Junge Mathematiker

Mathematischer Lesebogen, herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig

zusammengestellt von J. Lehmann *Heft 71*

Mathematikolympiaden in der Sowjetunion

Auswahl von Aufgaben aus den Klassenstufen 8 bis 10 (mit Lösungen)

Leipzig, den
7. Oktober 1984

35 Jahre DDR

Liebe Freunde der Mathematik!

Seit über zwei Jahrzehnten bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen dem Komitee der Mathematikolympiaden der UdSSR, der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift "Quant" und der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha". Das kommt zum Ausdruck im persönlichen Erfahrungsaustausch und im Austausch von Beiträgen und Aufgabensammlungen.
Das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Leipzig hat zur weiteren Förderung interessierter Schüler seit 1961 77 Lesebogen Junger Mathematiker mit einer Gesamtauflage von 290 000 Heften herausgegeben. Ein Schwerpunkt war die Veröffentlichung einer Dokumentation der Aufgaben (und Lösungen) der ABC-Mathematikolympiaden, der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Klassen 5 bis 10), eines IMO-Sonderheftes und Aufgabensammlungen aus der Sowjetunion und den Ländern der sozialistischen Staatengemeinschaft. Die Aufgaben der Klassenstufen 11/12 werden aus Anlaß der XXV. OJM im Dezember 1985 veröffentlicht.
In Auswertung der sowjetischen Erfahrungen auf dem Gebiet der Olympiadebewegung seit über einem halben Jahrhundert stellen wir zwei Hefte mit einer Auswahl von Olympiadeaufgaben und Lösungen, einerseits für die Klassenstufen 4 bis 7 (Lesebogen Nr. 76) und andererseits für die Klassenstufen 8 bis 11 (Lesebogen Nr. 71) unseren interessierten Lesern zur Verfügung.

Unser Dank gilt den beiden ehemaligen erfolgreichen IMO-Teilnehmern Dr. W. Moldenhauer, Pädagogische Hochschule "Theodor Neubauer", Erfurt (Kl. 4 bis 7) und Dr. H.-D. Gronau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock für die Übersetzung, Auswahl, Bearbeitung von Aufgaben und Lösungen des sowjetischen Materials.

Unseren Lesern wünschen wir
Freude und Erfolg

Leh

OStR J. Lehmann, VLdV
Chefredakteur der
mathematischen Schüler-
zeitschrift "alpha"

Aufgaben aus sowjetischen Mathematik-Olympiaden

Die Traditionen von mathematischen Schülerwettbewerben gehen in der Sowjetunion weit zurück. Bereits 1886 fanden in Rußland die ersten, wenn auch sporadischen Wettstreite statt. Eine größere Entwicklung der Wettbewerbe setzte aber erst nach der Oktoberrevolution ein. Im Jahr 1934 fand die erste Schülerolympiade an der Leningrader Universität statt. Ein Jahr später begannen auch die jährlichen Schülerwettbewerbe an der Moskauer Universität. Nach dem Großen Vaterländischen Krieg wurde ab 1947 in Wologde, Ivanov, Irkurtsk und Smolensk, ab 1949 in Saratov und ab 1950 in der Belorussischen SSR mit regelmäßigen Olympiaden begonnen. Da Schülerwettstreite, gerade auf mathematischem Gebiet, eine große Bedeutung für das sozialistische Bildungssystem haben- insbesondere für die Suche und die Förderung von besonderen Begabungen - wurde 1961 mit Olympiaden im Rahmen der Unionsrepubliken und ab 1967 in der gesamten UdSSR begonnen.

Die Olympiaden werden in fünf Stufen unter Beteiligung verschiedener Klassenstufen durchgeführt. Die Schulolympiade (1. Stufe) wird für die Schüler der Klassen 4 bis 10 veranstaltet. Hierbei gibt es auch Mannschaftswettbewerbe. An der Kreisolympiade nehmen Schüler der Klassen 5 bis 10 teil.

