a \leqq b$.

Falls $a < b$ so ist, da $b < n+1$ gilt, $a\,b \mid n!$

$(n+1)^k-1 = (ab)^k-1 \equiv -1 \bmod (ab)$ und $n! \equiv 0 \bmod (a\,b)$.

Da $ab > 1$ ist, gibt es in diesem Falle keine Lösung. Wenn $(n+1) \neq p^2$, p eine Primzahl und $(n+1)$ nicht prim ist, so lassen sich $a,b \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$, $b > 1$, $a > b$ und $(n+1) = ab$ finden. Es sei im weiteren also $(n+1) = p^2$ und p eine Primzahl.

Wenn $p > 2$ ist, so ist $n > 2p$ und somit $p^2 / n!$

Wiederum ist $(n+1)^k-1 \equiv (p^2)^k-1 = -1 \bmod p^2$ und $n! \equiv 0 \bmod p^2$.

Da $p^2 > 1$ ist, gibt es in diesem Falle keine Lösung. Es verbleibt also noch $n+1 = 4$, d. h. $n = 3$. Es müßte $4^k -1 = 3!$ gelten, oder $4^k = 7$. Es gibt aber kein $k \in \mathbb{N}$, das diesen Bedingungen genügt.

c) Wenn $n \geq 6$ ist, so gibt es kein (n,k), das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Beweis indirekt: Annahme: Es gibt (n,k) mit $n \geq 6$ und $(n+1)^k-1 = n!$. Wegen b) ist $(n+1)$ - prim und wegen $n \geq 6$ ist $n = 2r$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $r > 2$.

Es ist $2 < r < 2r = n$. Damit ist

$$n^2 \mid n! \qquad (10)$$

Andererseits ist

$$(n+1)^k-1 = \sum_{i=2}^{k} n^i \binom{k}{i} + kn = n^2 \sum_{i=2}^{k} n^{i-2} \binom{k}{i} + kn \qquad (11)$$

(Falls $k = 1$ ($k=0$ wegen a) ausgeschlossen), ist $\sum_{i=2}^{k} n^{i-2}\binom{k}{i} = 0$)

Es ist $\sum_{i=2}^{k} n^{i-2} \binom{k}{i} \in \mathbb{N}$.

Damit $(n+1)^k-1 = n!$ gelten kann, muß wegen (10) und (11) $k\,n \equiv 0 \bmod n^2$ sein, woraus mit a) $k \geq n$ folgt.

Es ist $(n+1)^k - 1 \geq (n+1)^n - 1 > n^n > n!$ $(n \geq 6)$.

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, womit auch c) bewiesen ist.

Aus a), b) und c) folgt, daß es höchstens für $n \in \{1,2,4\}$ Lösungen (n,k) geben kann.

$n = 1$. $2^k-1 = 1! = 1$ liefert $k = 1$ und damit eine Lösung

$n = 2$. $3^k-1 = 2! = 2$ liefert $k = 1$ und damit eine Lösung

$n = 4$. $5^k-1 = 4! = 24$ liefert $k = 2$ und damit eine Lösung.

Somit sind genau die Paare (1,1), (2,1), (4,2) Löaung der Aufgabe.

__Aufgabe 12__

a) Wenn $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ und 2^m+1 - prim, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $m = 2^r$.

Beweis indirekt: Annahme: Es gibt ein $m > 0$ mit $m \in \mathbb{N}$, 2^m+1 ist prim und es gibt kein $r \in \mathbb{N}$ mit $m = 2^r$. Dann gibt es t und $v \in \mathbb{N}$ mit $v > 0$ und $m = 2^t(2v+1)$. Es ist

$$2^m+1 = 2^{2^t(2v+1)}+1 = (2^{2^t})^{2v+1}+1 \equiv (-1)^{2v+1}+1 \bmod (2^{2^t}+1)$$

$$\equiv -1 + 1 \equiv 0 \bmod (2^{2^t} + 1).$$

Damit ist $2^{2^t}+1 \mid 2^m + 1$ und da $2^{2^t} + 1 < 2^m+1$ und $2^{2^t}+1 > 1$ gilt, ist 2^m+1 im Widerspruch zur Annahme keine Primzahl, womit die Aussage a) bewiesen ist.

b) Wenn $P_n > 8$ ist, so ist $P_n \neq 2^r$, wobei $r \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n mod 16	1	1	2	3	5	8	13	5	2	7	9	0	9

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
P_n mod 16	9	2	1	13	8	5	13	2	15	1	0	1	1

Da der Wert von $P_n (n > 2)$ nur von P_{n-1} und P_{n-2} abhängt, $F_1 \equiv F_{25}$ mod 16 und $F_2 \equiv F_{26}$ mod 16 gilt, ist für alle positiven ganzen Zahlen n $F_n \equiv F_{n+24}$ mod 16 und somit

$$F_n \equiv 0 \bmod 16 \Longleftrightarrow n \equiv 0 \bmod 12 \tag{12}$$

Wir geben eine zweite Tabelle an

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n mod 3	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1

Es ist $F_1 \equiv F_9$ mod 3 und $F_2 \equiv F_{10}$ mod 3.

Damit ist wie oben für alle positiven ganzen Zahlen n

$$F_n \equiv F_{n+8} \bmod 3 \text{ und}$$

$$F_n \equiv 0 \bmod 3 \Longleftrightarrow n \equiv 0 \bmod 4. \tag{13}$$

Aus dem Bildungsgesetz von F_n ist zu erkennen, daß F_n mit n monoton wächst.

Wenn $F_n > 8$ ist und F_n eine Zweierpotenz ist, so ist $F_n \equiv 0$ mod 16. Wegen (12) ist $n \equiv 0$ mod 12 in diesem Falle. Wegen (13) ist F_n dann aber auch durch 3 teilbar. Damit ist F_n keine Zweierpotenz und b) bewiesen.

Es ist $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$.

Aus a), b) und der Monotonie von F_n ist höchstens für $n \in \{1,2,3,6\}$ die Zahl $p_n := 2^{F_n} + 1$ eine Primzahl.

Es ist $p_1 = p_2 = 2^1 + 1 = 3$ - prim.

$p_3 = 2^2 + 1 = 5$ - prim

$p_6 = 2^8 + 1 = 257$ - prim.

Damit ist p_n genau für $n \in \{1,2,3,6\}$ eine Primzahl.

Aufgabe 13

Es gilt $\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,(s-a)}}$, $\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}}$ und

$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}}$, also

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Die Behauptung ist damit äquivalent mit $(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b) \leq \frac{9}{4} R^2 \Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2 \leq 9R^2$.

Nun ist $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2 \leq a^2+b^2+c^2$ und damit genügt es, $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$ zu beweisen.

Aus $2R \sin\alpha = a$, $2R \sin\beta = b$, $2R \sin\gamma = c$ folgt

$4R^2 (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = a^2 + b^2 + c^2 =$

$= 12R^2 - 4R (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \leq 12R^2 - 4R^2 \cdot \frac{3}{4} = 9R^2$

und damit die Behauptung.

Es verbleibt $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$ zu zeigen. Dies ist äquivalent mit $2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$,

$(\cos 2\alpha + 1) + (\cos 2\beta + 1) + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$,

$2 + 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) \geq \frac{3}{2}$,

$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta)$

$- \frac{1}{4}\cos^2(\alpha-\beta) + 1 - \frac{3}{4} \geq 0$,

$\left[\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha-\beta) \geq 0$ und damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 14

Sei $f(n,k)$ die gesuchte Anzahl. Wir zeigen

$$f(n,k) = \binom{n}{k-1}.$$

Sei $t := \binom{n}{k-1}$ und $M_1,\ldots,M_t$ die Menge aller $(k-1)$-elementigen Teilmengen der Menge aller n Direktoren. A_i sei die Menge aller derjenigen Schlüsseltypen, die kein Mensch aus M_i besitzt, $i = 1,\ldots,t$. Dann ist $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Sonst hätte für $x \in A_i \cap A_j$ keiner der $|M_i \cup M_j| \geq k$ Direktoren den Schlüsseltyp x und folglich könnten diese Direktoren den Tresor nicht öffnen.

Wir erhalten:

$$f(n,k) \geq |A_1| + \ldots + |A_t| \geq \binom{n}{k-1}.$$

Andererseits erkennt man aus folgender Konstruktion $f(n,k) \leq \binom{n}{k-1}$. Es werden jeweils genügend viele Schlüssel von t verschiedenen Typen $S_1, \ldots, S_t$ hergestellt. Der Direktor i bekommt genau dann einen Schlüssel vom Typ S_j, wenn $i \notin M_j$ ist. Die Direktoren aus M_1 können den Tresor nicht öffnen: keiner von ihnen hat einen Schlüssel vom Typ S_1. Aber für jedes $q \neq 1$ ist mindestens ein Schlüssel vom Typ S_q im Besitz der Direktoren aus S_1 und darüber hinaus besitzt jeder nicht in S_1 enthaltene Direktor den Schlüsseltyp S_1. Daher können jeweils k Direktoren den Tresor öffnen.

<u>Aufgabe 15</u>

Die Anzahl der Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in \{0, 1, \ldots, [\sqrt[k]{n}]\}$ ist

$$\underbrace{(\sqrt[k]{n}+1)\ (\sqrt[k]{n}+1)\ \ldots\ (\sqrt[k]{n}+1)}_{k} > n,$$

Daher gibt es zwei verschiedene solcher Tupel $(x'_1, \ldots, x'_k)$, $(x_1'', \ldots, x_k'')$ mit

$$a_1 x'_1 + \ldots + a_k x_k' \equiv a_1 x_1'' + \ldots + a_k \cdot x_k'' \bmod n.$$

Man setze $n_i := x_i' - x_i''$, $i = 1, \ldots, k$.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 21

Autorenkollektiv: Dr. K. Engel
O. Geupel
Prof. Dr. sc. H.-D. Gronau
Dr. N. Grünwald
M. Hübner
Dr. W. Moldenhauer

Leiter des Autorenkollektivs: Prof. Dr. habil. G. Burosch

Adresse der Autoren: Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
2500 Rostock DDR
Universitätsplatz 1

Die Lösungen zur Sonderaufgabe bitten wir an die oben genannte Adresse (Dr. K. Engel) zu senden.
Für die besten Lösungen erhalten die Einsender Anerkennungsschreiben. Wir bitten die beteiligten Schüler, ihren Namen, Vornamen, die Klasse, den Namen und die Adresse der Schule anzugeben.

Für die Mitteilung geeigneter Aufgaben (mit oder ohne Lösungen) oder Lösungsvarianten zu von uns veröffentlichten Aufgaben sind wir dankbar.

1. Auflage
Lizenz Nr. 203/1000/86 (E)
LSV 0600
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
Verlagstitelnummer 30 10 10-1

Sonderaufgabe

Seien $d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_{1986} \geqq 0$ natürliche Zahlen. Man zeige: Die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{1986} \min \left\{d_i, k\right\} \qquad (1)$$

gilt für alle $k = 1, 2, \ldots, 1986$ genau dann, wenn die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqq \sum_{i=1}^{k} \min \left\{d_i, k-1\right\} + \sum_{i=k+1}^{1986} \min \left\{d_i, k\right\} \qquad (2)$$

für alle $k = 1, 2, \ldots, 1986$ gilt.

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei $m \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Die Menge F von Mengen enthalte mindestens m Elemente und es gebe eine Menge $A \in F$, so daß A weniger als m Elemente enthält. Jeweils m Mengen aus F mögen einen nicht leeren Durchschnitt besitzen. Man beweise:
Es gibt ein Element aus A, das in sämtlichen Elementen aus F liegt.
(St. Banach, Schottisches Buch, Problem 3)

Aufgabe 2

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ reelle Zahlen mit $a_1 a_{n-1} \neq 0$ $(n \geqq 4)$. Es wird vorausgesetzt, daß alle Nullstellen des Polynoms $a_1x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-2}x^2 - n^2a_{n-1}x + a_{n-1}$ reell und positiv sind.
Man beweise, daß alle diese Nullstellen untereinander gleich sind.
(Bulgarische Mathematikolympiade 1984, 2. Vorbereitungsklausur 1984/85)

Aufgabe 3
Es sei SABCD eine Pyramide mit dem Parallelogramm ABCD als Grundfläche und N der Mittelpunkt der Strecke BC. Eine Ebene E schneide die Geraden SC, SA bzw. AB in den Punkten P, Q, R, so daß

$\frac{\overline{CP}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}}$ gelte. Der Punkt M sei auf der Geraden SD dadurch festgelegt, daß die Gerade MN parallel zu E ist. Man beweise, daß beim Durchlaufen aller Lagen von E der Punkt M eine Strecke von der Länge $\frac{1}{2}\sqrt{5}\ |SD|$ durchläuft.

(Bulgarische Mathematikolympiade 1984, 2. Vorbereitungsklausur 1984/85)

Aufgabe 4
Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen und $0 \leqq x_i \leqq 1$, $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Man beweise die Ungleichung

$$(1-x_1x_2\ldots x_n)^m + (1-y_1^m) \ldots (1-y_n^m) \geqq 1 \qquad (3)$$

für alle positiven natürlichen Zahlen m und n.
(Bulgarische Mathematikolympiade 1984, 2. Vorbereitungsklausur 1984/85)

Aufgabe 5
Seien g und g' die Tangenten von einem Punkt P an dem Kreis K. Die Punkte A und B mögen diametral auf K liegen und weder auf g noch auf g' liegen. Die Tangente an K im Punkt B schneide g bzw. g' in C bzw. D und schneide die Gerade OA in E. Man beweise, daß die Strecken BC und DE die gleiche Länge haben.

Aufgabe 6
Die fünf ganzen Zahlen a, b, c, d, e sind so gewählt, daß sowohl a+b+c+d+e als auch $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ durch die ungerade Primzahl p teilbar sind. Man beweise, daß dann auch

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 - 5abcde$$

durch p teilbar ist.

Aufgabe 7
Man beweise, daß für jede positive natürliche Zahl n der Graph

jeder beliebigen monoton wachsenden Funktion $f: [0,1] \to [0,1]$ durch n Rechtecke überdeckt werden kann, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und so, daß jedes Rechteck die Flächen $\frac{1}{n^2}$ hat.

Aufgabe 8
Man bestimme alle Polynome $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$ mit $a_i \in \{-1, +1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, die lauter reelle Nullstellen haben.

Aufgabe 9
Man gebe sämtliche Lösungen (x,y,z) der Gleichung

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$$

in natürlichen Zahlen x, y und z an.
(IMO-Vorbereitungsklausur, April 1985)

Aufgabe 10
Im Trapez ABCD seien die Strecken AB und CD parallel, und es gelte

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = k > 1.$$

Die Diagonalen des Trapezes mögen sich im Punkt O schneiden und K, L, M bzw. N mögen die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle$ AOB, $\sphericalangle$ BOC, $\sphericalangle$ COD bzw. $\sphericalangle$ DOA mit der Seite AB, BC, CD bzw. DA sein. Sei P bzw. Q der Schnittpunkt der Geraden KL und MN bzw. der Geraden KN und ML. Man bestimme den Wert von K unter der Voraussetzung, daß die Fläche des Trapezes ABCD gleich der des Dreiecks $\triangle$ OPQ ist.
(IMO-Vorbereitungsklausur, April 1985)

Aufgabe 11
Für welche ganzen Zahlen m, n gilt:

a) $(5 + 3 \cdot \sqrt{2})^m = (3 + 5 \cdot \sqrt{2})^n$;

b) $(a + b \cdot \sqrt{d})^m = (b + a \sqrt{d})^n$,

wobei a, b relativ prime natürliche Zahlen sind und d eine natürliche Zahl ist, die durch kein Primzahlquadrat teilbar ist?

