Oskar Mader, Dietrich Richter

Wissensspeicher Mathematik

1986 Volk und Wissen Berlin
MSB: Nr. 71
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Zur Benutzung des Buches

In diesem Buch ist der Unterrichtsstoff, der im Mathematikunterricht der Abiturstufe behandelt wird, in knapper übersichtlicher Form dargestellt.
Das Buch schließt eng an die Darlegungen im Buch "Mathematik in Übersichten"ß an. Die dort enthaltene Zusammenfassung des Stoffes bis zur Klasse 10 der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule wird im "Wissensspeicher Mathematik" für die Klassen 11 und 12 weitergeführt.

Das Buch gliedert sich in die Kapitel A, B, ..., G und weitergehend dann in Abschnitte, die durch Nummern angegeben werden.
Des weiteren werden in diesem Buch folgende Kurzzeichen und Symbole verwendet:

► Wichtige Sätze und Definitionen. Zur besseren Unterscheidung werden hierbei die Wörter Satz bzw. Definition jeweils vor den Text gesetzt.

■ Beispiele

↗ Hinweis auf ein anderes Stichwort

Math Üb Mathematik in Übersichten (Titel-Nr. 00 08 09)
Wiss Ph Wissensspeicher Physik (Titel-Nr. 02 17 03)
Wiss Ch Wissensspeicher Chemie (Titel-Nr. 03 17 10)

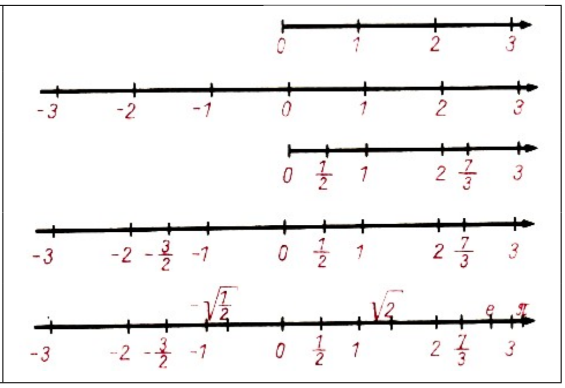
Beweise wurden nur für einige Sätze angegeben, und zwar vorzugsweise dann, wenn im Lehrplan für die erweiterte Oberschule die Behandlung des Beweises im Unterricht vorgeschrieben wird oder wenn mit Hilfe der Beweise Beweisprinzipien veranschaulicht werden.

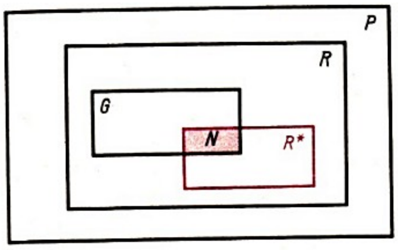
A. Zahlenfolgen

A.1. Zahlenbereiche

Übersicht über die Zahlenbereiche

N	Bereich der natürlichen Zahlen
G	Bereich der ganzen Zahlen
$R*$	Bereich der gebrochenen Zahlen
R	Bereich der rationalen Zahlen
P	Bereich der reellen Zahlen





Zahlenbereiche

Zahlenbereichserweiterungen

Zahlenbereiche werden erweitert mit dem Ziel, bestimmte Rechenoperationen uneingeschränkt ausführen bzw. bestimmte Gleichungen im neuen Zahlenbereich uneingeschränkt lösen zu können.

Komplexe Zahlen

↑ Ziel: Auch $x^n = b$ $(n \in N; n > 0)$ ist uneingeschränkt lösbar

P

↑ Ziel: Auch $x^n = b$ $(b \geq 0,\ n \in N,\ n > 0)$ ist uneingeschränkt lösbar

R

↑ Ziel: Auch $a + x = b$ ist uneingeschränkt lösbar

R*

↑ Ziel: Auch $ax = b$ ist uneingeschränkt lösbar $(a \neq 0)$

N

Eigenschaften der Zahlenbereiche

Die folgende Tabelle gibt Auskunft darüber, ob die jeweilige Gleichung im betreffenden Zahlenbereich uneingeschränkt lösbar ist bzw. ob die jeweilige Rechenoperation uneingeschränkt ausführbar ist (a und b sind beliebige Zahlen des jeweiligen Zahlenbereiches; ferner ist $n \in N$ und $n > 0$). Im Falle von Beschränkungen werden Beispiele angegeben.

Ausführbarkeit von Rechenoperationen; Lösbarkeit von Gleichungen					
	N	G	R^*	R	P
$a + b = x$ Addition	ja	ja	ja	ja	ja
$a - b = x$ Subtraktion	nein $5 + x = 3$	ja	nein $5 + x = 3$	ja	ja
$a \cdot b = x$ Multiplikation	ja	ja	ja	ja	ja
$a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ Subtraktion	nein $7 \cdot x = 4$	nein $7 \cdot x = 4$	ja	ja	ja
$a^n = x$ Potenzieren	ja	ja	ja	ja	ja
$x^n = b$ $(b \geq 0)$ Radizieren	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	ja
$x^n = b$	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	nein $x^2 = 2$	ja $x^2 = -2$

Eigenschaften bezüglich der Ordnungsrelation

Gibt es in diesem Bereich zu jeder Zahl des Bereichs genau einen Vorgänger?
N: ja (außer für 0); G: ja; R^*, R, P: nein (überall dicht)

Gibt es in diesem Bereich zu jeder Zahl des Bereichs genau einen Nachfolger?
N, G: ja; R^*, R, P: nein (überall dicht)

Gilt das Prinzip der kleinsten Zahl?
N: ja; G, R^*, R, P: nein

Gilt der Satz von der oberen Grenze?
N, G, P: ja; R^*, R: nein

↗ Ordnung, Ma i Üb, Seiten 23, 33, 44 und 52

Nachfolger

▶ Definition:
Es seien a, b Elemente eines bestimmten Zahlenbereiches Z. b heißt Nachfolger von a innerhalb des Bereiches Z genau dann, wenn $a < b$ ist und es keine Zahl c $(c \in Z)$ mit $a < c < b$ gibt.

■ 4 ist im Bereich N Nachfolger von 3. 4 ist im Bereich N nicht Nachfolger von 2; denn es gibt die Zahl 3 (3 $\in N$), die zwischen 2 und 4 liegt.
4 ist im Bereich R nicht Nachfolger von 3, denn es gibt z.B. die Zahl 3,5 (8,5 $\in R$), die zwischen 3 und 4 liegt.

Vorgänger

▶ Definition:
Es seien a, b Elemente eines bestimmten Zahlenbereiches Z. b heißt Vorgänger von a innerhalb des Bereiches Z genau dann, wenn $b < a$ ist und es keine Zahl c $(c \in Z)$ mit $b < c < a$ gibt.

■ 3 ist im Bereich N Vorgänger von 4. 2 ist im Bereich N nicht Vorgänger von 4; denn es gibt die Zahl 3 (3 $\in N$), die zwischen 2 und 4 liegt.

Dichtheit eines Zahlenbereiches

▶ Definition:
Ein Zahlenbereich Z heißt bezüglich der in ihm erklärten Ordnungsrelation überall dicht genau dann, wenn es zu zwei beliebigen Zahlen a, b $(a < b,\ a \in Z,\ b \in Z)$ stets eine Zahl $c \in Z$ gibt, für die gilt $a < c < b$.

■ Die Zahlen des Bereiches R liegen überall dicht, denn seien a, b zwei beliebige rationale Zahlen $(a < b)$, so ist $\frac{a+b}{2} \in R$ und es gilt $a < \frac{a+b}{2} < b$.

↗ Dichtheit des Bereiches der gebrochenen Zahlen, Ma i Üb, Seite 34

Prinzip der kleinsten Zahl

▶ Definition:
In einem Zahlenbereich Z gilt das Prinzip der kleinsten Zahl genau dann, wenn jede nichtleere Teilmenge von Z eine kleinste Zahl besitzt.

Schranken

▶ Definition:
Eine Zahl S ist eine untere Schranke der Menge M genau dann, wenn für jedes $x \in M$ gilt: $S \leq x$.
Eine Zahl S ist eine obere Schranke der Menge M genau dann, wenn für jedes $x \in M$ gilt: $x \leq S$.

Hat eine Menge eine untere Schranke, so heißt sie nach unten beschränkt. Hat eine Menge eine obere Schranke, so heißt sie nach oben beschränkt. Ist eine Menge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt (unbeschränkt), so sagt man, die Menge ist beschränkt (unbeschränkt).

■ Die Menge der natürlichen Zahlen ist nach unten beschränkt.
Die Menge der negativen ganzen Zahlen ist nach oben beschränkt.
Die Menge der rationalen Zahlen ist unbeschränkt.

Grenzen

▶ Definition:
Eine Zahl G ist obere Grenze einer Menge M genau dann, wenn G die kleinste aller oberen Schranken von M ist. Eine Zahl G ist untere Grenze einer Menge M genau dann, wenn G die größte aller unteren Schranken von M ist.

■ -1 ist untere Schranke von R^*, aber nicht untere Grenze, denn es gibt größere untere Schranken von R^*, z.B. $-\frac{1}{2}$. Die größte untere Schranke von R^* ist 0. Also besitzt R^* die untere Grenze 0.

Satz von der oberen (unteren) Grenze

▶ Satz:
Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine untere Grenze, die selbst wieder eine reelle Zahl ist.
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine obere Grenze, die selbst wieder eine reelle Zahl ist.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen.
Durch die im Satz von der oberen (unteren) Grenze ausgesagte Gesetzmäßigkeit ist der Bereich

der reellen Zahlen gegenüber dem Bereich der rationalen Zahlen abgegrenzt. Dieser Satz gilt nämlich nicht für den Zahlenbereich der rationalen Zahlen. Im Zahlenbereich der rationalen Zahlen gibt es nichtleere, nach unten bzw. oben beschränkte Mengen, die keine untere bzw. obere Grenze im Bereich der rationalen Zahlen besitzen.

■ Q sei die Menge aller rationalen Zahlen x, für die gilt $x^2 < 2$. Diese Menge ist nicht leer. Sie ist nach oben beschränkt, besitzt jedoch keine obere Grenze im Bereich der rationalen Zahlen.

Intervall

Abgeschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$ oder $\langle a; b \rangle$
B: Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x$ und $x \leq b$.

Offenes Intervall $a < x < b$ oder $(a; b)$
B: Menge aller reellen Zahlen x mit $a < x$ und $x < b$.

Halboffenes Intervall $a \leq x < b$ oder $\langle a; b)$
B: Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x$ und $x < b$.

Unendliches Intervall $-\infty < x < +\infty$ oder $(-\infty; \infty)$ bzw. $a \leq x < +\infty$ oder $\langle a; +\infty)$
B:Menge aller reellen Zahlen x ohne Einschränkung bzw. mit $a \leq x$.

A.2. Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die vollständige Induktion (Schluss von n auf $n+1$) Das Verfahren beruht auf dem folgenden Satz.[1]

► Satz:
Die Aussage "Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq n_0$) gilt $H(n)$" ist wahr, wenn die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:
1. $H(n)$ ist wahr für $n = n_0$,
2. Für beliebiges k ($k \in N$; $kgeqn_0$) gilt: Aus der Gültigkeit von $H(k)$ folgt die Gültigkeit von $H(k+1)$.

Beweis:
Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$, für die die Aussage H zutrifft. Zu beweisen ist, dass unter den Voraussetzungen 1. und 2. des Satzes diese Menge M gleich der Menge N' der natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$ ist ($M = N' \subseteq N$).

Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es gilt $M \neq N'$. Sei M die Menge aller natürlichen Zahlen $n \in N'$, auf die die Aussage H nicht zutrifft ($\overline{M} \cap M = \varnothing$). Diese Menge M ist nicht leer, andernfalls wäre $M = N'$.
Nach dem Prinzip der kleinsten Zahl, das im Bereich der natürlichen Zahlen gilt, besitzt $\overline{M}$ also eine kleinste Zahl $\overline{m}$, auf die H nicht zutrifft. Dann ist $\overline{m} \neq n_0$, da nach Voraussetzung 1. $H(n_0)$ wahr ist.

Da $\overline{m} \neq n_0$, besitzt $\overline{m}$ einen Vorgänger $(\overline{m}-1)$. Auf $(\overline{m}-1)$ trifft aber die Aussage H zu, denn $\overline{m}$ war die kleinste Zahl, auf die H nicht zutrifft.
Wenn H auf $(\overline{m}-1)$ zutrifft, dann trifft H nach Voraussetzung 2. auch auf den Nachfolger von $\overline{m}-1$, also auf $(\overline{m}-1)+1 = \overline{m}$ zu. Wir erhalten also aus der Annahme $M \neq N'$ die

[1] Bei der Anwendung dieses Satzes werden im allgemeinen folgende Bezeichnungen verwendet: "Induktionsanfang" für Voraussetzung 1., "Induktionsschritt" für Voraussetzung 2., "Induktionsvoraussetzung" für $H(k)$, "Induktionsbehauptung" für $H(k+1)$.

Aussage: H trifft auf $\overline{m}$ zu, und H trifft auf $\overline{m}$ nicht zu.
Das ist ein Widerspruch. Also müssen wir die Annahme $M \neq N'$ fallen und es gilt folglich $M = N'$.

Beispiele für Beweise durch vollständige Induktion

Es ist der Satz zu beweisen:
Für alle natürlichen Zahlen gilt $H(n)$: $\sum\limits_{i=0}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:
1. Induktionsanfang:
Es ist zu zeigen, dass die Aussage $H(n)$ für $n = 0$ gilt, d. h. dass gilt $\sum\limits_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}$.
Diese Aussage ist wahr, denn $\sum\limits_{i=0}^{n} i = 0$ und $\frac{0(0+1)}{2} = 0$.

2. Induktionsschritt:
Es ist zu zeigen, dass für jedes $k \in N$ gilt: Aus der Gültigkeit von $H(k)$, d. h. von
$\sum\limits_{i=0}^{k} i = \dfrac{k(k+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung),
folgt die Gültigkeit von $H(k+1)$, d. h. von
$\sum\limits_{i=0}^{k+1} i = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ (Induktionsbehauptung).

Beweis des Induktionsschrittes:

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$
$$\sum_{i=0}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$\sum_{i=0}^{k+1} i = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$
$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Das ist die Induktionsbehauptung. Wegen der Gültigkeit der beiden Voraussetzungen 1. und 2. des Satzes gilt $H(n)$ für alle natürlichen Zahlen.

■ Es ist der Satz zu beweisen:
Die Anzahl $D(n)$ der Diagonalen in einem konvexen ebenen n-Eck kann nach der Formel

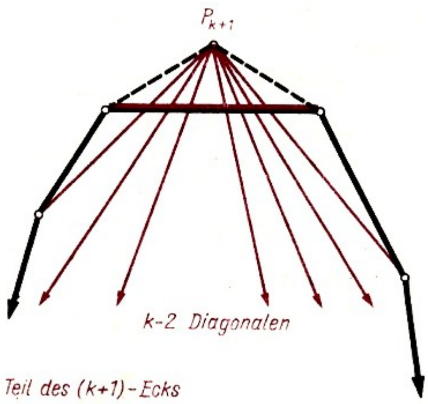
$$D(n) = \frac{n}{2}(n-3), \qquad n \geq 3$$

berechnet werden.

Beweis:
1. Induktionsanfang
Die Formel gilt für $n = 3$, d. h., es gilt $D(3) = \frac{3}{2}(3-3)$. Die Aussage ist wahr, denn ein Dreieck hat keine Diagonale, also $D(3) = 0$.

2. Induktionsschritt

Es ist zu zeigen, dass für alle $k \in N$, $k \geq 3$ gilt: Aus der Gültigkeit von $D(k) = \frac{k}{2}(k-3)$ folgt die Gültigkeit von $D(k+1) = \frac{k+1}{2}[(k+1)-3]$.



Beweis des Induktionsschrittes:
Ein $(k+1)$-Eck geht aus einem k-Eck dadurch hervor, dass ein weiterer Punkt P_{k+1} als Eckpunkt hinzugefügt wird.
Dann wird erstens eine Seite des k-Ecks selber zu einer Diagonalen des $(k+1)$-Ecks, und zweitens können von diesem $(k+1)$-ten Eckpunkt zu $k-2$ Eckpunkten des konvexen k-Ecks Diagonalen gezogen werden. Die Anzahl der Diagonalen des $(k+1)$-Ecks ist demnach um $1+(k-2) = k-1$ größer als die Anzahl der Diagonalen des k-Ecks.

$$\begin{aligned} D(k+1) = D(k) + k - 1 = \frac{k}{2}(k-3) + k - 1 &= \frac{k(k-3)+2k-2}{2} \\ &= \frac{k(k+1-3)+2k-k-3+1}{2} = \frac{k(k+1-3)+1(k+1-3)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2}(k+1-3) \end{aligned}$$

Da beide Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, gilt die Formel für alle $n \in N$ mit $n \geq 3$.

Induktive Definition

Mit Hilfe der Methode der induktiven Definition (auch rekursive Definition genannt) lassen sich Funktionen definieren, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist. Die Methode der induktiven Definition beruht auf dem folgenden Satz.

► Satz:
Es gibt genau eine Funktion f mit der Menge der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich (sie besteht folglich aus geordneten Paaren $[n; f(n)]$, $n \in N$), für die folgendes gilt:

1. Der Funktionswert $f(0)$ ist gleich einer bestimmten reellen Zahl y_0 ($f(0) = y_0$, $y_0 \in P$).
2. Mit Hilfe einer gegebenen Vorschrift lässt sich für beliebiges $n \in N$ der Funktionswert $f(n+1)$ aus dem Funktionswert $f(n)$ berechnen.

Diese Vorschrift nennt man auch, wenn sie eine Gleichung ist, Rekursionsgleichung.

■ Potenzen $a^n (a \in P, a \neq 0, n \in N)$[2] sind die Funktionswerte der Funktion f mit den geordneten Paaren $[n; f(n)]$ bzw. $[n; a^n]$, für die gilt:
1. $f(0) = 1$,
2. $f(n+1) = a \cdot f(n) \quad (a \neq 0)$
bzw., mit dem Symbol a^n geschrieben,
1. $a^0 = 1$,
2. $a^{n+1} = a \cdot a^n$

■ Fakultäten $n!$ ($n \in N$) sind die Funktionswerte der Funktion f mit den geordneten Paaren $[n; f(n)]$ bzw. $[n; n!]$, für die gilt:
1. $f(0) = 1$,

[2] Für $a = 0$ gilt $0^n = 0$ für alle $n > 0$; 0^0 ist nicht definiert.

2. $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$
bzw., mit dem Symbol $n!$ geschrieben,
1. $0! = 1$,
2. $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

Durch diese induktiven Definitionen werden solche Plausibilitätsbetrachtungen wie

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \in N, n \geq 2)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n^-1) \cdot n \quad (n \in N)$$

durch präzise Definitionen ersetzt. Dadurch erhält man eine exakte Grundlage für das Beweisen von Sätzen, beispielsweise über Potenzen.

■ Es ist der Satz zu beweisen:
Für alle a,$b \in P$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ und allen $(n \in N)$ gilt:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Beweis durch vollständige Induktion:
1. Induktionsanfang
Es ist zu beweisen: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ gilt für $n = 0$, d.h., es gilt $a^0 \cdot b^0 = (a + b)^0$.
Das ist eine wahre Aussage; denn es ist $a^0 \cdot b^0 = 1$ und $(a \cdot b)^0 = 1$.

2. Induktionsschritt
Es ist zu beweisen: Für beliebiges $k \in N$ gilt:
Aus der Gültigkeit von $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$ (Induktionsvoraussetzung) folgt die Gültigkeit von $a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^{k+1}$ (Induktionsbehauptung).

Beweis:

$$\begin{aligned} a^{k+1} \cdot b^{k+1} &= (a \cdot a^k)(b \cdot b^k k) && \text{(nach Rekursionsgleichung)} \\ &= (a \cdot b)(a^k \cdot b^k) && \text{(nach Kommutativgesetz und Assoziativgesetz)} \\ &= (a \cdot b)(a \cdot b)^k && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (a \cdot b)^{k+1} && \text{(nach Rekursionsgleichung)} \end{aligned}$$

Damit ist dieser Satz bewiesen.

Summenzeichen

Der griechische Buchstabe Sigma ($\sum$) wird für eine verkürzte Schreibweise von Summen herangezogen.

▶ Definition:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

(i ist Summationsindex, $m \leq n$), (lies: Summe über a_i für i gleich m bis n)

■ $0 + 1 + 2 + ... + n = \sum\limits_{i=0}^{n} i$

$\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a + \frac{4}{5}a + ... + \frac{16}{17}a = \sum\limits_{i=2}^{16} \frac{i}{i+1}a$

$3^0 + 3^{+}3^2 + ... + 3^n) \sum\limits_{i=0}^{n} 3^i$

Einige Beispiele für das Rechnen mit dem Summenzeichen:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha = n \cdot \alpha \quad (\alpha$ konstant$), \qquad \sum\limits_{i=p}^{q} \alpha = (q-p+1)n\alpha \quad (q \geq p,\ \alpha$ konstant$)$

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, \qquad \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \sum\limits_{i=0+k}^{n} +ka_{i-k}, \qquad$ (Indexverschiebung)

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \quad (\alpha$ konstant$) \qquad \sum\limits_{i=k}^{l} \alpha a_i + \sum\limits_{i=l+1}^{n} \alpha a_i = \sum\limits_{i=k}^{n} \alpha a_i$

Binomialkoeffizienten

▶ Definition[3]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (n \in N, k \in N, k \leq n)$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1 \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

▶ Satz:

Für alle $n \in N$ und alle $k \in N$ gilt:

$$(1) \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{n-k} \quad (k \leq n) \qquad , \qquad (2) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (k < n)$$

Beweis:

Aufgrund der Definition des Binomialkoeffizienten gelten für alle $n \in N$ und alle $k \in N$ unter Berücksichtigung der Einschränkungen ($k \leq n$ bzw. $k < n$) die folgenden Umformungen:

$$(1) \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)} = \frac{n!(k+1+n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) bringt in gewisser Weise eine Symmetrie zum Ausdruck: Schreibt man alle Binomialkoeffizienten zu einer bestimmten natürlichen Zahl n in eine Reihe, dann sind stets die k-ten Binomialkoeffizienten von links und rechts einander gleich.

[3] Sprechweise für $\binom{n}{k}$: "n über k"

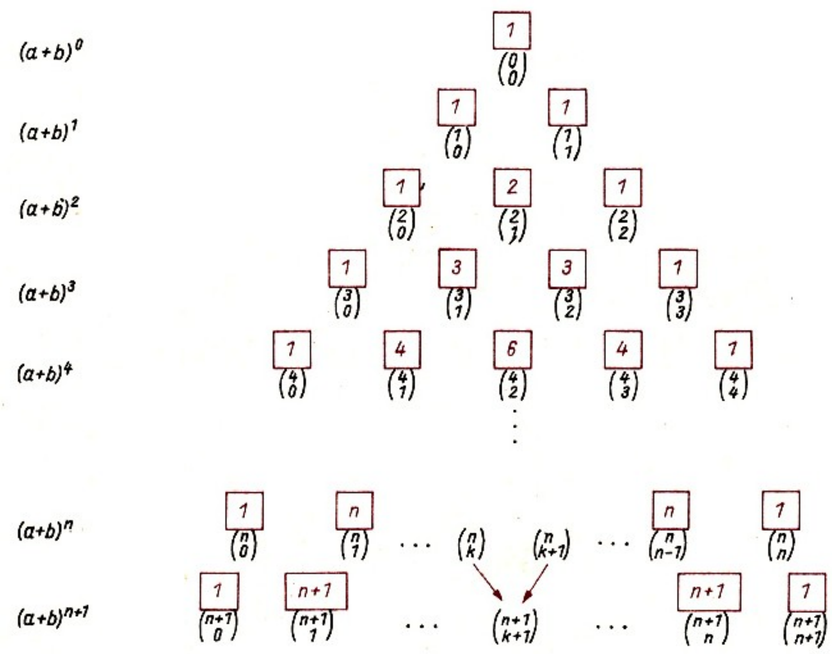
Die Gleichung (2) ist in gewissem Sinne eine Rekursionsgleichung, nach der man Binomialkoeffizienten $(n+1)$-ter Ordnung aus Binomialkoeffizienten n-ter Ordnung berechnen kann.

Pascalsches Dreieck

Das Pascalsche Dreieck kann zur Ermittlung der Koeffizienten, die bei der Berechnung der binomischen Formeln

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

usw. auftreten, herangezogen werden.



Der binomische Satz

► Satz:
Für alle $a, b \in P$ und für alle $n \in N$, $n \neq 0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

A.3. Zahlenfolgen

Zahlenfolge

► Definition:
Eine Zahlenfolge ist eine Funktion, deren Definitionsbereich gleich der Menge der natürlichen Zahlen N oder gleich einer echten Teilmenge N' von N ist.

Ist N' endlich, so heißt die Zahlenfolge endlich.
Diese Funktion "Zahlenfolge" besitzt die geordneten Paare $[k; f(k)]$ mit $k \in N$ bzw. mit $k \in N'$.

Bei nicht endlichen Zahlenfolgen wird als Definitionsbereich N' sehr oft die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl Null gewählt. Die Funktionswerte $f(k)$ heißen Glieder der Folge. Sie werden gewöhnlich mit a_k bezeichnet, d. h., die Zuordnung zu den natürlichen Zahlen wird durch den Index k zum Ausdruck gebracht.

Schreibweise für Zahlenfolgen:
(a_k), $k \in N$ oder $a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...$
bzw., wenn der Definitionsbereich die Null nicht enthält,
(a_k), $k \in N$, $k > 0$ oder $a_1, a_2, ..., a_k, ...$

■ $\left(\frac{1}{k+1}\right)$, $k \in N$ (Null gehört zum Definitionsbereich)

a_0	a_1	a_2	a_3	...
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

■ $\left(\frac{1}{k}\right)$, $k > 0, k \in N$ (Null gehört nicht zum Definitionsbereich)

a_1	a_2	a_3	a_4	...
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Explizite Bildungsvorschrift für Folgen Mittels eines Terms $a(k)$ wird die Bildungsvorschrift für das allgemeine Glied a_k festgelegt.

■

allgemeines Glied a_k, $k \in N$	Zahlenfolge (a_k), $k \in N$	$a_0, a_1, ..., a_k, ...$
$a_k = \frac{1}{k+1}$	$\left(\frac{1}{k+1}\right)$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...$
$a_k = (-1)^k$	$\left((-1)^k\right)$	$1, -1, 1, ..., (-1)^k, ...$
$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \left(\frac{1}{2}\right)^2, ...$
$a_k = k^2$	(k^2)	$0, 1, 4, ..., k^2, ...$
$a_k = 3k + 2$	$(3k + 2)$	$2, 5, 8, ..., 3k + 2, ...$

Rekursive Bildungsvorschrift für Folgen

Die Folge wird durch eine induktive Definition festgelegt.

■ $a_0 = 0, a_{k+1} = 1 + a_k$, $k \in N$, $\quad (0,1,2,3,...)$
$a_0 = a, a \neq 0, a_{k+1} = qa_k$, $k \in N$, $q \neq 0$, $\quad (a, aq, aq^2, aq^3, ...)$

Man kann in einer Reihe von Fällen zu einer rekursiven Bildungsvorschrift eine explizite Bildungsvorschrift angeben, durch die die gleiche Folge definiert wird.

■

(1) Rekursive Bildungsvorschrift	(2) Explizite Bildungsvorschrift
$a_0 = a$, $a \neq 0$, $a_{k+1} = qa_k, k \in N, q \neq 0$	$a_n = a \cdot q^n, n \in N, q \neq 0$

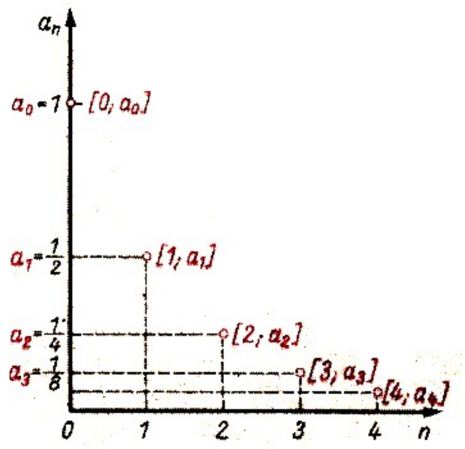
Beweis: (durch vollständige Induktion)
1. Induktionsanfang
$a_0 = a \cdot q^0$. Diese Gleichung gilt entsprechend der rekursiven Bildungsvorschrift, da $q^0 = 1$ und folglich a$_0 = a$.
2. Induktionsschritt
Für alle $k \in N$ gilt: Aus $a_k = a \cdot q^k$ (Induktionsvoraussetzung) folgt $a_{k+1} = a \cdot q^{k+1}$ (Induktionsbehauptung).

Beweis:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= q \cdot a_k && \text{(rekursive Bildungsvorschrift)} \\ &= q \cdot aq^k && \text{(entsprechend der Induktionsvoraussetzung)} \\ &= aq^{k+1} \end{aligned}$$

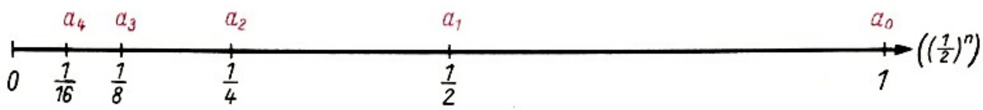
Graphische Darstellung von Zahlenfolgen

Benutzt man die Darstellung von Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem, so erhält man als Graph von Folgen diskrete Punkte.



$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right), n \in N$
In der Abbildung wurden einige geordnete Paare dieser Folge dargestellt.

Häufig stellt man nur die Glieder der Folge auf der Zahlengeraden dar. Das sind eigentlich die Funktionswerte, dargestellt auf der Ordinatenachse.



Monotonie von Folgen

▶ Definition:
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt monoton wachsend genau dann, wenn für jedes k, $k \in N$, gilt $a_k < a_{k+1}$.
Eine Zahlenfolge (a_k) heißt monoton fallend genau dann, wenn für jedes k, $k \in N$, gilt $a_k > a_{k+1}$.

■ Die Folge $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ ist monoton fallend, denn für jedes $k \in N$ gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
Die Folge $(3k+2)$ ist monoton wachsend, denn es gilt für jedes $k \in N$ $a_{k+1} - a_k)3 > 0$, also $a_{k+1} > a_k$.
Die Folge $\left((-1)^k\right)$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend, denn $a_{k+1} - a_k = \begin{cases} -2 & \text{für gerades } k \\ +2 & \text{für unngerades } k \end{cases}$.

Schranken von Folgen

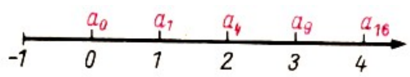
▶ Definition:
S heißt obere Schranke einer Folge (a_k) genau dann, wenn für jedes k, $k \in N$, gilt $a_k \leq S$.
S heißt untere Schranke einer Folge (a_k) genau dann, wenn für jedes k, $k \in N$, gilt $a_k \geq S$.

Hat eine Folge eine untere (obere) Schranke, so heißt sie nach unten (oben) beschränkt.
Man nennt eine Folge beschränkt (unbeschränkt), wenn sie nach unten und oben (weder nach unten noch nach oben) beschränkt ist.

Grenzen von Folgen

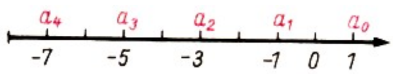
▶ Definition:
G heißt obere Grenze einer Folge (a_k) genau dann, wenn G die kleinste aller oberen Schranken von (a_k) ist.
G heißt untere Grenze einer Folge (a_k) genau dann, wenn G die größte aller unteren Schranken von (a_k) ist.

■ 1. $(a_k) = (\sqrt{k})$, $k \in N$



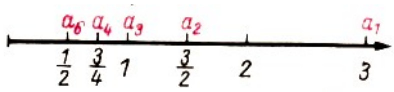
Die Folge ist nach unten beschränkt. Untere Schranken sind alle negativen Zahlen. Untere Grenze ist 0. Die Folge ist nicht nach oben beschränkt.

2. $(a_k) = (1 - 2k)$, $k \in N$



Die Folge ist nach oben beschränkt. Obere Schranken sind alle Zahlen $S > 1$. Obere Grenze ist 1. Die Folge ist nicht nach unten beschränkt.

3. $(a_k) = \left(\frac{3}{k}\right)$ $k \in N$, $k > 0$



Die Folge ist beschränkt. Obere Schranken sind alle Zahlen $S \geq 3$. Obere Grenze ist 3. Untere Schranken sind alle negativen Zahlen. Untere Grenze ist 0.

Arithmetische Folge

▶ Definition:
Eine Folge (a_k) heißt arithmetische Folge genau dann, wenn die Differenz zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder gleich einer Konstanten (d. h. von k unabhängigen) Zahl $d \in P$ ist:

$$a_{k+1} - a_k = d \qquad , \qquad a, a+d, a+2d, ..., a+nd$$

Rekursive Bildungsvorschrift	Explizite Bildungsvorschrift
$a_0 = a, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a + nd \quad (n = 0,1,2,...)$
$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,2,...)$

Die geordneten Paare der Folge $(a+nd)$, $n \in N$, sind eine Teilmenge der Menge der geordneten Paare der Funktion $y = dx + a$. Der Graph der Folge $(a + nd)$, $n \in N$, besteht aus diskreten Punkten, die auf dem Graph der Funktion $y = dx + a$ liegen.
Falls $d < 0$, fällt die Folge monoton und ist nach oben beschränkt.
Falls $d > 0$, wächst die Folge monoton und ist nach unten beschränkt.

Beispiele für arithmetische Folgen

■ Die Radien r_k der Lagen auf einer Rolle Papier bilden eine arithmetische Folge, denn

$r_{k+1} - r_k = s$. (s ist die Stärke des Papiers.) Wir denken uns die Papierbahn durch einzelne konzentrische Papierzylinder ersetzt. Das allgemeine Glied ist
$r_k = r_1 + (k-1)s$,
wobei r_1 der Radius der Trommel ist, auf der das Papier aufgewickelt ist. Die Längen u_k der einzelnen Lagen bilden auch eine arithmetische Folge, denn $u_{k+1} - k_k = 2\pi s$. Das allgemeine Glied ist $u_k = 2\pi r_1 + (k-1)2\pi s$.

■ Beim freien Fall bilden die Fallgeschwindigkeiten nach 1 s, 2 s, 3 s, ..., k s eine arithmetische Folge. $v_k = g \cdot k$, $g = 9{,}81$ ms^{-2}.
Die Differenz der Fallgeschwindigkeiten beträgt 9,81 ms^{-1}.

Geometrische Folge

▶ Definition:
Eine Folge (a_k), $a_k \neq 0$, heißt geometrische Folge genau dann, wenn der Quotient zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder gleich einer konstanten (d. h. von k unabhängigen) Zahl $q \in P$, $q \neq= 0$ ist:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q \qquad , \qquad a, aq, aq^2, ..., aq^n, ...$$

Rekursive Bildungsvorschrift	Explizite Bildungsvorschrift
$a_0 = a, a_{n+1} = q \cdot a_n$	$a_n = a \cdot q^n \quad (n = 0{,}1{,}2{,}...)$
$a_1 = a, a_{n+1} = q \cdot a_n$	$a_n = a \cdot q^{n-1} \quad (n = 1{,}2{,}...)$

Die geordneten Paare der Folge (aq^n), $n \in N$, sind eine Teilmenge der Menge der geordneten Paare der Funktion $y = aq^x$. Der Graph der Folge (aq^n), $n \in N$, besteht aus diskreten Punkten, die auf dem Graph der Funktion $y = aq^x$ liegen.

q	a	Monotonie	Beschränktheit	Obere Grenze	Untere Grenze
$q > 1$	$a > 0$	monoton wachsend	nach unten beschränkt	-	a
$q > 1$	$a < 0$	monoton fallend	nach oben beschränkt	a	-
$0 < q < 1$	$a > 0$	monoton fallend	beschränkt	a	0
$0 < q < 1$	$a < 0$	monoton wachsend	beschränkt	0	a
$-1 < q < 0$	$a \neq 0$	alternierend	beschränkt	$\|a\|$	$-\|a\|$
$q < -1$	$a \neq 0$	alternierend	unbeschränkt	-	-

Eine Folge heißt alternierend, wenn positive und negative Glieder einander abwechseln.

Beispiele für geometrische Folgen

■ Die Drücke, die jeweils nach einem Kolbenhub einer Vakuumpumpe im Rezipienten herrschen, bilden eine geometrische Folge. Es sei
V_0 das Volumen des Rezipienten, V_h das Hubvolumen der Vakuumpumpe, p_k der Druck im Rezipienten am Beginn des $(k+1)$-ten Hubs.

Dann gilt nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte (unter Annahme konstanter Temperatur)

$$p_k \cdot V_0 = p_{k+1}(V_0 + V_h) \qquad , \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{V_0}{V_0 + V_h}$$

$\frac{V_0}{V_0+V_h}$ ist eine von k unabhängige konstante Zahl.
Allgemeines Glied: $p_k = \left(\frac{V_0}{V_0+V_h}\right)^k \cdot p_0$. $(k = 0{,}1{,}2...)$
p_0 ist der Druck im Rezipienten zu Beginn des Pumpvorganges.
↗ Zustandsgleichung für das ideale Gas, Wiss Ph, Seite 158 (Boylesches Gesetz)

■ Die jährlichen Produktionsmengen (gemessen in Stück oder in Mark) eines bestimmten Warensortiments bilden eine geometrische Folge, falls eine konstante jährliche Zuwachsrate vorliegt.
G_0 die Produktionsmenge in einem bestimmten Ausgangsjahr,
p der Prozentsatz der jährlichen Produktionszunahme,
G_k die Jahresproduktion im k-ten Jahr nach dem Ausgangsjahr.
Dann gilt

$$G_{k+1} = G_k\left(1+\frac{p}{100}\right) \qquad , \qquad \frac{G_{k+1}}{G_k} = 1+\frac{p}{100}$$

$1+\frac{p}{100}$ ist unabhängig von k.
Allgemeines Glied: $G_k = G_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^k$, $(k = 0{,}1{,}2...)$

■ Die Anzahlen noch nicht zerfallener Atome eines radioaktiven Isotops zu den Zeitpunkten, die gleich Vielfachen der Halbwertzeit nach einem bestimmten Ausgangszeitpunkt sind, bilden eine geometrische Folge.
Es sei
T die Halbwertzeit eines radioaktiven Isotops,
N_0 die Anzahl noch nicht zerfallener Atome zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt,
N_k die Anzahl noch nicht zerfallener Atome zum Zeitpunkt $k \cdot T$ nach dem bestimmten Anfangszeitpunkt.
Dann gilt

$$N_{k+1} = \frac{1}{2}N_k \qquad , \qquad \frac{N_{k+1}}{N_k} = \frac{1}{2}$$

Allgemeines Glied: $N_k = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^k$, $(k = 0{,}1{,}2, ...)$

Partialsummen[4]

▶ Definition:
Ist (a_k), $k \in N$, $k > 0$, eine Folge, so heißt $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ eine Partialsumme der Folge (a_k).
Analog heißt $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ eine Partialsumme der Folge (a_k), falls $k \in N$, also ohne Ausschließung der Null im Definitionsbereich der Folge.

	Allgemeines Glied	Partialsumme
Arithmetische Folge	$a_k = a + (k-1)d$ $k \in N, k > 0, a{,}d \in P$	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = na + \frac{n(n-1)}{2}d$
Geometrische Folge	$a_k = aq^{k-1}$ $k \in N, k > 0, a{,}d \in P$	$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a\frac{q^n-1}{q-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$

[4] pars (lat.) - Teil

	Allgemeines Glied	Partialsumme
Folge der natürlichen Zahlen	$a_k = k; k \in N$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Folge der Quadratzahlen	$a_k = k^2; k \in N$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Folge der Kubikzahlen	$a_k = k^3; k \in N$	$\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Alle Formeln zur Berechnung der Partialsummen der angegebenen Folgen lassen sich mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen.

B. Funktionen und Gleichungen

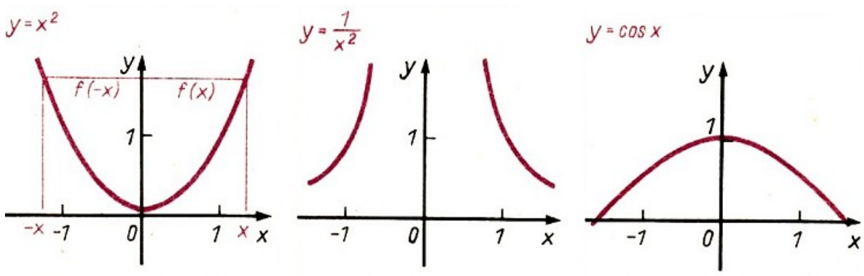
B.1. Allgemeines über Funktionen

Übersicht über wesentliche Eigenschaften der Funktionen

Eigenschaften von f an einer bestimmten Stelle x_0 des Definitionsbereiches von f	Eigenschaften von f in einem bestimmten Intervall des Definitionsbereiches von f
Existenz einer Nullstelle	Funktion ist gerade oder ungerade
Existenz eines Pols	Periodizität
Existenz eines Grenzwertes	
Stetigkeit	Stetigkeit
Differenzierbarkeit	Differenzierbarkeit
Lokale Monotonie	Monotonie
Lokale Konvexität und Konkavität	Konvexität und Konkavität
Existenz eines Wendepunktes	Existenz des bestimmten Integrals
Existenz eines lokalen Extremspunktes	Existenz des unbestimmten Integrals

Gerade Funktionen

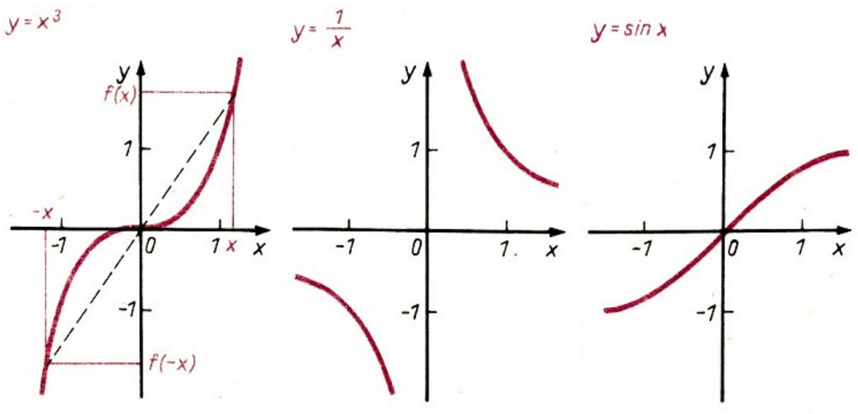
▶ Definition:
Eine Funktion f ist gerade genau dann, wenn für alle x des Definitionsbereiches D gilt: $-x \in D$ und $f(-x) = f(x)$.
Das Bild einer geraden Funktion ist symmetrisch zur Ordinatenachse.



■

Ungerade Funktionen

▶ Definition:
Eine Funktion f ist ungerade genau dann, wenn für alle x des Definitionsbereiches D gilt: $-x \in D$ und $f(-x) = -f(x)$.
Das Bild einer ungeraden Funktion ist zentralsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.



■

↗ Radiale Symmetrie (siehe zentralsymmetrisch)

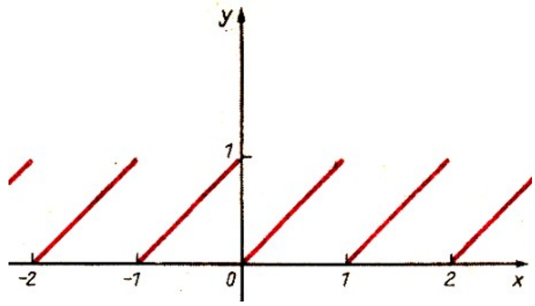
Periodizität

▶ Definition:
Eine Funktion f (Definitionsbereich D) ist periodisch genau dann, wenn es eine reelle Zahl $p > 0$ derart gibt, dass für alle $x \in D$ gilt:
$x + p \in D$ und $f(x + p) = f(x)$.
Die Zahl p heißt Periode von f.

Da mit p auch $k \cdot p$ für jedes natürliche $k > 0$ eine Periode von f ist, hat eine periodische Funktion unendlich viele Perioden. Falls unter ihnen eine kleinste existiert, so gibt man i. a. nur diese als "die Periode von f" an.

■

Winkelfunktionen	$f(x+p) = f(x)$	kleinste Periode
$y = \sin x$	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$	2π
$y = \cos x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$	2π
$y = \tan x$	$\tan(x + \pi) = \tan x$	π
$y = \cot x$	$\cot(x + \pi) = \cot x$	π

■ 

$y = x - n$ für $n \leq x < n + 1$, $n \in G$, $-\infty < x < \infty$
Es gilt $f(x + 1) = f(x)$; kleinste Periode von f ist 1.

Neubildung von Funktionen

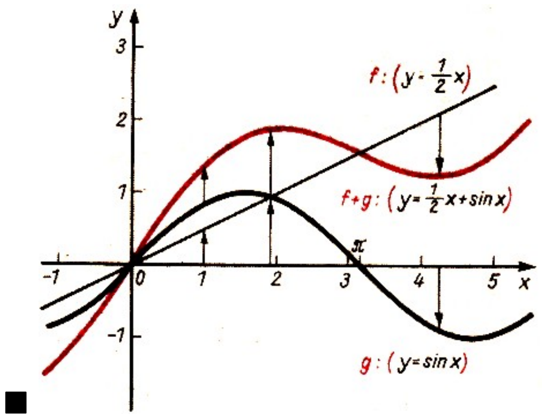
Aus gegebenen Funktionen lassen sich neue Funktionen bilden
1. durch rationale Rechenoperationen,
2. durch Bilden der Umkehrfunktion,
3. durch Verketten von Funktionen.

Rationale Operationen mit Funktionen

▶ Definition:
Es seien f und g Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich D. Dann sind

$$(1)\ s = f + g, \quad (2)\ d = f - g, \quad (3)\ p = f \cdot g, \quad \text{und} \quad (4)\ q = \tfrac{f}{g}$$

ebenfalls Funktionen, die aus der Menge folgender geordneter Paare gebildet werden:
(1) $s = f + g$ mit $[x; f(x) + g(x)]$ für jedes $x \in D$,
(2) $d = f - g$ mit $[x; f(x) - g(x)]$ für jedes $x \in D$,
(3) $s = f \cdot g$ mit $[x; f(x) \cdot g(x)]$ für jedes $x \in D$,
(4) $s = \frac{f}{g}$ mit $\left[x; \frac{f(x)}{g(x)}\right]$ für jedes $x \in D$ und $g(x) \neq 0$

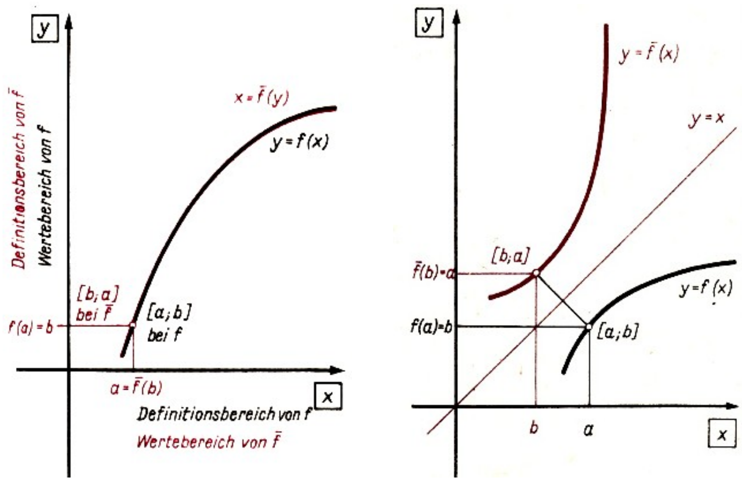


$f(x) = \frac{1}{2}x$, $-\infty < x < \infty$; $g(x) = \sin x$, $-\infty < x < \infty$
Gemeinsamer Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$
$s(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2} + \sin x$

Zueinander inverse Funktionen

► Definition:
Zwei Funktionen f und $\overline{f}$ sind zueinander invers genau dann, wenn die beiden Mengen geordneter Paare von f und $\overline{f}$ folgende Eigenschaft haben:
Für jedes geordnete Paar $[a; b]$ gilt: $[a; b] \in f$ genau dann, wenn $[b; a] \in \overline{f}$.

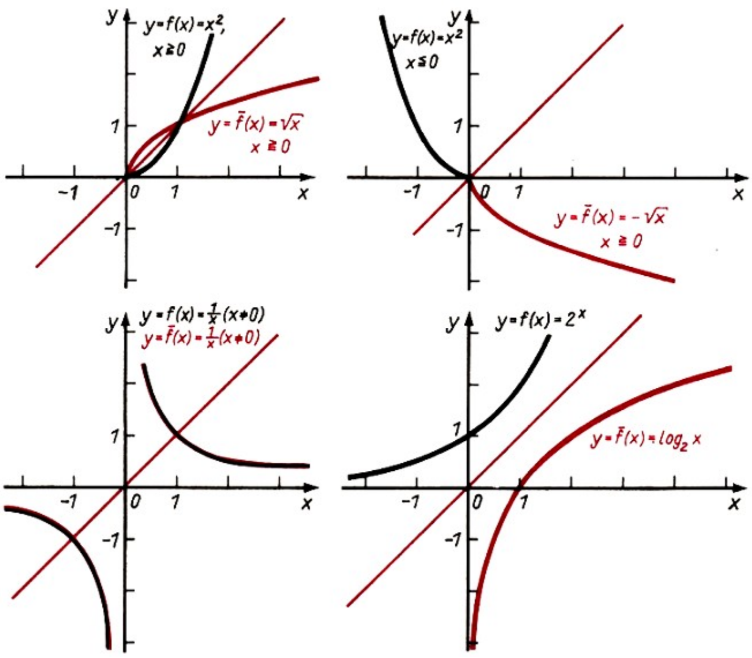
Die Mengen geordneter Paare von f und $\overline{f}$ gehen demnach durch Vertauschen der Komponenten jedes Paares auseinander hervor.
Die Graphen zweier zueinander inverser Funktionen f und $\overline{f}$ können auf zwei verschiedene Weisen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dargestellt werden.