Die Bezirksolympiade (ASSR-Olympiade) wird für Schüler der 7. bis 10. Klasse organisiert, während die Republikolympiaden (SSR-Olympiaden) und die Allunionsolympiaden für die Klassen 8 bis 10 durchgeführt werden. Aus den Siegern der Allunionsolympiaden wird die Nationalmannschaft für die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) gebildet.
In zwei Heften werden die verschiedenen Stufen an Hand von ausgewählten Aufgaben vorgestellt und zwar in den Klassenstufen 4 bis 7 von W. Moldenhauer und in den Klassenstufen 8 bis 10 von H.-D. Gronau.

Die Aufgaben wurden der sowjetischen Broschüre
I. S. Petrakov
Mathematische Schülerolympiaden
Moskau, Verlag für Bildung, 1982
entnommen.

Die Lösungen wurden überarbeitet. Zahlreiche Aufgaben haben neue Lösungen erhalten.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, so daß für Interessenten verschiedener Leistungsstufen geeignetes Material enthalten ist.
Für die Bearbeiter, selbst seit langem mit der Olympiadebewegung in der DDR verbunden, war es nicht nur interessant, etwas über die Organisation der Mathematik-Olympiaden im Freundesland UdSSR zu erfahren, sondern zahlreiche Aufgaben gaben neue Impulse für die Schülerförderung. So haben wir die Hoffnung, daß viele Leser die beiden Hefte als echte Bereicherung im Rahmen ihrer Beschäftigung mit der Mathematik ansehen werden.

H.-D. Gronau/W. Moldenhauer

AUFGABEN

SCHULOLYMPIADE

Aufgaben für die 8. Klasse

1. Man löse die Gleichung

$$|3x^2 + 5x| = 2.$$

2. Man löse das Gleichungssystem

$$x + y + xy = 11,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 19.$$

3. Welche Figur beschreibt die Menge der Lösungen des Ungleichungssystems

$$x^2 + y^2 \leqq 16,$$
$$y - x \geqq 1?$$

4. In einer 8. Klasse sind 40 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Fremdsprachen: Englisch, Deutsch, Französisch. 34 Schüler lernen mindestens eine der beiden Sprachen: Englisch und Deutsch. 25 Schüler mindestens eine der Sprachen: Deutsch, Französisch. 6 Schüler lernen nur Deutsch. Genau zwei Sprachen, Englisch und Deutsch, lernen 3 Schüler mehr als Französisch und Deutsch. Kein Schüler lernt Englisch und Französisch. Wieviele Schüler lernen genau eine bzw. genau zwei Sprachen?

Aufgaben für die 9. Klasse

5. Nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiere man

$$x = \sqrt{93}.$$

6. Man berechne die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}(\sqrt{7} + \sqrt{5})} + \frac{6 - \sqrt{35}}{2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{5} - 5\sqrt{7}}{24 + 4\sqrt{35}} + \dots$$

7. Auf den Kanten des Würfels $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit der Kantenlänge a seien drei Punkte gegeben:
E sei der Mittelpunkt der Kante AB, K der Mittelpunkt von B_1C_1 und P der Mittelpunkt von DD_1. Die durch E, K und P bestimmte Ebene schneidet den Würfel in zwei Teile.
Man bestimme den Flächeninhalt der Schnittfläche.

8. Man löse die Gleichung

$$\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aufgaben für die 10. Klasse

9. Man löse die Gleichung

$$\sin 2x - \sqrt{3}\,(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x.$$

10. Man beweise die Identität

$$\frac{\cos\alpha - 2\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \cot(\pi - 3\alpha)\cdot\tan^2\alpha .$$

11. Man zeige, daß der Ausdruck

$$(2\cdot 5^7 - 5\cdot 2^7)^{83} - \left((2\cdot 5^7)^{83} - (5\cdot 2^7)^{83}\right)$$

durch 83 teilbar ist.

12. Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2xy + yz &= 27,\\ 3yz - 2zx &= 25,\\ xz - xy &= 4. \end{aligned}$$

KREISOLYMPIADE

Aufgaben für die 8. Klasse

13. Den Siegern einer Mathematik-Olympiade werden 1., 2. und 3. Preise überreicht. Die Zahl der 1. Preise ist um 12 kleiner als die der 2. Preise. 3. Preise erhielten genau doppelt soviele Teilnehmer wie erste und zweite zusammen, doch diese Zahl ist genau um 104 kleiner als das Produkt von den Anzahlen der 1. und 2. Preise.
Wieviele Schüler erhielten Preise?