Aufgabe 12

$n > 3$ natürliche Zahlen seien so auf einen Kreis verteilt, daß für jede dieser Zahlen a der Quotient aus der Summe ihrer beiden Nachbarn und der Zahl a selbst eine natürliche Zahl ist. Man beweise, daß die Summe aller dieser Quotienten

a) nicht kleiner als 2n,

b) nicht größer als 3n

ist.

Aufgabe 13

Seien AA_1, BB_1, CC_1 die inneren Winkelhalbierenden im Dreieck ABC und I sei sein Inkreismittelpunkt. Wenn

$F(IA_1B)+F(IB_1C)+F(IC_1A) = \frac{1}{2} \cdot F(ABC)$ ist, wo F(RST) die Maßzahl der Fläche des $\triangle$RST bezeichnet, so ist das Dreieck $\triangle$ABC gleichschenklig.

Aufgabe 14

Man unterscheide, ob es in der Ebene 100 paarweise verschiedene Geraden gibt, die genau 1985 paarweise verschiedene Schnittpunkte liefern!

(DDR-Vorschlag zur IMO 1985)

Aufgabe 15

Die Abbildung f ordne dem $\triangle$ABC nach folgender Vorschrift ein $\triangle$A'B'C' zu: Man spiegelt C an A, A an B, B an C und erhält in dieser Reihenfolge die Bildpunkte A',B',C'.

Sei $\triangle A_nB_nC_n$ das Resultat der n-maligen Anwendung der Abbildung f auf $\triangle$ABC, $n \geq 0$. Man bestimme alle diejenigen Dreiecke ABC, für die beide Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} |\sphericalangle\, C_nA_nB_n| \quad \text{und} \lim_{n\to\infty} |\sphericalangle\, A_nB_nC_n|$$

existieren.

(Vorschlag: Oliver Geupel, Dresden)

Lösungen

Aufgabe 1 (nach Matthias Hübner)

Indirekter Beweis. Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n < m$.

Angenommen zu jedem a_i gibt es eine Menge $M_i \in F$ mit $a_i \notin M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Man ergänze die Menge $F' = \{A, M_1, \ldots, M_n\}$ durch eventuelles Zufügen von Elementen aus F zu einer m-elementigen Menge $F'' \subseteq F$. Nach Voraussetzung gibt es bei Element x, das in sämtlichen Elementen aus F'' liegt. Dann ist $x = a_i$ im Widerspruch zu $a_i \notin \bigcap_{j=1} M_j$. Folglich ist die Annahme falsch.

Aufgabe 2

Die n Nullstellen des durch $a_1 \neq 0$ dividierten Polynome seien mit x_i ($1 \leqq i \leqq n$) bezeichnet. Laut Voraussetzung gilt (4) $x_i > 0$ für $1 \leqq i \leqq n$. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{n-1}{a_1}, \quad (5)$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_1 \ldots x_{n-2} x_n + \ldots + x_2 \ldots x_n = (-1)^n n^2 \frac{a_{n-1}}{a_1} \quad (6)$$

$$x_1 + \ldots x_n = 1. \quad (7)$$

Die wegen (1) definierte Division von (3) durch (2) liefert

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n^2. \quad (8)$$

Nun ist wegen (7) das arithmetische Mittel der n positiven Zahlen x_i gleich $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}$ und das harmonische Mittel dieser Zahlen beträgt wegen (8) $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{4}$. Diese Mittel sind bekanntlich genau dann gleich groß, wenn alle x_i untereinander gleich sind.

Aufgabe 3 (nach Uwe Müller und Ingo Warnke)

Diese Aufgabe wurde nur von zwei Schülern mittels Vektorrechnung gelöst. a,b,c,p,q,r,n,m,o seien im folgenden Vektoren, x, y, x_1, x_2 reelle Zahlen. Es sei $a = \overrightarrow{SA}$, $b = \overrightarrow{SB}$ und $c = \overrightarrow{SC}$. Diese Vektoren bilden eine Basis, da sie nach Voraussetzung nicht in einer Ebene liegen. Also läßt sich jeder Vektor des

Raumes als Linearkombination dieser Vektoren schreiben. Es sei $x := \frac{\overline{CP}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AB}}$

Dann gilt $p = \overline{SP} = (1-x)c$, $q = \overline{SQ} = xa$,
$r = \overrightarrow{SR} = a + x\,\overrightarrow{AB} = a + x\,(b-a) = (1-x)a + xb$,
$n = \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Ferner sei $m = y\,\overrightarrow{SD} = y\,(a+b+c)$.

Die Vektoren
$\overrightarrow{RQ} = q - r = (2x-1)a - xb$ und
$\overrightarrow{RP} = p - r = (x-1)a - xb + (1-x)c$ bilden für jedes reelle x eine Basis der Ebene E. Wären sie nämlich parallel, so müßte gleichzeitig $1-x=0$ und $2x-1 = x-1$, also $x=1$ und $x=0$ gelten.
Dies ist aber unmöglich.
Da die Gerade MN parallel zur Ebene E liegt, muß $\overrightarrow{NM}$ eine Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{RQ}$ und $\overrightarrow{RP}$ sein. Daher gilt

$$\overrightarrow{NM} = o = m - n = ya - (y+\tfrac{1}{2})b + (y-\tfrac{1}{2})c = x_1\overrightarrow{RQ} + x_2\,\overrightarrow{RP}$$
$$= \left[x_1(2x-1)+x_2(x-1)\right]\,a - (x_1+x_2)x\,b + x_2(1-x)c.$$

Da a,b,c eine Basis des Raumes bilden, ist die Darstellung für o eindeutig. Es gilt daher $y = x_1(2x-1) + x_2(x-1)$,
$y + \frac{1}{2} = x(x_1+x_2)$, $y - \frac{1}{2} = x_2(1-x)$.
Durch Elimination von x_1 und x_2 ergibt sich

$$y(2x^2-2x+1) = -\tfrac{1}{2}(x^2-3x+1).$$

Da $2x^2-2x+1 = 2(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$, ist, folgt

$$y = -\frac{1}{2}\;\frac{x^2-3x+1}{2x^2-2x+1}.$$

Um zu ermitteln, welche Strecke der Punkt M durchläuft, genügt es, wegen der Stetigkeit obiger Funktion, das absolute Maximum und das absolute Minimum zu bestimmen. Die Differenz gibt dann den Faktor an, der mit $|SD|$ multipliziert, die vom Punkt M durchlaufene Strecke angibt.
Differentation, Nullsetzen der 1. Abteilung und die Untersuchung der extremverdächtigen Stellen ergibt:
Für $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ liegt ein lokales Maximum und für

$x = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})$ ein lokales Minimum vor.

Ferner ist $y(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$ und $y(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})) = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.
Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}\sqrt{5} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}\sqrt{5}$

und der Stetigkeit von y sind die beiden lokalen Extrema zugleich globale. Damit ist die Länge der von M durchlaufenen Strecke gleich $\frac{1}{2}\sqrt{5}\ |SD|$

<u>Aufgabe 4</u>

Diese Aufgabe bereitete allen Schülern große Schwierigkeiten. Der Schlüssel zum Induktionsbeweis nach n liegt im Fall $n = 2$. Daher wird separat nachfolgender Hilfssatz bewiesen (nach Uwe Müller), der für $a = 1 - x_1$, $b = 1 - x_2$ den Fall $n = 2$ enthält.

<u>**Hilfssatz:**</u> Für $0 \leqq a, b \leqq 1$ und positives natürliche m ist

$$(a+b-ab)^m \geqq a + b^m - (ab)^m \qquad (9)$$

Beweis durch vollständige Induktion nach m :
Für $m = 1$ gilt (9) offenbar. Es gelte $(a+b-ab)^m \geqq a^m+b^m - (ab)^m$ für eine natürliche Zahl $m > 0$. Wegen $0 \leqq a, b \leqq 1$ ist

$ab^m(1-b)\ (1-a^m) + a^m b(1-a)\ (1-b^m) \geqq 0$,

$(ab^m-ab^{m+1})\ (1-a^m) + (ba^m-a^{m+1}b)\ (1-b^m) \geqq 0$,

$ab^m(1-a^m) + ba^m(1-b^m) - ab^{m+1} + a^{m+1}\ b^{m+1} - a^{m+1}b + a^{m+1}b^{m+1}$

$\geqq 0$, $(a^m + b^m - (ab)^m)\ (a+b-ab) \geqq a^{m+1} + b^{m+1} - (ab)^{m+1}$, also nach Induktionsvoraussetzung

$(a+b-ab)^{m+1} \geqq (a^m + b^m - (ab)^m)\ (a+b-ab) \geqq a^{m+1} + b^{m+1} - (ab)^{m+1}$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Es folgt nun der Induktionsbeweis für (3) nach n.
Für $n = 1$ ist $(1-x_1)^m + (1-y_1{}^m) = y_1{}^m + 1 - y_1{}^m = 1$.

Es gelte für ein positives natürliches n die Ungleichung (3). Es seien $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$ reelle Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Mit $z = x_n x_{n+1}$ (wegen $0 \leqq x_i \leqq 1$ ist auch $0 \leqq z \leqq 1$) gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$(1-x_1\dots x_n x_{n+1})^m = (1 - x_1 \dots x_{n-1}z)^m \geqq 1 - (1-y_1{}^m) \dots$
$(1-y_{n-1}{}^m)\ (1 - (1-z)^m)$.

Nun ist aber nach dem Hilfssatz, angewendet auf $a = 1-x_n$,

$b = 1-x_{n+1}$, d.h. $1 - z = a+b - ab$,

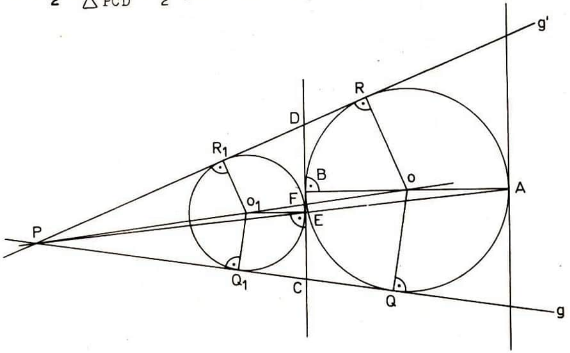
$1 - (1-z)^m \leqq (1-y_n{}^m)\ (1-y_{n+1}{}^m)$ und damit

$(1 - x_1 \dots x_{n+1})^m \geqq 1 - (1-y_1{}^m)\ \dots\ (1-y_{n+1}{}^m)$, womit der Beweis erbracht ist.

Aufgabe 5 (nach Axel Schüler)

Wir betrachten hier nur den Fall, daß B und P in derselben durch die Tangente durch a begrenzten Halbebene liegen. Der andere Fall kann auf diesen leicht zurückgeführt werden.

Sei $S = \frac{1}{2} U_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} (\overline{PC} + \overline{PD} + \overline{DC})$



O_1 sei der Schnittpunkt von PO mit der Parallelen zu AB durch E. R_1 bzw. Q_1 seien die Schnittpunkte von g' bzw. g mit den Parallelen zu OR bzw. OQ durch O_1.

Über den Strahlensatz folgt

$$\frac{\overline{PO_1}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{EO_1}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{R_1O_1}}{\overline{RO}} = \frac{\overline{Q_1O_1}}{\overline{QO}} \quad \text{und wegen } \overline{RO} = \overline{AO} = \overline{OQ}$$

auch $\overline{Q_1O_1} = \overline{R_1O_1} = \overline{EQ_1}$, d.h., O_1 ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks PCD.

Nun ist $\overline{DE} = (\overline{DE+PC})-\overline{PC} = \frac{1}{2} (\overline{DE}+\overline{DR_1}+\overline{R_1P}+\overline{PQ_1}+\overline{Q_1C}+\overline{CE}) - \overline{PC}$

$= S - \overline{PC}$, wegen $\overline{PR_1}=\overline{PQ_1}$, $\overline{DR_1}=\overline{DE}$, $\overline{CQ_1}=\overline{CE}$.

Weiter ist $\overline{PC}+\overline{CB}+\overline{PD}+\overline{DE} = 2S$, $\overline{PC}+\overline{CQ}+\overline{PD}+\overline{DR} = 2S$,
$\overline{PQ}+\overline{PR} = 2S$, $\overline{PQ} = S$.
Schließlich folgt $\overline{CB} = \overline{QC} = S-\overline{PC} = \overline{DE}$.

<u>Aufgabe 6</u> (nach Axel Schüler)
Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
P_1 = S_1 &= a+b+c+d+e \\
S_2 &= ab+ac+ad+ae+bc+bd+bd+cd+ce+de, \\
S_3 &= abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde, \\
S_4 &= abcd+abce+abde+acde+bcde, \\
S_5 &= abcde, \\
P_2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2, \\
P_3 &= a^3+b^3+c^3+d^3+e^3, \\
P_4 &= a^4+b^4+c^4+d^4+e^4, \\
P_5 &= a^5+b^5+c^5+d^5+e^5.
\end{aligned}$$

Nach den Vietaschen Wurzelsatz ist
$f(x) = (x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)\ (x-e) = x^5-S_1x^4+S_2x^3-S_3x^2+S_4x-S_5.$
sowie $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0$.
Also $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)+f(e) = 0$, d.h.

$$P_5 - S_1P_4 + S_2P_3 - S_3P_2 + S_4P_1 - 5S_5 = 0. \qquad (10)$$

Nach Voraussetzung ist $S_1 = P_1 \equiv 0$ und p und $P_2 \equiv 0$ und p,
also ergibt sich aus (10):

$$P_5 + S_2P_3 - 5S_5 = 0 \bmod p. \qquad (11)$$

Wegen
$$S_1^2 = P_2 + 2S_2$$
folgt
$$2S_2 \equiv S_1^2 - P_2 \equiv 0 \bmod p$$
und wegen $(2,p) = 1$ auch
$$S_2 \equiv 0 \bmod p,$$
so daß aus (11) die Behauptung
$$P_5 - 5S_5 \equiv 0 \bmod p$$
abgeleitet werden kann.

Bemerkung: G. Hein gab die Gleichung
$$P_5 - 5S_5 = S_1^5 - 5S_1^3S_2 + 5S_1^2S_3 - 5S_1S_4 + 5S_1S_2^2 - 5S_2S_3$$
an, aus der die Behauptung auch schnell folgt.

Aufgabe 7 (nach Georg Hein)

Wie beweisen die Behauptung für höchstens n Rechtecke, die sämtlich eine Fläche nicht größer als $\frac{1}{u^2}$ besitzen.

Dann lassen sich die Rechtecke sicher entsprechend vergrößern; weitere Rechtecke könnte man hinzunehmen.

Sei $M_i = \left\{(x,y) : y = f(x),\ \frac{2i-2}{n} \leqq x+y \leqq \frac{2i}{n}\right\}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Da für jeden Punkt (x,y) auf dem Graphen von $f(x)$ auch $0 \leqq x+y \leqq 1$ gilt, ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \left\{(x,y) : y = f(x),\ x \in [0,1]\right\}$$

(und mindestens ein M_i ist nicht leer).

Sei $X_i = \left\{x : (x,y) \in M_i,\ y = f(x)\right\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Schließlich sei

$$a_i = \liminf_{x \in X_i} x,\quad b_i = \limsup_{x \in X_i} x,\quad i = 1,2,\ldots n,$$

d.h., a_i ist die größte untere und b ist die kleinste obere Schranke.