1. Möglichkeit (Abbildung links oben):
Die Graphen von f und $\overline{f}$ sind identisch. Die Bedeutung der Koordinatenachsen ist für f und $\overline{f}$ unterschiedlich:
Die x-Achse entspricht für f dem Definitionsbereich von f, für $\overline{f}$ dem Wertebereich von $\overline{f}$.
Die y-Achse entspricht für f dem Wertebereich von f, für $\overline{f}$ dem Definitionsbereich von $\overline{f}$.

2. Möglichkeit (Abbildung rechts oben):
Die Bedeutung der Koordinatenachsen ist für f und $\overline{f}$ gleich:
Die x-Achse entspricht dem Definitionsbereich von f und $\overline{f}$.
Die y-Achse entspricht dem Wertebereich von f und $\overline{f}$.
Die Graphen von f und $\overline{f}$ sind nicht identisch Sie liegen axialsymmetrisch zur Geraden $y = x$.

Zueinander inverse Funktionen f und $\overline{f}$				
Definitionsbereich von f	Gleichung von f	Wertebereich von f - DB von $\overline{f}$	Gleichung von $\overline{f}$	Wertebereich von $\overline{f}$
$-\infty < x < \infty$	$y = 3x$	$-\infty < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \frac{x}{3}$	$-\infty < y < \infty$
$-\infty < x < \infty$	$y = 3ax + b$ $a \neq 0$	$-\infty < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \frac{x-b}{a}$	$-\infty < y < \infty$
$0 \leq< x < \infty$	$y = x^2$	$0 \leq \frac{y}{x} < \infty$	$y = \sqrt{x}$	$0 \leq< y < \infty$
$-\infty < x < 0$	$y = x^2$	$0 < \frac{y}{x} < 0$	$y = -\sqrt{x}$	$-\infty < y < 0$
$-\infty < x < \infty$	$y = x^3$, $a \neq 0$	$-\infty < y < \infty$ $0 \leq x < \infty$ $-\infty < x < 0$	$y = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$ $y = -\sqrt[3]{-x}$, $x < 0$	$-\infty < y < \infty$
$x \in P$, $x \neq 0$	$y = \frac{1}{x}$ $x \in P, x \neq 0$	$y \in P, y \neq 0$	$y = \frac{1}{x}$	$y \in P, y \neq 0$
$0 < x < \infty$	$y = \frac{1}{x^2}$	$-\infty < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$0 < y < \infty$
$-\infty < x < \infty$	$y = 2^x$	$0 < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \log_2 x$	$-\infty < y < \infty$
$-\infty < x < \infty$	$y = e^x$	$0 < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \ln x$	$-\infty < y < \infty$
$-\infty < x < \infty$	$y = a^x$ $a > 0; a \neq 1$	$0 < \frac{y}{x} < \infty$	$y = \log_a x$	$-\infty < y < \infty$



Umkehrfunktion

Die zu f inverse Funktion $\overline{f}$ heißt auch Umkehrfunktion von f.

Satz: Zu jeder eineindeutigen Funktion f existiert die Umkehrfunktion $\overline{f}$.

Funktionen, die nicht eineindeutig sind, besitzen keine Umkehrfunktion. Denn ist f nicht eineindeutig, dann gibt es in der Menge der geordneten Paare von f mindestens zwei Paare der Form $[a_1; b]$, $[a_2; b]$ mit $a_1 \neq a_2$.

In der Menge der geordneten Paare, die durch Vertauschen der Komponenten jedes Paares von f hervorgeht, befinden sich dann die beiden Paare $[b; a_1]$, $[b; a_2]$ mit $a_1 \neq a_2$, d.h., die Abbildung, die durch die Menge der geordneten Paare dargestellt wird, ist keine Funktion, da diese Abbildung nicht eindeutig ist.

Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x) = x^2$, $-\infty < x < \infty$ keine Umkehrfunktion, da jedem x des Definitionsbereiches, außer $x = 0$, genau zwei Funktionswerte zugeordnet sind.

■ Gegeben sei die Funktion f mit der Gleichung $y = 3x + 5$ $(-\infty < x < \infty)$. Gesucht ist die Gleichung der Umkehrfunktion.

Lösung: Die Funktion f ist eineindeutig. Die geordneten Paare von f haben die Form $[a; 3a+5]$ $a \in P$. Alle Paare der Umkehrfunktion $\overline{f}$ haben dann die Form $[3a + 5; a]$ $a \in P$.
Gehen wir nun zu den üblichen Bezeichnungen über, indem wir für das Argument (in unserem Fall $3a+5$) das Zeichen x und für den Funktionswert (in unserem Fall a) das Zeichen y setzen, so erhalten wir $[3y + 5; y] = [x; y]$ und somit $3y + 5 = x$ bzw $y = \frac{x-5}{3}$ als Gleichung für die Funktion $\overline{f}$.

Regel für die Gewinnung der Gleichung der Umkehrfunktion:

Ist die Gleichung einer Funktion f gegeben, $y = f(x)$, und ist die Funktion umkehrbar, dann erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion $y = \overline{f}(x)$, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x, falls es möglich ist, auflöst und die Bezeichnungen für y und x gegeneinander vertauscht.

Verkettung von Funktionen

Das Verketten von Funktionen entspricht dem "Nacheinanderausführen" oder "Zusammensetzen" von Abbildungen.

▶ Definition:
Gegeben seien zwei Funktionen f und g:

Bezeichnung	Gleichung	geordnete Paare
g	$z = g(x)$	$[x; z]$
f	$y = f(z)$	$[z; y]$

Unter der durch Verketten der Funktionen g und f entstehenden Funktion $y = f(g(x))$ verstehen wir die Menge aller geordneten Paare $[x; y]$, für die gilt:
Es gibt ein z derart, dass $[x; z] \in g$ und $[z; y] \in f$. Man bezeichnet g als innere Funktion und f als äußere Funktion.

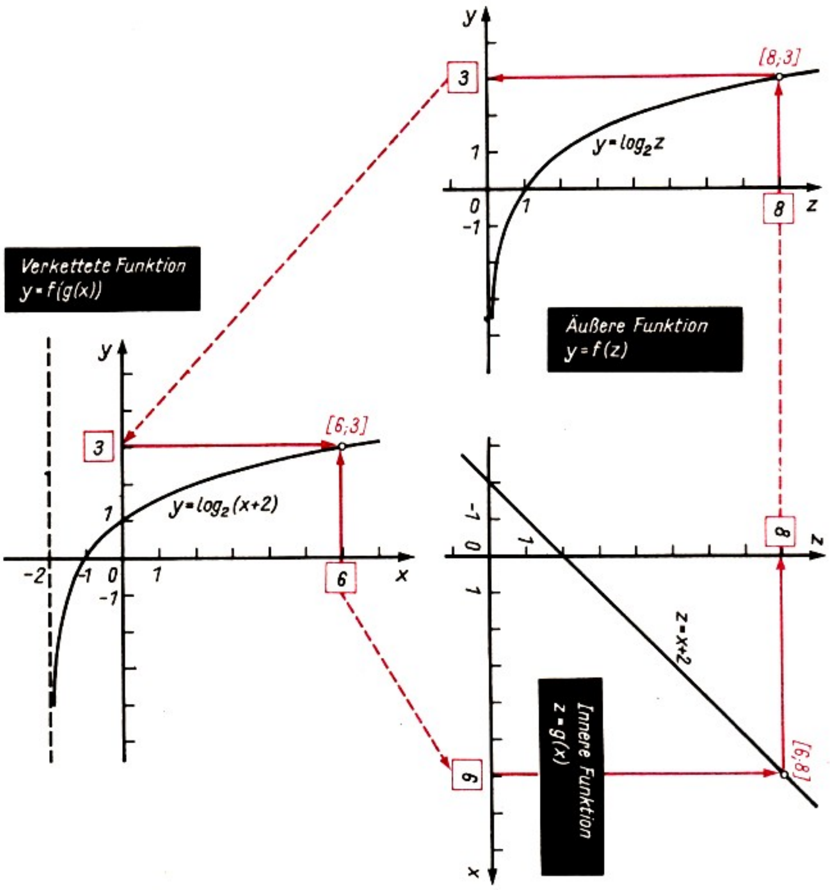
■ Durch Verketten folgender Funktionen soll eine neue Funktion gebildet werden:

innere Funktion $z = x + 2$, $[z = g(x)]$, $(-\infty < x < \infty)$,

äußere Funktion $y = \log_2 z$, $[y = f(z)]$, $(0 < z < \infty)$,

verkettete Funktion $y = \log_2(x + 2)$, $[y = f(g(x))]$, $(-2 < x < \infty)$.

Genau für die z mit $0 < z < \infty$ existiert $\log_2 z$. Also gibt es für $x + 2 > 0$ bzw. für $x > -2$ ein z derart, dass gilt $[x; z] \in g$ und $[z; y] \in f$.

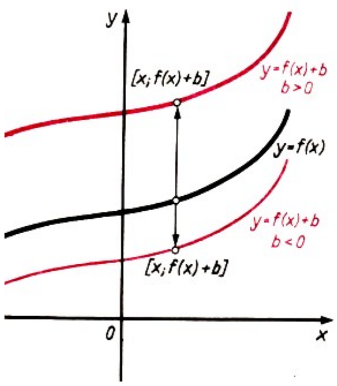


► Satz:
Die Verkettung einer Funktion f und ihrer Umkehrfunktion $\overline{f}$ ergibt die identische Abbildung

$$y = \overline{f}[f(x)] = x$$

Wird nämlich a durch f auf b abgebildet, dann wird b durch $\overline{f}$ auf a abgebildet. Folglich wird a durch $\overline{f}[f(x)]$ wieder auf a, also auf sich selbst, abgebildet.

► Satz:
Gilt für zwei Funktionen f_1 und f_2: $f_1[f_2(x)] = x$ und $f_2[f_1(x)] = x$, dann sind die Funktionen zueinander invers.

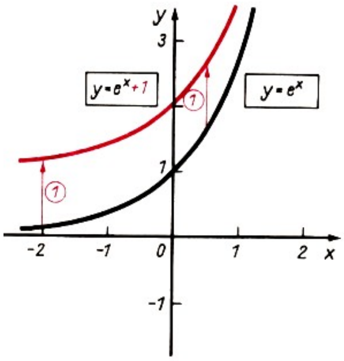


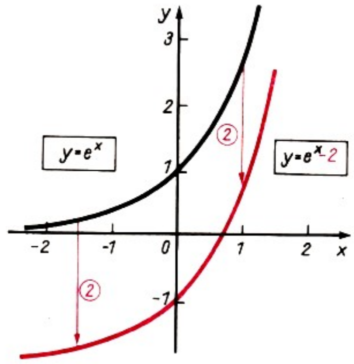
Geometrische Bedeutung der Veränderung von Funktionsgleichungen

Bei den angegebenen Abbildungen der Ebene auf sich wird vorausgesetzt, dass das Koordinatensystem (einschließlich der Länge der Einheiten) hierbei nicht beeinflusst wird.

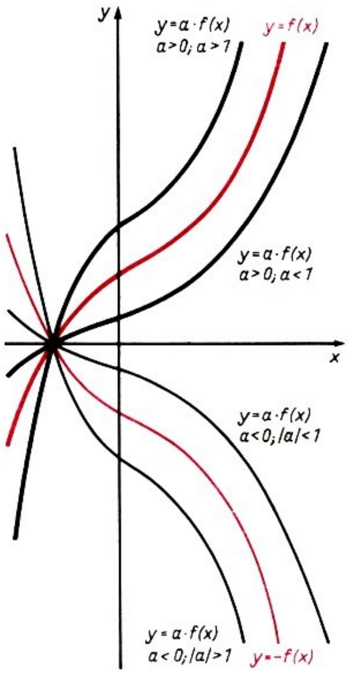
1) $y = f(x) \rightarrow y = f(x) + b$, $(b \in P)$
Der Graph von $y = f(x) + b$ geht aus dem Graph von $y = f(x)$ durch folgende Abbildung der Ebene auf sich hervor:

$b > 0$ Verschiebung in positiver Richtung der Ordinatenachse (Verschiebungsweite b)
$b = 0$ Identische Abbildung
$b < 0$ Verschiebung in negativer Richtung der Ordinatenachse (Verschiebungsweite $|b|$)





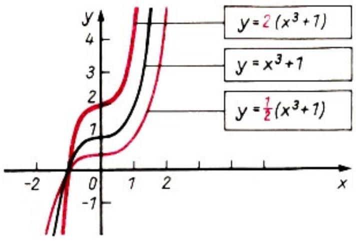
■

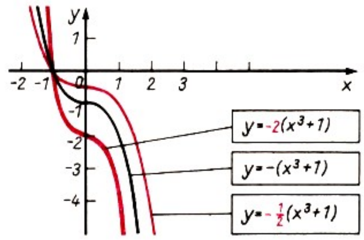


2) $y = f(x) \rightarrow y = a \cdot f(x)$, $(a \in P, a \neq 0)$
Der Graph von $y = a \cdot f(x)$ geht aus dem Graph von $y = f(x)$ durch folgende Abbildung der Ebene auf sich hervor:

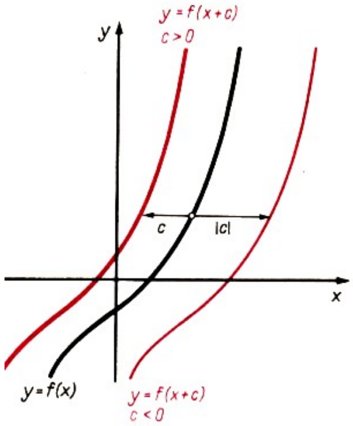
$a > 0, a > 1$ Streckung in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg (Streckungsfaktor $k = a$)
$a = 1$ Identische Abbildung
$a < 1$ Stauchung in Richtung der Ordinatenachse zur Abszissenachse hin (Streckungsfaktor $k = a$)

$a < 0, |a| > 1$ Spiegelung an der Abszissenachse und Streckung in Richtung der Ordinatenachse von der Abszissenachse weg (Streckungsfaktor $k = |a|$)
$a = -1$ Spiegelung an der Abszissenachse
$|a| < 1$ Spiegelung an der Abszissenachse und Stauchung in Richtung der Ordinatenachse zur Abszissenachse hin (Streckungsfaktor $k = |a|$)



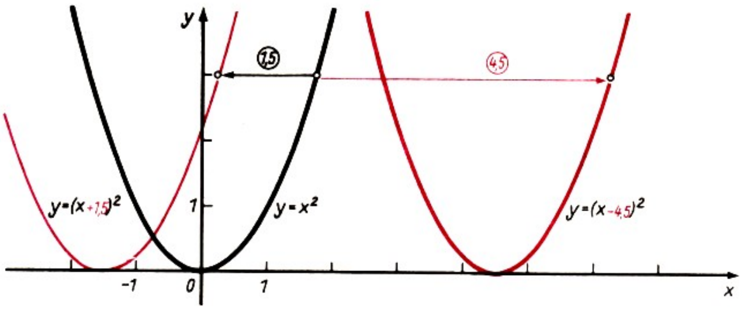


■

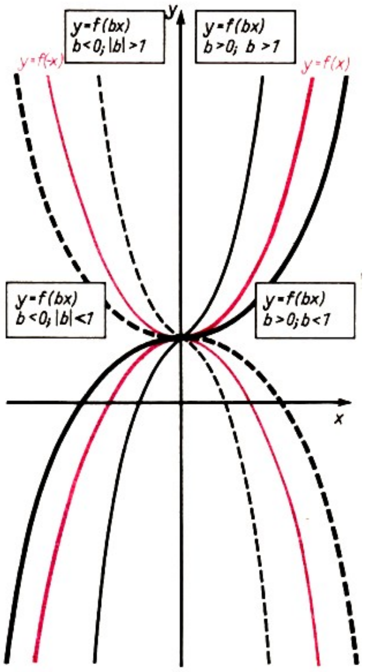


3) $y = f(x) \rightarrow y = f(x + c)$, $(c \in P)$
Der Graph von $y = f(x + c)$ geht aus dem Graph von $y = f(x)$ durch folgende Abbildung der Ebene auf sich hervor:

$c > 0$ Verschiebung in negativer Richtung der Abszissenachse (Verschiebungsweite c)
$c = 0$ Identische Abbildung
$c < 0$ Verschiebung in positiver Richtung der Abszissenachse



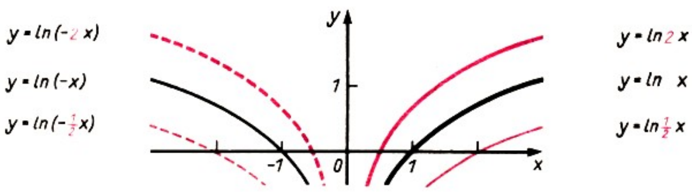
■



4) $y = f(x) \to y = f(bx)$, $(b \in P; b \neq 0)$
Der Graph von $y = f(bx)$ geht aus dem Graph von $y = f(x)$ durch folgende Abbildung der Ebene auf sich hervor:

$b > 0, b > 1$ Stauchung in Richtung der Abszissenachse zur Ordinatenachse hin (Streckungsfaktor $k = \frac{1}{b}$)
$b = 1$ Identische Abbildung
$b < 1$ Stauchung in Richtung der Abszissenachse von der Ordinatenachse weg (Streckungsfaktor $k = \frac{1}{b}$)

$b < 0, |b| > 1$ Spiegelung an der Ordinatenachse und Stauchung in Richtung der Abszissenachse zur Ordinatenachse hin (Streckungsfaktor $k = \frac{1}{|b|}$)
$b = -1$ Spiegelung an der Ordinatenachse
$|b| < 1$ Spiegelung an der Ordinatenachse und Stauchung in Richtung der Abszissenachse von der Ordinatenachse weg (Streckungsfaktor $k = \frac{1}{|b|}$)



■

B.2. Rationale Funktionen

Rationale Funktion

► Definition:
Die Funktion f ist eine auf ihrem Definitionsbereich X rationale Funktion genau dann, wenn es natürliche Zahlen n und m und reelle Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$, $b_0, b_1,..., b_m$ mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ derart gibt, dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, ...$ und $b_0, b_1, ...$ nennt man die Koeffizienten.

Einteilung rationaler Funktionen

Gibt es eine Darstellung mit $m = 0$, so heißt f auf X ganze rationale Funktion.

■ $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $f(x) = 5$

Gibt es keine Darstellung mit $m = 0$, so heißt f auf X gebrochene rationale Funktion.
Gilt $0 \leq n < m$, so heißt f auf X echt gebrochene rationale Funktionen.

■ $f = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{2x^2+3}{5x^6-7x^4+9}$

Gilt $n \geq n > 0$, so heißt f auf X unecht gebrochene rationale Funktionen.

■ $f = \frac{2x^4+5x++6}{3x^2-6x+9}$, $f(x) = \frac{5x^2-1}{7x^2+5x-3}$

Liegt eine ganze rationale Funktion:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (a_n \neq 0)$$

vor, so nennt man die natürliche Zahl n den Grad der ganzen rationalen Funktion.

▶ Satz:
Für ganze rationale Funktionen, deren Definitionsbereich ein Intervall enthält, gibt es genau eine solche Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Nullstellen rationaler Funktionen

▶ Definition:
x_0 ist Nullstellen der rationalen Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ genau dann, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$ gilt.

■ $x_0 = 2$ ist Nullstelle von $f(x) = \frac{3x^2-12}{2x^3+x^2+x} = \frac{u(x)}{v(x)}$; denn es ist $u(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 = 0$ und $v(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \neq 0$.

▶ Definition:
Man nennt x_1 eine k-fache Nullstelle der ganzen rationalen Funktion f genau dann, wenn es eine ganze rationale Funktion f_1 mit $f_1(x_1) \neq 0$ und eine Zahl k, $k \in N$, $k > 0$, gibt, so dass für jedes x gilt

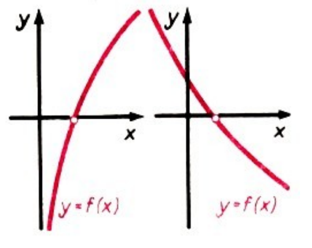
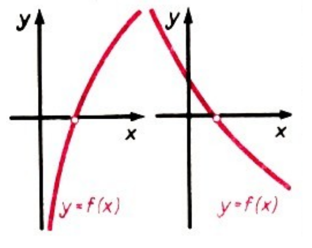
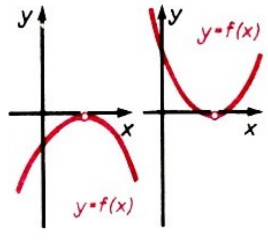
$$f(x) = (x - x_1)^k f_1(x)$$

Ist k gerade, so wird die Nullstelle x_1 Nullstelle gerader Ordnung genannt.
Ist k ungerade, so nennt man sie Nullstelle ungerader Ordnung.

■ $x_1 = -1$ ist eine dreifache Nullstelle der ganzen rationalen Funktion $y = (x + 1)^3$, denn es gilt für jedes x

$$(x + 1)^3 = [x - (-1)]^3 \cdot 1$$

Hier ist folglich $f_1(x) = 1$, und da diese Funktion aus Paaren $[x; 1]$, $x \in P$, besteht, gilt auch $f_1(-1) = 1$.

Funktionskurvenverlauf in der Umgebung von Nullstellen rationaler Funktionen		
einfache Nullstellen	mehrfache Nullstellen	
	ungerader Ordnung	gerader Ordnung
		

► Sätze:
(1) Jede ganze rationale Funktion n-ten Gerades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen.

2) x ist eine Nullstelle der ganz rationalen Funktion f genau dann, wenn es eine ganze rationale Funktion f_1 gibt, so dass für jedes x gilt:

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x)$$

(3) Sind die voneinander verschiedenen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$ Nullstellen der ganzen rationalen Funktion f, so gibt es eine ganze rationale Funktion f_m derart, dass für jedes x gilt:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m) \cdot f_m(x)$$

Man sagt zu diesem Sachverhalt: Abspalten der Linearfaktoren $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$

(4) Hat eine ganze rationale Funktion f vom Grade n genau n Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$, so lässt sie sich als Produkt von n Linearfaktoren darstellen:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \cdot a_n \neq 0$$

Berechnen von Nullstellen rationaler Funktionen

Der Satz über das Abspalten von Linearfaktoren lässt sich bei der Berechnung von Nullstellen in manchen Fällen vorteilhaft anwenden. Ist beispielsweise eine ganze rationale Funktion dritten Grades gegeben,

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

und ist bekannt, dass x_1 Nullstelle von f ist, dann gibt es eine ganze rationale Funktion $f_1(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, und es gilt $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$.

Die Funktion $f_1(x)$ lässt sich bestimmen
a) durch Koeffizientenvergleich, b) durch Divisionsalgorithmus.
Die Ermittlung der Nullstellen bei Funktionen höheren Grades und weitere Möglichkeiten zur Lösung von Gleichungen dritten Grades werden hier nicht behandelt.

■ Die Nullstellen der Funktion $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 20x - 24$ sind zu bestimmen.

$$f(x) = 4(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$

Durch Probieren erhält man $x_1 = -1$ als Nullstelle. Also gibt es eine quadratische Funktion $f_1(x) = ax^2 + bx + c$, und es gilt $f(x) = 4(x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

a) Ermitteln der Koeffizienten a, b, c durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 4(x^3+2x^2-5x-6) &= 4(x+1)(ax^2+bx+c) \\ x^3+2x^2-5x-6 &= ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c \end{aligned}$$

Da es für ganze rationale Funktionen genau eine Darstellung gibt, muss gelten $a=1$, $a+b=2$, $b+c=-5$, $c=-6$. Hieraus folgt $a=1$; $b=1$; $c=-6$.
Also gilt $f(x)=4(x+1)(x^2+x-6)$. Die Gleichung $x^2+x-6=0$ hat die Lösungen $x_2=2$, $x_3=-3$.
Die Funktion $f(x)=4x^3+8x^-20x-24$ hat somit die Nullstellen $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-3$.

b) Bestimmen der Koeffizienten durch Anwenden des Divisionsalgorithmus.
$4(x^3+2x-5x-6)=4(x+1)f_1(x)$. Also:

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^3+2x^2-5x-6\right):\left(x+1\right)=x^2+x-6 \\ \underline{-x^3\ -x^2} \\ \qquad\quad x^2-5x \\ \qquad\ \underline{-x^2\ -x} \\ \qquad\qquad\ -6x-6 \\ \qquad\qquad\ \ \underline{6x+6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

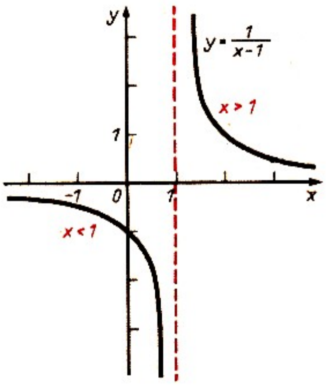
und dann weiter wie bei a).

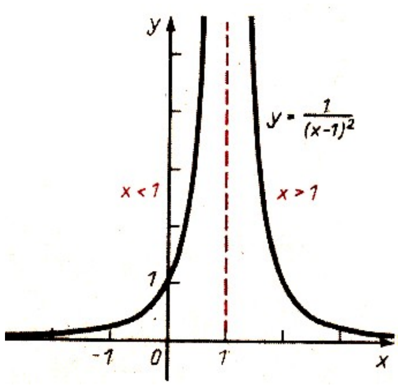
Pole rationaler Funktionen

▶ Definition:
x_o ist der Pol der rationalen Funktion $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ genau dann, wenn $u(x_0)\neq 0$ und $v(x_0)=0$ gilt.

■ $x_p=1$ ist Pol von $f(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{u(x)}{v(x)}$; denn es ist $u(1)=1\neq 0$ und $v(x)=1-1=0$.

Annäherung an einen Pol





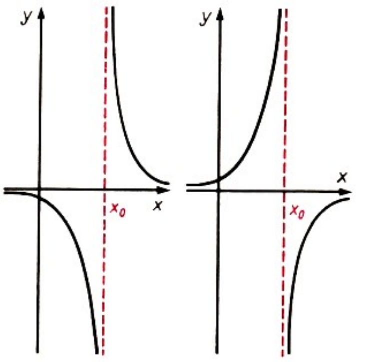
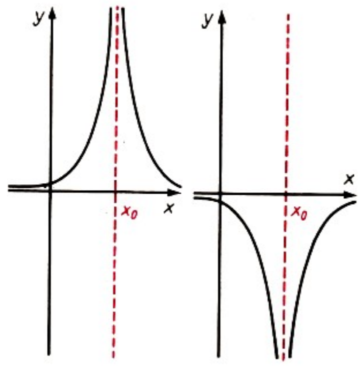
Für jede Funktion $f(x)=\frac{1}{x-x_0}\quad (x\neq x_0)$ (Abbildung links) gilt:

$$\lim_{x\to x_0; x>x_0} f(x)=+\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to x_0; x<x_0} f(x)=-\infty$$

Für jede Funktion $f(x)=\frac{1}{(x-x_0)^2}\quad (x\neq x_0)$ (Abbildung rechts) gilt:

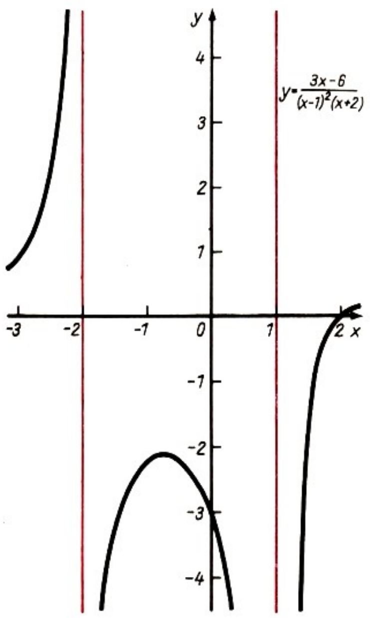
$$\lim_{x\to x_0; x>x_0} f(x)=+\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to x_0; x<x_0} f(x)=+\infty$$

Funktionsverlauf bei Polstellen

ungerader Ordnung	gerader Ordnung
x_0 heißt Polstelle ungerader Ordnung,	x_0 heißt Polstelle gerader Ordnung
wenn f in folgender Weise dargestellt werden kann:	
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{2k+1}}$ $u(x_0) \neq 0, v(x_0) \neq 0$	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{2k}}$ $u(x_0) \neq 0, v(x_0) \neq 0$
	
$\frac{u(x_0)}{v(x_0)} > 0$ und $\frac{u(x_0)}{v(x_0)} < 0$	$\frac{u(x_0)}{v(x_0)} > 0$ und $\frac{u(x_0)}{v(x_0)} < 0$

Berechnen von Polen rationaler Funktionen

Das Ermitteln von Polstellen einer Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ erfordert das Aufsuchen derjenigen Nullstellen x_k von $v(x)$, für die $u(x_k) \neq 0$ ist.



■ Es sind die Polstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^3-3x+2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

zu ermitteln.
Die Funktion v besitzt die zweifache Nullstelle $x_1 = 1$ und die einfache Nullstelle $x_3 = -2$. Also gilt $v(x) = (x-1)^2(x+2)$ und folglich

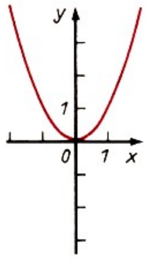
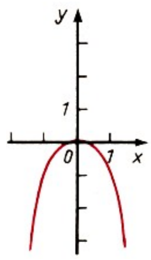
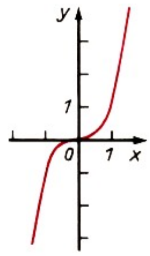
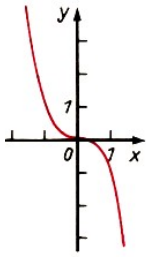
$$f(x) = \frac{3x-6}{(x-1)^2(x+2)}$$

Da für die Zahlen 1 und -2 $u(x) = 3x - 6$ ungleich Null ist, sind diese beiden Zahlen Pole der Funktion f. 1 ist ein Pol gerader Ordnung, -2 ist ein Pol ungerader Ordnung.

Verhalten der rationalen Funktionen im Unendlichen

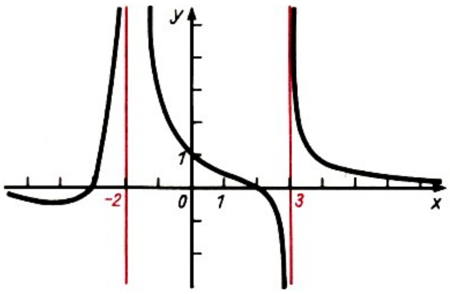
1. Ganze rationale Funktionen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x_n}\right) = (\lim_{x\to\pm\infty} x^n) \cdot a_n$$

n	n gerade		n ungerade	
a_n	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim\limits_{x\to\infty}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Beispiel				

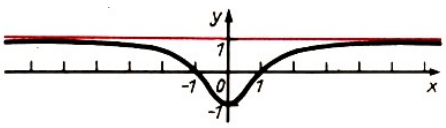
2. Gebrochen rationale Funktionen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x_n}\right)}{x^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x_m}\right)} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^m} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$



Fall 2a: $n - m < 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
Die Abszissenachse ist Asymptote des Graphen von $y = f(x)$.

■ $f(x) = \frac{2x^2+2x-12}{x^3+x^2-8x-12}$



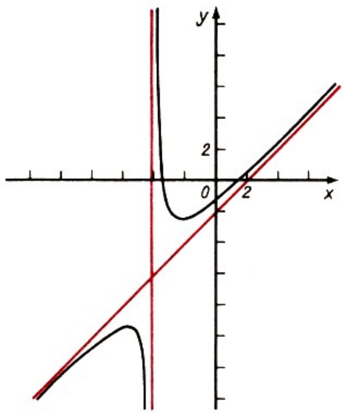
Fall 2b: $n = m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
Die Gerade $y = \frac{a_n}{b_m}$ ist Asymptote des Graphen von $y = f(x)$.

■ $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Fall 2c: $n - m > 0$

$\frac{a_n}{b_m}$	$n-m$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\frac{a_n}{b_m} > 0$	gerade	$+\infty$	$+\infty$
	ungerade	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{a_n}{b_m} < 0$	gerade	$-\infty$	$-\infty$
	gerade	$-\infty$	$+\infty$

In einigen dieser Fälle kann man das Verhalten der Funktion im Unendlichen noch genauer charakterisieren.



■ $f(x) = \frac{x^2+2x-5}{x+4} = (x-2) + \frac{3}{x+4}$

Durch Anwenden des Divisionsalgorithmus wird hier der unecht gebrochene Quotient aufgespalten in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenen Summanden.
Für sehr große $|x|$ verhält sich $f(x)$ angenähert wie $g(x) = x - 2$. Die Gerade $y = x - 2$ ist Asymptote des Graphen von f.

B.3. Nichtrationale Funktionen

Wurzelfunktionen	$y = \sqrt[n]{c}, (n \in N, n > 1, 0 \leq x < \infty)$
Winkelfunktionen	$y = a \sin(bx + c), (a \neq 0, b \neq 0, -\infty < x < \infty)$ $y = \cos x, (-\infty < x < \infty)$ $y = \tan x, (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in G)$ $y = \cot x, (x \neq k\pi, k \in G)$
Exponentialfunktionen	$y = a^x (a \neq 1, a > 0, -\infty < x < \infty)$
Logarithmusfunktionen	$y = \log_a x (a \neq 1, a > 0, 0 < x < \infty)$

Wurzelfunktionen

▶ Definition (Wurzelfunktion):
Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ ist die Menge der geordneten Paare $[x; \sqrt[n]{x}]$ mit $n > 1$, $n \in N$, $x \geq 0$.

▶ Satz: Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ $(0 \leq x < \infty)$ und die Potenzfunktion $y = x^n$ mit $0 \leq x < \infty$ sind zueinander invers.

Umkehrbarkeit von Potenzfunktionen

1) Exponent ist gerade

$$|y = x^{2k} \quad (k \in N, k > 0, -\infty < x < \infty)$$

Die Funktion $y = x^{2k}$ ist nicht eineindeutig. Sie lässt sich deshalb nicht im ganzen Definitionsbereich umkehren. Es lassen sich allerdings zwei (Teil-) Funktionen f_1 und f_2 jede für sich als gesonderte Funktion umkehren.

Funktion	Umkehrfunktion
$f_1 : y = x^{2k} \quad (0 \leq x < \infty)$	$\overline{f}_1 : y = \sqrt[2k]{x} \quad (0 \leq x < \infty)$
$f_2 : y = x^{2k} \quad (-\infty < x < 0)$	$\overline{f}_2 : y = -\sqrt[2k]{x} \quad (0 < x < \infty)$

■ $f_1 : y = x^2 \quad (0 \leq x < \infty)$, $\overline{f}_1 : y = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < \infty)$
$f_2 : y = x^2 \quad (-\infty < x < 0)$, $\overline{f}_2 : y = -\sqrt{x} \quad (0 < x < \infty)$

2) Exponent ist ungerade

$$y = x^{2k+1} \quad (k \in N, k > 0)$$

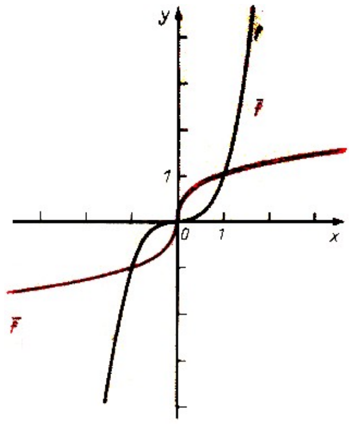
Die Funktion $y = x^{2k+1}$ ist eineindeutig und lässt sich im gesamten Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$ umkehren.

Funktion	Umkehrfunktion
$f : y = x^{2k+1} \quad (-\infty < x < \infty)$	$\overline{f} = \begin{cases} y = \sqrt[2k+1]{x} & \text{für } 0 \leq x < \infty \\ y = -\sqrt[2k+1]{-x} & \text{für } -\infty < x < 0 \end{cases}$

■ $f : y = x^3$, $(-\infty < x < \infty)$

Umkehrfunktion:

$$\overline{f} = \begin{cases} y = \sqrt[3]{x} & \text{für } 0 \leq x < \infty \\ y = -\sqrt[3]{-x} & \text{für } -\infty < x < 0 \end{cases}$$



Winkelfunktionen

In "Mathematik in Übersichten" werden auf den Seiten 109 bis 119 unter dem gleichen Stichwort Definitionen und Eigenschaften von Winkelfunktionen aufgeführt. Deshalb werden hier nur ein Überblick über einige dieser Gleichungen sowie Ergänzungen angegeben.

► Definitionen:

$\tan x =_{Def} \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \left[x \in P, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in G\right]$

$\cot x =_{Def} \frac{\cos x}{\sin x}$ $\quad [x \in P, x \neq 2k\pi; k \in G]$

► Sätze:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in P)$

$\tan x \cdot \cdot x = 1 \quad \left(x \in P; x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

Komplementwinkelbeziehungen $x \in P$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \quad \left(x \neq 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x \quad \left(x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

Quadratenbeziehungen $x \in P$

II. $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x \quad \left(x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

$\cot(\pi - x) = -\cot x \quad \left(x \neq 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

III. $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\tan(\pi + x) = \tan x \quad \left(x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

$\cot(\pi + x) = \cot x \quad \left(x \neq 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

IV. $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x$

$\tan(2\pi - x) = -\tan x \quad \left(x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

$\cot(2\pi - x) = -\cot x \quad \left(x \neq 2k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in G\right)$

Bei den folgenden Gleichungen ist jeweils der konkrete Definitionsbereich zu beachten.

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\
\cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \\
\tan(x_1 \pm x_2) &= \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \\
\cot(x_1 \pm x_2) &= \frac{\cot x_1 \cdot \cot x_2 \mp 1}{\cot x_1 \pm \cot x_2}
\end{aligned}$$

Doppelwinkelformeln (Spezialfall der Additionstheoreme für $x_1 = x_2$)

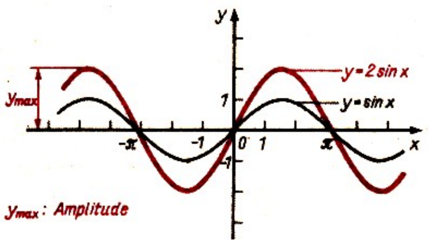
$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\
\cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}
\end{aligned}$$

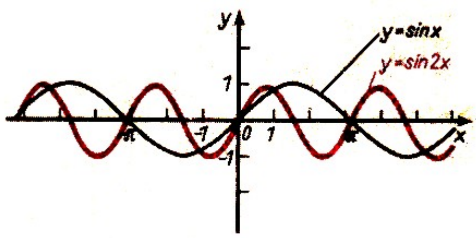
Halbwinkelformeln (Das Vorzeichen ergibt sich aus der Lage von $\frac{x}{2}$)

$$\begin{aligned}
\sin \frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\
\cos \frac{x}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \\
\tan \frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\
\cot \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{\sin x}
\end{aligned}$$

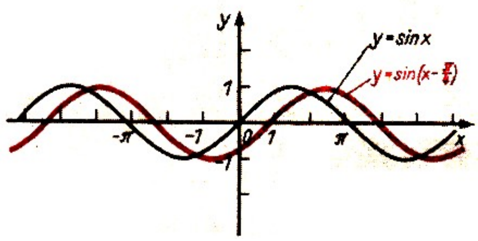
Die Funktionen $y = a \sin(bx + c)$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

Spezialfälle der Funktion $y = a \sin(bx) + c$





$y = a \sin x$ $\qquad$ $y = \sin bx$



$y = \sin(x + c)$

■ Die Funktion $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ soll im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ graphisch dargestellt werden: Wir gehen von der Sinuskurve aus und führen nacheinander die Abbildungen der Ebene auf sich aus, die den einzelnen Konstanten entsprechen.

a) $y = \sin x \to y = \sin 2x$

Stauchung der Ebene in Richtung der x-Achse zur y-Achse hin (Streckungsfaktor $k = \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$) Als kleinste Periode von $y = \sin 2x$ erhalten wir $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Die Amplitude bleibt unverändert.

b) $y = \sin 2x \to y = 2\sin 2x$

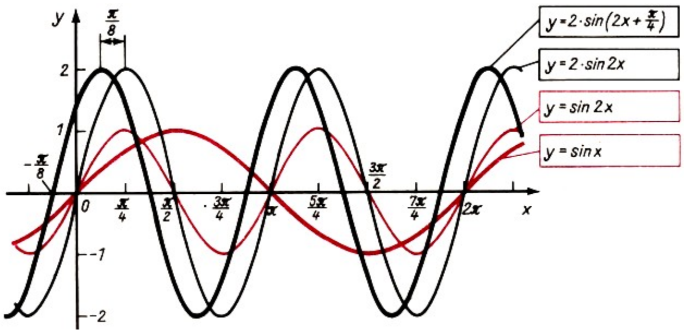
Streckung der Ebene in Richtung der y-Achse von der x-Achse weg (Streckungsfaktor $k = a = 2$). Es ergibt sich die Amplitude 2. Die kleinste Periode bleibt unverändert π.

c) $y = 2\sin 2x \to y = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Um die Verschiebungsweite zu erkennen, muss aus $f(x) = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ die Form $f(x+c) = 2\sin 2(x+c)$ gebildet werden:

$$y = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

Verschiebung der Ebene in negativer Richtung der x-Achse (Verschiebungsweite $\frac{\pi}{8}$) Die Amplitude bleibt unverändert 2, die kleinste Periode bleibt unverändert π. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind um $\frac{\pi}{8}$ in negativer Richtung der x-Achse verschoben.



Exponentialfunktionen

▶ Definition:
Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1, -\infty < x < \infty)$ heißen Exponentialfunktionen.

Exponentialfunktionen haben große Bedeutung zur Beschreibung von Prozessen, bei denen das Ergebnis der Veränderung (Zunahme oder Abnahme) einer Größe die weitere Veränderung selbst wieder beeinflusst.

■ Kettenreaktion: Die durch Kernspaltung entstandenen Neutronen bewirken selber die Spaltung weiterer Atomkerne.
■ Organisches Wachstum: Die entstandenen Zellen (z. B. Bakterien, Pflanzenzellen) teilen sich selber wieder und wirken ihrerseits am Wachstum mit.
■ Radioaktiver Zerfall: Ist bereits eine bestimmte Anzahl von Atomen zerfallen, kann in dem folgenden gleich großen Zeitabschnitt nur noch eine geringere Anzahl von Atomen zerfallen.

► Satz:
Durchläuft bei Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ das Argument x eine arithmetische Folge, so durchlaufen die zugehörigen Funktionswerte y eine geometrische Folge.

Beweis: Es sei

$$x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, ...$$

eine arithmetische Folge. Dann gilt für je zwei benachbarte Glieder der Folge $x_n - x_{n-1} = d =$ const. Für die Folge der zugehörigen Funktionswerte

$$a^{x_0}, a^{x_1}, ..., a^{x_{n-1}}, a^{x_n}, ...$$

gilt folglich für den Quotienten zweier beliebiger benachbarter Glieder

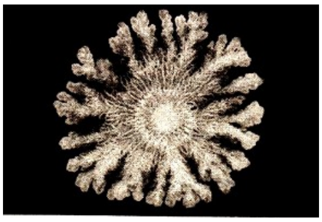
$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{a^{x_n}}{a^{x_{n-1}}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^d = \text{ const}$$

Folglich ist die Folge der Funktionswerte eine geometrische Folge.

Die Funktionen $y = a \cdot e^{kx}$ $(a \neq 0; k \neq 0)$

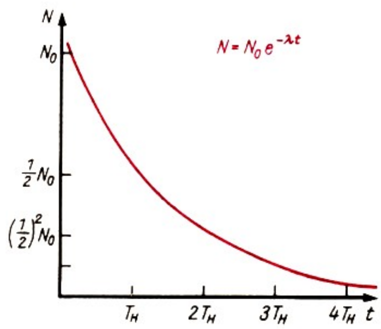
Beispiele für Prozesse, die durch Funktionen vom Typ $y = ae^{kx}$ beschrieben werden können.

1) Organisches Wachstum $N = N_0 e^{kt}$, $(N_0 > 0, k > 0)$
N: Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t; N_0: Anzahl zum Zeitpunkt $= 0$



Der Zuwachs an Bakterien in der Zeiteinheit bei einer Bakterienkultur ist direkt proportional zur Anzahl der zum betreffenden Zeitpunkt bereits vorhandenen Bakterien. Hierbei werden hemmende Einflüsse wie Mangel an Nährsubstanz oder Auftreten antibakterieller Substanzen vernachlässigt.

Weitere Wachstumsprozesse wie Zunahme des Holzbestandes eines Waldes, Zunahme der gesellschaftlichen Produktion materieller Güter, Zunahme der Bevölkerung können in gewissen Grenzen angenähert auch durch Exponentialfunktionen beschrieben werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei der Zunahme der Produktion und der Zunahme der Bevölkerung gesellschaftliche Faktoren eine große Rolle spielen, folglich kompliziertere Zusammenhänge auftreten, als sie durch einfache Exponentialfunktionen beschrieben werden.



2) Radioaktiver Zerfall $N = N_0 e^{-\lambda t}$
N: Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atome einer radioaktiven Substanz, N_0: Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen nicht zerfallenen Atome,
λ: Zerfallskonstante (ist für die Substanz charakteristisch)
T_H: Halbwertzeit, Zeitspanne, innerhalb (m derer die Hälfte aller Atome zerfallen ist (ist für die Substanz charakteristisch). Es gilt

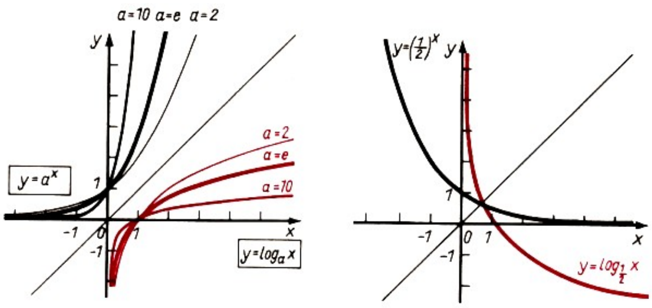
$$\lambda \cdot T_H = \ln 2$$

Logarithmusfunktionen

▶ Definition:
$\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ ist diejenige reelle Zahl y, für die gilt $a^y = x$. $\log_a x$ wird Logarithmus der Zahl x zur Basis a genannt.

▶ Definition:
Funktionen mit Gleichungen der Form $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, 0 < x < \infty)$ heißen Logarithmusfunktionen.

▶ Satz:
Die Funktionen
$f_1 : y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1, -\infty < x < \infty)$ und $f_2 : y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, 0 < x < \infty)$ sind zueinander invers.



■

links: $y = a^x$, $(a > 1)$; $y = \log_a x$, $(a > 1)$
rechts: $y = a^x$, $(0 < a < 1)$; $y = \log_a x$, $(0 < a < 1)$

Die Logarithmen zur Basis e heißen natürliche Logarithmen; sie werden mit $\ln x$ bezeichnet, also $\log_e x = \ln x$ (gelesen: "Logarithmus naturalis von x"). Die Logarithmen zur Basis 10 heißen dekadische Logarithmen oder Briggssche Logarithmen.[5]! Die dekadischen Logarithmen werden mit $\lg x$ bezeichnet, also $\log_{10} x = \lg x$.

Zusammenhang zwischen Logarithmen verschiedener Basen

▶ Satz:
Für alle positiven reellen Zahlen x und alle reellen Zahlen a,b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq 1$, $b \neq 1$, gilt:

$$\log_b x = (\log_b a) \cdot \log_a x$$

Aus diesem Satz ergibt sich speziell

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Der oben angegebene Satz wird für den Übergang von einem zu einem anderen Logarithmensystem benutzt. $\lg e$ und $\ln 10$ sind irrationale Zahlen, die zueinander reziprok sind:

$$\lg e \approx 0{,}43429 \qquad , \qquad \ln 10 \approx 2{,}30259$$

[5] Henry Briggs (1561-1631), englischer Mathematiker, berechnete die erste 14stellige Tafel der dekadischen Logarithmen.

$$\log_b x = (\log_b a) \cdot \log_a x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$
$$\ln x = (\ln 10) \cdot \lg x = \frac{1}{\lg e} \cdot lgx = 2{,}30259 \cdot \lg x$$
$$\lg x = (\lg e) \cdot \ln x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x = 0{,}43429 \cdot \ln x$$

B.4. Wurzelgleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable auch im Argument von Wurzelfunktionen auftritt, werden als Wurzelgleichungen bezeichnet.

Wurzelgleichungen, die mit einmaligem Quadrieren zu lösen sind

Gleichungen mit der Form $\sqrt{T_1(x)} = T_2(x)$ oder $\sqrt{T_1(x)} = \sqrt{T_2(x)}$.

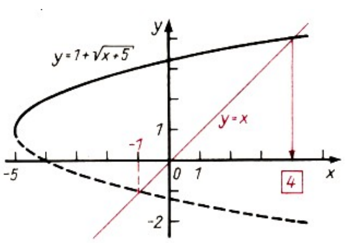
■ Die Lösungen der Gleichung $1 + \sqrt{x+5} = x$ $(x \geq -5)$ sind zu bestimmen.

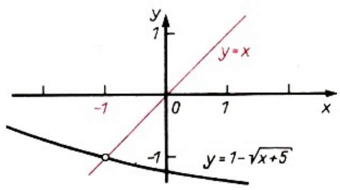
Rechnerische Lösung:
Isolieren der Wurzel: $\sqrt{x+5} = x - 1$
Quadrieren: $x + 5 = (x-1)^2$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -1$
Wenn die Gleichung Lösungen hat, dann können es höchstens die Zahlen 4 und -1 sein.