14. Um ein gleichseitiges Dreieck mit einer Kantenlänge von 12 cm wird der Umkreis gezeichnet und diesem wird ein regelmäßiges Sechseck umschrieben. Über jeder Seite des Sechsecks wird ein Halbkreis mit Seitenlänge als Durchmesser nach außen konstruiert.
Man berechne die Fläche der Rosette.

15. Man gebe eine quadratische Gleichung an, deren Wurzeln gerade die Quadrate der Wurzeln von

$$x^2 + 55x - 45 = 0$$

sind.

16. Man zeige, daß der Ausdruck

$$\frac{10^{2n-2} + 2}{3} + \frac{10^{3n-3} + 2^3}{3^2}$$

für beliebige natürliche Zahlen n, $n \geq 1$, ganzzahlig ist.

Aufgaben für die 9. Klasse

17. Man löse die Gleichung

$$|x^2 + 3x| = |2x - 6.|$$

18. Man berechne die Fläche des Dreiecks ABC, wenn die Koordinaten der Eckpunkte folgendermaßen gegeben sind:

$$A(2;\ 3),\ B(8;\ 6\sqrt{3} + 3),\ C(2 + 4\sqrt{3};\ 7).$$

19. Man löse die Gleichung

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32}),$$

wobei a eine fixierte natürliche Zahl sei, $a \neq 0$.

20. Man beweise für beliebige natürliche Zahlen n:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Aufgaben für die 10. Klasse

21. Man löse die Gleichung

$$3x^2 + 5\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 48 + 5x.$$

22. Man löse die Gleichung

$$\sin^2 x \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} .$$

23. Man ermittle das Volumen einer Pyramide, deren Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit α als Winkel an der Spitze, deren Seitenkanten jeweils einen Winkel von 2α mit der Grundfläche bilden und deren Umkugel einen Radius R hat.

24. In der Gleichung

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots}}} = \sqrt{1980}$$

sind unendliche viele Wurzeln enthalten.
Man bestimme x!

BEZIRKSOLYMPIADE

Aufgaben für die 8. Klasse

25. Zwei Radfahrer fahren zur selben Zeit los und mit konstanter Geschwindigkeit, einer von A nach B und einer von B nach A. Das erste Mal treffen sie sich in einer Entfernung von 40 km von B. Nachdem sie am Endpunkt angekommen sind, fahren sie sofort zurück und treffen sich ein zweites Mal, 8 Stunden nach dem ersten Treffen, in einer Entfernung von 20 km von A.
Man ermittle die Entfernung von A nach B und die Geschwindigkeit jedes Radfahrers.

26. Man löse das Gleichungssystem

$$\frac{xy}{x+y} = 1 - z ,$$

$$\frac{yz}{y+z} = 2 - x ,$$

$$\frac{zx}{z+x} = 2 - y .$$

27. Man zeige, daß aus $a + b + c = 0$ folgt:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

28. Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In der ersten liegen 2 schwarze Kugeln, in der zweiten eine schwarze und eine weiße und in der dritten zwei weiße. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Weiß und schwarz" und "Zwei weiße". Doch ist bekannt, daß keine Aufschrift richtig ist.
Wie kann man durch Herausnehmen nur einer Kugel aus einer Schachtel die Verteilung der Kugeln bestimmen?

Aufgaben für die 9. Klasse

29. Man zeige, daß die Zahl

$$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$$

für beliebige natürliche Zahlen n durch 19 teilbar ist.

30. Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen, für die der Bruch

$$\frac{19n + 17}{7n + 11}$$

eine ganze Zahl ist.

31. Man beweise

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n}} = \underbrace{333\ldots3}_{n}$$

32. In einem Dreieck stehen zwei Seitenhalbierenden senkrecht aufeinander und haben eine Länge von 18 cm bzw. 24 cm. Man bestimme den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Aufgaben für die 10. Klasse

33. Man beweise

$$\frac{(n + 1)(n + 2) \ldots (2n - 1)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)} = 2^n$$

34. Man berechne die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{n}{2^n} .$$

35. Im Inneren eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C sei ein Punkt M derart gegeben, daß die Dreiecke AMB, BMC und CMA flächengleich sind.
Man zeige

$$5\,\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 \,.$$

36. Man beweise, daß

$$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$$

durch $5(x - y)(y - z)(z - x)$ teilbar ist, wenn x, y und z ganze, paarweise verschiedene Zahlen sind.