Wegen der Beschränktheit von X_i existieren a_i und b_i.

Für stetige Funktionen ist $\liminf_{x \in X_i} x = \min_{x \in X_i} x$ und $\limsup_{x \in X_i} = \max_{x \in X_i} x$

Für unstetige Funktionen brauchen $\min_{x \in X_i} x$ und $\max_{x \in X_i} x$ nicht zu existieren.

Sei $c_i = \frac{2i-2}{n} - a_i$, $d_i = \frac{2i}{n} - b$; für $i = 1,2,\ldots,n$.

Ist $\varepsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl, so ist wegen der Monotonie von $f(x)$: $f(x) \leqq f(b_i - \varepsilon) \leqq \frac{2i}{n} - (b_i - \varepsilon) = d_i + \varepsilon$

für $x \leqq b_i - \varepsilon$.

Also ist $f(x) \leqq d_i$ für alle $x \in X_i$.

Analog folgt $f(x) \geqq c_i$ für alle $x \in X_i$.

Somit liegt M_i vollständig im Rechteck mit den Eckpunkten (a_i,c_i), (a_i,d_i), (b_i,c_i), (b_i,d_i).

Der Flächeninhalt dieses Rechtecks beträgt

$$(b_i-a_i)(d_i-c_i) = (b_i-a_i)\left(\left[\frac{2i}{n} - b_i\right] - \left[\frac{2i-2}{n} - a_i\right]\right)$$
$$= (b_i-a_i)\left(\frac{2}{n} - \left[b_i-a_i\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \left[b_i - a_i\right]\right)^2$$
$$\leqq \frac{1}{n^2}$$

Aufgabe 8

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die reellen Nullstellen des Polynoms
$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_1, a_2,$, $a_n \in \{-1, 1\}$,
So gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz für $n \geqq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1,$$
$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j = a_2,$$
$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n a_n.$$

Wegen $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (-a_1)^2 - 2\, a_2 = 1 - 2a_2.$$

Wegen $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq o$ muß $a_2 \leqq \frac{1}{2}$, also $a_2 = -1$ sein.

D.h. $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3. \qquad (12)$$

Andererseits ist $$\prod_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left((-1)^n a_n\right)^2 = 1. \qquad (13)$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt aus (1) und (2):

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq \sqrt[n]{\prod x_i^2} = 1, \qquad (14)$$

also $n \leqq 3$.

Wir diskutieren die einzelnen Fälle für n separat.

1. <u>$n = 3$.</u> Also tritt in (14) Gleichheit ein. Das geschieht genau dann, wenn $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$ (siehe auch die Lösung der 1. Aufgabe)

Wegen (12) folgt $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$, also sind alle Wurzeln dem Betrag nach gleich 1.
In der Tat sind $(x+1)^2\ (x-1) = x^3 + x - x - 1$ und
$(x+1)\ (x-1)^2 = x^3 - x + 1 - 1$
Polynome gewünschter Bauart. Dagegen erfüllen $(x+1)^3 = x^3+3x^2 + 3x+1$ und $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ die Bedingungen nicht.

2. <u>n = 2.</u> Wegen $a_2 = -1$ kommen genau zwei Polynome in Betracht, die beide tatsächlich nur reelle Nullstellen haben:

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$x^2 - x - 1 = \left(x + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

3. <u>n = 1</u> Offenbar sind $x - 1$ und $x + 1$ genau die linearen Polynome der gegebenen Struktur. Sie haben genau die reelle Nullstelle.

4. <u>n = 0.</u> $fo(x) \equiv 1$ hat keine Nullstelle.
Genau die folgenden Polynome sind die gesuchten:

$$x - 1,\ x + 1,$$
$$x^2 - x - 1,\ x^2 + x - 1,$$
$$x^3 - x^2 + x - 1,\ x^3 + x^2 - x + 1.$$

<u>Aufgabe 9</u>

Angenommen, es gibt eine Lösung (x,y,z) in natürlichen Zahlen.
Dann ist $5^x \equiv (-1)^x \bmod 3$ wegen $5 \equiv -1 \bmod 3$ und
$7^y \equiv 1 \bmod 3$ wegen $7 \equiv 1 \bmod 3$, also

$5^x \cdot 7^y + 4 \equiv (-1)^x + 4 = (-1)^x + 1 \bmod 3$.
Wegen $3^z \equiv o \bmod 3$ für $z \geqq 1$ folgt $(-1)^x + 1 \equiv o$ mos 3 für z $z \geqq 1$,
d.h. x ungerade für $z \geqq 1$.
$z = o$ liefert $5^x \cdot 7^y = -1$, also keine Lösung (x,y,z).
Sei also $z \geqq 1$ und damit x ungerade. Sei $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.
Insbesondere heißt das $x \geqq 1$, also $5^x \equiv o \bmod 5$ und
$5^x 7^y + 4 \equiv o.\ 7^y + (-1) \equiv -1 \bmod 5$.
Die Potenzen 3^z durchlaufen mod 5 das Restklassensystem $-2,-1, 2,1$.
Folglich muß $z = 4n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, sein.

Somit ist $5^x \cdot 7^y = 3^{4n+2} - 4 = (3^{2n+1} - 2)(3^{2n+1} + 2)$.

Wegen $n \geqq o$ sind $3^{2n+1} - 2$ und $3^{2n+1} + 2$ natürliche Zahlen, deren Differenz 4 beträgt. Also können nicht beide durch 5 bzw. 7 teilbar sein. Damit kommen vier Fälle in Betracht

Fall	1	2	3	4
$3^{2n+1} - 2$	1	5^x	7^y	$5^x 7^y$
$3^{2n+1} + 2$	$5^x 7^y$	7^y	5^x	1

<u>Fall 1:</u> Aus $3^{2n+1}-2 = 1$ folgt $n = o$, d.h. $5^x 7^y = 5$.
also <u>$x = 1, y = o, z = 2$</u>

<u>Fall 2:</u> $5^x + 4 = 7^y$. Wegen x ungerade ist $5^x \equiv -1 \bmod 6$ und $5^x + 4 \equiv 3 \bmod 6$, während $7^y \equiv 1 \bmod 6$. In diesem Fall gibt es keine Lösung.

<u>Fall 3:</u> $7^y + 4 = 5^x$
$y = o$ liefert $x = 1$ und $z = 2$ (Die Lösung gehört auch zu Fall 1.)
Sei $y \geqq 1$. Dann ist $7^y \equiv o \bmod 7$ und $7^y + 4 \equiv -3 \bmod 7$, während $5^x \bmod 7$ das Restklassensystem $-2,-3,-1,2,3,1$ durchläuft. Also ist $x = 6k + 2$, d.h., x ist gerade. Wir hatten aber bereits gezeigt, daß x ungerade ist. Also gibt es in diesem Fall keine weiteren Lösungen.

<u>Fall 4:</u> Hier müßte $5^x 7^y = -3$ sein, also gibt es hier auch keine Lösung.

Da das Tripel (1,0,2) tatsächlich Lösung ist, hat gegebene Gleichung genau dieses Lösungstripel.

<u>Aufgabe 10</u>

Wir legen da Trapez in ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem derart, daß O im Ursprung liegt und AB parallel zur x-Achse und im 3. und 4. Quadranten liegt.
Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$\mathfrak{a} = \overrightarrow{OC}$, $|\mathfrak{a}| = a$, $\mathfrak{b} = \overrightarrow{OD}$, $|\mathfrak{b}| = b$

Dann ist nach Strahlensatz $\overrightarrow{OA} = -k\,\mathfrak{a}$, $\overrightarrow{OB} = -k\,\mathfrak{b}$.

Bekanntlich teilt die Winkelhalbierende die Gegenseite im Erhältnis der anliegenden Dreiecksseiten. Also folgt

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OD} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{DC} = \mathfrak{b} + \frac{b}{a+b}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = \frac{b}{a+b}\,\mathfrak{a} + \frac{a}{a+b}\,\mathfrak{b},$$

also $\overrightarrow{OM} = \frac{b}{a+b}\mathfrak{a} + \frac{a}{a+b}\mathfrak{b}$. Analog erhalten wir

$$\overrightarrow{OK} = \frac{-kb}{a+b}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{a+b}\mathfrak{b},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{-kb}{ak+b}\mathfrak{a} + \frac{ka}{ak+b}\mathfrak{b},$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{kb}{bk+a}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{bk+a}\mathfrak{b}.$$

Nun ist $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + t_1\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OM} + t_2\overrightarrow{MN}$ für spezielle reelle t_1, t_2.

Also

$$\overrightarrow{OP} = t_1\left(\frac{kb}{bk+a}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{bk+a}\mathfrak{b}\right) + (1-t_1)\left(\frac{-kb}{a+b}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{a+b}\mathfrak{b}\right)$$

$$= t_2\left(\frac{-kb}{ak+b}\mathfrak{a} + \frac{ka}{ak+b}\mathfrak{b}\right) + (1-t_2)\left(\frac{b}{a+b}\mathfrak{a} + \frac{a}{a+b}\mathfrak{b}\right).$$

Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ linear unabhängig (sonst liegen A,B,C,D auf einer Geraden) sind, müssen ihre Koeffizienten auf beiden Seiten gleich sein, d.h.:

$$\mathfrak{a}:\ t_1\frac{kb}{bk+a} + (1-t_1)\frac{-kb}{a+b} = t_2\frac{-kb}{ak+b} + (1-t_2)\frac{b}{a+b},$$

$$\mathfrak{b}:\ t_1\frac{-ka}{bk+a} + (1-t_1)\frac{-ka}{a+b} = t_2\frac{ka}{ak+b} + (1-t_2)\frac{a}{a+b}.$$

Wegen $a, b \neq 0$ können wir die erste Gleichung durch b, die zweite durch a dividieren. Addieren bzw. Subtrahieren wir die neuen Gleichungen, so erhalten wir

$$2(1-t_1)\frac{-k}{a+b} = 2(1-t_2)\frac{1}{a+b} \quad \text{und}$$

$$2\,t_1\,\frac{k}{bk+a} = 2\,t_2\,\frac{-k}{ak+b}.$$

Also $-k(1-t_1) = 1 - t_2$ und $t_1(ak+b) = -t_2(bk+a)$,

woraus $t_1(ak+b) = (k(1-t_1))\,(bk+a)$

und $t_1(ak+b) = -(k+1)\,(bk+a) + Kt_1(bk+a)$

$t_1(bk^2+ak-ak-b) = (k+1)\,(bk+a)$

$t_1 b(k^2-1) = (k+1)\,(bk+a)$ folgt.

Wegen $|k| \neq 1$ ergibt sich weiter

$$t_1 = \frac{bk+a}{b(k-1)}$$

und $\quad 1-t_1 = 1 - \frac{bk+a}{b(k-1)} = \frac{bk-b-bk-a}{b(k-1)} = - \frac{a+b}{b(k-1)}$.

Somit ist schließlich

$$\vec{OP} = \left(\frac{bk+a}{b(k-1)}\right)\left(\frac{kb}{bk+a}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{bk+a}\mathfrak{b}\right) + \left(-\frac{a+b}{b(k-1)}\quad \frac{-kb}{a+b}\mathfrak{a} + \frac{-ka}{a+b}\mathfrak{b}\right)$$

$$= \frac{k}{k-1}\mathfrak{a} - \frac{k.a}{(k-1)b}\mathfrak{b} + \frac{k}{k-1}\mathfrak{a} + \frac{k.a}{(k-1)b}\mathfrak{b} = \frac{2k}{k-1}\mathfrak{a},$$

$$\vec{OP} = \frac{2k}{k-1}\mathfrak{a}.$$

Analog (Austausch von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) folgt $\vec{OQ} = \frac{2k}{k-1}\mathfrak{b}$.
Also ist $\vec{QP}$ parallel zur x-Achse.

Bemerkung: Ein elementargeometrischer Beweis für diesen interessanten Sachverhalt ist noch nicht bekannt.
Wegen der Seitenverhältnisse der Dreiecke $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$ und $\triangle OQP$ und wegen $\sphericalangle QOP = \sphericalangle DOC = \sphericalangle AOB = 180^\circ - \sphericalangle BOC = 180^\circ - \sphericalangle DOA$
gilt:

$$A_{\triangle QOP} = \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2 \quad A_{\triangle DOC},$$

$$A_{\triangle AOB} = k^2 \cdot A_{\triangle DOC},$$

$$A_{\triangle BOC} = k \cdot A_{\triangle DOC},$$

$$A_{\triangle DOA} = k \cdot A_{\triangle DOC}, \text{ und}$$

$$A_{\square ABCD} = A_{\triangle AOB} + A_{\triangle BOC} + A_{\triangle COD} + A_{\triangle DOA} = (k+1)^2\, A_{\triangle DOC}.$$

Schließlich gilt

$$\frac{A_{\square ABCD}}{A_{\square POQ}} = \frac{(k+1)^2 A_{\triangle DOC}}{\left(\frac{2k}{k-1}\right)^2 A_{\triangle DOC}} = \frac{(k^2-1)^2}{(2k)^2} = \left(\frac{k^2-1}{2k}\right)^2$$

Es ist überraschend, daß dieses Flächenverhältnis nur von k abhängt.
Speziell für $A_{\square ABCD} = A_{\triangle POQ}$ gilt

$$\frac{K^2-1}{2k}^{\;2} = 1$$

und wegen $k > 1$:

$$\frac{k^2-1}{2k} = 1,$$

$k^2 - 2k - 1 = 0$, $k_{1;2} = 1 \pm \sqrt{2}$, also $\underline{\underline{k = \sqrt{2}+1}}$ $(k > 1)$

Aufgabe 11 (nach J. Jahnel)

b) Gesucht sind alle Paare ganzer Zahlen (m,n), die die Gleichung

$$(a + b\sqrt{d})^m = (b + a\sqrt{d})^n \quad \text{erfüllen} \tag{15}$$

mit a und b sind relativ prime natürliche Zahlen (16)

und d eine natürliche Zahl, die durch kein Primzahlquadrat teilbar ist. (17)

1. Fall: $d = 1$ ($d = 0$ wegen $2^2 \mid d$ nicht möglich)

1.1.: $a = 0 \Rightarrow$ wegen (16) $b = 1$.

$\Rightarrow$ Alle möglichen Paare ganzer Zahlen (m,n) erfüllen (1).

1.2.: $b = 0 \Rightarrow$ wegen (16) $a = 1$.

$\Rightarrow$ Alle möglichen Paare ganzer Zahlen (m,n) erfüllen (15).

1.3.: $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad (a + b)^m = (a + b)^n$$
$$\Rightarrow (a + b)^{m-n} = 1$$
$$\Rightarrow \quad m = n$$

Da für $m = n$ in diesem Fall (15) erfüllt ist, erfüllen in diesem Fall genau die Paare (m,n) mit $m = n$ (15).

2. Fall: $d > 1$. Dann ist $\sqrt{d}$ wegen (17) eine irrationale Zahl. (18)

2.1.: $a = 0 \Rightarrow$ wegen (16) $b = 1$.

(15) lautet dann $\sqrt{d}^{\,m} = 1^n = 1$

$$\Rightarrow m = 0$$

Da für $m = 0$ (15) in $1 = 1$ übergeht, sind in diesem Fall genau die Paare (m,n) mit $m = 0$ und n beliebig Lösungen von (15).

2.2.: $b = 0 \Rightarrow$ wegen (16) $a = 1$.

