ANAGLYPHEN ZUR DARSTELLENDEN GEOMETRIE

DREITAFELPROJEKTION

AXONOMETRIE · ZENTRALPERSPEKTIVE

KARTENPROJEKTION

ANAGLYPHEN ZUR DARSTELLENDEN GEOMETRIE

Dreitafelprojektion · Axonometrie · Zentralperspektive
Kartenprojektion

Entwurf und Ausführung der Raumbilder und Zeichnungen: Dr. Helmut Mucke
Text: Hans Simon

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1967

5. Auflage

Lizenz-Nr. 203 · 1000/67 (UN)

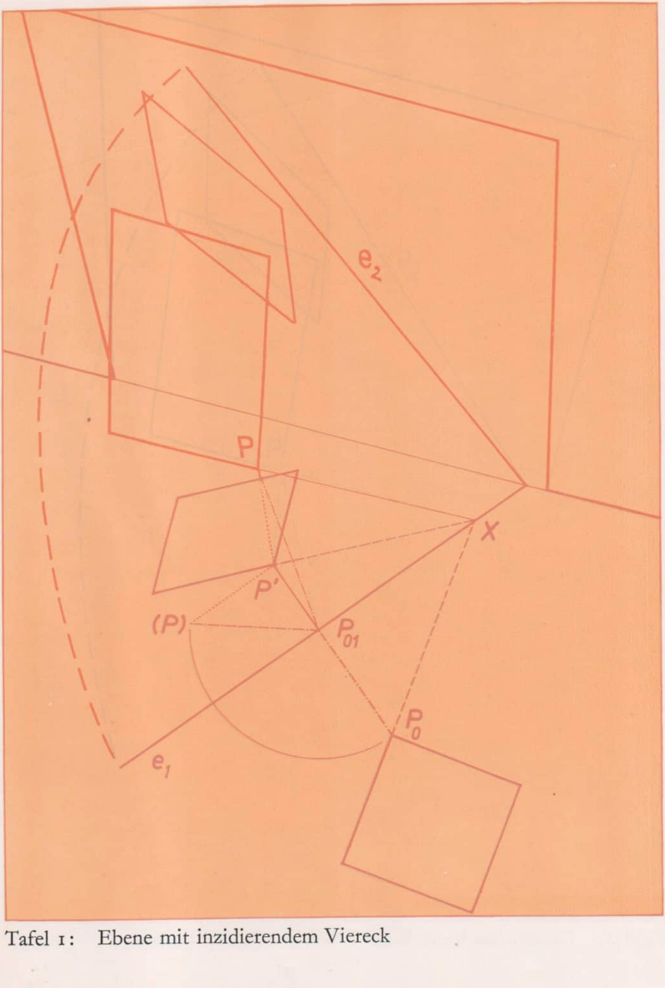
ES 11 G

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin

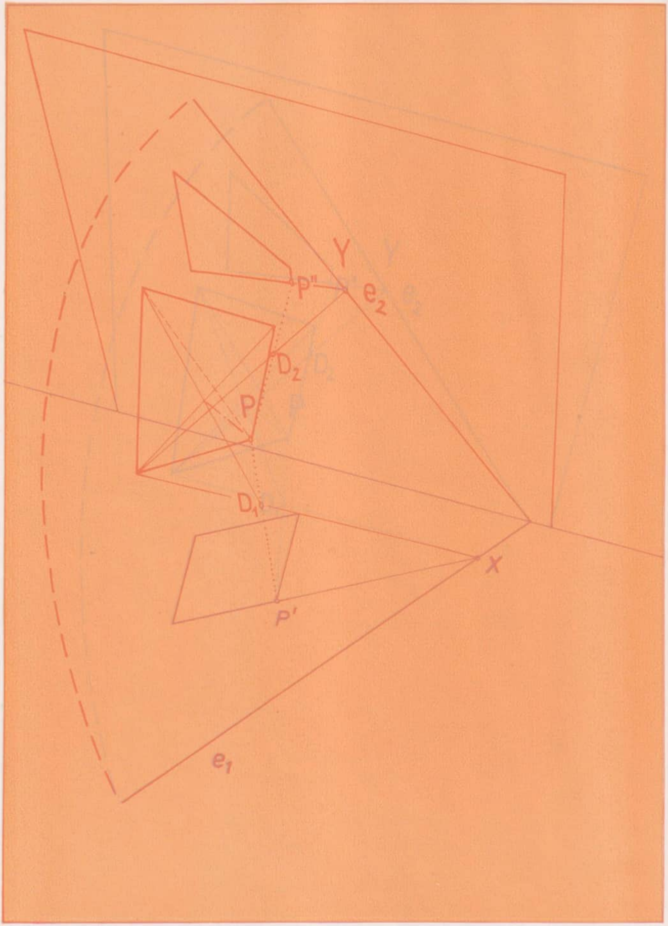
Satz und Druck: Druckerei Fortschritt Erfurt, Werk I V/4/59

Redaktionsschluß: 13. 9. 1967

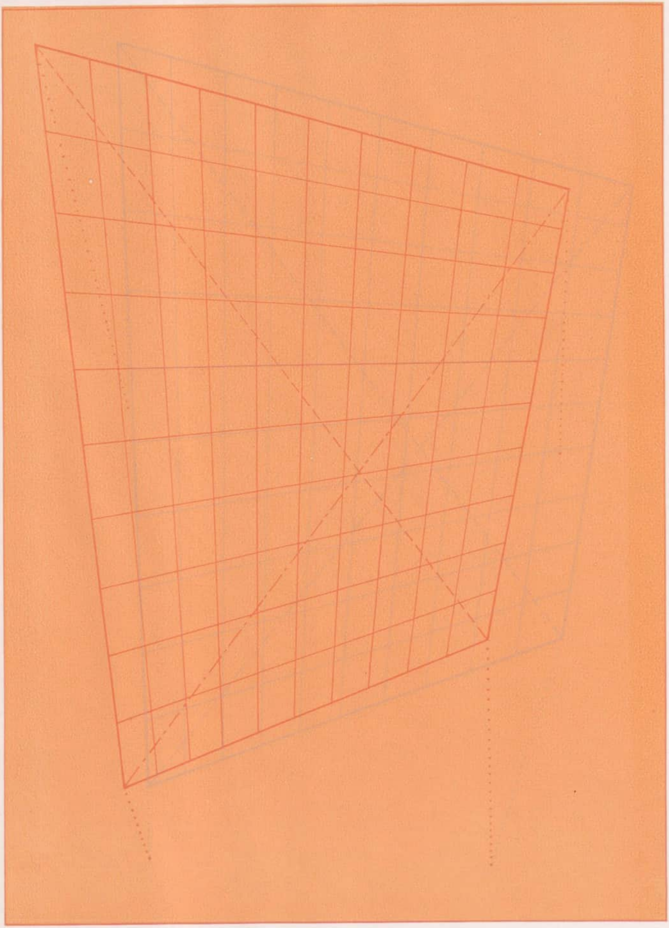
Bestell-Nr. 00 09 21-5 – Preis: 3,30



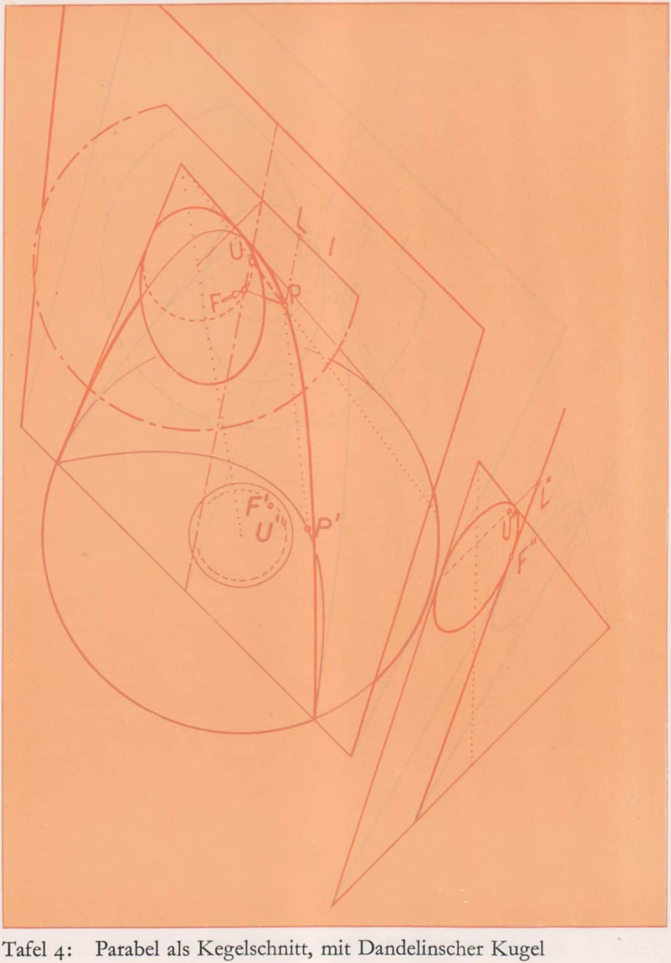
Tafel 1: Ebene mit inzidierendem Viereck



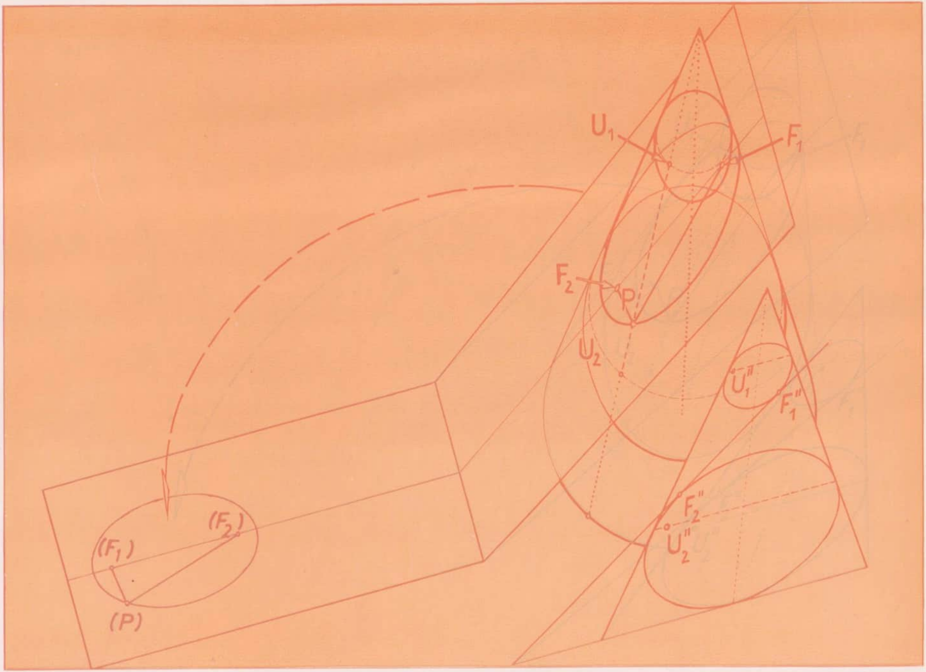
Tafel 2: Räumliches Viereck mit Ebene durch drei Punkte



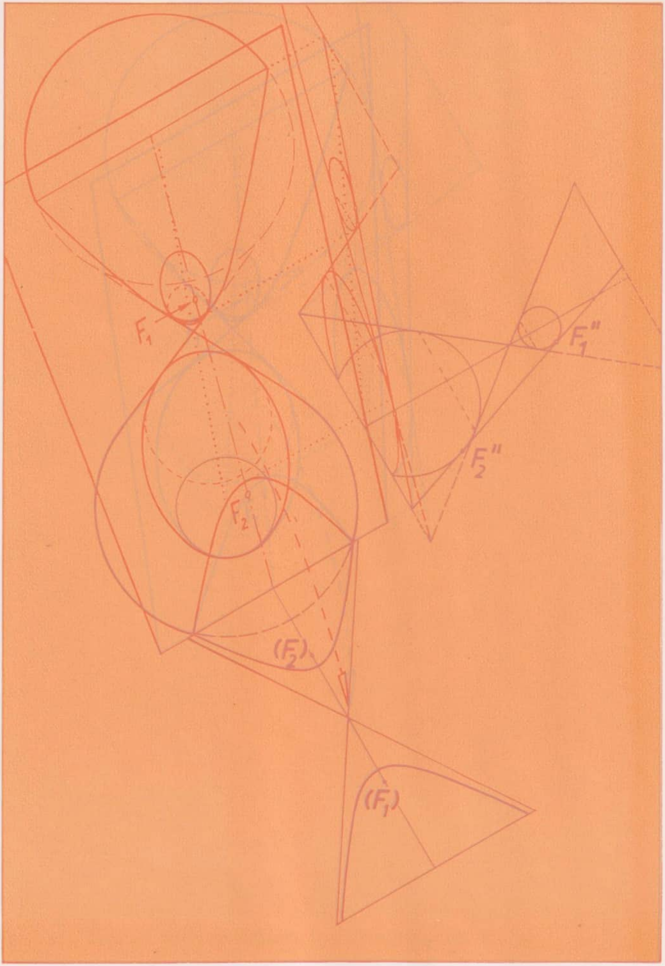
Tafel 3: Teil einer Regelfläche



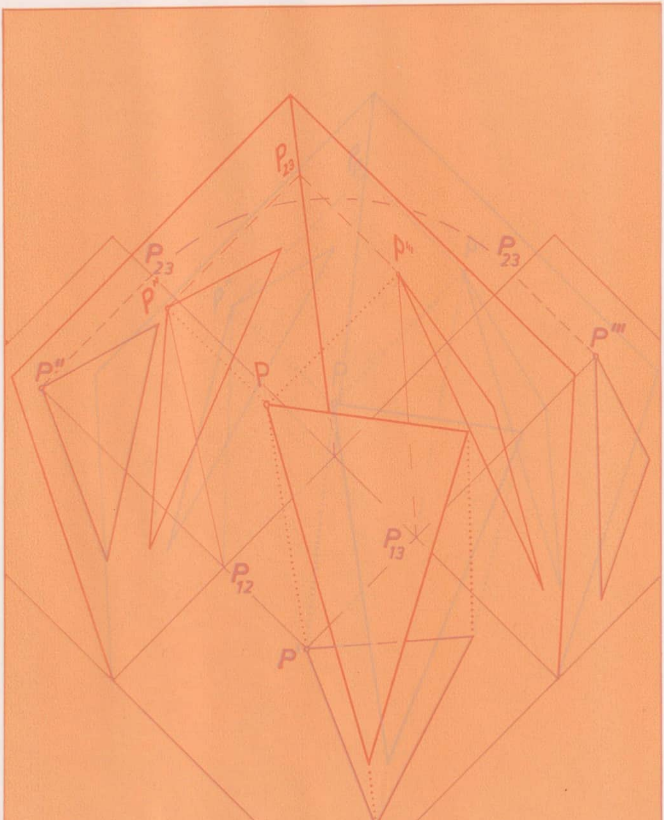
Tafel 4: Parabel als Kegelschnitt, mit Dandelinscher Kugel



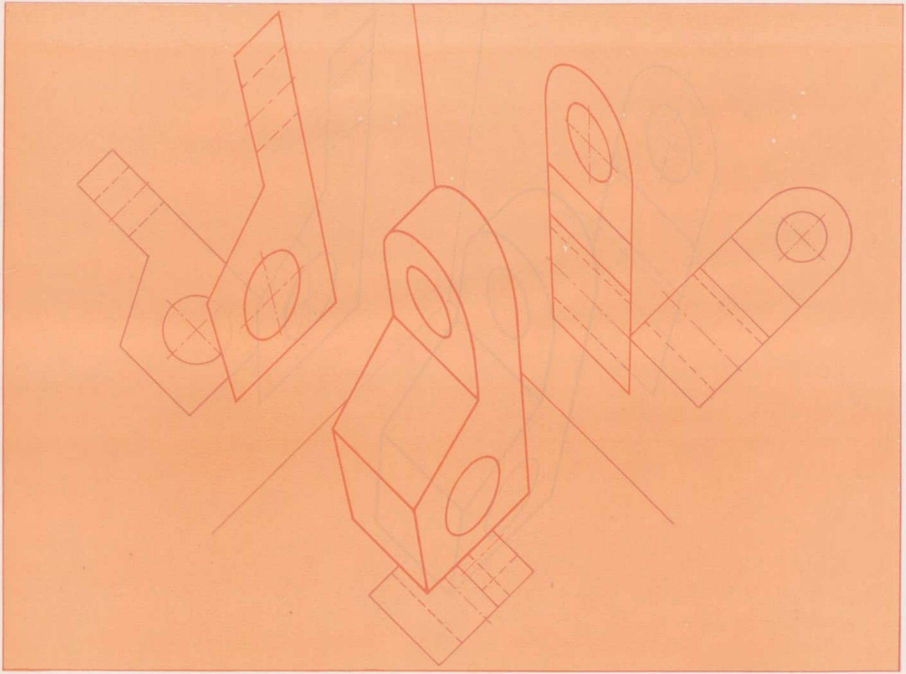
Tafel 5: Ellipse als Kegelschnitt, mit Dandelinschen Kugeln



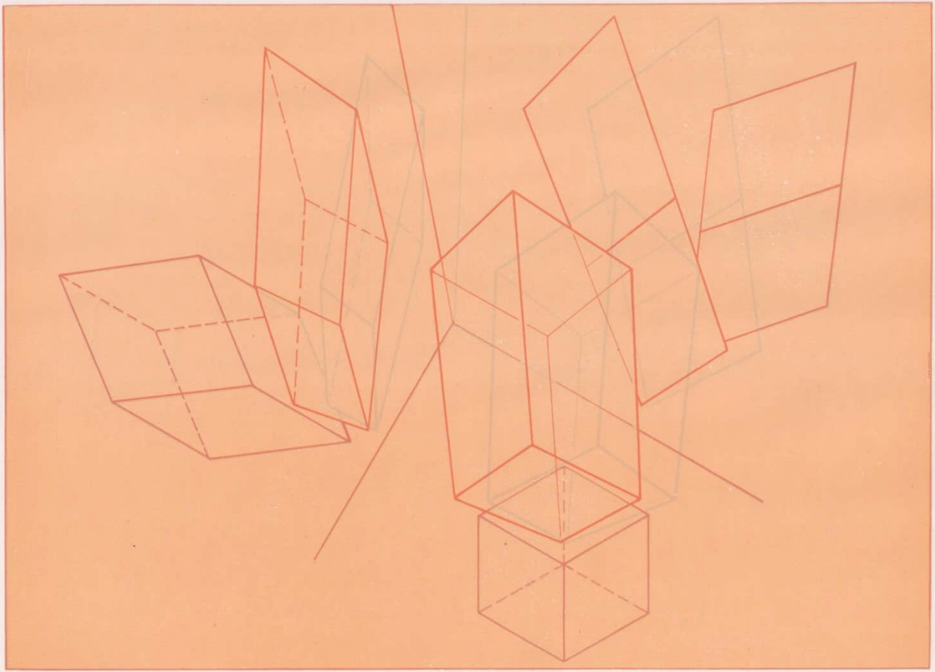
Tafel 6: Hyperbel als Kegelschnitt, mit Dandelinschen Kugeln



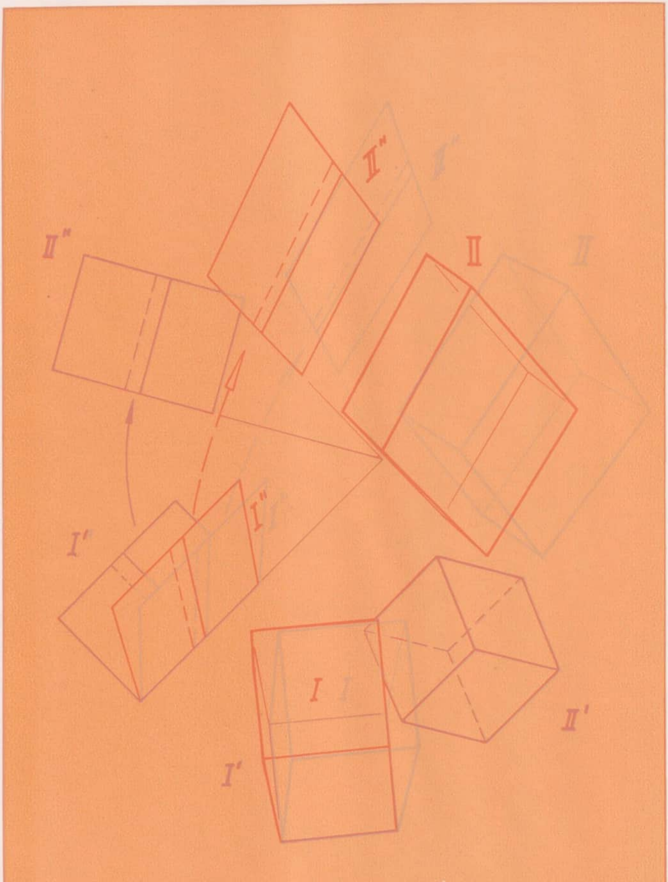
Tafel 7: Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines Dreiecks



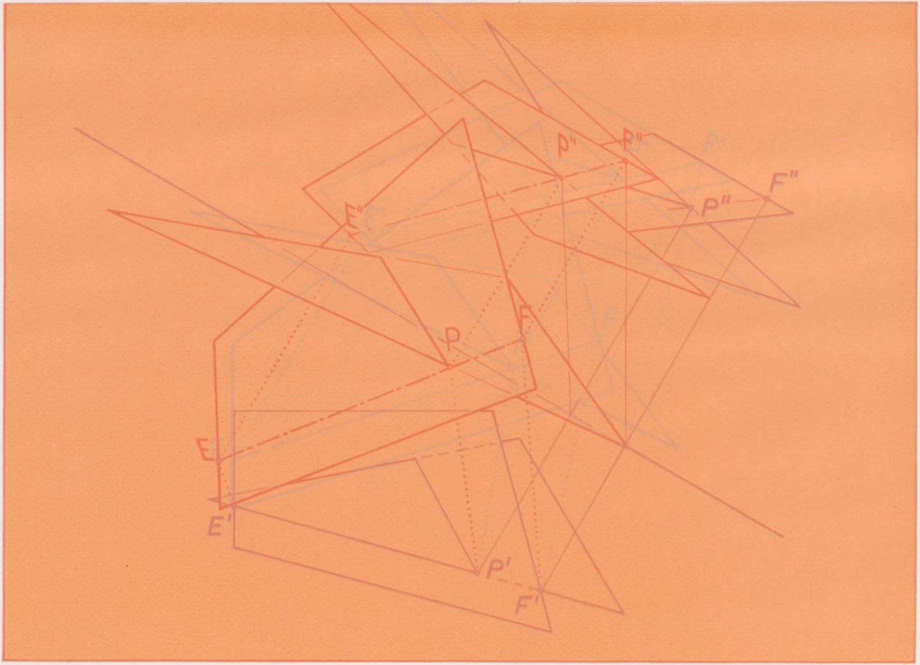
Tafel 8: Gelenk in Draufsicht, Vorderansicht und Seitenansicht



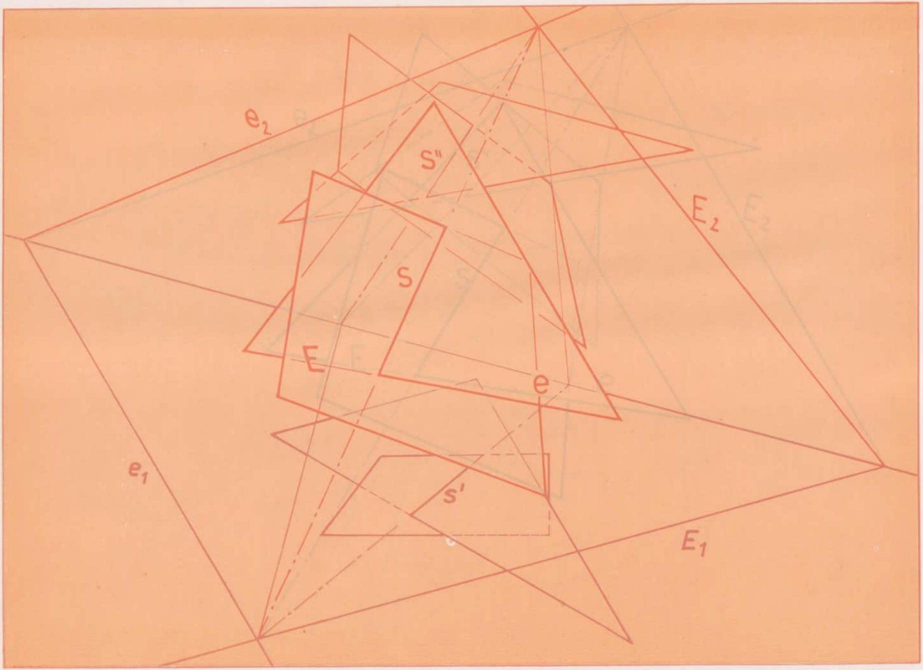
Tafel 9: Schiefes Prisma in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß



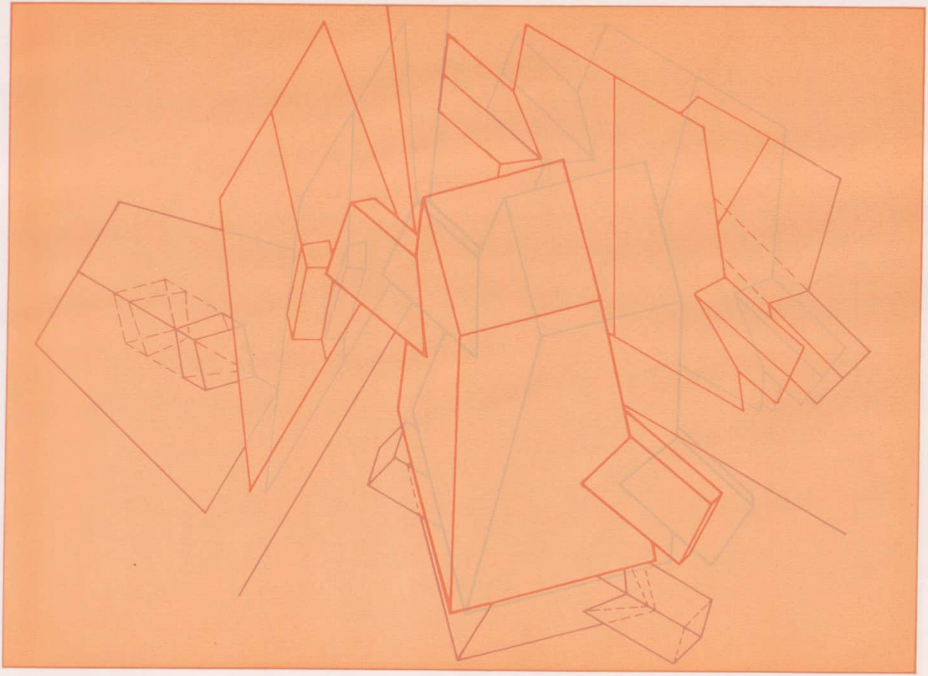
Tafel 10: Drehung eines Würfels in allgemeine Lage