Probe: $x_1 = 4$: $1 + \sqrt{4+5} = 1 + \sqrt{9} = 4$
Das ist eine wahre Aussage, also ist 4 eine Lösung der Gleichung.
$x_2 = -1$: $1 + \sqrt{-1+5} = 1 + \sqrt{4} = 2 \neq -1$
Das ist eine falsche Aussage, also ist -1 keine Lösung der Gleichung. Die Gleichung hat nur die eine Lösung $x = 4$.

Graphische Lösung

Es werden die beiden Funktionen $y = f_1(x) = 1 + \sqrt{x+5}$ und $y = f_2(x) = x$ betrachtet. Die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen dieser Funktionen liefern die Lösungen der Gleichung $1 + \sqrt{x+5} = x$





$x_2 = -1$ ist die Abszisse des Schnittpunktes des Graphen von $y = f_1^*(x) = 1 - \sqrt{x+5}$ und $y = f_2(x) = x$.

■ Die Lösungen der Gleichung $\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{5x - 8} = 0$ sind zu berechnen.

Isolieren der Wurzeln: $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{5x - 8}$
Quadrieren: $x^2 - 2 = 5x^{-}8$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

Probe: $x_1 : \sqrt{9-2} - \sqrt{15-8} = \sqrt{7} - \sqrt{7} = 0$
Das ist eine wahre Aussage, also ist $x_1 = 3$ eine Lösung.
$x_2 : \sqrt{4-2} - \sqrt{10-8} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

Das ist eine wahre Aussage, also ist $x_2 = 2$ eine Lösung.

■ Die Lösungen der Gleichung $\sqrt[3]{x} + 5\sqrt{x} = 0$ $(x > 0)$ sind zu ermitteln.
Man erkennt, dass $x = 0$ die einzige Lösung ist. Denn für $x \neq 0$ sind beide Summanden größer als Null.

Wurzelgleichungen, die mehrmaliges Quadrieren erfordern

■ Die Lösungen der Gleichung $\sqrt{7x-12} + \sqrt{13-3x} = 5$ sind zu berechnen.

Umformen: $\sqrt{7x-12} = 5 - \sqrt{13-3x}$
Quadrieren: $7x - 12 = 25 - 10\sqrt{13-3x} + 13 - 3x$
Isolieren der Wurzel: $x - 5 = -\sqrt{13-3x}$
Quadrieren: $x^2 - 10x + 25 = 13 - 3x$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

Probe: $x_1 = 4 : \sqrt{7 \cdot 4 - 12} + \sqrt{13 - 3 \cdot 4} = 4 + 1 = 5$, Wahre Aussage
$x_2 = 3 : \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$ Wahre Aussage
Die Gleichung hat die Lösungen 4 und 3.

■ Die Gleichung $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4$ ist zu lösen.

Quadrieren: $x + 2 + \sqrt{2x+7} = 16$
Isolieren der Wurzel: $\sqrt{2x+7} = 14 - x$
Quadrieren: $2x + 7 = 196 - 28x + x^2$, $x^2 - 30x + 189 = 0$, $x_1 = 21$, $x_2 = 9$

Probe: $x_1 = 21 : \sqrt{21 + 2 + \sqrt{42+7}} = \sqrt{23+7} = \sqrt{30} \neq 4$
Das ist eine falsche Aussage, also ist 21 keine Lösung der Gleichung.
$x_2 = 9 : \sqrt{9 + 2 + \sqrt{18+7}} = \sqrt{11+5} = 4$
Das ist eine wahre Aussage, also ist 9 eine und somit die Lösung der Gleichung.

B.5. Goniometrische Gleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable auch im Argument von Winkelfunktionen auftritt, werden als goniometrische Gleichungen bezeichnet.

Typen goniometrischer Gleichungen (Beispiele)

	eine Winkelfunktion	verschiedene Winkelfunktionen
gleiche Argumente	$\sin x = 0{,}5$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $2\sin^2 x - 0{,}5 = 0$	$4\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0$
verschiedene Argumente	$\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5$	$4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos x = \sqrt{3}$ $\cos\frac{3}{7}x + \sin x = 0$

1) Gleiche Argumente - eine Winkelfunktion[6]

■ $\sin x = 0{,}5$

$$\overline{x}_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \overline{x}_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in G), \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in G)$$

[6] Bei diesen Beispielen wird auf die Ausführung der Probe verzichtet. Es handelt sich in jedem Falle um äquivalente Umformungen bzw. um die Anwendung bekannter Lösungsformeln.

Mit $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ wurden die Hauptwerte der bei der Lösung zu betrachtenden zwei Mengen von zueinander äquivalenten Winkeln bezeichnet.

■ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

Durch Substitution $x + \frac{\pi}{6} = z$ erhält man die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&\cos z = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
&\overline{z}_1 = \frac{\pi}{6}, && \overline{z}_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6} \\
&z_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, && z_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \\
&x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, && x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6} + 2k\pi \\
&x_1 = k \cdot 2\pi \quad (k \in G), && x_2 = \frac{10}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in G)
\end{aligned}
$$

■ $2\sin^2 x - 0{,}5 = 0$

Durch Substitution $\sin x = z$ erhält man eine quadratische Gleichung in z.

$$
\begin{aligned}
&2z^2 - 0{,}5 = 0 \\
&z_1 = \frac{1}{2}, && z_2 = -\frac{1}{2} \\
&\sin x_1 = \frac{1}{2}, && \sin x_2 = -\frac{1}{2} \\
&x_{11} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, && x_{21} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\
&x_{12} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, && x_{22} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in G)
\end{aligned}
$$

Die Lösungen x_{11} und x_{21} lassen sich zusammenfassen zu $\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, $(k \in G)$.
Die Lösungen x_{12} und x_{22} lassen sich zusammenfassen zu $\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$, $(k \in G)$.
Die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung ist $\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, $\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$ $(k \in G)$.

2) Gleiche Argumente - verschiedene Winkelfunktionen

■ $4\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0, \qquad 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

Eine der beiden Funktionen wird durch die andere ausgedrückt. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ führt auf

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0; \qquad -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0; \qquad \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

Durch Substitution $\sin x = z$ erhält man eine quadratische Gleichung in z:

$$z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$

Die weitere Lösung wird hier nicht ausgeführt.

2) Verschiedene Argumente - gleiche Winkelfunktion

■ $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1{,}5$

Nach $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ gilt:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 1{,}5, \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}, \qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in G)$$

4) Verschiedene Argumente - verschiedene Winkelfunktionen

■ $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos x = \sqrt{3}$

Anwendung des Additionstheorems

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

führt auf

$$4\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) - 2\cos x = \sqrt{3}$$
$$2\sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad (k \in G)$$

■ $\cos\frac{3}{7}x + \sin x = 0$

Anwenden der Komplementärwinkelbeziehung $\sin x = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ führt auf

$$\cos\frac{3}{7}x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

Anwenden der Formel $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ führt auf

$$2\cos\frac{\frac{3}{7}x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cos\frac{\frac{3}{7}x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0$$
$$\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{7}x}{2}\cos\frac{\frac{10}{7}x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x\right)\cos\left(\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Das Produkt ist gleich Null genau dann, wenn ein Faktor gleich Null ist. Die Lösungen der Gleichung sind die Lösungen der Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Die weitere Lösung erfolgt über die Substitution $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x = z$ bzw. $\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4} = z$.

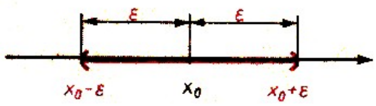
C. Differentialrechnung

C.1. Grenzwerte

ε-Umgebung einer Zahl x_0

▶ Definition:
Ist ε einer positive reelle Zahl, so versteht man unter der ε-Umgebung einer Zahl x_0 (geschrieben: "$U_\varepsilon(x_0)$") das offene Intervall

$$(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$$



Grenzwert einer Zahlenfolge

▶ Definition:
Die Zahlenfolge (a_n) hat die Zahl g als Grenzwert genau dann, wenn bei jedem positiven ε für fast alle[7] n gilt: $a_n \in U_\varepsilon(g)$.
Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (gelesen: limes a_n für n gegen unendlich)[8]

Sinngemäß bedeutet diese Definition: So klein wir $\varepsilon > 0$ auch wählen, von einer bestimmten Zahl n_0 an liegen alle Folgenglieder a_n mit $n > n_0$ in der ε-Umgebung von g.

■ Der Grenzwert der Folge[9] $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ist $g = 1$.

$U_\varepsilon(1)$ ist das Intervall $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$. Ist $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ bzw. $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ dann liegen alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ in $U_\varepsilon(1)$.

Konvergente Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt konvergent, wenn es eine Zahl g gibt, die Grenzwert von (a_n) ist.
Man sagt: Die Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen g.
Zahlenfolgen mit dem Grenzwert $g = 0$ heißen Nullfolgen.

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ mit $k > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ mit $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

Divergente Zahlenfolgen

Jede nicht konvergente Zahlenfolge heißt divergente Zahlenfolge.
Gilt für eine Zahlenfolge (a_n):
Zu jeder positiven Zahl g gibt es ein n_g, so dass für allen mit $n > n_g$ gilt $g < a_n$, dann schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Gilt für eine Zahlenfolge (a_n):
Zu jeder negativen Zahl g gibt es ein n_g, so dass für allen mit $n > n_g$ gilt $a_n < g$, dann schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

[7] "fast alle" bedeutet: mit Ausnahme von endlich vielen
[8] limes (lat.), Grenze
[9] Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wird hier und im folgenden als Definitionsbereich der Folgen die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null gewählt.

■ Divergente Zahlenfolgen sind:
$((-1)^n)$, (2^n), (q^n) mit $|q| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-3^n) = -\infty$

Sätze über konvergente Zahlenfolgen

▶ Satz:
Jede Teilfolge[10] (a'_n) einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie die Folge (a_n).

■ $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$; Teilfolge $(a'_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$

▶ Satz:
Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen ihre obere Grenze. Die obere Grenze ist nicht Glied der Folge.

■ $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$; obere Grenze $G = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

▶ Satz:
Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen ihre untere Grenze. Die untere Grenze ist nicht Glied der Folge.

■ $(a_n) = \left(3 + \frac{5}{n^2}\right)$; untere Grenze $G = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \frac{5}{n^2}\right) = 3$

▶ Satz:
Gilt für zwei konvergente Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) $a_n < b_n$ für alle n, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

▶ Satz (Grenzwertsätze):
Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergieren auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ mit $b_n \neq 0$, (b_n) keine Nullfolge, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \quad (b_n \neq 0)
\end{aligned}$$

■ $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n - 5}{5n^2 - 7n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right) \cdot n^2}{\left(5 - \frac{7}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

Auf $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-5}{5n^2-7n+1}$ kann der Grenzwertsatz für Quotienten nicht angewendet werden, da $(3n^2 + 2n - 5)$ und $(5n^2 - 7n + 1)$ nicht konvergieren.

[10] (a'_n) heißt Teilfolge der Folge (a_n) genau dann, wenn es zu jedem Element a'_k der Folge (a'_n) ein l gibt, $linN$, $l \geq k$, und es gilt $a'_k = a_l$.

Die Eulersche Zahl e

Der Grenzwert der Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ existiert und wird zu Ehren Leonhard Eulers[11] "Eulersche Zahl" genannt und mit e bezeichnet:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Zum Beweis der Existenz dieses Grenzwertes wird gezeigt, dass die Folge $(a_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ monoton wachsend und beschränkt ist. Daraus folgt dann entsprechend dem zweiten Satz auf Seite 43 die Konvergenz der Folge (a_n).

Eine Möglichkeit zum Nachweis der Beschränktheit der Folge (a_n) besteht in folgendem. Es wird gezeigt,
- dass eine zweite Folge $(\overline{a}_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ monoton fallend ist, und
- dass für alle n gilt $a_n < \overline{a}_n$!

Unter diesen Voraussetzungen ist dann jedes Glied von $(\overline{a})$ eine obere Schranke von (a_n).

Bei dieser Beweismethode gewinnt man zugleich eine Intervallschachtelung für die Zahl e, denn es gilt dann folgender

► Satz:
Für die Folgen $(a_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ und $(\overline{a}_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ gilt
1. $a_n < \overline{a}_n$ für alle $n \in N$, $n \geq 1$,
2. (a_n) ist monoton wachsend,
3. $(\overline{a}_n)$ ist monoton fallend,
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{a}_n - a_n) = 0$

Hiernach bilden die Intervalle $\langle a_n, \overline{a}_n\rangle$ eine Intervallschachtelung, die die Zahl e erfasst.
Die Zahl e ist eine Irrationalzahl: $e = 2,718281828459......$

Reihen

Ist (a_n) eine Folge, so nennt man die Partialsummenfolge

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

eine Reihe und bezeichnet sie mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.
Konvergiert die Partialsummenfolge (s_n) und hat sie den Grenzwert s, dann heißt s die Summe der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Man verwendet in diesem Fall das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ auch für den Grenzwert der Reihe.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Geometrische Reihen

Eine geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ist die Folge der Partialsummen (s_n) einer geometrischen

[11] Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker, der die längste Zeit seines Lebens in Petersburg wirkte.

Zahlenfolge (aq^{n-1}), $n \in N$, $n > 1$.

$$\begin{aligned}
s_1 &= a \\
s_2 &= a + aq \\
s_3 &= a + aq + aq^2 \\
&\vdots \\
s_n &= a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1
\end{aligned}$$

Für $|q| < 1$ konvergiert die Folge (s_n).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} aq^{n-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(a\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n) \\
&= \frac{a}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}q^n\right) = \frac{a}{1-q}(1-0)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}; \qquad |q| < 1$$

Für $|q| > 1$ divergiert die Folge (s_n).

■ Darstellung periodischer Dezimalbrüche als geometrische Reihen und Umwandlung in gemeine Brüche:

$$\begin{aligned}
0{,}14\overline{73} &= \frac{14}{100} + \frac{73}{100^2} + + \frac{73}{100^2}\cdot\frac{1}{100} + ... + + \frac{73}{100^2}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + ... \\
&= \frac{14}{100} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{73}{100^2}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{k-1}; \quad (a = \frac{73}{100^2}, q = \frac{1}{100}) \\
&= \frac{14}{100} + \frac{\frac{73}{100^2}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1459}{9900}
\end{aligned}$$

Grenzwert einer Funktion

► Definition:
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g [geschrieben: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$] genau dann wenn gilt:

1. f ist in einer Umgebung von x_0 (eventuell unter Ausschluss der Stelle x_0) definiert,
2. für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) ($x_n \neq x_0$ für jedes n), deren Glieder dieser Umgebung angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen g.

Man verwendet den Grenzwertbegriff oft auch in folgender Weise:

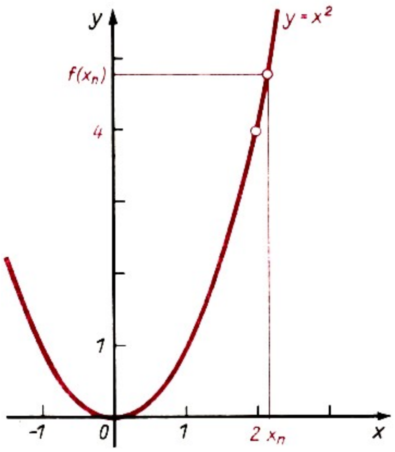
a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, wenn für jede Folge (x_n), für die gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, auch gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

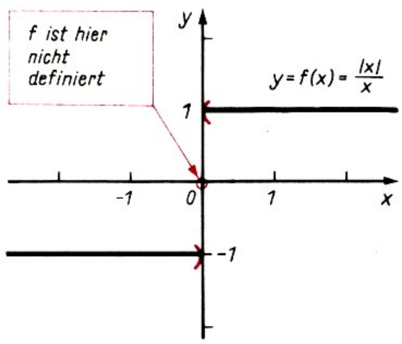
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} = a$, $(a \in P)$; analog wird $\lim\limits_{x\to-\infty} = a$ erklärt; wenn für jede Folge (x_n), für die gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ und für die $f(x_n)$ definiert ist, auch gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$; analog wird $\lim\limits_{x\to-\infty}$ erklärt; wenn für jede Folge (x_n), für die gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ und für die $f(x_n)$ definiert ist, auch gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

■ Es ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ zu ermitteln. (Abb. links unten)
$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, denn
1. ist die Funktion $f(x) = x^2$ für alle $x \in P$ definiert, also auch für eine Umgebung von $x_0 = 2$, und
2. gilt für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = 2 \cdot 2 = 4$$



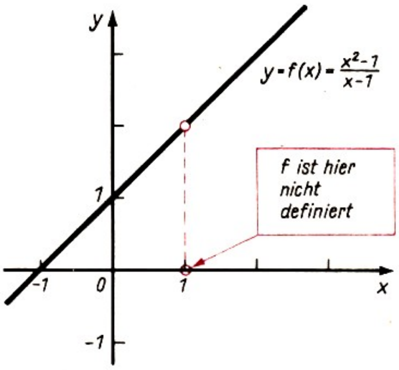


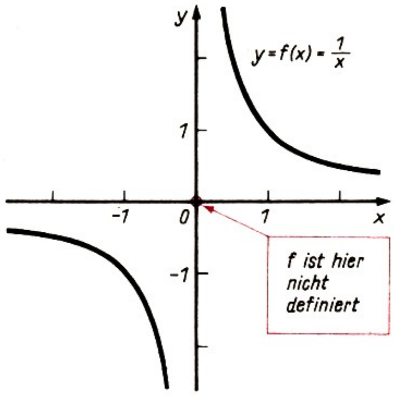
■ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert. (Abb. rechts oben)
1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ist zwar für alle $x \neq 0$ definiert, als auch in einer Umgebung von $x_0 = 0$
2. Es gibt aber Folgen (x_n) und (x'_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ für die $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.
Zum Beispiel: a) $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$; $f(x_n) = \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$
b) $(x'_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$; $f(x'_n) = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}} = 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = -1$
In diesem Falle gibt es nur den rechtsseitigen Grenzwert und den linksseitigen Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{|x|}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$, da diese voneinander verschieden sind.

■ Es ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ zu ermitteln. (Abb. links unten)
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, denn
1. ist die Funktion für alle $x \neq 1$ wegen

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

definiert und
2. gilt für jede Folge x_n ($x_n \neq 1$ für jedes n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + 1) = 2$.





■ $f(x) = \frac{1}{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert. (Abb. rechts oben)
1. Die Funktion ist zwar für alle $x \neq 0$ definiert.
2. Es gibt aber Folgen (x_n) ($x_n \neq 0$ für jedes n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, für die die Folgen $f(x_n) = \frac{1}{x_n}$ unbeschränkt sind, z.B. $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Grenzwertsätze für Funktionen

► Satz:
Sind die Funktionen f und g in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 definiert und gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x)$, so ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(val. mit dem analogen Satz für Folgen)

→ Satz (Grenzwertsätze):
Ist $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = g_2$, so gilt auch

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}[u(x)+v(x)] &= \lim_{x\to x_0} u(x) + \lim_{x\to x_0} v(x) = g_1 + g_2 \\
\lim_{x\to x_0}[u(x)-v(x)] &= \lim_{x\to x_0} u(x) - \lim_{x\to x_0} v(x) = g_1 - g_2 \\
\lim_{x\to x_0}[u(x)\cdot v(x)] &= \lim_{x\to x_0} u(x) \cdot \lim_{x\to x_0} v(x) = g_1 \cdot g_2 \\
\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = \frac{g_1}{g_2},\ \text{falls } g_2 \neq 0, v(x) \neq 0
\end{aligned}$$

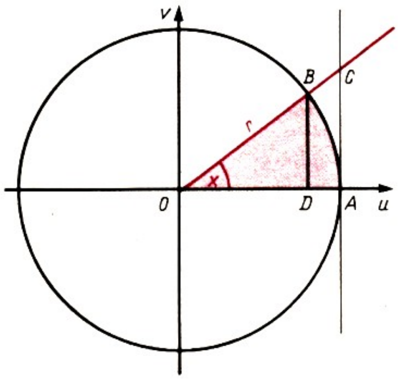
■
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(x^3 - 3x + 7) &= \lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 3x + \lim_{x\to 1} 7 \\
&= \left(\lim_{x\to 1} x\right)\left(\lim_{x\to 1} x\right)\left(\lim_{x\to 1} x\right) - \left(\lim_{x\to 1} 3\right)\left(\lim_{x\to 1} x\right) + \lim_{x\to 1} 7 \\
&= 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 7 + 7 = 5
\end{aligned}$$

Einige Grenzwerte von speziellen Funktionen

■ Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis:
Wir zeigen, dass für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, gilt

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$



Hinweis: In der nachfolgenden Gleichung (*) wird für die Berechnung der Sektorfläche das Bogenmaß arc $\alpha = x = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$ herangezogen. x ist das Bogenmaß von $\angle AOB$.

Es gilt für $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$A_{\triangle ODB} < A_{\text{Sektor } AOB} < A_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}\overline{OD} \cdot \overline{DB} < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{AC} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2}(r \cdot \cos x)(r \cdot \sin x) < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r \cdot r \cdot \tan x$$

$$\cos x \cdot \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Da $\sin x > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ folgt weiter

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Durch Übergang zu den Reziproken erhält man wegen $\cos x > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x$ und $sin(-x) = -\sin x$, gilt diese Ungleichung auch für x mit $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Demzufolge gilt:

$$\lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Folglich gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, was zu beweisen war.

■ Es gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$.
Beim Beweis werden folgende Aussagen benutzt:
1. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $(x \in P)$
2. Für jede Folge (a_n) mit positiven Gliedern a_n und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$, $(g > 0)$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} (\log_a a_n) = \log_a \left(\lim_{n \to \infty} a_n \right) = \log_a g$$

C.2. Stetigkeit von Funktionen

Stetigkeit an einer Stelle x_0

► Definition:
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn gilt:
1. f ist an der Stelle x_0 definiert, d.h., es existiert $f(x_0)$.
2. es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

3. es ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zur Grenzwertberechnung in den folgenden Beispielen vergleiche man mit den Beispielen unter dem Stichwort "Grenzwert einer Funktion".

■ $f(x) = x^2$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ stetig, denn es gilt $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$.

■ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $(x \in P, x \neq 0)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig, denn $f(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert und besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.

■ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $(x \neq 1, x \in P)$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ unstetig, denn f(x) ist an dieser Stelle nicht definiert.
Es existiert aber der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.
In diesem Fall spricht man von einer hebbaren Unstetigkeit der Funktion f. Man kann eine neue Funktion $g(x)$ definieren, die an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist:

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \end{cases}$$

Diese Funktion ist identisch mit der Funktion, deren Gleichung $y = x + 1$ ist.

■ $f(x) = \frac{1}{x}$, $(x \in P, x \neq 0)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig, denn die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert. Die Funktion besitzt auch keinen Grenzwert an dieser Stelle.

Stetigkeit in einem Intervall

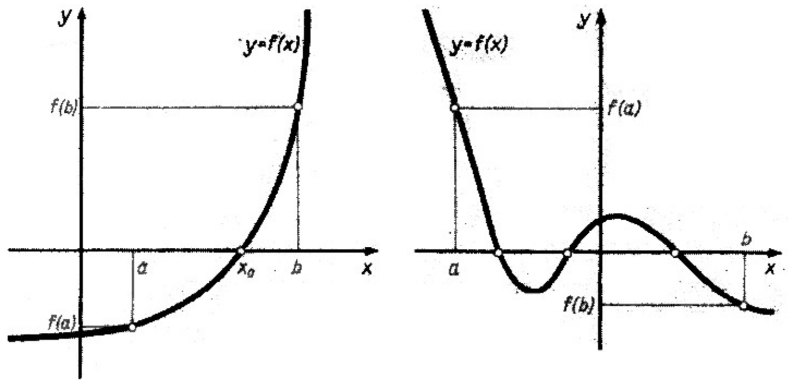
► Definition:
Die Funktion f ist in einem Intervall stetig genau dann, wenn die Funktion an jeder Stelle des Intervalls stetig ist.

Handelt es sich um ein abgeschlossenes Intervall, so ist an den Randpunkten der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert der Funktion zugrunde zu legen. Man spricht dann bezüglich dieser Stelle von linksseitiger bzw. rechtsseitiger Stetigkeit der Funktion an der Stelle x_0.

Sätze über stetige Funktionen

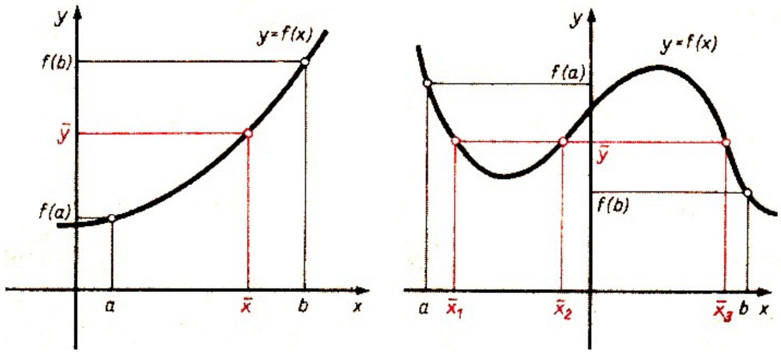
► Satz:
Ist f eine in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion, und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so hat f in $(a; b)$ mindestens eine Nullstelle, d. h., es existiert mindestens eine Zahl x_0, mit $a < x_0 < b$ und $f(x_0) = 0$.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes.



► Satz (Zwischenwertsatz):
Ist f eine in $\langle a;b\rangle$ stetige Funktion und ist $f(a) \neq f(b)$, so gilt: Für jedes $\overline{y}$ mit $f(a) < \overline{y} < f(b)$ oder $f(a) > \overline{y} > f(b)$ existiert mindestens ein $\overline{x}$ aus $(a;b)$ mit $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Sinngemäß heißt das: Eine stetige Funktion nimmt jeden Zwischenwert an.



► Satz:
Der Wertebereich einer in $\langle a;b\rangle$ stetigen Funktion f ist beschränkt. Obere und untere Grenze des Wertebereiches sind stets Funktionswerte von f in $\langle a;b\rangle$.
Sinngemäß bedeutet das: Eine in $\langle a;b\rangle$ stetige Funktion f hat in $\langle a;b\rangle$ stets ein Maximum und ein Minimum.

M ist Maximum der Funktion f im Definitionsbereich D genau dann, wenn es ein $x_0 \in D$ gibt mit $f(x_0) = M$ und wenn gilt:
M ist obere Grenze der Funktionswerte von f im Definitionsbereich D, d.h., wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq M$.

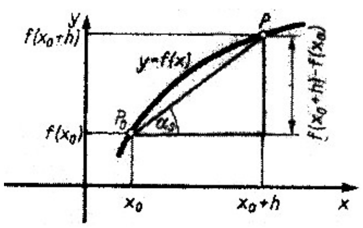
M ist Minimum der Funktion f im Definitionsbereich D genau dann, wenn es ein $x_0 \in D$ gibt mit $f(x_0) = M$ und wenn gilt:
M ist untere Grenze der Funktionswerte von f im Definitionsbereich D, d.h., wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x) \geq M$.

Die so definierten Extrema (Maxima oder Minima) einer Funktion nennt man auch globale Extrema, weil sie Extrema bezüglich des gesamten Definitionsbereiches der Funktion sind. Damit wird der Unterschied zu den lokalen Extrema zum Ausdruck gebracht, die Extrema bezüglich der Umgebung einer Stelle x_0 sind.

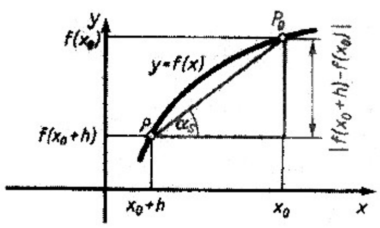
C.3. Ableitung einer Funktion

Differenzenquotient

► Definition:
Die Zahl $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $(h \neq 0)$ heißt der zu h gehörige Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0.



$h > 0 : \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$



$h < 0 : \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$

Ist $y = f(x)$ lokal monoton wachsend an der Stelle x_0, so ist der Differenzenquotient der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 stets positiv.
Analog gilt: Ist $y = f(x)$ an der Stelle x_0 lokal monoton fallend, so ist der Differenzenquotient der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 stets negativ.
Bei einer konstanten Funktion ist der Differenzenquotient an jeder Stelle gleich Null.

Der zu h gehörige Differenzenquotient der Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich dem Anstieg $\tan \alpha_S$, der Sekante durch die beiden Punkte $P_0(x_0; f(x_0))$ und $P(x_0 + h; f(x_0 + h))$:

$$\tan \alpha_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0

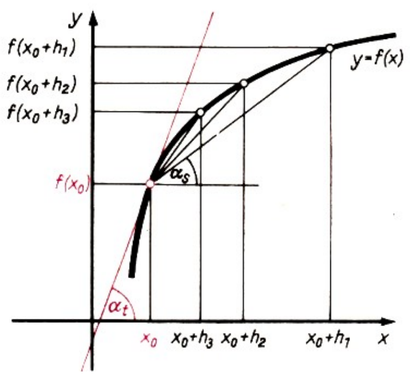
▶ Definition: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann, wenn gilt:
1. f ist in einer Umgebung von x_0 definiert
2. der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.

Dieser Grenzwert heißt die Ableitung (oder der Differentialquotient) der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit folgenden Symbolen bezeichnet:

$$f'(x_0) \qquad \text{oder} \qquad y'|_{x=x_0} \qquad \text{oder} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Anwendungen der Ableitung

1. Der Anstieg der Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ ist $f'(x_0)$.



$$\tan a_t = f'(x_0)$$

Der Anstieg der Tangente an die Funktionskurve wird auch als Anstieg der Funktionskurve im Punkt P_0 definiert.

■ Der Anstieg der Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $P_0(1; 1)$ soll ermittelt werden.
$x_0 = 1, f(x_0) = 1, f(x_o + h) = (1 + h)^3$

$$\begin{aligned} \tan \alpha_t &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \end{aligned}$$

2. Die Augenblicksgeschwindigkeit eines Körpers mit der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ zum Zeitpunkt t_0 ist gleich $s_(t_0)$.

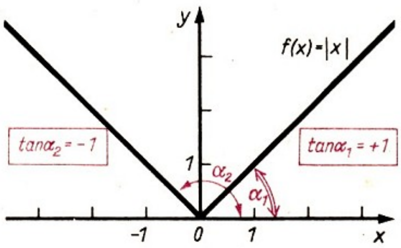
■ Die Augenblicksgeschwindigkeit eines Körpers im freien Fall zum Zeitpunk t_0 soll ermittelt werden. (t_0 ist in diesem Beispiel nicht der Zeitpunkt zu Beginn einer Messung, der gewöhnlich auch mit t_0 bezeichnet wird.)
$s(t) = \frac{g}{2}t^2$ (freier Fall)

$$\begin{aligned} s'(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g}{2}(t_0+h)^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g}{2}t_0^2 + gt_0h + \frac{g}{2}h^2 - \frac{g}{2}t_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(gt_0 + \frac{g}{2}h\right) = gt_0 \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

► Satz:
Für jede Funktion f gilt: Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 stetig.

Durch folgendes Beispiel wird deutlich, dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt:



Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ zwar stetig, aber sie ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Es gilt nämlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} +1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit:
Aus der Differenzierbarkeit (p) folgt die Stetigkeit (q). Es gilt: $p \to q$.
Aus der Stetigkeit (q) folgt nicht die Differenzierbarkeit (p). Es gilt nicht: $q \to p$

Dieser Sachverhalt kann mit Hilfe der mathematischen Termini "notwendig" und "hinreichend" folgendermaßen ausgedrückt werden:

Differenzierbarkeit (p) ist eine hinreichende Bedingung für Stetigkeit (q). Stetigkeit (q) ist eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit (p).
Stetigkeit (q) ist nicht hinreichend für Differenzierbarkeit (p). Differenzierbarkeit (p) ist nicht notwendig für Stetigkeit (q).

Ableitung einer Funktion in einem Intervall

► Definition:
Die Funktion f ist in dem Intervall der $(a; b)$ differenzierbar genau dann, wenn f an jeder Stelle x aus $(a; b)$ differenzierbar ist.
Die Ableitung der Funktion f ist diejenige Funktion f', für die gilt:
1. Der Definitionsbereich von f ist die Menge aller x, für die f differenzierbar ist,
2. Für jedes x aus dem Definitionsbereich von f' gilt: $f'(x)$ ist die Ableitung von f an der Stelle x.

Ableitungen höherer Ordnung

Ist die Ableitung f' einer Funktion f an einer Stelle x_0 des Definitionsbereiches von f differenzierbar, so bezeichnet man die Ableitung der Ableitung von f an der Stelle x_0 mit

$$f''(x_0) \text{ oder } y''|_{x=x_0} \text{ oder } \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

und nennt sie die zweite Ableitung von f an der Stelle x_0.
Analog zur Definition der Ableitung einer Funktion in einem Intervall wird die zweite Ableitung f'' in einem Intervall definiert. Sie wird mit

$$y'' \text{ oder } f''(x) \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2}$$

bezeichnet. In gleicher Weise werden die dritte, vierte, ..., n-te Ableitung einer Funktion definiert und mit

$$f''', \quad f^{(4)}, \quad f^{(5)}, ..., , \quad f^{(n)}$$

bezeichnet.

C.4. Differentiationsregeln

Summenregel, Produktregel, Quotientenregel ▶ Satz:
Sind die Funktionen u und v im Intervall $(a;b)$ differenzierbar, und seien ihre Ableitungen u' und v', dann sind auch die Funktionen $u+v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ ($v(x) \neq 0$) differenzierbar in $(a;b)$, und es gilt:

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x) + v'(x) \qquad \text{(Summenregel)}$$
$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$
$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)]^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

Beweis für die Produktregel
Es sei x_0 eine beliebige Zahl aus (a,b)

$$\begin{aligned}
[u(x)\cdot v(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0+h) + u(x_0)\cdot v(x_0+h) - u(x_0)\cdot v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} v(x_0+h) + u(x_0)\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}\right] \cdot \lim_{h\to 0} v(x_0+h) + \lim_{h\to 0} u(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}\right] \\
&= u'(x_0)\cdot v(x_0) + u(x_0)\cdot v'(x_0)
\end{aligned}$$

Da x_0 eine beliebige Zahl aus (a,b) sein sollte, gilt die Produktregel für alle x aus (a,b).

Bei den folgenden Beispielen werden Regeln für das Bilden der Ableitungen elementarer Funktionen benutzt.

■ $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$, $f'(x) = 6x + 2$

■ $f(x) = x \cdot \sin x$

$u(x) = x, u'(x) = 1, \quad v(x) = \sin x, v'(x) = \cos x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

■ $f(x) = \frac{3x^2+\sin x}{2x+3}$, $(2x + 3 \neq 0)$
$u(x) = 3x^2 + \sin x, u'(x) = 6x + \cos x, \quad v(x) = 2x + 3, v'(x) = 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)]^2} = \frac{(6x + \cos x)(2x + 3) - (3x^2 + \sin x) \cdot 2}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 18x + 2x \cdot \cos x + 3 \cdot \cos x - 6x^2 - 2 \sin x}{(2x + 3)^2} \end{aligned}$$

Ableitung einer verketteten Funktion (Kettenregel)

► Satz:
Ist die Funktion g an der Stelle x_0 und die Funktion f an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar, so ist auch die Funktion F mit $F(x) = f[g(x)]$, die durch Verkettung von g und f entsteht, an der Stelle x_0 differenzierbar, und es ist

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$$

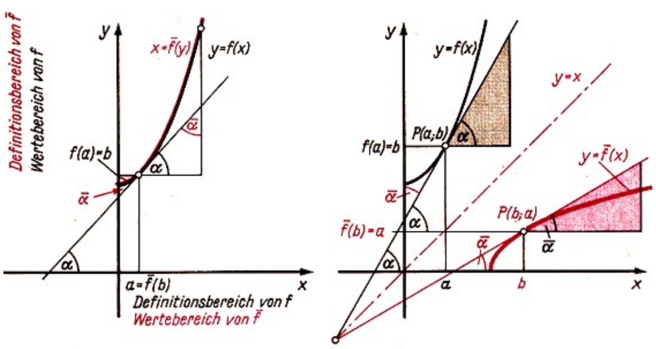
■ Es ist die Funktion $F(x) = (5x + 2)^3$ zu differenzieren.
$F(x) = (5x + 2)^3 = f[g(x)]$;
innere Funktion $z = g(x) = 5x + 2$; $g'(x) = 5$
äußere Funktion $f(z) = z^3$; $f'(z) = 3z^2$; $f'[g(x)] = 3 \cdot (5x + 2)^2$
$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = 3 \cdot (5x + 2)^2 \cdot 5 = 15(5x - 2)^2$

Ableitung zueinander inverser Funktionen

► Satz:
Ist f eine eineindeutige Funktion, die in einer Umgebung der Stelle x_0 differenzierbar ist, und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist die zu f inverse Funktion $\overline{f}$ an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar, und es ist $\overline{f}'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Sinngemäß bedeutet das: Die Ableitungen f' und $\overline{f}'$ zweier zueinander inverser Funktionen f und $\overline{f}$ für einander entsprechende Argumente sind zueinander reziprok.

Veranschaulichung des Satzes:



1. Möglichkeit (links): Die Graphen von f und $\overline{f}$ sind identisch.
2. Möglichkeit (rechts): Die Graphen von f und $\overline{f}$ sind axialsymmetrisch zur Geraden $y = x$.

$[a;b] \in f$, $y' = f'(a) = \tan\alpha$, $[b;a] \in \overline{f}$, $x' = \overline{f}'(b)\tan\overline{\alpha}$, $\qquad \alpha + \overline{\alpha} = 90°$

$$f'(a) \cdot \overline{f}'(b) = \tan\alpha \cdot \tan\overline{\alpha} = \tan\alpha\cot\alpha = 1$$
$$f'(a) = \frac{1}{\overline{f}'(b)} \qquad \text{oder} \qquad \overline{f}'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Der Satz wird angewendet, wenn die Ableitung einer gegebenen Funktion f an einer Stelle x_0 mit Hilfe der Ableitung ihrer Umkehrfunktion $\overline{f}$ an der Stelle $f(x_0)$ ermittelt werden soll. Hierzu nehmen wir in der Formulierung des Satzes folgende Veränderungen in der Bezeichnung vor: f und $\overline{f}$ werden gegeneinander vertauscht, und x_0 wird durch z_0 ersetzt.

Allgemeiner Fall:
Es sei f eine gegebene Funktion, x_0 sei ein Element des Definitionsbereiches von f. Gesucht ist $f'(x)$.
Es sei $\overline{f}$ die Umkehrfunktion von f, und es gelte:
1. $f(x_0)$ ist ein Element des Definitionsbereiches von $\overline{f}$.
2. $\overline{f}$ ist in einer Umgebung von $f(x_0)$ differenzierbar.
3. $\overline{f}[f(x_0)] \neq 0$.
Dann gilt nach dem Satz für $z_0 = f(x_0)$, folglich $x_0 = \overline{f}(z_0)$;

$$f'(x_0) = \frac{1}{\overline{f}'[f(x_0)]}$$

■ Beispiel
Gegeben sei $f(x) = \sqrt{x-2}$, $(x > 2)$. x_0 sei ein Element des Definitionsbereiches von f, also $x_0 > 2$. Gesucht ist $f'(x_0)$.
Die Umkehrfunktion von f ist $\overline{f}(x) = x^2 + 2$ $(x > 0)$ und es gilt:
1. $f(x_0) = \sqrt{x_0 - 2}$ ist für $x_0 > 2$ ein Element des Definitionsbereiches von $\overline{f}$, d.h. $f(x_0) > 0$.
2. $\overline{f}$ ist für alle $x > 0$ differenzierbar, also auch in einer Umgebung von $f(x_0)$.
3. $\overline{f}'(x) = 2x \neq 0$ für $x > 0$, also $\overline{f}'[f(x_0)] = 2f(x_0) \neq 0$. Also gilt

$$f'(x_0) = \frac{1}{\overline{f}'[f(x_0)]} = \frac{1}{2f(x_0)} \quad , \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 2}} \quad \text{für alle } x_0 > 2$$

C.5. Ableitung elementarer Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = c$

▶ Satz:
Jede in einem Intervall $(a;b)$ konstante Funktion $f(x) = c$ $(c \in P)$ ist in $(a;b)$ differenzierbar, und es gilt für jedes x aus $(a;b)$: $f'(x) = 0$.

Beweis:
Es sei x_0 eine beliebige Zahl aus $(a;b)$, dann gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Da x_0 eine beliebige Zahl aus $(a;b)$ sein sollte, gilt $f'(x) = 0$ für alle x aus $(a;b)$.
Geometrische Deutung: Der Graph von $f(x) = c$ ist ein Stück einer Geraden parallel zur Abszissenachse. Sein Anstieg ist demnach an jeder Stelle des Intervalls (a,b) gleich Null.

■ $f(x) = 5$; $f'(x) = 0$

Die Ableitung von $f(x) = x^n (n \in N, n > 0)$

▶ Satz:
Die Funktion $f(x) = x^n$ $(n > 0, n \in N)$ ist für alle $x \in P$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Beweis:
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
1. Induktionsanfang: $n = 1$; $f(x_0) = x_0$ Es ist zu zeigen, dass $f'(x_0) = 1 \cdot x_0^{n-1}$.
In der Tat, sei $f(x_0) = x_=0$, dann ist $f(x_0 + h) = x_0 + h$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(x_0) = 1, \qquad f'(x_0) = 1 \cdot 1, \qquad f'(x_0) = 1 \cdot x^0, \qquad f'(x_0) = 1 \cdot x^{1-1}$$

Das war zu zeigen.
2. Induktionsschritt
Es ist zu zeigen: Für alle k $(k \in N, k > 1)$ gilt
Wenn für $f(x_0) = x_0^k$ gilt $f'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1}$, dann gilt für $f_1(x_0) = x_0^{k+1}$ entsprechend $f_1'(x_0) = (k+1)x_0^{k+1}$.
In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= x_0^{k+1} \\ f_1(x_0) &= x_0 \cdot x_0^k \\ f_1(x_0) &= u(x_0) \cdot v(x_0) \\ & u(x_0) = x_0^k, u'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1}, v(x_0) = x, v'(x_0) = 1 \\ f_1'(x_0) &= u'(x_0)v(x_0 + u(x_0)v'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1} + 1 \cdot x_0^k = (k+1)x_0^k = (k+1)x_0^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Aus der Gültigkeit von 1. und 2. folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle natürlichen Zahlen.
Da x_0 eine beliebige reelle Zahl sein sollte, gilt die Aussage für alle reellen Zahlen.

■ $f(x) = 3x^2$; $f'(x) = 2 \cdot 3x^1 = 6x$

Die Ableitung von $f(x) = x^m$ **(**$m < 0$**,** $m \in G$**,** $x \neq 0$**)**

▶ Satz:
Die Funktion $f(x) = x^m$ $(m < 0,\ m \in G,\ x \neq 0)$ ist für alle x $(x \neq 0)$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

Beweis: Es sei $m = -n$ $(n > 0,\ n \in N)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{u(x)}{v(x)} \\ & u(x) = 1, u'(x) = 0, v(x) = x^n, v'(x) = nx^{n-1} \\ f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1} = m \cdot x^{m-1} \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

■ Es ist die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^3}$ für alle $x \neq 0$ zu bilden.

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad , \qquad f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Die Ableitung von $f(x) = x^r$ ($r \in R, x > 0$)

▶ Satz:
Ist r eine beliebige rationale Zahl, so ist die Funktion $f(x) = x^r$ $(x > 0)$ für jedes positive x differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

■

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad , \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = x^{-\frac{1}{5}} \qquad , \qquad f'(x) = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \qquad , \qquad f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}} \qquad , \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$$

Die Ableitung von $f(x) = \sin x$

▶ Satz:
Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist für alle $x \in P$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \cos x$$

Beweis:
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl. Dann ergibt sich als Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{\cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0 \cdot (1-\cos h)}{h} = \cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \frac{1-\cos h}{h} \\ &= \cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \cos x_0 \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \cdot \sin \frac{h}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h}\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \sin \frac{h}{2} = 0$$

gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 \cdot 1 = \cos x_0$$

Da x_0 eine beliebige reelle Zahl sein sollte, gilt die Aussage für alle reellen Zahlen.

Die Ableitung von $f(x) = \cos x$

▶ Satz:
Die Funktion $f(x) = \cos x$ ist für alle $x \in P$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = -\sin x$$

Beweis:
Auf Grund der Beziehungen $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ gilt

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad , \qquad f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$$

Die Ableitungen von $f(x) = \tan x$ und $f(x) = \cot x$

▶ Satz:
Die Funktionen $f(x) = \tan x$ und $f(x) = \cot x$ sind für jede Stelle x ihrer Definitionsbereiche differenzierbar, und es gilt

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad , \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Der Beweis kann mit Hilfe der Definitionsgleichungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad , \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

und der Quotientenregel geführt werden.

Die Ableitung von $f(x) = \log_a x$

▶ Satz:
Jede Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ ist für alle x mit $x > 0$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

Beweis:
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl mit $x_0 > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Als Differenzenquotient erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_a \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{x_0}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \\
&\text{Substitution } \frac{h}{x_0} = z; \text{ Dann gilt: Wenn } h \to 0, \text{ so } z \to 0 \\
&= \frac{1}{x_0} \log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}}
\end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{x_0} \log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{x_0} \log_a e$$

Das folgt aus

$$\lim_{z \to 0} \log_a (1 + z)^{\frac{1}{z}} = \log_a e$$

Da x_0 eine beliebige Zahl mit $x_0 > 0$ sein sollte, gilt die Aussage für alle Zahlen x mit $x > 0$.

Die Ableitung von $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= (\log_e x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x} \cdot 1 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Die Ableitung von $f(x) = a^x$

▶ Satz:
Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ $(-\infty < x < \infty,\ a > 0,\ a \neq 1)$ ist an jeder Stelle x differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Beweis:
x_0 sei ein beliebiges Element des Definitionsbereiches von $f(x) = a^x$, also $-\infty < x_0 < \infty$. Die Umkehrfunktion von f ist $\overline{f}(x) = \log_a x$, $x > 0$, und es gilt:

1. $f(x_0) = a^{x_0}$ ist für $-\infty < x_0 < \infty$ ein Element des Definitionsbereiches von $\overline{f}$, denn $f(x_0) > 0$.
2. $\overline{f}$ ist für alle $x > 0$ differenzierbar, also auch in einer Umgebung von $f(x_0)$.
3. $\overline{f}'(x) = \frac{1}{x} \log_a e \neq 0$ für alle x, $x > 0$, also

$$\overline{f}'[f(x_0)] = \frac{1}{f(x_0)} \cdot \log_a e \neq 0$$

Hieraus folgt

$$f'(x_0) = \frac{1}{\overline{f}'[f(x_0)]} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_0} \cdot \log_a e} = \frac{1}{a^{-x_0} \cdot \log_a e} = a^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_a e} = a^{x_0} \cdot \log_e a = a^{x_0} \cdot \ln a$$

Da x_0 eine beliebige Zahl sein sollte, gilt die Aussage für alle x mit $-\infty < x < \infty$.

■ $f(x) = 5^x$; $\qquad f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$

Die Ableitung von $f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$
Die e-Funktion geht durch Differentiation in sich selbst über; $f'(x) = f(x)$.
Geometrisch bedeutet das: Der Anstieg der Tangente an die Kurve der Funktion $y = e^x$ ist in jedem Punkt gleich der Ordinate dieses Punktes.

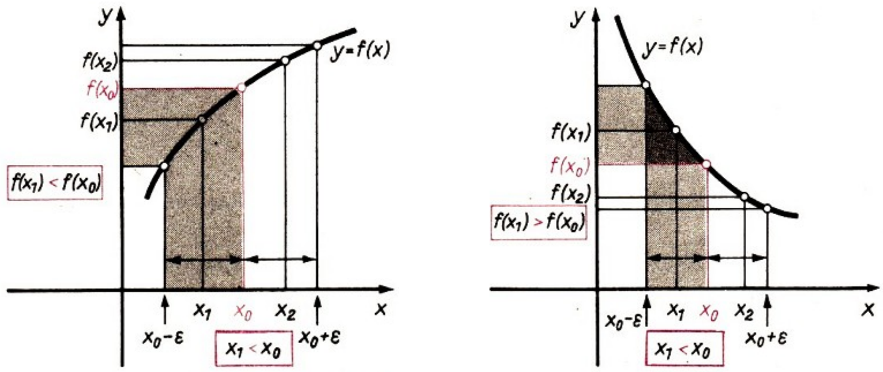
C.6. Lokales Verhalten von Funktionen

Lokale Monotonie

▶ Definition:
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 lokal monoton wachsend genau dann, wenn gilt:
1. f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.
2. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jede x gilt:
Wenn $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, so $f(x) < f(x_0)$, wenn $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, so $f(x_0) < f(x)$.

Die Funktion f ist an der Stelle x_0 lokal monoton fallend genau dann, wenn gilt:
1. f ist in einer Umgebung von x_0 definiert.
2. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jede x gilt:
Wenn $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, so $f(x) > f(x_0)$, wenn $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, so $f(x_0) > f(x)$.