REPUBLIKSOLYMPIADE (SSR-Olympiade)

Aufgaben für die 8. Klasse

37. Man zeige, daß man unter beliebigen 39 aufeinanderfolgenden Zahlen stets eine findet, deren Quersumme durch 11 teilbar ist.
Man gebe ein Beispiel an, in dem die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen, deren Quersumme durch 11 teilbar ist, genau 39 ist.

38. Wir haben einen Vektor (a, b, c, d) von positiven reellen Zahlen. Wir bilden folgenden neuen Vektor (ab, bc, cd, da). Nach gleichem Bildungsgesetz erhalten wir dann
$(ab^2c,\ bc^2d,\ cd^2a,\ da^2b)$ etc.
Man beweise: Wenn man dieser Folge irgendwann den Ausgangsvektor erhält, so ist $a = b = c = d = 1$.

39. Man zeige, daß es kein Polygonzug gibt, der jede der 16 Strecken der in dem Bild 1 gezeichneten Figur genau einmal schneidet.

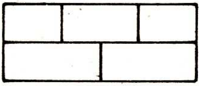


Bild 1

40. Man beweise, daß keine ganzen Zahlen a, b, c, d existieren, die die Gleichungen

$$abcd - a = \underbrace{11\ldots1}_{1961}\ , \quad abcd - b = \underbrace{11\ldots1}_{1961}\ ,$$

$$abcd - c = \underbrace{11\ldots1}_{1961}, \quad abcd - d = \underbrace{11\ldots1}_{1961}$$

erfüllen.

<u>Aufgaben für die 9. Klasse</u>

41. In den Kästchen einer m x n - Tabelle stehen gewisse Zahlen. Man kann gleichzeitig die Vorzeichen von allen Zahlen einer Spalte oder Reihe wechseln.
Man beweise, daß man durch wiederholte Anwendung dieser Operation eine Tabelle erhalten kann, in der die Summe aller Zahlen jeder Spalte bzw. Reihe nichtnegativ ist.

42. a, b und p seien beliebige ganze Zahlen mit $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $p > a, b$.
Man beweise, daß es natürliche Zahlen k und l gibt, die zueinander relativ prim sind und für die

$ak + bl$

durch p teilbar ist.

43. n Punkte seien durch Strecken verbunden und zwar so, daß zwischen je zwei Punkten genau ein Streckenzug existiert.
Man beweise, daß es genau n - 1 Strecken gibt.

44. Petja und Kolja teilen 2n + 1 Nüsse ($n \geqq 2$) unter sich auf. Dabei möchte jeder eine möglichst große Anzahl von Nüssen erhalten. Sie vereinbaren drei Arten der Aufteilung (jeweils in drei Etappen; die Etappen I und II sind allen Arten der Aufteilung gemeinsam).

I. Kolja zerlegt alle Nüsse in zwei Teile, in jedem nicht weniger als 2 Nüsse.
II. Petja zerlegt jeden Teil erneut in zwei Teile, in jedem mindestens eine Nuß.
III. Bei der ersten Art der Aufteilung nimmt Petja den größten und den kleinsten Teil. Bei der zweiten Art nimmt Petja die beiden mittleren Teile. Bei der dritten Art nimmt Petja entweder den größten und den kleinsten Teil oder die beiden mittleren Teile; gibt Kolja aber eine Nuß für das Recht der Auswahl.

Man ermittle, welche Art der Aufteilung die günstigste und welche die ungünstigste für Petja ist, wenn Kolja die für ihn beste Aufteilung in jedem Verfahren wählt.

Aufgaben für die 10. Klasse

45. Man beweise, daß für beliebige drei unendliche Folgen natürlicher Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

zwei Indices p und q existieren, so daß $p > q$ und

$$a_p \geqq a_q, \; b_p \geqq b_q, \; c_p \geqq c_q$$

gilt.