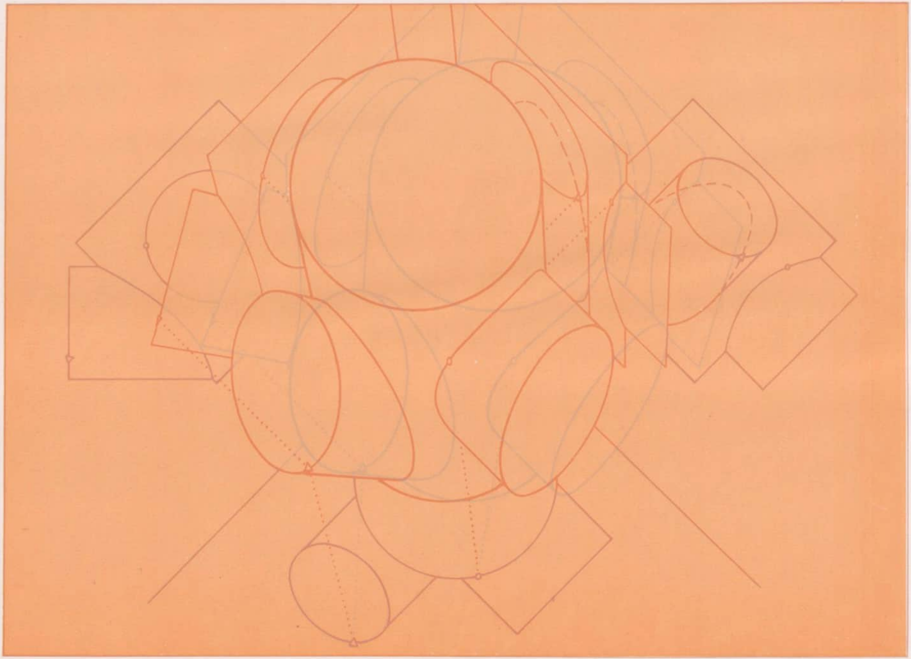
Tafel 11: Durchdringung eines ebenen Vierecks mit einem Dreieck, Kantenverfahren



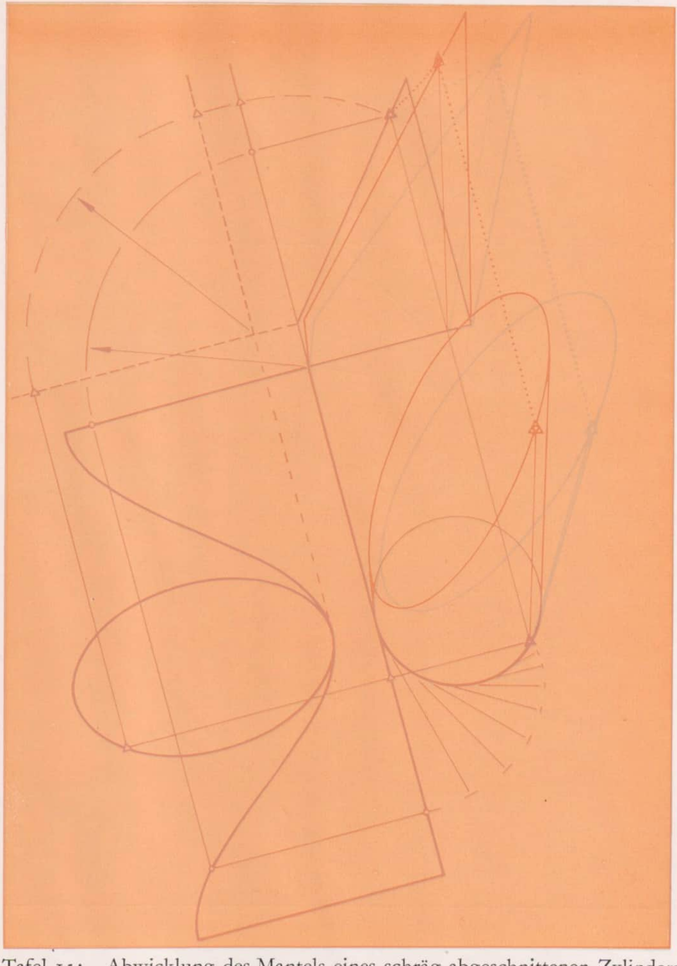
Tafel 12: Durchdringung eines ebenen Vierecks mit einem Dreieck, Ebenenverfahren



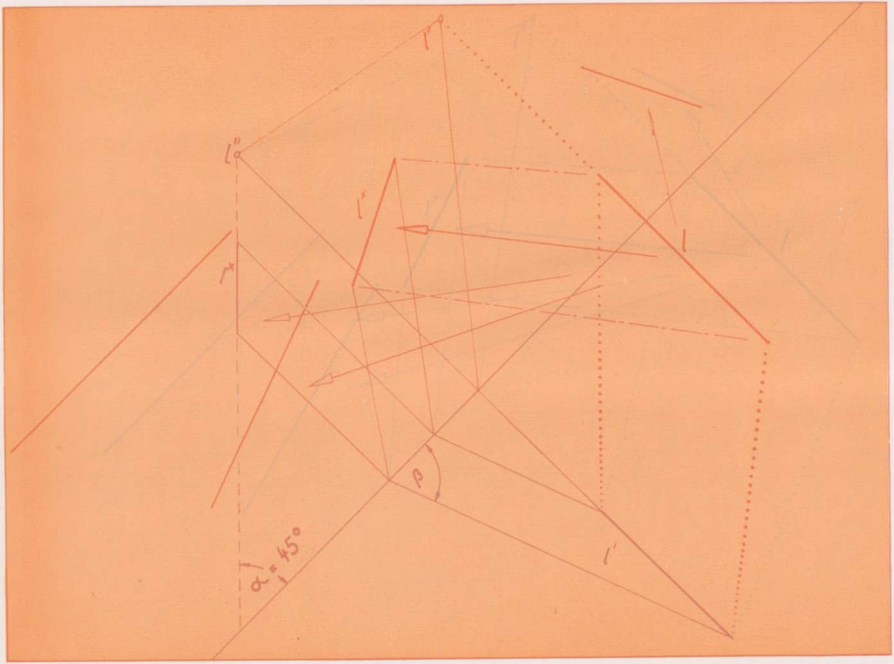
Tafel 13: Durchdringung von Prisma und Pyramidenstumpf



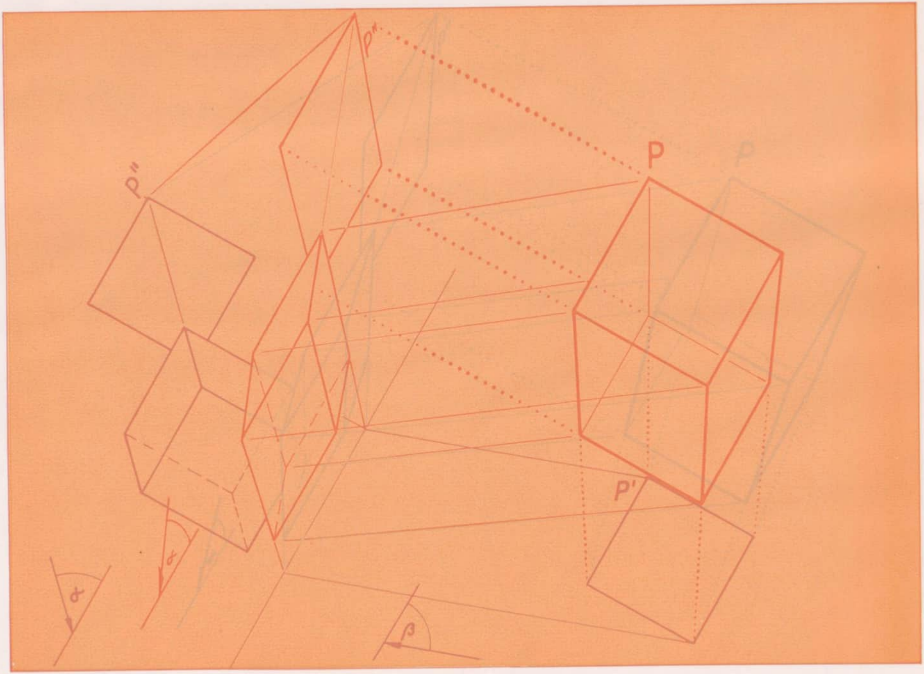
Tafel 14: Durchdringung dreier Kreiszylinder



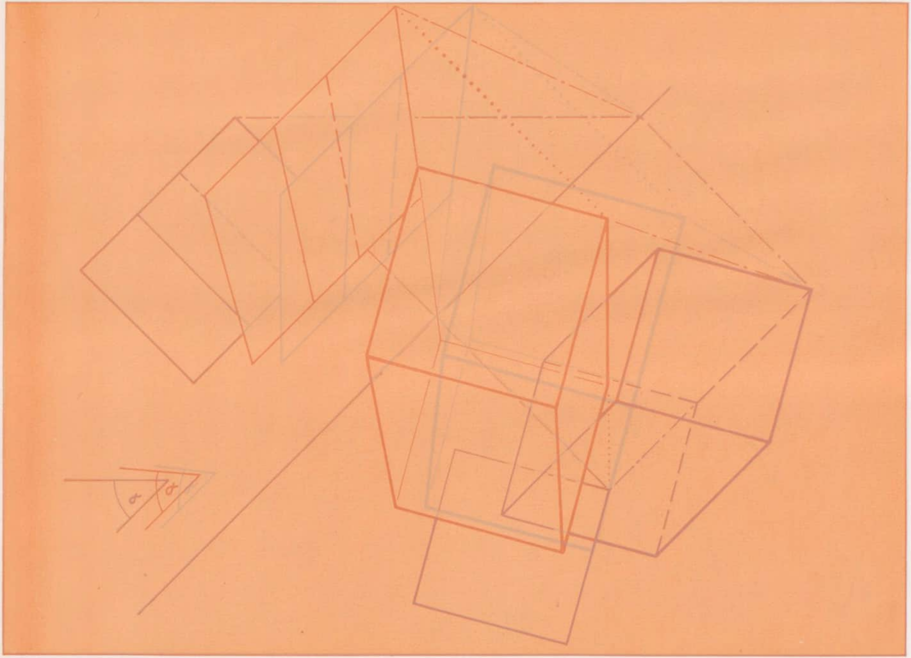
Tafel 15: Abwicklung des Mantels eines schräg abgeschnittenen Zylinders



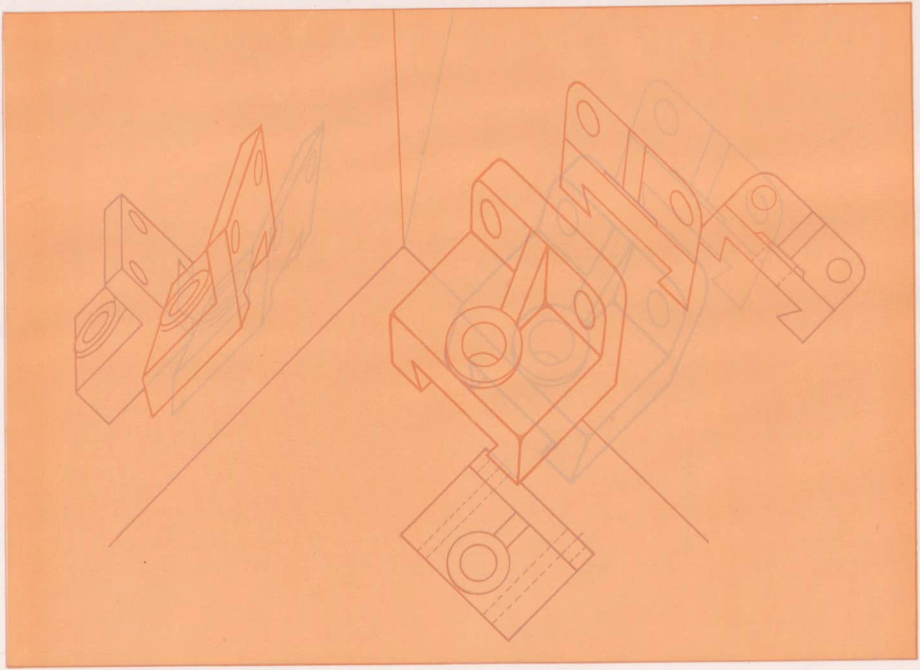
Tafel 16: Schiefe Parallelprojektionen einer Tiefenstrecke



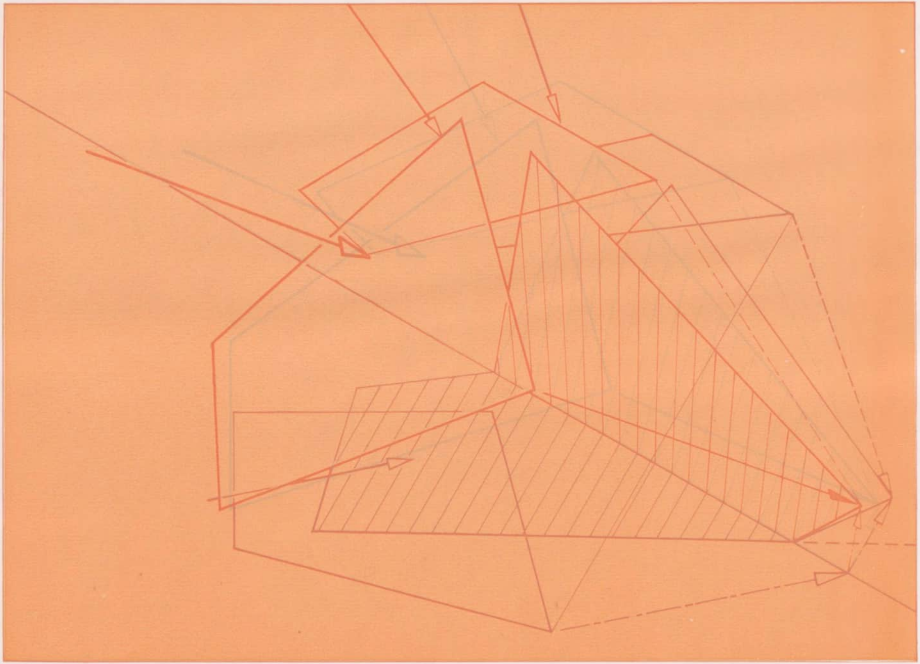
Tafel 17: Würfel in Kavalierperspektive



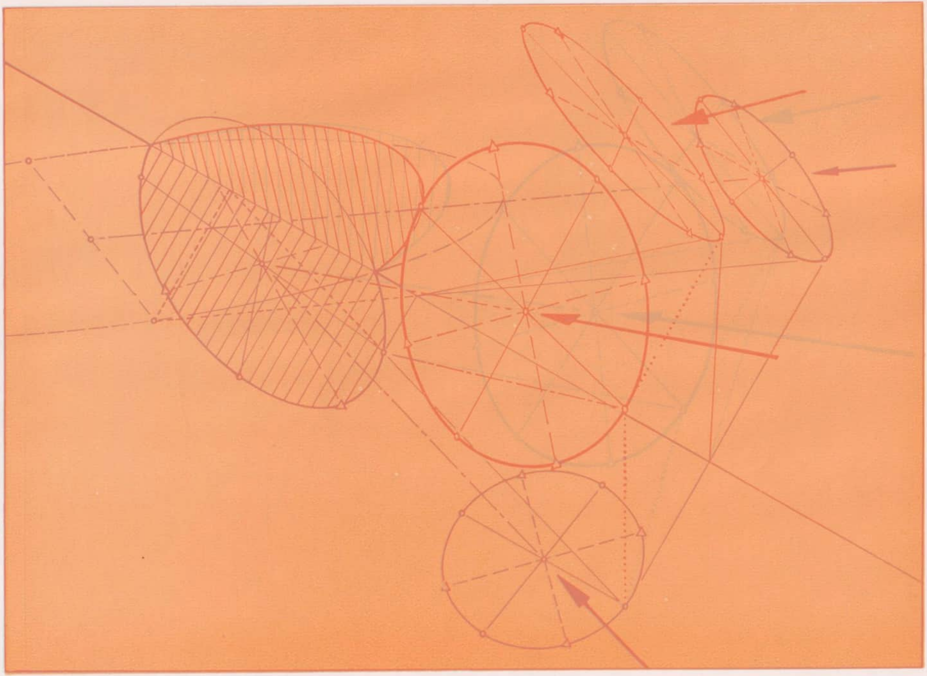
Tafel 18: Würfel in Vogelperspektive



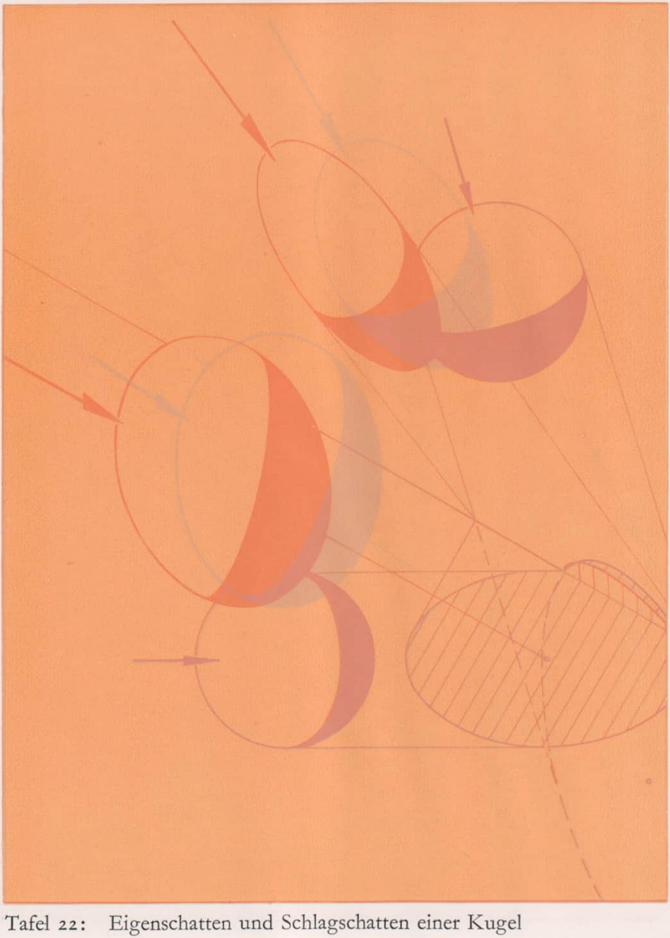
Tafel 19: Schwalbenschwanzführung in Grundriß, Aufriß und Kavalierperspektive



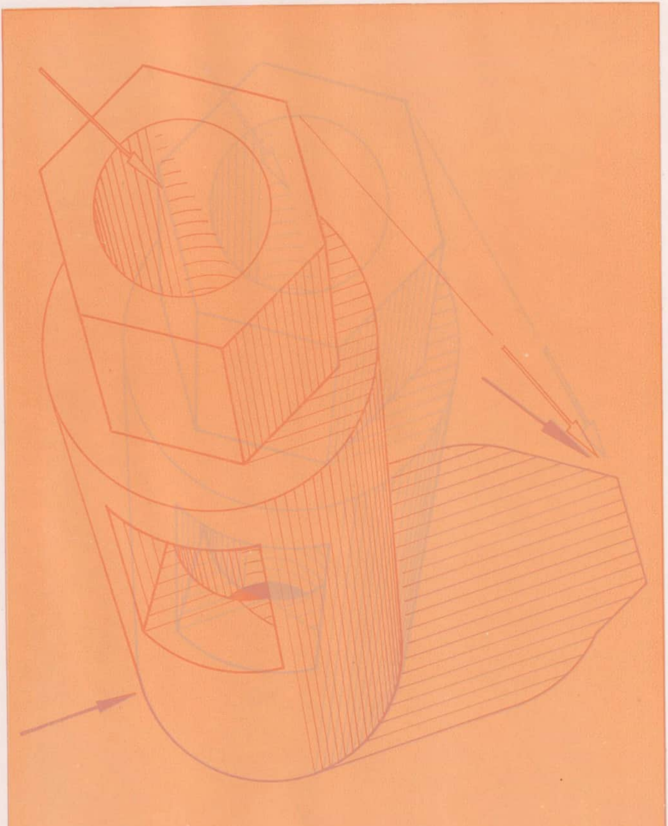
Tafel 20: Schatten eines ebenen Vierecks



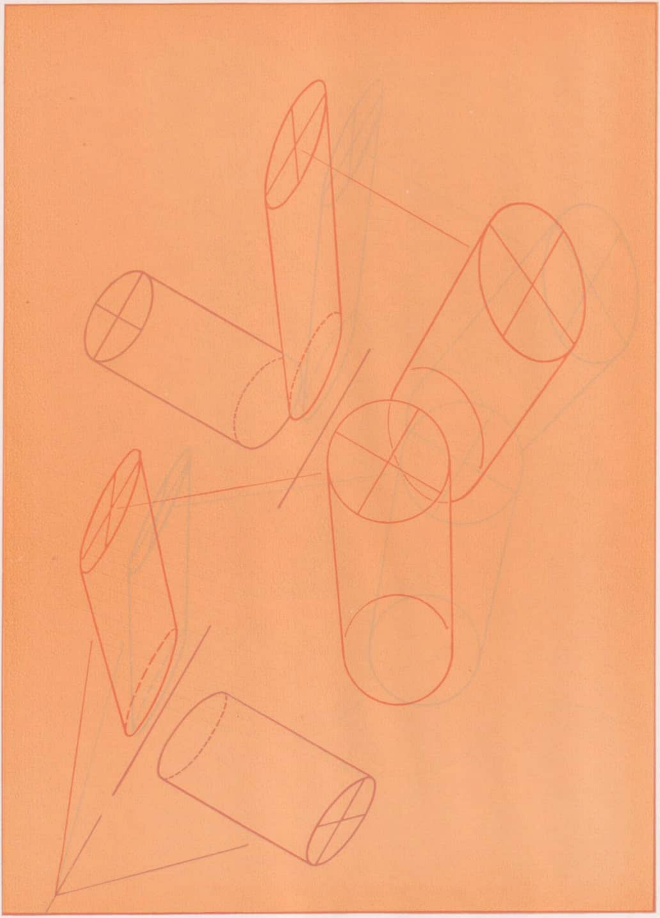
Tafel 21: Schatten einer Kreisfläche



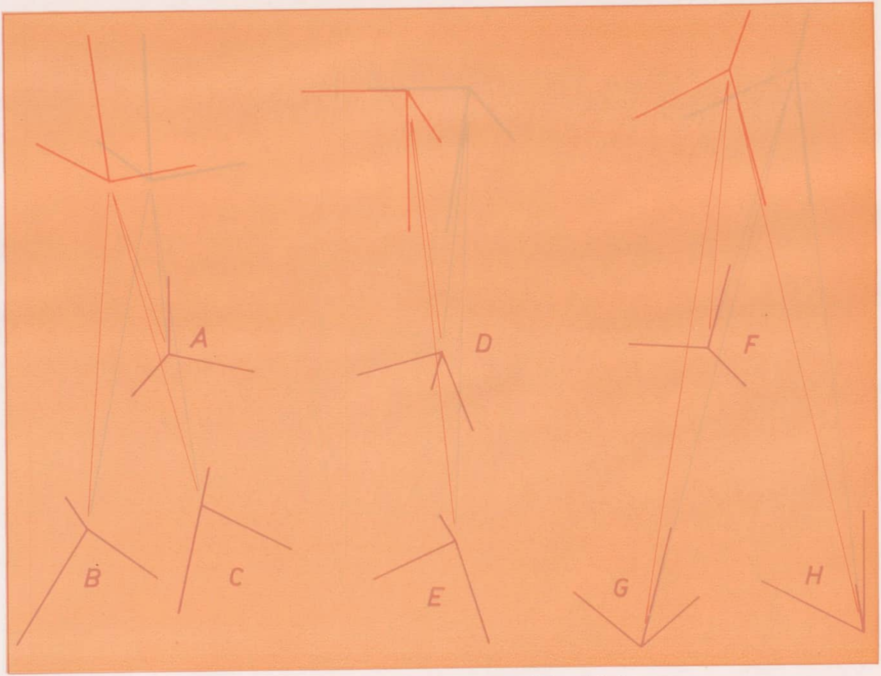
Tafel 22: Eigenschatten und Schlagschatten einer Kugel



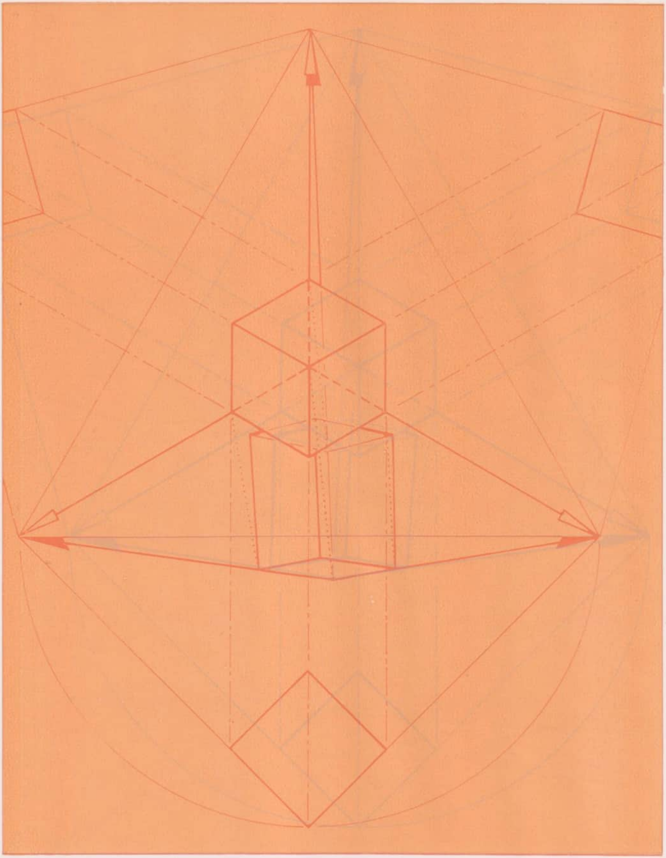
Tafel 23: Eigenschatten und Schlagschatten einer Lagerbuchse