Analog 2.1. sind genau die Paare (m,n) mit $n = 0$ und m beliebig Lösungen von (15).

2.3.: $a = 1$ und $b = 1$.

Dann geht (15) in $(1 + \sqrt{d})^m = (1 + \sqrt{d})^n$ über.

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{d})^{m-n} = 1$$

$$m = n$$

Da für $m = n$ $(1 + \sqrt{d})^m = (1 + \sqrt{d})^n$ erfüllt ist, sind in diesem Fall genau die Paare (m,n) mit $m = n$ Lösungen von (15).

2.4.: $a \geqq 1$ und $b \geqq 1$ und nicht $a = b = 1$

Sei (m,n) ein Lösungspaar von (15) mit $m \neq 0$ und $n \neq 0$. Durch eventuelles Bilden des reziproken Wertes auf beiden Seiten von (15) kann man $m,n > 0$ annehmen.

Falls m und n den gemeinsamen Teiler p haben, so kann man auf beiden Seiten die p-te Wurzel ziehen und sich so auf teilerfremde m,n beschränken. Speziell ist dann o.B.d.A. m eine ungerade Zahl.

Nach dem binomischen Satz folgt dann:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{d})^m &= x_1 + x_2\sqrt{d} \quad \text{mit } x_1, x_2 \in \mathbb{N}, \\ (a - b\sqrt{d})^m &= x_1 - x_2\sqrt{d}, \\ (b + a\sqrt{d})^n &= y_1 + y_2\sqrt{d} \quad \text{mit } y_1, y_2 \in \mathbb{N}, \\ (b - a\sqrt{d})^n &= y_1 - y_2\sqrt{d}. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus $(a + b\sqrt{d})^m = (b + a\sqrt{d})^n$ folgt dann

$$x_1 + x_2\sqrt{d} = y_1 + y_2\sqrt{d} \quad \text{und damit}$$
$$x_1 - y_1 = (y_2 - x_2)\sqrt{d}.$$

Wegen (18) ($\sqrt{d}$ ist irrational) erhalten wir

$$x_1 = y_1 \quad \text{und } x_2 = y_2. \tag{20}$$

Da m ungerade ist, folgt mit (19) a teilt x_1 und mit (20) dann a teilt y_1, d.h. a teilt b^n.

Wegen (16) gilt dann $a = 1$. (21)

Damit geht (15) in $(1 + b\sqrt{d})^m = (b + \sqrt{d})^n$ über. (22)

Wenn (m,n) ein Lösungspaar von (8) ist, so ist (m,n) auch Lösungspaar von $(1 - b\sqrt{d})^m = (b - \sqrt{d})^n$ wegen (19) (23)

Wir multiplizieren (8) und (9) und erhalten

$$(1 - b^2d)^m = (b^2 - d)^n. \tag{24}$$

Da $1 - b^2d < 0$ und m ungerade ist, folgt

$$(1 - b^2d)^m < 0$$

und aus (24) folgt dann, daß n ebenfalls ungerade sein muß.

Dann folgt mit (19) b teilt y_1 und mit (20) gilt b teilt x_1, d.h., b teilt a^m.

Wegen (16) gilt dann $b = 1$. (25)

Aus (21) und (25) $a = b = 1$, folgt ein Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles.

Da aus $m = 0$ bzw. $n = 0$ in diesem Fall aus (15) sofort $n = 0$ bzw. $m = 0$ folgt und mit $m = n = 0$ die Gleichung (15) erfüllt ist, ist in diesem Fall das Paar (0,0) die einzige Lösung. Damit sind alle möglichen Fälle erfaßt.

a) Da die Aufgabe 11 a den Betrachtungen des Falles 2.4. entspricht, ist nur $m = n = 0$ Lösung der Gleichung.

<u>Aufgabe 12</u>

Bezeichnen wir die n Zahlen mit $a_1, a_2, \dots, a_n$. Für den betrachteten Ausdruck S_n gilt dann:

$$S_n = \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}.$$

a) Da mit jedem in S_n auftretenden Quotienten auch der reziproke Wert auftritt, ist das Produkt aller Quotienten gleich 1. Mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel folgt dann

$$S_n \geqq 2n \sqrt[2n]{1} = 2n.$$

b) Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über n für $n \geqq 3$.

Induktionsanfang: $n = 3$.

Falls $a_1 = a_2 = a_3$ ist, so ist $S_3 = 6 < 9$.

Seien nun nicht alle a_i gleich und o.B.d.A. $a_1 = a_2 = a_3$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{a_2 + a_3}{a_1} < \frac{a_1 + a_1}{a_1} = 2.$$

Da der Quotient eine natürliche Zahl sein soll und Null nach Voraussetzung nicht in Frage kommt, ist $a_2 + a_3 = a_1$.

$$\Longrightarrow \quad S_3 = \frac{a_2 + a_3}{a_1} + \frac{a_3 + a_1}{a_2} + \frac{a_1 + a_2}{a_3}$$

$$= 1 + \frac{2a_3 + a_2}{a_2} + \frac{2a_2 + a_3}{a_3} = 3 + \frac{2a_3}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3}$$

Da $\frac{2a_3}{a_2}$ und $\frac{2a_2}{a_3}$ immer noch ganze Zahlen sind mit dem Produkt 4, so kommen nur die Zahlenpaare (1,4), (2,2) bzw. (4,1) in Frage. Damit gilt $S_3 \leqq 3 + 5 = 8 < 9$.

Induktionsschritt: Für n natürliche Zahlen a_i, $i = 1,2,\dots,n$,

mit der Eigenschaft der Aufgabenstellung sei $3n \geqq S_n$
Erfüllen nun die n+1 natürlichen Zahlen a_i, $i = 1,2,\ldots,n+1$, die Voraussetzungen der Aufgabenstellung.

1. Sei $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$, dann gilt

$$S_{n+1} = 2(n+1) < 3\,(n+1)$$

2. Seien die a_i nicht alle gleich, so gilt o.B.d.A. für a_{n+1}:

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{und} \quad a_{n+1} \geqq a_1.$$

$$\Longrightarrow \frac{a_1 + a_n}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{a_{n+1}} = 2 \Longrightarrow a_{n+1} = a_1 + a_n.$$

$$\Longrightarrow S_{n+1} = \frac{a_{n+1} + a_2}{a_1} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_1 + a_n}{a_{n+1}}$$

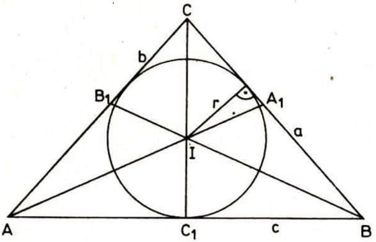
$$= \frac{a_n + a_1 + a_2}{n_1} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n + a_1}{a_n} + 1$$

$$= \frac{a_n + a_2}{a_1} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} + 3$$

Da durch die ausgeführten Operationen die Quotienten nach wie vor ganzzahlig geblieben sind, gilt

$$S_{n+1} = 3 + S_n \leqq 3 + 3n = 3(n+1).$$

<u>Aufgabe 13:</u>
Skizze:



Voraussetzung: $F(BA_1I) + F(CB_1I) + F(AC_1I) = 1/2\ F(ABC)$ (26)
Behauptung: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Beweis:

$$F(BA_1I)+F(CB_1I)+F(AC_1I)+F(BC_1I)+F(AB_1I)+F(CA_1I) = F(ABC) \quad (27)$$

Aus (26) und (27) folgt

$$F(BA_1I) + F(CB_1I) + F(AC_1I) = F(BC_1I) + F(AB_1I) + F(CA_1I) \quad (28)$$

$$\frac{1}{2}(r\, BA_1 + r\, CB_1 + r\, AC_1) = \frac{1}{2}(r\, BC_1 + r\, AB_1 + r\, CA_1)$$
$$BA_1 + CB_1 + AC_1 = BC_1 + AB_1 + CA_1. \quad (29)$$

Nach einem Satz über Winkelhalbierende gilt:

$$a : b = BC_1 : AC_1 = (C - AC_1) : AC_1$$

$$AC_1 = \frac{c\ b}{a+b}.$$

Analog ermitteln wir die anderen Teilstrecken und erhalten damit aus (29)

$$\frac{c\ b}{a+b} + \frac{c\ a}{b+c} + \frac{a\ b}{c+a} = \frac{a\ c}{a+b} + \frac{b\ a}{b+c} + \frac{c\ b}{c+a}. \quad (30)$$

Durch Multiplikation von (30) mit (a+b) (b+c) (c+a) erhalten wir

$$2(a^2bc + ab^2c + abc^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^3b + b^3c + c^3a =$$
$$2(a^2bc + ab^2c + abc^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + ab^3 +$$
$$bc^3 + ac^3 \quad (31)$$

$$c^3b + a^3c + b^3a - cb^3 - ac^3 - ba^3 = 0$$
$$(a-b)\ (b-c)\ (c-a)\ (a+b+c) = 0. \quad (32)$$

Wegen $(a+b+c) > 0$ folgt aus (31) unmittelbar $a = b$ oder $b = c$ oder $c = a$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 14

Die Antwort ist positiv. Wir geben eine mögliche Anordnung an. Wir gehen von 10 paarweise nicht parallelen Geraden $g_1, \dots, g_{10}$ aus, von denen sich keine 3 in genau einem Punkt schneiden. Nun wählen wir noch 76 Geraden parallel zu g_1, 7 parallel zu g_2, 3 parallel zu g_3, 2 parallel zu g_4 und je eine parallel zu g_5 und g_6. Dabei läßt sich sicher erreichen, daß sich keine 3 dieser 100 Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Anzahl der Schnittpunkte ist

$$z = \binom{100}{2} - \binom{77}{2} - \binom{8}{2} - \binom{4}{2} - \binom{3}{2} - \binom{2}{2} - \binom{2}{2},$$

da n Geraden, von denen sich keine 3 in genau einem Punkt schneiden, genau $\binom{n}{2}$ Schnittpunkte liefern. Nun ist

$Z = 4950 - 2926 - 28 - 6 - 3 - 1 - 1 = 1985.$

Aufgabe 15 (von Oliver Geupel, Dresden)
Die Abbildung φ sei die Nacheinanderausführung der Abbildung f und einer Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{7}}$ [1].

$A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ sei das Ergebnis der n-maligen Anwendung von φ auf $\triangle ABC$; $n \geqq 0$. Aus Ähnlichkeitsgründen existieren die in der Aufgabe genannten Grenzwerte genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} |\sphericalangle C^{(n)}A^{(n)}B^{(n)}|$ und $\lim_{n\to\infty} |\sphericalangle A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}|$ existieren. Sei $a_n = |B^{(n)}C^{(n)}|$,

$b_n = |C^{(n)}A^{(n)}|$, $c_n = |A^{(n)}B^{(n)}|$. Zweimalige Anwendung des Cosinussatzes ergibt

$$a_{n+1}^2 = \frac{4a_n^2 + c_n^2 - 4\,a_nc_n\cos(\pi - |\sphericalangle A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}|)}{7}$$

$$= \frac{4a_n^2 + c_n^2 + 4\,a_nc_n\cos\,|\sphericalangle A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}|}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\left(4\,a_n^2 + c_n^2 + 4\,a_nc_n \cdot \frac{a_n^2+c_n^2-b_n^2}{2a_nc_n}\right) = \frac{6\,a_n^2 - 2\,b_n^2 + 3\,c_n^2}{7} \quad \text{und}$$

analoge Beziehungen für

$$b_{n+1}^2,\ c_{n+1}^2, \text{ also } \begin{pmatrix} a_{n+1}^2 \\ b_{n+1}^2 \\ c_{n+1}^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n^2 \\ b_n^2 \\ c_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$ Hieraus folgt

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + = \ldots = a_o^2 + b_o^2 + c_o^2.$$

Da aber $a_n : b_n : c_n$
$= \sin|\sphericalangle C^{(n)}A^{(n)}B^{(n)}| : \sin|\sphericalangle A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}| : \sin$
$|\sphericalangle B^{(n)}C^{(n)}A^{(n)}|$ nach Sinussatz gilt, existiert im Falle der

1 Bekanntlich (siehe z. B. DDR-Olympiade 1985, Kl. 10) nimmt der Flächeninhalt durch f bei jeder Anwendung um den Faktor 7 ab.

Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} |\sphericalangle C^{(n)}A^{(n)}B^{(n)}|$

und $\lim\limits_{n\to\infty} |\sphericalangle A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}|$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n^2 \\ b_n^2 \\ c_n^2 \end{pmatrix}$

Jetzt wird gezeigt, daß für alle positiven ganzen Zahlen n

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \\ r_n & p_n & q_n \\ q_n & r_n & p_n \end{pmatrix}, \; p_n = 1 + 2 \cos n\alpha .$$

$$q_n = 1+ 2 \cos (n\alpha + \tfrac{2}{3}\pi), \; r_n = 1 + 2 \cos (n\alpha - \tfrac{2}{3}\pi), \qquad (33)$$

$\alpha = \arccos \frac{11}{14}$ gilt.

Für n = 1 ist $\cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi) = - \frac{13}{14}$ und $\cos(\alpha - \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{7}$ zu beweisen, was mit Hilfe der Additionstheoreme gelingt. Im Induktionsschritt ist

$7p_{n+1} = 6p_n + 3q_n - 2r_n$, $7q_{n+1} = - 2p_n + 6q_n + 3r_n$,

$7r_{n+1} = 3p_n - 2q_n + 6r_n$ zu zeigen. Die erste dieser Gleichungen ist äquivalent mit

$$7 \cos (n+1)\alpha = 6 \cos n\alpha + 3 \cos (n\alpha + \tfrac{2}{3}\pi) - 2 \cos (n\alpha - \tfrac{2}{3}\pi)$$

bzw. mit der Identität

$$7 \cdot \frac{11}{14} \cos n\alpha - 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \text{ sind } n\alpha$$

$$= 6 \cos n\alpha - \frac{3}{2} \cos n\alpha - \frac{3}{2}\sqrt{3} \sin n\alpha + \cos n\alpha - \sqrt{3} \text{ sind } n\alpha.$$

Analog werden die anderen beiden Beziehungen bewiesen, und (33) ist vollständig gezeigt.

Angenommen, für ein geeignetes $\triangle ABC$ existiere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n^2 \\ b_n^2 \\ c_n^2 \end{pmatrix} .$$

Dann gilt $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, und die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems liefert $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $t > 0$. Wegen (33) ist

$-1 \leqq p_n \leqq 3$, $-1 \leqq q_n \leqq 3$, $-1 \leqq r_n \leqq 3$

für alle positiven ganzen Zahlen n, d.h., die unendliche Folge $\left\{M^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt und besitzt daher einen Häufungspunkt

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix} .$$

Folglich existiert eine gegen $\mathfrak{M}$ konvergente Teilfolge

$$\left\{M^{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{von} \quad \left\{M^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Der Grenzübergang $\to \infty$ in

$$M^{n_k} \begin{pmatrix} a_o^2 \\ b_o^2 \\ c_o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2_{n_K} \\ b^2_{n_K} \\ c^2{n_K} \end{pmatrix} \quad \text{führt auf } \mathfrak{M} \begin{pmatrix} a_o^2 \\ b_o^2 \\ c_o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} .$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für a_o^2, b_o^2, c_o^2.