Die Funktion ist monoton wachsend | Die Funktion ist monoton fallend

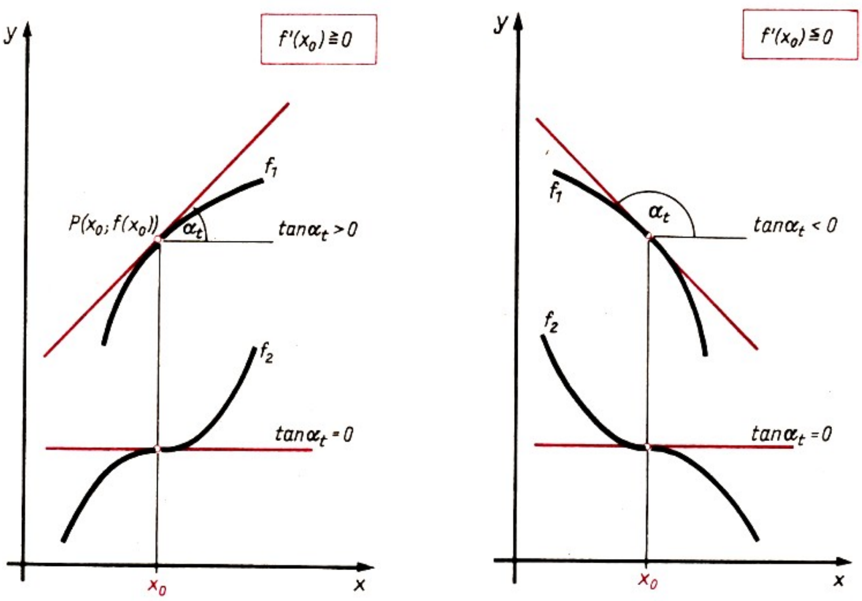


■

Im Intervall $(x - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ gilt:
Für alle Argumente, die kleiner als x_0 sind, sind die Funktionswerte auch
kleiner als $f(x_0)$. | größer als $f(x_0)$
Für alle Argumente, die größer als x_0 sind, sind die Funktionswerte auch
größer als $f(x_0)$. | kleiner als $f(x_0)$.

► Satz:
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 lokal monoton wachsend und in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) > 0$.
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 lokal monoton fallend und in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) < 0$.

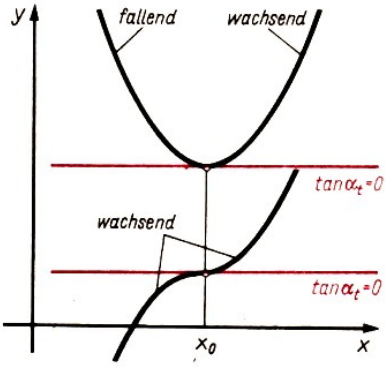
Die Funktion ist monoton wachsend | Die Funktion ist monoton fallend



■

Der Anstieg der Tangente im Punkt $P(x_0; f(x_0))$
ist nicht negativ | ist nicht positiv

Im Falle $f'(x_0) = 0$ kann nicht auf das Wachsen oder Fallen der Funktion an der Stelle x_0 geschlossen werden.



Nachweis der lokalen Monotonie einer Funktion an der Stelle x_0:

▶ Satz:
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, und es gilt $f'(x_0) > 0$, so ist f in x_0 lokal monoton wachsend.
Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, und es gilt $f'(x_0) < 0$, so ist f in x_0 lokal monoton fallend.

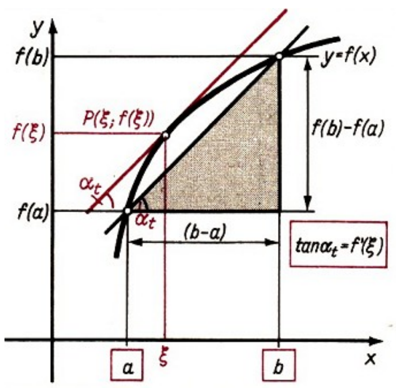
■ Es ist die Funktion $f(x) = e^x$ auf Monotonie zu untersuchen. Es gilt $f'(x) = e^x$.
Da $f'(x) = e^x$ für alle x positiv ist, ist $f(x) = e^x$ im ganzen Definitionsbereich monoton wachsend.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Satz von Rolle[12]

▶ Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung):
Ist eine Funktion f in $\langle a; b\rangle$ stetig und in $(a; b)$ differenzierbar, so gibt es mindestens eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$, so dass gilt
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$
Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für $f(a) = f(b) = 0$.

▶ Satz von Rolle:
Es sei f eine Funktion, die folgenden Bedingungen genügt
1. f ist in $\langle a; b\rangle$ stetig,
2. f ist in $(a; b)$ differenzierbar, 3. $f(a) = f(b) = 0$.
Dann gilt: Es gibt (mindestens) eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$, so dass gilt $f'(\xi) = 0$.

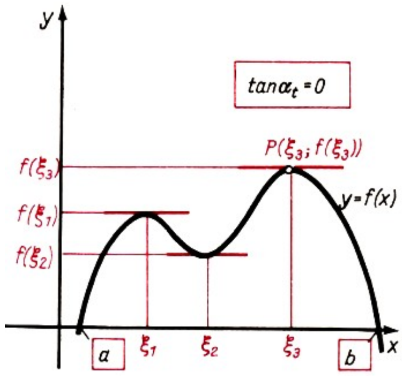
Geometrische Bedeutung - Mittelwertsatz der Differentialrechnung



Das Bild der in $\langle a; b\rangle$ stetigen und in $(a; b)$ differenzierbaren Funktion f enthält mindestens einen Punkt $P(\xi; f(\xi))$, mit $a < \xi < b$, in dem die Tangente an das Bild parallel zur Sekante durch $P_1(a; f(a))$ und $P_2(b; f(b))$ verläuft.

Geometrische Bedeutung - Satz von Rolle

[12] Rolle, Michel (1652-1719), französischer Mathematiker, Mitglied der Academie des sciences, fand 1690 den hier angegebenen Satz und konnte ihn im Jahre 1691 beweisen.



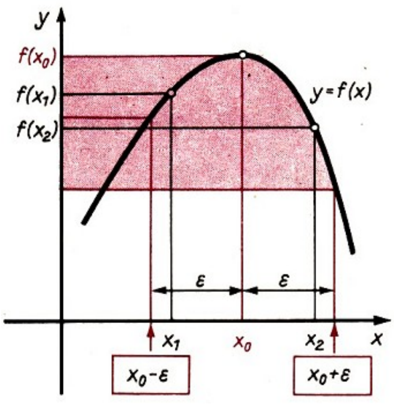
Das Bild der in $\langle a;b\rangle$ stetigen und in $(a;b)$ differenzierbaren Funktion f, die die Nullstellen a und b besitzt, enthält mindestens einen Punkt $P(\xi; f(\xi))$, in dem die Tangente an das Bild von f parallel zur Abszissenachse verläuft.

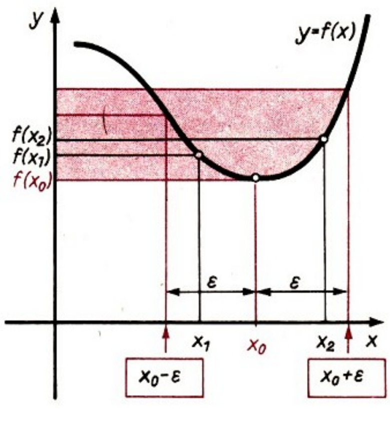
► Satz:
Die Funktion f ist eine in einem Intervall (a,b) konstante Funktion genau dann, wenn für jedes x aus dem Definitionsbereich von f gilt: $f'(x) = 0$.

► Satz:
Es seien u und v zwei im Intervall $\langle a;b\rangle$ stetige und in $(a;b)$ differenzierbare Funktionen. Es gelte $u'(x) = v'(x)$ für alle x aus $(a;b)$.
Dann gilt: $u(x) - v(x) = c =$ constant für alle x aus $(a;b)$.

Lokale Extrema

► Definition:
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$.
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für jedes x mit $x \neq x_0$ und $x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon$ gilt $f(x) > f(x_0)$.

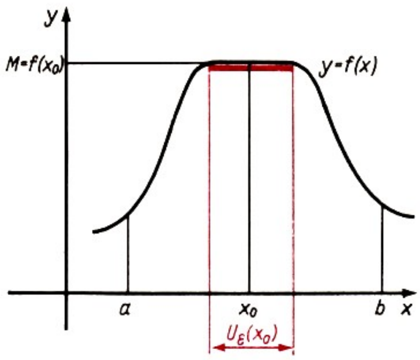


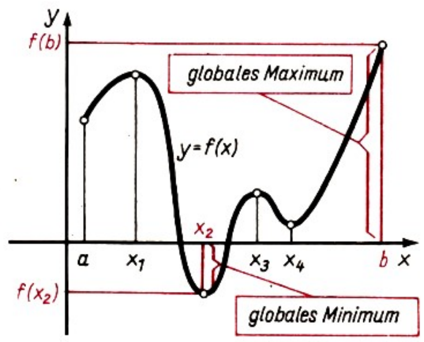


links: Lokales Maximum; rechts: Lokales Minimum

Im Unterschied zum globalen Maximum M, bei dem nur verlangt wird, dass kein Funktionswert größer als M ist, wird beim lokalen Maximum $M = f(x_0)$ verlangt, dass die Funktionswerte für Argumente in einer ε-Umgebung x_0 echt kleiner sind als M.
Entsprechendes gilt für Minima.

■ Die Funktion $y = f(x)$ besitzt in $(a;b)$ zwar ein globales, aber kein lokales Maximum, da die Funktion f in der Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ konstant ist. (Abb. links unten)





Ein lokales Extremum einer Funktion f kann auch globales Extremum sein. Das globale Maximum einer in einem Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion f ist entweder das größte lokale Maximum von f in $\langle a; b\rangle$ oder einer der Funktionswerte $f(a)$ oder $f(b)$. Entsprechendes gilt für das globale Minimum. (Abb. rechts oben)

Untersuchung einer Funktion auf lokale Extrema an der Stelle x_0

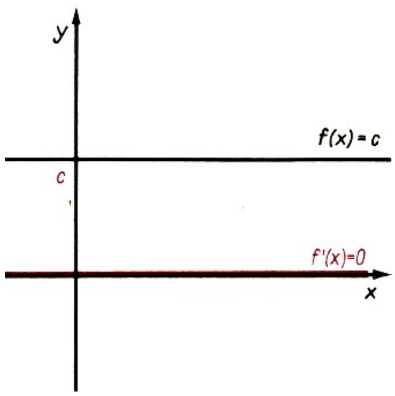
1. Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung

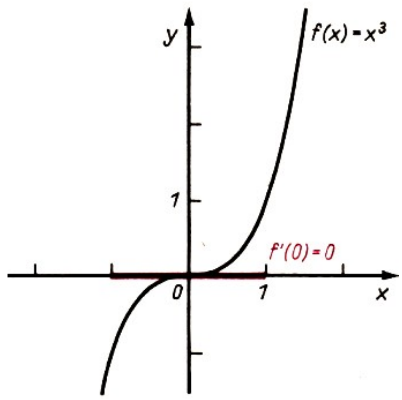
▶ Satz:
Wenn eine Funktion f in x_0 ein lokales Extremum hat und in x differenzierbar ist, so gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, zeigen folgende Beispiel:

■ Für jede konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$. (Abb. links)
Für $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_0 = 0$: $f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. (Abb. rechts)





Die Funktion $f(x) =$ c hat kein lokales Extremum. Die Funktion $f(x) = x^3$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ kein lokales Extremum.

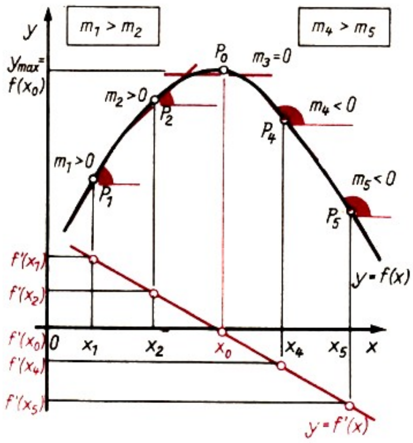
Es ist zu beachten: Der Satz liefert ein notwendiges Kriterium der Existenz lokaler Extrema nur für differenzierbare Funktionen. Es gibt darüber hinaus Funktionen, die lokale Extrema an Stellen haben, an denen sie keine Ableitung besitzen. So hat beispielsweise $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

2. Hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung

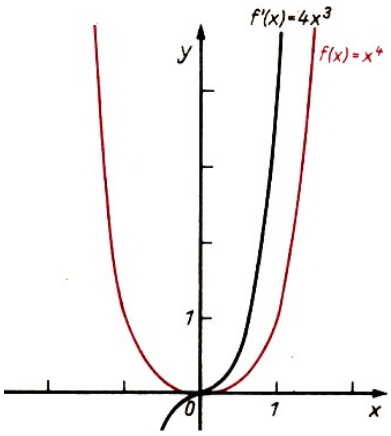
▶ Satz:
Gelten für eine Funktion f folgende Bedingung

1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar,
2. $f'(x_0) = 0$,
3. f' wechselt an der Stelle x_0 das Vorzeichen,

dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum, wenn f' mit ein lokales Minimum, wenn f' mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten übergeht bzw. ein lokales Maximum, wenn f' mit wachsendem x von negativen zu positiven Werten übergeht.



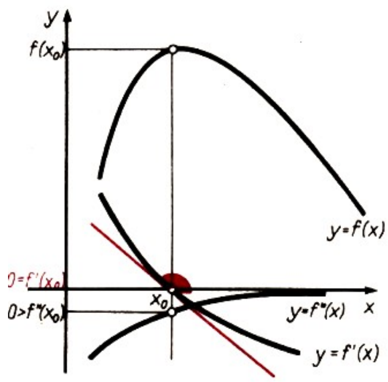
■ Die Funktion f hat bei x_0 ein lokales Maximum. Es geht f' bei x_0 mit wachsendem x von positiven zu negativen Werten über.



■ Die Funktion $f(x) = x^4$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.
1. f ist in der Umgebung von $x_0 = 0$ differenzierbar
2. $f'(0) = 0$.
3. f' wechselt an der Stelle $x_0 = 0$ das Vorzeichen von negativen zu positiven Werten

Auf ein Beispiel, das zeigt, dass diese Bedingung keine notwendige Bedingung ist, wurde hier verzichtet.

3. Hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung



► Satz:
Es sei f eine an der Stelle x_0 zweimal differenzierbare Funktion, für die gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) \neq 0$$

Dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$, ein lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$.

Es ist zu beachten:
Dieser Satz besagt nicht, dass im Falle $f''(x_0) = 0$ etwa stets kein Extremum vorliegt. Zum Beispiel ist für $f(x) = x^4$ $f''(x) = 12x^2$, also gilt $f''(0) = 0$. Dennoch hat $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

Berechnung lokaler Extrempunkte

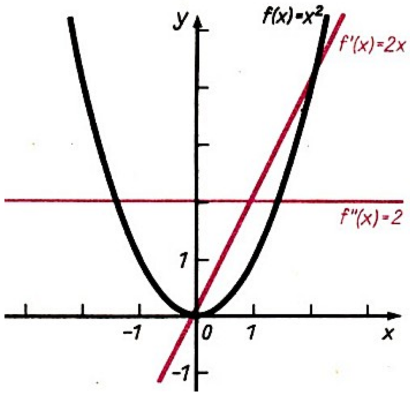
1. Fall:
f ist im Intervall $(a;b)$ zweimal differenzierbar.
1. Wir bilden die 1. Ableitung f' und die 2. Ableitung f''.
2. Wir berechnen die Nullstellen von f' in $(a;b)$, d.h., wir lösen die Gleichung $f'(x) = 0$.
Da $f'(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung dafür ist, dass f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum besitzt, müssen sich die Extremstellen unter den Nullstellen von f' befinden. Andere Argumente kommen im Falle der Differenzierbarkeit von f als Extremstellen nicht in Frage.

3. Für jede dieser Nullstellen entscheiden wir mit Hilfe der weiteren Bedingungen ($f''(x_0) \neq 0$; Vorzeichenwechsel von f' an der Stelle x_0), ob dort ein lokales Extremum vorliegt.

2. Fall:
Es gibt im Intervall $(a;b)$ Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist. Für diese Stellen sind gesonderte Untersuchungen erforderlich.

Konvexität

▶ Definition:
Die Funktion f ist in x_0 lokal konvex genau dann, wenn gilt:
1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar,
2. f' ist in x_0 lokal monoton wachsend.

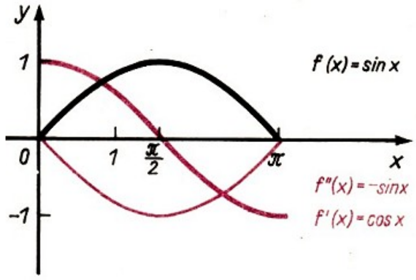


■ Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle reellen Zahlen lokal konvex, denn $f'(x) = 2x$ ist für alle x monoton wachsend, und f ist für alle x differenzierbar.

Geometrische Bedeutung: Ist die Funktion f lokal konvex, so ist ihr Bild nach unten gewölbt.

Konkavität

▶ Definition:
Die Funktion f ist in x_0 lokal konkav genau dann, wenn gilt:
1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar,
2. f' ist in x_0 lokal monoton fallend.



■ Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist für alle x mit $0 < x < \pi$ lokal konkav, denn $f'(x) = \cos x$ ist für alle x mit $0 < x < \pi$ lokal monoton fallend, weil $f''(x) = -\sin x$ für alle x mit $0 < x < \pi$ negativ ist.

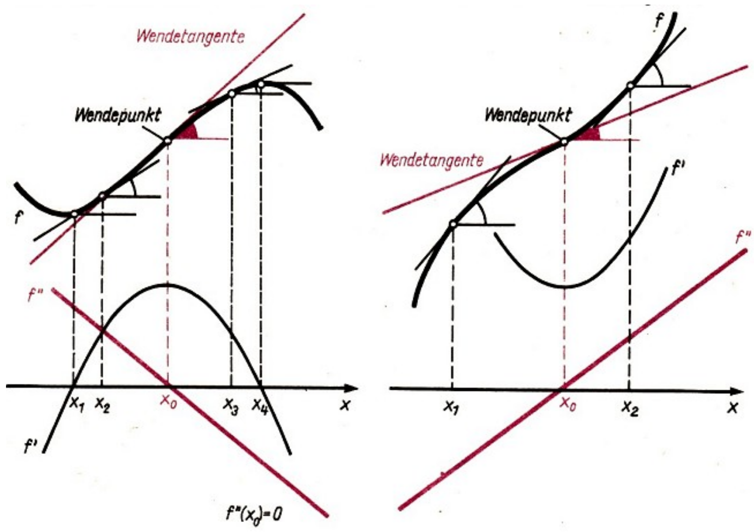
Geometrische Bedeutung: Ist die Funktion f lokal konkav, so ist ihr Bild nach oben gewölbt.

Wendepunkt

▶ Definition:
Die Funktion f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt genau dann, wenn gilt:

1. f ist in einer Umgebung von x_0 differenzierbar.
2. $f'(x_0)$ ist ein lokales Extremum.

Die Tangente in einem Wendepunkt an die Kurve heißt Wendetangente.



Die Wendestellen von f (d.h. die Stellen x_0, an denen die Funktion f Wendepunkte besitzt) sind identisch mit den Extremstellen von f'. Folglich gelten für die Ermittlung der Wendestellen von f die analogen notwendigen und hinreichenden Kriterien bezogen auf f', wie sie zur Ermittlung von Extremstellen angewandt werden.

C.7. Kurvendiskussionen

Unter einer Kurvendiskussion versteht man das Ermitteln charakteristischer Merkmale einer gegebenen Funktion und die graphische Darstellung der Funktion mit Hilfe dieser Merkmale.

	Merkmale der Funktion	Graphische Darstellung dieser Merkmale	Berechnung mit Hilfe der Funktionsgleichung
1.1	Nullstellen $x_1, x_2, \ldots$	Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der Abszissenachse $P_{x1}(x_1; 0), P_{x2}(x_2; 0)$,...	Ermitteln der Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$
1.2	Funktionswert für $x = 0$	Ordinate y_0 des Schnittpunktes der Kurve mit der Ordinatenachse $P_{y0}(0, y_o)$	Ermitteln des Funktionswertes $f(0) = y_0$
2.	Pole x_{P_1}, x_{P_2},...	Asymptoten parallel zur Ordinatenachse durch die Punkte $P(x_{P_1}; 0)$, ...	Bei gebrochen-rationalen Funktionen $\frac{u(x)}{v(x)}$ Ermitteln der x, für die gilt: $v(x) = 0$ und $u(x) \neq 0$
3.	Verhalten im Unendlichen	Spezielle Fälle: a) Asymptoten, die parallel zur Abszissenachse verlaufen	Berechnen von $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
		b) Asymptoten die weder zur Abszissen- noch zur Ordinatenachse parallel verlaufen	Bestimmen einen linearen Funktion $g(x)$ mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

	Merkmale der Funktion	Graphische Darstellung dieser Merkmale	Berechnung mit Hilfe der Funktionsgleichung
4.	Lokale Extrema $f(x_{E_1})$, $f(x_{E_2})$... an den Extremstellen	Lokale Extrempunkte P_{E_1}, P_{E_2},... $P_E(x_E, f(x_E))$	4.1. Ermitteln der Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ notwendige Bedingung
			4.2 Entscheiden ob ein lokales Extremum vorliegt hinreichende Bedingung
			1.Möglichkeit $f''x_E \neq 0$ 2.Möglichkeit f' wechselt Vorzeichen bei x_E
	an der Stelle x_E lokales Maximum	bei x_E ein Höchstpunkt	$f''(x_E) > 0$ oder Vorzeichenwechsel positiv - negativ bei x_E
	an der Stelle x_E lokales Minimum	bei x_E ein Tiefstpunkt	$f''(x_E) < 0$ oder Vorzeichenwechsel negativ - positiv bei x_E
			4.3 Berechnen der lokalen Extrema $y_{E_k} = f(x_{E_k})$
			4.4 Untersuchung der Stellen an denen $f(x)$ definiert, aber $f'(x)$ nicht existiert
5.	Wendestellen x_{W_1}, x_{W_2},...	Wendepunkte P_{W_1},... $P_W(x_W; f(x_W))$ $f'(x_W)$ ist Anstieg der Wendetangente	5.1. Ermitteln der Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$ notwendige Bedingung
			5.2 Entscheiden, ob für $f'(x)$ lokales Extremum vorliegt hinreichende Bedingung
			1.Möglichkeit $f'''(x_W) \neq 0$ 2.Möglichkeit $f''(x)$ wechselt Vorzeichen bei x_w
		Die Kurve geht von konvex in konkav über	$f'''(x_W) < 0$ $f''(x)$ Vorzeichenwechsel positiv - negativ bei x_W
		Die Kurve geht von konkav in konvex über	$f'''(x_W) > 0$ $f''(x)$ Vorzeichenwechsel negativ - positiv bei x_W
			5.3 Berechnen der Ordinaten der Wendepunkte $y_{W_k} = f(x_{W_k})$

■ Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-5}$, $x \neq \frac{5}{2}$

1. Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen

1.1 Schnittpunkte mit der Abszissenachse $P_x(X; 0)$

$$f(x) = 0, \quad \frac{x^2 - 3}{2x - 5} = 0, \qquad x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$$

$P_{x_1}(\sqrt{3}; 0)$, $\quad P_{x_2}(-\sqrt{3}; 0)$

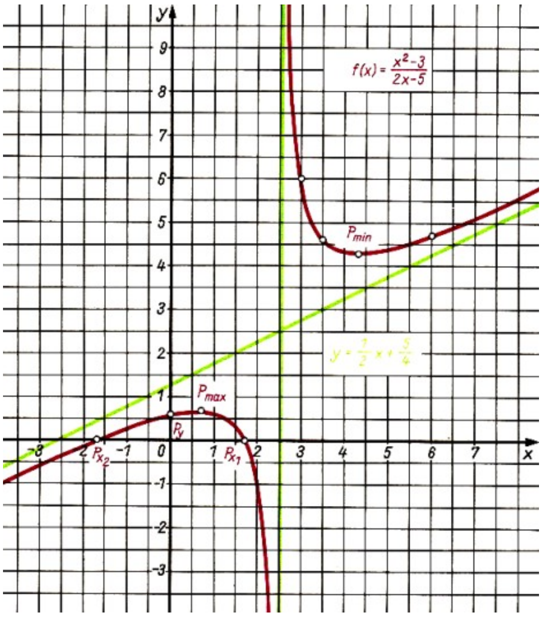
1.2. Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinatenachse $P_y(0; y)$

$$f(0) = \frac{0^2 - 3}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{3}{5}; \qquad P_y\left(0; \frac{3}{5}\right)$$

2. Pole

$$2x - 5 = 0, \qquad x_{P_1} = \frac{5}{2}$$

Untersuchung des Zählers: $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3 \neq 0$



3. Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \pm\infty$$

Bestimmung der Asymptote

$$\begin{array}{l} \left(x^2 \qquad -3\right) : \left(2x - 5\right) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \dfrac{\frac{13}{4}}{2x - 5} \\ \underline{-x^2 + \frac{5}{2}x} \\ \qquad \frac{5}{2}x - 3 \\ \qquad \underline{-\frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} \\ \qquad \qquad \frac{13}{4} \end{array}$$

Die Gleichung der Asymptote ist $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$, denn es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{2x - 5} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{\frac{13}{4}}{2x - 5}\right] = 0$$

4. Lokale Extrempunkte

4.1. Extremstellen [notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 5} = \frac{u(x)}{v(x)}, \qquad u(x) = x^2 - 3, u'(x) = 2x; v(x) = 2x - 5, v'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{2x(2x-5) - (x^2-3)\cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{2x^2-10x+6}{(2x-5)^2}$$

$$f'(x) = 0, \quad \frac{2x^2-10x+6}{(2x-5)^2} = 0, \quad 2x^2-10x+6 = 0, \quad x^2-5x+3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}}, \qquad x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4{,}3, \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0{,}7,$$

4.2. Entscheidung (hinreichende Bedingung - Vorzeichen von f'')

$$f'(x) = \frac{2x^2-10x+6}{(2x-5)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad \text{mit } u(x_E) = 0, v(x_E) \neq 0$$

$$f''(x_E) = \frac{u'(x_E)v(x_E) - u(x_E)v'(x_E)}{[v(x_E)]^2}$$

Wegen $u(x_E) = 0$ gilt

$$f''(x_E) = \frac{u'(x_E)}{v(x_E)} = \frac{4x_E - 10}{(2x_E-5)^2}$$

$x_{E_1} = 4{,}3$: $f''(4{,}3) > 0$, also bei $x_{E_1} = 4{,}3$ ein lokales Minimum
$x_{E_2} = 0{,}7$: $f''(0{,}7) < 0$, also bei $x_{E_2} = 0{,}7$ ein lokales Maximum

4.3 Ordinaten der Extrempunkte $y_E = f(x_E)$

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-5}$$

$x_{E_1} = 4{,}3$; $\quad y_{E_1} = f(4{,}3) \approx 4{,}3, \qquad P_{\min}(4{,}3; 4{,}3)$
$x_{E_2} = 0{,}7$; $\quad y_{E_2} = f(0{,}7) \approx 0{,}7, \qquad P_{\max}(0{,}7; 0{,}7)$

5. Wendepunkte

5.1 Wendestellen [notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$]

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x^2-10x+6}{(2x-5)^2} = \frac{u(x)}{v(x)} \\
f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
&= \frac{(4x-10)(2x-5)^2 - (2x^2-10x+6)\cdot 2(2x-5)\cdot 2}{(2x-5)^4} \\
&= \frac{(4x-10)(2x-5) - 4(2x^2-10x+6)}{(2x-5)^3} = \frac{26}{(2x-5)^3}
\end{aligned}$$

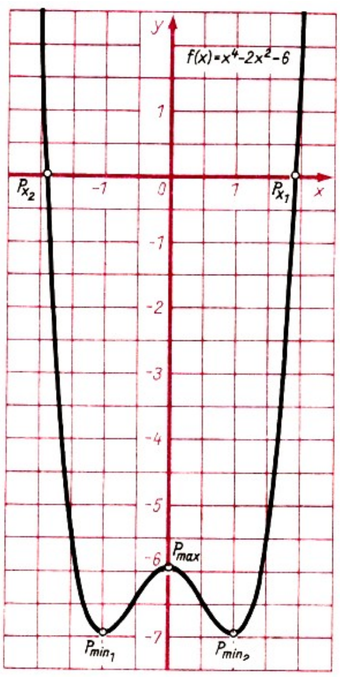
Die notwendige Bedingung für die Existenz von Wendepunkten - f'' ist differenzierbar und $f''(x) = 0$ - ist für kein x erfüllt. Die Funktion hat keine Wendepunkte.
Zum Zeichnen der Kurve wählt man geeignete zusätzliche Punkte, zu deren Bestimmung man zweckmäßigerweise eine Tabelle benutzt

x	x^2	x^2-3	$2x$	$2x-5$	$\frac{x^2-3}{2x-5}$
Nullst. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$					0
Nullst. $-\sqrt{3} \approx -1{,}7$					0
0	0	-3	0	-5	0,6
Max. 0,7	0,49	-2,51	1,4	-3,6	0,7
Min. 4,3	18,49	15,49	8,6	3,6	4,3
Pol 2,5					-
-4	16	13	-8	13	-1
2,2	4,84	1,84	4,4	-0,6	-3,1
3	9	6	6	1	6
3,5	12,25	9,25	7	2	4,6
6	36	33	12	7	4,7

■ Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 - 6$

1. Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen

1.1. Schnittpunkte mit der Abszissenachse $P_x(x;0)$



$f(x) = 0$; $f(x) = x^4 - 2x^2 - 6$; Substitution: $x^2 = z$
$z^2 - 2z - 6 = 0$; $\quad P_{x_1}(1{,}9;0), P_{x_2}(-1{,}9;0)$

1.2. Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $P_y(0;y)$

$f(0) = -6$, $P_y(0;-6)$

2. Pole: Pole sind nicht vorhanden.

3. Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right) = \infty; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

4. Lokale Extrempunkte

$P_{\max}(0;-6), \quad P_{\min_1}(-1;-7), \quad P_{\min_2}(1;-7)$

5. Wendepunkte

$P_{W_1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}; -\frac{59}{6}\right)$ bzw. $P_{W_1}(0{,}6;-6{,}6)$
$P_{W_2}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}; -\frac{59}{6}\right)$ bzw. $P_{W_2}(-0{,}6;-6{,}6)$
$P_{W_1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}; -\frac{59}{6}\right)$ bzw. $P_{W_1}(0{,}6;-6{,}6)$

■ Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$; $-\infty < x < \infty$

1. Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen

1.1. Schnittpunkte mit der Abszissenachse $P_x(x;0)$

$$\frac{x}{x+2} = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad Px_1(0;0)$$

1.2. Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $P_y(0;y)$

$$f(0) = \frac{0}{0+2} = 9, \qquad P_y(0;0)$$

2. Pole: $x^2 + 2 = 0$ ist für kein reelles x erfüllt. Es existieren keine Pole.

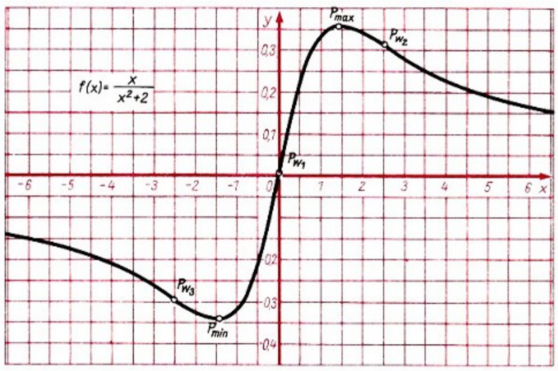
3. Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{0+1} = 0$$

Die Abszissenachse ist Asymptote.

4. Lokale Extrempunkte
$P_{\max}\left(\sqrt{2}; \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ bzw. $P_{\max}(1{,}4; 0{,}35)$
$P_{\min}\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ bzw. $P_{\min}(-1{,}4; -0{,}35)$

5. Wendepunkte
$P_{W_1}(0;0)$; $P_{W_2}\left(\sqrt{6}; \frac{1}{8}\sqrt{6}\right)$ bzw. $P_{W_2}(2{,}4; 0{,}3)$
$P_{W_3}\left(-\sqrt{6}; -\frac{1}{8}\sqrt{6}\right)$ bzw. $P_{W_3}(-2{,}4; -0{,}3)$



■ Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = \frac{4-x}{4}\sqrt{x}$, $x \geq 0$
1. Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen
1.1. Schnittpunkt mit der Abszissenachse $P_x(x;0)$
$f(x) = \frac{1}{4}(4-x)\sqrt{x}0$
$x_1 = 0$ ist das Ende des Definitionsbereiches: $P_{x_1}(0;0)$
$x_2 = 4$: $P_2x_2(4;0)$
1.2 Schnittpunkt mit der Ordinatenachse $P_y(0;y)$
$f(0) = 0$: $P_y(0;0)$
2. Pole: Pole liegen nicht vor.

3. Verhalten im Unendlichen
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

4. Lokale Extrempunkte
4.1 Extremstellen x_E [notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$]

$$f'(x) = \frac{4-3x}{8\sqrt{x}}, \quad \frac{4-3x}{8\sqrt{x}} = 0, \quad x_{E_1} = \frac{4}{3}$$

4.2 Entscheidung [hinreichende Bedingung $f''(x_E) \neq 0$]

$$f''(x_E) = \frac{-3}{8\sqrt{x_E}}, \qquad f''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$$

also ein lokales Maximum bei $x_E = \frac{4}{3}$

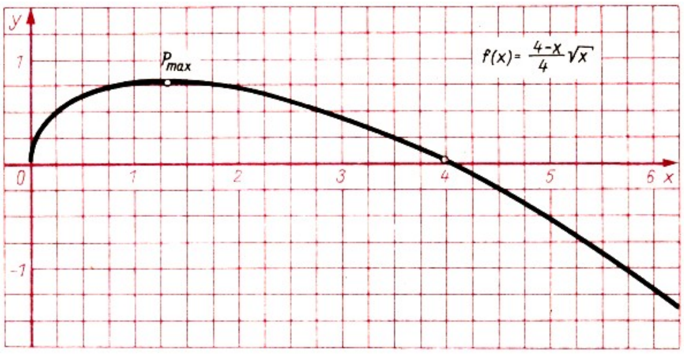
4.3. Ordinaten des Extrempunktes: $y_E = f(x_E)$

$y_E = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}$; $\quad P_{\max}\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$ bzw. $P_{\max}(1{,}33; 0{,}77)$

5. Wendepunkte
5.1. Wendestellen x_W [notwendige Bedingung: $f''(x_W) = 0$]

$$f''(x) = -\frac{3x+4}{16x\sqrt{x}}; \qquad x_W = -\frac{4}{3}$$

x_W liegt außerhalb des Definitionsbereiches der Funktion f. Die Funktion hat keine Wendepunkte.



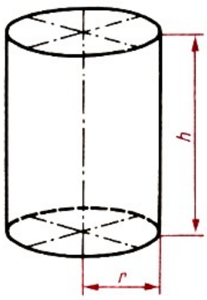
C.8. Extremwertaufgaben

In der Praxis treten viele Probleme auf, zu denen es verschiedene Lösungen gibt. Man ist bestrebt, unter diesen Lösungen solche zu finden, die entsprechend dem Sachverhalt als möglichst günstig bzw. am günstigsten (optimal) anzusehen sind.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung optimaler Lösungen besteht in der Ermittlung von lokalen Extremwerten gegebener Funktionen, die in vielen Fällen mit dem gesuchten (globalen) Extremwert in dem gegebenen Intervall übereinstimmen.

■ Welche Abmessungen müssten Konservendosen in der Form eines geraden Kreiszylinders mit gegebenem Volumen V haben, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Mathematische Formulierung des Problems: A_O soll ein Minimum werden.
Gesucht: $r_{\min}, A_{\min}$, $V = $ const.



Lösung des mathematischen Problems 1. Aufstellen einer Funktionsgleichung für die zu minimierende Funktion A_O
1.1. $A_O(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Das ist eine Funktion von zwei Variablen r und h.
1.2. Reduzierung der Variablenanzahl durch Einbeziehung der Nebenbedingung $V = $ const.

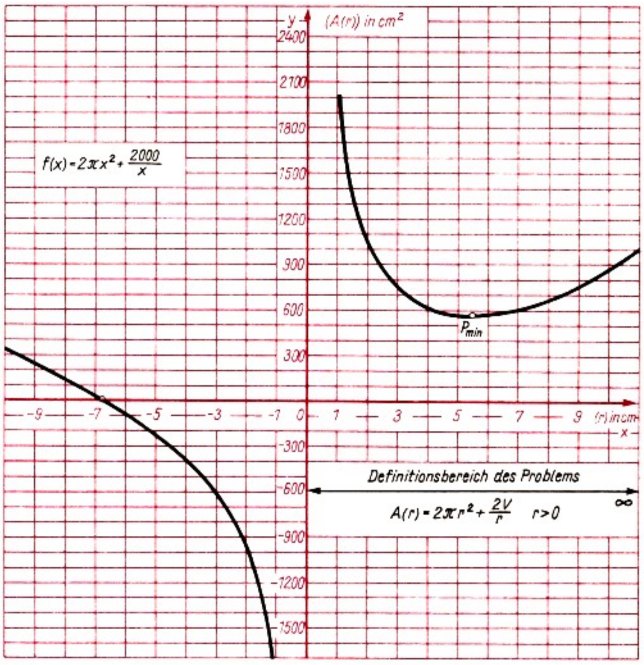
$V = \pi r^2 h; \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}$

$$A_O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad (r > 0)$$

Da die Variable r in unserem Fall eine Länge bedeutet, also positiv ist, wird das gegebene Problem durch die Funktion $A_0(r)$ mit dem Definitionsbereich $0 < r <$ erfasst.
Die Funktion $A_O(r)$ mit $0 < r < \infty$ ist Teilfunktion einer Funktion

$$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x, \quad (-\infty < x < \infty, x \neq 0)$$

Die folgende Abbildung stellt diesen Sachverhalt für $V = 1000$ cm^3 dar.



2. Bestimmung der Extrema von $A_O(r)$ für $r > 0$
2.1. Extremstellen r_E [notwendige Bedingung $A_O'(r_E) = 0$]

$$A_0'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, \qquad A_0'(r) = 0$$

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0, \qquad 4\pi r^3 = 2V, \qquad r_E = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

2.2. Entscheidung [hinreichende Bedingung $A_O''(r_E) \neq 0$]

$$A_O''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}, \qquad A_O''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} > 0$$

Also hat $A_O(r)$ bei $r_E = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ein lokales Minimum.
Im Definitionsbereich gibt es keine Stelle, für die $A_O(r)$ kleiner wäre als $A_O(r_E)$, denn $A_O(r)$ ist stetig, und es gilt

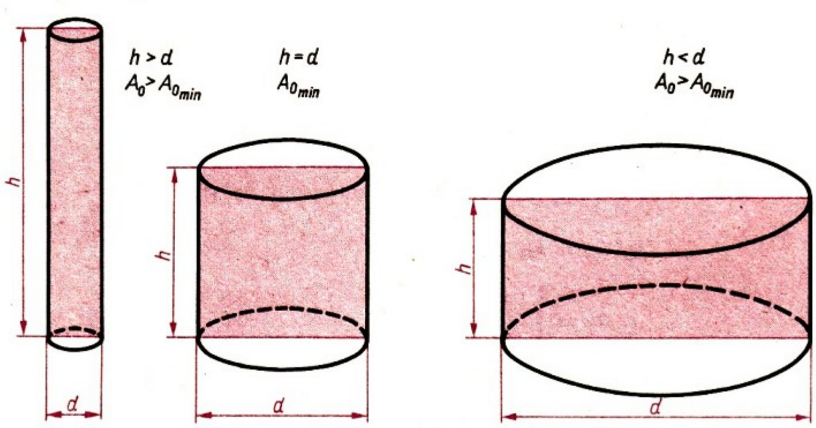
$$\lim_{r\to\infty} A_O(r) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{r\to 0} A_O(r) = +\infty$$

Da ferner $A_O(r)$ für alle $r > 0$ differenzierbar ist, gibt es außer r_E keine weitere Stelle, an der die Funktion $A_O(r)$ ein lokales Extremum haben könnte. Damit ist das lokale Minimum auch Minimum im gesamten Intervall $0 < r < \infty$ (globales Minimum).

3. Bestimmung von $h_{\min}$

$$h_{\min} = \frac{V}{\pi r_{\min}^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_{\min}$$

4. Diskussion der Lösung
Der Zylinder mit der geforderten Minimalbedingung für die Oberfläche hat einen quadratischen Achsenschnitt: $h_{\min} = d_{\min}$.



Lösung des praktischen Problems
Minimaler Blechverbrauch tritt genau dann ein, wenn die Konservendosen einen quadratischen Achsenschnitt besitzen. Bei der praktischen Herstellung von Konservendosen lässt man sich bei der Bestimmung der Abmessungen allerdings noch von weiteren Forderungen leiten, wie Art der in den Büchsen aufzubewahrenden Produkte und Handlichkeit beim Verbrauch der abgefüllten Mengen.

Näherungsweises Berechnen von Funktionswerten

Ist der Funktionswert $f(x_0)$ einer Funktion f bekannt, so kann man unter Anwendung des Mittelwertsatzes einen Funktionswert $f(x_0 + h)$ näherungsweise berechnen.
Hierbei wird vorausgesetzt, dass f im Intervall $\langle x_0; x_0 + h\rangle$, $(h > 0)$ existiert und monoton ist. Dann gilt, falls f' in $\langle x_0; x_0 + h\rangle$ monoton wächst:

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0) < f(x_0 + h) < f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + h)$$

Es gilt, falls f' in $\langle x_0; x_0 + h\rangle$ monoton fällt:

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + h) < f(x_0 + h) < f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

■ Aus der Tafel der natürlichen Logarithmen kann der Funktionswert $\ln 15 \approx 2{,}7081$ abgelesen werden. Es soll der Funktionswert $\ln 15{,}2$ näherungsweise ermittelt werden.

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 15, \quad h_0{,}2, \quad x_0 + h = 15{,}2, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Da die Funktion $f'(x)$ für $x > 0$ monoton fallend ist, gilt

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + h) < f(x_0 + h) < f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

(*) $\ln 15 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{15{,}2} < \ln 15{,}2 < \ln 15 + 0{,}2 \cdot \frac{1}{15}$
Da $f(x) = \ln x$ im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend ist, erhält man für $\ln 15 \approx 2{,}7081$ (Tafelwert) folgende Abschätzung:
(1) $2{,}70805 < \ln 15 < 2{,}70815$
Außerdem gilt
(2) $\frac{0{,}2}{15} = 0{,}01\overline{3} < 0{,}01334,$ (3) $0{,}01315 < 0{,}013158 = \frac{0{,}2}{15{,}2}$

Damit ergibt sich insgesamt aus der Ungleichungskette (*) unter Verwendung der Abschätzungen (1), (2), (3):

$$2{,}70805 + 0{,}01315 < \ln 15{,}2 < 2{,}70815 + 0{,}01334$$
$$2{,}72120 < \ln 15{,}2 < 2{,}72149$$
$$2{,}7212 < \ln 15{,}2 < 2{,}7215$$

Setzen wir $\ln 15{,}2 \approx 2{,}7213$, so ist der Fehler dieses Näherungswertes höchstens gleich 0,0002: $|\ln 15{,}2 - 2{,}7213| < 0{,}0002.$

D. Integralrechnung

D.1. Das bestimmte Integral

Zerlegung eines Intervalls

▶ Definition:
Unter einer Zerlegung eines $\mathfrak{z}_n$ abgeschlossenen Intervalls $\langle a; b\rangle$ in n Teilintervalle versteht man eine (endliche) Folge
$x_0, x_1, ..., x_n$ mit $x_0 = a, x_n = b$ und $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ gibt es eine Zahl l_n, für die gilt:
1. l_n ist gleich der Länge eines der Teilintervalle, in die $\langle a; b\rangle$ durch $\mathfrak{z}_n$ zerlegt wird.
2. $l_n \geq x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, ..., n$
Diese Zahl wird maximale Intervalllänge der Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ genannt.

Zerlegungssumme

▶ Definition:
Unter einer Zerlegungssumme s_n, die zu einer im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion f und zur Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ gehört, versteht man die Zahl

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

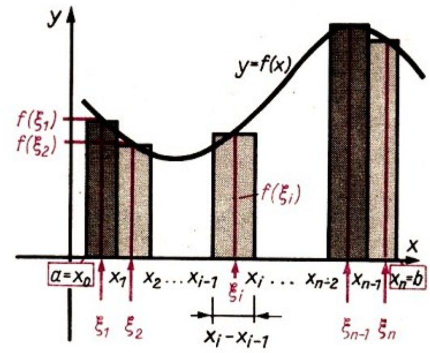
Hierbei sind die ξ_i beliebige Zahlen mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Geometrische Bedeutung der Zerlegungssumme:

Sind die Funktionswerte von f im Intervall $\langle a; b\rangle$ nicht negativ, so ist die Zerlegungssumme gleich der Summe der Flächeninhalte

$$f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

der Rechtecke mit den Seitenlängen $f(\xi)$ und $(x_i; x_{i-1})$.



Die Zerlegungssumme ist ein Näherungswert für den Flächeninhalt der Fläche, die eingeschlossen wird durch den Graph der Funktion f, die Abszissenachse und die Parallelen zur Ordinatenachse durch $x = a$ und $x = b$.

Zerlegungsfolge

Ist für jede natürliche Zahl n $(n > 0)$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ des Intervalls $\langle a; b\rangle$ gegeben, so bilden diese Zerlegungen eine sogenannte Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_n)$ für das Intervall $(a; b)$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_1 &: \quad a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} = b \\
\mathfrak{z}_2 &: \quad a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < x_2^{(2)} = b \\
\mathfrak{z}_3 &: \quad a = x_0^{(3)} < x_1^{(3)} < x_2^{(3)} < x_3^{(3)} = b \\
&\quad ... \\
\mathfrak{z}_n &: \quad a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_i^{(n)} < ... < x_n^{(n)} = b \\
&\quad ...
\end{aligned}$$

Ausgezeichnete Zerlegungsfolge

Unter einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge versteht man eine Zerlegungsfolge, bei der die Folge der maximalen Intervallängen In jeder Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ eine Nullfolge ist.

Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$

► Satz:
Ist f eine beliebige im Intervall $(a; b)$ stetige Funktion, so konvergiert bei jeder Wahl einer ausgezeichneten Zerlegungsfolge und bei jeder Wahl der Zwischenpunkte die zugehörige Folge der Zerlegungssummen, und zwar immer gegen ein und dieselbe Zahl g.

► Definition:
Das bestimmte Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ einer im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion ist der gemeinsame Grenzwert aller Folgen von Zerlegungssummen, die zu ausgezeichneten Zerlegungsfolgen $(\mathfrak{z}_n)$ des Intervalls $\langle a; b)\rangle$ gehören.

Ist folglich $(\mathfrak{z}_n)$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $\langle a; b\rangle$, so gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

mit $x_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq x_i^{(n)}$.

■ Zu berechnen ist $\int\limits_a^b x^2 dx$:
Wir wählen eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{z}_n)$, bei der das Intervall $\langle a; b\rangle$ durch jede Zerlegung $\mathfrak{z}_n$ in gleich große Teilintervalle zerlegt wird.

$$x_0^{(n)} = a, x_1^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_{i-1}^{(n)} = a + \frac{i-1}{n}(b-a), x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a), ..., x_n^{(n)} = b$$

Als Zwischenpunkte $\xi_i^{(n)}$ wählen wir die rechten Endpunkte der Intervalle $\langle x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}\rangle$, also

$$\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

Dann gilt für die Zerlegungssumme s_n

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)}) \cdot (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right]^2 \cdot \left[\frac{i}{n}(b-a) - \frac{i-1}{n}(b-a)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right]^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{a \cdot i}{n}(b-a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}(b-a)^2\right] \\
&= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \frac{n}{2}(n+1) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} s_n = (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}\right] = (b-a)\left(ab + \frac{(b-a)^2}{3}\right) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

► Definition:
$\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, wenn $b = a$.
$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, wenn $b < a$.

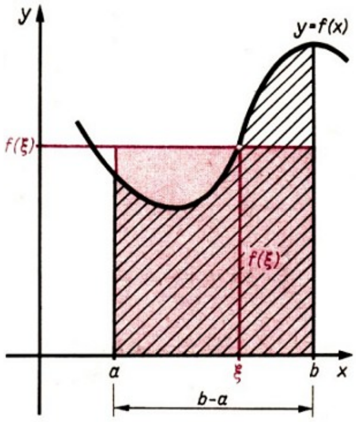
► Satz:
Ist f eine in $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion und c eine beliebige Zahl aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

► Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Ist f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion, so gibt es stets mindestens eine Zahl ξ mit $a \leq \xi \leq b$, für die gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$



Geometrische Bedeutung

f sei im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetig und nichtnegativ.
Somit gibt es eine Zahl ξ derart, dass die schraffierte Fläche gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seiten $b-a$ und $f(\xi)$ ist.

D.2. Das unbestimmte Integral

Stammfunktion

▶ Definition:
Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f im Intervall $\langle a; b\rangle$ genau dann, wenn für jedes x aus dem Intervall $\langle a; b\rangle$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

▶ Satz:
Zwei beliebige Stammfunktionen F_1 und F_2 einer gegebenen Funktion f unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante c

$$F_2(x) - F_1(x) = c$$

Beweis:
Es seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, d. h., es gilt $F_1'(x) = f(x)$ und $F_2'(x) = f(x)$.
Dann gilt

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \qquad , \qquad [F_1(x) - F_2(x)]' = 0$$

Hieraus folgt $F_1(x) - F_2(x) = c$.

Aus diesem Satz folgt: Kennt man eine Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f, dann besteht die Menge aller Stammfunktionen dieser Funktion f aus allen Funktionen mit den Gleichungen $y = F(x) + c$, $c \in P$.

Unbestimmtes Integral $\int f(x)dx$

▶ Definition:
Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$ einer im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetigen Funktion f versteht man die Menge aller Stammfunktionen von f im Intervall $\langle a; b\rangle$.