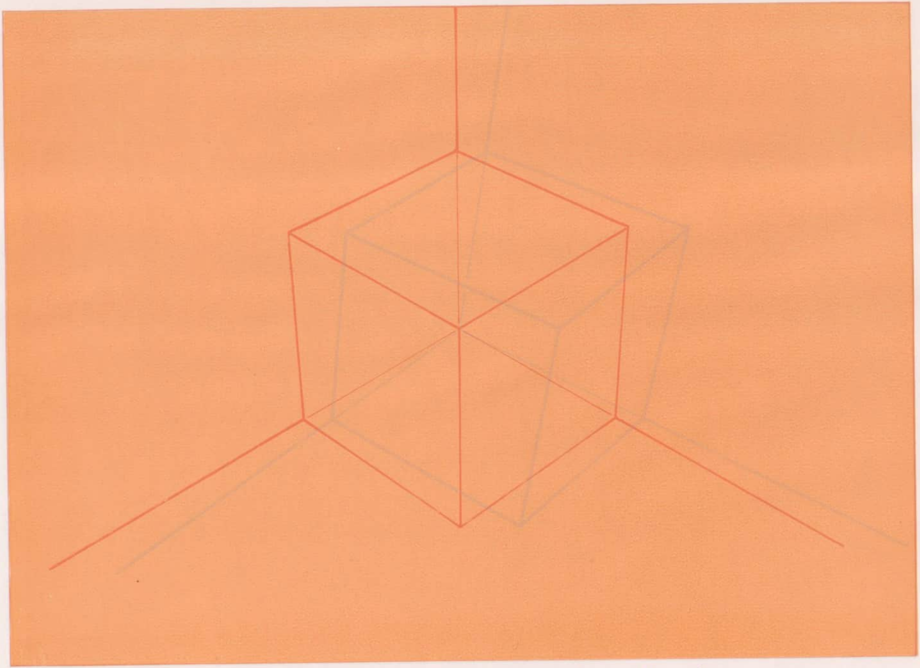
Tafel 24: Zylinder in schiefer Parallelprojektion bei einfacher Lage und in senkrechter Parallelprojektion bei allgemeiner Lage



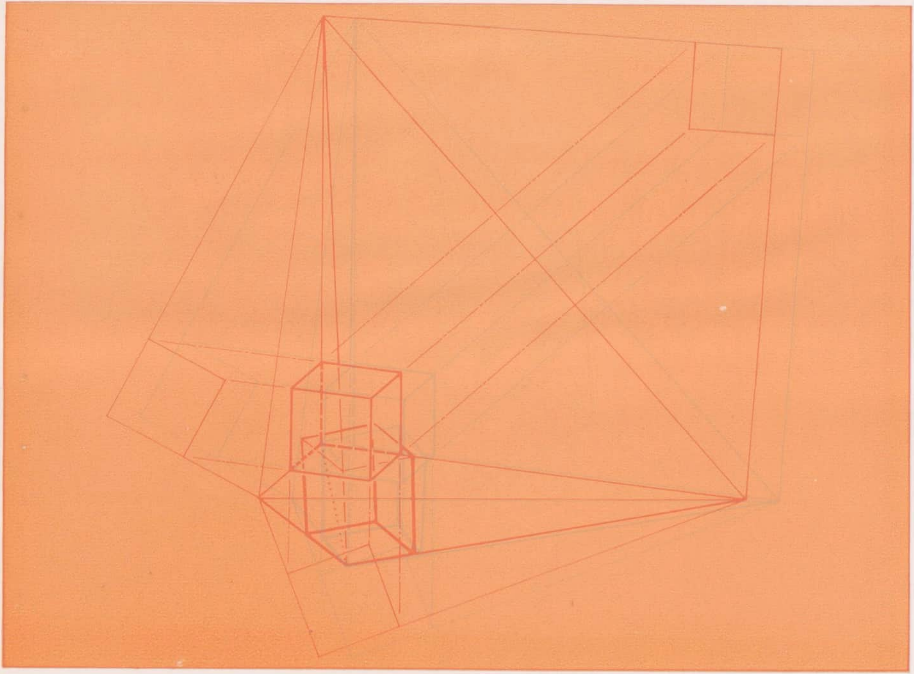
Tafel 25: Rechtwinklige Dreibeine in verschiedenen Parallelprojektionen



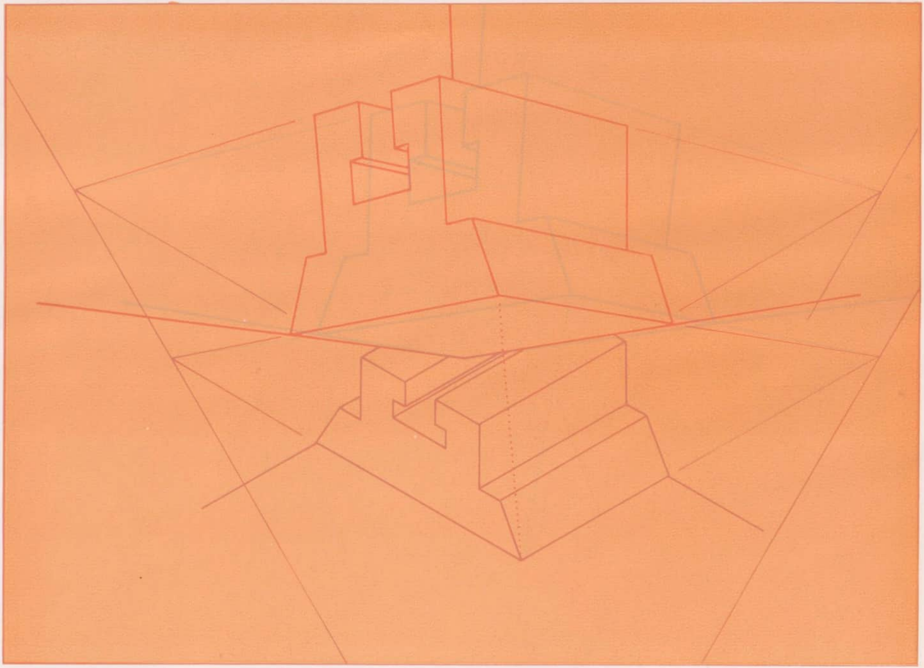
Tafel 26: Rechtwinkliges Dreibein in standardisierter Isometrie



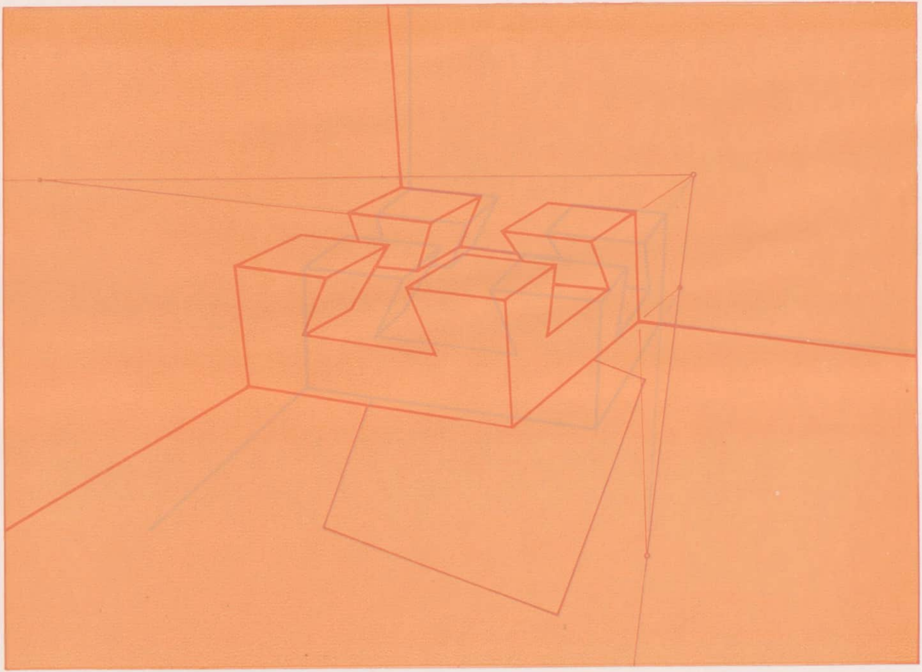
Tafel 27: Würfel in standardisierter Isometrie, senkrecht von oben zu betrachten



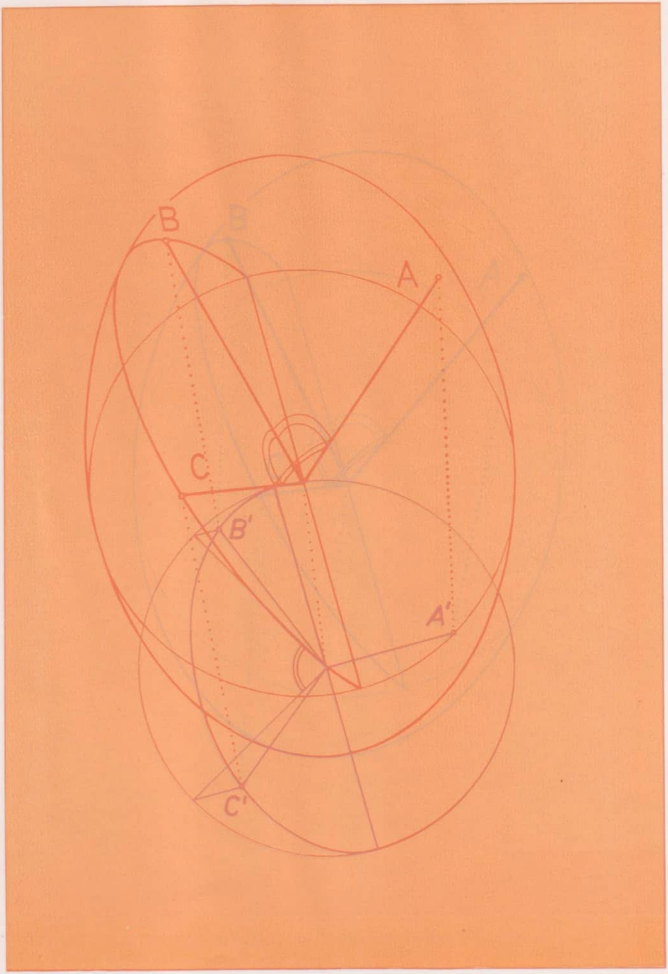
Tafel 28: Rechtwinkliges Dreibein in standardisierter Dimetrie



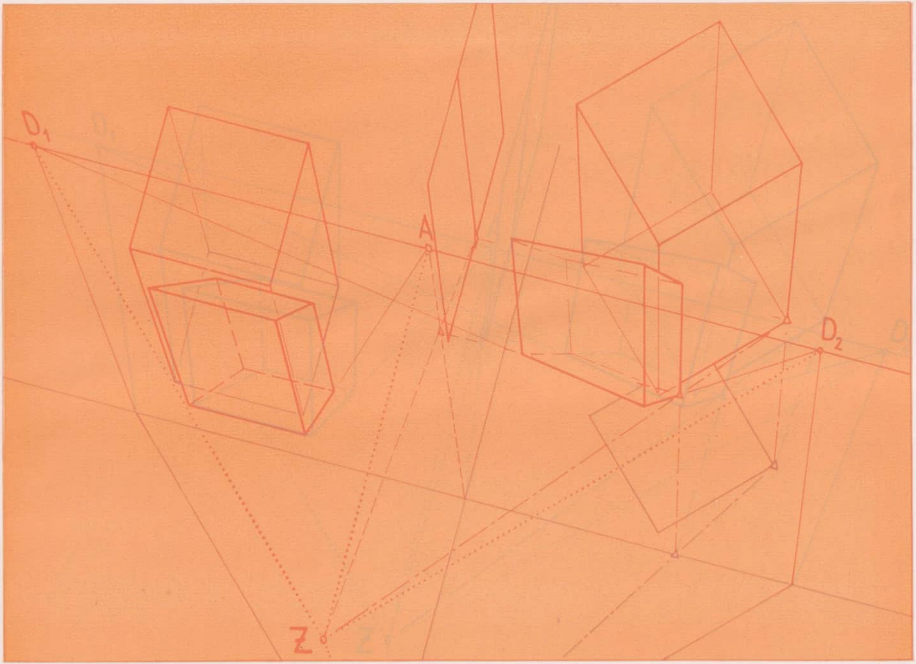
Tafel 29: Führungsteil einer Maschine in standardisierter Isometrie



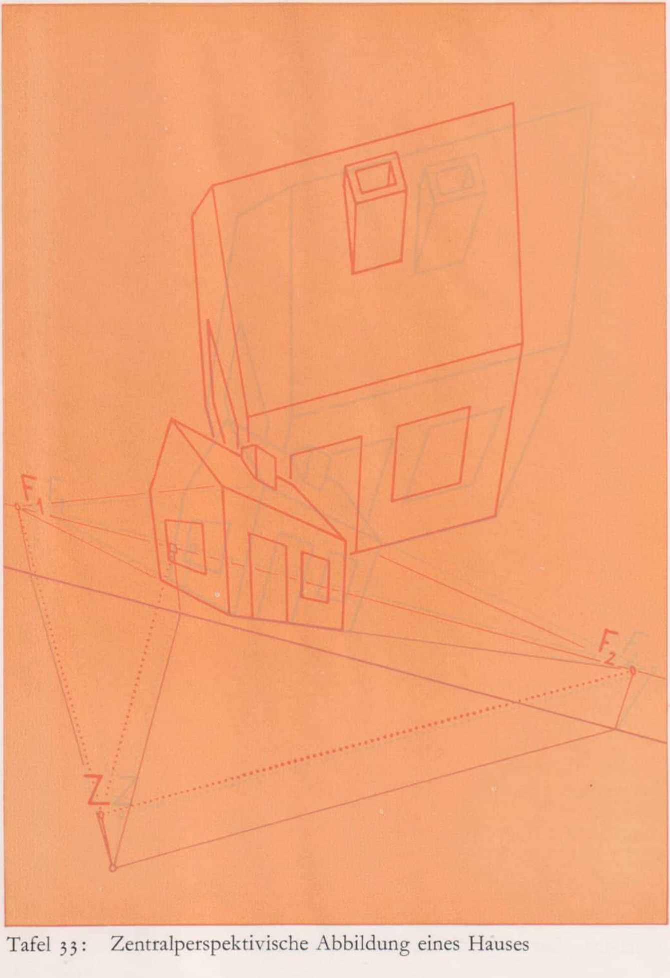
Tafel 30: Schwalbenschwanzkreuzführung in standardisierter Dimetrie, senkrecht von oben zu betrachten



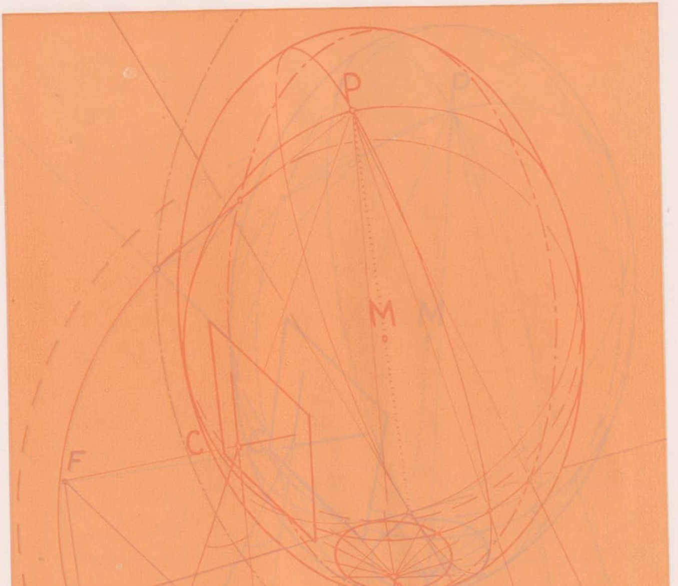
Tafel 31: Beliebige axonometrische Abbildung einer Kugel (Trimetrie)



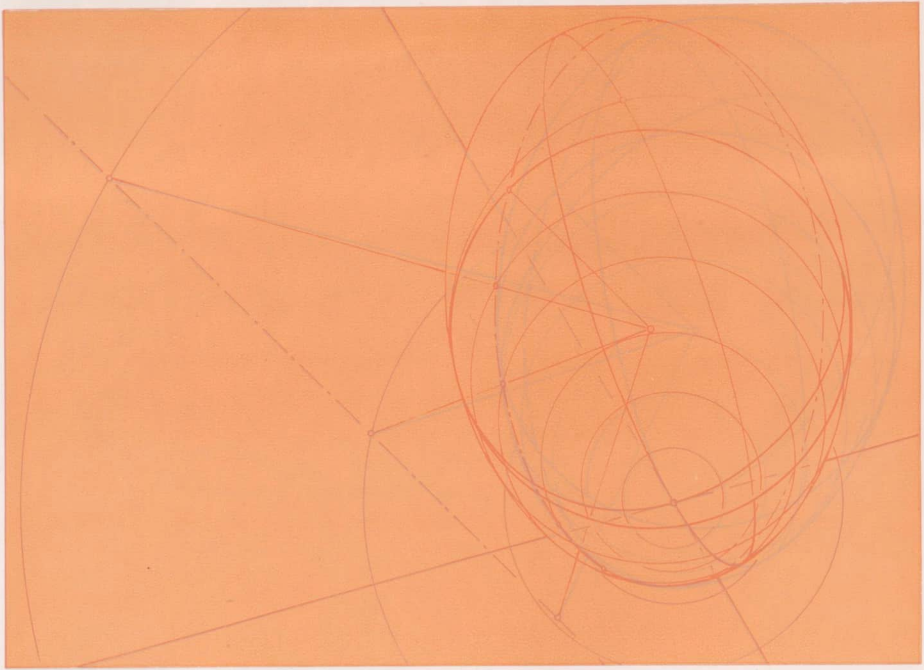
Tafel 32: Zentralperspektivische Abbildung zweier Würfel



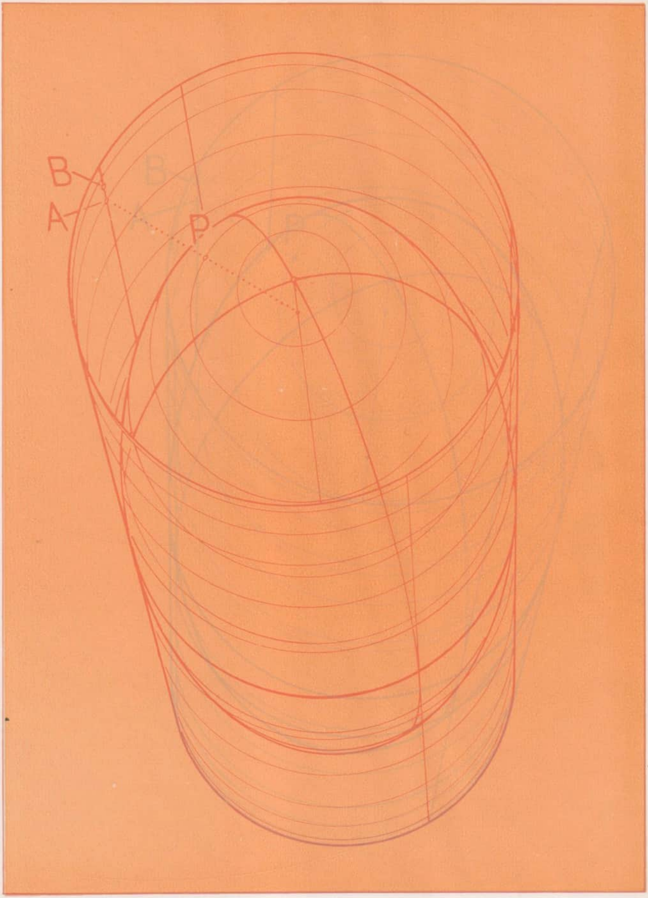
Tafel 33: Zentralperspektivische Abbildung eines Hauses



Tafel 34: Stereographische Kartenprojektion



Tafel 35: Gnomonische Kartenprojektion



Tafel 36: Zylinderprojektion

ANAGLYPHEN ZUR DARSTELLENDEN GEOMETRIE

Dreitafelprojektion · Axonometrie · Zentralperspektive
Kartenprojektion

Entwurf und Ausführung der Raumbilder und Zeichnungen: Dr. Helmut Mucke

Text: Hans Simon

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1967

5. Auflage
Lizenz-Nr.: 203 · 1000/67 (UN)
ES 11 G
Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin
Satz: Oswald Schmidt KG, Leipzig (III/18/65)
Druck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", Bad Langensalza
Redaktionsschluß: 13. 9. 1967
Bestell-Nr.: 00 09 21-5

INHALTSVERZEICHNIS

Grundsätzliche Vorbemerkungen

Dieser Band stellt die Fortsetzung des Bandes „*Anaglyphen zur darstellenden Geometrie – Zweitafelprojektion*" dar. Alles, was bereits dort in den Vorbemerkungen an Grundsätzlichem ausgeführt wurde, gilt sinngemäß auch für diesen vorliegenden Band.

Dem Leser, der sich zum ersten Mal mit Anaglyphen beschäftigt, ist deshalb zu empfehlen, zumindest die einleitenden Ausführungen im ersten Band nachzulesen.

Im zweiten Band wird zunächst die *senkrechte Zweitafelprojektion* auf einige schwierigere Aufgaben angewendet und außerdem zur *Dreitafelprojektion* erweitert. Dann wird die *schiefe Parallelprojektion* abgehandelt. Daran schließt sich die *rechtwinklige Axonometrie* unter besonderer Berücksichtigung der *genormten Isometrie* und *Dimetrie* an. Den Abschluß bildet ein Ausblick auf *zentralperspektivische Konstruktionsverfahren* und einige wichtige *Kartenprojektionen*.

Damit ist in großen Zügen eine Veranschaulichung des Stoffkomplexes erreicht, der in der polytechnischen Oberschule (der zehnklassigen wie der zwölfklassigen) in der darstellenden Geometrie und im Technischen Zeichnen erarbeitet wird und der die Grundlage auch für jede weiterführende oder spezialisierte Zeichnung in der Praxis darstellt.

Auch die Anaglyphen des zweiten Bandes sind nach dem Verfahren der Zentralperspektive konstruiert. Die richtige Lage der Augen zur waagerecht auf den Tisch gelegten Anaglyphentafel ist daher für ein unverzerrtes und genau senkrecht stehendes Raumbild wichtig. Augenhöhe h und Entfernung e bis zum vorderen Rand des Bildes (Abb. 1) betragen bei allen Tafeln des zweiten Bandes (mit Ausnahme der Tafeln 27 und 30, über die an Ort und Stelle Näheres gesagt wird): $h = 30$ cm; $e = 20$ cm.

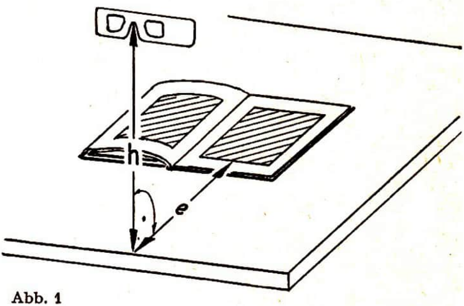


Abb. 1

Für die Schwarz-Weiß-Abbildungen gilt dasselbe, was dazu in den Vorbemerkungen zum ersten Band gesagt wurde: Bei technischen Objekten wurden die Normvorschriften beachtet, bei Abbildungen zur darstellenden Geometrie die hierbei üblichen Zeichenverfahren verwendet. Die Objekte im Raum wurden manchmal durchsichtig, manchmal undurchsichtig angenommen, je nachdem, wie es zur Unterstützung des Raumeindruckes angebracht erschien.

Um den Leser vor dem „Nur-Betrachten" zu bewahren, wurden auch diesmal zu jeder Tafel eine Reihe von Übungen vorgeschlagen, die das Ziel haben, den Beschauer zum verständnisvollen Durcharbeiten der Tafel zu veranlassen. Im Unterricht lassen sie sich in geeigneter Auswahl als Aufgaben verwenden.

So verfolgt auch dieser zweite Band zugleich mehrere Zwecke:

1. Als wertvolles Unterrichtsmittel sollen die Bilder eine Brücke vom realen, meist dreidimensionalen Objekt zur zweidimensionalen Zeichnung schlagen und dadurch die Raumvorstellung unterstützen und bilden helfen.
2. An Hand der Anaglyphen können Zusammenhänge und Begriffe geklärt und Konstruktionsverfahren der Ebene aus dem Raumbild heraus erarbeitet werden.
3. Die Raumbilder können Ausgangspunkt für Konstruktionsaufgaben sein, wie sie auch umgekehrt die aus einer Schwarz-Weiß-Abbildung abgelesene und entstandene Raumvorstellung auf ihre Richtigkeit zu überprüfen erlauben.
4. Im Selbststudium wollen sie Führer und Helfer sein, um eine gewisse Grundlage für das umfangreiche Gebiet der darstellenden Geometrie und des Technischen Zeichnens zu vermitteln. Sie wollen dabei kein Lehrbuch ersetzen, haben aber ihren Zweck erfüllt, wenn sie dem Leser so viel Lust und Interesse an diesem Stoffgebiet abgewinnen, daß er sich anschließend aus eigener Initiative einem der zahlreichen Lehrbücher über diesen Zweig der angewandten Mathematik zuwendet.

Spezielle Bemerkungen zu den einzelnen Tafeln

Tafel 1

In der Tafel 18 des ersten Bandes ist eine Ebene durch ihre Spuren e_1 und e_2 mit einer in ihr liegenden (mit ihr inzidierenden) Geraden g dargestellt. Tafel 1 des zweiten Bandes schließt eng daran an: sie zeigt ebenfalls eine Ebene in allgemeiner Lage mit ihren Spurgeraden e_1 und e_2, die sich auf der Rißachse schneiden. In der Ebene liegt aber diesmal ein Viereck, dessen einer Eckpunkt P besonders markiert ist.

Ein Viereck in einer Ebene ist schon einmal auf Tafel 21 des ersten Bandes zu sehen, wo es beim Schnitt einer Ebene mit einer vierseitigen Pyramide entsteht. Dort hat die Schnittebene aber eine besonders einfache Lage: sie steht senkrecht auf der Aufrißtafel. Infolgedessen ist auch die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt dieses Vierecks durch Umklappen in die Grundrißebene um e_1 sehr einfach. Für einen Punkt P ist das dort besonders gekennzeichnet.

In Tafel 1 des zweiten Bandes ist derselbe Vorgang des Umklappens der Ebene um e_1 ausgeführt. Da e_1 aber diesmal nicht senkrecht zur Rißachse verläuft, ist die Bahn von P beim Umklappen nicht mehr im Aufriß in wahrer Gestalt (als Kreisbogen) zu sehen. Deshalb muß hier ein anderer Weg beschritten werden, um P_0 zu finden: P wird auf die Grundrißtafel nach P' projiziert (punktiert), von P' wird auf e_1 das Lot bis P_{01} gefällt (dünn ausgezogen) und schließlich P_{01} mit P verbunden (strichpunktiert). Das Dreieck $PP'P_{01}$ ist ein (rechtwinkliges) *Stützdreieck* der gegebenen Ebene. Beim Umklappen dieser Ebene um e_1 beschreibt P einen Kreisbogen nach P_0, dessen Radius die Hypotenuse $\overline{PP_{01}}$ des Stützdreiecks ist. Seine Konstruktion ist durch Umklappen des Stützdreiecks um $P'P_{01}$ in die Grundrißtafel möglich; denn $\overline{(P)\,P'} = \overline{PP'}$ ist aus dem Aufriß in wahrer Größe zu entnehmen. Der Kreis mit $P_{01}(P)$ um P_{01} legt schließlich P_0 fest.

Genauso müßte man mit den übrigen Eckpunkten des Vierecks verfahren, um es in wahrer Größe und Gestalt zu erhalten. Man brauchte dazu noch drei weitere Stützdreiecke. Einfacher ist folgender Weg: Wenn man in der gegebenen Ebene die Viereckseiten bis zu den Schnittpunkten mit e_1 verlängert (eine dieser Verlängerungen ist dünn ausgezogen eingezeichnet: PX), so verlaufen auch die Verlängerungen der Viereckseiten im Grundriß jeweils durch dieselben Punkte auf e_1 ($P'X$ gestrichelt). Verfährt man mit allen Seiten des Vierecks so und bedenkt außerdem, daß (infolge des Umklappens) Grundriß und umgeklappter Punkt (z.B. P' und P_0) jeweils auf einer Senkrechten zur Klappachse e_1 liegen müssen, so kann man schneller zum Ziel kommen.