46. In ein Rechteck von 20 x 25 werden 120 Quadrate vom Format 1 x 1 geworfen.
Man zeige, daß es im Rechteck einen Kreis mit dem Durchmesser 1 gibt, der keinen Punkt der Quadrate enthält.

47. In der Ebene sei ein Punkt P fixiert. Wir betrachten alle gleichseitigen Dreiecke ABC mit $\overline{AP} = 3$, $\overline{BP} = 2$.
Welches ist die größte Länge der Strecke $\overline{CP}$?

48. Gegeben sei ein Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_{2^k})$, bestehend aus +1's und -1's. Wir bilden neue Vektoren folgendermaßen:

$$(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_{2^k-1}, x_{2^k}x_1),$$
$$(x_1x_2^2x_3, x_2x_3^2x_4, x_3x_4^2x_5, \ldots, x_{2^k-1}x^2_{2^k}x_1, x_{2^k}x_1^2x_2),$$

etc.
Man zeige, daß schließlich die Vektoren nur noch aus Einsen bestehen.

ALLUNIONSOLYMPIADE

Aufgaben für die 8. Klasse

49. In einer natürlichen Zahl werden die Ziffern in beliebiger Weise vertauscht.
Man zeige, daß die Summe dieser Zahl und der Ausgangszahl nicht

$$\underbrace{99\ldots9}_{1967 \text{ Ziffern}}$$ sein kann.

50. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei AH, die längste der Höhen, gleichlang der Seitenhalbierenden BM.
Man zeige, daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ kleiner oder gleich 60° ist.

51. Ein Scheinwerfer beleuchte einen Winkel von 90°.
Man zeige, daß man bei beliebiger Standortwahl von vier solcher Scheinwerfer diese so richten kann, daß die gesamte Ebene beleuchtet wird.
(Diese Aufgabe wurde auch für die 9. Klasse gestellt.)

52. Kann man die Zahlen 0, 1, 2, ..., 9 so auf einem Kreis anordnen, daß sich je zwei benachbarte Zahlen um 3, 4 oder 5 unterscheiden?

53. Man zeige, daß es eine natürliche Zahl gibt, die durch 5^{1000} teilbar ist und in ihrer Dezimaldarstellung keine Null enthält.

<u>Aufgaben für die 9. Klasse</u>

54. Kann man die Zahlen 1, 2, 3, ..., 13 so auf einem Kreis anordnen, daß sich je zwei benachbarte Zahlen um 3, 4 oder 5 unterscheiden?

55. Die Ziffern einer gegebenen natürlichen Zahl wurden in irgendeiner Weise vertauscht. Die erhaltene und die ursprüngliche Zahl haben die Summe 10^{10}.
Man zeige, daß die ursprüngliche Zahl durch 10 teilbar ist!

56. Im spitzwinkligen Dreieck ABC sei die Höhe CK gleichlang der Seitenhalbierenden BQ und der Winkelhalbierenden AP.
Man zeige, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

57. Man bestimme alle Paare ganzer Zahlen x und y, die die Gleichung

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

erfüllen.

Aufgaben für die 10. Klasse

58. In einer Folge positiver ganzer Zahlen ist jedes Glied der Folge, beginnend mit dem dritten, gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden Vorgänger.
Welches ist die größte Länge einer solchen Folge, wenn kein Glied größer als 1967 ist?

59. In jedem von 8 Punkten im Raum steht ein Scheinwerfer, der jeweils einen Oktanten (= räumliches Gebiet, das durch drei, paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen begrenzt wird) beleuchtet.
Man beweise, daß man die Scheinwerfer so richten kann, daß sie den gesamten Raum beleuchten.

60. Auf einem Schachbrett vom Format 1000 x 1000 stehen ein schwarzer König und 499 weiße Türme.
Man zeige, daß sich der schwarze König ins Schach begeben kann, unabhängig von der Ausgangsposition und bei beliebiger Spielweise von weiß.

61. Drei aufeinanderfolgende Punkte eines Rhombus liegen auf den Seiten AB, BC und CD eines gegebenen Quadrats ABCD mit der Kantenlänge 1.
Man bestimme die Fläche der Figur, die der 4. Punkt des Rhombus annehmen kann.