Die gegebene Funktion f heißt Integrand des unbestimmten Integrals, die Konstante c heißt Integrationskonstante.
Die Operation, die einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion F zuordnet, heißt Integration. In diesem Sinne ist die Integration die Umkehrung der Differentiation.
Es gilt auf Grund des oben angeführten Satzes: Ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $\langle a; b\rangle$, so gilt

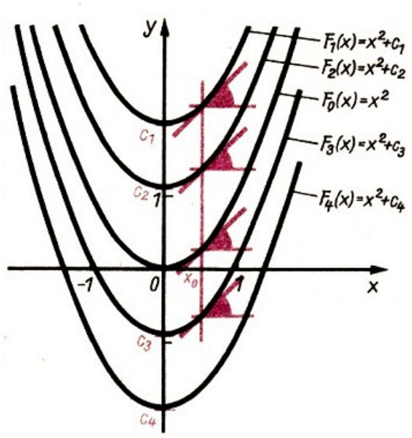
$$\int f(x)dx = \{F(x) + c\}, \quad x \in P$$

Hierbei ist $\{F(x)+c\}$ die Menge aller Funktionen $F(x)+c$. Im allgemeinen lässt man die geschweiften Klammern weg und schreibt nur

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

In diesem Zusammenhang ist dann $F(x)+c$ eine Bezeichnung für die Menge $\{F(x)+c\}$.

■ Das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)=2x$ ist die Menge aller Funktionen $F(x)=x^2+c$, $c \in P$.



Graphische Darstellung des unbestimmten Integrals der Funktion $f(x)=2x$

$\int 2xdx = x^2+c$
Die graphische Darstellung des unbestimmten Integrals ist eine Kurvenschar mit dem Scharparameter c. Alle Kurven haben an jeder Stelle x_0 des Intervalls den gleichen Anstieg. Jede dieser Kurven lässt sich in jede andere durch Verschiebung in Richtung der Ordinatenachse überführen.

D.3. Integrationsregeln

Konstante und Summe

► Satz:
Für jedes Intervall, in dem die Funktion f stetig ist, gilt

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot \int f(x)dx, \qquad (k\neq 0, k\in P)$$

Das bedeutet: Die Menge der Stammfunktionen von $k\cdot f$ ist gleich der Menge der Funktionen, die man erhält, wenn man jede Stammfunktion von f mit k multipliziert.

Beweis:
Es sei F eine Stammfunktion von f, d. h., es ist

$$F'=f, \qquad k\cdot F' = k\cdot f, \qquad (k\cdot F)' = k\cdot f$$

d.h., $k\cdot F$ ist eine Stammfunktion von kf.

Hieraus folgt: Die Menge $\int k\cdot f(x)dx$ besteht aus allen Funktionen $k\cdot F(x)+c$, c durchläuft alle reellen Zahlen.
Andererseits besteht die Menge $k\int f(x)dx$ aus allen Funktionen

$$k(F+c) = k\cdot F + k\cdot c = k\cdot F + c_1$$

c_1 durchläuft alle reellen Zahlen. Die beiden Mengen $\int kf(x)dx$ und $k\int f(x)dx$ sind identisch.

► Satz:
Für jedes Intervall, in dem die Funktionen f und g stetig sind, gilt

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Das bedeutet: Die Menge der Stammfunktionen von $f+g$ ist gleich der Menge der Funktionen, die man erhält, wenn man die Stammfunktionen von f und g paarweise addiert.

Beweis:
Es sei F eine beliebige Stammfunktion von f, d.h., $F' = f$. Ferner sei G eine beliebige Stammfunktion von g, d.h., $G' = g$. Dann ist $F+G$ auch Stammfunktion von $f+g$, denn es gilt $(F+G)' = F' + G' = f + g$.
Hieraus folgt: Die Menge

$$\int [f(x) + g(x)]dx$$

besteht aus allen Funktionen

$$F(x) + G(x) + c$$

wobei c alle reellen Zahlen durchläuft.
Andererseits besteht die Menge $\int f(x)dx + \int g(x)dx$ aus allen Funktionen

$$[F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] = F(x) + G(x) + (c_1 + c_2)$$

wobei $(c_1 + c_2)$ alle reellen Zahlen durchläuft. Die beiden Mengen

$$\int [f(x) + g(x)]dx \qquad \text{und} \qquad \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

sind folglich identisch.

► Satz:
Für jedes Intervall, in dem die Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ stetig sind, gilt

$$\int \left(\sum_{\nu=1}^{h} k_n u f_\nu(x) \right) dx = \sum_{\nu=1}^{h} k_\nu \int f_\nu(x)dx$$

Das bedeutet: Man kann Summen gliedweise integrieren und dabei konstante Faktoren vor das Integralzeichen ziehen.

Integration durch Substitution

Gegeben sei eine im Intervall I stetige Funktion $y = f(x)$, für die eine Stammfunktion F zu ermitteln ist.
$x = \varphi(t)$ sei eine im Intervall I_1 monotone und differenzierbare Funktion mit $\varphi'(t) \neq 0$, durch die das Intervall I_1 umkehrbar eindeutig auf das Intervall I abgebildet wird.
Dann gilt für alle x aus I

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad \text{mit } x = \varphi(t) \text{ bzw. } t = \overline{\varphi}(x)$$

Das bedeutet: Ist $y = G(t) + c$ die Menge der Stammfunktionen von $y = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ in I_1, dann ist $y = G[\overline{\varphi}(x)] + c$ die Menge der Stammfunktionen von $y = f(x)$ in I.

■ Es ist das unbestimmte Integral $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ zu ermitteln.
Wir beschränken uns zunächst auf $x > 0$ und setzen $\sqrt{x^2+1} = t$, woraus folgt $x = \sqrt{t^2-1}$.
$x = \varphi(t) = \sqrt{t^2-1}$ ist für $t > 1$ monoton und differenzierbar, und es ist $\varphi'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$; $\varphi'(t) \neq 0$ für $t > 1$.

Durch $x = \varphi(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ wird das Intervall I_1 $(t > 1)$ umkehrbar eindeutig auf das Intervall I $(x > 0)$ abgebildet. Dann gilt für alle x aus I $(x > 0)$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt \qquad \text{mit } t = \sqrt{x^2+1} \\ &= \int 1 \cdot dt = t + c = \sqrt{x^2+1} + c\end{aligned}$$

Nachträglich können wir feststellen, dass dieses Ergebnis auch für $x \leq 0$ gilt. Durch Differenzieren können wir die Richtigkeit überprüfen:

$$(\sqrt{x^2+1} + c)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Das unbestimmte Integral elementarer Funktionen

$$\begin{aligned}\int a dx &= ax + c; \qquad a \in P \\ \int x^r dx &= \begin{cases} \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c & r \neq -1 \\ \ln|x| + c & r = -1 \end{cases} \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c; \qquad a > 0, a \neq 1 \\ \int e^x dx &= e^x + c\end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt durch Differenzieren der Stammfunktionen.

■

$$\int (ax^2 + bx + e)dx = a\int x^2 dx + b\int x dx + \int e dx = a\frac{1}{3}x^3 + b\frac{1}{2}x^2 + exc$$

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

$$\int x\sqrt{x}dx = \int \sqrt{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

► Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
Ist f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion und ist F irgendeine Stammfunktion von f im Intervall $\langle a; b\rangle$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis:
Wir übernehmen ohne Beweis den folgenden Satz:

Ist f eine im Intervall $\langle a;b\rangle$ stetige Funktion, so ist das bestimmte Integral $\int\limits_a^x f(t)dt$ mit variabler oberer Grenze x eine Stammfunktion von f im Intervall $\langle a;b\rangle$.

$$\left[\int\limits_a^x f(t)dt\right]' = f(x)$$

Aus diesem Satz folgt übrigens auch, dass es zu jeder stetigen Funktion f immer eine Stammfunktion gibt.
Ist nun F eine Stammfunktion von f, dann unterscheidet sie sich von $\int\limits_a^x f(t)dt$ nur durch einen konstanten Summanden

$$\int\limits_a^x f(t)dt - F(x) = c$$

Wir bestimmen c, indem wir setzen $x = a$:

$$\int\limits_a^a f(t)dt - F(a) = c \qquad , \qquad 0 - F(a) = c$$

Folglich gilt

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

für $x = b$

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

1. Der Satz bringt den Zusammenhang zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung zum Ausdruck. Einerseits können die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 und das bestimmte Integral einer Funktion f in einem Intervall unabhängig voneinander durch Grenzwertbildung definiert werden.
Andererseits ist das bestimmte Integral mit variabler oberer Grenze eine Stammfunktion des Integranden

$$\left[\int\limits_a^x f(t)dt\right]' = f(x)$$

2. Mit Hilfe des Hauptsatzes hat man die Möglichkeit, bestimmte Integrale ohne Grenzwertbestimmungen zu berechnen.
Die Berechnung des bestimmten Integrals wird auf das Aufsuchen einer Stammfunktion zurückgeführt.

Zum Zwecke der Berechnung wendet man auch folgende Schreibweise an:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

■

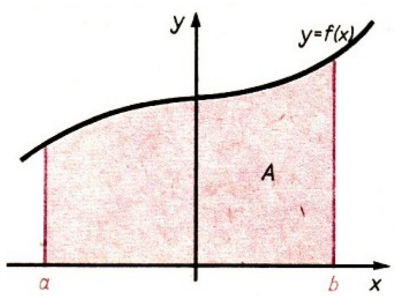
$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

D.4. Anwendungen der Integralrechnung

Flächeninhalt

▶ Definition:
Ist f eine im Intervall $\langle a; b\rangle$ stetige Funktion, deren Funktionswerte in $\langle a; b\rangle$ nicht negativ sind, so versteht man unter dem Flächeninhalt[13] A des Flächenstücks, das von dem Graphen von f, der Abszissenachse und den Parallelen zur Ordinatenachse durch $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $\langle a; b\rangle$, d.h., es ist

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



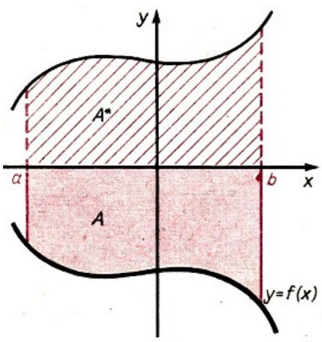
Die Fläche liegt nur oberhalb der Abszissenachse.

$$\int_a^b f(x) \geq 0$$

denn die Summanden $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ der Zerlegungssummen s_n sind sämtlich nicht negativ, da $f(\xi_i) \geq 0$, $x_i - x_{i-1} > 0$.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Diese Definition lässt sich auf weitere Fälle von Flächenberechnungen anwenden.



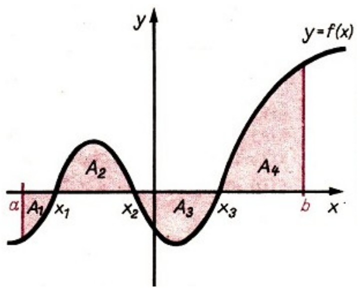
Die Fläche liegt nur unterhalb der Abszissenachse.

$$\int_a^b f(x) \leq 0$$

denn die Summanden $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ der Zerlegungssummen s_n sind sämtlich nicht positiv, da $f(\xi_i) \leq 0$, $x_i - x_{i-1} > 0$

$$A = A^* = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

[13] Hier wird der Flächeninhalt als reelle Zahl definiert. Dieser Zahl entspricht bei Vorgabe von Einheiten des Flächeninhalts in praktischen Berechnungen die Maßzahl der Fläche.

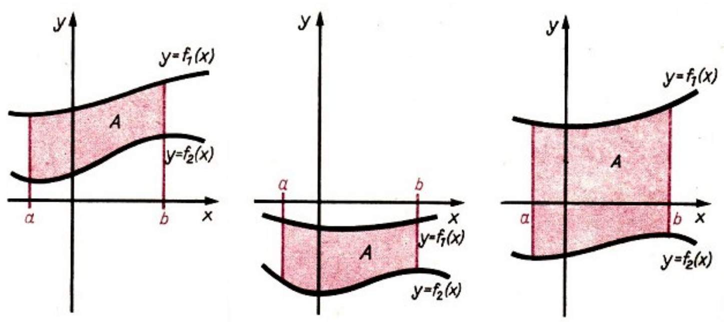


Die Fläche liegt sowohl oberhalb als auch unterhalb der Abszissenachse. In den Zerlegungssummen s_n treten sowohl positive [für $f(\xi_i) > 0$] als auch negative Summanden [für $f(\xi_i) < 0$] auf, denn es gilt immer $x_i - x_{i-1} > 0$.

Deshalb wird das Problem auf die Berechnung der Teilflächen zurückgeführt.

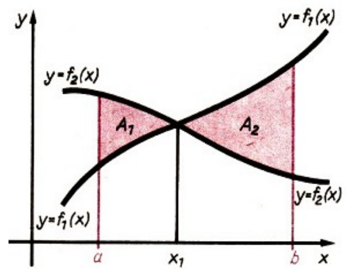
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$A_1 = \left|\int\limits_a^{x_1} f(x)dx\right|, \quad A_2 = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|, \quad A_3 = \left|\int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right|, \quad A_4 = \left|\int\limits_{x_3} a^b f(x)dx\right|$$

Der Graph der einen Funktion f_2 liegt an einer Stete des Intervalls $\langle a; b\rangle$ des Graphen der Funktion f_1.



In allen diesen Fällen gilt $A = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$.

Der Graph der einen Funktion f_2 liegt In einem Teilintervall von $\langle a; b\rangle$ oberhalb das Graphen der Funktion f_1:



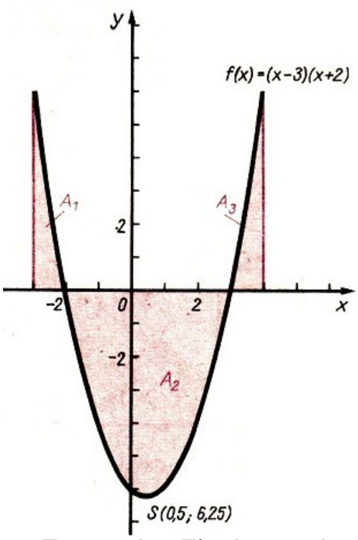
In diesem Fall haben die Graphen einen Schnittpunkt bei $x = x_1$. Die Berechnung der Gesamtfläche erfolgt durch die Berechnung der beiden Teilflächen: $A = A_1 + A_2$.

$$A = \int\limits_a^{x_1} [f_2(x) - f_1(x)]dx + \int\limits_{x_1}^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

■ Es ist die Fläche zu berechnen, die eingeschlossen wird von dem Graphen der Funktion $f(x) = (x - 3)(x + 2)$, von der Abszissenachse und den Geraden $x = -3$ und $x = 4$.

Lösung: Zunächst ermittelt man die Schnittpunkte des Graphen von $y = f(x)$ mit der Abszissenachse im Intervall $\langle -3; 4\rangle$, um festzustellen, ob das Flächenstück ganz: oberhalb, ganz unterhalb oder auf beiden Seiten der Abszissenachse liegt.
Die Nullstellen von f sind $x = 3$ und $x = -2$. Beide Nullstellen liegen im Intervall $\langle -3; 4\rangle$. Die gesuchte Fläche liegt also sowohl oberhalb als auch unterhalb der Abszissenachse.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$



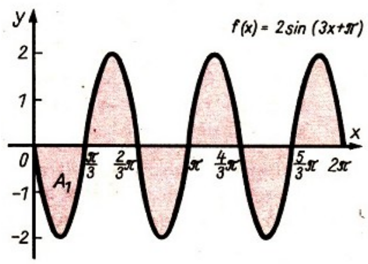
$$A_1 = \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-2} = \frac{17}{6}$$

$$A_2 = \left|\int_{-2}^{-3} (x^2 - x - 6)dx\right| = -\int_{-2}^{-3} (x^2 - x - 6)dx = \frac{125}{6}$$

$A_3 = A_1$ auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Parabel.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 \cdot \frac{17}{6} + \frac{125}{6} = \frac{53}{2}$$

■ Es ist die Fläche zu berechnen, die eingeschlossen wird von dem Graphen der Funktion $y = 2\sin(3x + \pi)$ und der Abszissenachse im Intervall $\langle 0; 2\pi\rangle$.



Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Graphen von $y = 2\sin(3x + \pi)$ gilt $A = 6 \cdot A_1$.

$$A_1 = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(3x + \pi)dx\right|$$

Mittels Integration durch Substitution bestimmen wir zunächst das unbestimmte Integral.

$\int \sin(3x + \pi)dx$
$y = f(x) = 2\sin(3x + \pi)$ ist eine für alle reellen Zahlen stetige Funktion. Durch die Substitution $3x + \pi = t$ erhält man die Funktion

$$x = \varphi(t) = \frac{t - \pi}{3}$$

die für alle reellen Zahlen monoton und differenzierbar ist, für die

$$x' = \varphi'(t) = \frac{1}{3} \neq 0$$

gilt und die die Menge der reellen Zahlen umkehrbar eindeutig auf sich abbildet. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\int 2\sin(3x + \pi) = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt = \int 2\sin t \cdot \frac{1}{3}dt = -\frac{2}{3}\cos t + c$$
$$= -\frac{2}{3}\cos(3x + \pi) + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(3x + \pi)dx = \left[-\frac{2}{3}\cos(3x + \pi)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3}\cos 2\pi + \frac{2}{3}\cos \pi = -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{4}{2}$$

$$A_1 = \frac{4}{3} \qquad , \qquad A = 6 \cdot A_1 = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$$

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(3x+\pi)dx$$

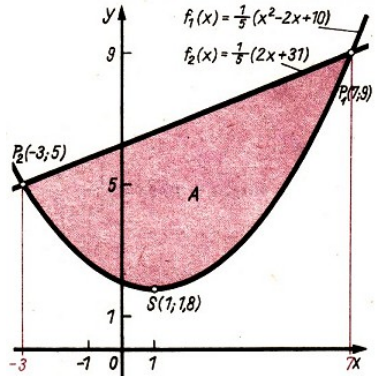
ist folgende. Das Intervall $O \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ wird durch $t = \overline{\varphi}(x) = 3x + \pi$ auf das Intervall $\pi \leq t \leq 2\pi$ abgebildet. Dann gilt

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(3x+\pi)dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt = \int\limits_{\pi}^{2\pi} 2\sin t\frac{1}{3}dt = \left[-\frac{2}{3}\cos t\right]_{\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3}$$

■ Es ist die Fläche zu berechnen, die von den Bildern der Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2x + 10)$ und $f_2(x) = \frac{1}{5}(2x+31)$ eingeschlossen wird.
Zur Berechnung der Schnittpunkte der Graphen von f_1 und f_2 ist das Gleichungssystem

$$y = \frac{1}{5}(2x+31) \qquad , \qquad y = \frac{1}{5}(x^2 - 2x + 10)$$

zu lösen. Man erhält $x_1 = 7$, $x_2 = -3$, $y_1 = 9$, $y_2 = 5$. Die Schnittpunkte sind $P_1(7;9)$, $P_2(-3;5)$.

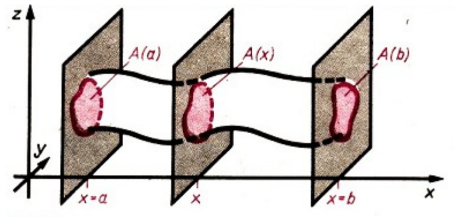


Berechnung des gesuchten Flächeninhalts
f_2 liegt im Intervall $\langle -3; 7\rangle$ ganz oberhalb $f_1(x)$. Folglich gilt

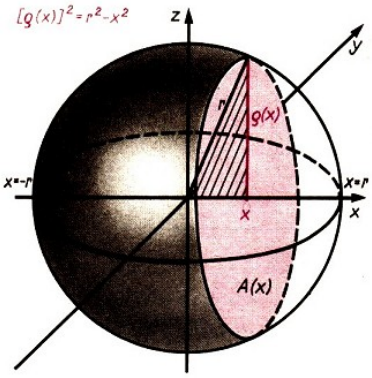
$$A = \int\limits_{-3}^{7} [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int\limits_{-3}^{7} \left[\frac{1}{5}(2x+31) - \frac{1}{5}(x^2 - 2x + 10)\right]$$
$$= \frac{1}{5}\int\limits_{-3}^{7} (-x^2 + 4x + 21)dx = \frac{1}{5}\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 21x\right]_{-3}^{7}$$
$$= \frac{1}{5}\left[-\frac{343}{3} + 98 + 147 - (9 + 18 - 63)\right] = \frac{100}{3}$$

Volumen

► Definition:
Das Volumen[14] eines Körpers, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem liegt und dessen Querschnittsflächen an der Stelle x ($a \leq x \leq b$) den Flächeninhalt $A(x)$ haben, wobei die Menge der geordneten Paare $[x; A(x)]$ mit $a \leq x \leq b$ eine stetige Funktion sind, ist das folgende bestimmte Integral:



$$V = \int_a^b A(x)dx$$



■ Volumen einer Kugel
Querschnittsfläche $A(x)$:

$$A(x) = \pi[\rho(x)]^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Berechnung des Volumens:

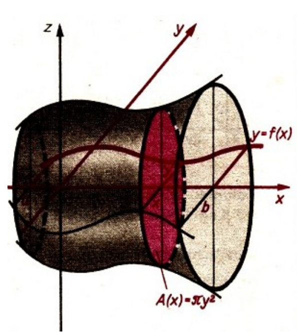
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

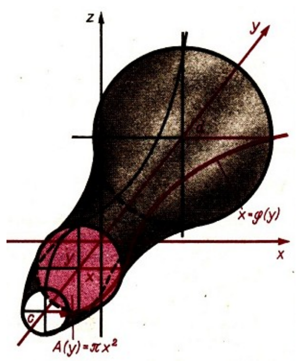
Satz des Cavalieri[15]

► Satz:
Zwei Körper, die zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem liegen, haben gleiche Volumina, wenn die Flächeninhalte ihrer Querschnitte für jedes x mit $a \leq x \leq b$ übereinstimmen.

Die Gültigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Definition des Volumens durch ein bestimmtes Integral. Hiernach hängt das Volumen nicht von der Gestalt der Querschnittsflächen, sondern nur von deren Flächeninhalten ab.

Volumen von Rotationskörpern





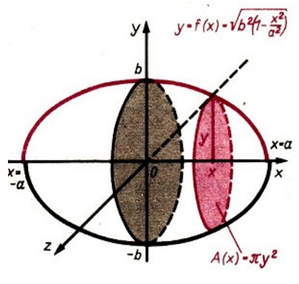
[14] Hier wird das Volumen als reelle Zahl definiert. Dieser Zahl entspricht bei Vorgabe von Einheiten des Volumens in praktischen Berechnungen die Maßzahl des Volumens.
[15] Der Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598?-1647), Schüler Galileis, lehrte ab 1629 in Bologna.

1) (Abb. links) Rotation des Bildes von $y = f(x)$ um die x-Achse.

$$A(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2 \quad , \quad V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2) (Abb. rechts) Rotation des Bildes von $x = \varphi(y)$ um die y-Achse.

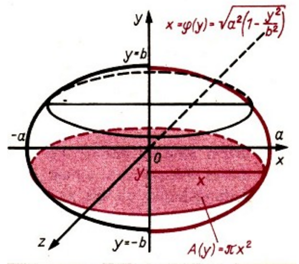
$$A(y) = \pi x^2 = \pi[\varphi(y)]^2 \quad , \quad V = \int_c^d A(y)dx = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dx = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dx$$



$$[f(x)]^2 = y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Rotationsellipsoid um die x-Achse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} [f(x)]^2 dx = 2\pi \int_0^a [f(x)]^2 dx$$
$$= 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{{x^2}^2}{a}\right) dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a$$
$$= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$



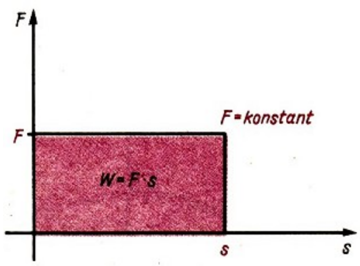
$$[\varphi(y)]^2 = x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

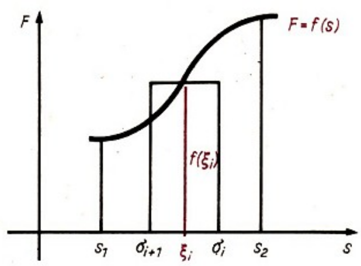
Rotationsellipsoid um die y-Achse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$V = \pi \int_{-b}^{b} [\varphi(y)]^2 dy = 2\pi \int_0^b [\varphi(y)]^2 dy$$
$$= 2\pi \int_0^b a^2 \left(1 - \frac{{y^2}^2}{b}\right) dy = 2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b$$
$$= 2\pi a^2 \left(b - \frac{b}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Physikalische Arbeit bei veränderlicher Kraft

Wirkt eine konstante Kraft F längs eines Weges und in Richtung dieses Weges, und ist s die Länge des Weges, so ist die Arbeit, die durch diese Kraft verrichtet wird, definiert als $W = F \cdot s$.



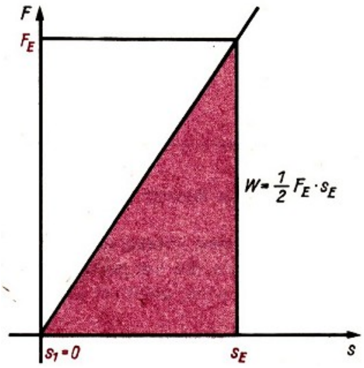


Wirkt eine veränderliche Kraft $F = f(s)$ längs eines Weges und in Richtung dieses Weges von einem Punkt mit der Entfernung s_1 von einem gewissen Anfangspunkt ab bis zu einem Punkt mit einer Entfernung s_2 vom gleichen Anfangspunkt, so wird die Arbeit, die durch diese Kraft verrichtet wird, definiert als

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds = \int_{s_1}^{s_2} f(s) ds$$

Man nennt dieser Integral das Wegintegral der Kraft.

Spannarbeit und potentielle Energie an einer Schraubenfeder



Beim Spannen einer Feder gilt das Gesetz:
Die beim Spannen wirkende Kraft F ist proportional der Längenänderung s der Feder: $F = k \cdot s$.
Für die beim Dehnen einer Feder um die Längenänderung s_E aus dem ungespannten Zustand aufgewendete Arbeit W gilt: $W = \int\limits_{s_1}^{s_2} k \cdot s ds$, in diesem Fall ist $s_1 = 0$, $s_2 = s_E$:

$$W = \left[k\frac{s^2}{2}\right]_0^{s_E} = \frac{k}{2}s_E^2$$

Bezeichnet man mit F_E die Kraft, die die Feder im gespannten Zustand (mit der Längenausdehnung s_E) hält, so ergibt sich unter Berücksichtigung von $F - E = k \cdot s_E$

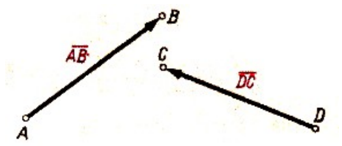
$$W = \frac{1}{2}F_E s_E$$

E. Vektorrechnung

E.1. Verschiebungen

Gerichtete Strecken

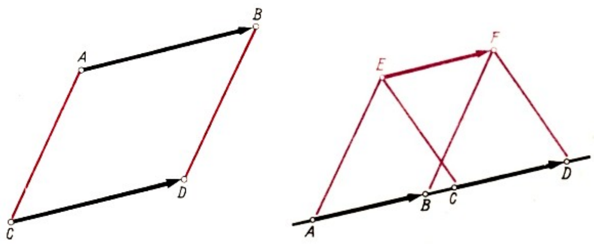
Liegt für eine Strecke ein Richtungs- oder Durchlaufssinn fest, so heißt diese Strecke gerichtete Strecke.
Im Folgenden werden gerichtete Strecken wie ungerichtete Strecken durch einen übergesetzten Strich gekennzeichnet. In Zeichnungen können gerichtete Strecken durch eine Pfeilspitze gekennzeichnet werden, die zum Endpunkt weist.



■ (1) $\overline{AB}$: Die Strecke $\overline{AB}$ wird von A nach B durchlaufen.
(2) $\overline{DC}$: Die Strecke $\overline{CD}$ wird von D nach C durchlaufen.

Eine gerichtete Strecke $\overline{AB}$ kann eindeutig festgelegt werden
- durch die Angabe ihres Anfangspunktes A und ihres Endpunktes B,
- durch die Angabe ihres Anfangspunktes A, ihrer Länge, ihrer Richtung und ihres Richtungssinnes.

Parallelgleiche Strecken



► Definition:
Zwei gerichtete Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ heißen parallelgleich, wenn
a) die Punkte A, B, C, D nicht auf derselben Geraden liegen und die Strecke $\overline{AB}$ parallel zur Strecke $\overline{CD}$ sowie die Strecke $\overline{AC}$ parallel zur Strecke $\overline{BC}$ ist (linke Abbildung)
oder
b) die Punkte A, B, C, D auf derselben Geraden liegen, und es Punkte E und F so gibt, dass sowohl $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ als auch $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ die unter a) angegebene Bedingung erfüllen
oder wenn

c) $A = B$ und $C = D$ ist. 

Verschiebung

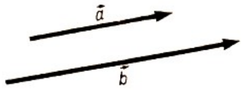
► Definition:
Verschiebung einer Geraden (einer Ebene, des Raumes) heißt ein umkehrbare eindeutige Abbildung des betreffenden geometrischen Gebildes auf sich selbst, bei der alle durch Original- und Bildpunkt bestimmten gerichteten Strecken zueinander parallelgleich sind.

Die Verschiebung, bei der A der Originalpunkt und B der Bildpunkt ist, d.h. die A in B abbildet, wird mit $\overrightarrow{AB}$ oder $\overrightarrow{a}$ bezeichnet. Das geordnete Punktepaar $[A; B]$ repräsentiert diese Verschiebung.

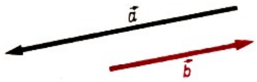
	Veranschaulichung durch Zeichnung	Bezeichnung	Repräsentant
Gerichtete Strecke		$\overline{AB}$	-
Verschiebung		$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{a}$	$[A; B]$

Betrag der Verschiebung $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ nennt man die Länge der gerichteten Strecke $\overline{AB}$, die diese Verschiebung kennzeichnet.

Gleichgerichtete Verschiebungen, entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen



Zwei Verschiebungen $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ heißen gleich gerichtet, wenn sie gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn haben.



Zwei Verschiebungen $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ heißen entgegengesetzt gerichtet, wenn sie gleiche Richtung und entgegengesetzten Richtungssinn haben.

Entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen gleichen Betrags nennt man entgegengesetzte Verschiebungen.

■ $\overrightarrow{BA}$ ist die entgegengesetzte Verschiebung zu $\overrightarrow{AB}$.
$-\overrightarrow{a}$ ist die entgegengesetzte Verschiebung zu $\overrightarrow{a}$.

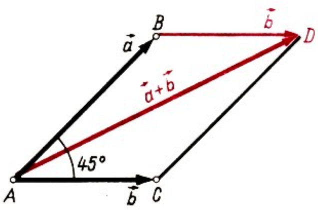
Addition von Verschiebungen

▶ Satz:
Werden zwei Verschiebungen nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis wieder eine Verschiebung.

▶ Definition:
Die als Ergebnis des Nacheinanderausführens zweier Verschiebungen $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$ resultierende Verschiebung $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC}$ heißt die Summe von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.
Man schreibt: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ oder $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

■ Gegeben: Die Verschiebungen $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ mit $|\overrightarrow{a}| = 3$ cm, $|\overrightarrow{b}| = 2$ cm, $\angle CAB = 45°$.
Gesucht: Die Länge der Summe $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$.

Lösung: zeichnerisch
Zur gerichteten Strecke $\overrightarrow{AC}$ wird in B die mit $\overrightarrow{AC}$ gleichgerichtete Strecke $\overrightarrow{BD}$ angetragen. Die gerichtete Strecke $\overrightarrow{AD}$ kennzeichnet die Verschiebung $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.



Lösung: rechnerisch - Anwendung des Kosinussatzes:

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} \cdot \cos\angle ABD$$

$$3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(180° - 45°) = 9 + 4 - 12(-0{,}7071) \approx 21{,}48$$

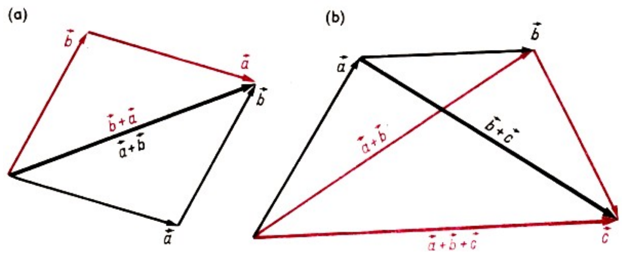
$\sqrt{21{,}48} \approx 4{,}6$
Ergebnis: Der Betrag der Verschiebung $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ ist ungefähr gleich 4,6 cm.

Die Summe aus einer Verschiebung und der zu ihr entgegengesetzten Verschiebung heißt identische Verschiebung oder Nullverschiebung; sie wird mit $\overrightarrow{o}$ bezeichnet.

■ $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BA}$;
$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{o}$

Eigenschaften der Addition von Verschiebungen

Für jede beliebige Verschiebung $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ mit $\overrightarrow{o}$ als Nullverschiebung gilt:
$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{o} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (Kommutativität), Bild (a)



$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ (Assoziativität), Bild (b)

Subtraktion von Verschiebungen

► Definition:
Differenz zweier Verschiebungen $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{a}$ heißt die Verschiebung $\overrightarrow{c}$, für die die Gleichung $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}$ gilt.
Man bezeichnet diese Differenz mit $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

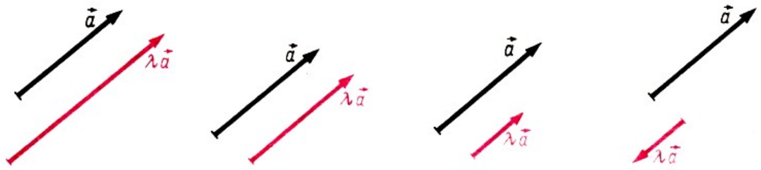
Eigenschaften der Subtraktion von Verschiebungen

Für jede beliebige Verschiebung $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ mit $\overrightarrow{o}$ als Nullverschiebung gilt:
$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{o} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{o} - \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{a} = -(-\overrightarrow{a})$
$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{a})$; $-(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$; $-(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl

▶ Definition:
Produkt einer Verschiebung $\overrightarrow{a}$ mit einer reellen Zahl λ heißt jene Verschiebung, derer Betrag das $|\lambda|$-fache des Betrages von $\overrightarrow{a}$ ist und die für $\lambda \geq 0$ mit $\overrightarrow{a}$ und für $\lambda < 0$ mit $-\overrightarrow{a}$ gleich gerichtet ist.
Man bezeichnet dieses Produkt mit $\lambda\overrightarrow{a}$.

$\lambda > 1$	$\lambda = 1$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda < 0$
z.B. $\lambda = 1{,}5$		z.B. $\lambda = 0{,}5$	z.B. $\lambda = -0{,}5$



Eigenschaften der Multiplikation einer Verschiebung mit einer reellen Zahl

Für jede beliebige Verschiebung $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ mit $\overrightarrow{o}$ als Nullverschiebung und jede beliebige reelle Zahl λ, μ gilt:
$|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda| \cdot \overrightarrow{a}$; $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$; $\lambda\overrightarrow{o} = \overrightarrow{o}$; $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$; $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$
$\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$ (Assoziativität),
$(\lambda+\mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ (1. Distributivgesetz); $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ (2. Distributivgesetz)

Parallelität zweier Verschiebungen

▶ Definition:
Zwei Verschiebungen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind parallel, wenn es eine reelle Zahl λ gibt, für die $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$ oder $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ ist.

Daraus und aus anderen Eigenschaften von Verschiebungen folgt:
- Jede Verschiebung ist parallel zur Nullverschiebung.
- Jede Verschiebung ist parallel zu sich selbst.
- Jede Verschiebung ist parallel zu der ihr entgegengesetzten Verschiebung.

n-Tupel reeller Zahlen

▶ Definition:
Ist n eine natürliche Zahl, so heißt jede geordnete Menge von reellen Zahlen $a_1, ..., a_n$ ein n-Tupel reeller Zahlen.
Man schreibt: $[a_1; a_2; ..., a_n]$

■ Für $n = 2$ nennt man diese geordnete Menge (reelles) Zahlenpaar, für $n = 3$ (reelles) Zahlentripel, für $n = 4$ (reelles) Zahlenquadrupel.

▶ Definition:
Summe zweier n-Tupel $[a_1; a_2; ..., a_n]$ und $[b_1; b_2; ...; b_n]$ heißt das n-Tupel $[a_1 + b_1; a_2 + b_2, ..., a_n + b_n]$.
Man schreibt: $[a_1; a_2; ..., a_n] + [b_1; b_2; ...; b_n] = [a_1 + b_1; a_2 + b_2, ..., a_n + b_n]$

▶ Definition:
Produkt eines n-Tupels $[a_1; a_2; ..., a_n]$ mit einer reellen Zahl λ heißt das n-Tupel $[\lambda a_1; \lambda a_2; ..., \lambda a_n]$
Man schreibt: $\lambda[a_1; a_2; ..., a_n] = [\lambda a_1; \lambda a_2; ..., \lambda a_n]$

■ Gegeben: Die 4-Tupel (Quadrupel) $[3; -1; 0; -4]$ und $[2; 6; 3; -1]$
Gesucht: Summe der gegebenen 4-Tupel
Lösung: $[3; -1; 0; -4] + [2; 6; 3; -1] = [5; 5; 3; -5]$

■ Gegeben: Das Tripel $[3; -1; 0]$ und die reelle Zahl -2
Gesucht: Produkt des gegebenen Tripels mit der gegebenen Zahl
Lösung: $(-2) \cdot [3; -1; 0] = [-6; 2; 0]$

E.2. Vektorraum

▶ Definition:
Eine Menge heißt Vektorraum, wenn für ihre Elemente, die Vektoren, eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definiert sind, dass für beliebige Elemente $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ der Menge und beliebige reelle Zahlen λ, μ folgende Gesetze gelten:

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
(2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
(3) zu je zwei Elementen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ der Menge existiert genau ein Element $\overrightarrow{c}$ dieser Menge so, dass $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}$ ist.
(4) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
(5) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$
(6) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
(7) $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$

Beispiele für Vektorräume:
- Die Menge der Verschiebungen einer Geraden.
- Die Menge der Verschiebungen einer Ebene (des Raumes).
- Die Menge aller n-Tupel für ein gegebenes n.
- Die Menge aller an einem Punkt angreifenden Kräfte.

Die Subtraktion von Vektoren, einander entgegengesetzte Vektoren, die Parallelität von Vektoren und der Nullvektor werden analog zu den entsprechenden Sachverhalten bei Verschiebungen definiert. Für Vektoren werden im allgemeinen auch die für Verschiebungen gebräuchlichen Bezeichnungen verwendet.

Gebräuchliche Bezeichnungen für Vektoren

Freie Vektoren: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ..., $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ (falls die gerichteten Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ Repräsentanten der betreffenden Vektoren sind)

Ortsrektoren in einem Koordinatensystem: $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ (Ortsvektoren der Punkte P und Q in einem System mit dem Ursprung O)
$\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{x}$ (eventuell mit Indizes)
$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ (Ortsvektoren der Punkte A, B, P, Q)

Das Pfeilsymbol wird auch für vektorielle Größen in der Physik angewendet, z.B. $\overrightarrow{P}$ (Kraft), $\overrightarrow{a}$ (Beschleunigung).

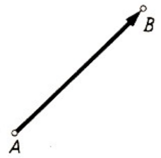
Gebräuchliche Darstellung eines Vektors durch eine gerichtete Strecke

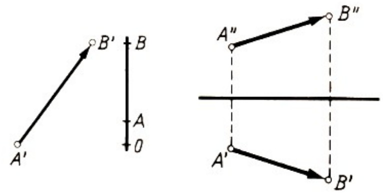
Numerisch durch Angabe der Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes der gerichteten

Strecke (in einem gegebenen Koordinatensystem)

■ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ mit $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$

Zeichnerisch
in der Ebene durch Aufzeichnen: im Raum durch Eintafel- oder Zweitafelprojektion:





Darstellung eines Vektors durch Komponenten bzw. Koordinaten in einem Koordinatensystem[16]

Ebene: System $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$		Raum: System $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	
Freier Vektor	Ortsvektor des Punkte $P(x;y)$	Freier Vektor	Ortsvektor des Punkte $P(x;y;z)$
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$	$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$	$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$	$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
Schreibweisen für die Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung			
$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix}$	$\vec{x} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$	$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$	$\vec{x} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$
$\vec{a} = \left\{\begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix}\right\}$	$\vec{x} = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$	$\vec{a} = \left\{\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}\right\}$	$\vec{x} = \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$\vec{a} = \{a_x, a_y\}$	$\vec{x} = \{x, y\}$	$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$	$\vec{x} = \{x,y,z\}$
$\vec{a} = (a_x, a_y)$	$\vec{x} = (x, y)$	$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$	$\vec{x} = (x,y,z)$
$\vec{e}_1 = \vec{i}; \vec{e}_2 = \vec{j}$		$\vec{e}_1 = \vec{i}; \vec{e}_2 = \vec{j};; \vec{e}_3 = \vec{k}$	

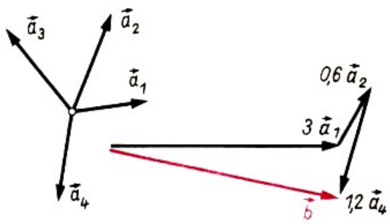
Linearkombination von Vektoren

► Definition:
Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ Vektoren und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ reelle Zahlen, so heißt jeder Vektor $\vec{b}$, der sich in der Gestalt

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$$

schreiben lässt, eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

■ Gegeben: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$
Gesucht: $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 0{,}6\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + 1{,}2\vec{a}_4$



[16] Die heute übliche Vektorschreibweise mit runden Klammern wurde ergänzt und wird in der weiteren Abschrift verwendet.

Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ heißen Koeffizienten der Linearkombination.

▶ Satz:
Ist $\vec{b}$ ein beliebiger Vektor und sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ zwei nicht zueinander parallele Vektoren einer Ebene, in der $\vec{b}$ liegt, dann kann $\vec{b}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dargestellt werden.

▶ Satz:
Im Raum gibt es zu zwei Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ stets einen von $\vec{o}$ verschiedenen Vektor $\vec{a}_3$, der keine Linearkombination von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ ist.

▶ Satz:
Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, drei Vektoren, von denen keiner eine Linearkombination der beiden anderen ist, dann kann jeder Vektor $\vec{b}$ des Raumes auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$$

von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ dargestellt werden.

Lineare Unabhängigkeit

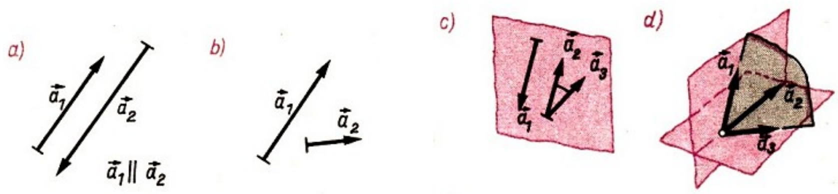
▶ Definition:
Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{o}$$

nur gilt für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Sind Vektoren nicht linear unabhängig, dann heißen sie linear abhängig.

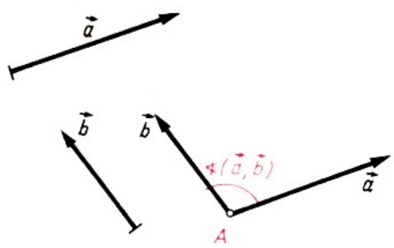
In einer Ebene | Im Raum



linear abhängig und unabhängig | linear abhängig und unabhängig

Winkel zweier Vektoren

▶ Definition:
Unter dem Winkel zweier von $\vec{o}$ verschiedener Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den Winkel, den für $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und für $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ im Punkte A miteinander bilden.



Basen

In einer Ebene:

▶ Definition:

Jedes Paar linear unabhängiger Vektoren $\overrightarrow{a}_1$ und $\overrightarrow{a}_2$ heißt Basis des Vektorraumes der Vektoren des Ebene.

Man bezeichnet sie mit $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$.

Ist $\overrightarrow{b} = \lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2$, so heißen

- die Zahlen λ_1, λ_2 die Koordinaten und
- die Vektoren $\lambda_1\overrightarrow{a}_1, \lambda_2\overrightarrow{a}_2$ die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{b}$ bezüglich der Basis $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$

Im Raum:

▶ Definition:

Jedes Tripel linear unabhängiger Vektoren $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ heißt Basis des Vektorraumes der Vektoren des Raumes.

Man bezeichnet sie mit $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$.

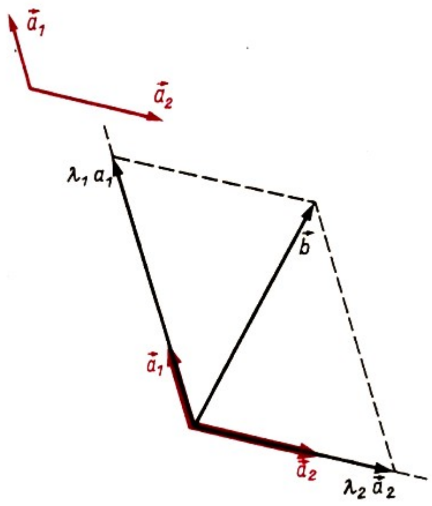
Ist $\overrightarrow{b} = \lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + \lambda_3\overrightarrow{a}_3$, so heißen

- die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Koordinaten und
- die Vektoren $\lambda_1\overrightarrow{a}_1, \lambda_2\overrightarrow{a}_2, \lambda_3\overrightarrow{a}_3$ die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{b}$ bezüglich der Basis $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$

Koordinatensysteme

In einer Ebene:

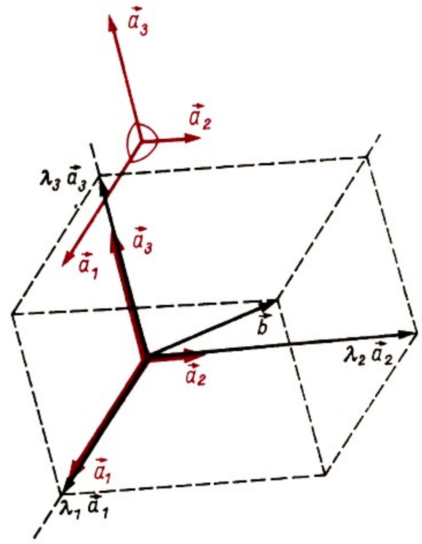
In der Ebene wird durch eine Basis $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$ und einen Punkt O, den Ursprung, ein Koordinatensystem festgelegt. Man bezeichnet es mit $\{O; \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$.



Orthogonale Basis: Die Basisvektoren $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$ bilden miteinander einen rechten Winkel.

Im Raum:

Im Raum wird durch eine Basis $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ und einen Punkt O, den Ursprung, ein Koordinatensystem festgelegt. Man bezeichnet es mit $\{O; \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$.



Orthogonale Basis: Die Basisvektoren $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$ bilden paarweise miteinander rechte Winkel.

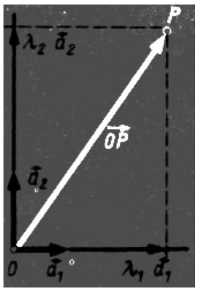
Jedes zu einer orthogonalen Basis zugehörige Koordinatensystem heißt orthogonal oder rechtwinklig.

Ist der Winkel zwischen den Basisvektoren kein rechter (die Winkel 0 und π scheiden aus), so nennt man die Basis und die ihr zugehörigen Koordinatensysteme schiefwinklig.

Ortsvektor: Ist O der Ursprung eines Koordinatensystems und P ein beliebiger Punkt der Ebene, so bezeichnet man $\overrightarrow{OP}$ als den Ortsvektor des Punktes P in Bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems.

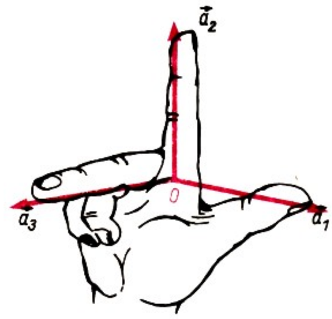
Ortsvektor: Auch im Raum kann der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ in Bezug auf die Basisvektoren zerlegt werden: $\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + \lambda_3\overrightarrow{a}_3$. Für die Koordinaten von P bezüglich $\{O; \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ schreibt man $P(\lambda_1; \lambda_2, \lambda_3)$.

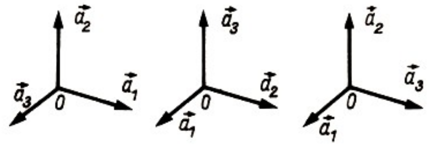
Die Koeffizienten der Zerlegung des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ in Bezug auf die Basisvektoren, d.h. die reellen Zahlen λ_1 und λ_2 der Zerlegung $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$ heißen Koordinaten von P bezüglich des Systems.
Man schreibt: $P(\lambda_1; \lambda_2)$.



Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$:
Basis $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$
Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$
Komponenten von $\overrightarrow{OP}$: $\lambda_1 \overrightarrow{a}_1, \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$
Koordinaten von P: $P(\lambda_1, \lambda_2)$

Rechtssystem: $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ haben eine Lage wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Anderenfalls spricht man von einem Linkssystem.





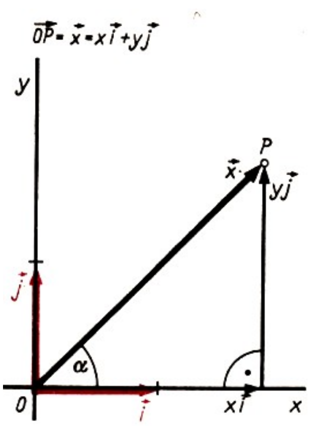
Rechtssysteme und ein Linkssystem

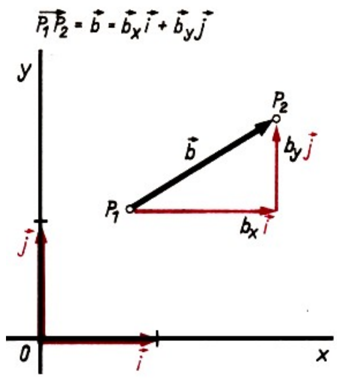
Normierte Basis: Die Basisvektoren $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$ bzw. ($\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$) haben den Betrag 1, d. h., sie sind Einheitsvektoren.