Offenbar besteht also ein geometrischer Zusammenhang zwischen dem Grundriß und der Umklappung einer in einer beliebigen Ebene gelegenen Figur. Man spricht von einer *geometrischen Verwandtschaft*, in diesem Falle von der *perspektiven Affinität*. Die Drehachse der Umklappung (hier e_1) heißt *Affinitätsachse*, die Geraden, welche die einander zugeordneten Punkte (z. B. P' und P_0) miteinander verbinden und die hier senkrecht zur Affinitätsachse verlaufen, heißen *Affinitätsstrahlen*. Mit Hilfe der affinen Verwandtschaft kann man in der Parallelprojektion viele Konstruktionen wesentlich vereinfachen.

Die Umklappung zeigt, daß das in der Ausgangsebene gelegene Viereck ein Quadrat ist.

Übungen:

1. Kopieren Sie das Stützdreieck $P'(P)\,P_{01}$ auf Karton und schneiden Sie es aus! Stützen Sie eine Glasscheibe (oder ein Stück Zelluloid o. ä.) mit der unteren Kante auf e_1, halten Sie mit der Bleistiftspitze P im Raum fest und klappen Sie die durchsichtige Platte bis an P heran! Überzeugen Sie sich, daß das ausgeschnittene Stützdreieck jetzt zur Neigung der Platte paßt, diese also „stützen" kann!
2. Kopieren Sie aus Tafel 1 den Grundriß des Vierecks, die Spurgerade e_1, die Rißachse und die Punkte P_{01} und P_0 auf ein Zeichenblatt aus Transparentpapier! Konstruieren Sie das vollständige umgeklappte Viereck mit Affinitätskonstruktionen und vergleichen Sie das Ergebnis mit Tafel 1!
3. Konstruieren Sie aus der Umklappung und dem Grundriß des Vierecks den Aufriß!

Anleitung:
Sie müssen zu diesem Zweck aus Grundriß und Umklappung die Stützdreiecke konstruieren und aus diesen die für den Aufriß benötigten Strecken entnehmen.
Beispiel: Stützdreieck $P'\ (P)\ P_{01}$ aus $\overline{P_0\,P_{01}} = \overline{(P)\ P_{01}}$ und aus $\overline{P'\,P_{01}}$ konstruieren und daraus $\overline{P'\,(P)} = \overline{P'P}$ entnehmen.

4. Vervollständigen Sie das bei Übung 3 entstandene Grundriß-Aufriß-Bild durch Konstruktion der Aufrißspur e_2 der Ausgangsebene mit Hilfe der Front- oder Höhenlinie durch P! (Vergleichen Sie Ihre Konstruktion mit der *Abbildung* 2!)

Anleitung:
Vergleichen Sie dazu Tafel 19 des ersten Bandes und die dazugehörige Übung 6!

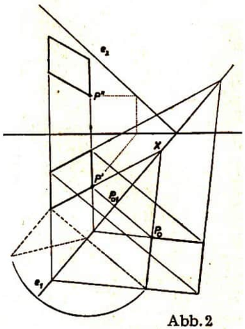


Abb. 2

Tafel 2

Tafel 2 zeigt ein ganz ähnliches Bild wie Tafel 1. Das verwendete Viereck ist aber diesmal ein räumliches, von dem nur drei Punkte in der durch e_1 und e_2 festgelegten Ebene liegen, während sich der vierte Punkt P oberhalb dieser Ebene befindet. Wenn dieser Punkt in den Grundriß und den Aufriß projiziert wird (punktiert), so stoßen die Projektionsstrahlen in D_1 bzw. D_2 durch die gegebene Ebene.

Diese Punkte D_1 und D_2, die nicht zum gegebenen räumlichen Viereck gehören, sind für folgende Überlegungen wichtig:

Da Grundriß und Aufriß den entsprechenden Rissen in Tafel 1 ähneln, könnte man auf den Gedanken kommen, mit Hilfe von Affinitätskonstruktionen die wahre Größe und Gestalt des Vierecks durch Umklappen zu bestimmen. Das Unterfangen ist natürlich sinnlos; denn das diesmal dargestellte „räumliche Viereck" ist ja ein körperliches Gebilde, eine dreiseitige Pyramide, und keine ebene Figur. Davon gibt es aber keine durch Umklappen bestimmbare wahre Größe und Gestalt in Form eines ebenen Vierecks. Die Verlängerung der einen Grundrißseite von P' bis X trifft daher, wie das Raumbild zeigt, in X gar nicht mit der Verlängerung der entsprechenden Viereckseite durch P zusammen, sondern mit der (in der Ebene liegenden) durch D_1 nach X verlaufenden Geraden. Dasselbe trifft auch im Aufriß für $\overline{D_2Y}$ und $\overline{P''Y}$ zu.

Man erkennt also den Trugschluß, wenn man durch formale Anwendung der Affinitätskonstruktion versuchen wollte, mit e_1 bzw. e_2 als Affinitätsachse durch Vermittlung von Schnittpunkten wie X bzw. Y das räumliche Viereck „umzuklappen". Es ist in jedem Falle nötig, sich zunächst das betreffende Gebilde richtig im Raum vorzustellen, um zu entscheiden, ob es eine ebene Vierecksfigur oder eine dreiseitige Pyramide (ein räumliches Viereck) darstellt.

Zur Unterstützung des Raumeindrucks sind im Raumbild der Tafel 2 verschiedene Diagonalen eingezeichnet worden: Erstens die beiden Diagonalen im räumlichen Viereck (eine als Vollinie, eine als Strichlinie). Zweitens die beiden Diagonalen im ebenen Viereck mit dem Eckpunkt D_1 (beide als Vollinien; davon fällt die nicht durch D_1 verlaufende mit der nicht durch P verlaufenden des räumlichen Vierecks zusammen). Schließlich ist eine weitere Verbindung zweier Ecken des räumlichen Vierecks als geknickter Streckenzug teils als Vollinie, teils strichpunktiert nach P gezogen. Die Bedeutung der Diagonalen zur Unterscheidung eines ebenen von einem räumlichen Viereck wurde schon in Übung 3 zu Tafel 8 des ersten Bandes erörtert.

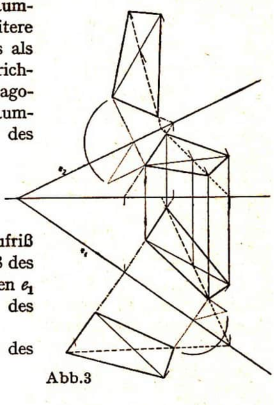


Abb.3

Übungen:

1. Zeichnen Sie ein ebenes Viereck in Grund- und Aufriß mit Hilfe der Diagonalen (Vgl. Übung 5 zu Tafel 8 des ersten Bandes!) und konstruieren Sie die Spuren e_1 und e_2 seiner Ebene (Vgl. Übung 4 zu Tafel 18 des ersten Bandes!)!
2. Konstruieren Sie die wahre Größe und Gestalt des Vierecks der Übung 1
   a) durch Umklappen um e_1,

b) durch Umklappen um e_2
mit Hilfe von Affinitätskonstruktionen!
Überzeugen Sie sich, daß beide umgeklappten Vierecke kongruent sind! (Zeichenkontrolle!) (Abb. 3)

3. Zeichnen Sie entsprechend Übung 1 ein Dreieck ABC in Grund- und Aufriß, die Spuren seiner Ebene e_1 und e_2 und ergänzen Sie das Dreieck durch einen vierten Punkt P zu einem räumlichen Viereck! (Diagonalenkontrolle!)
4. Konstruieren Sie entsprechend Übung 2 die wahre Größe und Gestalt des Dreiecks ABC der Übung 3 auf doppelte Weise und überzeugen Sie sich von der Kongruenz beider Figuren!
5. Versuchen Sie, die bei Übung 4 erhaltene Zeichnung zu ergänzen, indem Sie den vierten, nicht in dieser Ebene liegenden Eckpunkt P des räumlichen Vierecks der Übung 3 durch zwei Affinitätskonstruktionen in Aufrißtafel und Grundrißtafel „umzuklappen" suchen! Überzeugen Sie sich, daß das nicht geht! (Die beiden entstandenen Vierecke sind nicht kongruent.)

Tafel 3

Tafel 1 zeigte, daß vier Punkte in einer Ebene liegen können und dann ein ebenes Viereck bestimmen. Anders ausgedrückt: Vier Punkte lassen sich durch eine einzige Ebene untereinander verbinden.

In Tafel 2 waren im Gegensatz dazu vier Punkte im Raum so angeordnet, daß sie durch vier Ebenen untereinander verbunden werden können, da sie in diesem Fall eine Pyramide (ein räumliches Viereck) festlegen.

Tafel 3 zeigt, daß vier Punkte im Raum schließlich auch durch eine gekrümmte Fläche verbunden werden können. Im Raumbild ist eine sogenannte „Regelfläche" als Beispiel dargestellt. Darunter versteht man eine gekrümmte Fläche, auf der gewisse Scharen von Geraden liegen (Kegel und Zylinder sind einfache Beispiele dafür).

Auf der in Tafel 3 dargestellten Fläche liegen zwei Scharen von Geraden, von denen einige eingezeichnet worden sind. Zur Unterstützung der Raumvorstellung wurden noch die gegenüberliegenden Eckpunkte geradlinig verbunden. Diese Geraden sind keine echten Diagonalen, d.h., sie liegen nicht in der (gekrümmten) Fläche. Die obere Verbindungsgerade ist gestrichelt, die untere strichpunktiert gezeichnet.

Übungen:

1. Halten Sie im Raumbild der Tafel 3 ein Drahtstück (eine Stricknadel) nacheinander an die Stelle der eingezeichneten Geraden jeder der beiden Scharen und beobachten Sie, wie sich das Drahtstück beim Weiterrücken dreht!
2. Halten Sie das Drahtstück in Richtung der beiden Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Eckpunkte!
3. Nehmen Sie zwei Drahtstücke und halten Sie
   a) beide wie in Übung 1,

b) beide wie in Übung 2,

c) eins wie in Übung 1, das andere wie in Übung 2!

Beobachten Sie den Verlauf im Raum! Gibt es Lagen, wo sie einander schneiden? (Meist liegen sie windschief zueinander. Vgl. mit den Tafeln 7 und 8 des ersten Bandes!)

Tafeln 4, 5, 6

Diese drei Tafeln gehören eng zusammen. Sie sollen die verschiedenen Formen der Figuren erläutern, die beim Schnitt eines (geraden) Kreiskegels mit einer Ebene je nach deren Neigung gegen die Kegelachse entstehen können. Der Parabelfall ist im ersten Band auf Tafel 23 bereits einmal dargestellt worden. Jetzt wird aber nicht nur wie dort die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfiguren durch Umklappen der Schnittebenen gezeigt, sondern darüber hinaus die Lage und Bedeutung der *Dandelinschen*[1] *Kugeln* veranschaulicht. Das sind Kugeln, die so in den Kegel gelegt werden, daß sie seinen Mantel längs einer Kreislinie und außerdem die Schnittebene in einem Punkt berühren. Diese Kugeln dienen dazu, aus dem räumlichen Gebilde Eigenschaften der Schnittfiguren zu gewinnen, die – losgelöst vom Raum – in der Ebene zur Definition der Kegelschnitte als geometrische Örter dienen können. Im einzelnen zeigen die Tafeln folgendes:

Tafel 4

Die Schnittebene liegt parallel zu einer Kegelmantellinie. Die Schnittfigur ist eine Parabel. Bei dieser Ebenenlage läßt sich nur eine einzige Dandelinkugel einbauen.

Da die Berührungspunkte der Dandelinkugeln auf der Schnittebene die Brennpunkte des jeweiligen Kegelschnitts sind, hat die Parabel nur einen einzigen Brennpunkt F. Eine beliebige Kegelmantellinie (punktiert) schneidet die Parabel in P und den Berührungskreis der Kugel mit dem Kegelmantel (Strichlinie) in U. Der Punkt P ist mit F verbunden, und von P ist auf die Leitlinie l das Lot (bis L) gefällt worden.

Die Leitlinie erhält man, wenn man die Ebene des Berührungskreises (durch einen strichpunktierten Kreisbogen gekennzeichnet) bis zur Schnittebene erweitert und mit dieser zum Schnitt bringt. Es läßt sich zeigen, daß unabhängig von der Lage der Kegelmantellinie jedesmal gilt: $\overline{PF} = \overline{PU} = \overline{PL}$. Denn $\overline{PF}$ und $\overline{PU}$ sind Tangentenabschnitte von ein und demselben Punkt P an dieselbe Kugel, und $\overline{PU}$ und $\overline{PL}$ sind gleich geneigte Strecken von P bis zur gleichen waagerechten Ebene des Berührungskreises. Damit ergibt sich die

Ortsdefinition der Parabel:

Eine Parabel ist der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden, der Leitlinie, jeweils gleich weit entfernt sind.

[1] G. P. Dandelin (gesprochen: Dangdeläng), belgischer Mathematiker (1794–1847).

In der Anaglyphentafel ist neben dem Raumbild Grundriß und Aufriß eingezeichnet, von der Umklappung (die in Tafel 23 des ersten Bandes enthalten ist) wurde abgesehen.

Übungen:

1. Halten Sie eine Glasplatte, eine Zelluloidtafel o. ä. wie die Schnittebene in den Raum, die Bleistiftspitze erst an die Stelle der Kegelspitze, dann an die Stelle des Brennpunktes und schließlich den Bleistift an die Stelle der Leitlinie! Überzeugen Sie sich auf diese Weise, daß Brennpunkt und Leitlinie in der Schnittebene liegen! Umfahren Sie schließlich mit der Bleistiftspitze die Schnittparabel in der Schnittebene!
2. Zeichnen Sie in Grundriß und Aufriß einen auf der Grundrißebene stehenden geraden Kreiskegel und eine Ebene parallel zu einer Mantellinie, die den Kegel schneidet und senkrecht zur Aufrißebene verläuft! Konstruieren Sie die Schnittparabel in Grundriß und Aufriß und schließlich in wahrer Größe und Gestalt durch Umklappen der Schnittebene um ihre Grundrißspur e_1 (vgl. Tafel 23 des ersten Bandes)!
3. Zeichnen Sie das in Übung 2 verlangte Bild noch einmal unter der Voraussetzung, daß die Schnittebene nicht mehr senkrecht zur Aufrißtafel verläuft! Vergleichen Sie hierzu die *Abbildung 4*!

Anleitung:

Um eine zu einer Mantellinie parallele Ebene in beliebiger Neigung zu den Tafeln zu erhalten, konstruieren Sie erst die Spurgeraden einer Hilfsebene, die die betreffende Mantellinie selbst enthält. Daraus erhalten Sie durch Parallelverschieben leicht die verlangte Schnittebene mit ihren Spuren e_1 und e_2.

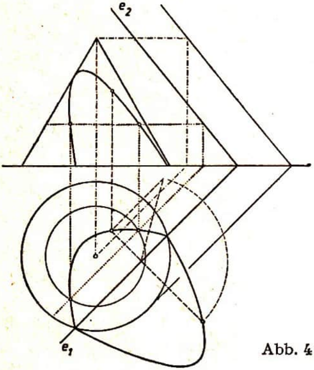


Abb. 4

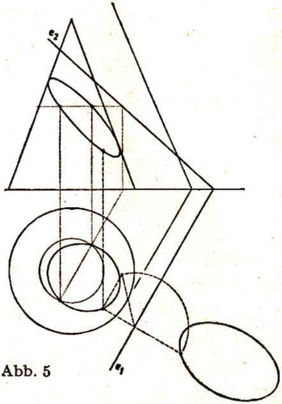


Abb. 5

Tafel 5

Die Schnittebene verläuft hier unter einem größeren Neigungswinkel zur Kegelachse als die Mantellinien. Die Schnittfigur ist eine Ellipse. Es gibt zwei Dandelinkugeln, also auch zwei Brennpunkte F_1 und F_2. Eine beliebige Mantellinie (punktiert) schneidet die Ellipse in P und die Berührungskreise (Strichlinien) in U_1 und U_2. Der Punkt P ist mit F_1 und F_2 verbunden. Es läßt sich zeigen, daß gilt:

$$\overline{PU_1} = \overline{PF_1}; \quad \overline{PU_2} = \overline{PF_2}; \quad \overline{PU_1} + \overline{PU_2} = \overline{U_1U_2} = \text{const.} = 2a.$$

Daraus ergibt sich die

Ortsdefinition der Ellipse:

Eine Ellipse ist der geometrische Ort für alle Punkte, die eine konstante Abstandssumme von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) haben.

In der Anaglyphentafel sind neben dem Raumbild wieder Grundriß und Aufriß eingezeichnet worden, diesmal aber auch noch die Umklappung. Die zwei Leitlinien l_1 und l_2 sind auf diesem Bild aber nicht mit eingetragen worden. Sie lassen sich jedoch mit Hilfe des Aufrisses der (gestrichelten) Berührungskreise leicht ergänzen. Zunächst haben sie für die Definition nicht die Bedeutung wie bei der Parabel.

Übungen:

1. Begründen Sie die Beziehungen
$$\overline{PU_1} = \overline{PF_1}; \quad \overline{PU_2} = \overline{PF_2}; \quad \overline{PU_1} + \overline{PU_2} = \overline{U_1U_2} = \text{const.} = 2a!$$
Welche Strecke am Kegel ist $2a$?
2. Warum gibt es bei der Ellipse zwei Leitlinien l_1 und l_2? Wodurch entstehen sie am Kegel?
3. Siehe Übung 1 zu Tafel 4 (unter Auslassen der Leitlinie)!
4. Siehe Übung 2 zu Tafel 4!
5. Siehe Übung 3 zu Tafel 4 (Abb. 5)!

Anleitung:

Zeichnen Sie zuerst die Spuren einer Hilfsebene, die parallel zu einer Mantellinie verläuft, und kippen Sie dann diese Ebene um ihre Grundrißspur, bis sie die gewünschte Neigung hat!

Tafel 6

Die Schnittebene verläuft jetzt unter einem kleineren Neigungswinkel zur Kegelachse als die Mantellinien. Die Schnittfigur ist eine Hyperbel. Um beide Äste zu erhalten, muß man mit einem Doppelkegel arbeiten. Im übrigen enthält das Raumbild die gleichen Elemente wie das der Tafel 5. Nur die Kegelmantellinie (mit P, U_1, U_2)

wurde weggelassen, dafür sind in der Umklappung die Asymptoten der Hyperbel mit eingezeichnet worden, und zur besseren Veranschaulichung wurde diesmal auch noch der Aufriß in die Grundrißtafel umgelegt.

Um die Ortsdefinition der Hyperbel zu bekommen, müßte man sich die fehlende Mantellinie mit P, U_1 und U_2 ergänzt und P mit F_1 und mit F_2 verbunden denken.

Dann gilt:

$$\overline{PU_1} = \overline{PF_1};\quad \overline{PU_2} = \overline{PF_2};\quad \overline{PU_1} - \overline{PU_2} = \overline{U_1U_2} = \text{const.} = 2a.$$

Daraus folgt als

Ortsdefinition der Hyperbel:

> ***Eine Hyperbel ist der geometrische Ort für alle Punkte, die eine konstante Abstandsdifferenz von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) haben.***

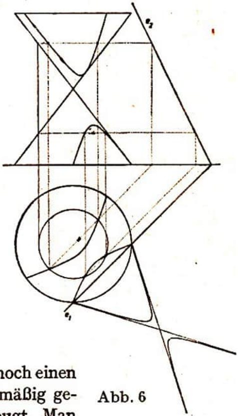


Abb. 6

Übungen:

1. Siehe Übung 1 zu Tafel 5 unter Beachtung der Differenzbildung!
2. Siehe Übung 3 zu Tafel 5!
3. Siehe Übung 4 zu Tafel 5!
4. Siehe Übung 5 zu Tafel 5 (Abb. 6)!

Tafel 7

Mitunter ist es zweckmäßig, dem Grundriß und Aufriß noch einen dritten Riß beizufügen, den man auf irgendeiner zweckmäßig gewählten dritten Tafel durch Orthogonalprojektion erzeugt. Man spricht dann von einem *Seitenriß*. Wählt man – was meist geschieht – diese dritte Tafel senkrecht zur Grundriß- und Aufrißtafel, so daß alle drei eine Art Zimmerecke bilden, so nennt man den dritten Riß *Kreuzriß*. Seitenrisse und Kreuzrisse pflegt man durch Symbole mit drei Strichen (A''', c''' ... gelesen: A-Drei-Strich, c-Drei-Strich) zu kennzeichnen. Der Erarbeitung dieser wichtigen Erweiterung des Zweitafelverfahrens zum Dreitafelverfahren dienen die Tafeln 7, 8 und 9.

Auf Tafel 7 ist ein Dreieck im Grundriß, Aufriß und Kreuzriß dargestellt, wobei die Kreuzrißtafel vom Beschauer aus rechts angesetzt wurde (man könnte das ebensogut links tun). Ein Eckpunkt P ist besonders markiert. Man erkennt, daß die Projektionsstrahlen PP', PP'', PP''' (punktiert) zusammen mit den Projektionen dieser Strecken (den Ordnungslinien von P) einen Quader bilden. Um jetzt alle drei Risse in einer Ebene zeichnerisch darstellen zu können, muß man zwei der Rißtafeln in die Ebene der dritten umlegen. Dazu muß die aus den drei Projektionstafeln bestehende räumliche Ecke längs einer ihrer Kanten „aufgetrennt" werden. Im Anaglyphenbild ist das an der Kante zwischen Aufriß- und Kreuzrißtafel geschehen, und alle Rißtafeln sind in die Ebene der Grundrißtafel umgelegt worden. Die drei Tafeln liegen dann so, wie es *Abbildung 7* zeigt. Die Ordnungslinie $P'P''$ schneidet die eine Rißachse in P_{12} (gelesen: P-eins-zwei), die Ordnungslinie $P'P'''$ die zweite Rißachse in P_{13}. Die dritte Ordnungslinie $P''P'''$ ist durch das Aufschneiden und Umlegen bei P_{23} unterbrochen worden, so daß die Rißachse zwischen Aufriß und Kreuzriß und damit auch der Punkt P_{23} zweimal vorhanden sind. Die Tafel zeigt anschaulich, daß die beiden Punkte P_{23} durch einen Viertelkreisbogen um den gemeinsamen Achsenschnittpunkt verbunden werden können (Abb. 7). Dadurch erkennt man zugleich, daß schon durch zwei der drei Risse, etwa P' und P'', die Lage des Punktes P im Raum nach wie vor eindeutig bestimmt ist (vgl. Tafel 5 des ersten Bandes), und daß durch diese beiden auch der dritte Riß, z.B. P''', eindeutig festgelegt ist. Er läßt sich also stets aus den beiden anderen konstruktiv gewinnen.

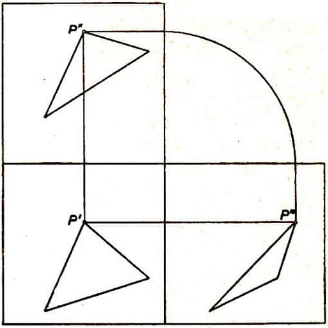


Abb. 7

Statt die räumliche Ecke längs der Rißachse zwischen Aufriß und Kreuzriß aufzutrennen, hätte man das auch längs der Rißachse zwischen Grundriß und Kreuzriß tun können. Dann wären auf dem Zeichenblatt die Risse in einer Anordnung entstanden, die die *Abbildung 8* zeigt. Der Verlauf der Ordnungslinien bei dieser Lage ist ebenfalls aus *Abbildung 8* zu erkennen. In der Praxis wird meist diese letzte Anordnung der drei Risse gewählt.

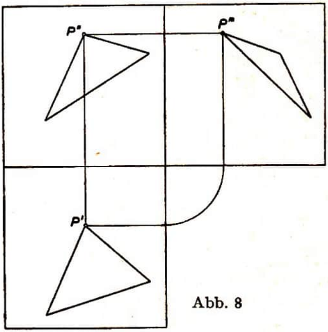


Abb. 8

Übungen:

1. Falten Sie ein rechteckiges Blatt Zelluloid in der Mitte und stellen Sie es so auf die Anaglyphentafel, daß die beiden Hälften mit Aufriß- und Kreuzrißtafel zusammenfallen! Verfolgen Sie mit der Bleistiftspitze die Projektionsstrahlen PP', PP'', PP'''! Markieren Sie P'' und P'''! Verfolgen Sie auch die (geknickten) Ordnungslinien mit der Bleistiftspitze!

2. Zeichnen Sie Grundriß und Aufriß ein und desselben Dreiecks auf zwei getrennten Zeichenblättern (Transparentpapier)! Konstruieren Sie den Kreuzriß, wenn dieser

   a) rechts neben dem Grundriß, b) rechts neben dem Aufriß liegt!

   Überzeugen Sie sich durch Aufeinanderlegen und Betrachten in durchscheinendem Licht von der Kongruenz der beiden Kreuzrisse des Dreiecks!
3. Zeichnen Sie ein ebenes Viereck in Grundriß und Kreuzriß! Wohin legen Sie in diesem Falle den Kreuzriß? Konstruieren Sie dazu den Aufriß!
4. Zeichnen Sie das ebene Viereck der Übung 3 nochmals für den Fall, daß Sie von Aufriß und Kreuzriß ausgehen! Wohin legen Sie diesmal den Kreuzriß?

Tafel 8

Auf dieser Tafel ist ein Werkstück (ein Gelenk), im Grundriß (Draufsicht), Aufriß (Vorderansicht) und Kreuzriß (Seitenansicht) dargestellt. Aufriß und Kreuzriß sind wieder in die Grundebene umgelegt worden. Die Rißtafeln sind diesmal nicht begrenzt, lediglich die Schnittachsen (die Rißachsen) sind angegeben worden. Außerdem wurde von Hilfslinien und Bezeichnungen abgesehen. In diesem Falle ist es gleichgültig, ob Sie den vom Beschauer aus links stehenden Riß als Aufriß und den rechts stehenden als Kreuzriß ansehen oder umgekehrt. Im ersten Fall stellt der Kreuzriß eine Ansicht von links dar und liegt im Zeichenblatt rechts von den anderen Rissen. Im zweiten Fall bedeutet der Kreuzriß eine Ansicht von rechts und liegt links neben den beiden anderen Rissen. Man erkennt, daß beide Deutungen völlig gleichwertig sind.

Übungen:

1. Übertragen Sie aus der Anaglyphentafel den Grundriß und den rechten Riß als Aufriß auf ein Zeichenblatt! Konstruieren Sie einen Kreuzriß als Ansicht von links so, daß er rechts neben den Aufriß zu liegen kommt (Abb. 9)!
2. Gehen Sie in einer zweiten Konstruktion von Grundriß und linkem Riß als Aufriß aus und konstruieren Sie einen Kreuzriß als Ansicht von rechts, den Sie links neben den Aufriß legen!