Wegen $|M^n| = 1$ gilt für $n \geqq 1$

$|M^n| = 1$ und damit $|\mathfrak{M}| = 1 \neq 0$. Ferner gilt

$$\begin{vmatrix} t & q & r \\ t & p & q \\ t & r & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & t & r \\ r & t & q \\ q & t & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & t \\ r & p & t \\ q & r & t \end{vmatrix}$$ und folglich nach der

Cramerschen Regel $a_o^2 = b_o^2 = c_o^2$. Mithin können höchstens gleichseitige Dreiecke die in der Aufgabe beschriebene Eigenschaft besitzen.

Für ein gleichseitiges $\triangle ABC$ sind die Folgen $\left\{|\sphericalangle C_nA_nB_n|\right\}_{n=0}^{\infty}$ und $\left\{|\sphericalangle A_nB_nC_n|\right\}_{n=0}^{\infty}$ stationär, also konvergent.

Mithin sind alle gleichseitigen Dreiecke und nur diese die gesuchten.

Lösung der Sonderaufgabe aus Heft 20

Seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(n \geqq 1)$ paarweise verschiedene Primzahlen und $a_o, a_1, \ldots, a_n$ irgendwelche ganze Zahlen. Wir wollen entscheiden, ob

$$a_o + a_1 \cdot \sqrt{p_1} + \ldots + a_n \cdot \sqrt{p_n} \geqq 0 \qquad (34)$$

ist. Es sei aber eine Entscheidung, ob die Ungleichung $a \leqq b$ für reelle Zahlen a, b gilt oder nicht, nur möglich, falls a und b ganz sind oder a und b verschiedene Vorzeichen haben. Jedoch sei es uns gestattet, im Rahmen der üblichen Rechenregeln zu beiden Seiten einer Ungleichung eine reelle Zahl zu addieren und beide Seiten zu quadrieren (u.U. mit Änderung des Relationszeichens). Man zeige, daß man nach höchstens

$$\frac{3^n - 1}{2}$$

Quadrierungen entscheiden kann, ob (34) gilt oder nicht.

Im folgenden wollen wir unter $P(p_1, \ldots, p_n)$ immer einen Term der Form

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} a_I \prod_{i \in I} \sqrt{p_i}$$

verstehen, wobei a_I $(I \subseteq \{1,\ldots,n\})$ ganze Zahlen seien und

$$\prod_{i \in \emptyset} \sqrt{p_1} = 1 \text{ gesetzt sei.}$$

Wir zeigen allgemein, daß wir höchstens $\frac{3^n - 1}{2}$ mal die Operation des Quadrierens anwenden brauchen, um zu entscheiden, ob

$$P(p_1, \ldots, p_n) \geqq 0 \qquad (35)$$

ist oder nicht. Dies beweisen wir durch vollständige Induktion. Sei $n = 1$. Wir untersuchen, ob

$$a_\emptyset + a_{\{1\}} \sqrt{p_1} \geqq 0 \qquad (36)$$

bzw. ob

$$a_{\{1\}} \sqrt{p_1} \geqq - a_\emptyset \qquad (37)$$

ist. Haben $a_{\{1\}}$ und $- a_\emptyset$ verschiedene Vorzeichen, so brauchen wir nicht zu quadrieren, um eine Entscheidung fällen zu können. Anderenfalls gilt (37) genau dann, wenn

$$a_{\{1\}}^2 \, p_1 \geqq a_\emptyset^2 \quad \text{, falls} \quad a_{\{1\}}, a_\emptyset \geqq 0$$

$$a_{\{1\}}^{2} \; p_1 \leqq a_\emptyset^{2} \;, \text{ falls } a_{\{1\}} \;, a_\emptyset \leqq 0$$

ist, was wir aber auch entscheiden können. Wir haben hierbei also höchstens einmal quadriert.

Wir betrachten den Schritt $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geqq 2$). Offenbar ist (35) genau dann erfüllt, wenn

$$\sqrt{p_n} \quad P_1 \, (p_1, \ldots, p_{n-1}) \geqq P_2 \, (p_1, \ldots, p_{n-1}) \tag{38}$$

mit gewissen Termen P_1 und P_2, die nicht von p_n abhängen.

Wir brauchen höchstens $2 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ Quadrierungen, um Entscheidungen über $P_1(p_1 \ldots p_{n-1}) \geqq 0$ und $P_2(p_1 \ldots p_{n-1}) \geqq 0$ fällen zu können. Haben P_1 und P_2 verschiedene Vorzeichen, so sind wir fertig. Anderenfalls gilt (38) genau dann, wenn

$$\begin{aligned} p_n \cdot P_1^2 &\geqq P_2^2 \quad , \text{ falls } P_1 P_2 \geqq 0 \\ p_n \, P_1^2 &\leqq P_2^2 \quad , \text{ falls } P_1 P_2 \leqq 0 \end{aligned} \tag{39}$$

ist, wobei wir einmal quadriert haben.

Die Ungleichungen (39) können offenbar in der Form

$$P_3(p_1, \ldots, p_{n-1}) \geqq 0 \tag{40}$$

mit einem gewissen Term P_3, der nicht von p_n abhängt, geschrieben werden. Nach wenigstens $\frac{3^{n-1} - 1}{2}$ Quadrierungen wissen wir, ob (40) gilt oder nicht.

Im ganzen brauchen wir also höchstens $(3^{n-1} - 1) + 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$ mal die Operation des Quadrierens anzuwenden, um über (35) entscheiden zu können.

Aufgaben und Lösungen
aus
Internationalen Mathematik-Olympiaden

Ministerium
für
Volksbildung
der DDR
Zentrales
Methodisches
Kabinett
für
außerunterrichtliche
Tätigkeit

Heft 22

Autor: Dr. Engel
Adresse des Autors: Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
2500

Das Heft 22 der IMO-Übungsaufgaben ist der Kombinatorik vorbehalten. Einige theoretische Grundlagen und typische Lösungsmethoden für Aufgaben aus diesem Gebiet werden vorgestellt. Das Niveau entspricht der langfristigen Vorbereitung unserer Schüler auf eine Internationale Mathematik-Olympiade und soll den Mathematischen Schülergesellschaften, den Bezirksklubs Junger Mathematiker und der individuellen Arbeit als Orientierung für eine Olympiadevorbereitung auf diesem Gebiet dienen.

Für Mitteilungen zu diesem Heft sind wir dankbar.

Zentrales Komitee für die OJM
Platanenstraße 114
Berlin
1110

1. Auflage
Lizenz Nr. 203/1000/86 (E)
LSV 0600
Printed in the German Democratic Republic
Druck: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
Verlagstitelnummer 30 10 11-1

1. Grundprinzipien des Abzählens und kombinatorische Grundformeln

Im folgenden seien n,m und i,j,k immer natürliche Zahlen. Für jede endliche Menge M bezeichne $|M|$ die Mächtigkeit von M, d. h. die Anzahl der Elemente von M. Beim Abzählen verwendet man meist intuitiv folgende Prinzipien:

Haben A und B leeren Durchschnitt ($A \cap B = \emptyset$), so gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$ (Summenregel).

Es gilt allgemeiner:

Sind $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$. (P 1.1)

Den Fall, daß Mengen nichtleeren Durchschnitt haben, betrachten wir in § 5 (Prinzip von Inklusion und Exklusion).

$A \times B$ bezeichne die Menge aller Paare (a,b) mit $a \in A$, $b \in B$ (kartesisches Produkt). Offenbar gilt

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (Produktregel)

(Wende (P 1.1) an!) und allgemeiner

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|, \qquad \text{(P 1.2)}$$

wobei in natürlicher Weise $A_1 \times \ldots \times A_n$ die Menge aller n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1 \in A_1$ bezeichnet.

Um Mächtigkeiten von Mengen zu ermitteln, ist es oft günstig, Abbildungen zu betrachten. Wir erinnern, daß bei einer Abbildung f von X in Y ($f : X \to Y$) jedes Element von X genau ein Bild hat. $f : X \to Y$ ist injektiv, wenn verschiedene Elemente von X verschiedene Bilder haben (aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$), f ist surjektiv (Abbildung "auf"), wenn jedes Element von Y als Bild vorkommt, und schließlich ist f bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Das folgende Prinzip behandeln wir ausführlicher in § 2.
Existiert eine bijektive Abbildung von X auf Y, so ist

$$|X| = |Y| \qquad \text{(P 1.3)}$$

Für gegebenes $f : X \to Y$ bezeichne $f^{-1}(y)$ die Menge der Elemente x aus X, für die $f(x) = y$ ist (die Urbildmenge von $y \in Y$).
Wegen (P 1.1) gilt

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \qquad \text{(P 1.4)}$$

(bei bijektiven Abbildungen ist $|f^{-1}(y)| = 1$ für alle $y \in Y$, d. h.

$$|X| = \sum_{y \in Y} 1 = |Y|\ ).$$

Weitere Verallgemeinerungen des Prinzips (P 1.4) behandeln wir in § 4 (Methode des zweifachen Abzählens).

Hängt speziell $|f^{-1}(y)|$ nicht von $y \in Y$ ab, d. h. gilt $|f^{-1}(y)| = c$ für alle $y \in Y$, so haben wir

$$|X| = \sum_{y \in Y} c = c \cdot |Y|$$

und damit

$$|Y| = \frac{1}{c}\ |X|, \text{ falls } |f^{-1}(y)| = c \text{ für alle } y \in Y. \qquad \text{(P 1.5)}$$

Oft verwendet man (P 1.5) beim Abzählen der Menge Y.
Dazu muß man natürlich eine geeignete Menge X und Abbildung f finden, bei der jedes Element von Y gleich oft als Bild auftritt.

Wir definieren nun die kombinatorischen Grundobjekte (Variationen, Permutationen, Kombinationen) als spezielle Abbildungen und bestimmen deren Anzahl.

1.1. Variationen ohne Wiederholung

Sei $V(n,k)$ die Menge aller injektiven Abbildungen von $\{1,\dots,k\}$ in $\{1,\dots,n\}$. Natürlich können wir auch allgemeiner injektive Abbildungen von $\{a_1, \dots, a_k\}$ in $\{b_1, \dots, b_n\}$ betrachten (diese Bemerkung gilt entsprechend für folgende Punkte).

Satz 1.1. $|V(n,k)| = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Beweis: Der Fall $k > n$ ist trivial, sei also $k \leqq n$.
Wir haben n Möglichkeiten, das Bild von 1 festzulegen, dann bleiben nur noch n-1 Möglichkeiten für das Bild von 2, n-2 Möglichkeiten für das Bild von 3,...,(n-k+1) Möglichkeiten für das Bild von k. Dies führt zu der obigen Formel (genaugenommen wird Induktion über k durchgeführt und (P 1.1.) angewendet).
Offenbar ist $V(n,k)$ gleichmächtig zur Menge aller k-Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ mit $a_i \in \{1,\dots, n\}$, bei denen keine zwei Komponenten einander gleich sind (jeder injektiven Abbildung f kann bijektiv das k-Tupel (f(1), (f(2), ..., f(k) zugeordnet werden).

1.2. Variationen mit Wiederholung

Sei $\nabla(n,k)$ die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, k\}$ in $\{1, \ldots, n\}$

Satz 1.2. $|\nabla(n,k)| = n^k$.

Beweis: Für jedes Element i ($i \in \{1, \ldots, k\}$) haben wir n Möglichkeiten, das Bild festzulegen, also gibt es $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$ Abbildungen.

Wie oben können wir $\nabla(n,k)$ als Menge aller k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ mit $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ interpretieren.

Daher bekommen wir auch sofort mit dem Prinzip (P 1.2.) die Formel

$$|\nabla(n,k)| = |\underbrace{\{1,\ldots,n\} \times \ldots \times \{1,\ldots,n\}}_{k}|$$

$$= \underbrace{|\{1, \ldots, n\}| \cdot \ldots \cdot |\{1, \ldots, n\}|}_{k} = n^k$$

1.3. Permutationen ohne Wiederholung

Sei $P(n)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1,\ldots,n\}$ auf $\{1,\ldots,n\}$ (oft ist auch die Bezeichnung S_n gebräuchlich).

Da offenbar jede Abbildung von $\{1,\ldots,n\}$ auf $\{1,\ldots,n\}$ genau dann injektiv ist, wenn sie bijektiv ist, folgt aus Satz 1.1.:

Satz 1.3. $|P(n)| = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Wiederum kann man statt bijektiver Abbildungen n-Tupel aus den Zahlen $1,\ldots,n$ betrachten, bei denen jede Zahl genau einmal vorkommt.

1.4. Permutationen mit Wiederholung

Sei $P(n;k_1, \ldots, k_r)$ die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in $\{1, \ldots, r\}$, bei denen i genau k_i-mal als Bild auftritt, $k_i \geq 0$, $(i = 1, \ldots, r)$.

Offenbar muß dann $k_1 + \ldots + k_r = n$ gelten.

Satz 1.4. $|P(n; k_1, \ldots, k_r)| = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$

Beweis: Wie bisher können wir $P(n; k_1, \ldots, k_r)$ als Menge aller n-Tupel aus den Zahlen $\{1, \ldots, r\}$ interpretieren, wo jede Zahl i genau k_i-mal auftritt $(i = 1, \ldots, r)$. Zunächst betrachten wir eine neue Menge X aller n-Tupel aus den Elementen $1_1, 1_2, \ldots, 1_{k_1}$,

$2_1, 2_2, \ldots, 2_{k_2}, \ldots, r_{k_r}$, wo jedes dieser Elemente genau einmal vorkommt. Nach Satz 1.3. ist $|X| = n!$

Jedem n-Tupel aus X ordnen wir ein n-Tupel aus $P(n; k_1, \ldots, k_r)$ zu, indem wir einfach den unteren Index weglassen. Offenbar ist das eine Abbildung "auf". Wie oft tritt ein n-Tupel aus $P(n; k_1, \ldots, k_r)$ als Bild auf? Da genau k_1 Einsen vorkommen, haben wir nach Satz 2.3. $k_1!$ Möglichkeiten, die unteren Indizes für die Einsen festzulegen. Genauso haben wir $k_2!$ Möglichkeiten für die Indizes der Zweien usw. Also kommt jedes n-Tupel aus $P(n; k_1, \ldots, k_r)$ genau $k_1! \ldots k_r!$ mal als Bild vor.
Unter Beachtung des Prinzips (P 1.5) bekommen wir

$$|P(n; k_1, \ldots, k_r)| = \frac{1}{k_1! \ldots k_r!} \cdot |X| = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!}$$

(strenggenommen, werden Induktion über r und (P1.1) angewandt).

1.5. Kombinationen (Auswahlen) ohne Wiederholung

Sei $K(n,k)$ die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in $\{0,1\}$, bei denen 1 genau k-mal (und damit 0 genau n-k-mal) als Bild auftritt.
Aus Satz 1.4. folgt sofort mit $r = 2$:

Satz 1.5. $|K(n,k)| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Indem wir jeder solchen Abbildung die Menge der Elemente von $\{1, \ldots, n\}$, die auf die 1 abgebildet werden, zuordnen, sehen wir, daß $K(n,k)$ auch als Familie aller k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ interpretiert werden kann. (man zieht also k Elemente, ohne sie wieder zurückzulegen). Wie früher können wir $K(n,k)$ auch als Menge aller n-Tupel aus Nullen und Einsen mit genau k Einsen ansehen.

1.6. Kombinationen (Auswahlen) mit Wiederholung

Sei $\overline{K}(n,k)$ die Menge aller Abbildungen f von $\{1, \ldots, n\}$ in $\mathbb{N}$, für die $f(1) + \ldots + f(n) = k$ ist $(n \geq 1)$.