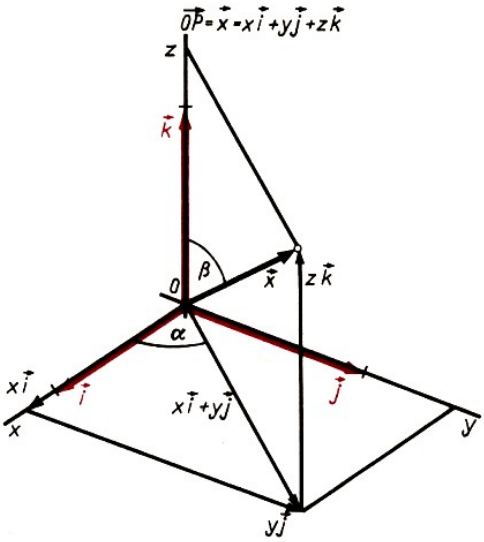
Kartesische Koordinatensysteme

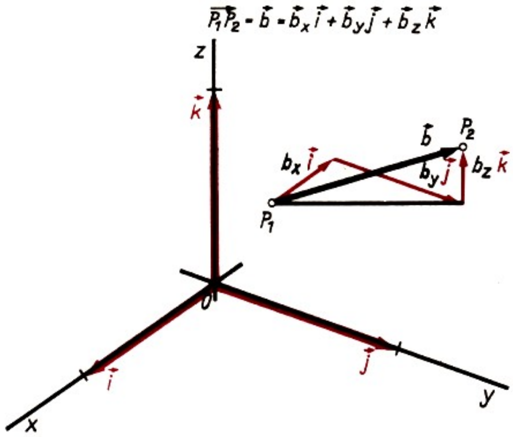
Kartesische Koordinatensysteme sind orthogonal und normiert (kurz orthonormiert).

	Ebene	Raum
Basis	$\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$	$\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$
Koordinatensystem	$(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$	$\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j},, \overrightarrow{k}\}$
Komponenten	$b_x \overrightarrow{i}, b_y \overrightarrow{j}$	$b_x \overrightarrow{i}, b_y \overrightarrow{j}, b_z \overrightarrow{k}$
Komponentendarstellung eines Ortsvektors	$\overrightarrow{b} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{b} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}$
Koordinaten des Punktes P	$x; y$	$x; y; z$
Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x}$	$\lvert\overrightarrow{x}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lvert\overrightarrow{x}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$









Betrag eines Vektors

Der Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt werden.

In einer Ebene:
$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{x}|^2 = x^2 + y^2$
$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ zwei beliebige Punkte der Ebene, so ist ihr gegenseitiger Abstand, d.h. der Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Für $\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}) = \alpha$ erhält man:

$x = |\overrightarrow{x}| \cos\alpha, y = |\overrightarrow{x}| \sin\alpha$

Im Raum:
$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Sind $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und $P_2(x_2; y_2; z_2)$ zwei beliebige Punkte des Raumes, so ist ihr gegenseitiger Abstand, d.h. der Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Für $\angle(\overrightarrow{i}, x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) = \alpha$ erhält man:

$x = |\overrightarrow{x}| \sin\beta \cos\alpha, \quad y = |\overrightarrow{x}| \sin\beta \sin\alpha,$
$z = |\overrightarrow{x}| \cos\beta$

Summe, Differenz, Produkt

► Satz:
Die Koordinaten der Summe (Differenz) zweier Vektoren $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ bezüglich einer Basis sind gleich den Summen (Differenzen) der entsprechenden Koordinaten von $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$.

In einer Ebene:
$\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$
$\overrightarrow{c} = \mu_1 \overrightarrow{a}_1 + \mu_2 \overrightarrow{a}_2$

$\overrightarrow{b} \pm \overrightarrow{c} = (\lambda_1 \pm \mu_1)\overrightarrow{a}_1 + (\lambda_2 \pm \mu_2)\overrightarrow{a}_2$

■ $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = 6\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 9\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j}$

Im Raum:
$\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$
$\overrightarrow{c} = \mu_1 \overrightarrow{a}_1 + \mu_2 \overrightarrow{a}_2 + \mu_3 \overrightarrow{a}_3$

$\overrightarrow{b} \pm \overrightarrow{c} = (\lambda_1 \pm \mu_1)\overrightarrow{a}_1 + (\lambda_2 \pm \mu_2)\overrightarrow{a}_2 +$
$+(\lambda_3 \pm \mu_3)\overrightarrow{a}_3$

■ $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 7\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = -3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$

► Satz:
Die Koordinaten des Produkts eines Vektors $\overrightarrow{b}$ mit einer reellen Zahl λ bezüglich einer Basis sind gleich den Produkten der entsprechenden Koordinaten von $\overrightarrow{b}$ mit λ.

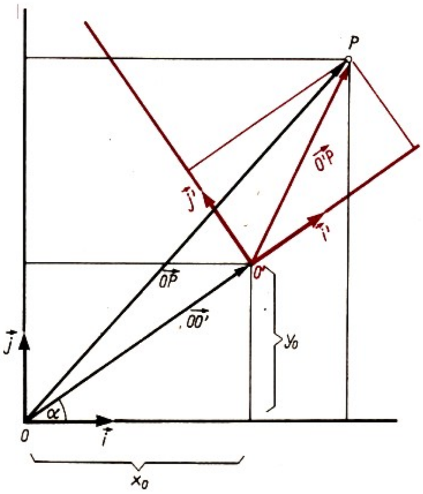
In einer Ebene:
$\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j}$
$\lambda \overrightarrow{b} = (\lambda\lambda_1) \overrightarrow{i} + (\lambda\lambda_2) \overrightarrow{j}$

■ $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$; $\lambda = 0{,}5$
$\lambda \overrightarrow{b} = 1{,}5\overrightarrow{i} - 2{,}5\overrightarrow{j}$

Im Raum:
$\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j} + +\lambda_3 \overrightarrow{k}$
$\lambda \overrightarrow{b} = (\lambda\lambda_1) \overrightarrow{i} + (\lambda\lambda_2) \overrightarrow{j} + (\lambda\lambda_3) \overrightarrow{k}$

■ $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$; $\lambda = -0{,}5$
$\lambda \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + 1{,}5\overrightarrow{j} - 0{,}5\overrightarrow{k}$

Transformation eines Koordinatensystems in der Ebene



Sind $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ und $\{O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\}$ zwei orthonormierte Rechtssysteme der Ebene,
x_0,y_0 die Koordinaten von O' im System $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ und ist der Winkel
$\alpha = \angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}) = \angle(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j'})$, so ist
$\overrightarrow{i'} = \cos\alpha \cdot \overrightarrow{i} + \sin\alpha\, \overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j'} = -\sin\alpha \cdot \overrightarrow{i} + \cos\alpha\, \overrightarrow{j}$

Ferner gelten die Gleichungen

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha - (x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)$$

$$y = (-x)\sin\alpha + y\cos\alpha - [(-x_0)\sin\alpha + y_0\cos\alpha]$$

bzw.

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \quad , \quad y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha$$

■ Gegeben:
Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ und ein Punkt $P(4;3)$ sowie Koordinatensystem $\{O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\}$ mit $\overrightarrow{OO'} = 3\overrightarrow{i} + 1{,}5\overrightarrow{j}$ und $\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}) = 23°$
Gesucht: Koordinaten x', y' von P im System $\{O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\}$

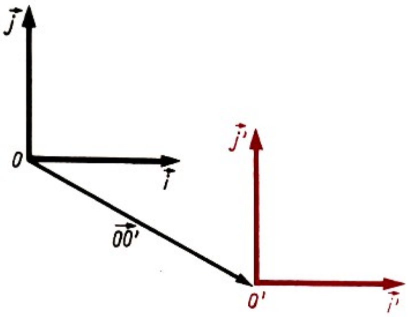
Lösung:
Da O' im System $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ die Koordinaten $x_0 = 3$ und $y_0 = 1{,}5$ hat, ist

$$x' = (4 - 3) \cdot \cos 23° + (3 - 1{,}5) \cdot \sin 23° = 1{,}51$$
$$y' = (4 - 4) \cdot (-\sin 23°) + (3 - 1{,}5) \cdot \cos 23° = 0{,}99$$

Ergebnis: $P(1{,}51; 0{,}99)$

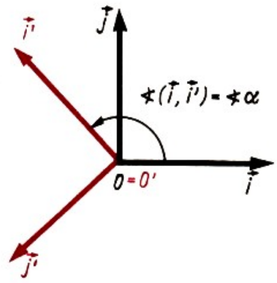
Verschiebung

Ist der Winkel $\alpha = 0°$ und damit $\vec{i} = \vec{i'}$ und $\vec{j'} = \vec{j}$, dann geht $\{O; \vec{i'}, \vec{j'}\}$ hervor. Für diese als Verschiebung oder Translation bezeichnete Transformation des Koordinatensystems gilt:
$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0$



Drehung

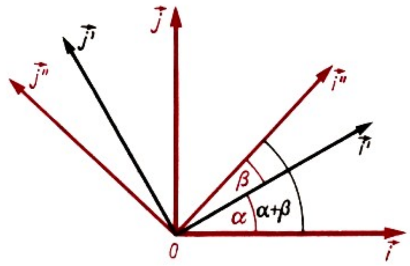
Ist (für einen beliebigen Winkel α) $O' = O$, d.h. $x_0 = y_0 =$, dann spricht man von einer Drehung oder Rotation des Koordinatensystems. In diesem Falle gilt:
$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$,
$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$



Additionstheoreme der Winkelfunktionen

Mit Hilfe der Drehung des Koordinatensystems lassen sich die Additionstheoreme der Winkelfunktionen herleiten.

Gegeben seien drei orthonormierte Rechtssysteme $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, $\{O, \vec{i'}, \vec{j'}\}$, $\{O, \vec{i''}, \vec{j''}\}$ mit $\angle(\vec{i}, \vec{i'}) = \alpha$ und $\angle(\vec{i'}, \vec{i''}) = \beta$.



Da

$$\vec{i'} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} \quad , \quad \vec{j'} = -\sin\alpha \cdot \vec{i} + \cos\alpha \cdot \vec{j}$$
$$\vec{i''} = \cos\beta \cdot \vec{i'} + \sin\beta \cdot \vec{j'} \quad , \quad \vec{j''} = -\sin\beta \cdot \vec{i'} + \cos\beta \cdot \vec{j'}$$

ist, ergibt sich

$$\vec{i''} = \cos\beta(\cos\alpha\,\vec{i'} + \sin\alpha \cdot \vec{j'}) + \sin\beta(-\sin\alpha\,\vec{i'} + \cos\alpha \cdot \vec{j'})$$
$$\vec{j''} = -\sin\beta(\cos\alpha\,\vec{i'} + \sin\alpha \cdot \vec{j'}) + \cos\beta(-\sin\alpha\,\vec{i'} + \cos\alpha \cdot \vec{j'})$$

Andererseits ist wegen $\angle(\vec{i}, \vec{i''}) = \angle(\vec{i}, \vec{i'}) + \angle(\vec{i'}, \vec{i''})$

$$\vec{i''} = \cos(\alpha+\beta)\,\vec{i'} + \sin(\alpha+\beta)\,\vec{j'}$$
$$\vec{j''} = -\sin(\alpha+\beta)\,\vec{i'} + \cos(\alpha+\beta)\,\vec{j'}$$

Infolge der linearen Unabhängigkeit von $\vec{i}$ und $\vec{j}$ gilt somit

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos beta$$

Wird β durch $-\beta$ ersetzt, erhält man

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos beta$$

E.3. Analytische Geometrie der Geraden

Geradengleichungen in der Ebene

Eine Gerade ist durch die Angabe
- eines Punktes und der Richtung der Geraden oder
- zweier Punkte eindeutig bestimmt.

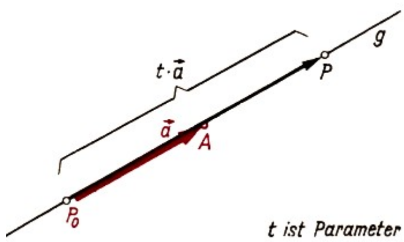
	Parameterdarstellung	parameterfreie Darstellung
Punktrichtungsgleichung	Vektordarstellung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{o})$	
	Koordinatendarstellung $x = x_0 + ta_x, y = y_0 + ta_y$	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Zweipunktegleichung	Vektordarstellung $\vec{x} = \vec{x_0} + t(\vec{x_1} - \vec{x_0})$ $(\vec{x_1} - \vec{x_0} \neq \vec{o})$	
	Koordinatendarstellung $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$	$(y - y_0)(x_1 - x_0) =$ $= (x - x_0)(y_1 - y_0)$

Parametergleichungen einer Geraden (Vektordarstellung)

(a) Die Gerade ist durch einen Punkt und die Richtung der Geraden bestimmt.

(1) Ist eine Gerade durch einen Punkt P_0, und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0A} = \vec{a} \neq \vec{o}$ gegeben und bedeutet t eine reelle Zahl, so gilt für alle Punkte P der Geraden:

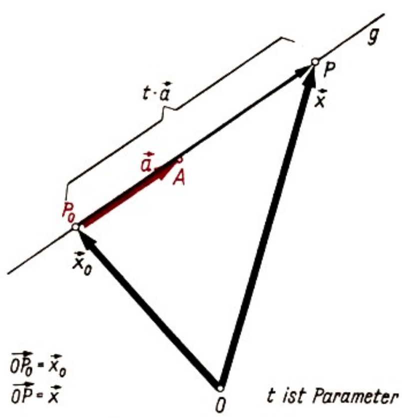
$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{a} \text{ mit } -\infty < t < \infty$$



(2) Ist außer P_0 und $\overrightarrow{P_0A} = \vec{a} \neq \vec{o}$ ein weiterer Punkt O der Ebene, z. B. der Ursprung eines Koordinatensystems gegeben, so erhält man die Parametergleichung:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{x} = \vec{x_0} + t \cdot \vec{a} \text{ mit } -\infty < t < \infty$$

Man nennt diese Gleichung Punkt-Richtungs-Parametergleichung.



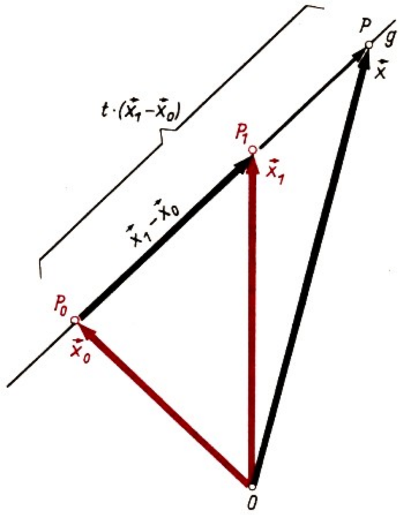
In beiden Gleichungen gilt $t > 0$, falls $\overrightarrow{P_0P}$ mit $\overrightarrow{a}$ gleichgerichtet ist. Es gilt $t < 0$, falls $\overrightarrow{P_0P}$ zu $\overrightarrow{a}$ entgegengesetzt gerichtet ist.
Im Fall 1 gilt ferner $|t| = \frac{|\overrightarrow{P_0P}|}{|\overrightarrow{a}|}$.

(b) Die Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt.

(3) Ist eine Gerade durch zwei ihrer Punkte P_0 und P_1 gegeben, so dass gilt $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{x_0}$ und $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{x_1}$, so stellt der Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ einen Richtungsvektor der Geraden dar. Es gilt dann für alle Punkte P der Geraden

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0})$$

mit $-\infty < t < \infty$.
Man nennt diese Gleichung Zweipunkte-Parametergleichung.



t ist Parameter

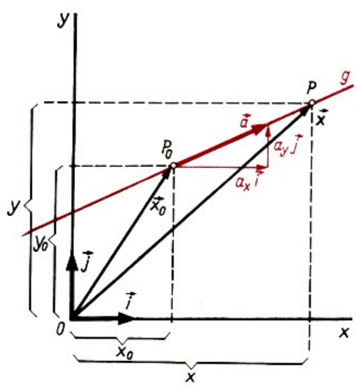
Wird in einer Parametergleichung der Geraden der Parameter einer Beschränkung unterworfen, so beschreibt die Gleichung nicht mehr die gesamte Gerade, sondern Teile derselben.

■ Die Gleichung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{a}$, $t \geq 0$, ist eine Gleichung des Strahls mit dem Anfangspunkt P_0 und der gleichen Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{a}$.

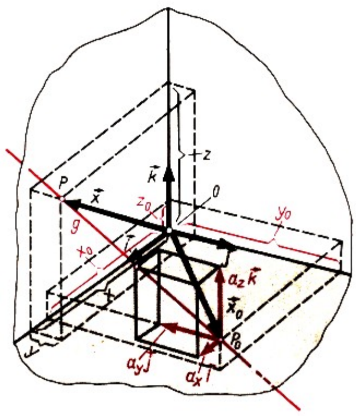
■ Die Gleichung $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0})$ mit $0 \leq t \leq 1$ ist eine Parametergleichung der Strecke $\overline{P_0P_1}$.

Ist ein Koordinatensystem gegeben, so können die Vektoren $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}$ und $\overrightarrow{a}$ durch ihre Komponenten dargestellt werden.

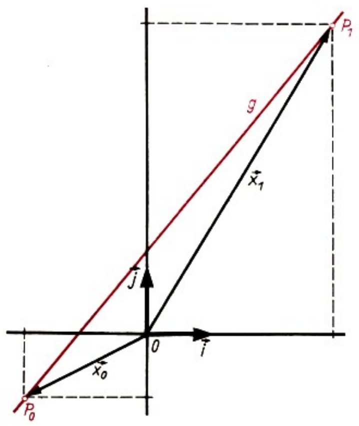
In der Ebene:
Für das Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ ergibt sich:
$\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{x_0} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{x_1} = x_1\,\overrightarrow{i} + y_1\,\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{a} = a_x\,\overrightarrow{i} + a_y\,\overrightarrow{j}$



Im Raum:
Für das Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ ergibt sich:
$\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{x_0} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} + z_0\,\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{x_1} = x_1\,\overrightarrow{i} + y_1\,\overrightarrow{j} + z_1\,\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{a} = a_x\,\overrightarrow{i} + a_y\,\overrightarrow{j} + a_z\,\overrightarrow{k}$



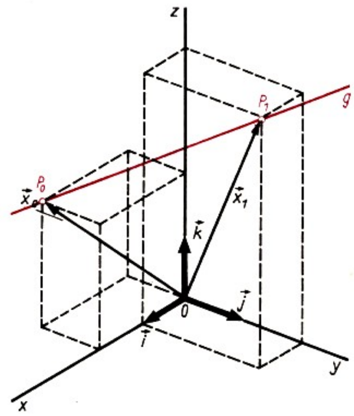
■ Gegeben Gerade g durch zwei Punkte $P_0(-2;-1)$, $P_1(3;5)$.
Gesucht: Parametergleichung von g (in Vektordarstellung)



Lösung:
Aus $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{x_0} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} = -2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$
und $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{x_1} = x_1\,\overrightarrow{i} + y_1\,\overrightarrow{j} = 3\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j}$
folgt als Richtungsvektor der Geraden g
$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0} = 5\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j}$

Ergebnis:
$\overrightarrow{x} = -2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + t(5\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j})$
mit $-\infty < t < \infty$.

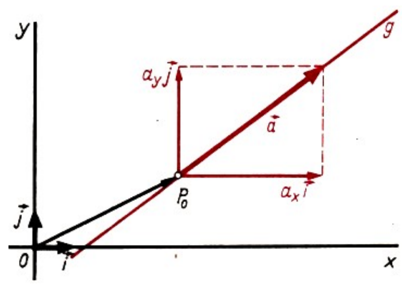
■ Gegeben Gerade g durch zwei Punkte $P_0(2;-1;2)$, $P_1(1;2;4)$.
Gesucht: Parametergleichung von g (in Vektordarstellung)



Lösung:
Aus $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{x_0} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} + z_0\,\overrightarrow{k} = 2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$
und $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{x_1} = x_1\,\overrightarrow{i} + y_1\,\overrightarrow{j} + z_1\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{j}$
folgt als Richtungsvektor der Geraden g
$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0} = -\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$

Ergebnis:
$\overrightarrow{x} = -2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k} + t(-\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k})$
mit $-\infty < t < \infty$.

■ Gegeben: Gerade g durch einen Punkt $P_0(4;2)$ und den Anstieg $m = \frac{3}{4}$
Gesucht: Parametergleichung von g (Vektordarstellung)
Lösung:
Man erhält
$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{x_0} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} = 4\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$
und, da $m = \frac{a_y}{a_x}$ ist, ergibt sich als ein Richtungsvektor $\overrightarrow{a} = 4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$.



Ergebnis: $\overrightarrow{x} = 4\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + t(4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j})$ mit $-\infty < t < \infty$.

Bemerkung: Als Richtungsvektor der Geraden g kann auch ein beliebiges Vielfaches (0 als Faktor ausgenommen) von $4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$ angegeben werden. Oftmals ist es zweckmäßig, als Richtungsvektor den entsprechenden Einheitsvektor anzugeben, d.h. $|\overrightarrow{a}| = 1$ zu wählen. Im Beispiel bedeutet das $\overrightarrow{a} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{i} + \frac{3}{5}\,\overrightarrow{j}$.

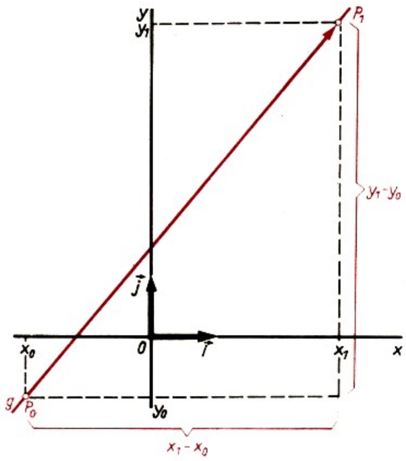
Parametergleichung einer Geraden (Koordinatendarstellung)

In einer Ebene:
Aus der Beziehung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$ folgt
$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + t(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})$
Daraus ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{i}$ und $\vec{j}$ das Gleichungssystem
$x = x_0 + ta_x, \quad y = y_0 + ta_y$
bzw.
$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0)$

Im Raum:
Aus der Beziehung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$ folgt
$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z\vec{k} + t(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$
Daraus ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ das Gleichungssystem
$x = x_0 + ta_x, \quad y = y_0 + ta_y, \quad z = z_0 + ta_z$
bzw.
$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0)$

■ Gegeben:
Gerade g durch zwei Punkte $P_0(-2;-1)$ und $P_1(3;5)$
Gesucht: Parametergleichung von g (in Koordinatendarstellung)

Lösung:
Aus $x_0 = -2, y_0 = -1$ und $a_x = x_1 - x_0 = 3+2 = 5$, $a_y = y_1 - y_0 = 5 + 1 = 6$ ergibt sich
$x = -2 + t \cdot 5; \qquad y = -1 + t \cdot 6$



Gleichungen der Koordinatenachsen

In der Ebene:
x-Achse:

$$\vec{x} = x\vec{i} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ y = 0 \end{cases}$$

y-Achse:

$$\vec{x} = y\vec{j} \begin{cases} -\infty < y < \infty \\ x = 0 \end{cases}$$

Im Raum:
x-Achse:

$$\vec{x} = x\vec{i} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ y = 0, z_0 \end{cases}$$

y-Achse:

$$\vec{x} = y\vec{j} \begin{cases} -\infty < y < \infty \\ x = 0, z = 0 \end{cases}$$

z-Achse:

$$\vec{x} = z\vec{k} \begin{cases} -\infty < z < \infty \\ x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Punktrichtungsgleichung (parameterfrei)

Aus der für ein Koordinatensystem in der Ebene geltenden Beziehungen

$$x = x_0 + ta_x \qquad , \qquad y = y_0 + ta_y$$

folgt durch Elimination von t die parameterfreie Gleichung der Geraden in Bezug auf das Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ in der Ebene:

$$a_y x - a_x y = a_y x_0 - a_x y_0$$

Für $a_x \neq 0$ ergibt sich weiterhin

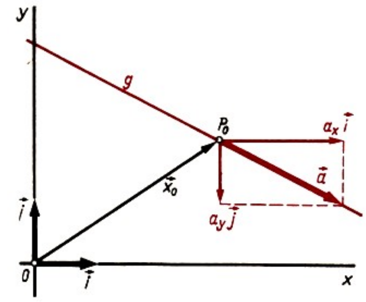
$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$$

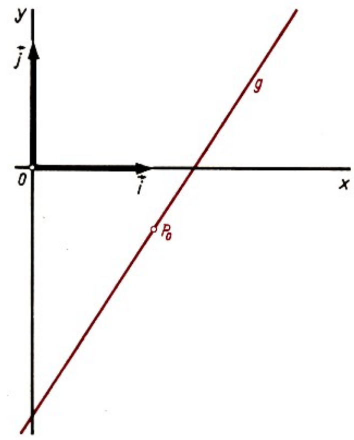
Der Koeffizient $\frac{a_y}{a_x} = \tan\alpha$ heißt Anstieg der Geraden. Er wird meist mit m bezeichnet. Es ergibt sich somit als Punktrichtungsgleichung der Geraden

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

■ Gegeben: Gerade g durch $\overrightarrow{x_0} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$
Gesucht: Gleichung von g

Lösung: Aus den Daten für $\overrightarrow{x_0} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j}$ folgen $x_0 = 3; y_0 = 2; a_x = 2; a_y = -1$ und $m = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{1}{2}$.
Ergebnis: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ bzw. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$





■ Gegeben: Gerade g durch einen Punkt $P_0\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ und den Anstieg $m = \frac{3}{2}$
Gesucht: Gleichung von g

Lösung:
Die zum Aufstellen der Gleichung erforderlichen Werte sind unmittelbar gegeben.
Ergebnis: $y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 1)$ bzw. $y = \frac{3}{2}x - 2$.

Zweipunktegleichung (parameterfrei)

Aus der für ein Koordinatensystem in der Ebene geltenden Beziehung $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ folgt durch Elimination von t die parameterfreie Gleichung der Geraden in Bezug auf das Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ in der Ebene:

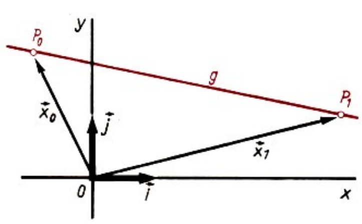
$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

Sie kann für $x_1 - x_0 \neq 0$ auch in der (nicht für $x = x_0$ gültigen) Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

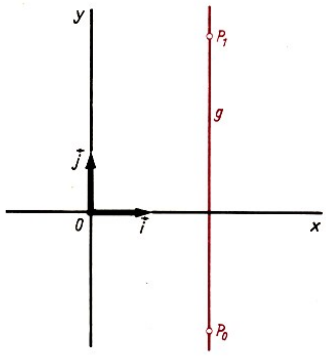
geschrieben werden.

■ Gegeben: Gerade g durch die Ortsvektoren $\overrightarrow{x_0} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{x_1} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ zweier Punkte
Gesucht: Gleichung von g
Lösung: Aus den Daten für $\overrightarrow{x_0} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{x_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$ folgen $x_0 = -1$; $y_0 = 2$; $x_1 = 4$; $y_1 = 1$.
Ergebnis: $(x+1)(-1) = (y-2)\cdot 5$ bzw. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$



■ Gegeben:
Gerade g durch zwei Punkte $P_0(2;-2)$, $P_1(2;3)$
Gesucht: Gleichung von g
Lösung: Die erforderlichen Werte sind unmittelbar gegeben.
Ergebnis: $(x-2)\cdot 5 = (y+2)\cdot 0$ bzw. $x=2$.

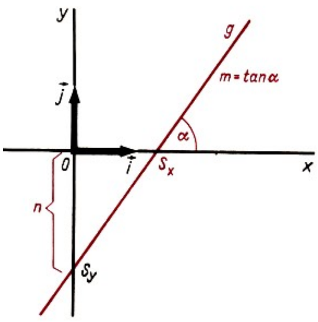
Bemerkung: Wegen $x_1 - x_0 = 0$ ist die Gleichung nicht in der Bruchform angebbar.

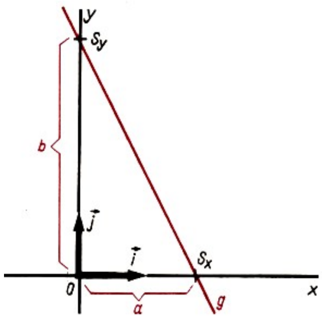


Normalform, Achsenabschnittsgleichung

Ist eine Gerade g durch ihren Anstieg m und den Punkt $S_y(0;n)$, d. h. ihren Schnittpunkt mit der y-Achse gegeben, so folgt aus ihrer Punktrichtungsgleichung unmittelbar die Normalform der Geradengleichung

$$y = mx + n$$





Sind von einer Geraden die Punkte $S_y(0;b)$ und $S_x(a;0)$ gegeben, so folgt aus ihrer Zweipunktegleichung

$$(x-a)b = y(-a)$$

und daraus für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ die Achsenabschnittsgleichung der Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Allgemeine Geradengleichung

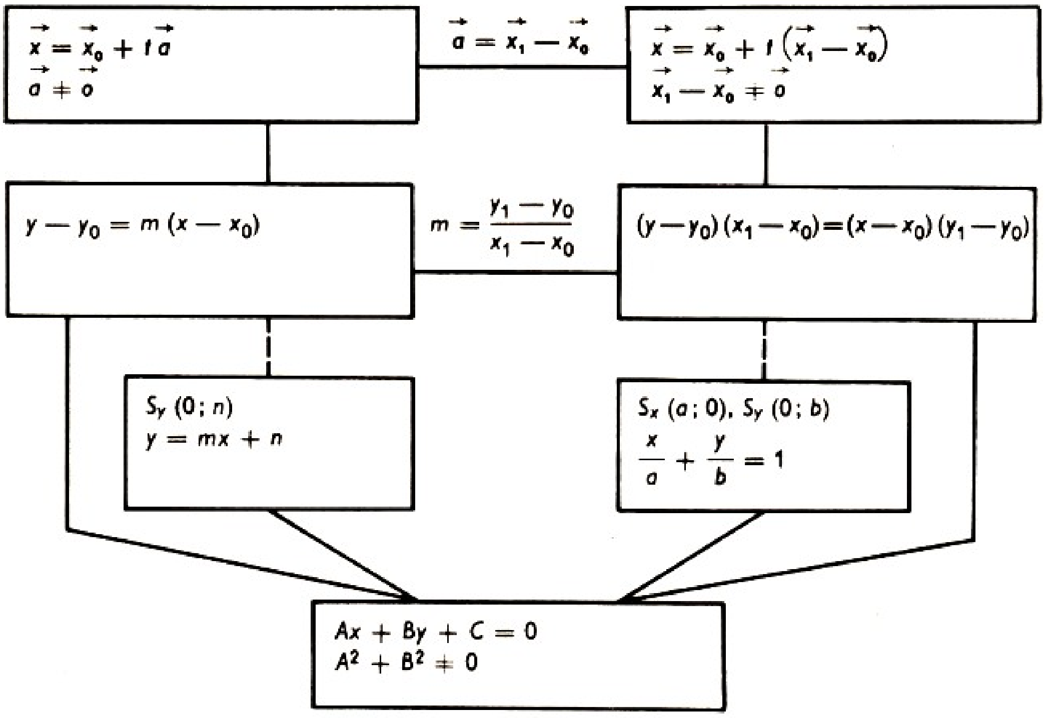
Für jede beliebige Gerade in der Ebene kann eine Gleichung in Form der allgemeinen Geradengleichung

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{mit} \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

aufgestellt werden. Alle anderen Formen der Geradengleichung lassen sich auf diese Form bringen; umgekehrt (und untereinander) ist das aber nicht immer uneingeschränkt möglich. Eine Übersicht über einige Umformungen gibt die folgende Tabelle (nächste Seite) an.

Die Ergebnisse, die man beim Aufstellen der Punktrichtungsgleichung und der Zweipunktegleichung erhält, führen in der Regel unmittelbar zur allgemeinen Geradengleichung, in besonderen Fällen auch zu den anderen genannten Gleichungsformen. Das ist aus der anschließenden Übersicht zu ersehen.
Diese Übersicht wurde von Dr. Sieglinde Schneider, Dresden, entworfen.

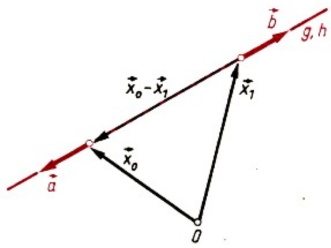
in Form → von Form ↓	$Ax+By+C=0$	$y=mx+n$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
$Ax+By+C=0$		$m=-\frac{A}{B}$, $n=-\frac{C}{B}$ für $B\neq 0$	$a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$ für $A,B,C\neq 0$
$y=mx+n$	$A=\lambda m$, $B=-\lambda$ $C=\lambda n$, $\lambda\in P$		$a=-\frac{n}{m}$, $b=n$ für $m\neq 0$, $n\neq 0$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$A=\mu b$, $B=\mu a$ $C=-\mu AB$; $\mu\in P$	$m=-\frac{b}{a}, n=b$	



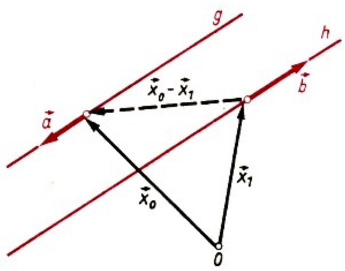
Gegenseitige Lage zweier Geraden in der Ebene

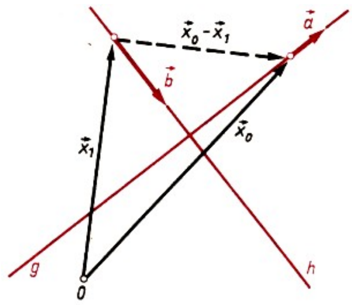
Die Gerade g sei durch $\vec{x}=\vec{x_0}+t\vec{a}$ und die Gerade h durch $\vec{x}=\vec{x_1}+u\vec{b}$ gegeben. In der Ebene sind folgende Fälle gegenseitiger Lage möglich.

(1) $\vec{a}\parallel\vec{b}$, d. h., die Geraden g und h haben gleiche Richtung.
b) $\vec{x_0}-\vec{x_1}\parallel\vec{a}$, d. h., auch der Verbindungsvektor eines Punktes von g mit einem Punkt von h hat die gleiche Richtung wie g (bzw. h). Die Geraden sind identisch, d. h., sie haben alle Punkte gemeinsam.



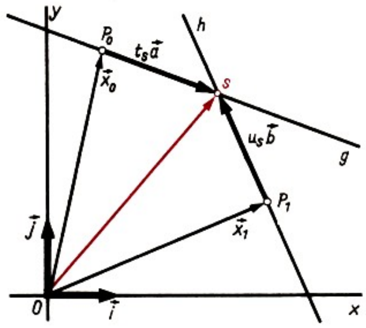
(2) $\vec{a}\parallel\vec{b}$, d. h., die Geraden g und h haben gleiche Richtung.
b) $\vec{x_0}-\vec{x_1}\nparallel\vec{a}$, d. h., der Verbindungsvektor eines Punktes von g mit einem Punkt von h hat eine andere Richtung als g (bzw. h). Die Geraden sind parallel, aber nicht identisch, d. h., sie haben keinen Punkt gemeinsam.





(3) $\overrightarrow{a} \not\parallel \overrightarrow{b}$, d. h., die Geraden g und h haben verschiedene Richtungen.
Da $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_1}$ in derselben Ebene liegen, sind sie bei $\overrightarrow{x_0} \neq \overrightarrow{x_1}$ linear abhängig. Die Geraden schneiden einander, d. h., sie haben genau einen Punkt, den Schnittpunkt, gemeinsam.

Schnittpunkt zweier Geraden (Ebene)

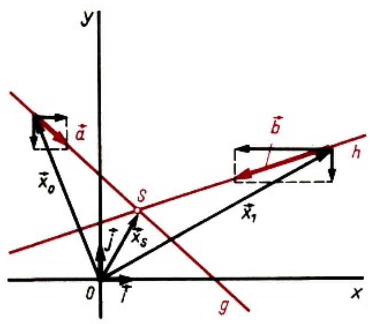


Gerade g: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{a}$
Gerade h: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + u\,\overrightarrow{b}$
Für den Vektor des Schnittpunktes $\overrightarrow{x_S}$ gilt
$\overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x_1} + u\,\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{x_0 - x_1} = u_S\,\overrightarrow{b} - t_S\,\overrightarrow{a}$
Dieser Gleichung entspricht bei Komponentendarstellung das System:
$x_0 - x_1 = u_S b_x - t_S a_x, y_0 - y_1 = u_S b_Y - t_S a_y$
Wir sprechen in diesem Fall auch von Komponentenzerlegung.
Aus dem Gleichungssystem folgt:

$$t_S = \frac{(x_1 - x_0)b_y - (y_1 - y_0)b_x}{a_x b_y - a_y b_x} \qquad , \qquad u_S = \frac{(x_0 - x_1)a_y - (y_0 - y_1)a_x}{-(a_x b_y - a_y b_x)}$$

■ Gegeben:
Die Gerade g durch $\overrightarrow{x_0} = -2\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ und die Gerade h durch $\overrightarrow{x_1} = 7\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{b} = -3\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$

Gesucht: Schnittpunkt S von g und h (Ortsvektor $\overrightarrow{x_S}$).
Lösung:



$$t_S = \frac{(7+2)(-1) - (4-5)(-3)}{1(-1) - (-1)(-3)} = 3$$
$$u_S = \frac{(-2-7)(-1) - (5-5)\cdot 1}{-(1(-1) - (-1)(-3))} = 2$$

Mit Hilfe der Werte für t_S und u_S können die Koordinaten x_S, y_S des Schnittpunktes errechnet werden:

$$x_S = x_0 + ta_x \qquad , \qquad y_S = y_0 + ta_y$$

Im Beispiel ergibt sich $x_S = 1$ und $y_S = 2$. Ebenso führt (zur Kontrolle)

$$x_S = x_1 + ub_x \qquad , \qquad y_S = y_1 + ub_y$$

zu $x_S = 1$ und $y_S = 24$. Ergebnis: $\overrightarrow{x_S} = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$.

Sind die Geraden durch ihre allgemeinen Gleichungen, also durch

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

gegeben, so folgt für ihren Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$:

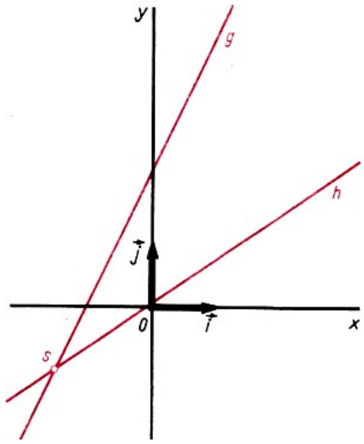
$$x_S = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad , \quad y_S = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad \text{sofern } A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$$

Die Geraden g und h sind parallel, wenn $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ ist. Sie sind identisch, wenn außerdem $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ für $B_1 \neq 0$ oder $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$ für $B_1 = 0$ ist.

■ Gegeben: Die Gerade g durch $2x - y + 2 = 0$ und die Gerade h durch $2x - 3y = 0$
Gesucht: Schnittpunkt S von g und h (durch Koordinaten)
Lösung:

$$x_S = \frac{(-1) \cdot 0 - (-3) \cdot 2}{2(-3) - 2(-1)} = -1{,}5$$
$$y_S = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 0}{-4} = -1$$

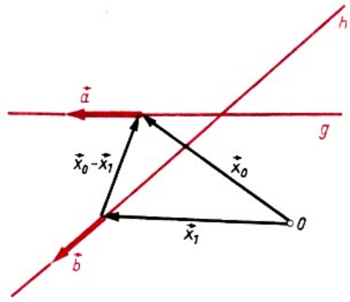
Ergebnis: $S(-1{,}5; -1)$



Gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum

Die für die gegenseitige Lage zweier Geraden in der Ebene möglichen Fälle gelten auch für den Raum. Da drei Vektoren des Raumes nicht notwendigerweise linear abhängig sind, besteht als weitere Möglichkeit die windschiefe Lage der Geraden.

(4) $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, d.h., die Geraden g und h haben verschiedene Richtungen, aber $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x_0} - \vec{x_1}$ sind linear unabhängig.
Die Geraden sind windschief, d. h., sie haben keinen Punkt gemeinsam und sind nicht parallel.



Schnittpunkt zweier Geraden (Raum)

Die Gleichung $\vec{x_0} - \vec{x_1} = u_S\vec{b} - t_S\vec{a}$ führt über die Komponentenzerlegung zum Gleichungssystem

$$x_0 - x_1 = u_Sb_x - ta_x, \qquad y_0 - y_1 = u_Sb_y - ta_y, \qquad z_0 - z_1 = u_Sb_z - ta_z$$

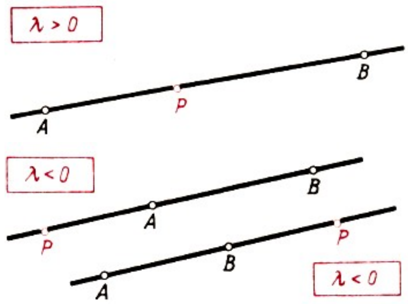
Daraus lassen sich im Falle schneidender Geraden die Parameterwerte t_S und u_S errechnen. Die Koordinaten x_S, y_S, z_S des Schnittpunktes S werden durch Einsetzen von t_S bzw. u_S in die Gleichung für g bzw. h ermittelt.

Teilverhältnis

▶ Definition:
Ist P ein Punkt der durch die Punkte A und B bestimmten Geraden und ist $P \neq B$, dann heißt die reelle Zahl λ, für die die Beziehung $\overline{AP} = \lambda \cdot \overline{PB}$ zwischen den gerichteten Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ gilt, das Teilverhältnis, in dem der Punkt P die gerichtete Strecke $\overline{AB}$ teilt.

Liegt P zwischen A und B, so sind $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ gleichgerichtet. λ ist somit positiv.

Liegt P nicht zwischen A und B, so sind $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ entgegengesetzt gerichtet. λ ist somit negativ. Für $P = A$ ist $\lambda = 0$.



Ist λ gegeben ($\lambda \neq -1$), so gilt für die Koordinaten des Teilpunktes P

in der Ebene

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$$
$$y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$$

im Raum

$$x_P = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$$
$$y_P = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$$
$$z_P = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$$

Sind die Punkte A, B und P einer Geraden gegeben, so ist

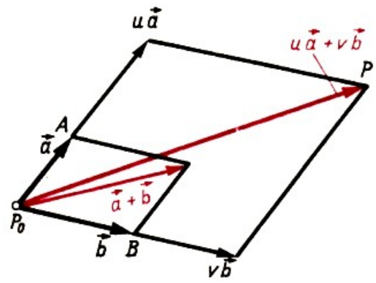
$$\lambda = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_B}$$
$$\lambda = \frac{y_A - y_P}{y_P - y_B}$$

$$\lambda = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_B}$$
$$\lambda = \frac{y_A - y_P}{y_P - y_B}$$
$$\lambda = \frac{z_A - z_P}{z_P - z_B}$$

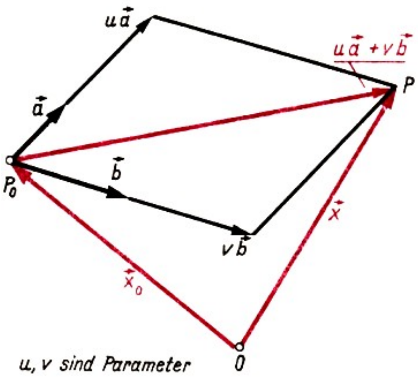
E.4. Analytische Geometrie der Ebene

Parametergleichungen einer Ebene im Raum

(1) Ist eine Ebene durch einen Punkt P_0 und zwei linear unabhängige Vektoren $\overrightarrow{P_0A} = \overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{P_0B} = \overrightarrow{b}$ gegeben und sind u und v reelle Zahlen, so gilt für alle Punkte P der Ebene
$\overrightarrow{P_0P} = u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$ mit $\infty < u < \infty$ und $-\infty < v < \infty$.

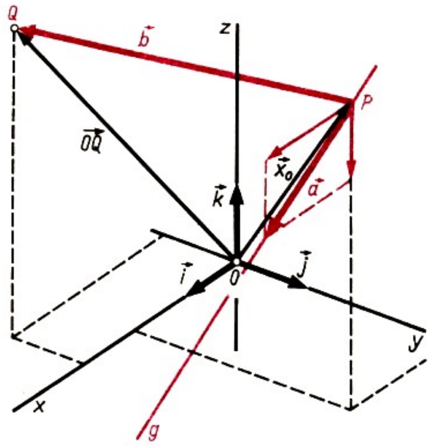


(2) Wird ein Punkt O, z.B. der Ursprung eines Koordinatensystems, vorgegeben und $\overrightarrow{OP_0}$ mit $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{OP}$ mit $\overrightarrow{x}$ bezeichnet, so gilt
$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$ mit $\infty < u < \infty$ und $-\infty < v < \infty$.



Werden nur Teile der Ebene gekennzeichnet, so erfahren die Parameter u und v entsprechende Einschränkungen.

■ Gegeben: Ebene ε durch eine Gerade g mit $P(2;3;4)$ und der Richtung $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ sowie einen Punkt $Q(8;-1;4)$
Gesucht: Parametergleichung von ε

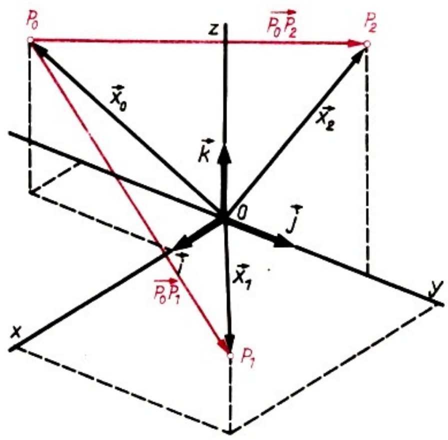


Lösung:
Durch $\vec{a}$ ist ein Vektor des Richtungsvektorenpaares der Ebene gegeben, als zweiter Vektor dieses Paares kann der (von $\vec{a}$ linear unabhängige) Vektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{b}$ gewählt werden.

Es ist $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{i} - 4\vec{j}$.

Ergebnis: $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} + u(2\vec{i} - \vec{k}) + v(\vec{i} - 4\vec{j})$ mit $\infty < u < \infty$ und $-\infty < v < \infty$.

■ Gegeben: Ebene ε durch drei Punkte $P_0(1;-2;2)$, $P_1(4;3;1)$, $P_2(0;2;3)$
Gesucht: Parametergleichung von ε in Vektordarstellung



Lösung:
Durch P_0, P_1, P_2 sind drei Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_1P_2}$ bestimmt, von denen je zwei linear unabhängig sind und der dritte stets eine Linearkombination der beiden anderen ist. Somit können zwei von ihnen ein Richtungsvektorenpaar der Ebene ε bilden. Aus

$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{x_0} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{x_1} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \vec{x_2} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

folgen als Richtungsvektorenpaar

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{x_1} - \vec{x_0} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$
$$\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{x_2} - \vec{x_0} = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

Ergebnis:
$\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + u(3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}) + v(-\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})$ mit $\infty < u < \infty$ und $-\infty < v < \infty$.

Gleichung der Koordinatenebenen im Raum

Da jede Koordinatenebene durch den Ursprung des Koordinatensystems geht und jeweils zwei Basisvektoren dieses Systems ein Richtungsvektorenpaar dieser Ebene bilden, gilt für die

xy-Ebene: $\vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ z = 0 \end{cases}$

xz-Ebene: $\vec{x} = x\,\vec{i} + z\,\vec{k} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ y = 0 \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$

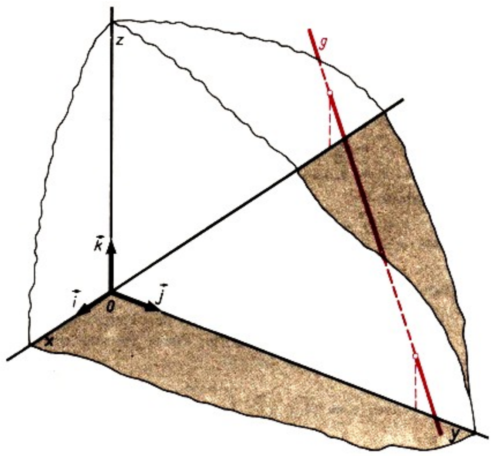
yz-Ebene: $\vec{x} = y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \begin{cases} x = 0 \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$

Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und Koordinatenebenen

Wenn eine Gerade g, gegeben durch die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\,\vec{a}$, mit den Koordinatenebenen
$x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, $z = 0$ (xy-Ebene)
$x\,\vec{i} + z\,\vec{k}$, $y = 0$ (xz-Ebene)
$y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $x = 0$ (yz-Ebene)
gemeinsame Punkte hat, so erfüllen die Koordinaten dieser Punkte sowohl die Geradengleichung als auch die betreffende Ebenengleichung.