62. Die natürliche Zahl k habe die folgende Eigenschaft:
Wenn eine beliebige natürliche Zahl m durch k teilbar ist, so ist k auch Teiler der Zahl, die aus m dadurch entsteht, daß die Ziffern von m in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben werden.
Man zeige, daß k ein Teiler von 99 ist!

LÖSUNGEN

1. $|3x^2 + 5x| = 2$ ist genau dann erfüllt, wenn
a) $3x^2 + 5x = 2$ falls $3x^2 + 5x \geqq 0$ oder
b) $3x^2 + 5x = -2$ falls $3x^2 + 5x < 0$.
Zu a) $3x^2 + 5x = 2$ hat die Lösungen

$$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{(\frac{5}{6})^2 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -2.$$

Für beide Lösungen gilt $3x^2 + 5x \geqq 0$.
Zu b) $3x^2 + 5x = -2$ hat die Lösungen

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x_{3,4} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{(\frac{5}{6})^2 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-5 \pm 1}{6}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3},\ x_4 = -1.$$

Für beide Lösungen gilt $3x^2 + 5x < 0$.
Die Lösungen der gegebenen Gleichungen sind: $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, -1, -2.

2. Wir nehmen an, das System hat eine Lösung.
Wir setzen $a = x + y$ und $b = x \cdot y$. Dann gilt

$$a + b = 11,$$

$$a^2 - b = 19.$$

Weiter folgt $a^2 + a = 30$, also

$$a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 30},$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{2},$$

$$a_1 = 5,\ a_2 = -6 \text{ und damit } b_1 = 6,\ b_2 = 17.$$

Für x und y folgt weiter

$$x + y = a,\ xy = b,$$

d.h. $x(a - x) = b$,

$$x^2 - ax + b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Für $(a_1, b_1) = (5, 6)$ erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$

$$x_1 = 3, \; x_2 = 2$$

und dazu

$$y_1 = 2, \; y_2 = 3.$$

Für $(a_2, b_2) = (6, 17)$ erhalten wir

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 17}$$

und damit keine reellen Lösungen.
Die Lösungspaare des Systems sind genau die Paare (3, 2) und (2, 3).

3. Der geometrische Ort der Punkte mit $x^2 + y^2 \leqq 16$ ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius 4. $y - x \geqq 1$ beschreibt eine Halbebene, die durch $y - x = 1$ begrenzt wird. Die gesuchte Fläche ist in Bild 2 schraffiert dargestellt.

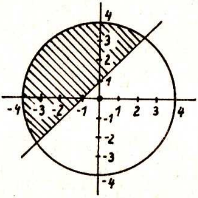


Bild 2

4. Wir können die Mengen der Schüler, die eine Sprachkombination lernen, gemäß Bild 3 darstellen:

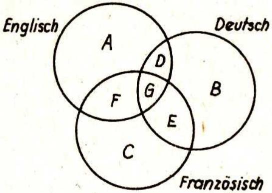


Bild 3

Nach den Angaben der Aufgabe ist

$$\begin{aligned} A + B + C + D + E + F + G &= 40, \\ A + B + D + E + F + G &= 34, \\ B + C + D + E + F + G &= 25, \\ B &= 6, \\ D &= E + 3 \\ F + G &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort
$A = 15,\ B = 6,\ C = 6,\ D = 8,\ E = 5,\ F = G = 0.$

5. $$x = \sqrt{93} = \sqrt{100 - 7} = \sqrt{10^2 - \sqrt{16 - 9}^{\,2}} = \sqrt{10^2 - (\sqrt{4^2 - 3^2}\,)^2}.$$

Nur unter Ausnutzung des Satzes von Pythagoras folgt leicht die Konstruktionsmöglichkeit, siehe Bild 4.

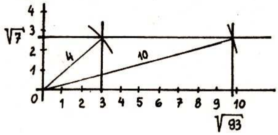


Bild 4

6. Der Quotient der Summanden ist konstant, nämlich

$$\frac{\sqrt{5}\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}.$$

Also handelt es sich um eine geometrische Reihe, die wegen

$$0 < \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} < 1$$

konvergiert. Als Summe erhalten wir

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{5(2 - \sqrt{35} + 5)} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{5(7 - \sqrt{35})}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{35}.$$

7. Zunächst beweisen wir, daß die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Sei Q der Mittelpunkt von $\overline{EK}$. Projezieren wir K und Q und P senkrecht in die Grundebene. Die Fußpunkte seien K_1, Q_1 bzw. ist D. (siehe Bild 5)

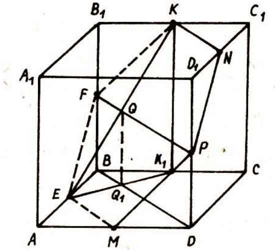


Bild 5

Offenbar halbiert K_1 die Kante BC und Q_1 halbiert K_1E.