Satz 1.6. $|\overline{K}(n,k)| = \binom{n+k-1}{k}$.

Beweis: Durch Induktion über k beweist man zunächst leicht folgende Formel:

$$\binom{n-2}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n+k-2}{k} = \binom{n+k-1}{k}, \; n \geq 2$$

$$\left(\text{beachte } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\right).$$

Unseren Satz beweisen wir durch Induktion über $n+k$, wobei der Anfang $n+k = 1$ bzw. allgemeiner $n = 1$ trivial ist.
Im Induktionsschritt $[(n+k-1) \longrightarrow n+k,\ n \geq 2]$ zerlegen wir $\overline{K}(n,k)$ in Teilmengen von Abbildungen f, für die $f(n) = 0$, $f(n) = 1$, ... bzw. $f(n) = k$ ist. Davon gibt es nach Induktionsvoraussetzung

$$\binom{(n-1)+k-1}{k},\ \binom{(n-1)+(k-1)-1}{k-1} \text{ bzw. } \binom{(n-1)+0-1}{0} \text{ Stück.}$$

Die Behauptung folgt nun aus obiger Formel und (P 1.1).
Wieder kann $\overline{K}(n,k)$ als Menge aller n-Tupel aus natürlichen Zahlen mit der Summe k interpretiert werden.
Eine Abbildung f aus $\overline{K}(n,k)$ kann man auch als Ziehung von k Elementen aus $\{1, \ldots, n\}$ mit Zurücklegen betrachten, wobei zwei Ziehungen genau dann als gleich angesehen werden, wenn jedes Element in der einen Ziehung genauso oft wie in der anderen Ziehung gezogen wird.

Aufgabe 1.1.
Wieviel Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

Lösung:
Jeder Teilmenge A von $\{1, \ldots, n\}$ kann ihr charakteristischer Vektor (n-Tupel) $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $a_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
zugeordnet werden. Dadurch ist eine bijektive Abbildung von der Menge aller Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ (der Potenzmenge) auf $\underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n}$ gegeben.

Mit Satz 1.2. ergibt sich die Antwort: 2^n.

Aufgabe 1.2.
Wieviel Möglichkeiten gibt es, k Türme auf ein n x n Schachbrett zu stellen, ohne daß sie sich gegenseitig schlagen können ($k \leq n$).

Lösung:
1. Fall: $k = n$
Jeder günstigen Stellung entspricht eine bijektive Zuordnung der Spaltenmenge auf die Zeilenmenge.
Also lautet wegen Satz 2.3. die Antwort: $n!$

2. Fall: $k < n$.

Jeder günstigen Stellung entspricht eine Auswahl von k Zeilen und k Spalten. Davon gibt es nach Satz 1.5. $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$ Stück.
Ist solch eine Auswahl vorgegeben, so gibt es nach dem 1. Fall $k!$ günstige Stellungen auf den fest gewählten k Zeilen und k Spalten.
Mit (P 1.4) folgt als Antwort: $\binom{n}{k}^2 k!$.

Aufgabe 1.3.

An einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung.
Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt genau 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen. Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!

Lösung:

Seien die Behälter mit 1, 2 und 3 bezeichnet. Jedem Verkauf entspricht ein 57-Tupel $(a_1, \dots a_{57})$, wobei a_1 die Nummer des Behälters angibt, aus dem der i-te Karpfen entnommen wurde.
Hierbei kommen genau die 57-Tupel aus x Einsen, y Zweien, z Dreien vor, für die $x+y+z = 57$, $0 \leq x,y,z \leq 20$ ist.
Der Verkauf endet wie gewünscht genau dann, wenn $x = y = z = 19$ ist.
Nach Satz 1.4. gibt es $\frac{57!}{19!\cdot 19!\cdot 19!} = \frac{57!}{17!\cdot 19!\cdot 19!} \cdot \frac{200}{9\cdot 19\cdot 20\cdot 20}$ günstige Verkäufe.
Betrachten wir alle Möglichkeiten für x,y,z mit den obigen Eigenschaften, so erhalten wir wieder nach Satz 1.4.

$$3 \cdot \frac{57!}{17!20!20!} + 6 \cdot \frac{57!}{18!19!20!} + \frac{57!}{19!19!19!} = \frac{57!}{17!19!19!} \cdot \frac{513+1140+200}{9\cdot 19\cdot 20\cdot 20}$$

mögliche Verkäufe.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Quotient aus der Anzahl der günstigen durch die Anzahl der möglichen Verkäufe:

$$\frac{200}{1853} \approx 0{,}108.$$

Aufgabe 1.4.

An einem Preisskat nehmen 12 Spieler teil. Der Einsatz je Spieler beträgt 5,-- Mark. Der Gewinn wird nur in ganzen Mark ausgezahlt.

Wie viele Möglichkeiten der Gewinnverteilung gibt es?

Lösung:

Bei einer Gewinnverteilung wird jedem Spieler i ($i = 1,\ldots,12$) ein Gewinn $f(i)$ zugeordnet, wobei $f(1) + \ldots + f(12) = 60$ ist.

Aus Satz 1.6. folgt: Es gibt $\binom{12+60-1}{60} = \binom{71}{11}$ Gewinnverteilungen.

2. Abzählen mit Hilfe bijektiver Abbildungen

In § 1 formulierten wir schon das Prinzip: Existiert eine bijektive Abbildung von X auf Y, so ist $|X| = |Y|$.
Dort haben wir dieses Prinzip auch schon implizit und explizit angewendet. Wir behandeln nun Aufgaben, bei denen die "hilfreichen" Bijektionen nicht sofort ersichtlich sind.

Aufgabe 2.1.

Gegeben sei ein konvexes n-Eck, bei dem keine drei seiner Diagonalen durch einen gemeinsamen inneren Punkt des n-Ecks gehen.
Wie viele Diagonalenschnittpunkte gibt es im Innern des n-Ecks?

Lösung:

Jedem inneren Schnittpunkt zweier Diagonalen ordnen wir vier Eckpunkte des n-Ecks zu, nämlich die Endpunkte der zwei Diagonalen.
Umgekehrt definiert jede Menge aus 4 Eckpunkten genau einen inneren Schnittpunkt zweier Diagonalen, deren Endpunkte zu den 4 Ecken gehören.
Da es $\binom{n}{4}$ Auswahlen von 4 Punkten aus n Punkten gibt, haben wir $\binom{n}{4}$ innere Schnittpunkte.

Aufgabe 2.2.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Markstücke unter n Leute zu verteilen, so daß jeder wenigstens ein Markstück erhält ($k \geq n$)?

Lösung:

Durch die Vorschrift "laß dir von jeder Person eine Mark geben" definieren wir eine bijektive Abbildung von der Menge aller Verteilungen von k Mark unter n Leute, wo jeder wenigstens eine Mark erhält, auf die Menge aller Verteilungen von k-n Mark unter n Leute ohne weitere Bedingung.

Von diesen Auswahlen mit Wiederholung gibt es

$$\binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} \text{ Stück (siehe auch Aufgabe 1.4.).}$$

<u>Aufgabe 2.3.</u>

Wieviel k-elementige Teilmengen A der Menge $\{1, \ldots, n\}$ gibt es, für die gilt: Sind $a, b \in A$ so ist $|a - b| > r$?

<u>Lösung:</u>

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ eine solche Teilmenge, wobei o.B.d.A. $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, und wegen der Aufgabenstellung noch strenger $a_{i+1} - a_i > r$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ ist.
Offenbar gilt dann $a_1 < a_2 - r < a_3 - 2r < \ldots < a_k - (k-1)\,r$, und wir können A die k-elementige Teilmenge $A' = \{a_1, a_2 - r, \ldots, a_k - (k-1)\,r\}$ von $\{1, 2, \ldots, n - (k-1)\,r\}$ zuordnen.
Offenbar tritt jede k-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n-(k-1)r\}$ genau einmal als Bild auf, also lautet die Antwort:

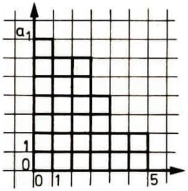
$$\binom{n-(k-1)\,r}{k}.$$

<u>Aufgabe 2.4.</u>

Man zeige: Die Anzahl der Zerlegungen einer natürlichen Zahl n in eine Summe von nicht mehr als r natürlichen Zahlen > 0 ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von n in eine Summe von natürlichen Zahlen > 0, die alle kleiner oder gleich r sind (Zerlegungen, bei denen sich die eine durch Vertauschung der Summanden aus der anderen ergibt, werden als gleich angesehen).

<u>Lösung:</u>

Wir können folgendermaßen eine bijektive Zuordnung zwischen den beiden Mengen von Zerlegungen angeben:



Sei $n = a_1 + \ldots + a_5$ $(5 \leq r)$ eine Zerlegung der ersten Art und o.B.d.A. $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_5 > 0$. Diese können wir durch Spalten aus Einheitsquadraten in der Ebene veranschaulichen; wobei in der i-ten Spalte genau a_i Einheitsquadrate seien $(i = 1, \ldots, 5)$.
Im ganzen haben wir also n Einheitsquadrate. Sind nun in der j-ten Zeile b_j Einheitsquadrate $(j = 1, \ldots, a_1)$, so haben wir die zugeordnete Zerlegung $n = b_1 + \ldots + b_{a_1}$ der zweiten Art.

Aufgabe 2.5.

In der Ebene sei ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt. Es werden Wege entlang der Gitterpunkte (das sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) betrachtet, bei denen vom Punkt (i,j) ein Schritt nur nach $(i+1,j)$ oder $(i,j+1)$ möglich ist.

Wie viele solcher Wege von $(0,0)$ nach (m,n) gibt es, die

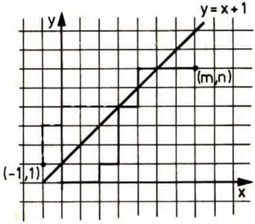
a) völlig unterhalb der Geraden $y = x + 1$,

b) völlig unterhalb der Geraden $y = x + p$ $(p \in \mathbb{N})$

verlaufen?

Lösung:

a) Für $m < n$ gibt es keine solchen Wege, sei also $m \geq n$.
Ohne Zusatzbedingung gibt es $\binom{m+n}{m}$ Wege von $(0,0)$ nach (m,n), denn man kann aus den $m+n$ Rechts- bzw. Aufwärtsschritten, die auszuführen sind, an beliebiger Stelle die m Rechtsschritte auswählen.
Sei S nun die Menge der "schlechten" Wege, d. h. die Wege, die die in a) genannte Bedingung verletzen.



Wir betrachten einen beliebigen "schlechten" Weg. Dieser trifft an einem eindeutig bestimmten Punkt die Gerade $y = x+1$ das erste Mal.
Spiegeln wir nun das Anfangsstück des Weges bis zu diesem Punkt an der Geraden $y = x+1$, so erhalten wir insgesamt einen Weg von $(-1,1)$ nach (m,n).
Offenbar ist die eben definierte Zuordnung eine bijektive Abbildung von S auf die Menge aller Wege von $(-1,1)$ nach (m,n).
Also gilt $|S| = \binom{m+n}{m+1}$.
Die Antwort lautet also:

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1} = \frac{m-n+1}{m+1}\binom{m+n}{m}.$$

b) Im Fall $m < n - p + 1$ gibt es keine solchen Wege, sei also $m \geq n - p + 1$. Mit derselben Spiegelungsmethode können wir die jetzt schlechten Wege bijektiv auf die Wege von $(-p,p)$ nach (m,n) abbilden.
Es folgt als Antwort: $\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+p}$.

Aufgabe 2.6.

Der Eintritt in ein Kino kostet 1,-- Mark. Vor der Kinokasse hat sich eine Warteschlange von 80 Personen gebildet. 50 unter ihnen haben genau 1-Mark-Stück bei sich, die übrigen 30 nur ein 2-Mark-Stück.

Wieviel Warteschlangen sind möglich, bei denen der Kartenverkauf ohne Stockung wegen der Unmöglichkeit des Geldherausgebens ablaufen kann?

Zu Beginn des Kartenverkaufs ist die Kinokasse leer. Die Warteschlangen sollen nur in bezug auf die 1-Mark-Stücke und 2-Mark-Stücke unterschieden werden, nicht aber in bezug auf die Reihenfolge der 80 Personen.

Lösung:

Wir interpretieren den Verkauf als einen Weg entlang der Gitterpunkte einer Ebene von (0,0) nach (50,30), wobei ein Gitterpunkt (i,j) auf dem Weg die Bedeutung hat, daß nach i+j Kartenverkäufen i 1-Mark-Stücke und j 2-Mark-Stücke bezahlt worden sind. Der Verkauf funktioniert genau dann ohne Stockung, wenn niemals mehr 2-Mark-Stücke als 1-Mark-Stücke bezahlt wurden, d. h., wenn der Weg völlig unterhalb der Geraden $y = x+1$ verläuft. Aus Aufgabe 2.5. folgt:

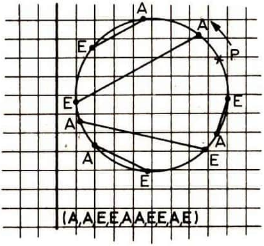
Es sind $\frac{21}{51}\binom{80}{50}$ Warteschlangen der verlangten Art möglich.

Aufgabe 2.7.

Auf einer Kreislinie seien 2n Punkte ausgezeichnet.

Auf wieviel Arten kann man diese so zu zweien mit Strecken verbinden, daß keine Überschneidungen auftreten?

Lösung:



Jeder Figur der gewünschten Art ordnen wir folgendermaßen eine Folge von n Buchstaben A und n Buchstaben E zu: Wir fixieren einen Punkt P auf der Kreislinie und lassen ihn im mathematisch positivem Sinn auf der Kreislinie wandern. Berührt er das erste Mal eine Sehne, so schreiben wir ein A (= Anfangspunkt), berührt er eine Sehne das zweite Mal, so schreiben

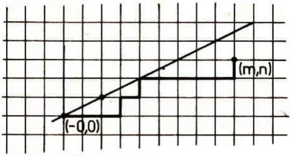
wir ein E (= Endpunkt). Offenbar kann zu keinem Zeitpunkt der Buchstabe E öfter geschrieben worden sein als A. Umgekehrt erhalten wir aus einer Folge von n A's und n E's, bei der in keinem Anfangsabschnitt mehr E's als A's stehen, eindeutig eine gewünschte Wahl von Verbindungen. Wir lesen die Folge rückwärts, lassen also P rückwärts wandern. Treffen wir dabei auf ein A, so wird es mit dem zuletzt gelesenen und noch nicht benutzten E verbunden.
Dann beachten wir dieses E nicht mehr und fahren so fort, bis alle Buchstaben verbraucht sind.
Wie in Aufgabe 2.6. können wir solchen Folgen aus A's und E's bijektiv einen Weg entlang der Gitterpunkte einer Ebene von (0,0) nach (n,n) völlig unterhalb der Geraden $y = x+1$ zuordnen.
Also gibt es $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten.
<u>Bemerkung:</u> Die Zahlen $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-1}{n-1}$ heißen <u>Catalansche Zahlen</u>.

3. Die Methode der vollständigen Induktion

Die Methode braucht nicht erläutert zu werden, da sie allgemein bekannt ist. Wir wählten diesen Paragraphen, um zu betonen, daß das Induktionsprinzip - wie in vielen Bereichen der Mathematik - auch in der abzählenden Kombinatorik eine wesentliche Rolle spielt. Es ist allerdings meist nur dann anwendbar, wenn die entsprechende Formel schon gegeben ist. Der Leser sollte selbst versuchen, Formeln aus Aufgaben dieses Heftes durch Induktion zu beweisen. Wir behandeln nur eine Aufgabe.