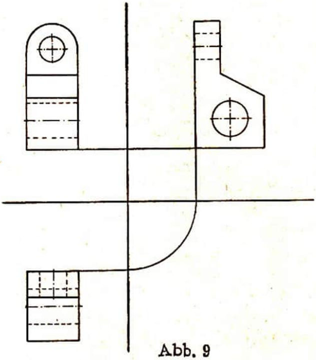


Abb. 9

Tafel 9

Wenn eben an Hand von Tafel 8 gezeigt wurde, daß Aufriß und Kreuzriß in ihrer Deutung vertauschbar, also in gewissem Sinne gleichwertig sind, so trifft das im Hinblick auf die Anschaulichkeit der Rißbilder nicht immer zu. Besonders deutlich wird das bei dem auf Tafel 9 dargestellten schiefen Prisma, einem Rhomboeder, das von 6 kongruenten Rhomben begrenzt wird. Bei der gewählten Lage zu den Rißtafeln ergeben der Grundriß und der als Aufriß gedachte rechts vom Beschauer liegende Riß sehr unanschauliche Bilder, während der links angesetzte Kreuzriß ein gutes Anschauungsbild zeigt. Die bessere Anschaulichkeit ist oft der Grund, weswegen man Grund- und Aufriß durch einen dritten Riß ergänzt.

Übungen:

1. Nehmen Sie einen Würfel in einfacher Lage (alle Kanten senkrecht oder parallel zu den Rißtafeln) an! Würde ein Kreuzriß Vorteile in bezug auf die Anschaulichkeit haben?
2. Ein sechsseitiges regelmäßiges Prisma steht so auf der Grundrißtafel, daß zwei gegenüberliegende Seitenflächen senkrecht zur Aufrißtafel verlaufen, und trägt eine Pyramide als „Dach". Zeichnen Sie den Körper in Grund- und Aufriß und konstruieren Sie einen Kreuzriß! Ist dieser anschaulicher als der Aufriß?
3. Konstruieren Sie zu dem in *Abbildung 10* in Grund- und Aufriß dargestellten Gebäude einen Kreuzriß! Die bessere Anschaulichkeit dieses dritten Risses ist offensichtlich.

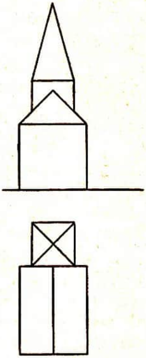


Abb. 10

Tafel 10

Die Tafel 9 zeigte, daß ein wesentlicher Zweck für die Konstruktion eines Kreuzrisses der sein kann, ein anschaulicheres Bild des Körpers zu erhalten als es z.B. der Aufriß darstellt. Das ist dadurch bedingt, daß der Körper zur Kreuzrißtafel eine andere Lage als zur Aufrißtafel hat.

Dasselbe kann man unter Verzicht auf einen dritten Riß auch nur durch Grund- und Aufriß erreichen, wenn man den Körper durch Drehen in eine günstigere Lage bringt. Das veranschaulicht Tafel 10 an einem Würfel.

Der Würfel befindet sich zunächst in einer solchen einfachen Lage I zu den Rißtafeln, daß Grundriß I′ und Aufriß I″ verhältnismäßig unanschaulich sind. Das ist in *Abbildung 11* noch einmal dargestellt. Jetzt wird der Würfel um eine senkrecht zur Aufrißtafel verlaufende willkürlich gewählte Achse in die Lage II gedreht (Drehpunkt *D*). Dadurch dreht sich auch der Aufriß I″ in die neue Lage II″, ohne seine Gestalt zu ändern. Die einzelnen Eckpunkte des Körpers bewegen sich dabei auf Kreisbögen, die parallel zur Aufrißtafel verlaufen und deshalb im Aufriß ebenfalls

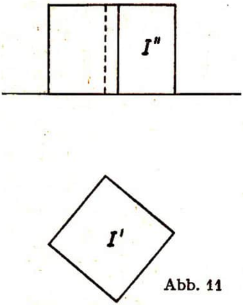


Abb. 11

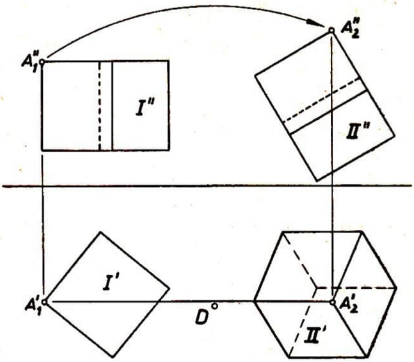


Abb. 12

als Kreisbögen erscheinen. Im Grundriß bilden sich die Bahnen als Parallelen zur Rißachse ab. Dadurch ist es möglich, zu II'' mit Hilfe der Ordnungslinien auch II' zu konstruieren. II' ist aber wesentlich anschaulicher als I', I'' oder II''. Die *Abbildung 12* zeigt nochmals den Konstruktionsweg.

Im Raumbild sind die Aufrisse *I''* und *II''* auch umgelegt dargestellt worden. Dagegen fehlen Kreuzrisse völlig, da sie bei diesem Verfahren nicht erforderlich sind.

Sollte die Drehung des Körpers um eine Achse noch nicht zu einem hinreichend anschaulichen Bild führen, kann man eine zweite Drehung um eine Achse, die jetzt senkrecht zur anderen Rißtafel verläuft, anschließen. So kann man fortfahren, bis ein Riß von hinreichender Anschaulichkeit entstanden ist.

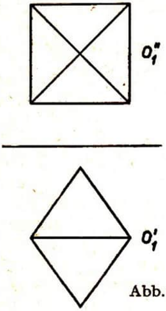


Abb. 13

Übungen:

1. Konstruieren Sie *Abbildung 12* selbständig! Beschriften Sie dabei alle Eckpunkte ($A_1' \dots H_1'$; $A_1'' \dots H_1''$ bei I; $A_2' \dots H_2'$; $A_2'' \dots H_2''$ bei II) und verfolgen Sie genau, wie $A_2'' \dots H_2''$ aus $A_1'' \dots H_1''$ und wie $A_2' \dots H_2'$ aus $A_1' \dots H_1'$ und $A_2'' \dots H_2''$ entstehen!
2. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß eines Oktaeders (vgl. dazu Tafel 12 des ersten Bandes) in der in *Abbildung 13* wiedergegebenen einfachen Lage O_1! Wie liegt es zu den Rißtafeln? Beschriften Sie alle Ecken ($A_1' \dots$; $A_1'' \dots$)!
3. Drehen Sie das Oktaeder aus Übung 2 um eine zur Aufrißtafel senkrechte Achse um einen Winkel α ($\alpha < 45°$) in eine Lage O_2!

4. Drehen Sie das Oktaeder aus Übung 3 um eine zur Grundrißtafel senkrechte Achse um einen geeigneten Winkel in eine Lage O_3, so daß der Aufriß O_3'' dem in *Abbildung 14* wiedergegebenen ähnelt!

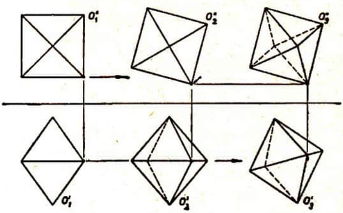


Abb. 14

Tafel 11

Technische Objekte bestehen oft aus mehreren geometrischen Körpern, die sich gegenseitig durchdringen (z. B. zwei Prismen oder Prisma und Pyramide oder mehrere Zylinder). Dabei ist vor allem die exakte Konstruktion der gemeinsamen Durchdringungslinie im Grund- und Aufriß (der Naht- oder Schweißlinie am Werkstück) wichtig. Der Darlegung der dafür erforderlichen Konstruktionsverfahren dienen die Tafeln 11 bis 14.

Die Durchdringungslinie kann grundsätzlich auf zwei verschiedenen Wegen konstruktiv ermittelt werden:

a) Man konstruiert einzelne ihrer Punkte als Durchstoßpunkte von Geraden des einen Körpers (z. B. der Kanten) durch die Flächen des anderen Körpers. In diesem Falle spricht man vom *Kantenverfahren*. Es wird in Tafel 11 erläutert.

b) Man bestimmt einzelne Stücke der Durchdringungslinie, indem man die gemeinsame Schnittlinie der Flächen des ersten Körpers mit den Flächen des zweiten Körpers konstruiert. In diesem Falle spricht man vom *Flächenverfahren*. Es wird in Tafel 12 dargestellt.

In Tafel 11 wird das *Kantenverfahren* am gegenseitigen Durchdringen eines Vierecks mit einem Dreieck gezeigt. Dabei wird der eine Endpunkt P der Durchdringungsstrecke als Durchstoßpunkt der einen Dreieckseite durch die Viereckfläche bestimmt. Diese Konstruktion ist als Übung 1 und 2 zu Tafel 20 des ersten Bandes ausgeführt worden und außerdem dort an Hand der *Abbildung 26* beschrieben. Das Wesentliche ist die Verwendung einer senkrecht zu einer der Rißtafeln verlaufenden *Hilfsebene*, in der die durchstoßende Gerade verläuft. In Tafel 11 ist die Hilfsebene senkrecht zur Grundrißtafel angenommen worden, sie schneidet das Viereck in der strichpunktiert eingezeichneten Strecke EF. Von diesen Punkten sind die Grundrisse E' und F' durch den Grundriß der durchstoßenden Geraden auf dem Umriß des Vierecks sofort festgelegt. (Betrachten Sie dazu

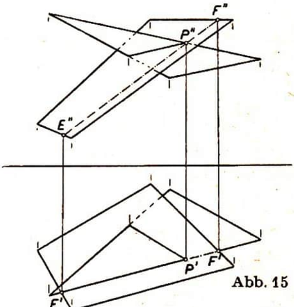


Abb. 15

die *Abbildung 15* und das Anaglyphenbild gemeinsam!) Von hier aus führen die Ordnungslinien zu E'' und F''. Der strichpunktierte Aufriß der Schnittgeraden der Hilfsebene mit dem Viereck ($E''F''$) ergibt als Schnittpunkt mit dem Aufriß der durchstoßenden Dreieckseite den Aufriß P'' des gesuchten Durchstoßpunktes. Durch die Ordnungslinie ist auch P' festgelegt.

Verfährt man genauso mit der zweiten durchstoßenden Dreieckseite, so ist durch beide Durchstoßpunkte die Durchdringungsstrecke von Dreieck und Viereck (im Anaglyphenbild als Vollinie gezeichnet) bestimmt.

Die Anwendung des Kantenverfahrens erfordert insofern eine gute Raumvorstellung, als man durch Vorüberlegung feststellen möchte, welche Kanten welches Körpers Flächen des andern Körpers durchstoßen. Sonst sind unnötige Konstruktionen die Folge, bei denen „theoretische" Durchstoßpunkte außerhalb der Flächen des anderen Gebildes entstehen.

Übungen:

1. Halten Sie eine Zelluloidplatte o.ä. erst in die Lage der Viereckebene, dann in die der Dreiecksebene, und markieren Sie darauf die Ecken von Viereck und Dreieck sowie die Durchdringungsstrecke! Schneiden Sie nach dieser Vorlage Viereck und Dreieck möglichst maßgerecht aus und stecken Sie beide so ineinander, wie es die Durchdringung verlangt! Halten Sie das Modell zur Überprüfung in das Raumbild!
2. Entnehmen Sie aus der Anaglyphentafel 11 maßgerecht Grundrisse und umgelegte Aufrisse von Dreieck und Viereck sowie die Rißachse! Konstruieren Sie die Durchdringungsstrecke nach dem Kantenverfahren und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Anaglyphenbild! (Am besten auf Transparentpapier arbeiten!)

Tafel 12

Auch auf dieser Tafel ist die Durchdringung eines Dreiecks mit einem Viereck dargestellt, doch ist die Lage der beiden Figuren etwas anders als in Tafel 11. Wenn man die Durchdringungsstrecke nach dem Kantenverfahren ermitteln wollte, müßte man diesmal den Durchstoßpunkt einer Dreieckseite durch das Viereck und den einer Viereckseite durch das Dreieck konstruieren. Auf Tafel 12 ist aber das *Flächenverfahren* dargestellt. Nach diesem bestimmt man die Schnittlinie s der Ebene e, in der das Dreieck liegt, mit der Ebene E, in der das Viereck liegt, mit Hilfe der Spurgeraden e_1, e_2, E_1, E_2. Der Konstruktionsgang ist auf Tafel 20 des ersten Bandes im Raumbild zu sehen und im Text an Hand der dortigen *Abbildung 24* erläutert.

Voraussetzung für die Konstruktion der Schnittgeraden der beiden Ebenen sind die Spurgeraden. Sie müssen zunächst aus den Rissen des Dreiecks bzw. des Vierecks konstruiert werden. Der normale Lösungsweg mit Hilfe der Spurpunkte zweier Vieleckseiten wurde in Übung 4 zu Tafel 18 des ersten Bandes beschrieben. Man kann aber auch folgendermaßen zum Ziel kommen:

Man legt durch einen Eckpunkt des Vielecks eine Höhenlinie und sucht dazu einen solchen aus, daß der Aufriß der Höhenlinie den Aufriß einer Vieleckseite schneidet (in *Abbildung 16:* A''; zweiter Schnittpunkt B''). Durch A' und B' ist der Grundriß der Höhenlinie festgelegt, der zur Grundrißspur e_1 parallel liegt. Genauso verfährt man mit einer Frontlinie durch einen geeigneten Grundrißpunkt (in *Abbildung 16:* C'; zweiter Schnittpunkt D'). $C''D''$ legt die Richtung der Aufrißspur e_2 fest.

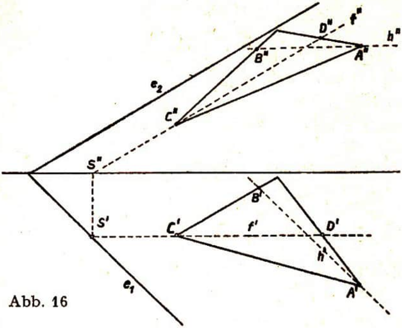


Abb. 16

Nunmehr ist es nur noch nötig, durch irgendeinen Spurpunkt (in *Abbildung 16:* S) die Lage der einen Spurgeraden zu ermitteln; dann kann man auch die andere einzeichnen.

Im Anaglyphenbild der Tafel 12 sind die Spuren e_1, e_2, E_1, E_2 ohne Angabe der Konstruktionswege eingezeichnet worden. Daraus ergibt sich die Schnittgerade s in Grund- und Aufriß, und auf ihr schneiden die Vieleckseiten das als Durchdringungsstrecke in Frage kommende Stück aus. Im Raumbild ist der Aufriß nicht umgelegt worden.

Übungen:

1. Siehe Übung 1 zu Tafel 11, angewendet auf Tafel 12!
2. Entnehmen Sie aus der Anaglyphentafel 11 maßgerecht Grundrisse und umgelegte Aufrisse der beiden Vielecke sowie die Rißachse! Konstruieren Sie (wieder auf Transparentpapier) die Durchdringungsstrecke nach dem Flächenverfahren und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Anaglyphenbild!
3. Wählen Sie Grundriß und Aufriß eines Dreiecks und eines Vierecks etwa so, wie es Tafel 12 zeigt, und konstruieren Sie die Durchdringung
   a) nach dem Kantenverfahren,
   b) nach dem Flächenverfahren
   in zwei getrennten Zeichnungen auf Transparentpapier! Vergleichen Sie beide durch Aufeinanderlegen und Betrachten in durchscheinendem Licht!

Tafel 13

Das Raumbild zeigt die Durchdringung eines quadratischen Pyramidenstumpfes mit einem quadratischen Prisma. Neben Grundriß und Aufriß ist diesmal auch ein Kreuzriß angegeben. Im Raumbild sind die Körper undurchsichtig angenommen

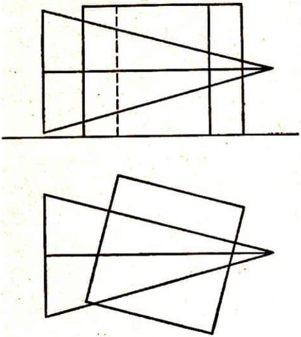


Abb. 17

worden, so daß auch im Aufriß und Kreuzriß keine unsichtbaren Körperkanten eingezeichnet sind. Erst in den Umlegungen dieser beiden Risse sowie im Grundriß sind die unsichtbaren Kanten (als Strichlinien) eingetragen worden.

Übungen:

1. Entnehmen Sie maßgerecht aus dem Anaglyphenbild 13 für Pyramidenstumpf und Prisma den Grundriß und den rechts vom Beschauer liegenden Riß als Aufriß (ohne die Durchdringungslinien) sowie die Rißachse!
   Konstruieren Sie
   a) die Durchdringungslinien,
   b) den Kreuzriß!
   Vergleichen Sie beides nach der Konstruktion mit dem Anaglyphenbild! (Transparentpapier verwenden!)
2. Konstruieren Sie die Durchdringung eines Würfels mit einer quadratischen Pyramide nach dem Kantenverfahren im Grund- und Aufriß bei einer Lage, wie sie *Abbildung 17* zeigt!
3. Konstruieren Sie zur Durchdringung aus Übung 2 einen Kreuzriß! Ist die Ansicht von rechts oder die von links anschaulicher?

Tafel 14

Diese Tafel entspricht in ihrer Anlage der Tafel 13. Diesmal wird eine Rohrverbindung gezeigt, die als Durchdringung dreier Kreiszylinder aufgefaßt werden kann. Die Punkte der Durchdringungslinien müssen größtenteils punktweise konstruiert werden. Dabei kommt nur das Kantenverfahren in Frage. Als durchstoßende „Kanten" dienen dabei geeignete Zylindermantellinien. Ein solcher Punkt ist durch einen kleinen Kreis besonders markiert. Die Konstruktion seiner Risse ist aus der *Abbildung 18* ersichtlich. Die Begrenzungslinien der Rohrenden erscheinen in den Rissen als Kreise, Ellipsen oder Strecken. Bei ihnen ist die Konstruktion leicht ersichtlich. Ein Punkt ist durch ein kleines Dreieck besonders markiert.

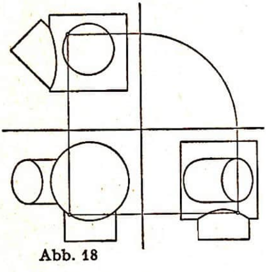


Abb. 18

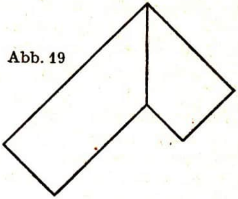
Übungen:

1. Entnehmen Sie der Anaglyphentafel 14 maßgerecht die gegenseitige Lage der Zylinder und

ihre Durchmesser! Konstruieren Sie im Grund- und Aufriß die Begrenzungslinien der Zylinder und die Durchdringungslinien! Vergleichen Sie ihr Konstruktionsergebnis mit dem Anaglyphenbild sowie mit der *Abbildung 18*! (Transparentpapier verwenden!)

2. Konstruieren Sie zum Zweitafelbild der Übung 1 einen Kreuzriß!
3. Ein rechtwinkliges Rohrknie mit schräger Schweißnaht ist bei der in *Abbildung 19* wiedergegebenen Lage des Aufrisses im Grundriß, Aufriß und Kreuzriß darzustellen.

Abb. 19



Tafel 15

Wenn körperliche Gebilde als Hohlkörper hergestellt werden sollen, ist es nötig, ihre Oberfläche, in einer Ebene ausgebreitet, zu zeichnen, auszuschneiden und dann räumlich zusammenzubiegen. Bei ebenflächig begrenzten Körpern (Polyedern) ist das meist einfach; denn die Oberfläche besteht aus Vielecken, die sich als sogenanntes *Netz* konstruieren lassen. Bei krummflächig begrenzten Körpern erfordert das die sogenannte *Abwicklung des Mantels*. Das ist nur bei einigen Körperformen möglich (z. B. Zylinder und Kegel), bei vielen läßt es sich überhaupt nicht durchführen (z. B. Kugel).

Als Beispiel für eine Abwicklung ist in Tafel 15 ein *Zylinderstumpf* räumlich sowie in Grund- und Aufriß dargestellt. Der Aufriß ist in die Grundrißebene umgelegt worden.

Die Oberfläche besteht aus Grundkreis, Deckellipse sowie dem abzuwickelnden Mantel. Der Grundkreis liegt im Grundriß schon vor. Die wahre Größe und Gestalt der Deckellipse wird in bekannter Weise durch Umklappen erhalten und punktweise konstruiert. Für einen Punkt (durch ein kleines Dreieck markiert) ist der Konstruktionsweg angegeben.

Um die wahre Größe und Gestalt des Mantels zu erhalten, denkt man sich ihn längs der größten Mantellinie aufgeschnitten, plan gebogen (Fachausdruck: abgewickelt) und in üblicher Weise in die Grundrißtafel umgelegt. Zum Abwickeln ist es nötig, den Grundkreis in eine Gerade zu strecken. Die Länge der Peripherie wird dazu mit Hilfe eines Näherungswertes für π angenähert bestimmt und dann in eine gewisse Anzahl von gleichen Abschnitten unterteilt. Mit Hilfe des Aufrisses kann man die gekrümmte Begrenzungslinie des abgewickelten Mantels punktweise konstruieren. Für einen Punkt, der durch einen kleinen Kreis markiert ist, wurde der Konstruktionsweg eingezeichnet.

Übungen:

1. Welche Gerade wurde als Klappachse beim Konstruieren der wahren Größe und Gestalt der Mantelabwicklung benutzt?

2. Um die Deckellipse in die gleiche Ebene umzuklappen, sind zwei Klappbewegungen, eine um die ausgezogene und eine um die gestrichelte Gerade, erforderlich. Machen Sie sich das mit Hilfe einer durchsichtigen Platte (Glas, Zelluloid o. ä.) klar, die Sie im Raumbild in die Ellipsenebene halten! (Diese Tatsache ist für die Konstruktion der Ellipsenpunkte aus Grund- und Aufriß wichtig! Beachten Sie dazu die in Tafel 15 durch Pfeile angegebenen Radien!)
3. Entnehmen Sie maßgerecht Grund- und Aufriß des Zylinderstumpfes aus der Anaglyphentafel und konstruieren Sie punktweise die Begrenzungslinie des abgewickelten Zylindermantels und die Deckellipse! Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Anaglyphenbild! (Transparentpapier verwenden!)
4. In der *Abbildung 20* ist der Mittelschnitt eines S-förmigen Rohrstücks gezeigt, das aus drei Teilen zusammengesetzt ist. Konstruieren Sie die Mäntel dieser drei Teile durch Abwickeln! (Maßstab 1:1)

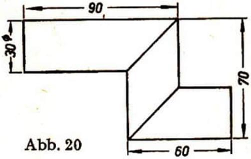


Abb. 20

5. Die *Abbildung 21* zeigt den Mittelschnitt eines schräg abgestumpften Kegels. Konstruieren Sie die Deckellipse und die Abwicklung des Mantels im Maßstab 1:1!

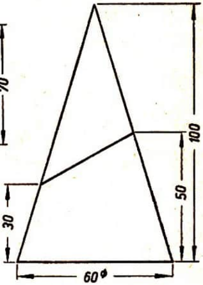


Abb. 21

Tafel 16

Während bei senkrechter Parallelprojektion zwei oder gar drei Projektionsbilder erforderlich sind, um einen eindeutigen Eindruck von dem dargestellten Gegenstand zu vermitteln, kommt man bei schräger (schiefer) Parallelprojektion meist mit einem einzigen Bild aus. Diese anschaulichen Bilder heißen *Schrägrisse* oder *Schrägbilder* (im Technischen Zeichnen auch *Schaubilder*). Ihrer Erarbeitung sind die Tafeln 16 bis 23 gewidmet.

Um das Entstehen des Schrägbildes zu erläutern und zugleich die Verbindung zum orthogonalen Grundriß-Aufriß-Bild herzustellen, sind auf diesen Anaglyphentafeln meist auch die Grund- und Aufrisse der betreffenden Gebilde dargestellt worden. Aus ihnen kann der Schrägriß anschaulich entwickelt und konstruiert werden. In der konstruktiven Praxis wird dieser Umweg nicht immer gegangen. Man kann nämlich das Schrägbild eines Gebildes auch unmittelbar, d.h. ohne zuvor den Grund- und Aufriß zu zeichnen, konstruieren. Darauf wird in den Erläuterungen zu Tafel 16 und 17 eingegangen.

Da es sich auch beim Schrägbildverfahren um eine Parallelprojektion handelt, werden alle Frontlinien und -flächen in wahrer Größe, alle anderen aber verzerrt abgebildet. Diese Verzerrung (nach Größe und Richtung) hängt von der Richtung der Projektionsstrahlen ab. Tafel 16 zeigt das an einer Tiefenstrecke l, die im Raum sowie im Grundriß und Aufriß (letzterer außerdem umgelegt in die Grundrißebene) dargestellt ist. Der Aufriß l'' ist bei Tiefenstrecken stets ein Punkt (vgl. Übung 2e zu Tafel 5 des ersten Bandes).

l wird in verschiedenen Richtungen auf die Aufrißtafel projiziert; die Lichtstrahlenrichtungen sind durch Pfeile angegeben. Man erkennt, daß dabei Schrägbilder von l entstehen, die nach Größe und Lage ganz verschieden sind. Vereinbarungsgemäß wählt man in der Praxis gern diejenige Lichtstrahlenrichtung, die die Tiefenstrecken auf die Hälfte verkürzt und in eine solche Lage projiziert, daß sie unter $\alpha = 45°$ zur Rißachse liegen. Das tritt bei einer ganz bestimmten Neigung der Lichtstrahlen ein, die durch den Winkel β im Grundriß festgelegt ist. Er beträgt etwa 69,3°. Dieser Fall ist in Tafel 16 durch Strichpunktlinien besonders herausgehoben. Die auf $\frac{l}{2}$ verkürzte Tiefenstrecke l ist auch im umgelegten Aufriß eingezeichnet und mit $l^{\times}$ bezeichnet worden. (Bei den anderen Schrägrissen wurde das unterlassen.) Die *Abbildung 22* zeigt diesen Konstruktionsweg noch einmal gesondert.

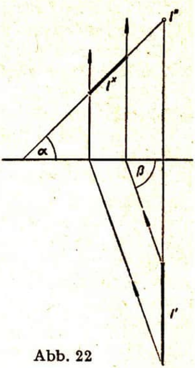


Abb. 22

Das spezielle Schrägbildverfahren, bei dem die Verkürzung der Tiefenstrecken auf die Hälfte und die Verzerrung der Richtung auf die erwähnten 45° gegen die Rißachse erfolgt, nennt man das Verfahren der *Kavalierperspektive.* Allgemein heißt das Verhältnis der Länge des Schrägbildes einer Tiefenstrecke zur Länge dieser Strecke selbst das *Verkürzungs-* oder *Verzerrungsverhältnis* q, der Winkel, unter dem das Schrägbild einer Tiefenstrecke zur Rißachse verläuft, der *Verzerrungswinkel* α. Die Kavalierperspektive ist also charakterisiert durch $q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$.