Gegeben:
Eine Gerade g durch $\vec{x_0} = -4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$
und $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$
Gesucht:
Gemeinsame Punkte G von g und den drei Koordinatenebenen

a) Für gemeinsame Punkte G von g und der xy-Ebene gilt
$x_G\,\vec{i} + y_G\,\vec{j} = \vec{x_0} + t_G\,\vec{a}$
Im Beispiel ergibt sich daraus
$x_G = -4 + t_G; \quad y_G = 2 + t_G; \quad 0 = 1 + t_G$



Aus dem Widerspruch folgt, dass es kein Zahlentripel x_G, y_G, t_G gibt, das alle drei Gleichungen erfüllt. Die Gerade g hat mit der xy-Ebene keinen Punkt gemeinsam, sie ist parallel zu dieser Ebene, liegt aber nicht in ihr.

b) Für gemeinsame Punkte G von g und der xz-Ebene gilt $x_G\,\vec{i} + z_G\,\vec{k} = \vec{x_0} + t_G\,\vec{a}$.
Im Beispiel ergibt sich daraus $x_G = -4 + t_G$, $0 = 2 + t_G$, $z_G = 1 + t_G \cdot 0$.
Daraus folgen als Koordinaten des gemeinsamen Punktes G der Geraden g und der xz-Ebene, d. h. des Spurpunktes von g auf der xz-Ebene, die Werte $-6; 0; 1$.

c) Analoge Überlegungen führen zu den Koordinaten des Spurpunktes von g auf der yz-Ebene. Es ergeben sich die Werte $0; 6; 1$.
Ergebnis: g ist zur xy-Ebene parallel und hat mit der xz-Ebene $G_{xz}(6; 0; 1)$, mit der yz-Ebene $G_{yz}(0; 6; 1)$ gemeinsam.

Projektion auf die Koordinatenebenen

► Satz:
(1) Die Projektion einer Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\,\vec{a}$ auf die xy-Ebene ist für

$\vec{a'} \neq \vec{o}$ die Gerade g' mit der Gleichung $\vec{x'} = \vec{x'_0} + t\vec{a'}$, $\vec{x'_0}$ und $\vec{a'}$ sind die Projektionen von $\vec{x_0}$ und $\vec{a}$. Für $\vec{a'} = \vec{o}$ ist g' ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x'_0}$.

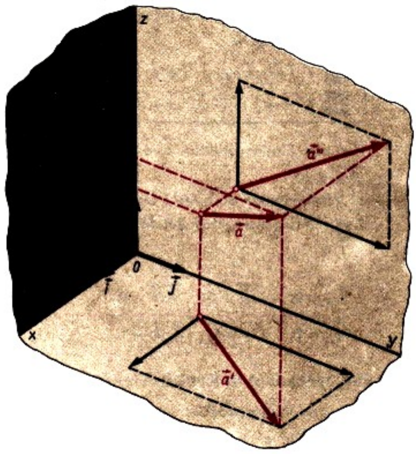
(2) Die Projektion einer Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$ auf die xz-Ebene ist für $\vec{a''} \neq \vec{o}$ die Gerade g'' mit der Gleichung $\vec{x''} = \vec{x''_0} + t\vec{a''}$, $\vec{x''_0}$ und $\vec{a''}$ sind die Projektionen von $\vec{x_0}$ und $\vec{a}$. Für $\vec{a''} = \vec{o}$ ist g'' ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x''_0}$.

(3) Die Projektion einer Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}$ auf die yz-Ebene ist für $\vec{a'''} \neq \vec{o}$ die Gerade g''' mit der Gleichung $\vec{x'''} = \vec{x'''_0} + t\vec{a'''}$, $\vec{x'''_0}$ und $\vec{a'''}$ sind die Projektionen von $\vec{x_0}$ und $\vec{a}$. Für $\vec{a'''} = \vec{o}$ ist g''' ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x'''_0}$.

■ Gegeben: Vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
Gesucht: Projektionen von $\vec{a}$ auf die Koordinatenebenen.

Ergebnis:

$\vec{a'} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{a''} = 2\vec{i} + 3\vec{k}, \quad \vec{a'''} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$



E.5. Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Skalarprodukt

► Definition:
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei beliebige Vektoren des Raumes, dann heißt die reelle Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

- gelesen $\vec{a}$ punkt $\vec{b}$ oder $\vec{a}$ mal $\vec{b}$ - das Skalarprodukt (Punktprojekt, skalares Produkt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Eigenschaften des Skalarproduktes zweier Vektoren

Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt, wenn $\vec{o}$ als Nullvektor angesehen wird und λ eine reelle Zahl ist:

1. Für $\vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$ ist $\vec{a} \cdot \vec{o} = 0$

2. Für $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ ist
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ genau dann, wenn $0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ genau dann, wenn $\frac{\pi}{2} < \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

Bemerkung: Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ folgt, dass $\vec{a}$ orthogonal $\vec{b}$ ist. Der Nullvektor $\vec{o}$ ist definitionsgemäß zu jedem Vektor orthogonal.

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativität)

4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ (Distributivität)

5. $\lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b})$

Für das Skalarprodukt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ kann auch $\overrightarrow{a}^2$ geschrieben werden, und es gilt $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$.
Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt speziell für die Basisvektoren $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$:

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0; \quad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0; \quad \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0; \quad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1; \quad \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1; \quad \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$$

Das Skalarprodukt in Koordinatendarstellung

Für das Skalarprodukt zweier durch ihre Koordinaten $(a_x; a_y; a_z)$ und $(b_x; b_y; b_z)$ gegebenen Vektoren $\overrightarrow{a}$ bzw. $\overrightarrow{b}$ gilt:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}) \cdot (b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k})$$

Daraus folgt auf Grund der Eigenschaften des Skalarproduktes

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Für den absoluten Betrag eines Vektors ergibt sich mit Hilfe des Skalarproduktes:

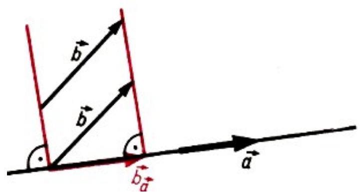
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

■ Gesucht ist das Skalarprodukt zweier Vektoren.
Gegeben sind: $|\overrightarrow{a}| = 3$; $|\overrightarrow{b}| = 2$; $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 60°$
Lösung: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos 60° = 3$

Gegeben sind: $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
Lösung: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 17$

Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor

Im nebenstehenden Bild nennt man den Vektor $\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}$ die Projektion des Vektors $\overrightarrow{b}$ auf den Vektor $\overrightarrow{a}$.



Für den Betrag der Projektion $\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}$ des Vektors $\overrightarrow{b}$ auf den Vektor $\overrightarrow{a}$ $(\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o})$ bei $0 \leq \angle(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{b}) \leq \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$|\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}| = |\overrightarrow{b}| \cos \angle(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{b})$$

Aus dieser Beziehung folgt der

► Satz:
Sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren mit $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$ und $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{o}$, so ist das Skalarprodukt

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}} = \overrightarrow{a}_{\overrightarrow{b}} \cdot \overrightarrow{b}$$

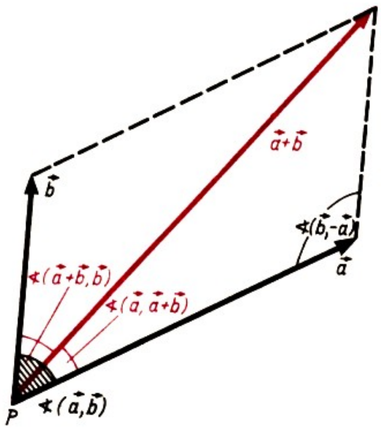
Betrag und Richtung der Summe zweier Vektoren

Ohne Koordinatensystem

■ Gegeben: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

Gesucht: $|\vec{a} + \vec{b}|$, $\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$

Lösung zeichnerisch (1 LE = 0,5 cm): Siehe Bild.



Lösung mit Hilfe der ebenen Trigonometrie:

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{b}, -\vec{a})}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot (-0{,}5)} = 14$

Bemerkung: $\angle(\vec{b}, -\vec{a}) = 180° - \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$

$$\sin\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{|\vec{b}|\sin\angle(\vec{b}, -\vec{a})}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{6\sin 120°}{14} \approx 0{,}371$$

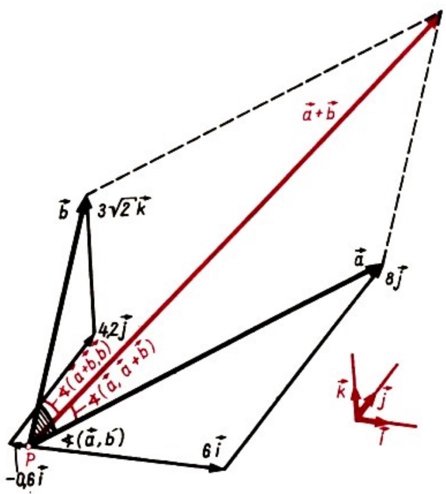
$\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) \approx 21{,}8°$

In Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung

■ Gegeben: $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{b} = -0{,}6\vec{i} + 4{,}2\vec{j} + 3\sqrt{2}\vec{k}$

Gesucht: $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a} + \vec{b}|$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}), \angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$



Lösung:

$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-0{,}6)^2 + 4{,}2^2 + 3^2 \cdot 2} = 6$

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a}|} = 0{,}5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

$\vec{a} + \vec{b} = 5{,}4\vec{i} + 12{,}2\vec{j} + 3\sqrt{2}\vec{k}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5{,}4^2 + 12{,}2^2 + 3^2 \cdot 2} = 14$

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|} \approx 0{,}929$

$\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) \approx 21{,}8°$

Schnittwinkel zweier Geraden

Durch Umformung von $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$ kann man eine Gleichung erhalten, die zur Ermittlung des Schnittwinkels zweier Geraden aus ihren Richtungsvektoren geeignet ist.

In Vektordarstellung:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

In Koordinatendarstellung:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

■ Gegeben:

Schnittpunkt $S(4; 1; 3)$ der Geraden $g_1(\vec{a_1} = 3\vec{j} + \vec{k})$ und $g_2(\vec{a_2} = -\vec{i} + \vec{k})$

Gesucht: Schnittwinkel von g_1 und g_2

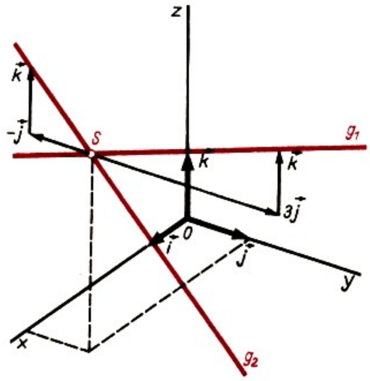
Lösung: Da die Richtungsvektoren der Geraden unmittelbar gegeben sind, folgt

$$\cos\angle(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}) = \frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|}$$

im Beispiel

$$\cos\angle(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}) = \frac{0+3\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{0+9+1}\sqrt{0+1+1}} \approx -0{,}447$$

Ergebnis: $\angle(g_1,g_2) \approx 116{,}6°$

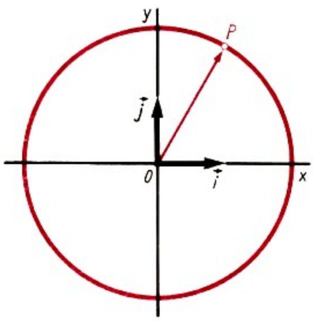


E.6. Analytische Geometrie des Kreises und der Kugel

Gleichungen des Kreises und der Kugel

Mittelpunktsgleichung des Kreises
Ein Punkt P der Ebene mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ hat vom Ursprung des Koordinatensystems $\{O;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}$ den Abstand

$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{x^2+y^2}$$



Somit gilt für alle Punkte $P(\overrightarrow{x})$ des Kreises mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und mit dem Radius r
$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}} = r$ bzw.

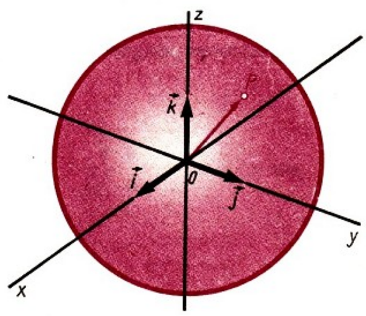
$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} = r^2$$

in Koordinatendarstellung

$$x^2+y^2=r^2$$

Mittelpunktsgleichung des Kreises
Ein Punkt P der Ebene mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ hat vom Ursprung des Koordinatensystems $\{O;\ \overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$ den Abstand

$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



Somit gilt für alle Punkte $P(\overrightarrow{x})$ des Kreises mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und mit dem Radius r
$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}} = r$ bzw.

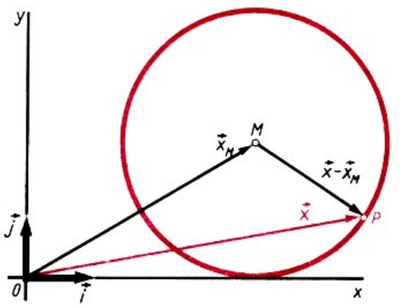
$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} = r^2$$

in Koordinatendarstellung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Allgemeine Kreisgleichung

Ist der Mittelpunkt M des Kreises durch seinen Ortsvektor
$\overrightarrow{x_M} = x_M \overrightarrow{i} + y_M \overrightarrow{j}$
gegeben, so gilt für alle Punkte $P(\overrightarrow{x})$ des Kreises mit dem Radius r
$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}| = r$ bzw.

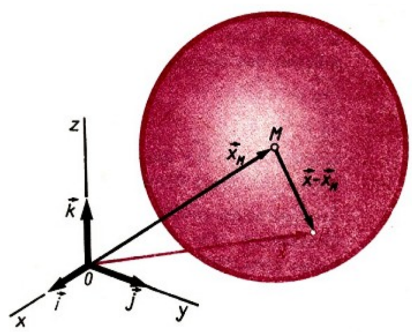


$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M} == r^2$
in Koordinatendarstellung
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Es lässt sich zeigen, dass diese Gleichung, die für alle Punkte des Kreises gilt, nur für diese Punkte gilt.
Ist für einen Punkt $P(x; y)$
$x^2 + y^2 > r^2$
so liegt er außerhalb des Kreises, ist für ihn $x^2 + y^2 < r^2$, so liegt er innerhalb des Kreises.

Allgemeine Kreisgleichung

Ist der Mittelpunkt M des Kreises durch seinen Ortsvektor
$\overrightarrow{x_M} = x_M \overrightarrow{i} + y_M \overrightarrow{j} + z_M \overrightarrow{k}$
gegeben, so gilt für alle Punkte $P(\overrightarrow{x})$ des Kreises mit dem Radius r
$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}| = r$ bzw.



$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M} == r^2$
in Koordinatendarstellung
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$

Es lässt sich zeigen, dass diese Gleichung, die für alle Punkte der Kugel gilt, nur für diese Punkte gilt.
Ist für einen Punkt $P(x; y; z)$
$x^2 + y^2 + z^2 > r^2$
so liegt er außerhalb der Kugel, ist für ihn $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$, so liegt er innerhalb des Kreises.
$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ gilt für alle Punkte des Kugelkörpers.

■ Gegeben: Kreis mit $M(2; -3)$; $r = 1$, Gesucht: Gleichung des Kreises
Ergebnis: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$

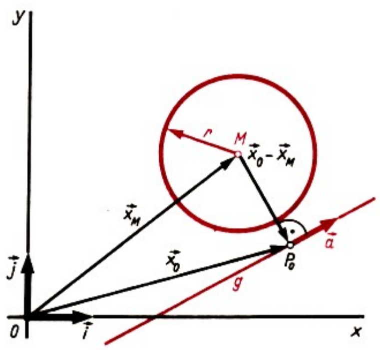
Gegenseitige Lage von Kreis und Gerade

In einer Ebene kann eine Gerade einen Kreis schneiden (Sekante), berühren (Tangente) oder meiden (Passante).

Die Koordinaten gemeinsamer Punkte $G(\overrightarrow{x_G})$ eines Kreises, gegeben durch
$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M})^2 = r^2$
und einer Geraden, gegeben durch $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{a}$
müssen das Gleichungssystem

$$(\overrightarrow{x_G} - \overrightarrow{x_M})^2 = r^2, \quad \overrightarrow{x_G} = \overrightarrow{x_0} + t\overrightarrow{a}$$

erfüllen.



Eine für die Lösung des Problems geeignete Parameterdarstellung der Geraden erhält man, wenn $\overrightarrow{x_0}$ als Ortsvektor des Fußpunktes P_0, des Lotes vom Mittelpunkt M des Kreises auf die Gerade g und $\overrightarrow{a}$ als Einheitsvektor (d. h. $|\overrightarrow{a}| = 1$) aufgefasst wird.

Durch Elimination von $\overrightarrow{x_G}$ ergibt sich

$$(\overrightarrow{x_0} + t\,\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x_M})^2 = r^2$$

Nach dem Distributivgesetz für die skalare Multiplikation folgt daraus (nach Umformung)

$$t^2\overrightarrow{a} + 2(t\,\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M})^2 + (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M})^2 = r^2$$

Auf Grund der besonderen Wahl von $\overrightarrow{a}$ und P_0 $(\overrightarrow{x_0})$ ist $\overrightarrow{a}^2 = 1$ und $t\,\overrightarrow{a}$ orthogonal zu $\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}$, d.h. $(t\,\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}) = 0$. Somit ist

$$t^2 + (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M})^2 = r^2 \qquad \text{und} \qquad t_{1,2} = \pm\sqrt{r^2 - (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M})^2}$$

Existenz und Anzahl der Schnittpunkte hängen von der Diskriminante $D = r^2 - (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M})^2$ ab.

1. Ist $D > 0$, so ist $|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}| < r$, d.h., P_0 liegt innerhalb des Kreises k. In diesem Falle hat die Gleichung für t zwei Lösungen, Kreis und Gerade haben genau zwei Punkte gemeinsam. Die Gerade ist Sekante des Kreises.

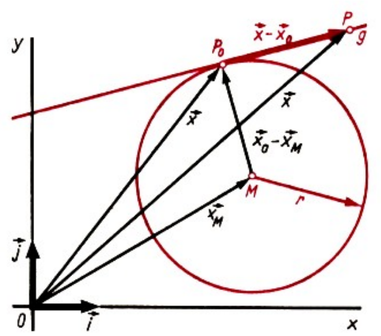
2. Ist $D = 0$, so ist $|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}| = 0r$ und $t = 0$, d.h., P_0 liegt auf dem Kreis k und ist der einzige gemeinsame Punkt des Kreises und der Geraden. Die Gerade ist Tangente des Kreises.

3. Ist $D < 0$, so ist $|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}| > r$, d.h., P_0 liegt außerhalb des Kreises. In diesem Falle existieren keine (reellen) Lösungen der Gleichung für t; Kreis und Gerade haben keinen Punkt gemeinsam. Die Gerade ist Passante des Kreises,

Tangente an einen Kreis in einem gegebenen Punkt

Ist der gegebene Kreispunkt P_0 $(\overrightarrow{x_0})$, so muss für alle Punkte $P(\overrightarrow{x})$ dieser Tangente gelten

$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}) = r^2$$



denn $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}$ und $\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}$ stehen aufeinander senkrecht. Mit Hilfe der Beziehung

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}) - (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}$$

ergibt sich daraus

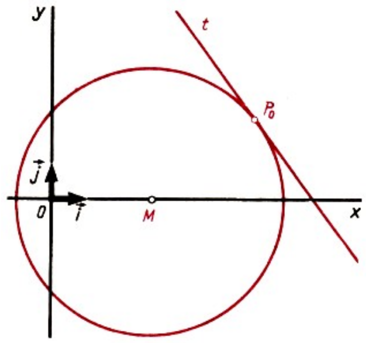
$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_M}) \cdot (\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_M}) = r^2$$

in der Koordinatendarstellung

$$(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2$$

■ Gegeben: Kreis mit $M(3;0)$, $r = 4$
Gesucht: Gleichung der Tangente t des Kreises im Punkt $P_0(6{,}2; y_0 > 0)$

Lösung:
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$
$(6{,}2 - 3)^2 + (y - 0)^2 = 16; y = \pm 2{,}4$
Da $y_0 > 0$ gelten soll, ergibt sich $y_0 = 2{,}4$. Wir setzen in die Tangentengleichung
$(x_0 - x_M)(x - x_M) + (y_0 - y_M)(y - y_M) = r^2$
ein und erhalten:
$(6{,}2 - 3)(x - 3) + (2{,}4 - 0)y - 0) = 16.$
Ergebnis: $3{,}2x + 2{,}4y = 25{,}6$ oder $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3}$



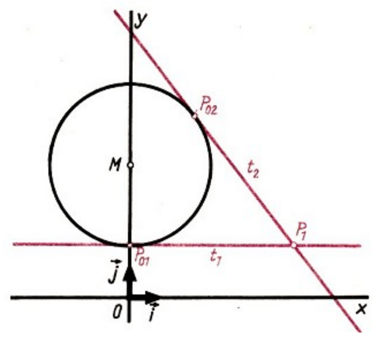
Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises

Ist der außerhalb des Kreises gelegene Punkt $P_1(x_1; y_1)$ gegeben, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
(1) P_1 muss ein Punkt der Tangente des Kreises in dem noch unbekannten Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ sein.
(2) P_0 muss ein Punkt des Kreises sein.

Diese Bedingungen sind für genau zwei Geraden durch P_1 erfüllt. Ist der Kreis durch die Gleichung $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ gegeben, so lassen sich aus den entsprechenden Gleichungen
a) $(x_1 - x_M)(x_0 - x_M) + (y_1 - y_M)(y_0 - y_M) = r^2$ und
b) $(x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 = r^2$
x_0 und y_0 errechnen. Damit können die Gleichungen der Tangenten aufgestellt werden.

■ Gegeben: Kreis mit $M(0; 4)$ und $r = 2{,}5$ sowie ein Punkt $P_1(5; 1{,}5)$ außerhalb des Kreises
Gesucht: Tangenten von P_1 an den Kreis

Lösung:
Die Koordinaten $(x_0; y_0)$ des Berührungspunktes der Tangente können mit Hilfe des Systems
a) $(x_1 - x_M)(x_0 - x_M) + (y_1 - y_M)(y_0 - y_M) = r^2$
und
b) $(x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 = r^2$
ermittelt werden. Also:



$(5 - 0)(x_0 - 0) + (1{,}5 - 4)(y_0 - 4) = 6{,}25, \qquad x_0^2 + (y_0 - 4)^2 = 6{,}25$
Es ergeben sich die Werte: $x_{01} = 0$; $y_{01} = 1{,}5$; $x_{02} = 2$; $y_{02} = 5{,}5$.
Unter Benutzung der Tangentengleichung erhält man: Tangente $t_1 : y = 1{,}5$; Tangente $T_2 : y = -\frac{4}{3}x + \frac{49}{6}$

E.7. Vektorprodukt zweier Vektoren

Das Vektorprodukt

► Definition:
Sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei beliebige Vektoren des Raumes, dann heißt der Vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ - gelesen $\overrightarrow{a}$ kreuz $\overrightarrow{b}$ - der die Bedingungen erfüllt

(1) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

(2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{a}$ als auch zu $\overrightarrow{b}$

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ bildet mit den Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ in der Reihenfolge $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ein Rechtssystem

das Vektorprodukt (Kreuzprodukt, vektorielles Produkt) der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.

Eigenschaften des Vektorproduktes zweier Vektoren

(1) Sind zwei Vektoren zueinander parallel, dann ist ihr Vektorprodukt der Nullvektor $\overrightarrow{o}$. Somit gilt auch $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$.

(2) Ist $\overrightarrow{n}_{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}$ ein Einheitsvektor, der zu $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ orthogonal ist und diese Vektoren im Falle, dass $\overrightarrow{a}$ zu $\overrightarrow{b}$ nicht parallel ist, in der Reihenfolge $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{n}_{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}$ zu einem Rechtssystem ergänzt, so kann das Vektorprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ auch durch

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n}_{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}} |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

definiert werden.

Für die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ gilt, wenn $\overrightarrow{o}$ als Nullvektor angesehen wird und λ eine reelle Zahl ist:

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$ (anstelle eines Kommutativgesetzes)

(4) $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}; \quad \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

(5) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (Distributivität)

Da $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ nicht stets gleich $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$ ist, gilt kein entsprechendes Assoziativgesetz.

Für die Basisvektoren $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ keines orthonormierten Rechtssystems ist

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{o} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{o} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{o} = \overrightarrow{o}$$

Das Vektorprodukt in Koordinatendarstellung

Wegen der Distributivität des Vektorproduktes gilt:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}) \times (\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3}) &= \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{b_3} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b_1} \\ &+ \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{b_3} + \overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{b_2} \\ &+ \overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{b_3}\end{aligned}$$

Für das Vektorprodukt zweier durch ihre Koordinaten $(a_x; a_y; a_z)$ und $(b_x; b_y; b_z)$ gegebenen Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ gilt:

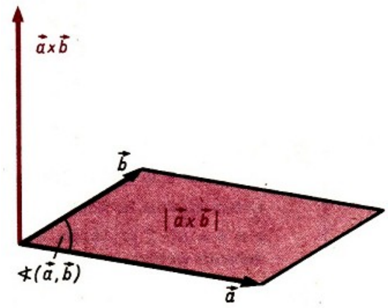
$$\begin{aligned}&a_x b_x(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + a_x b_y(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + a_x b_z(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) + \\ &a_y b_x(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + a_y b_y(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}) + a_y b_z(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}) + \\ &a_z b_x(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}) + a_z b_y(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}) + a_z b_z(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k})\end{aligned}$$

Daraus folgt auf Grund der Eigenschaften des Vektorproduktes als Komponentendarstellung des Vektorproduktes

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Geometrische Deutung des Vektorproduktes

Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt eines von diesen Vektoren aufgespannten Parallelogrammes.



Komponentendarstellung von Operationen mit Vektoren

Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$	Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$	$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{j}$
$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$	$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{j}$
$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$	$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$
$\lambda\vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j}$	$\lambda\vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + +\lambda a_z \vec{k}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
	$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} +$
	$+(a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$

Übersicht über skalare und vektorielle Multiplikation zweier Vektoren

(1) Definition des Produktes der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$

Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$ mit $|\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}| = 1$, $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} \perp \vec{a}$, $\vec{n}_{\vec{a},\vec{b}} \perp \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}_{\vec{a},\vec{b}}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

(2) Orthogonalität der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$

(3) Parallelität der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ für $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ für $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{o}$

Produkte der Basisvektoren

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{o}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{o}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{o}$

Übersicht über Multiplikationen von Zahlen und Vektoren

λ, μ, ν beliebige reelle Zahlen; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beliebige Vektoren

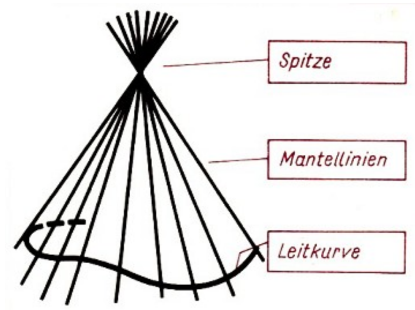
Art der Multiplikation	Resultat	Kommutativität	Assoziativität	Distributivität	Weitere Eigenschaften
Multiplikation zweier reelle Zahlen	reelle Zahl	$\lambda\mu = \mu\lambda$	$\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu$	$\lambda(\mu + nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$	
Multiplikation eines Vektor mit einer reellen Zahl $\lambda\vec{a}$	Vektor	$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$	$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$	$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
Skalare Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a} \cdot \vec{b}$	reelle Zahl	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	-	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}$
Vektorielle Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$	Vektor	keine Kommutativiät $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	-	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) =$ $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$

F. Kegelschnitte

F.1. Kegel und Kegelschnitte

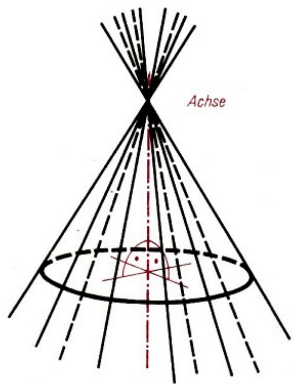
Kegeldefinition

▶ Definition:
Ein Kegel ist die Menge der Geraden, die einen Punkt S des Raumes mit den Punkten einer Kurve k verbinden. Ist k eine ebene Kurve, dann darf S nicht in der Ebene von k liegen.
S heißt die Spitze, k die Leitkurve, und die Geraden heißen die Mantellinien des Kegels.



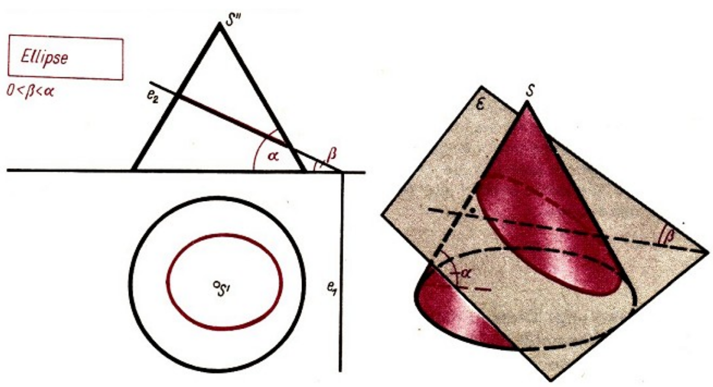
Bemerkung: Diese Definition unterscheidet sich von der Definition des Kegels in "Mathematik in Übersichten" vor allem dadurch, dass sie nur die (von den Mantellinien gebildete) Mantelfläche betrifft, diese aber als unbegrenzt (auch über die Spitze hinaus, im Sinne eines "Doppelkegels") auffasst.

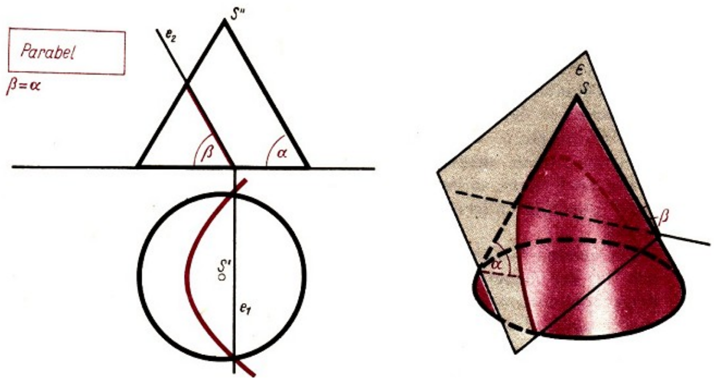
Ist die Leitkurve eines Kegels ein Kreis, so heißt der Kegel Kreiskegel; die Verbindungsgerade des Kreismittelpunktes mit der Spitze heißt Achse des Kreiskegels.
Steht die Achse senkrecht auf der Ebene des Kreises, so heißt der Kreiskegel gerade, anderenfalls heißt er schief.
Die folgenden Ausführungen beziehen sich in der Regel nur auf gerade Kreiskegel und auf ebene Schnitte solcher Kegel; der Einfachheit halber werden dafür die Kurzbezeichnungen "Kegel" bzw. "Kegelschnitt" verwendet.

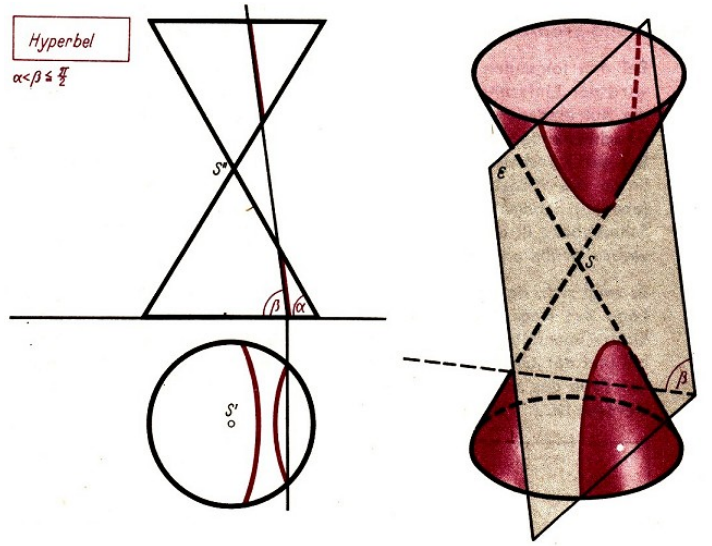


Kegelschnittdefinition

▶ Definition:
Wird ein gerader Kreiskegel K, dessen Mantellinien mit der Ebenes des Kegelgrundkreises den Winkel α bilden, von einer Ebene ε geschnitten, die mit jener Ebene den Winkel β einschließt und und nicht die Spitze S des Kegels K enthält, so heißt der entstehende Kegelschnitt
für $0 < \beta < \alpha$ eine Ellipse,
für $\beta = \alpha$ eine Parabel,
für $\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ eine Hyperbel.
Für $\beta = 0$ entsteht ein Kreis.

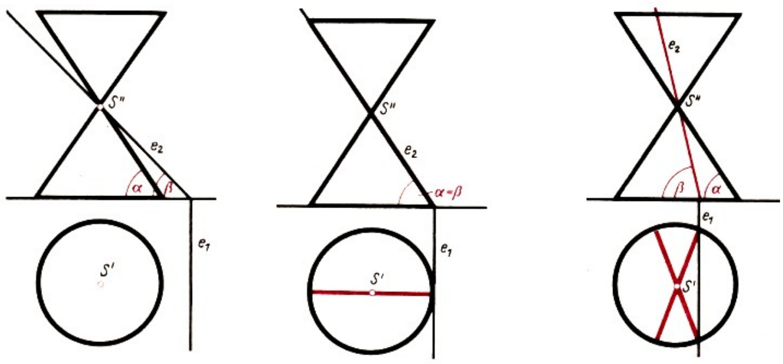






Geht die Schnittebene ε durch die Kegelspitze S, dann haben Kegel und Ebene im Falle

$0 \leq \beta < \alpha$	$\beta = \alpha$	$\alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$
genau einen Punkt gemeinsam	genau eine Gerade gemeinsam	genau ein Geradenpaar gemeinsam



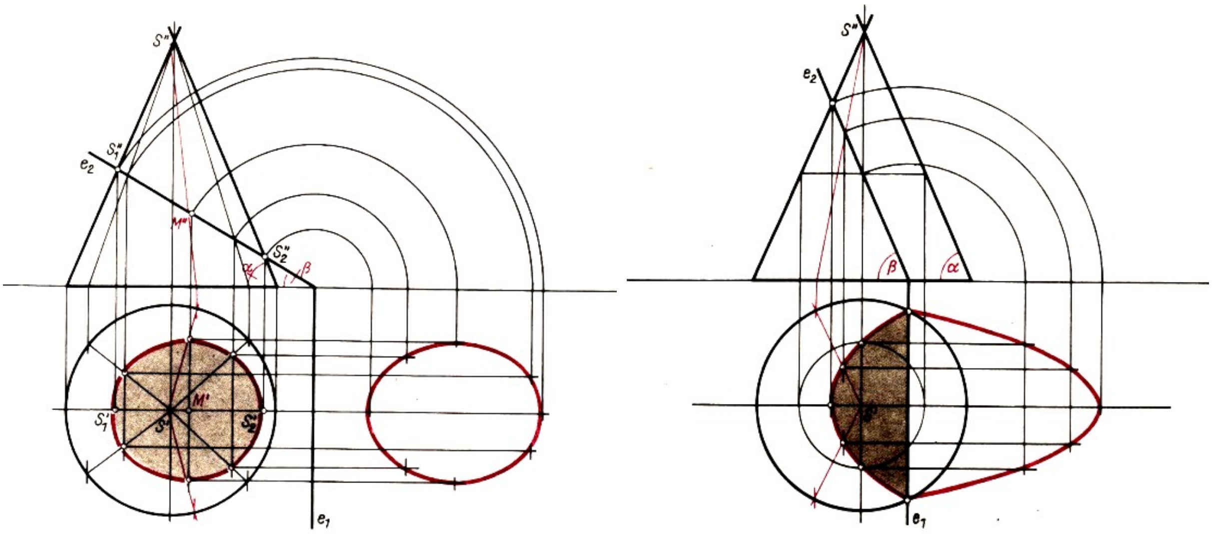
In diesen Fällen spricht man von entarteten Kegelschnitten.

Darstellend-geometrische Konstruktion von Kegelschnitten

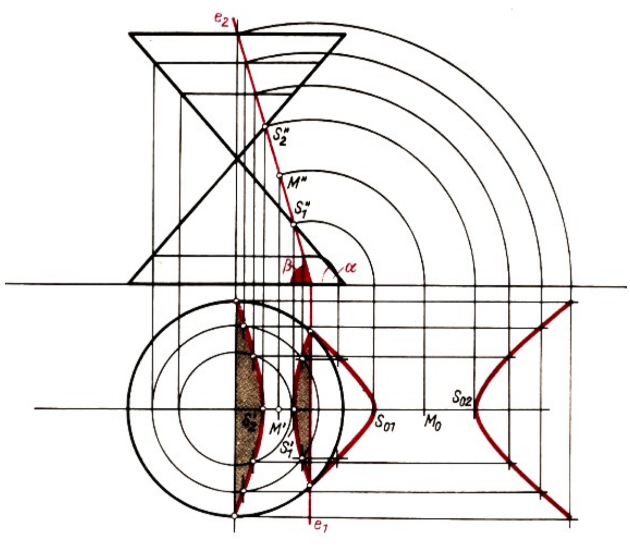
Bei den folgenden Konstruktionen von Kegelschnitten in Zweitafelprojektion wird der Einfachheit halber die Grundrissebene senkrecht zur Kegelachse und die Aufrissebene senkrecht zur Schnittebene angenommen (das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit).
Bei der Konstruktion der Kegelschnitte wird zunächst (mit Hilfe von Mantellinien des Kegels oder Höhenkreisen) aus dem Aufriss der Grundriss der (ebenen) Schnittfigur konstruiert (z.B.

punktweise). Durch Umklappung der Schnittebene in die Grundrissebene oder in eine andere Höhenebene wird die wahre Größe und Gestalt des Kegelschnittes bestimmt.

Es zeigt sich, dass unter den angegebenen Bedingungen für die gegenseitige Lage des Kegels, der Schnittebene und der Rissebenen der Grundriss einer Ellipse ebenfalls eine Ellipse, der Grundriss einer Parabel ebenfalls eine Parabel und der Grundriss einer Hyperbel im allgemeinen ebenfalls eine Hyperbel (im Falle des Senkrechtstehens der Schnittebene auf der Grundrissebene: eine Gerade) ist.

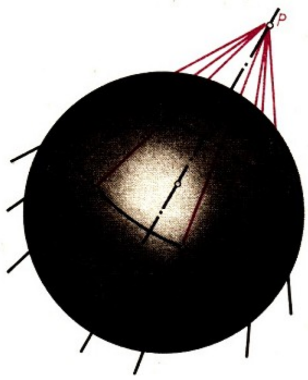


Ellipse und Parabel



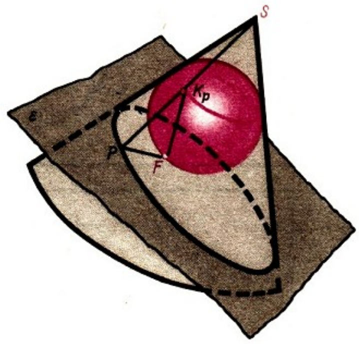
Hyperbel

Dandelinsche Kugeln



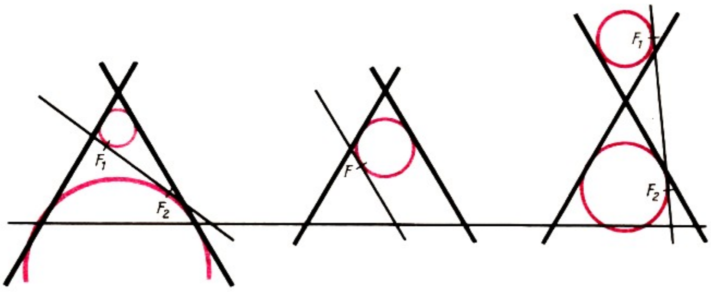
Vorbemerkung: Werden an eine Kugel von einem Punkt P außerhalb dieser Kugel die Tangenten gelegt, so sind die Abschnitte dieser Tangenten, die durch diesen Punkt P und durch den jeweiligen Berührungspunkt begrenzt werden, untereinander gleich lang.
Diese Tangenten bilden auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Kugel einen geraden Kreiskegel, dessen Achse die Verbindung des Punktes P mit dem Kugelmittelpunkt ist.

Kugeln, die dem Kegel einbeschrieben sind und die Schnittebene berühren, heißen Dandelinsche Kugeln.
Eine solche Kugel hat mit dem Kegel K genau einen Kreis k und mit der Schnittebene ε genau einen Punkt F gemeinsam.
Aus dem in der Vorbemerkung vorangeschickten Satz folgt dann, dass für jeden Punkt P des Kegelschnittes der Abstand PF gleich dem Abstand PK_p ist, wobei K_p der Schnittpunkt des Kreises k mit der den Punkt P enthaltenden Mantellinie des Kegels K ist.



Der gemeinsame Punkt F (Berührungspunkt) der einbeschriebenen Kugel mit der Schnittebene ε heißt Brennpunkt des Kegelschnittes.

Im Falle einer Ellipse und einer Hyperbel als Kegelschnitt gibt es zwei Kugeln, die den genannten Bedingungen: genügen und damit auch zwei Brennpunkte des Kegelschnittes; im Falle der Parabel gibt es nur eine solche Kugel und somit nur einen Brennpunkt.



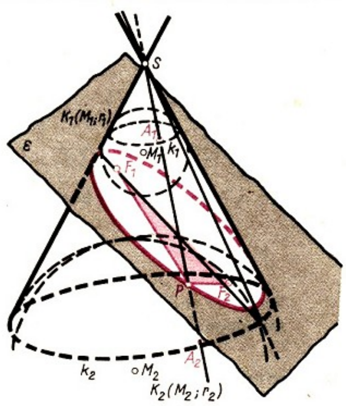
F.2. Ortsdefinitionen der Kegelschnitte

Ortsdefinition der Ellipse

► Satz:
Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Ellipse, dann ist für alle Punkte P dieser Ellipse die Summe der Abstände von P zu F_1 und F_2 konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2, also $F_1P + PF_2 =$ const. $> F_1F_2$.

Beweis:
Die Mantellinie des geschnittenen Kegels, die durch einen beliebigen Punkt P der Ellipse geht, schneidet die Berührungskreise k_1 und k_2 der Dandelinschen Kugeln K_1 $(M_1; r_1)$ bzw. K_2 $(M_2; r_2)$ in den Punkten A_1 bzw. A_2.
Da $F_P = A_1P$, $PF_2 = PA_2$ und $A_1P + PA_2 =$ const. für alle Punkte P ist, folgt

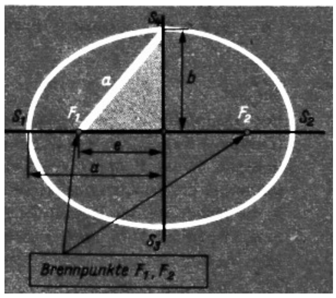
$$F_1P + PF_2 = \text{ const.}$$



Aus dem Dreieck F_1PF_2 ergibt sich $F_1P + PF_2 > F_1F_2$.

Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes:

▶ Satz:
Die Menge der Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2 ist, ist eine Ellipse, und F_1 und F_2 sind ihre Brennpunkte.
Auf diesen Satz gründet sich die Ortsdefinition der Ellipse:



▶ Definition:
Eine Ellipse ist die Menge der Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2, die dieser Ebene angehören, konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2 ist.
F_1 und F_2 heißen die Brennpunkte der Ellipse.
Lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$
Hauptscheitel: S_1, S_2, Nebenscheitel: S_3, S_4

Die Ellipse ist eine endliche, geschlossene Kurve mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieachsen. Damit ist sie auch zentralsymmetrisch.
Bezeichnet man die Hauptscheitel mit S_1, S_2 und die Länge der Hauptachse S_1S_2 mit $2a$, die Nebenscheitel mit S_3, S_4 und die Länge der Nebenachse S_3S_4 mit $2b$ sowie den Abstand F_1F_2 mit $2e$, so ist für jeden Punkt P der Ellipse

$$F_1P + PF_2 = 2a \qquad (2a > 2e)$$

Im besonderen ist

$$F_1S_1 = F_2S_2 = a - e, \qquad F_1S_2 = F_2S_1 = a + e, \qquad F_1S_3 = F_2S_3 = F_1S_4 = F_2S_4 = a$$

Für a, b und e gilt die Beziehung

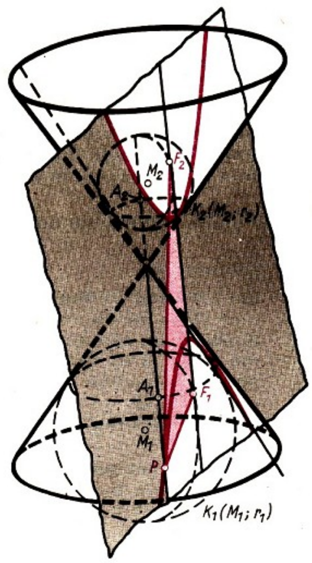
$$e^2 = a^2 - b^2$$

Fallen F_1 und F_2 zusammen, so ist $e = 0$ und $b = a$. Das ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt F_1 (bzw. F_2) und dem Radius a.

Ortsdefinition der Hyperbel

▶ Satz:
Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Hyperbel, dann ist für alle Punkte P dieser Hyperbel der Absolutbetrag der Differenz der Abstände von P zu F_1 und F_2 konstant, größer als 0 und kleiner als der Abstand von F_1 zu F_2:

$$0 < |F_1P - PF_2| = \text{ const. } < F_1F_2$$



Beweis:
Die Mantellinie des geschnittenen (Doppel-) Kegels, die durch einen beliebigen Punkt P der Hyperbel geht, schneidet die Berührungskreise k_1 und k_2 der Dandelinschen Kugeln K_1 $(M_1; r_1)$ bzw. K_2 $(M_2; r_2)$ in den Punkten A_1 bzw. A_2. Da

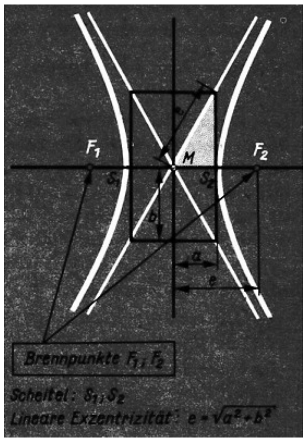
$$PF_1 = PA_1, \quad PF_2 = PA_2 \qquad \text{und} \qquad A_1A_2 = \text{ const.}$$

für alle Punkte P ist, folgt wegen

$$A_1A_2 = |PA_2 - PA_1| \qquad , \qquad |PF_1 - PF_2| = \text{ const.}$$

Aus dem Dreieck F_1PF_2 ergibt sich $|PF_1 - PF_2| < F_1F_2$.
Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes. Auf diese Umkehrung gründet sich die Ortsdefinition der Hyperbel:

▶ Definition:
Eine Hyperbel ist die Menge der Punkte einer Ebene, für die der Absolutbetrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2, die dieser Ebene angehören, konstant, ungleich Null und kleiner als der Abstand von F_1 zu F_2 ist.
F_1 und F_2 heißen die Brennpunkte der Hyperbel.



Die Hyperbel ist eine nichtgeschlossene Kurve, die aus zwei getrennten, beiderseits ins Unendliche gehenden Kurvenbögen (Ästen) besteht. Die Kurve hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen und ist damit auch zentralsymmetrisch.
Bezeichnet man die Scheitelpunkte mit S_1, S_2, die Länge der Hauptachse S_1S_2 mit $2a$ und den Abstand F_1F_2 mit $2e$, so ist für jeden Punkt P der Hyperbel

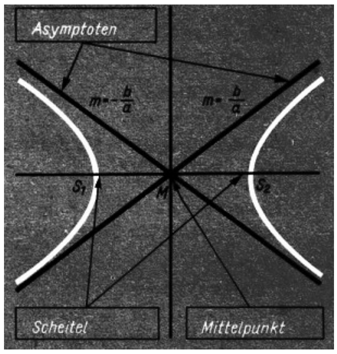
$$|PF_1 - PF_2| = 2a \qquad (0 < 2a < 2e)$$

Im besonderen ist

$$F_1S_1 = F_2S_2 = e - a, \qquad F_1S_2 = F_2S_1 = e + a$$

In Analogie zur Ellipse kann bei der Hyperbel eine Größe $b > 0$ eingeführt werden, für die die Beziehung gilt:

$$b^2 = e^2 - a^2$$



Asymptoten der Hyperbel heißen die beiden Geraden in der Ebene der Hyperbel, die durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen und gegenüber der die Brennpunkte enthaltenden Symmetrieachse der Hyperbel den Anstieg $\frac{b}{a}$ bzw. $-\frac{b}{a}$ haben.

Die Asymptoten grenzen jene Teile der Ebene, in denen die Hyperbeläste liegen, von den Teilen der Ebene ab, die keine Hyperbeläste enthalten. Mit zunehmendem Abstand von den Scheitelpunkten nähert sich die Kurve immer mehr den Asymptoten, hat aber mit ihnen keine Punkte gemeinsam.
Ist bei einer Hyperbel $b = a$, stehen die Asymptoten also senkrecht aufeinander, so heißt die Hyperbel gleichseitig.

Ortsdefinition der Parabel

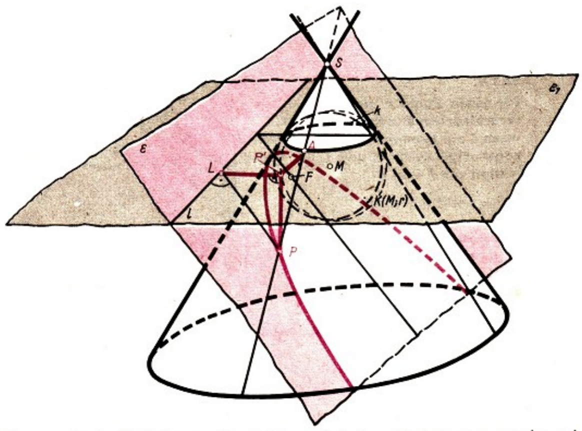
▶ Satz:
Ist F der Brennpunkt einer Parabel und l ihre Leitlinie[17], dann ist für alle Punkte P dieser Parabel der Abstand von P und L (d. h. der Abstand zwischen P und dem Fußpunkt L des

[17] Der Scheitelpunkt halbiert das Lot vom Brennpunkt auf die Leitlinie.