<u>Aufgabe 3.1.</u>
Man zeige, daß es $\binom{m+n}{m} - k\binom{m+n}{m+1}$ Gitterpunktwege von (0,0) nach (m,n) gibt (siehe Aufgabe 2.5.), die niemals über die Gerade $y = \frac{1}{k}x$ hinausgehen ($m \geq kn$).

Lösung:



Sei $a_{m,n}$ die Anzahl der betrachteten Wege. Wir beweisen

$a_{m,n} = \binom{m+n}{m} - k\binom{m+n}{m+1}$ durch Induktion über m+n, wobei der Anfang m+n = 0 bzw. 1 trivial ist.

1. Fall $m > kn$.

Der vorletzte Punkt jedes Weges nach (m,n) ist entweder $(m-1,n)$ oder $(m,n-1)$. Also gilt unter Beachtung der Induktionsvoraussetzung für $m + n-1$:

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= a_{m-1,n} + a_{m,n-1} \\ &= \binom{m+n-1}{m-1} - k\binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m} - k\binom{m+n-1}{m+1} \\ &= \binom{m+n}{m} - k\binom{m+n}{m+1}. \end{aligned}$$

2. Fall $m = kn$.

In diesem Fall ist es günstiger, die behauptete Formel anders zu schreiben, es gilt allgemein:

$$\binom{m+n}{m} - k\binom{m+n}{m+1} = \frac{m+1-kn}{m+1}\binom{m+n}{m}.$$

Jeder betrachtete Weg durchläuft den Punkt $(m,n-1)$.
Also gilt (Beachte wieder die Induktionsvoraussetzung und $m = kn$!).

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= a_{m,n-1} = \frac{m+1-k(n-1)}{m+1}\binom{m+(n-1)}{m} = \frac{k+1}{m+1}\binom{m+n-1}{m} \\ &= \frac{\frac{m}{n}+1}{m+1}\binom{m+n-1}{m} = \frac{1}{m+1}\binom{m+n}{m} = \frac{m+1-kn}{m+1}\binom{m+n}{m}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Genauso wie in Aufgabe 2.7. kann man nun zeigen: Sind auf einer Kreislinie 3n Punkte gegeben, so kann man auf $\frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}$ Arten und Dreiecke festlegen, daß die Eckpunkte zu den 3n Punkten gehören und keine Überschneidungen vorkommen.

4. Die Methode des zweifachen Abzählens

In § 1 erwähnten wir schon, daß sich das Prinzip (P 1.4) weiter verallgemeinern läßt. Sei X eine beliebige Menge und Y eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dann gilt für eine Funktion (Abbildung) f von X in Y:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} y \cdot |f^{-1}(y)| \tag{P 4.1}$$

(Es muß ja $y \in Y$ so oft als Summand vorkommen, wie es als Bild bei f auftritt.)

Aufgabe 4.1.

Sei $1 \leq r \leq n$.

Jeder r-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ ordne man die kleinste Zahl zu, die in dieser Teilmenge enthalten ist.

Sei $a(n,r)$ das arithmetische Mittel aller dieser Zahlen.

Man zeige: $a(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$.

Lösung:

Sei $X = X(n,r)$ die Menge aller r-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$ und f diejenige Abbildung, die jedem $A \in X$ sein kleinstes Element zuordnet.

Unter Verwendung von (P 4.1) erhalten wir

$$\binom{n}{r} a(n,r) = \sum_{A \in X} f(A) = \sum_{i \in Y} i \left|f^{-1}(i)\right| = \sum_{i=1}^{n-r+1} i\binom{n-i}{r-1},$$

denn zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau $\binom{n-1}{r-1}$ r-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit i als kleinster Zahl (aus den n-i Zahlen i+1, i+2, ..., n müssen r - 1 weitere Zahlen ausgewählt werden).

Berücksichtigen wir $\binom{n}{r} \cdot \frac{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$, so haben wir nur folgende Identität nachzuweisen:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{i=1}^{n-r+1} i \binom{n-i}{r-1}.$$

Dies erledigen wir durch Induktion über n. Der Anfang n = 1 ist trivial, betrachten wir also den Schritt $n-1 \longrightarrow n$.

In den Fällen r = 1 und r = n ist die Behauptung trivial, und für $2 \leq r \leq n - 1$ können wir die Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die Paare (n-1, r-1), und (n-1,r), benutzen:

$$\binom{n}{r} = \sum_{i=1}^{n-r+1} i\binom{n-1-i}{r-1-1}$$

$$\binom{n}{r+1} = \sum_{i=1}^{n-r} i\binom{n-1-i}{r-1}.$$

Die Behauptung ergibt sich aus Addition dieser zwei Identitäten (beachte $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ und $\binom{r-2}{r-2} = \binom{r-1}{r-1} = 1$).

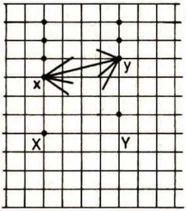
Wir behandeln nun eine andere wichtige Verallgemeinerung von (P 1.4).

Gegeben seien zwei Mengen X und Y und eine Menge E von gewissen Paaren (x,y) wobei $x \in X$ und $y \in Y$ sei.
Wir können $|E|$ auf zwei verschiedene Arten ermitteln:

$$|E| = \sum_{x \in X} \left|\{y \in Y : (x,y) \in E\}\right|$$

$$= \sum_{y \in Y} \left|\{x \in X : (x,y) \in E\}\right| \qquad \text{(P 4.2)}$$

Veranschaulichen kann man sich dies durch Punkte in der Ebene, wobei die Punkte von X auf einer Geraden und die Punkte von Y auf einer dazu parallelen Geraden liegen mögen, und die Strecke $\overline{xy}$ eingezeichnet wird, wenn $(x,y) \in E$ ist:
Die Anzahl der Strecken ergibt sich aus:



1. Für jedes $x \in X$ ermitteln wir die Anzahl der Strecken, die bei x beginnen, und summieren über $x \in X$.
2. Für jedes $y \in Y$ ermitteln wir die Anzahl der Strecken, die bei y enden, und summieren über $y \in Y$.

Aufgabe 4.2.

Die Zahl i $\in\{1, \ldots, n\}$ heiße Fixpunkt der Permutation π von 1,$\{\ldots, n\}$, wenn $\pi(i) = i$ ist. Für jede Permutation π sei $F(\pi)$ die Anzahl der Fixpunkte.

Man bestimme die mittlere Anzahl von Fixpunkten einer Permutation von $\{1, \ldots, n,\}$ d. h., man ermittle

$$A(n) = \frac{1}{|P(n)|} \sum_{\pi \in P(n)} F(\pi)$$

($P(n)$ = Menge aller Permutationen von 1, ..., n)

Lösung:

Wir betrachten einerseits die Menge $X = P(n)$ und andererseits die Menge $Y = \{1, \ldots, n\}$ und definieren $E = \{(\pi, i) : \pi \in X,\ i \in Y$ und i ist Fixpunkt von $\pi\}$.

Wir zählen E auf zweierlei Arten ab. Für festes π ist $|\{i : (\pi, i) \in E\}| = F(\pi)$. Für festes i gibt $|\{\pi : (\pi, i) \in E\}|$ die Anzahl aller Permutationen an, die i als Fixpunkt haben, diese Zahl ist offenbar gleich der Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$, also gleich $(n-1)!$

Es folgt:

$$|E| = \sum_{\pi \in P(n)} F(\pi) = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} (n-1)! = n!, \text{ also}$$

$$A(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in P(n)} F(\pi) = 1.$$

Das Prinzip des zweifachen Abzählens läßt folgende weitere Verallgemeinerung zu: Ist den Paaren $(x,y) \in E$ zusätzlich ein reeller Wert $\lambda(x,y)$ zugeordnet, so gilt

$$\sum_{(x,y) \in E} \lambda(x,y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y : (x,y) \in E} \lambda(x,y) =$$

$$\sum_{y \in Y} \sum_{x \in X : (x,y) \in E} \lambda(x,y). \qquad \text{(P 4.3)}$$

Aufgabe 4.3.

Es sei ein Blatt Papier mit der Fläche 1 gegeben, das auf der einen Seite durch Striche in k Gebiete aufgeteilt ist.

Ferner sei diese Seite mit genau k Farben gefärbt, so daß jedes Gebiet durch genau eine Farbe repräsentiert wird. (*)

Nun zerlegen wir die andere Seite ebenfalls durch Striche irgendwie in k Gebiete.

Jeder Färbung φ dieser Seite mit genau k Farben, für die (*) gilt, ordnen wir den Flächeninhalt der Menge derjenigen Punkte des Blattes Papier zu, die auf beiden Seiten gleichgefärbt sind.

Man bestimme das arithmetische Mittel A(k) aller dieser Zahlen.

Lösung:

Sei M die Menge der Punkte des Blattes Papier. Durch die Gebietszerlegungen auf beiden Seiten haben wir zwei Zerlegungen der Menge M gegeben:

$$M = A_1 \cup \ldots \cup A_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k.$$

Wir setzen $C_{ij} = A_i \cap B_j$ $(i,j = 1, \ldots, k)$. Bezeichnen wir mit $F(C_{ij})$ den Flächeninhalt von C_{ij}, so gilt offenbar

$$\sum_{i,j=1}^{k} F(C_{ij}) = 1.$$

Nun sei $X = \{(i,j) : i,j = 1, \ldots, k\}$ und $Y = \{\varphi_1, \ldots \varphi_{k!}\}$ die Menge aller (*)-Färbungen der zweiten Seite des Blattes Papier. Wir betrachten die Menge E aller Paare $((i,j), \varphi_e)$, für die das Gebiet A_i auf der ersten Seite wie das Gebiet B_j auf der anderen Seite bei der Färbung φ_e gefärbt ist.

Jedem solchen Paar ordnen wir den Flächeninhalt von $C_{i,j}$ zu:

$$\lambda((i,j), \varphi_e) = F(C_{ij}).$$

Für festes (i,j) gibt es offenbar $(k-1)!$ (*)-Färbungen φ_e, so daß $((i,j), \varphi_e) \in E$ ist (nur die Farbe von B_j ist festgelegt). Der zugeordnete Wert λ ist stets $F(C_{ij})$. Für festes φ_e gibt

$$\sum_{((i,j), \varphi_e) \in E} F(C_{ij})$$

den Flächeninhalt der Menge der auf beiden Seiten gleichgefärbten Punkte an.

Mit (P 4.3) erhalten wir

$$A(k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k!} \sum_{\substack{(i,j) \\ ((i,j),\varphi_e) \in E}} F(C_{ij}) = \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{\varphi_e : ((i,j),\varphi_e) \in E} F(C_{ij})$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^{k} F(C_{ij}) \cdot (k-1)! = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^{k} F(C_{ij}) = \frac{1}{k}$$

5. Das Prinzip von Inklusion und Exklusion

Wir wollen das Prinzip (P 1.1) auf den Fall nichtdisjunkter Mengen verallgemeinern. Offenbar gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Sei allgemein Ω irgendeine Grundmenge und $A_1, \ldots, A_n$ seien Teilmengen von Ω. Wir suchen eine Formel für $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$.

Hierzu definieren wir für eine beliebige Teilmenge A von Ω ihre charakteristische Funktion $f_A : \Omega \to \{0,1\}$:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Offenbar ist dann $|A| = \sum_{x \in \Omega} f_A(x)$.

Ferner überlegt man sich leicht folgende Identitäten:

$$f_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(x) = f_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot f_{A_n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A_1 \text{ und } \ldots \text{ und } x \in A_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) = 1-(1-f_{A_1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1-f_{A_n}(x)) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A_1 \text{ oder } \ldots \text{ oder } x \in A_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite der letzten Identität erhalten wir

$$f_{A_1 \cup \dots \cup A_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}(x) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{A_i}(x) \cdot f_{A_j}(x) + \dots +$$

$$(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{A_{i_1}}(x) \cdot \dots \cdot f_{A_{i_k}}(x) + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} f_{A_1}(x) \cdot \dots \cdot f_{A_n}(x)$$

und weiter

$$f_{A_1 \cup \dots \cup A_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}(x) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{A_i \cap A_j}(x) + \dots +$$

$$(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x) + \dots + (-1)^{n-1} f_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(x)$$

Nach Summation über alle $x \in \Omega$ ergibt sich

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} f|A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots +$$

$$(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad \text{(P 5.1)}$$

Meist interessiert man sich für die Anzahl der Elemente von Ω, die in keiner der Mengen $A_1, \dots, A_n$ liegen:

$$|\Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |\Omega| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i \cap A_j - + \dots +$$

$$(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad \text{(P 5.2)}$$

Werden Abzählprobleme mit Hilfe der Formeln (P 5.1) und (P 5.2) gelöst, so spricht man von einer Anwendung des Prinzipsvon Inklusion (Ein- und Ausschließen von Elementen). Das Problem liegt meist in der entsprechenden Bestimmung der Mengen Ω, $A_1, \dots, A_n$.

Aufgabe 5.1.

Man bestimme die Anzahl $F(n)$ aller Permutationen π von $\{1,\dots,n\}$ für die $\pi(i) \neq i$ für alle i ist (d. h. die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen).

Lösung:

Sei Ω die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ $(\Omega = P(n))$ und $A_i = \{\pi \in \Omega : \pi(i) = i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Offenbar können die Permutationen aus $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ als Permutationen der Menge $\{1,\dots,n\} \setminus \{i_1 \dots i_k\}$ aufgefaßt werden, also ist $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$.

Gesucht ist die Anzahl der Permutationen, die in keiner der Mengen A_i liegen. Es ist nach (P 5.2):

$$F(n) = |\Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - + \dots + (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! + \dots + (-1)^n$$

$$= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

(beachte, daß es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, Werte $i_1, \dots, i_k$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ zu wählen).

Aufgabe 5.2.

Man bestimme die Anzahl $S(n,k)$ aller surjektiven Abbildungen von $\{1, \dots, k\}$ auf $\{1, \dots, n\}$ (jede Zahl i, $i = 1, \dots, n$, tritt als Bild auf).

Lösung:

Im Fall $k < n$ gilt offenbar $S(n,k) = 0$. Sei also $k \geq n$.

Wir definieren Ω als Menge aller Abbildungen von $\{1, \dots, k\}$ in $\{1, \dots, n\}$ und A_i als Menge aller Abbildungen aus Ω, bei denen i nicht als Bild auftritt, $i = 1, \dots, n$.

Offenbar kann $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}$ als Menge aller Abbildungen $\{1, \dots, k\}$ in $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$ aufgefaßt werden, also $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| = (n - l)^k$.

Unter Benutzung von (P 5.2) erhalten wir für die gesuchte Anzahl:

$$S(n,k) = |\Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - + \ldots$$
$$+ (-1)^l \binom{n}{l} \cdot (n-l)^k + \ldots + 0$$
$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l}(n-l)^k.$$

Aufgabe 5.3.

Sei $k = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl k. Man bestimme die Zahl $\varphi(k)$ der zu k teilerfremden natürlichen Zahlen kleiner oder gleich k.