Übungen:

1. Stellen Sie eine mit zwei Füßen versehene Glasplatte an die Stelle der Projektionstafel im Raumbild (vgl. Übung 2 zu Tafel 1 im ersten Band), halten Sie ein Drahtstück (ein Streichholz o. ä.) von der Länge l an die richtige Stelle im Raum und einen zweiten Draht (Stricknadel, Holzstäbchen, Bleistift o. ä.) in die Richtungen der Lichtstrahlen durch die Enden von l! Überzeugen Sie sich von der verschiedenen Länge und Lage der Schrägrisse und überlegen Sie sich die Gründe dafür!
2. Realisieren Sie dieselben Vorgänge durch Schattenwurf auf einen vertikalen Bildschirm (Papptafel o. ä.) mit Hilfe von Sonnenlicht oder durch eine einige Meter entfernte Lichtquelle! Die verschiedenen Lichtstrahlrichtungen können Sie dabei durch entsprechendes Drehen des Bildschirms erreichen. Das Drahtstück, das die

Tiefenstrecke l darstellt, muß dabei natürlich ebenfalls entsprechend gedreht werden, so daß es stets senkrecht zum Bildschirm bleibt. (Vgl. Übung 8 zu Tafel 2 des ersten Bandes)

3. Zeichnen Sie das Grundriß-Aufriß-Bild
a) eines Quadrats,
b) eines gleichseitigen Dreiecks,
c) eines beliebigen Fünfecks,
das jeweils parallel zur Grundrißtafel liegt und von dem jeweils mindestens eine Seite para'lel zur Aufrißtafel verläuft!

Anleitung:
Zur Konstruktion dienen Frontstrecken (die nach Größe und Lage erhalten bleiben) und Tiefenstrecken. Bei b) und c) müssen zu diesem Zweck Tiefenstrecken erst als Hilfslinien eingezeichnet werden. (Vgl. die *Abbildung 23*; dort sind sie für ein Viereck strichpunktiert eingezeichnet worden.) Nur mit diesen kann die Konstruktion durchgeführt werden.

Die Konstruktion von Schrägbildern von ebenen Figuren in Kavalierperspektive läßt sich vereinfachen, wenn man folgendes beachtet:
1. Frontstrecken (im Grundriß parallel zur Rißachse) bleiben nach Lage und Größe unverändert.
2. Tiefenstrecken (im Grundriß senkrecht zur Rißachse) werden unter 45° mit halber Länge abgebildet.

Mit diesen Gesetzen kann man zu jedem Grundriß unmittelbar den Schrägriß konstruieren, ohne die Projektionen der Lichtstrahlen zu Hilfe nehmen zu müssen. Das ist in *Abbildung 24* an einem Rechteck, in *Abbildung 25* an dem Viereck der *Abbildung 23* gezeigt.

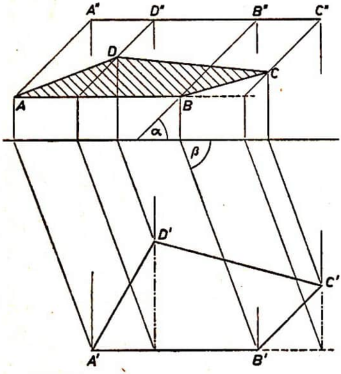


Abb. 23

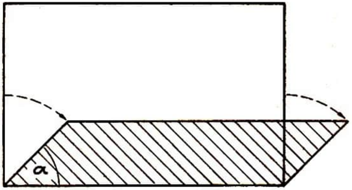


Abb. 24

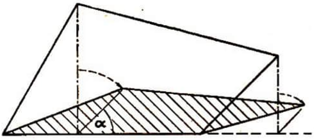


Abb. 25

Weitere Übungen:

4. Konstruieren Sie die Schrägbilder der in Übung 3 genannten Vielecke nochmals nach dem verkürzten Verfahren! Welche Vorteile und welche Nachteile hat dieses Verfahren gegenüber dem in Tafel 16 dargestellten?

Tafel 17

Auch von Körpern kann man mit Hilfe von Front- und Tiefenstrecken aus dem Grund- und Aufriß das Schrägbild in Kavalierperspektive konstruieren. Tafel 17 zeigt den Projektionsvorgang für einen Würfel.

In *Abbildung 26* ist das Verfahren auf eine dreiseitige Pyramide angewendet worden. In allen diesen Fällen ist zu beachten, daß vertikal verlaufende Strecken (Körperkanten beim Würfel, die Höhe bei der Pyramide) als Frontstrecken unverkürzt und in gleicher Lage in das Schrägbild übernommen werden können. Es ist deshalb zweckmäßig, von einer parallel zur Grundrißtafel liegenden Fläche auszugehen, zunächst für diese (wie in den Übungen 3 zu Tafel 16) den Schrägriß zu konstruieren und dann darauf den Körper vertikal aufzubauen. So wurde auch in *Abbildung 26* verfahren.

Auch hier kommt man ohne die Projektionen der Projektionsstrahlen aus, wenn man – von der wahren Größe und Gestalt der Grundfläche ausgehend – lediglich mit Front- und Tiefenstrecken und den Verzerrungsgrößen $\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$ der Kavalierperspektive arbeitet und das Schrägbild unmittelbar konstruiert. Das ist in *Abbildung 27* für dieselbe Pyramide, die in *Abbildung 26* dargestellt ist, ausgeführt worden.

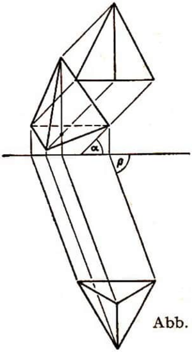


Abb. 26

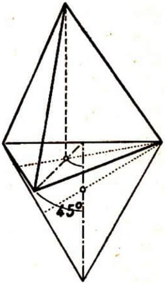


Abb. 27

Übungen:

Zeichnen Sie die Schrägrisse folgender Gegenstände in Kavalierperspektive ($\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$) in einem geeigneten Maßstab!

1. Ziegelstein (Normalmaße: 24 cm × 11,5 cm × 7,1 cm).
2. Spitzzelt mit quadratischer Bodenfläche (Bodenkante = Seitenkante = 1,50 m).
3. Schuppen mit Pultdach (Länge 6 m; Tiefe 3 m; Traufenhöhe über Grund 2 m; Firsthöhe über Grund 2,50 m).
4. Haus mit Satteldach (Länge 12 m; Tiefe 8 m; Traufenhöhe über Grund 6 m; Firsthöhe über Grund 11 m).

Tafel 18

Ein anderes, in der Praxis gern verwendetes Schrägbild von Körpern erhält man, wenn man sie auf die Grundrißtafel durch schräg einfallende parallele Strahlen projiziert. Tafel 18 zeigt das für einen Würfel. Dabei wird von der Grundfläche ein kongruentes Bild erzeugt. Man nennt diesen Schrägriß deshalb auch *Schrägbild mit kongruentem Grundriß*, das Verfahren die *Vogelperspektive*. Die vertikalen Körperkanten spielen jetzt die Rolle von Tiefenstrecken; denn sie stehen auf der Projektionstafel senkrecht. Sie werden also verkürzt und in der Lage verändert. In welchem Maße das geschieht, hängt wieder von der Richtung der Projektionsstrahlen ab. Man wählt diese so, daß das Verkürzungsverhältnis 1:1 wird, d.h. daß diese Vertikalen in wahrer Größe im Schrägriß erscheinen, und daß sie auf einer willkürlich gewählten Achse senkrecht stehen. Von der geschickten Wahl dieser Achse hängt in starkem Maße die Anschaulichkeit des Bildes ab. Im Anaglyphenbild der Tafel 18 wurde dazu eine Senkrechte zur Rißachse zwischen Grund- und Aufriß gewählt. Dadurch ist der Lichtstrahleneinfall festgelegt (im Aufriß erscheinen die Projektionen der Lichtstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 45°$, im Grundriß verlaufen sie parallel zur Rißachse; beide sind, wie alle zur Konstruktion benötigten Linien, im Anaglyphenbild strichpunktiert eingezeichnet). In der *Abbildung 28* ist dieselbe Konstruktion für die dreiseitige Pyramide der *Abbildung 26* ausgeführt. Zur Betrachtung des Schrägrisses empfiehlt es sich, das Bild um 90° im Gegenzeigersinn zu drehen.

Auch hier kann man kürzer zum Ziel kommen, wenn man auf der in wahrer Größe und Gestalt gezeichneten Grundfläche des Körpers senkrecht zu einer beliebig gewählten Achse die Vertikalen in wahrer Größe aufträgt. Das zeigt die *Abbildung 29* für einen Würfel und die *Abbildung 30* für die Pyramide der *Abbildung 28*.

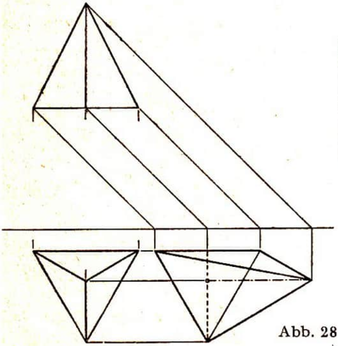


Abb. 28

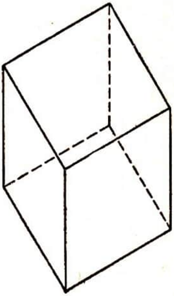


Abb. 29

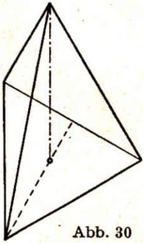


Abb. 30

Übung:

Zeichnen Sie die Schrägrisse der in den Übungen zu Tafel 17 gegebenen vier Gegenstände in Vogelperspektive in einem geeigneten Maßstab!

Tafel 19

Tafel 19 zeigt ein Werkstück (eine Schwalbenschwanzführung), die im Grundriß und Aufriß (rechts gelegen) und in Kavalierperspektive auf einer Kreuzrißtafel (links gelegen) dargestellt ist. Der Kreuzriß selbst ist nicht mitgezeichnet worden. Aufrißtafel und Kreuzrißtafel sind in die Grundrißtafel umgelegt worden, so daß vom Werkstück der Grundriß, der Aufriß und das Schrägbild (das „Schaubild") in der Zeichenebene erscheinen.

Übungen:

1. Übertragen Sie maßgerecht Grundriß und Aufriß aus der Tafel 19 auf ein Zeichenblatt und konstruieren Sie den Kreuzriß!
2. Zeichnen Sie ein Schrägbild des Werkstücks in einer solchen Lage, daß der verstärkende Steg sichtbar ist (also „schräg von vorn")!

Tafel 20

Wenn man die parallelen Projektionsstrahlen bei der Schrägbilderzeugung als Lichtstrahlen auffaßt und das projizierte Gebilde undurchsichtig annimmt, so entsteht statt des Schrägbildes ein *Schlagschatten* auf der Projektionstafel. Dieser unterscheidet sich vom Schrägbild dadurch, daß er lediglich den Umriß, aber keinerlei Konturen im Inneren aufweist. Schlagschattenkonstruktionen sind also grundsätzlich Schrägrißkonstruktionen. Ihrer Erarbeitung dienen die Tafeln 20 bis 23.

Je nach der Lage des Gegenstandes und der Lichtstrahlen zu den Rißtafeln kann der Schatten

a) nur auf der Aufrißtafel,
b) nur auf der Grundrißtafel,
c) teils auf der Aufriß- und teils auf der Grundrißtafel entstehen.

Im letzten Falle müssen sich die beiden Schattenteile an der Rißachse zusammenfügen. Dieser Fall ist in Tafel 20 für ein Viereck, das dem der Tafel 11 gleicht, dargestellt. Die Pfeile geben die Lichtstrahlenrichtung an. Die Aufrißtafel ist, wie üblich, in die Grundrißtafel umgelegt. Die Konstruktion erfolgt so, daß durch die

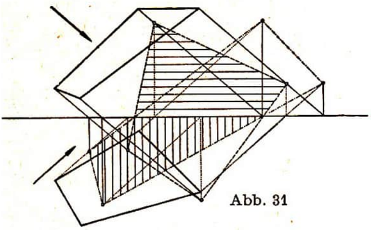


Abb. 31

Ecken des Vierecks die Lichtstrahlen gelegt und aus deren Grund- und Aufriß die Spurpunkte in Grund- und Aufrißebene konstruiert werden.

Falls man sich die Aufrißtafel nach unten und die Grundrißtafel nach rückwärts über die Rißachse hinaus verlängert denkt, entstehen zwei vollständige Schattenfiguren (je eine in jeder der Tafeln), die sich in der Rißachse schneiden. Nimmt man die Projektionstafeln als undurchsichtig an, so kommen als eigentlicher Schlagschatten nur die Teile in Frage, die vom normalen Zweitafelraum aus sichtbar sind (Abb. 31).

Übungen:

1. Halten Sie im Raumbild der Tafel 20 ein Drahtstück durch die Vierecksecken in eine solche Lichtstrahlenrichtung, daß der Schlagschatten
 a) nur auf der Aufrißtafel entsteht,
 b) nur auf der Grundrißtafel entsteht!
 Merken Sie sich jeweils ungefähr diese Richtung!

2. Entnehmen Sie maßgerecht den Grundriß und Aufriß des Vierecks aus Tafel 20 und konstruieren Sie den Schatten bei einer Lichtstrahlenrichtung, wie sie
 a) die Anaglyphentafel angibt,
 b) von Ihnen in der Übung 1a geschätzt wurde,
 c) von Ihnen in der Übung 1b geschätzt wurde!

Tafel 21

Tafel 21 entspricht völlig der Tafel 20. Hier ist der Schlagschatten einer Kreisscheibe dargestellt worden. Dieser muß elliptische Form haben; denn die Kreisscheibe blendet aus dem Lichtstrahlenbündel einen zylindrischen Schattenraum aus, dessen Schnitte mit den schattenfangenden Projektionstafeln Ellipsen sein müssen. Die Lichtstrahlenrichtung (Strichpunktlinien im Raum, Grundriß und Aufriß) wurde wieder so gewählt, daß der Schlagschatten auf beiden Rißtafeln liegt. Der Aufriß ist außerdem in die Grundrißebene umgelegt worden.

In Tafel 21 wird zugleich die senkrechte (Grundriß und Aufriß) und die schräge (Schatten) Parallelprojektion einer beliebig gelegenen Kreisscheibe gezeigt. Die Rißellipsen kann man am schnellsten dadurch finden, daß man die Lichtstrahlen nur durch diejenigen Punkte des Kreisumfanges legt, die in den Rissen die Scheitel der Ellipsen ergeben. Das sind die Endpunkte eines bestimmten Paares senkrechter Durchmesser des Kreises. Sie sind in Tafel 21 wie folgt besonders markiert:

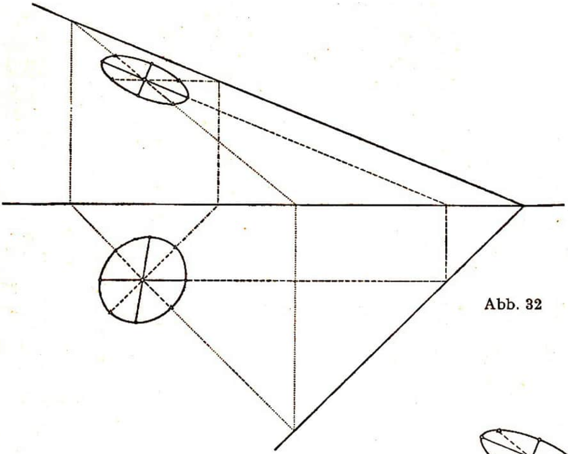


Abb. 32

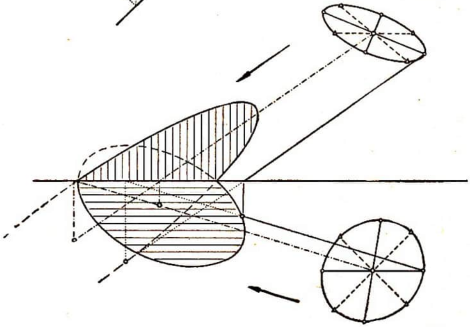


Abb. 33

Das Durchmesserpaar, das zu den Achsen der Ellipse im Grundriß führt, wurde gestrichelt eingezeichnet; die Scheitel wurden durch kleine Dreiecke markiert.

Das Durchmesserpaar, das zu den Achsen der Ellipse im Aufriß führt, wurde dünn ausgezogen; die Scheitel wurden durch Kreise markiert.

Die Konstruktion dieser beiden Risse ist in der *Abbildung 32* ausgeführt. Mit Hilfe dieser acht Punkte wurde dann auch der Schatten konstruiert. Das zeigt die *Abbildung 33*.

Übungen:

1. Siehe Übung 1 zu Tafel 20, angewendet auf die Kreisscheibe!
2. Konstruieren Sie den Schlagschatten einer Kreisscheibe, die parallel zur Grundrißtafel liegt, in Grund- und Aufriß! Wählen Sie dabei verschiedene Lichtstrahlenrichtungen wie in Übung 2a, b, c zu Tafel 20!

Tafel 22

Auch Körper können Schatten werfen; denn sie blenden genau wie ebene Gebilde aus dem Lichtstrahlenbündel einen Schattenraum heraus. Dessen Schnitte mit den Projektionstafeln ergeben die Schlagschatten.

Zugleich wird aber dadurch auch für einen Teil des Körpers das Licht abgefangen, so daß außerdem ein Schatten auf dem Körper selbst entsteht. Man nennt ihn *Eigenschatten*. Die Linie (oder der Streckenzug), die den beleuchteten von dem beschatteten Körperteil trennt, heißt die *Eigenschattengrenze*. Sie bestimmt zugleich die Begrenzung des Schattenraums. Ihre Projektion ist demzufolge der Umriß des Schlagschattens.

Bei der Konstruktion des Schattens eines Körpers ist also zweierlei nötig:

a) die Ermittlung der Eigenschattengrenze,

b) deren Projektion auf die Rißtafeln durch die Lichtstrahlen, wodurch der Schlagschatten entsteht.

Tafel 22 zeigt das für eine Kugel. Die Eigenschattengrenze ist die Linie, längs der die Lichtstrahlen den Körper berühren. Bei der Kugel ist das ein Großkreis, d.h. im Eigenschatten liegt genau eine Halbkugel. Sie ist sowohl im Raum als auch im Grundriß und Aufriß schwarz angelegt.

Der Schlagschatten als Projektion eines Kreises muß eine Ellipse sein (Tafel 21). Sie ist durch Schraffieren gekennzeichnet.

Die *Abbildung 34* zeigt die Schattenkonstruktion für einen Kegel. Hier genügt es, die Spurpunkte des Lichtstrahls durch die Kegelspitze auf beiden Rißtafeln zu konstruieren. Vom Grundrißspurpunkt aus werden die Tangenten an den Grundkreis gelegt. Deren Berührungspunkte bestimmen die Eigenschattengrenze. Das Schlagschattenstück auf der Aufrißebene ist durch den Aufrißspurpunkt des Lichtstrahls durch die Kegelspitze und durch das Stück der Rißachse festgelegt, das beiden Schattenteilen gemeinsam ist.

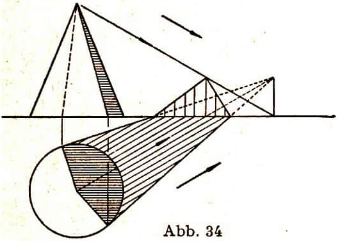


Abb. 34

Übungen:

1. Übertragen Sie Grundriß und Aufriß der Kugel aus Tafel 22 auf ein Zeichenblatt (am besten auf Transparentpapier

durch Pausen)! Zeichnen Sie in die elliptischen Risse der Eigenschattengrenze, die ja nur zur Hälfte dargestellt sind, die beiden Durchmesserpaare wie in *Abbildung 32* ein und vervollständigen Sie die Ellipsen! (Abb. 35)

2. Konstruieren Sie den Schattenwurf der Kugel nach den Maßen des Grund- und Aufrisses in Tafel 22! (Abb. 36)

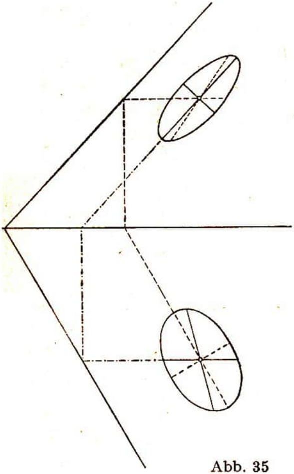


Abb. 35

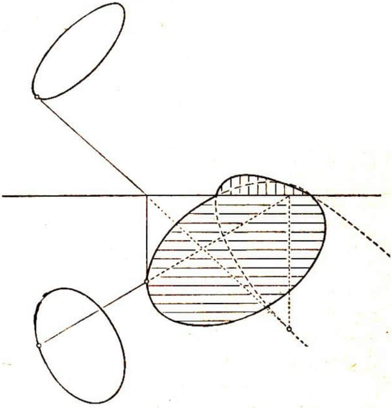


Abb. 36

3. Eine zylindrische Säule ($d = 20$ cm; $h = 80$ cm) steht lotrecht auf der Grundrißtafel. Konstruieren Sie den Schatten in Grund- und Aufriß in einem geeigneten Maßstab! Wählen Sie dabei die Lichtstrahlenrichtung so, daß der Schlagschatten

a) nur auf der Grundrißtafel,

b) auf Grundriß- und Aufrißtafel liegt!

4. Siehe Übung 3! Die Säule soll aber diesmal auf der Grundrißtafel (senkrecht zur Aufrißtafel) liegen.

5. Konstruieren Sie den Schatten in Grund- und Aufriß

a) für eine quadratische Pyramide,

b) für ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma!

Der Schlagschatten soll dabei auf Grundriß- und Aufrißtafel liegen.

Tafel 23

In Tafel 23 ist eine Lagerbuchse dargestellt, die aus einem zylindrischen Teil und einem aufgesetzten Sechskantstück besteht. Sie ist längs durchbohrt. Außerdem zeigt sie senkrecht zur Achse eine Durchführung mit quadratischem Querschnitt. Das Werkstück steht im Raumbild auf der Grundrißtafel. Von der Wiedergabe weiterer Projektionstafeln wurde diesmal abgesehen.

Ein Lichtstrahlenbündel, dessen Einfallsrichtung durch zwei Pfeile im Raum und je einen Pfeil im Grundriß und Aufriß angegeben ist, wirft einen Schatten. Nach den Ausführungen zu Tafel 22 besteht dieser aus Eigenschatten (vertikal schraffiert) und Schlagschatten (horizontal schraffiert). Die besondere Gestalt des Werkstücks bringt es mit sich, daß der Schlagschatten diesmal nicht nur auf der Grundrißtafel, sondern zum Teil auf dem Werkstück selbst entsteht: Das Sechskantstück wirft seinen Schlagschatten z. T. auf die Deckfläche des zylindrischen Teils, und das zylindrische Stück wirft seinen Schlagschatten z. T. in die quadratische Durchführung.

Übungen:

1. Konstruieren Sie Grund- und Aufriß des Werkstücks der Tafel 23 und seinen Schatten mit Maßen, die etwa denen im Raumbild entsprechen! Stellen Sie dabei die Lagerbuchse so, daß ihre waagerechte Durchführung parallel zur Aufrißtafel verläuft!
2. Konstruieren Sie zum Zweitafelbild der Übung 1 einen Kreuzriß!
3. Zeichnen Sie zwei Mittelschnitte, einen parallel zur Aufrißtafel, einen parallel zur Grundrißtafel!
4. Konstruieren Sie ein Schrägbild der Lagerbuchse in Kavalierperspektive!
5. Übertragen Sie in dieses Schrägbild auch den Schlagschatten!

Anleitung:

Im Grundriß-Aufrißbild (Übung 1) ist die Richtung der schattenwerfenden Lichtstrahlen durch ihre Risse festgelegt. Nehmen Sie zwei beliebige Punkte auf einem solchen Lichtstrahl an und übertragen Sie diese nach den üblichen Konstruktionsregeln in das Schrägbild! Ihre Verbindung gibt dort den Lichtstrahlenverlauf an. Nunmehr können Sie durch wichtige Punkte des Werkstücks die Lichtstrahlen auch im Schrägbild einzeichnen und mit ihrer Hilfe den Schattenumriß finden.

Die Ergebnisse der Übungen 1 bis 5 finden Sie in den Abbildungen 54 bis 58. Es ist aber im Interesse Ihrer Übung zweckmäßig, diese Abbildungen erst nach Fertigstellung Ihrer eigenen Konstruktionszeichnungen zu betrachten.

Tafel 24

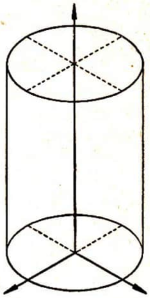


Abb. 37

Der Vorteil der schiefen Parallelprojektion gegenüber der senkrechten ist die größere Anschaulichkeit des Bildes. So würde z. B. ein Kreiszylinder in einfacher Lage (Mantellinien parallel zur Projektionstafel) bei Orthogonalprojektion ein völlig unanschauliches Rechteck ergeben (vgl. Tafel 4 des ersten Bandes). Bei schräger Parallelprojektion entsteht aber ein anschauliches Bild, wie es auf Tafel 24 in der vorderen Figur zu sehen ist.

Eine ähnliche Wirkung kann man auch bei senkrechter Parallelprojektion erreichen, wenn man den Zylinder durch Kippen aus seiner einfachen Lage zur Projektionstafel bringt. Das zeigt die hintere Figur der Tafel 24. Ein Vergleich beider Risse zeigt, daß zwar recht ähnliche Bilder entstanden sind, daß aber das letztere den Vorteil hat, Grund- und Deckellipse in einer scheinbar weniger verzerrten Gestalt zu zeigen. Das ist besonders deutlich an den in die Grundrißtafel umgeklappten Rissen (der erstere nach vorn, der letztere nach hinten) zu erkennen.

Allerdings bereitet die schräge Lage zur Rißtafel bei der Konstruktion gewisse Schwierigkeiten. Man kann sie mindern, wenn man in diesen Fällen in den abzubildenden Körper ein rechtwinkliges räumliches Achsenkreuz legt und mit dessen Hilfe die Konstruktion ausführt. Das Prinzip zeigt die *Abbildung 37*. Solche Verfahren der Parallelprojektion nennt man axonometrische Konstruktionen. Sie können sowohl bei der senkrechten als auch bei der schiefen Parallelprojektion angewendet werden; man unterscheidet danach *rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie*. Der Erarbeitung der ersteren dienen die Tafeln 24 bis 31. Die rechtwinklige Axonometrie ist für die Praxis von besonderer Bedeutung und in zwei Spezialarten durch TGL 0-5 zum Standard für technische Schaubilder erklärt.

Übungen:

1. Verbinden Sie zwei gleich große, kreisförmige Pappringe durch drei Stäbe (Drahtstücke o. ä.) zu einem Zylindermodell! Stellen Sie dieses achsenparallel vor einen Schirm und projizieren Sie es mit schräg einfallendem Sonnenlicht! Vergleichen Sie das Schattenbild mit dem vorderen Bild in Tafel 24!
2. Projizieren Sie das Zylindermodell jetzt durch senkrecht einfallendes Sonnenlicht und kippen Sie es dabei mehr oder weniger! Vergleichen Sie die Schattenbilder mit dem hinteren Bild in Tafel 24!