Lotes von P auf l) gleich dem Abstand von P zu F:

$$FP = PL$$

Beweis:

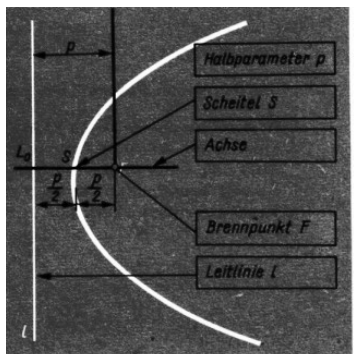


Die Ebene, die den Berührungskreis k der Dandelinschen Kugel $K\ (M;\ r)$ enthält, schneidet die Ebene der Parabel in der Geraden l. Wird von einem beliebigen Punkt P der Parabel das Lot auf die Gerade l gefällt und der Lotfußpunkt mit L bezeichnet, ebenso das Lot auf die durch den Berührungskreis k bestimmte Ebene gefällt und dieser Lotfußpunkt mit P' bezeichnet, außerdem die Mantellinie des Kegels, die durch P geht, mit dem Berührungskreis k geschnitten und dieser Schnittpunkt mit A bezeichnet, so ergeben sich die Dreiecke PLP' und PAP'.

Da die Ebene eines parabolischen Kegelschnitts mit der Grundkreisebene des Kegels den gleichen Winkel einschließt wie die Mantellinien des Kegels mit der Grundkreisebene ist $\angle PLP' = \beta = \angle PAP' = \alpha$.
Da außerdem diese Dreiecke rechtwinklig sind und ihnen die Seite PP' gemeinsam ist, folgt $PL = PA$, und wegen $PA = PF$ auch $PL = PF$.

Ebenso gilt die Umkehrung dieses Satzes. Auf diese Umkehrung gründet sich die Ortsdefinition der Parabel:

► Definition:
Eine Parabel ist die Menge der Punkte einer Ebene, für die der Abstand von einem festen Punkt F, der dieser Ebene angehört, und einer festen Geraden l, die in der Ebene liegt, gleich sind.
F heißt der Brennpunkt, l die Leitlinie der Parabel.



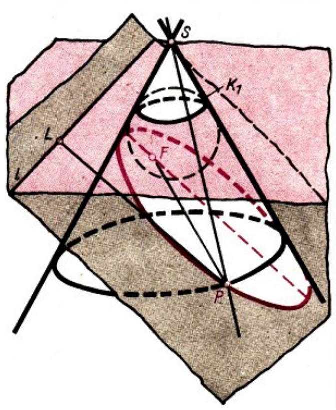
Die Parabel ist eine nichtgeschlossene Kurve mit einem beiderseits ins Unendliche verlaufenden Kurvenbogen. Die Parabel hat nur eine Symmetrieachse, sie geht durch den Brennpunkt.
Der Abstand von F zu l ist eine für die Parabel charakteristische Größe, sie wird Halbparameter p genannt. Wird der Scheitelpunkt mit S bezeichnet, so ist im besonderen

$$PS = SL_0 = \frac{p}{2}$$

Gemeinsame Ortsdefinition der Kegelschnitte

► Satz:
Für jeden Punkt P eines vom Kreis verschiedenen Kegelschnittes gilt, wenn F ein Brennpunkt, l die diesem zugehörige Leitlinie und L die Projektion von P auf l ist,

$$\frac{PF}{PL} = \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \text{ const.}$$



Dabei ist für
- die Ellipse $0 < \varepsilon < 1$,
- die Parabel $\varepsilon = 1$,
- die Hyperbel $\varepsilon > 1$.

Die reelle Zahl ε heißt numerische Exzentrizität des Kegelschnittes. Für Ellipse und Hyperbel ist $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

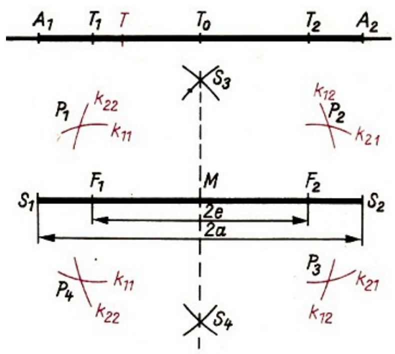
Ebenso gilt die Umkehrung dieses Salzes. Auf sie gründet sich die gemeinsame Ortsdefinition der (vom Kreis verschiedenen) Kegelschnitte:

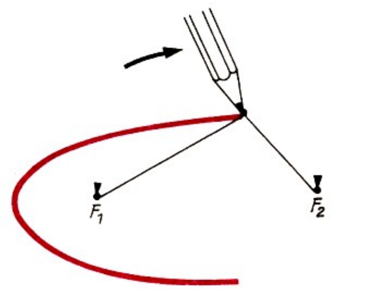
F.3. Punktkonstruktionen der Kegelschnitte

Ellipse

Auf die Ortsdefinition der Ellipse gründet sich folgendes Verfahren:
Gegeben: F_1, F_2 ($F_1F_2 = 2e$), $2a$ ($2a > 2e$)
Konstruktionsbeschreibung:
Die Punkte F_1 und F_2 werden durch eine Gerade verbunden. Die Halbierung der Strecke F_1F_2 ergibt den Mittelpunkt M der Ellipse. Auf einer Hilfsgeraden wird eine Strecke A_1A_2 von der Länge $2a$ aufgetragen und gleichfalls halbiert; der Halbierungspunkt erhält die Bezeichnung T_0.

Von T_0 aus wird auf der Hilfsgeraden nach beiden Seiten die Strecke $MF_1 = MF_2 = e$ aufgetragen; die sich ergebenden Punkte werden mit T_1 bzw. T_2 bezeichnet.
Nun wird auf der Hilfsgeraden ein Punkt T zwischen T_1 und T_2 gewählt. Damit ist $TA_1 + TA_2 = 2a$. Es werden die Kreise k_{11} ($F_1; TA_1$) und k_{22} ($F_2; TA_2$) gezeichnet und zum Schnitt gebracht (beim praktischen Zeichnen genügen entsprechende Bogenstücke), ebenso die Kreise k_{12} ($F_1; TA_2$) und k_{21} (F_2; TA_1).





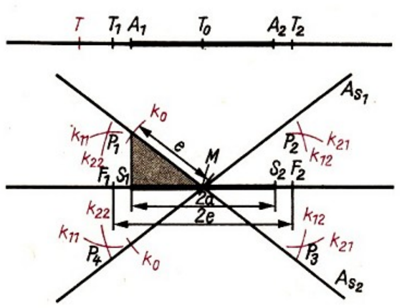
Es ergeben sich vier Ellipsenpunkte $P_1, ..., P_4$. Die Konstruktion wird mit weiteren Punkten T innerhalb T_1T_2 analog fortgesetzt.

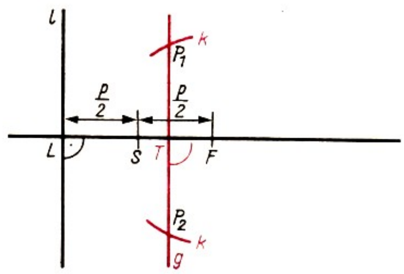
Für $T = T_0$ fallen P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4 zusammen; es ergeben sich die Nebenscheitel S_3 und S_4 der Ellipse.
Für $T = T_1$ und T_2 berühren k_{11} und k_{22} sowie k_{12} und k_{21} einander in jeweils einem Punkt der Geraden F_1F2, d.h., P_1 und P_4 sowie P_2 und P_3 fallen zusammen. Es ergeben sich die Hauptscheitel S_1 und S_2 der Ellipse.

Auf dem gleichen Prinzip beruht ein mechanisches Zeichenverfahren für Ellipsen, die sogenannte Faden- oder Gärtnerkonstruktion.

Hyperbel

Auf die Ortsdefinition der Hyperbel gründet sich folgendes Verfahren:
Gegeben: F_1, F_2 ($F_1F_2 = 2e$), $2a$ ($2a < 2e$)
Konstruktionsbeschreibung:
Die Konstruktion erfolgt analog der Ellipsenkonstruktion, nur wird der Punkt T außerhalb der Strecke T_1T_2 gewählt, so dass sich $|TA_1 - TA_2| = 2a$ ergibt.
Für $T = T_1$ bzw. $T = T_2$ berühren k_{11} und k_{22} sowie k_{12} und k_{21} einander in jeweils einem Punkt der Geraden F_1F_2, d.h., P_1 und P_4 sowie P_2 und P_3 fallen zusammen. Es ergeben sich die Scheitel S_1 und S_2 der Hyperbel.
Wird in S_1 oder S_2 die Senkrechte auf F_1F_2 errichtet und mit dem Kreis k_p $(M; e)$ geschnitten und werden die sich ergebenden Schnittpunkte mit M durch Geraden verbunden, so sind diese Geraden die Asymptoten der Hyperbel.





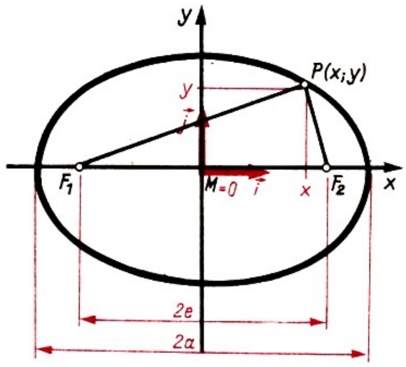
Parabel

Auf die Ortsdefinition der Parabel gründet sich folgendes Verfahren:
Gegeben: F,S ($FS = \frac{p}{2}$)
Konstruktionsbeschreibung:
Die Punkte F und S werden durch eine Gerade verbunden. Von S aus wird auf dieser Geraden entgegengesetzt zu F die Strecke FS aufgetragen. In dem sich ergebenden Punkt L wird die Senkrechte l zur Geraden FS errichtet. Auf dem Strahl (der Halbgeraden) SF wird in einem beliebigen Punkt T die Senkrechte g errichtet; es wird der Kreis k $(F; TL)$ gezeichnet und mit der Geraden g zum Schnitt gebracht.

Es ergeben sich zwei Parabelpunkte P_1 und P_2. Die Konstruktion wird mit weiteren Punkten T auf dem Strahl (der Halbgeraden) SF analog fortgesetzt. Für $T = S$, d.h. für den Scheitel der Parabel, berührt der Kreis k die Gerade g in diesem Punkt. Für $T = F$ beträgt der Abstand $P_1F = P_2F = p$ (Halbparameter der Parabel).

F.4. Gleichungen der Kegelschnitte

Mittelpunktsgleichung der Ellipse in achsenparalleler Lage



Für jede Ellipse, die durch ihre Brennpunkte F_1 und F_2 mit $F_1F_2 = 2e$ sowie durch die Länge $2a$ ihrer Hauptachse gegeben ist und die in einem kartesischen Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ die im nebenstehenden Bild dargestellte Lage einnimmt, gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Andere Lagen in Bezug auf das Koordinatensystem werden später behandelt.

Herleitung:
Aus $F_1P + PF_2 = 2a$ folgt, sofern P nicht mit einem Hauptscheitel zusammenfällt, wegen der Rechtwinkligkeit der Dreiecke $F_1P'P$ und $P'F_2P$ (P' bezeichnet die Projektion von P auf die Abszissenachse) nach dem Satz des Pythagoras:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a$$

Diese Beziehung gilt auch für die Hauptscheitel $S_1(-a; 0)$ und $S_2(a; 0)$. Umformen, Quadrieren und Ordnen ergibt

$$(a^2 - e^2)x^" + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Da $a^2 - e^2 = b^2$ ist, folgt $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und weiter

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es lässt sich nachweisen, dass diese Gleichung, die für alle Punkte $P(x; y)$ der Ellipse gilt, auch nur für diese Punkte gilt.

■ Gegeben: Zwei Punkte $P_1(4; 1{,}5)$ und $P_2(-3; -2)$ einer Ellipse in achsenparalleler Mittelpunktslage
Gesucht: Gleichung der Ellipse

Lösung:
Um die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aufstellen zu können, müssen a^2 und b^2 ermittelt werden. Hierzu werden zwei voneinander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen benötigt. Dafür ist hinreichend, wenn zwei verschiedene Punkte der Kurve gegeben sind, die nicht symmetrisch bezüglich der Achsen oder des Mittelpunktes der Kurve liegen.
Für $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ ergibt sich der Lösungsansatz

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

Im gegebenen Beispiel also

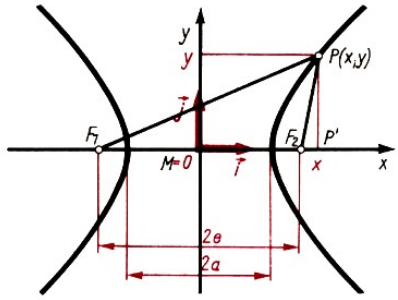
$$\frac{16}{a^2} + \frac{2{,}25}{b^2} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

Ergebnis: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{6{,}25} = 1$

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel in achsenparalleler Lage

Für jede Hyperbel, die durch ihre Brennpunkte F_1 und F_2 mit $F_1F_2 = 2e$ sowie durch die Länge $2a$ ihrer Hauptachse gegeben ist und die in einem kartesischen Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ die im Bild einnimmt, gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Herleitung:
Aus $|F_1P - PF_2| = 2a$ folgt, sofern P nicht mit einem Scheitel zusammenfällt, wegen der Rechtwinkligkeit der Dreiecke $F_1P'P$ und $P'F_2P$ (P' bezeichnet die Projektion von P auf die Abszissenachse)

$$|\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}| = 2a$$

Diese Beziehung gilt auch für die Scheitel $S_1(-a;0)$ und $S_2(a;0)$. Umformen, Quadrieren, Ordnen und Anwenden der Beziehung $b^2 = e^2 - a^2$ ergibt $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und weiter

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es lässt sich nachweisen, dass diese Gleichung, die für alle Punkte $P(x;y)$ der Hyperbel gilt, auch nur für diese Punkte gilt.

■ Gegeben: Ein Punkt $P(5;2)$ und die Länge der Hauptachse $2a = 6$ einer Hyperbel, die sich in achsenparalleler Mittelpunktslage befindet
Gesucht: Gleichung der Hyperbel

Lösung: Um die gesuchte Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aufstellen zu können, muss b^2 berechnet werden. Für die Koordinaten des gegebenen Hyperbelpunkts P muss die Hyperbelgleichung erfüllt sein, d.h., im Beispiel ist

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1 \qquad , \qquad b = 2{,}25$$

Ergebnis $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2{,}25} = 1$

Scheitelgleichung der Parabel in achsenparalleler Lage

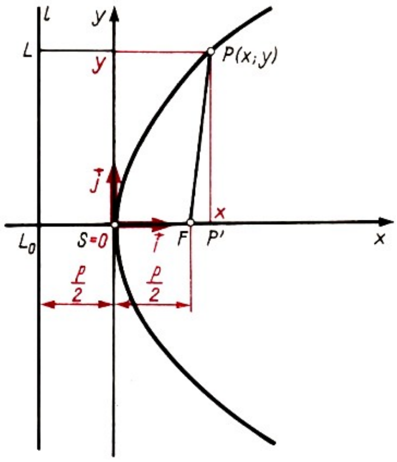
Für jede Parabel, die durch ihren Brennpunkt F und ihren Scheitel S mit $SF = \frac{p}{2}$ gegeben ist und die in einem kartesischen Koordinatensystem $\{O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ die im Bild dargestellte Lage einnimmt, gilt:

$$y^2 = 2px$$

Unter dieser Bedingung hat die Leitlinie l der Parabel die gleiche Richtung wie $\overrightarrow{j}$, es ist $O = S$ und $L_0O = OF = \frac{p}{2}$

Herleitung:
Aus $LP = PF$ folgt, sofern P nicht mit S zusammenfällt oder auf der durch F gehenden Senkrechten zur Parabelachse liegt, wegen der Rechtwinkligkeit des Dreiecks $P'FP$ (P' bezeichnet die Projektion von P auf die Parabelachse)

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$



Diese Beziehung gilt auch für die bei der Herleitung ausgenommenen Punkte. Quadrieren, Umformen und Ordnen ergibt

$$y^2 = 2px$$

Es lässt sich nachweisen, dass diese Gleichung, die für alle Punkte $P(x; y)$ der Parabel gilt, auch nur für diese Punkte gilt.

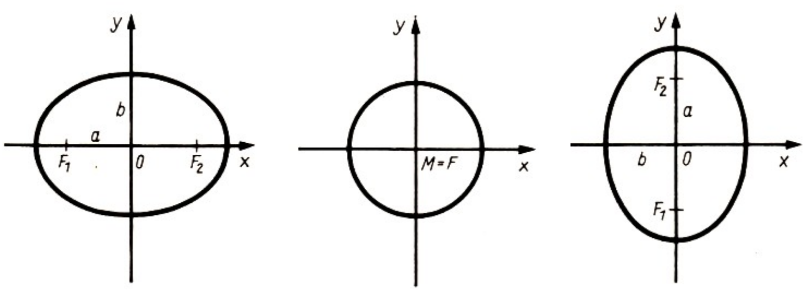
■ Gegeben: Ein Punkt $P(3; 6)$ einer Parabel in achsenparalleler Scheitellage
Gesucht: Gleichung der Parabel

Lösung:
In der gegebenen Lage genügt ein außerhalb der Achse liegender Punkt zur eindeutigen Bestimmung der Parabel. Da die Koordinaten dieses Punktes die Parabelgleichung erfüllen, lässt sich aus ihnen der Wert von p errechnen.
Im Beispiel ergibt sich $36 = 2p \cdot 3$ und daraus $p = 6$.
Ergebnis: $y^2 = 12x$

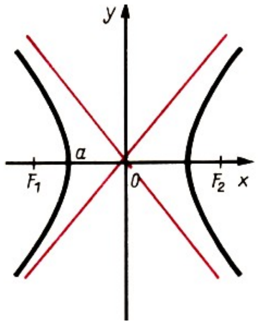
Kegelschnitte in anderen speziellen Lagen in Bezug auf das Koordinatensystem

Die angegebenen Kegelschnittsgleichungen, die jeweils für eine achsenparallele Lage der Kegelschnitte zum Koordinatensystem galten, ändern sich, wenn sich die Lage der Kegelschnittsachsen zu den Koordinatenachsen ändert (z.B. durch Drehung um $90°$ oder ein Vielfaches dieses Wertes um den Ursprung).

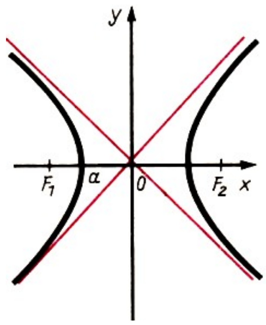
$M(0;0); a > b$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ellipse	$M(0;0); a = b = r$ $x^2 + y^2 = r^2$ Kreis	$M(0;0); a > b$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Ellipse



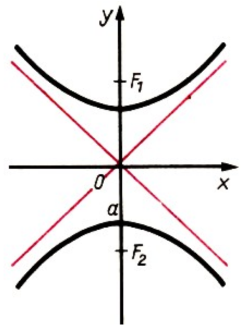
$M(0;0)$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hyperbel (allgemein)



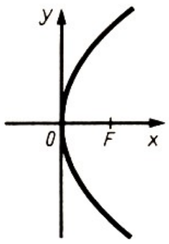
$M(0;0); a = b = r$
$x^2 - y^2 = a^2$
Hyperbel (gleichseitig)



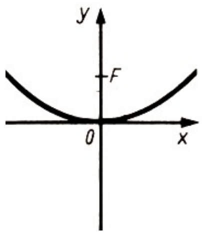
$M(0;0)$
$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Hyperbel (allgemein)



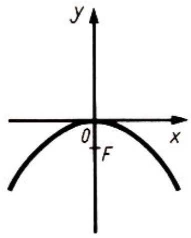
$S(0;0)$
$y = 2px$



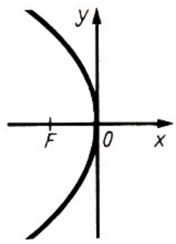
$S(0;0)$
$x^2 = 2py$



$S(0;0)$
$x^2 = -2py$



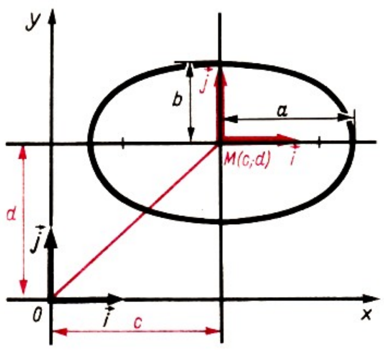
$S(0;0)$
$y^2 = -2px$



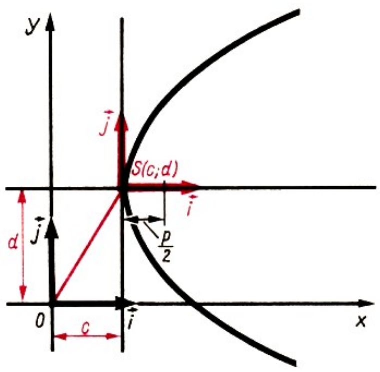
Nehmen die Kegelschnitte zwar eine achsenparallele Lage ein, ohne dass jedoch die Kegelschnittsachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, so kann ein zweites Koordinatensystem $\{M, \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{S; \vec{i}, \vec{j}\}$ betrachtet werden, das aus $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ durch Verschiebung hervorgeht.
Wenn der Mittelpunkt M im Falle einer Ellipse oder Hyperbel (bzw. der Scheitel S im Falle einer Parabel) im ersten Koordinatensystem die Koordinaten $(c;d)$ hat, so gilt zwischen den Koordinaten $x';y'$ in $\{M; \vec{i}; \vec{j}\}$ (bzw. $\{S; \vec{i}, \vec{j}\}$ und x; y in $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$

$$x' = x - c \quad , \quad y' = y - d$$

Ellipse in achsenparalleler Lage mit $M(c;d)$
$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$

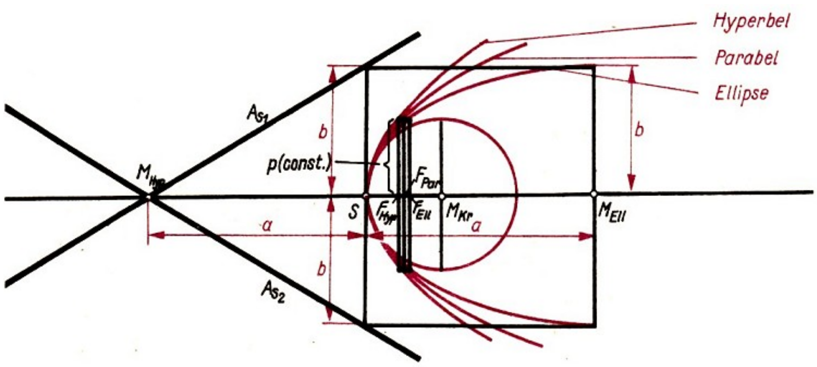


Parabel in paralleler Lage zur x-Achse mit $S(c;d)$
$(y-d)^2 = 2p(x-c)$



Gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte

Mit Hilfe der Parallelverschiebung des Koordinatensystems lassen sich analog zur Parabel Scheitelgleichungen auch für Ellipse und Hyperbel für $S_1(0;0)$ bzw. $S_2(0;0)$ aufstellen.



Ellipse: $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(x-b)^2}{b^2} = 1$, nach Umformung $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$
Hyperbel: $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{(x-b)^2}{b^2} = 1$, nach Umformung $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$

Wird - in Analogie zur Parabel - bei Ellipse und Hyperbel $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt und berücksichtigt man den Zusammenhang von a, b und e sowie den Zusammenhang zwischen der linearen Exzentrizität e und der numerischen Exzentrizität ε bei Ellipse und Hyperbel ($e = \varepsilon a$), so folgt als gemeinsame Scheitelgleichung für die (nicht entarteten) Kegelschnitte

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

Dabei ist
- für den Kreis $\varepsilon = 0$
- für die Ellipse $0 < \varepsilon < 1$
- für die Parabel $\varepsilon = 1$
- für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.

F.5. Gegenseitige Lage von Kegelschnitt und Gerade

Ellipse und Gerade

Für einen gemeinsamen Punkt $P_G(x_G; y_G)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Geraden $y = mx + n$ gilt das Gleichungssystem

$$\frac{x_G^2}{a^2} + \frac{y_G^2}{b^2} = 1 \qquad , \qquad y = mx_G + n$$

und es folgt

$$x_G = \frac{-a^2mn \pm \sqrt{a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - n^2}}{b^2 + a^2m^2}$$

Von der Diskriminante $D = a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - n^2)$ hängt die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung und damit die Anzahl der gemeinsamen Punkte von Ellipse und Gerade ab.

$D > 0$: Zwei Lösungen, genau zwei Punkte gemeinsam, die Gerade ist Sekante der Ellipse.
$D = 0$: Eine Lösung, genau ein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Tangente der Ellipse in diesem Punkt.
$D < 0$: Keine (reelle) Lösung, kein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Passante der Ellipse.

Ist die Gleichung der Geraden $x = k$, d. h., ist die Gerade senkrecht zur Hauptachse der Ellipse, dann ist die Gerade für $-a < k < a$ Sekante, für $|k| = a$ Tangente und für $|k| > a$ Passante der Ellipse.

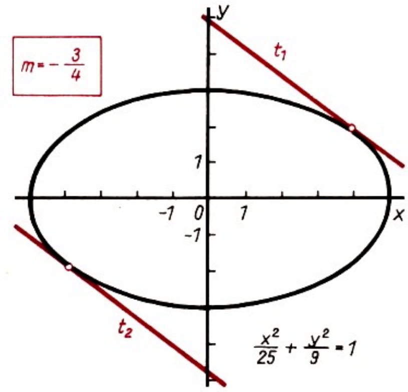
Tangenten der Ellipse

Die Gleichung der Tangente einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ lautet:

$$\blacktriangleright \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

■ Gegeben: Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
Gesucht: Gleichungen $y = mx+n$ der Tangenten t_1 und t_2 der Ellipse mit dem Anstieg $m = -\frac{3}{4}$

Lösung:
Zwischen den Größen a, b, m, n besteht im Falle der Tangente der Zusammenhang
$b^2 + a^2m^2 - n^2 = 0$
Daraus lässt sich der unbekannte Wert für n errechnen.
$n^2 = b^2 + a^2m^2$
$n_{1,2} = \pm\sqrt{+ + 25 \cdot \frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{41} \approx \pm 4{,}8$



Ergebnis: Die Gleichungen lauten
Tangente $t_1 : y = -\frac{3}{4}x + 4{,}8$
Tangente $t_2 : y = -\frac{3}{4}x - 4{,}8$

■ Gegeben: Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{6{,}25} = 1$ sowie ein Punkt $P_1(10; 2{,}5)$
Gesucht: Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 von P_1 an die Ellipse

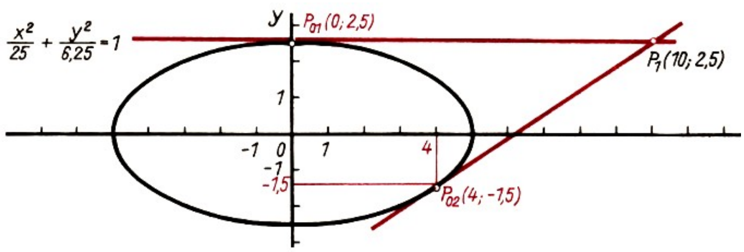
Lösung:
Soll eine Gerade g, die durch einen gegebenen, außerhalb der Ellipse liegenden Punkt $P_1(x_1; y_1)$ geht, Tangente der Ellipse sein, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

a) P_1 muss ein Punkt der Tangente der Ellipse in dem noch unbekannten Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ sein.
b) P_0 muss ein Punkt der Ellipse sein.

Aus den entsprechenden Gleichungen

$$a) \quad \frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} = 1 \qquad \text{und} \qquad b) \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

lassen sich die Koordinaten des Berührungspunktes x_0 und y_0 errechnen. Damit kann die Gleichung der Tangente aufgestellt werden.



Im vorliegenden Fall erhalten wir

$$a) \quad \frac{10x_0}{25} + \frac{2{,}5y_0}{6{,}25} = 1 \qquad \text{und} \qquad b) \quad \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{6{,}25} = 1$$

Ergebnis: Die Gleichungen lauten
Tangente t_1 : $\frac{2{,}5y}{6{,}25} = 1$ oder $y = 2{,}5$,
Tangente t_2 : $\frac{4x}{25} - \frac{1{,}5y}{6{,}25} = 1$ oder $y = \frac{2}{3}x - \frac{25}{6}$

Hyperbel und Gerade

Für einen gemeinsamen Punkt $P_G(x_G; y_G)$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Geraden $y = mx + n$ gilt das Gleichungssystem

$$\frac{x_G^2}{a^2} - \frac{y_G^2}{b^2} = 1 \qquad , \qquad y = mx_G + n$$

und es folgt

$$x_G = \frac{a^2mn \pm \sqrt{a^2b^2(b^2 - a^2m^2 + n^2}}{b^2 - a^2m^2}$$

Für $b^2 - a^2m^2 \neq 0$ hängt die Anzahl der Lösungen der Gleichung und damit die Anzahl der gemeinsamen Punkte von der Diskriminante $D = a^2b(b^2 - a^2m^2 + n^2)$ ab.

$D > 0$: Zwei Lösungen, genau zwei Punkte gemeinsam, die Gerade ist Sekante der Hyperbel.
$D = 0$: Eine Lösung, genau ein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Tangente der Hyperbel in diesem Punkt.
$D < 0$: Keine (reelle) Lösung, kein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Passante der Hyperbel.

Für $b^2 - a^2m^2 = 0$ ist die oben angegebene Beziehung für x_G nicht anwendbar.
Es handelt sich dabei, da $b^2 - a^2m^2 = 0$ zu $m = \pm\frac{b}{a}$ führt, um asymptotenparallele Geraden.
Falls dabei $n \neq 0$ ist, gilt

$$x_G = \mp\frac{a(b^2 + n^2)}{2bn} \qquad m > 0 \text{ bzw. } m < 0$$

und es ergibt sich für x_G genau ein Wert, d.h., die Gerade schneidet einen Hyperbelast und passiert den anderen Ast.
Falls dabei $n = 0$ ist, ergibt sich für x_G kein (endlicher) Wert; es bestehen keine gemeinsamen Punkte von Hyperbel und Gerade. Die Geradengleichungen lauten dann

$$y = \frac{b}{a}x \qquad , \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Diese Gleichungen bezeichnen die Asymptoten der Hyperbel , die keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam haben. Für $|m| \leq \frac{b}{a}$ existieren keine Tangenten an die Kurve.

Ist die Gleichung der Geraden $x = k$, d. h., ist die Gerade senkrecht zur Hauptachse der Hyperbel, dann ist die Gerade für $|k| > a$ Sekante, für $|k| = a$ Tangente und für $|k| < a$ Passante der Hyperbel.

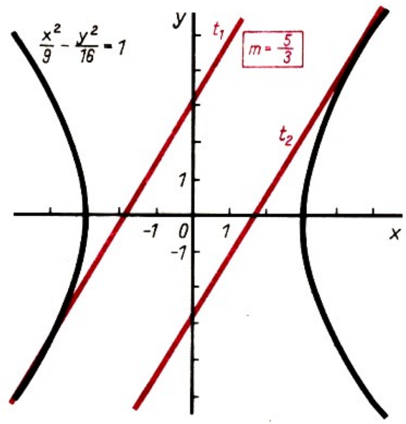
Tangenten der Hyperbel

Die Gleichung der Tangenten einer Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ lautet:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

■ Gegeben: Hyperbel durch die Gleichung $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
Gesucht: Gleichungen $y = mx + n$ der Tangenten t_1 und t_2 der Hyperbel mit dem Anstieg $m = \frac{5}{3}$.

Lösung:
Da $m = \frac{5}{3} > \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, existiert eine Tangente. Zwischen den Größen a, b, m, n besteht im Falle der Tangente wegen $b^2 \neq a^2m^2$ der Zusammenhang $b^2 - a^2m^2 + n^2 = 0$. Daraus folgt
$n^2 = -b^2 + a^2m^2$
$n = \pm\sqrt{-16 + 9 \cdot \frac{25}{9}} = \pm 3$
Ergebnis:
Die Gleichungen lauten
Tangente $t_1 : y = \frac{5}{3}x + 3$,
Tangente $t_2 : y = \frac{5}{3}x - 3$,



■ Gegeben: Hyperbel durch die Gleichung $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ sowie ein Punkt $P_1(0; 4{,}5)$
Gesucht: Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 von P_1 an die Hyperbel

Lösung: Soll eine Gerade g, die durch einen gegebenen, außerhalb der Hyperbel liegenden Punkt $P_1(x_1; y_1)$ geht, Tangente der Hyperbel sein, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

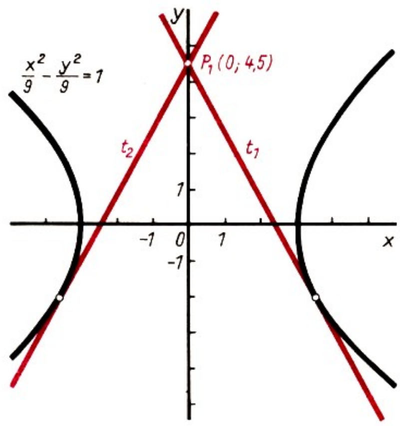
a) P_1 muss ein Punkt der Tangente der Hyperbel in dem noch unbekannten Berührungspunkt $P_1(x_0; y_0)$ sein,
b) P_0 muss ein Punkt der Hyperbel sein.
Aus den entsprechenden Gleichungen

$$a) \quad \frac{x_1x_0}{a^2} - \frac{y_1y_0}{b^2} = 1, \qquad b) \quad \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

lassen sich die Koordinaten des Berührungspunktes x_0 und y_0 errechnen. Daraus kann die Gleichung der Tangente aufgestellt werden.

Bemerkung: "Außerhalb der Hyperbel" bedeutet im Teil der Ebene, der zwischen den Hyperbelästen liegt. Von Punkten, die auf der konkaven Seite eines Hyperbelastes liegen, existieren keine Tangenten an die Kurve.

Im vorliegenden Fall erhalten wir
a) $\frac{0 \cdot x_0}{9} - \frac{4{,}5y_0}{9} = 1$, b) $\frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{9} = 1$
Ergebnis:
Die Gleichungen lauten
Tangente t_1 : $\frac{\sqrt{13}x}{9} - \frac{-2y}{9} = 1$ oder $y = -1{,}8x + 4{,}5$
Tangente t_2 : $\frac{-\sqrt{13}x}{9} - \frac{-2y}{9} = 1$ oder $y = 1{,}8x + 4{,}5$



Parabel und Gerade

Für einen gemeinsamen Punkt $P_G(x_G; y_G)$ der Parabel $y^2 = 2px$ und der Geraden $y = mx + n$ gilt das Gleichungssystem

$$y_G^2 = 2px_G \qquad , \qquad y_G = mx_G + n$$

und es folgt

$$x_G = \frac{p - mn \pm \sqrt{p(p - 2m)}}{m^2} \qquad (m \neq 0)$$

Für $m \neq 0$ hängt die Anzahl der Lösungen der Gleichung und damit die Anzahl der gemeinsamen Punkte von der Diskriminante $D = p(p - 2mn)$ ab.

$D > 0$: Zwei Lösungen, genau zwei Punkte gemeinsam, die Gerade ist Sekante der Parabel.
$D = 0$: Eine Lösung, genau ein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Tangente der Parabel in diesem Punkt.
$D < 0$: Keine (reelle) Lösung, kein Punkt gemeinsam, die Gerade ist Passante der Parabel.

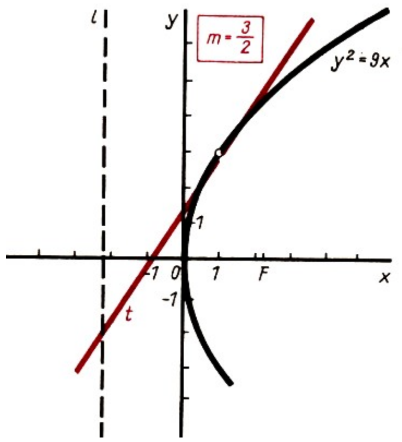
Für $m = 0$, d.h. für eine zur Parabelachse parallele Gerade, ergibt sich genau ein Schnittpunkt mit der Kurve.
Ist die Gleichung der Geraden $x = k$, d. h., ist die Gerade senkrecht zur Achse der Parabel, so ist die Gerade für $k > 0$ Sekante, für $k = 0$ Tangente und für $k < 0$ Passante der Parabel.

Tangenten der Parabel

Die Gleichung der Tangente einer Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ im Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ lautet:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

■ Gegeben: Parabel durch die Gleichung $y^2 = 9x$
Gesucht: Gleichung der Tangente $y = mx + n$ der Parabel bei gegebenem Anstieg $m\frac{3}{2}$.
Lösung:
Zwischen den Größen p, m, n besteht im Falle der Tangente wegen $m \neq 0$ der Zusammenhang $p - 2mn = 0$.
$n = \frac{p}{2m} = \frac{3}{2}$
Ergebnis: Die Gleichung der Tangente lautet $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.



■ Gegeben: Parabel durch die Gleichung $y^2 = 8x$ sowie ein Punkt $P_1(-4; 2)$
Gesucht: Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 von P_1 an die Parabel und Koordinaten der Berührungspunkte
Lösung: Soll eine Gerade g, die durch einen gegebenen, außerhalb der Parabel liegenden Punkt $P_1(x_1; y_1)$ geht, Tangente der Parabel sein, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

a) P_1 muss ein Punkt der Tangente der Parabel in dem noch unbekannten Berührungspunkt $P_0(x_0; y_0)$ sein.
b) P_0 muss ein Punkt der Parabel sein.
Aus den entsprechenden Gleichungen

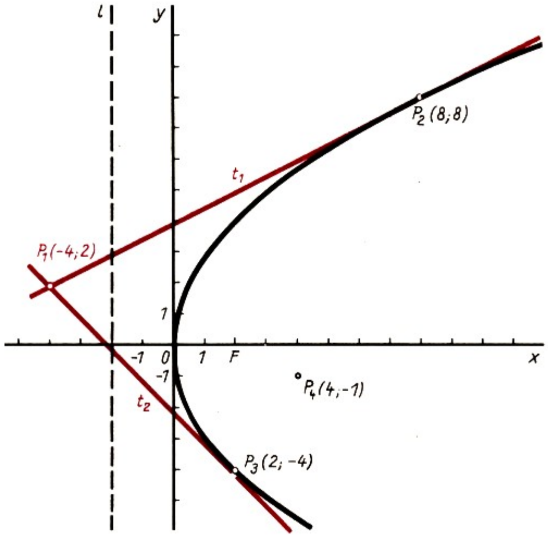
$$a) \quad y_1 y_0 = p(x_1 + x_0) \qquad \text{und b)} \quad y_0^2 = 2px$$

lassen sich die Koordinaten des Berührungspunktes x_0 und y_0 errechnen. Damit kann die Gleichung der Tangente aufgestellt werden.

Bemerkung: "Außerhalb der Parabel" bedeutet im Teil der Ebene, der auf der konvexen Seite der Parabel liegt.[18]

[18] Im vorliegenden Fall liegt zum Beispiel der Punkt $P_1(-4; 2)$ außerhalb der Parabel und der Punkt $P_4(4; -1)$ innerhalb der Parabel.

Im vorliegenden Fall erhalten wir
a) $2y_0 = 4(-4 + x_0)$ und b) $y_0^2 = 8x_0$
Ergebnis: Koordinaten der Berührungspunkte sind $x_{01} = 8, y_{01} = 8$, $x_{02} = 2, y_{01} = -4$. Die Gleichungen lauten
Tangente $t_1 : 8y = 4(8 + x)$, oder $y = \frac{1}{2}x + 4$,
Tangente $t_2 : -4y = 4(2 + x)$, oder $y = -x + 2$.



Übersicht über die Kurven- und Tangentengleichungen der Kegelschnitte in den Hauptlagen

Mittelpunktslage	Ellipse $b^2 = a^2 - e^2$	Hyperbel $b^2 = e^2 - a^2$
$M(0,0)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$
$M(c,d)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x_0-c)(x-c)}{a^2} + \frac{(y_0-d)(y-d)}{b^2} = 1$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x_0-c)(x-c)^2}{-}\frac{(y_0-d)(y-d)}{b^2} = 1$

Scheitellage	Parabel
$S(0,0)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$y^2 = 2px$ $y_0y = p(x_0 + x)$
$S(c,d)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$(y-d)^2 = 2p(x-c)$ $(y_0-d)(y-d) = p(x + x_0 - 2c)$

Scheitellage	Kegelschnitt allgemein $e^2 = \frac{e^2-a^2}{a^2}; p = \frac{b^2}{a}$
$S(0,0)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ $y_0y = p(x_0 + x) + (\varepsilon^2 - 1)x_0x$
$S(c,d)$ Kurve Tangente in $P_0(x_0,y_0)$	$(y-d)^2 = 2p(x-c) + (\varepsilon^2 - 1)(x-c)^2$ $(y_0-d)(y-d) = p(x + x_0 - 2c) + (\varepsilon^2 - 1)(x_0 - c)(x - c)$

G. Anhang

Einige Daten aus der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik

um 2100 bis 1800 v.u.Z.: Entwicklung des Rechnens mit natürlichen Zahlen und Stammbrüchen; Zahlendarstellung in einem Potenzsystem (Babylonien, Ägypten).

um 550 v.u.z.: Anfänge einer Theorie der natürlichen Zahlen in Griechenland (Pythagoras und andere Mathematiker).

zwischen 500 und 400 v.u.Z.: Erkenntnis der Existenz irrationaler Zahlen bei der Untersuchung geometrischer Probleme durch die Pythagoräer.

um 400 v.u.Z.: Anfänge einer Theorie der irrationalen Zahlen bei den griechischen Mathematikern Eudoxus (um 408 bis 355 v. u. Z.) und Theätet (um 410 bis 368 v.u.Z.).

um 350 v.u.Z.: Früheste bekannte Untersuchungen von Kegelschnitten durch den griechischen Mathematiker Menächmos (genaue Lebensdaten unbekannt).

um 250 v.u.Z.: Der griechische Mathematiker Archimedes von Syrakus (287 bis 212 v. u. Z.) ermittelt durch Umfangsberechnungen ein- und umbeschriebener Vielecke eines Kreises $3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

um 250 v.u.Z.: Anwendung infinitesimaler Methoden (Vorläufer der Integralrechnung) bei der Flächen- und Rauminhaltsberechnung durch Archimedes.

um 220 v.u.Z.: Entwicklung und Systematisierung der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte, erste Anwendung arithmetischer bzw. algebraischer Methoden auf diesen Gegenstand; unter diesem Aspekt Benennungen "Ellipse", "Parabel", "Hyperbel" durch den griechischen Geometer Apollonios von Perge (um 260 bis 170 v.u.Z.; "Konika" in acht Bänden).

um 500: Ziffernrechnen im dekadischen Positionssystem (Indien).

1360: Vorläufer der Koordinatenmethode und Anfänge der analytischen Geometrie im Werk des französischen Bischofs Nicole Oresme (um 1323 bis 1381; "De latitudinibus formarum").

um 1500: Anwendung negativer Zahlen und des Rechnens mit ihnen bei der Lösung mathematischer Probleme (Italien).

1525: Darstellend-geometrische Konstruktion der Kegelschnitte im Werk des deutschen Malers, Architekten und Geometers Albrecht Dürer (1471 bis 1528; "Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit").

um 1530 bis 1540: Erste bekannte Anwendung imaginärer und komplexer Zahlen bei der Lösung mathematischer Probleme, insbesondere in Werken italienischer Mathematiker.

1550: Entwicklung einer Theorie imaginärer Zahlen durch den italienischen Mathematiker Raffael Bombelli (um 1530 bis 1580).

1615 bis 1651: Weitere Entwicklung und Anwendung infinitesimaler Methoden zur Lösung geometrischer Probleme (Kurvenuntersuchungen, Flächen- und Rauminhaltsberechnung) in Deutschland durch Johannes Kepler (1571 bis 1630; "Neue Volumenberechnung von Weinfässern" 1615), in Frankreich durch René Descartes (1596 bis 1650; "Géometrie" 1637) und Pierre de Fermat (1601 bis 1665; um 1635, Ergebnisse enthalten im nachgelassenen Werk "Isagoge"1679), in Italien durch Evangelista Torricelli (1608 bis 1647) und Bonaventura Cavalieri

(1598 bis 1647; "Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" 1635), in Belgien durch Paul Guldin (1577 bis 1643; "Centrobaryca" 1641) und Andre Tacquet (1612 bis 1660; "On Cylinders and Rings" 1651).

1635 bis 1655: Analytisch-geometrische Untersuchungen der Kegelschnitte durch die französischen Mathematiker Pierre de Fermat und René Descartes sowie durch den englischen Mathematiker John Wallis (1616 bis 1703; "Tractatus de sectionibus conicis" 1655).

1655: Ansätze einer Analysis infinitesimaler Prozesse bzw. Größen vom algebraischen Standpunkt aus durch John Wallis ("Arithmetica infinitorum").

1665 bis 1675: Ausarbeitung der Zusammenhänge zwischen Differential- und Integralrechnung, Grundlegung der Infinitesimalrechnung in heutiger Auffassung durch den englischen Mathematiker und Physiker Isaac Newton (1643 bis 1727; Ausarbeitung der Fluxionsrechnung 1665 bis 1671; Veröffentlichung "Quadratur der Kurven" 1704, "Methode der Fluxionen" postum 1736) und den deutschen Gelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716; Ausarbeitung der Theorie sowie der heute noch gebräuchlichen Terminologie und Symbolik 1673 bis 1675; Veröffentlichung "Nova thodus pro imis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitatas moratur, et singulare pro illi calculi genus" 1684, weitere Arbeiten - besonders zur Integralrechnung - bis 1686).

um 1690 bis 1700: Anwendung und weitere Entwicklung der Infinitesimalrechnung in Zusammenhang mit mathematischen und physikalischen Problemen in den Werken der Schweizer Mathematiker Jacob Bernoulli (1654 bis 1705) und Johann Bernoulli (1657 bis 1748).

1715 bis 1742: Weiterer Ausbau der Infinitesimalrechnung (einschließlich unendlicher Reihen) durch die englischen Mathematiker Brook Taylor (1685 bis 1731; "Methodus incrementorum" 1715) und Colin Maclaurin (1698 bis 1746; "Treatise of Fluxions" 1742).

1748: Zusammenfassende und systematische Darstellung sowie Erweiterung der Infinitesimalrechnung durch den Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783; "Introductio in analysin infinitorum").

1761: Nachweis der Irrationalität der Zahl π durch den deutschen Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777).

um 1780: Theoretische Fundierung und inhaltlicher Ausbau der darstellenden Geometrie durch den französischen Mathematiker Gaspard Monge (1746 bis 1818).

1801: Anfänge der modernen Zahlentheorie bei dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855; "Disquisitiones arithmeticae").

1821: Strenge Begründung der Infinitesimalrechnung mittels des Grenzwertbegriffs heutiger Auffassung in den Arbeiten des französischen Mathematikers Louis-Augustin Cauchy (1789 bis 1857; "Cours d'analyse").

1831: Ausbau der Theorie der komplexen Zahlen in Werken von C. F. Gauss.

um 1840: Entwicklung der Grundlagen der Vektorrechnung durch den englischen Mathematiker William Rowan Hamilton (1805 bis 1865; "Lectures on Quaternions" 1843, auf Hamilton geht der Terminus "Vektor" zurück) und den deutschen Mathematiker Hermann Graßmann (1809 bis 1877; "Lineare Ausdehnungslehre" 1844).

1850 bis 1880: Weiterentwicklung der Zahlentheorie und der angewandte Infinitesimalrechnung in den Werken des russischen Mathematikers Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821 bis 1894).

1873: Nachweis der Transzendenz der Zahl e durch den französischen Mathematiker Charles Hermite (1822 bis 1901).

um 1880: Ausbau der Theorie der irrationalen Zahlen (1872) und der reellen Zahlen: (1882) durch den deutschen Mathematiker Richard Dedekind (1831 bis 1916; "Stetigkeit und irrationale Zahlen" 1872, "Was sind und was sollen die Zahlen?" 1882) und in den Werken von Georg Cantor (1845 bis 1918) und Karl Weierstraß (1815 bis 1897).

1882: Nachweis der Transzendenz der Zahl π durch den deutschen Mathematiker Ferdinand Lindemann (1852 bis 1939).

1887 bis 1896: Ausbau der analytischen Geometrie und Differentialgeometrie in den Arbeiten des französischen Mathematikers Gaston Darboux (1842 bis 1917; "Lecons sur la theorie generale des surfaces").

1889: Fundierung der Zahlentheorie durch Entwicklung eines Axiomensystems für die natürlichen Zahlen durch den italienischen Mathematiker Guiseppe Peano (1852 bis 1932).

um 1890: Entwicklung der Vektoranalysis durch den amerikanischen Mathematiker Josia Willard Gibbs (1839 bis 1903) und den englischen Mathematiker Oliver Heaviside (1850 bis 1925).

um 1930: Ausbau der Algorithmentheorie; Entwicklung theoretischer Grundlagen für die Arbeitsweise moderner Rechenautomaten durch den englischen Mathematiker A. M. Turing (sogenannte Turing-Maschine als abstraktes Modell 1937).

1941: Entwicklung des ersten funktionsfähigen Rechenautomaten auf Relaisbasis durch den deutschen Ingenieur Konrad Zuse.

1946: Entwicklung des ersten elektronischen Rechenautomaten (ENIAC, auf Röhrenbasis) in den USA.

1951: Entwicklung elektronischer Großrechenmaschinen (BESM) mit hoher Arbeitsgeschwindigkeit (auf Halbleiterbasis) in der UdSSR.