Lösung:

Sei $\Omega = \{1, \ldots, k\}$ und A_i die Menge der Zahlen aus Ω, die durch p_i teilbar sind, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}$ die Menge der Zahlen aus Ω, die durch $p_{i_1} \ldots p_{i_l}$ teilbar sind. Also gilt

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}| = \frac{k}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_l}}.$$

Eine Zahl aus Ω ist zu k teilerfremd genau dann, wenn sie in keiner der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ liegt.
Die gesuchte Zahl $\varphi(k)$ ergibt sich nach (P 5.2) aus

$$\varphi(k) = |\Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = k - \sum_{i=1}^{n} \frac{k}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{k}{p_i \cdot p_j} - + \ldots$$

$$+ (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \frac{k}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_l}} + \ldots + (-1)^n \frac{k}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$$

Durch Ausklammern erhalten wir

$$\varphi(k) = k(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_n}).$$

Bemerkung:

Die Funktion φ heißt Eulersche Funktion.
In diesem Zusammenhang wollen wir an den Fermatschen Satz erinnern: Sind a und k teilerfremd, so gilt

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}.$$

6. Rekursionsgleichungen und erzeugende Funktionen

Oft kann man bei Abzählproblemen relativ leicht rekursive Beziehungen herleiten. Ist eine Formel für die gesuchte Anzahl schon gegeben, so kann man die Formel dann schnell durch vollständige Induktion beweisen. Wir behandeln nun zwei Methoden, wie man aus Rekursionsgleichungen die explizite Formel erhalten kann. Wir benutzen die Potenzansatzmethode in den ersten beiden Aufgaben und führen dann die erzeugenden Funktionen ein, die ein breites Anwendungsgebiet haben (siehe auch Abschnitt 2.).

Aufgabe 6.1.

Wieviel Permutationen π der Menge $\{1, \ldots, n\}$ gibt es, für die $|\pi(i) - i| \leq 1$ für alle i ist?

Lösung:

Sei a_n die gesuchte Anzahl, und sei zunächst $n \geq 2$.
Für die abzuzählenden Permutationen π gilt offenbar entweder $\pi(n) = n$ oder $\pi(n) = n-1$. Durch Einschränkung der Permutationen der ersten Sorte auf die Menge $\{1, \ldots, n-1\}$ sehen wir, daß es davon a_{n-1} Stück gibt. Für die Permutationen der zweiten Sorte muß wegen der Bedingungen $|n - \pi^{-1}(n)| \leq 1$ offenbar $\pi(n-1) = n$ gelten, also gibt es davon a_{n-2} Stück (Einschränkung auf $\{1, \ldots, n-2\}$). Wir erhalten also

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2). \qquad \text{(P 6.1)}$$

Wir machen zunächst den Potenzansatz $a_n := c^n$. Dann muß $c^n = c^{n-1} + c^{n-2}$, also $c^2 = c + 1$ und damit $c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ gelten. Mit den Zahlen $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ und $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ erfüllen offenbar auch alle Zahlen der Form

$$\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ \lambda, \mu \text{ reell},$$

die Rekursionsgleichung (6.1). Deshalb schreiben wir jetzt

$$a_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Die Zahlen a_n sind durch (6.1.) nicht eindeutig bestimmt, dazu müssen wir erst die Bedingungen $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ (die sogenannten Anfangsbedingungen) hinzunehmen.

Die erste Bedingung $a_0 = 1$ ist hier wie auch in vielen anderen Fällen schwer zu interpretieren, sie findet aber ihre Berechtigung durch die offensichtliche Tatsache $a_2 = 2$, so daß wegen $2 = 1+1$ wirklich (6.1.) erfüllt ist.
Wir bestimmen nun λ, μ aus den Anfangsbedingungen

$$1 = a_0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1$$

$$1 = a_1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

und erhalten

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

also $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Wir bemerken noch, daß die hier bestimmte Folge gerade die bekannte Fibonacci-Folge ist.

Aufgabe 6.2.

Wieviel n-Tupel aus den Zahlen 1, 2, 3 und 4 gibt es, in denen 1 und 2 nirgends benachbart sind?

Lösung:

Sei T_n die Menge aller n-Tupel $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i = 1, \ldots, n$, in denen 1 und 2 nirgends benachbart sind. Wir setzen

$$a_n := |\{\underline{s} \in T_n : s_n \in \{1, 2\}\}|$$

$$b_n := |\{\underline{s} \in T_n : s_n \in \{3, 4\}\}|.$$

Die Zahl $a_n + b_n = |T_n|$ ist gesucht. Offenbar gilt

$$|\{\underline{s} \in T_n : s_n = 1\}| = |\{\underline{s} \in T_n : s_n = 2\}| = \frac{a_n}{2},$$

denn wir können durch Vertauschung $1 \leftrightarrow 2$ eine bijektive Abbildung zwischen den entsprechenden Mengen herstellen.
Analog gilt

$$|\{\underline{s} \in T_n : s_n = 3\}| = |\{\underline{s} \in T_n : s_n = 4\}| = \frac{b_n}{2}.$$

Indem wir diejenigen Tupel aus T_n betrachten, die mit 1 oder 3 enden und die letzte Komponente wegstreichen, erhalten wir leicht für $n \geqq 2$

$$\frac{a_n}{2} = \frac{a_{n-1}}{2} + b_{n-1},$$

$$\frac{b_n}{2} = a_{n-1} + b_{n-1}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von b_{n-1} bzw. a_{n-1}

$$b_n = a_n + a_{n-1},$$

$$a_n = \frac{b_n}{2} + b_{n-1}$$

und weiter durch Einsetzen

$$b_n = \frac{b_n}{2} + b_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{2} + b_{n-2},$$

$$a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} + a_{n-1} + a_{n-2},$$

also

$$b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2},$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Die gesuchte Zahl $t_n := |T_n| = a_n + b_n$ erfüllt somit die Rekursionsgleichung $t_n = 3t_{n-1} + 2t_{n-2}$.

Mit der Methode aus Aufgabe 6.1. (beachte die quadratische Gleichung $x^2 = 3c + 2$ mit den Lösungen $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ erhalten wir

$$t_n = \lambda \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

Mit den Anfangsbedingungen $t_o = 1$ und $t_1 = 4$ (beachte auch $t_2 = 14 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$) folgt

$$\lambda = \frac{5+\sqrt{17}}{2\cdot\sqrt{17}}, \quad \mu = -\frac{5-\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}, \text{ also}$$

$$t_n = \frac{1}{2\sqrt{17}} \left[(5 + \sqrt{17}) \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - (5 - \sqrt{17}) \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right].$$

Es ist allgemein bekannt, daß zwei Polynome

$$p(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n \text{ und } q(x) = b_o + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

genau dann einander gleich sind (d. h. für jedes reelle x den gleichen Wert haben), wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. (d. h. $a_i = b_i$ für alle i ist). Der entscheidende Fakt für die Methode der erzeugenden Funktionen liegt in folgender Verallgemeinerung: Sind zwei Potenzreihen $\Phi(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ und $\psi(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ gegeben sind für Φ, ψ (zumindest für zwei kleine x) Reihensummen bekannt (d. h. konvergieren Φ und ψ für kleine x), so sind die Reihensummen genau dann einander gleich, wenn die Koeffizienten einander gleich sind (d. h. $a_i = b_i$ für alle i = 1; 2, ..., ist). Wir bemerken noch, daß man im Fall der Konvergenz mit Potenzreihen genau so rechnen kann wie mit Polynomen, die Konvergenz aber nicht nachweisen braucht, wenn man auf bekannte Reihen stößt (das ist der Normalfall). Zunächst behandeln wir eine Aufgabe zur Anwendung von Polynomen.

<u>Aufgabe 6.3.</u>

Man beweise die Identität $\displaystyle\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.

<u>Lösung:</u>

Wir gehen von der Identität $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ aus und erhalten nach Anwendung des Binomischen Satzes

$$\left(\sum_{i=o}^{m} \binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j}x^j\right) = \sum_{n=o}^{m+n} \binom{m+n}{k}x^k$$

Durch Ausrechnen der linken Seite und Zusammenfassen der Glieder mit der Potenz x^k erhalten wir als Koeffizient von x^k den Wert $\displaystyle\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq o}} \binom{m}{i}\binom{n}{j}$, der gleich dem Koeffizienten $\binom{m+n}{k}$ von x^k auf der rechten Seite sein muß (beachte auch $\binom{m}{i} = 0$ bzw. $\binom{n}{j} = 0$, falls $i > m$ bzw. $j > n$).

Aufgabe 6.4.

Jana hat n Mark zur Verfügung. Sie will jeden Tag entweder ein Eis zu 1 Mark, Bonbons zu 2 M oder Schokolade zu 2 M kaufen.

Wieviel Möglichkeiten hat sie dabei, das Geld auszugeben?

Lösung:

Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten. Kauft Jana als letztes Eis, Bonbon und Schokolade, so konnte sie vorher n-1 Mark, n-2 Mark bzw. n-2 Mark beliebig ausgeben. Es folgt für $n \geq 2$:

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

Ferner gilt $a_1 = 1$, und wir setzen $a_0 = 1$, so daß $a_2 = 1 + 2 = 3$ wird. Nun machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der obigen Rekursionsformel erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 2a_{n-2})x^n \\ &= 1 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &= 1 + x\,\Phi(x) + 2x^2\,\Phi(x), \text{ also} \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{1-x-2x^2}.$$

Wir zerlegen den Nenner durch Lösen der quadratischen Gleichung in Linearfaktoren: $1 - x - 2x^2 = (1+x)(1-2x)$.

Dann führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{(1+x)(1-2x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-2x}.$$

Hierbei kann man A und B entweder nach Multiplikation mit $(1+x)(1-2x)$ durch Koeffizientenvergleich bestimmen, oder man multipliziert nur mit $1 + x$ bzw. $1-2x$ und erhält A bzw. B sofort durch Einsetzen $x = -1$ (d. h. $1 + x = 0$) bzw. $x = \frac{1}{2}$ (d. h. $1 - 2x = 0$):

$$A = \frac{1}{1-2\cdot(-1)} = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Es folgt sofort $\Phi(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2x}$.

Indem wir die bekannte Formel für die geometrische Reihe $1 + cx + (cx)^2 + \ldots = \frac{1}{1-cx}$ für $c = -1$ und $c = 2$ verwenden, erhalten wir

$$\Phi(x) = \frac{1}{3}(1 - x + x^2 - \ldots) + \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \ldots)$$

$$= \sum_{n=o} \frac{1}{3} \left((-1)^n + 2^{n+1} \right) x^n.$$

Also gilt $\quad a_n = \frac{1}{3} \left((-1)^n + 2^{n+1} \right).$

Eine sehr wichtige Formel, die man sich merken sollte, ist die Verallgemeinerung des Binomischen Satzes

$$(1 + cx)^{\alpha} = \sum_{n=o}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot (cx)^n,$$

wobei α und c reell und $c \neq o$ seien. $\binom{\alpha}{n}$ ist definiert durch $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha - n+1)}{n!}$.

Wir bemerken, daß $\binom{\alpha}{n} = o$ für natürliches α und $n > \alpha$ ist, so daß sich der Binomische Satz wirklich als Spezialfall ergibt. Ferner gilt insbesondere

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdot \ldots \cdot(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

so daß

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=o}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad \text{ist.}$$

Da außerdem

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{1-x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{i=o}^{\infty} x^i\right)^n =$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} \left|\{(i_1,\ldots,i_n) : i_1+\ldots+i_n = k \text{ und } i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}\}\right| \; x^k$$

ist und n-Tupel aus natürlichen Zahlen mit Summe k als Kombinationen mit Wiederholung interpretiert werden können, haben wir somit einen neuen Beweis für Satz 2.6. $|\overline{K}(n,k)| = \binom{n+k-1}{k}$.

Aufgabe 6.5.

Sebastian hat einen Stock der Länge n. Er möchte diesen in Teile der Länge 1 zerbrechen. Wieviel Möglichkeiten hat er dabei, wenn er in jedem Schritt alle augenblicklich vorhandenen Teile der Länge größer 1 in zwei Teile zerbricht?

Lösung:

Sei b_n gleich der Anzahl der Möglichkeiten. Offenbar ist $b_2 = 1$. Hat Sebastian beim ersten Schritt Teile der Länge i und n-i ($i = 2, \ldots, n-2$) erhalten, so kann er jedes Teil für sich auf b_i bzw. b_{n-i} Arten weiter zerbrechen. Da das Zerbrechen der Teile mit einer Länge größer 1 in jedem Schritt gleichzeitig erfolgen soll, gibt es also $b_i \cdot b_{n-i}$ Möglichkeiten für die weiteren Schritte.

Dies trifft auch für die Fälle $i = 1$ und $n - 1$ zu, wenn wir $b_1 = 1$ definieren. Setzen wir schließlich $b_o = 0$, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$b_n = \sum_{i=o}^{n} b_i \cdot b_{n-i}, \; n \geqq 2.$$

Wir machen den Ansatz

$$\Phi(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

Durch Quadrieren folgt

$$\Phi'^2(x) = b_o^2 + (b_o b_1 + b_1 b_o)x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=o}^{n} b_i b_{n-i}\Big)x^n$$

und unter Beachtung der Anfangswerte und der Rekursionsformel

$$\Phi^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n = \Phi(x) - x.$$

Lösungen der quadratischen Gleichung $\Phi^2(x) - \Phi(x) + x = 0$ sind

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 \pm \sum_{n=o}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-4x)^n\right].$$

Wegen $b_o = 0$ muß der Koeffizient vor x^o gleich 0 sein, also müssen wir das Minuszeichen wählen. Nun gilt für $n \geqq 1$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-4)^n = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot (-\frac{2n-3}{2})}{n!} (-4)^n = 2^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n-3}{n!}$$

$$= 2^n \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{n-1}} = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Es folgt $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$ und damit für die gesuchte Anzahl

$$b_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}, \; n \geqq 1.$$

Als Lösung ergeben sich also die Catalanschen Zahlen (siehe Bemerkung in § 2).

Auch formal unendliche Produkte können sehr nützlich sein. Diese kann man normalerweise auf eine endliche Anzahl von Faktoren beschränken, wenn man konkrete Koeffizienten bestimmen will. Hierzu behandeln wir abschließend die folgende Aufgabe.

<u>Aufgabe 6.6.</u>
Man zeige: Es gibt ebensoviele Zerlegungen der natürlichen Zahl n in eine Summe paarweise verschiedener natürlicher Zahlen > 0, wie es Zerlegungen von n in eine Summe ungerader natürlicher Zahlen gibt (Zerlegungen, bei denen sich die eine durch Vertauschung der Summanden aus der anderen ergibt, werden als gleich angesehen).

<u>Lösung:</u>
Seien a_n und b_n die betrachteten Anzahlen, so daß wir $a_n = b_n$ zu zeigen haben. Es gilt einerseits

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdot \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\{(i_1,\ldots,i_s) : 0 < i_1 < \ldots < i_s \text{ und } i_1 + \ldots + i_s = n \; (s = 0,1,2,\ldots)\}\right| x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Andererseits haben wir

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}} = \left(\sum_{j=o}^{\infty} x^j\right)\left(\sum_{j=o}^{\infty} x^{3j}\right)\left(\sum_{j=o}^{\infty} x^{5j}\right) \cdot \ldots$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \left|\{(j_1,\ldots,j_s) : j_1,\ldots j_s \text{ ungerade und } j_1+\ldots+j_s = n \ (s = 0,1,2,\ldots)\}\right| x^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n$$

Wir brauchen also nur die Gleichheit der zwei betrachteten Produkte nachzuweisen:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) \prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^{2k})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)} = \frac{1}{\prod_{k=1} (1-x^{2k-1})}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$$