Tafel 25

Die Grundlage jedes axonometrischen Bildes ist die Parallelprojektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes, das meist als *Dreibein* bezeichnet wird. Wählt man die drei Beine von gleicher Länge, so ergibt sich als Projektionsbild ein *Achsenkreuz,* das aus drei Strecken mit gleichem Ausgangspunkt *(Scheitel)* besteht, bei dem die drei Strecken aber je nach der Lage des Dreibeins zur Projektionstafel und je nach der Einfallsrichtung der Projektionsstrahlen unter ganz verschiedenen Winkeln zueinander und in ganz verschiedenen Längen entstehen können. Auf der Tafel 25 sind verschiedene Möglichkeiten dargestellt. Beachten Sie besonders die Unterschiede in der Lage der drei Strecken bei A und D, die besondere Lage bei C und die Unterschiede in der Länge der Strecken bei G und H!

Diese Erkenntnis kann man umkehren: Zeichnet man ein Achsenkreuz aus drei Strecken mit gemeinsamem Scheitel, beliebig nach gegenseitiger Lage und Länge, so kann man dieses Bild stets als Projektion eines rechtwinkligen räumlichen Dreibeins mit gleich langen Beinen auffassen, d.h. es läßt sich stets eine Lage zur Projektionstafel und eine Einfallsrichtung paralleler Lichtstrahlen finden, die dieses Bild ergibt.

Dieser wichtige Satz, der nach seinem Entdecker der *Satz von Pohlke* heißt, ist die Grundlage der Axonometrie. Er soll hier nur genannt, aber nicht bewiesen werden.

Übungen:

1. Verbinden Sie drei gleich lange Drahtstücke (oder Stäbe) zu einem räumlichen rechtwinkligen Dreibein, projizieren Sie dieses Modell durch verschieden einfallendes Sonnenlicht auf einen Schirm und studieren Sie die Mannigfaltigkeit der Formen der entstehenden Achsenkreuzbilder!
2. Versuchen Sie die in Tafel 25 wiedergegebenen Formen zu erhalten!
3. Untersuchen Sie insbesondere die Formen bei senkrecht zur Projektionstafel einfallendem Licht!
4. Ist es möglich, im letzten Fall regelmäßige Achsenkreuze zu erhalten, d.h. solche mit zwei bzw. drei gleichen Winkeln zwischen den Strecken oder mit zwei bzw. drei gleich langen Strecken?

Tafel 26

In TGL 0-5 sind zwei spezielle Lagen des Dreibeins zur Projektionstafel bei senkrechtem Einfall der Projektionsstrahlen (rechtwinklige Axonometrie) zum Standard erklärt. Diese speziellen Lagen sind so gewählt, daß besonders einfache Konstruktionen ein möglichst anschauliches Bild ergeben. Sie heißen *standardisierte Isometrie* (Tafel 26) und *standardisierte Dimetrie* (Tafel 28).

Die Festsetzungen zur standardisierten Isometrie sind so gewählt, daß die drei gleich langen Beine des Dreibeins (bzw. drei auf ihnen abgetragene gleich lange Strecken, die man als *Maßeinheiten* deuten kann) auch im Projektionsbild des Achsenkreuzes als untereinander gleich lange Strecken erscheinen. Das ist bei rechtwinkligem Einfall der Projektionsstrahlen nur dadurch zu erreichen, daß das Dreibein völlig drehsymmetrisch zur Projektionstafel liegt. Dann ergeben sich die drei Achsen ebenfalls in drehsymmetrischer Lage, d.h. mit Winkeln von je 120° zueinander. (Eine davon legt man im Projektionsbild stets lotrecht.)

Im Raumbild der Tafel 26 ist das Dreibein unter eine waagerecht im Raum schwebende Projektionstafel mit dem Scheitel nach unten und den Beinen nach oben gelegt worden. Die drei Beine (durch Vollpfeile gekennzeichnet) stoßen in drei *Spurpunkten* durch diese Projektionstafel. Von diesen Spurpunkten aus verlaufen die Achsen des Achsenkreuzes (durch Leerpfeile gekennzeichnet) zum Achsenkreuzscheitel in der erwähnten zentralsymmetrischen Anordnung. Verbindet man die drei Spurpunkte in der Projektionstafel untereinander, so entsteht das *Spurendreieck* des axonometrischen Bildes (schwache Vollinien); es ist im Falle der Isometrie gleichseitig.

Das unter der Projektionstafel gelegene Dreibein kann auch als *körperliche Ecke* aufgefaßt werden, in die man im Raumbild der Tafel 26 schräg von oben hineinsieht. Die drei *begrenzenden Dreiecke* dieser körperlichen Ecke sind im Raumbild um die Seiten des Spurendreiecks (von unten nach oben) nach außen in die Projektionstafel hochgeklappt worden und hier in wahrer Größe und Gestalt sichtbar. Da die körperliche Ecke rechtwinklig ist, sind auch die drei Begrenzungsdreiecke rechtwinklig (Thaleskreis beim unteren beachten!). Außerdem sind sie wegen der symmetrischen Lage des Dreibeins zur Projektionstafel gleichschenklig-rechtwinklig und untereinander kongruent.

In das räumliche Dreibein ist ein Würfel gestellt worden. Dessen (gleich lange) Seiten versinnbildlichen auf den drei Beinen die gleich langen Strecken (die Maßeinheiten), die bei der Isometrie in wiederum untereinander gleiche Strecken auf den Achsen des Achsenkreuzes abgebildet werden sollen. Punktiert sind die Projektionsstrahlen zu sehen, die untereinander parallel von vier Würfelecken zur Projektionstafel verlaufen und auf dieser senkrecht stehen. In jedem Begrenzungsdreieck der körperlichen Ecke liegt demgemäß eine Würfelfläche. Diese sind auch in den umgeklappten Dreiecken eingezeichnet worden. Die strichpunktierten Hilfslinien zeigen die Symmetrie der gesamten Figur und damit, daß die Forderung nach gleicher Größe der Projektionen der Würfelkanten (d.h. der Maßeinheiten, s.o.) auf den Achsen des Achsenkreuzes erfüllt ist. Zugleich erkennt man, daß die Würfelkante a (die Maßeinheit) im isometrischen Bild auf eine Länge a' verkürzt wird, die man wie folgt errechnen kann:

Man nimmt dazu die zwischen zwei strichpunktierten Hilfslinien auf den Seiten des Spurendreiecks liegende Strecke (a_0) zu Hilfe sowie die wahre Größe der Würfelkante a und die ihrer Projektion auf die Achsen a'.

Offenbar gilt:

$$a_0 : a = \cos 45°; \quad a_0 : a' = \cos 30°$$

also: $$a' : a = \cos 45° : \cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}817$$

$$a' = a \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \approx 0{,}817\, a$$

oder: $$a = a' \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} \approx 1{,}225\, a'.$$

Das exakte isometrische Bild enthält also in den Achsenrichtungen Streckenlängen, die gegenüber dem Original auf 0,817, das ist rund $\frac{4}{5}$, verkleinert sind.

Beim *praktischen Zeichnen isometrischer Bilder* geht man vom Achsenkreuz aus, das man in möglichst einfache Lage in den darzustellenden Körper hineinlegt. Man konstruiert zunächst die Grundfläche mit Hilfe von Strecken (evtl. Hilfsstrecken), die in Richtung der Achsen verlaufen. Auf der Grundfläche baut man dann in vertikaler Richtung den Körper auf. Die *Abbildung 38* zeigt das für eine dreiseitige regelmäßige

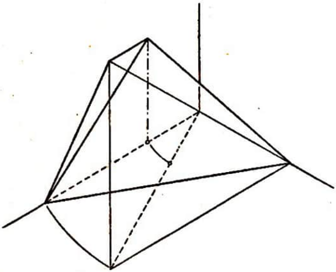


Abb. 38

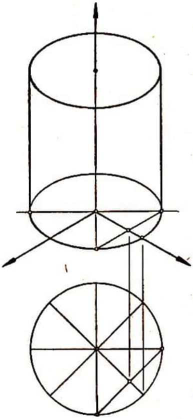


Abb. 39

Pyramide, deren Höhe gleich der halben Grundkante ist (Hilfsstrecken: Höhen der Grundfläche). Die *Abbildung 39* zeigt das isometrische Bild eines Kreiszylinders. In einer Hilfsfigur ist zu erkennen, wie die Scheitel der Grundellipse konstruktiv mit Hilfsstrecken gefunden werden.

Wenn man bei solchen isometrischen Bildern in Richtung der Achsen statt mit den verkürzten Strecken mit den Originalmaßen des darzustellenden Körpers arbeitet (wie es praktisch meist geschieht), so ist das Bild gegenüber dem Original um 1,225, das ist rund $\frac{5}{4}$, vergrößert. Das muß man bei der Maßentnahme aus isometrischen Bildern beachten.

Übungen:

1. Halten Sie das Dreibeinmodell (vgl. Übung 1 zu Tafel 25) so unter eine waagerecht liegende Glasplatte, wie es das Raumbild der Tafel 26 zeigt! Blicken Sie senkrecht von oben auf die Tafel und überzeugen Sie sich von der Symmetrie des Achsenkreuzes!
2. Greifen Sie mit dem Stechzirkel in Tafel 26 die Würfelkante a an der hochgeklappten Würfelfläche und a' am isometrischen Bild ab, und überzeugen Sie sich von der Richtigkeit des Verkürzungsverhältnisses $a':a \approx 0{,}817 \approx 4:5$!
3. Zeichnen Sie das isometrische Bild eines Würfels in Übereckstellung, d.h. in einer solchen Lage, daß die Achsen in der Grundfläche in Richtung der Quadratdiagonalen verlaufen! Beurteilen Sie das entstehende Bild!
4. Zeichnen Sie das isometrische Bild eines Quaders mit den Seitenkanten 4 cm, 6 cm und 8 cm
   a) maßgerecht (Maßstab 1:1), d.h. unter Verkürzung der Quaderkanten im Bild auf 0,817 der wahren Größe,
   b) vergrößert (Maßstab 1,225:1), indem Sie die wahren Größen der Quaderkanten unmittelbar im Bild verwenden!
   Vergleichen Sie beide Bilder! In welchem Verhältnis stehen die Volumina beider Quader?
5. Zeichnen Sie isometrische Bilder der in den Übungen 1 bis 4 zu Tafel 17 genannten Gegenstände unter Verwendung geeigneter Maßstäbe in solchen Lagen, daß ein möglichst anschauliches Bild entsteht!

Anleitung:

Wenn Sie z.B. bei der vierten Übung den Maßstab 1:100 wählen, müssen Sie das Haus mit den Grundkanten 12 cm und 8 cm darstellen. Das bedeutet, daß es in der isometrischen Zeichnung in Achsenrichtung die Kanten $0{,}817 \cdot 12$ cm bzw. $0{,}817 \cdot 8$ cm erhalten muß. Diese zweite Verkleinerung ist im Wesen der Isometrie enthalten und wird nicht durch eine besondere Maßstabsangabe vermerkt. Die Lösung zu dieser Übung zeigt *Abbildung 40.*

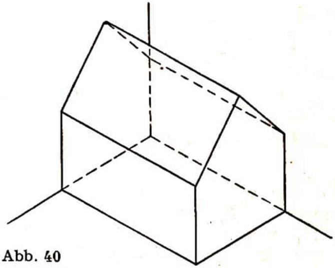


Abb. 40

Tafel 27

In dieser Tafel sehen Sie nochmals einen Würfel in der gleichen Lage wie in Tafel 26. Das Bild ist aber so konstruiert, daß Sie aus 30 cm Entfernung senkrecht auf das Blatt blicken müssen. Sie legen es also am besten auf den Tisch und neigen sich von oben her so darüber, daß sich Ihr rechtes Auge genau lotrecht über der Tafelmitte befindet (Augenhöhe beachten!). Benutzen Sie die Farbbrille und schließen Sie nun zunächst das linke Auge! Sie sehen die isometrische Darstellung des Würfels als Zeichnung. Öffnen Sie jetzt beide Augen, so entsteht der stereoskopische Effekt, d.h. der Würfel „steht im Raum auf". Haben Sie etwas Geduld, wenn sich die gewünschte optische Wirkung nicht sofort einstellt!

Tafel 28

Diese Tafel ist das Gegenstück zur Tafel 26; studieren Sie beide nebeneinander! Auf Tafel 28 finden Sie (wieder am Beispiel des Würfels) die nach TGL 0-5 standardisierte *Dimetrie* erklärt. Die Festsetzungen sind hier so getroffen, daß die drei gleich langen Beine des räumlichen Dreibeins (bzw. drei als Maßeinheiten dienende Strecken, die wieder durch die Würfelkanten dargestellt sind; vgl. die Erläuterung zu Tafel 26) im Projektionsbild des Achsenkreuzes so erscheinen sollen, daß zwei von ihnen als untereinander gleich lange Strecken abgebildet werden, die dritte aber als Strecke von halber Länge entsteht. Das ist bei rechtwinkligem Einfall der Projektionsstrahlen dadurch zu erreichen, daß das Dreibein nicht völlig symmetrisch zur Projektionstafel liegt, sondern so, wie es das Raumbild der Tafel 28 zeigt. Die Winkel zwischen den Achsen im Projektionsbild ergeben sich dabei nicht mehr von gleicher Größe (je 120°). Der Winkel zwischen den beiden Achsen mit gleich langen Strecken ist vielmehr rund 97°, während die Achse, die die Strecke von halber Länge trägt, diesen Winkel in Gegenrichtung halbiert. Zwischen dieser Achse und den beiden erstgenannten Achsen liegen also Winkel von je rund 131,5°. (Man legt im Projektionsbild die eine der erstgenannten Achsen lotrecht, die zweite nach rechts unten, während die kürzere dritte nach links unten zu liegen kommt.)

Im übrigen entspricht die Anlage der Tafel 28 völlig der von Tafel 26, so daß Sie alle dort gegebenen Erläuterungen unmittelbar für Tafel 28 übernehmen können. Sie erkennen dann folgende

Unterschiede der Dimetrie gegenüber der Isometrie:

a) Das *Dreibein* liegt nicht völlig symmetrisch zur Projektionstafel, sondern weist gleichartige Lage nur noch in bezug auf zwei seiner drei Beine (rechtes und oberes) auf.

b) Das *Spurendreieck* ist infolgedessen nicht gleichseitig, sondern gleichschenklig.

c) Die *hochgeklappten Dreiecke* der körperlichen Ecke sind zwar ebenfalls alle drei rechtwinklig, aber nicht alle gleichschenklig und nicht alle untereinander kongruent. Nur eins (rechts oben) ist diesmal gleichschenklig, die beiden anderen (unten und links oben) sind allgemeine rechtwinklige Dreiecke, die aber untereinander kongruent sind.

d) Die *strichpunktierten Hilfslinien* zeigen, daß auch die gesamte Figur bei der Dimetrie nicht drehsymmetrisch, sondern *achsensymmetrisch* ist. Die Symmetrieachse ist durch diejenige Achse des Achsenkreuzes bestimmt, die die verkürzte Maßeinheit trägt (links unten).

e) Die *Würfelkante a* (die Maßeinheit) wird auch bei der Dimetrie *auf den Achsen verkürzt* abgebildet. Unter Verwendung derselben Bezeichnung wie bei Tafel 26 ergibt sich die Länge a' der Maßeinheit auf den beiden gleich geteilten Achsen (mit den erwähnten Näherungswerten für die Winkel zwischen den Achsen):

$$a_0 : a = \cos 45^\circ\ ; \qquad a_0 : a' \approx \cos 41{,}5^\circ$$

$$a' : a \approx \cos 45^\circ : \cos 41{,}5^\circ \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : 0{,}749$$

$$a' \approx \frac{\sqrt{2}}{1{,}498}\, a \approx 0{,}943\, a$$

$$\text{oder } a \approx 0{,}749\sqrt{2} \cdot a' \approx 1{,}06\, a'$$

Für die Verkürzung auf der dritten Achse gilt entsprechend:

$$a'' \approx 0{,}47 \cdot a; \quad a = 2{,}12 \cdot a''$$

Beim *praktischen Zeichnen dimetrischer Bilder* geht man wie bei der Isometrie von einem Achsenkreuz aus, dessen eine Achse lotrecht liegt. Die andern erhält man, wenn man eine waagerechte Hilfsgerade verwendet und an diese (laut TGL 0-5) die zweite Achse unter 7° nach rechts unten zu, die dritte unter 42° nach links unten zu anträgt.

Auf der oberen und rechten Achse werden die Körpermaße auf 0,943, das ist rund $\frac{9}{10}$, auf der linken auf 0,47, das ist rund $\frac{9}{20}$, verkleinert aufgetragen.

Meist trägt man allerdings auf den beiden ersten Achsen die Körpermaße in wahrer Größe, auf der dritten auf die Hälfte verkürzt ab. Dadurch ist das Bild gegenüber dem Original auf 1,06, das ist rund $\frac{10}{9}$, vergrößert, was bei der Entnahme von Maßen berücksichtigt werden muß.

In den *Abbildungen 41 und 42* sehen Sie dieselben Körper, die in den *Abbildungen 38 und 39* isometrisch dargestellt wurden, in standardisierter Dimetrie gezeichnet.

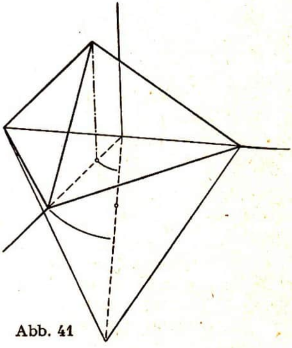


Abb. 41

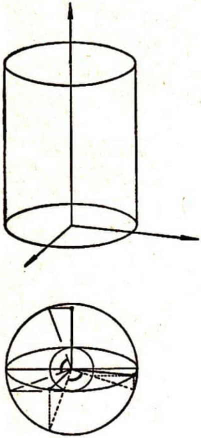


Abb. 42

Übungen:

Bearbeiten Sie die Übungen 1 bis 5 zu Tafel 26 unter Übertragung auf die Dimetrie! Dabei ist folgendes zu beachten:

zu 2: Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit der Verkürzungsverhältnisse!

$(a':a \approx 0{,}943 \approx 9:10; \quad a'':a \approx 0{,}47 \approx 9:20)$

zu 4a: Maßstab 1:1; Verkürzung der Quaderkanten auf 0,943 bzw. 0,47 der wahren Größe

zu 4b: Maßstab 1,06:1.

zu 5: Anleitung: Im Gegensatz zur Isometrie ist es bei der Dimetrie nicht gleichgültig, wie Sie den Gegenstand in das Achsenkreuz hineinstellen, da hier im Bild eine Vorderansicht dominiert. Dazu wählt man gewöhnlich die wichtigste Seitenfläche. Beim vierten Objekt wäre das die Breitseite und nicht die Giebelseite des Hauses. Dann werden die abzutragenden Grundkanten $0{,}943 \cdot 12$ cm und $0{,}47 \cdot 8$ cm. Die Lösung zu dieser Übung ist in *Abbildung 43* wiedergegeben; sie entspricht der *Abbildung 40*.

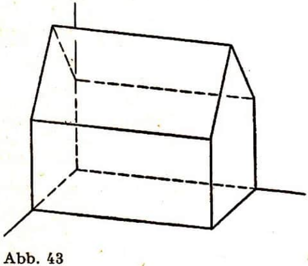


Abb. 43

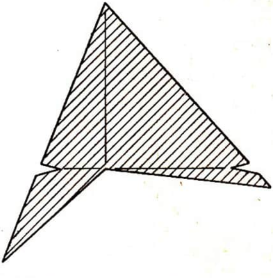


Abb. 44

Zur Erleichterung beim Konstruieren dimetrischer Bilder empfiehlt es sich, aus Karton eine Schablone für das Achsenkreuz anzufertigen, wie sie die *Abbildung 44* zeigt.

Vergleichen Sie die konstruierten dimetrischen Bilder mit den in den Übungen 3 bis 5 zu Tafel 26 gezeichneten isometrischen Bildern!

Tafel 29

Auf dieser Tafel ist ein Führungsteil einer Maschine in standardisierter Isometrie dargestellt. Die Projektionsebene, die in Tafel 28 waagerecht über der räumlichen Ecke lag, ist diesmal der besseren Übersicht wegen parallel nach unten verlagert worden. Für die vordere Ecke ist der Projektionsstrahl (punktiert) eingezeichnet worden. Dieser muß bei der Bildbetrachtung lotrecht im Raum stehen. Für einige Kanten des räumlichen Werkstücks sind die Spurpunkte in der Projektionsebene eingezeichnet worden; sie bestimmen dort die Spurgeraden der entsprechenden Begrenzungsebene des Werkstücks (links). Sofern die Kanten in verschiedenen Begrenzungsebenen liegen, ergeben sich auch verschiedene Spurgeraden (rechts).

Übungen:

1. Zeichnen Sie das isometrische Bild des Werkstücks von Tafel 29 nochmals in gleicher Größe nach Drehung um 90° um die lotrechte Mittelachse!
2. Zeichnen Sie das Werkstück im Grund-, Auf- und Kreuzriß! Entnehmen Sie die Maße dem isometrischen Bild in Tafel 29 und setzen Sie dabei voraus, daß dieses exakt im Maßstab 2:3 verkleinert gezeichnet ist! Zeichnen Sie das Dreitafelbild aber im Maßstab 1:1! (Vgl. Übung 5 zu Tafel 26!)
3. Zeichnen Sie ein Schrägbild in Kavalierperspektive (2:3)!
4. Zeichnen Sie ein Schrägbild in Vogelperspektive (2:3)!
5. Zeichnen Sie ein dimetrisches Bild (2:3)!
6. Vergleichen Sie die Bilder der Übungen 1 bis 5 und beurteilen Sie ihre praktische Verwendbarkeit!

Tafel 30

Die Tafel 30 zeigt eine Schwalbenschwanzkreuzführung in dimetrischer Darstellung, im übrigen ist sie wie Tafel 27 konstruiert worden, d.h. es ist erforderlich, sie lotrecht von oben zu betrachten. Benutzen Sie daher die zu Tafel 27 gegebenen Erläuterungen auch für Tafel 30!

Diesmal müssen Sie aber das linke Auge in 30 cm Höhe über die Tafelmitte halten und beim Betrachten zunächst das rechte schließen.

Als Besonderheit enthält diese Tafel (ähnlich wie die Tafel 29) die Spurpunkte einiger Kanten in der Projektionsebene sowie die Umklappung der quadratischen Grundfläche des Werkstücks in diese Ebene.

Tafel 31

Bei beliebiger Lage des räumlichen Dreibeins zur Projektionstafel und senkrechtem Einfall der Lichtstrahlen werden die Maßeinheiten auf den Achsen des Achsenkreuzes in drei verschiedenen Verkürzungen abgebildet. Auch die gegenseitige Lage der drei Achsen entbehrt dann jeder Regelmäßigkeit. In diesen Fällen spricht man von einem *trimetrischen Bild*. Obwohl es eine gute Anschaulichkeit aufweisen kann, sind trimetrische Projektionsverfahren wegen der Schwierigkeit der Konstruktionen nicht unter die standardisierten aufgenommen worden.

Als Beispiel ist in Tafel 31 eine Kugel in dieser Weise dargestellt worden. Der Scheitel eines beliebig gelegenen räumlichen rechtwinkligen Dreibeins liegt dabei im Kugelmittelpunkt. Die Kugel schneidet auf den drei Beinen gleich große Strecken ab (Endpunkte A, B, C), die als Maßeinheiten gedeutet werden können. Jede durch zwei Beine festgelegte Ebene im Raum schneidet die Kugel in einem Großkreis; der durch B und C verlaufende ist zur Hälfte eingezeichnet.

Bei der orthogonalen Projektion ergibt sich aus dem Dreibein ein Achsenkreuz mit bestimmten Winkeln zwischen den Achsen und bestimmten Maßeinheitenverkürzungen. Das ist in Tafel 31 mit Hilfe der punktierten Projektionsstrahlen zu erkennen. Die erwähnten Großkreise werden zu ganz bestimmten Ellipsen. Die durch B' und C' verlaufende ist zur Hälfte eingezeichnet, wodurch der räumliche Eindruck unterstützt wird. Da senkrechte Parallelprojektion vorliegt, ergibt sich als Umriß des trimetrischen Kugelbildes ein Kreis.

Bei anderen Lagen des Dreibeins zur Projektionstafel ergeben sich naturgemäß andere Verkürzungsverhältnisse und andere Winkel zwischen den Achsen des Achsenkreuzes. Die Variationsmöglichkeiten sind dabei sehr zahlreich.

Übungen:

1. Führen Sie den der Übung 1 zu Tafel 26 entsprechenden Versuch für die in Tafel 31 angenommene Lage des Dreibeins durch!
2. Wenn bei orthogonaler Trimetrie zwei Achsen des Achsenkreuzes nach Lage und Verkürzungsverhältnis gegeben sind, ist die dritte Achse bestimmt. Pausen Sie auf Transparentpapier vom trimetrischen Bild auf Tafel 31 den Umrißkreis, seinen Mittelpunkt sowie die Achsen nach B' und C' durch! Konstruieren Sie daraus die Achse nach A' und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Tafel 31 sowie mit der unteren Figur in *Abbildung 42*!
3. Bestimmen Sie aus Tafel 31 mit Stechzirkel und Maßstab die wahre Größe des Kugelradius und die verkürzten Radien auf den Achsen, und berechnen Sie die drei Verkürzungsverhältnisse, die zu der in Tafel 31 zugrunde gelegten rechtwinkligen Trimetrie gehören! Messen Sie mit dem Winkelmesser die drei Winkel zwischen den Achsen, die zu dieser Trimetrie gehören!

Verwenden Sie diese Größen für alle in den folgenden Übungen geforderten trimetrischen Bilder!

4. Zeichnen Sie das trimetrische Bild eines Würfels in achsenparalleler Lage!

5. Zeichnen Sie die trimetrischen Bilder der in den *Abbildungen 38 und 39* in Isometrie dargestellten Körper im Maßstab 1:1!

Anmerkung:

Setzen Sie auch in den *Abbildungen 38 und 39* den Maßstab 1:1 voraus! Dann können Sie daraus die wahren Größen nur unter Berücksichtigung der Verkürzung 1:0,817 entnehmen. Das Ergebnis dieser Übung ist in den *Abbildungen 45 (46) und 47* dargestellt. In der *Abbildung 45* liegt die Grundfläche der Pyramide genauso wie in *Abbildung 38*; es ergibt sich ein unanschauliches Bild. In *Abbildung 46* ist die Pyramide gedreht worden, so daß das Bild anschaulicher wird.

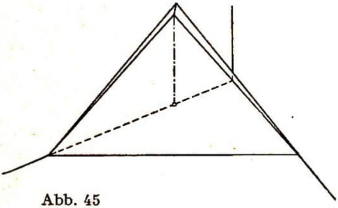


Abb. 45

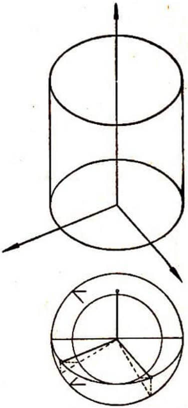


Abb. 47

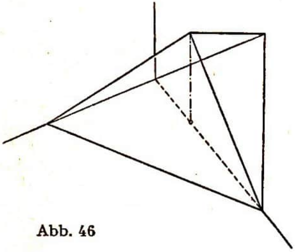


Abb. 46

6. Bearbeiten Sie die Übungen 3 bis 5 zu Tafel 26 unter Übertragung auf die Trimetrie! Beachten Sie dabei die Anmerkungen, die bei den Übungen zu Tafel 28 zu finden sind, und übertragen Sie auch diese sinngemäß auf die Trimetrie! Entsprechend den *Abbildungen 40* und *43* ist in *Abbildung 48* das trimetrische Bild des gleichen

Gegenstandes wiedergegeben! Vergleichen Sie die konstruierten trimetrischen Bilder mit den dimetrischen (Übungen 3 bis 5 zu Tafel 28) und den isometrischen (Übungen 3 bis 5 zu Tafel 26) unter Beurteilung der Anschaulichkeit!

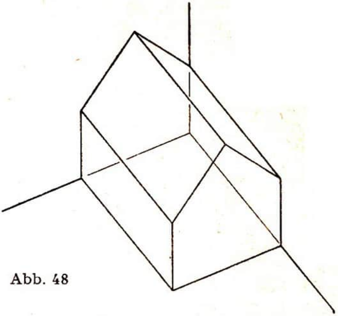


Abb. 48

Tafel 32

Auf Tafel 32 und 33 ist die Entstehung zentralperspektivischer Bilder dargestellt, auf Tafel 32 das eines einfachen Körpers (eines Würfels) in einfacher Lage, auf Tafel 33 das eines realen Objektes (eines Hauses) in beliebiger Lage zur Projektionstafel. Auf beiden Tafeln sind im Gegensatz zur Tafel 1 des ersten Bandes die Gegenstände nicht v o r, sondern hinter die Projektionstafel gestellt worden, so daß die lotrechte Projektionstafel zwischen Projektionszentrum Z und Gegenstand steht. Dadurch entstehen zentralperspektivische Bilder, die gegenüber den Originalen verkleinert sind.

Denkt man sich durch das *Projektionszentrum* (oder *Auge*) Z eine waagerechte Ebene, die sogenannte *Horizontebene*, gelegt, so schneidet diese die Projektionstafel in einer waagerechten Geraden, dem *Horizont*. Der Horizont ist in beiden Raumbildern als dünne Vollinie eingezeichnet worden. Auf dem Horizont entsteht durch senkrechte Projektion von Z auf die Bildtafel der *Hauptpunkt* (oder *Augpunkt*) A. Dieser Projektionsstrahl ist im Raumbild punktiert eingezeichnet worden. $\overline{ZA}$ heißt die *Distanz* (oder der *Augabstand*).

Um diese wichtige Strecke, die die Lage des Projektionszentrums zur Projektionstafel festlegt, auch im Perspektivbild sichtbar zu machen, wird sie auf dem Horizont von A nach beiden Seiten abgetragen. So entstehen die beiden *Distanzpunkte* D_1 und D_2, die in Tafel 32 zu sehen sind. Die ebenfalls punktiert eingezeichneten Verbindungslinien $\overline{ZD_1}$ und $\overline{ZD_2}$ verlaufen unter 45° zur Bildtafel.

Im Raumbild der Tafel 32 sieht man zwei Würfel hinter der Projektionsebene. Der linke steht in einfacher Lage, d.h. seine Seitenflächen liegen sämtlich parallel oder senkrecht zur Bildtafel. Er steht auf der Grundrißebene, also unterhalb der Horizontebene, so daß von Z aus der Blick schräg von oben auf ihn fällt. Das zentralperspektivische Bild ist auf der Bildtafel zu sehen.

Der rechte Würfel auf Tafel 32 steht höher, so daß die Horizontebene durch ihn hindurchläuft und als Perspektivbild eine Ansicht schräg von vorn entsteht. Der Würfel steht außerdem übereck, so daß nur noch vier seiner Kanten parallel zur Bildtafel verlaufen, die übrigen acht aber unter 45°, also parallel zu den Strecken $\overline{ZD_1}$ bzw. $\overline{ZD_2}$. Hier ist der Projektionsstrahl durch einen Eckpunkt strichpunktiert eingezeichnet worden; der Eckpunkt ist durch ein kleines Dreieck markiert.

Aus dieser Tafel entnehmen wir zunächst anschaulich (vgl. auch Erläuterungen zu Tafel 1 des ersten Bandes) die

Gesetze der Zentralprojektion:

a) Jedem Punkt des Gegenstandes entspricht im allgemeinen ein Punkt im Bild, jeder Strecke im allgemeinen eine Strecke.
b) Bei der Zentralprojektion ändert sich im allgemeinen die Größe von Strecken und Winkeln, und damit auch die Größe und Gestalt von Figuren.
c) Ausnahme: Winkel, deren Schenkel parallel zur Projektionstafel verlaufen, werden in wahrer Größe abgebildet. Folglich werden auch Figuren, die parallel zur Bildtafel liegen, als ähnliche Figuren abgebildet. (Das erkennt man im linken Würfel an der Vorder- und Hinterfläche.)
d) Infolgedessen werden parallele Strecken, die parallel zur Bildtafel liegen, wieder als parallele Strecken abgebildet. (Das sieht man bei beiden Würfeln an den lotrecht verlaufenden Kanten, beim linken außerdem an den waagerechten Kanten der Vorder- und Hinterfläche.)
e) Hauptsatz der Zentralprojektion: Parallele Geraden in beliebiger Neigung zur Projektionstafel werden im zentralperspektivischen Bild als nicht parallele Geraden abgebildet, die alle durch einen gemeinsamen Punkt, den sogenannten *Fluchtpunkt*, verlaufen. Diesen Fluchtpunkt erhält man, wenn man zu dem abzubildenden Parallelenbündel die Parallele durch Z legt; diese stößt im Fluchtpunkt durch die Bildtafel.
f) Sonderfall: Liegt das Parallelenbündel parallel zur Horizontebene, so liegt der Fluchtpunkt auf dem Horizont.

Den unter Punkt f) genannten Sonderfall zeigt Tafel 32:
Im linken Würfel verlaufen vier Kanten senkrecht zur Bildtafel, also parallel zur Horizontebene, und zwar zu ZA. Ihr Fluchtpunkt im zentralperspektivischen Bild liegt demnach auf dem Horizont, und zwar ist es der Hauptpunkt A. Für eine Würfelkante ist das in Tafel 32 durch eine dünne Vollinie besonders eingezeichnet.

Im rechten Würfel verlaufen vier Kanten parallel zu ZD_1 und vier andere zu ZD_2, d.h. ebenfalls parallel zur Horizontebene. Die Fluchtpunkte im zentralperspektivischen Bild liegen also auch auf dem Horizont, und zwar sind es die Distanzpunkte D_1 und D_2. Auch das ist in Tafel 32 für zwei Kanten durch dünne Vollinien besonders dargestellt.

Die Konstruktion zentralperspektivischer Bilder auf dem Zeichenblatt kann entweder unmittelbar aus den gegebenen Maßen erfolgen (sog. *freie Perspektive*) oder *aus dem Grundriß-Aufrißbild* des Gegenstandes. Eine Darstellung dieses Weges ist am rechten Würfel der Tafel 32 erläutert und in *Abbildung 49* ausgeführt worden. Man erkennt in Tafel 32 den Grundriß des rechten Würfels (hinter der Projektionsebene) und eine Aufrißtafel, die senkrecht zur Grundrißtafel und senkrecht zur Projektionsebene durch das Projektionszentrum Z gelegt wurde. Auf ihr sieht man den Aufriß des Würfels im Raum. (Vom Umklappen der Projektionsebene und der Aufrißtafel wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit in Tafel 32 abgesehen.)

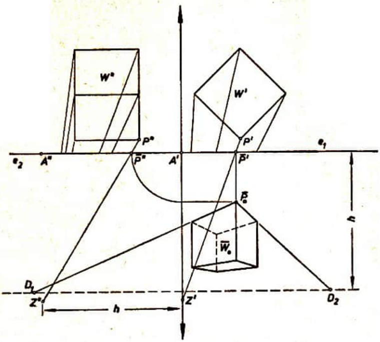


Abb. 49

Es ergibt sich das in *Abbildung 49* dargestellte Bild, wobei die Aufrißtafel nach links und die Projektionsebene nach vorn in die Grundrißtafel umgelegt worden sind. Die Rißachse verläuft infolgedessen diesmal von unten nach oben, die Spuren e_1 und e_2 der Projektionsebene verlaufen waagerecht und stehen senkrecht auf der Rißachse. Das Projektionszentrum Z sowie der Hauptpunkt A sind im Grund- und Aufriß zu sehen. Da Z und A in der Aufrißtafel liegen, liegen Z' und A' auf der Rißachse. (Um das Grundriß-Aufrißbild in gewohnter Lage zu haben, müßte man die *Abbildung 49* um 90° im Uhrzeigersinn drehen.)

Jetzt kann man das Perspektivbild punktweise konstruieren, indem man die Projektionsstrahlen von Z aus nach den acht Würfelecken in Grundriß und Aufriß einzeichnet, ihre Durchstoßpunkte durch die Projektionstafel (e_1, e_2) konstruiert und diese Punkte einzeln in die Grundrißtafel umlegt. Für einen durch ein kleines Dreieck gekennzeichneten Punkt P ist der Konstruktionsweg in Tafel 32 und in *Abbildung 49* durchgeführt. Der entsprechende Punkt im Perspektivbild ist mit $\bar{P}$ (gelesen: *P quer* oder *P überstrichen*) bezeichnet worden.

Bei der Betrachtung von Tafel 32 und *Abbildung 49* erkennt man, daß das Perspektivbild beim Umklappen nach vorn nicht in derselben Ansicht in der Grundrißtafel entsteht, die sich beim Betrachten von Z aus ergibt, sondern in einer um 180° gedrehten Lage. Wollte man die richtige Ansicht haben, müßte man die Projektionstafel nach hinten umklappen. Dann würde aber (vgl. Abb. 49) das Perspektivbild mit dem Grundrißbild übereinander zu liegen kommen und nicht mehr klar erkennbar sein. Man hilft sich so, daß man die Perspektivbilder ein Stück nach rechts verlagert, also gewissermaßen die Perspektivbilder nach rechts in die in *Abbildung 50* dargestellte Lage bringt. Dann liegen beide Perspektivbilder (die durch Umklappen nach vorn entstandene Rückseitenansicht $\bar{W}_1$ und die durch Umklappen nach hinten entstandene normale Ansicht $\bar{W}_2$) an freien Stellen des Zeichenblatts. Man erkennt, daß $\bar{W}_1$ und $\bar{W}_2$ achsensymmetrisch zueinander liegen mit e_1 als Symmetrieachse.

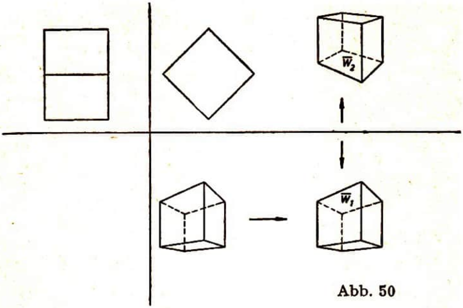


Abb. 50

Übungen:

1. Stellen Sie die mit Füßen versehene Glasplatte (vgl. Übung 1 zu Tafel 16) im Raumbild einmal an die Stelle der Projektionsebene und dann an die Stelle der Aufrißtafel! Suchen Sie mit der Bleistiftspitze jedesmal Z und A im Raum! Umfahren Sie mit der Bleistiftspitze Perspektivbild bzw. Aufrißbild jeweils auf der Glasplatte!
2. Stellen Sie die Glasplatte an die Stelle der Projektionstafel und halten Sie eine zweite (oder ein Stück Zelluloid o. ä.) an die Stelle der Horizontebene! Markieren Sie Z und A in der Horizontebene und den Horizont in der Projektionstafel!
3. Ergänzen Sie das Dreibein aus Übung 1 zu Tafel 25 durch weitere Stäbe zu einem Würfel und projizieren Sie diesen mit einer zentralen Lichtquelle (Glühlämpchen, Kerze) bei verschiedener Lage auf einen Pappschirm oder die Zimmerwand! Studieren Sie die mannigfachen Formen der entstehenden zentralperspektivischen Würfelbilder! Versuchen Sie insbesondere die in Tafel 32 dargestellten Würfelbilder zu erhalten!
4. Konstruieren Sie ein Grundriß-Aufrißbild und daraus das zentralperspektivische Bild gemäß den *Abbildungen 49 und 50* von folgenden Körpern jeweils erst in einfacher Lage, dann in Übereckstellung unter 45° zu den Tafeln:
   a) Quadratische Säule (4 cm × 4 cm × 8 cm),
   b) Quadratische Pyramide (Maße wie bei a),
   c) Quader (4 cm × 5 cm × 6 cm),
   d) Oktaeder (vgl. Tafel 12 des ersten Bandes; Seite 4 cm).
   Konstruieren Sie als Zeichenkontrolle auch die Distanzpunkte in jedem Perspektivbild!
5. Untersuchen Sie die Auswirkungen auf das Perspektivbild, wenn Sie die Lage des Projektionszentrums Z ändern! Wählen Sie dazu einen Würfel in einfacher Lage (linkes Bild von Tafel 32) und bringen Sie Z in extrem nahe oder extrem ferne Lagen zum Gegenstand! In welchen Fällen entstehen natürliche, in welchen unnatürliche Bilder?

Tafel 33

Tafel 33 unterscheidet sich von Tafel 32 nur dadurch, daß statt eines einfachen geometrischen Körpers ein reales Objekt (ein Haus mit Satteldach, Schornstein, einer Tür und zwei Fenstern) dargestellt ist, und daß es nicht unter 45°, sondern in beliebiger Lage zur Projektionstafel steht. Die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der Längs- und Querkanten des Gebäudes (einschließlich Traufen und First) fallen infolgedessen nicht mehr mit den Distanzpunkten zusammen, sondern liegen an beliebiger Stelle auf dem Horizont. Sie werden wie immer mit Hilfe von Parallelen zu den Hauskanten durch Z gefunden. Auch die schräg aufwärts führenden Dachbegrenzungen (der Ort der Dachflächen) führen im Perspektivbild zu gemeinsamen Fluchtpunkten für jede Dachfläche. Diese liegen aber, da die Kanten nicht parallel zur Horizontebene verlaufen, nicht auf dem Horizont. Diese Fluchtpunkte sind in Tafel 33 nicht mit eingezeichnet worden.

Übungen:

1. Konstruieren Sie das Perspektivbild des Hauses aus Tafel 33 aus Grund- und Aufriß! Konstruieren Sie auch die Fluchtpunkte F_1 und F_2 als Zeichenkontrolle! Überzeugen Sie sich, daß es auch für den Ort der Dachflächen Fluchtpunkte gibt! (Das Ergebnis ist in *Abbildung 51* dargestellt.)
2. Konstruieren Sie Perspektivbilder von folgenden Objekten:
   a) Gelenk von Tafel 8,
   b) Schiefes Prisma von Tafel 9,
   c) Durchdringung von Tafel 13,
   d) Objekte der Übungen 1 bis 4 zu Tafel 17,
   e) Schwalbenschwanzführung von Tafel 19,
   f) Führungsteil von Tafel 29!

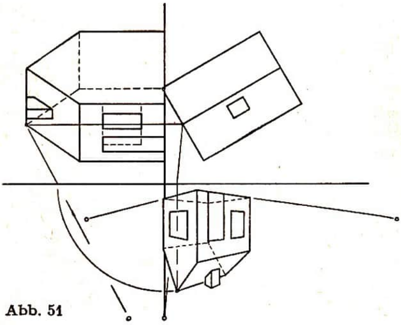


Abb. 51

Tafel 34

Die Tafeln 34 und 35 zeigen als wichtige Anwendung der Zentralperspektive Beispiele aus der *Kartenprojektion.* Da sich die Erde als kugelähnlicher Körper nicht in eine Ebene abwickeln läßt, kann man ebene Karten von der Erdoberfläche nur durch Projektionsverfahren erhalten. Dabei treten naturgemäß mehr oder minder große Verzerrungen auf, so daß z.B. Breitenkreise und Meridiane ihre Kreisgestalt verlieren, Winkel ihre Größe ändern, Flächenteile auf der Karte nicht mehr in demselben Verhältnis wie in der Natur stehen u.a.m. Durch geeignete Projektionsverfahren und durch geschickt gewählte Projektionsflächen (statt Ebenen z.B. Zylinder oder Kegel, die beide abwickelbar sind) kann man die genannten Verzerrungen wenigstens zum Teil vermeiden.

Unter den mannigfachen Verfahren der Kartenprojektion sind auf Tafel 34 und 35 zwei *Zentralprojektionen auf Ebenen* dargestellt; eine *stereographische Projektion* auf Tafel 34 und eine *gnomonische Projektion* auf Tafel 35.

Bei der *stereographischen Projektion* liegt das Projektionszentrum in einem Punkt der Erdoberfläche, die Projektionstafel berührt die Erdkugel im Gegenpunkt. Je nach dem Teil der Erdoberfläche, den man darstellen will, wählt man diese beiden Punkte verschieden aus. In Tafel 34 ist als *Projektionszentrum P* der *Nordpol* genommen worden. Die *Projektionsebene* berührt demzufolge im *Südpol.* Auf der Kugel sind der Äquator und zwei beliebige Meridiane (als Vollinien) eingezeichnet worden. Ersterer erscheint im Projektionsbild als Kreis, letztere ergeben Gerade durch den Berührungspunkt der Projektionstafel.

Die wichtigsten *Eigenschaften der stereographischen Projektion* sind ihre *Winkeltreue* und ihre *Kreistreue.* Um erstere nachzuweisen, ist in Tafel 34 in einem beliebigen Punkt C der Erdkugel ein quadratischer Ausschnitt aus einer Tangentialebene und in dieser ein Winkel eingezeichnet worden. Da seine Schenkel Tangenten an die Erdkugel sind, repräsentiert er einen sphärischen Winkel. Erweitert man diese Tangentialebene bis zum Schnitt mit der Projektionstafel, so stoßen auch die Winkelschenkel durch diese durch, und zwar in F und B. Von F und B gehen auch die Schenkel $\overline{FA}$ und $\overline{BA}$ des Projektionsbildes des Winkels aus. Aus der Gleichheit der Strecken $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$, die sich am Kugelschnitt mit Hilfe von Winkelgleichheiten nachweisen läßt (vgl. dazu die *Abbildung 52*: Schnittebene durch $ABCMP$, senkrecht zur Projektionstafel und senkrecht zur Tangentialebene), aus der gemeinsamen Strecke $\overline{FB}$ und aus der Gleichheit der rechten Winkel CBF und ABF folgt die Kongruenz der Dreiecke ABF und CBF und damit die Gleichheit des Winkels an der Kugel und im stereographischen Bild.

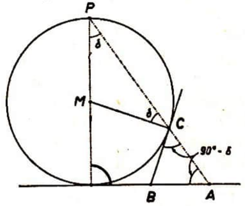


Abb. 52

Aus der Winkeltreue folgt die Kreistreue der stereographischen Projektion für beliebige Klein- und Großkreise der Kugel, wenn man bedenkt, daß nur beim Kreis der Berührungsradius auf der

Tangente senkrecht steht. Projiziert man deshalb einen Kleinkreis mit seinem Tangentenkegel (Spitze E) stereographisch (Projektion der Kegelspitze ist D), so bleiben die rechten Winkel zwischen den von E ausgehenden Mantellinien und den Tangenten an den Kugelkleinkreis in ihrer Größe unverändert und werden zu rechten Winkeln zwischen den Tangenten im Projektionsbild und den von D ausgehenden Berührungsradien. Damit ist gezeigt, daß das stereographische Bild jedes Kugelkreises wieder ein Kreis sein muß.

In Tafel 34 ist ferner für einen Kleinkreis (Strichlinie) und für einen beliebigen Großkreis (strichpunktiert) das kreistreue stereographische Bild eingezeichnet worden.

Übungen:

1. Konstruieren Sie eine mit dem Südpol auf der Grundrißtafel stehende Erdkugel mit von 15 zu 15 Grad fortschreitenden Breitenkreisen im Grundriß und Aufriß! Zeichnen Sie im Grundriß auch die von 15 zu 15 Grad fortschreitenden Meridiane ein!
2. Konstruieren Sie unter Zuhilfenahme des Grundriß-Aufrißbildes von Übung 1 eine stereographische Projektion auf die Grundrißtafel vom Nordpol aus! Welche Halbkugel läßt sich ohne Schwierigkeit abbilden?
3. Wie liegen Projektionszentrum und Projektionstafel bei der stereographischen Projektion der Nordhalbkugel?
4. Ergibt sich bei der stereographischen Projektion eine Längenverzerrung, d.h. eine Änderung der Längenverhältnisse in Richtung der Meridiane?

Tafel 35

Beim Betrachten der Tafel 35 lege man sie so, daß man direkt vor der Abbildung sitzt. In ihr ist die *gnomonische Projektion* dargestellt. Bei dieser liegt das *Projektionszentrum* im *Erdmittelpunkt*, die *Projektionsebene* berührt die Erdkugel an einem *beliebigen Punkt der Erdoberfläche.* In Tafel 35 ist dazu der *Südpol* ausgewählt worden.

Für die gnomonische Projektion ist charakteristisch

a) die *Geradstreckung aller Großkreise,* d.h. die Abbildung der Kugelgroßkreise als Geraden;

b) die *starke Längenverzerrung.*

Diese führt dazu, daß es gar nicht möglich ist, eine vollständige Halbkugel abzubilden. Denn diese würde sich über die gesamte, unbegrenzt erweiterte Projektionsebene erstrecken. Beides ist auf Tafel 35 zu erkennen. Beachten Sie insbesondere die Abbildung des beliebigen Kugelgroßkreises als Gerade (strichpunktiert)!

Daneben zeigt die Tafel 35 zwei Meridiane, die als Gerade abgebildet werden (Vollinien), sowie fünf Kleinkreise (ebenfalls Vollinien), die im gnomonischen Bild zu Kreisen werden. An diesen erkennt man den rasch zunehmenden Abstand in Äquatornähe, also die starke Längenverzerrung. Vom Äquator selbst ergibt sich im Endlichen kein Bild.

Übungen:

1. Begründen Sie die Geradstreckung der Großkreise bei der gnomonischen Projektion!
2. Entwerfen Sie aus dem Grundriß-Aufrißbild (vgl. Übung 1 zu Tafel 34) die gnomonische Projektion der Südhalbkugel!
3. Wie müßten Sie verfahren, wenn Sie die Nordhalbkugel gnomonisch abbilden wollten?
4. Wie sieht eine gnomonische Abbildung der Meridiane aus, wenn der Berührungspunkt der Projektionsebene der Schnittpunkt des Äquators mit dem Nullmeridian ist? Das Ergebnis dieser Übung zeigt die *Abbildung 53*, dort sind auch die Breitenkreise eingezeichnet (sie ergeben Hyperbeläste).

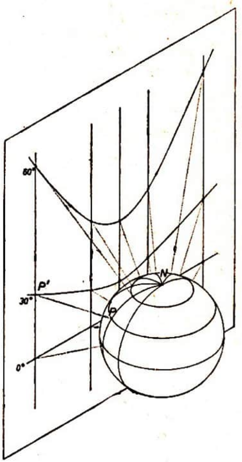


Abb. 53

Tafel 36

Als Beispiel einer *nicht zentralperspektivischen Kartenprojektion* ist auf Tafel 36 eine *Zylinderprojektion* dargestellt. Hierbei denkt man sich um die Erdkugel einen berührenden Zylinder gelegt (auf Tafel 36 berührt er längs des Äquators) und projiziert auf diesen alle Kugelpunkte durch Projektionsstrahlen, die senkrecht von der Zylinderachse ausgehen. Der Zylinder wird schließlich in die Ebene abgewickelt, doch ist das in Tafel 36 nicht mit eingezeichnet worden.

Für Punkt P ist der Projektionsvorgang in Tafel 36 besonders dargestellt worden. Der punktierte Projektionsstrahl ergibt auf dem Zylinder den Punkt A. Im übrigen sind die Breitenkreise, von 15 zu 15 Grad fortschreitend, zu sehen sowie zwei beliebige Meridiane. Beide Linienarten ergeben (nach der Abwicklung) gerade Linien.

Die geradlinigen Projektionen der Breitenkreise sind nach den Polen zu stark zusammengedrängt. Diesen Nachteil kann man dadurch beheben, daß man die Punkte nach den Polen zu in immer stärkerem Maße anhebt. Für Punkt P ist das auf der Tafel 36 zu sehen: A wird in Lage B gehoben. P wird also jetzt in B abgebildet. Diese Lageveränderungen werden nicht mehr durch Projektionsvorgänge erzeugt, sondern durch Umrechnungen ermittelt. Je nach diesen Umrechnungsvorschriften kann man den Zylinderkarten diese oder jene wünschenswerte Eigenschaft zuweisen, z.B. Abstandstreue, Winkeltreue, Flächentreue u.a.m.

Übungen:

1. Begründen Sie, warum bei der in Tafel 36 dargestellten Zylinderprojektion alle Meridiane und Breitenkreise als gerade Linien abgebildet werden!
2. Konstruieren Sie die Zylinderprojektion der Erdkugel mit von 15 zu 15 Grad fortschreitenden Breiten- und Längenkreisen bei einer Zylinderberührung längs des Äquators (ohne Hebung der Punkte) aus dem Grundriß-Aufrißbild! In dieses müssen Sie jetzt außer der Kugel auch den berührenden Zylinder einzeichnen und letzteren dann abwickeln.
3. Hat es Sinn, den Zylinder längs eines Meridians berühren zu lassen? Wie würde dabei das Gradnetz abgebildet werden?

Anhang

Die nachstehenden Abbildungen 54 bis 58 stellen die Ergebnisse der Übungen 1 bis 5 zur Tafel 23 dar (vgl. entsprechenden Hinweis auf S. 34).

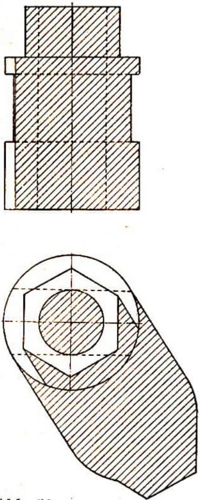


Abb. 54

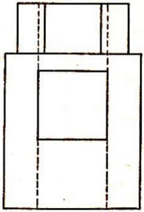


Abb. 55

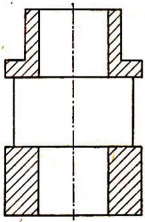


Abb. 56

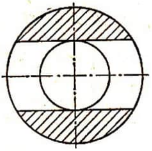


Abb. 57

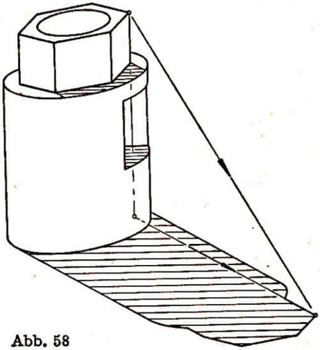


Abb. 58