Aus Symmetriegründen liegt Q_1 damit in der Geraden BD. Da die Gerade BD das Projektionsbild der Geraden PQ ist, muß PQ die Gerade BB_1 schneiden und da PQ $\parallel$ BD ist, ist der Schnittpunkt F von PQ und BB_1 auch Mittelpunkt von $\overline{BB_1}$. Analog folgt, daß auch die Mittelpunkte N von $\overline{D_1C_1}$ und M von AD zur Schnittfläche gehören. Offenbar ist dieses Sechseck sogar regelmäßig. Die Seitenlänge des Sechsecks ergibt sich zu $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Damit folgt für den Flächeninhalt der Schnittfläche

$$6 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3} = 3\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,.$$

8. Nach den bekannten Doppelwinkelsätzen haben wir

$$\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{genau dann, wenn}$$

$$\frac{\cos 2x + 2\cos^2 2x}{\sin 2x(1 + 2\cos 2x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\sin 2x \neq 0, \text{ d. h. } x \neq \frac{\pi}{2} n,\ n \in G \quad \text{und}$$

$$\cos 2x \neq -\frac{1}{2}, \text{ d.h. } x \neq \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in G.$$

Für alle anderen x können wir die Gleichung weiter äquivalent umformen:

$$\frac{\cos 2x(1+2\cos 2x)}{\sin 2x(1+2\cos 2x)} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 2x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + \pi m, \quad m \in G$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi\frac{m}{2}, \quad m \in G.$$

Für ungerade m erhalten wir ausgeschlossene x, für gerade m, $m = 2l$, $l \in G$, erhalten wir Lösungen.
Die Lösungen der Gleichung sind alle $x = \frac{\pi}{6} + \pi l$, $l \in G$.

9. Wir formen die gegebene Gleichung äquivalent um:

$$\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x,$$

$$\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - (1 + \cos 2x) = 0,$$

$$2\sin x \cos x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 2\cos^2 x = 0,$$

$$2\cos x(\sin x - \cos x) - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0, \text{ also}$$

a) $\sin x - \cos x = 0$ oder b) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$, d. h..
a) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in G$ oder b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in G$.

10. Nach den Additionstheoremen folgt

$$\frac{\cos\alpha - 2\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 3\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 3\alpha}$$

$$= \frac{-2\cos 3\alpha\,(1 - \cos 2\alpha)}{2\sin 3\alpha\,(1 + \cos 2\alpha)}$$

$$= -\cot 3\alpha\,\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}$$

$$= \cot(\pi - 3\alpha)\cdot\tan^2\alpha\;.$$

11. Nach dem binomischen Lehrsatz ist für $a = 2\cdot 5^7$ und $b = 5\cdot 2^7$:

$$(a-b)^{83} - (a^{83} - b^{83}) = \sum_{i=0}^{83}\binom{83}{i}a^i(-b)^{83-i} - a^{83} + b^{83}$$

$$= \sum_{i=1}^{82}\binom{83}{i}a^i(-b)^{83-i}.$$

Da 83 eine Primzahl ist, ist keine der Zahlen i, $2 \leq i \leq 82$, Teiler von 83, d. h., da Binomialkoeffizienten bekanntlich ganzzahlig sind und

$\binom{83}{i} = \frac{83!}{i!(83 - i)!}$ gilt, 83 sicher für $i = 1, 2, \ldots, 83$ ein Teiler von $\binom{83}{i}$. Also ist in obiger Summe jeder Summand durch 83 teilbar, d. h., die Summe ist auch durch 83 teilbar. Die Zahlen a und b können also sogar beliebig ganz sein.

Eine andere elegante Lösung folgt unmittelbar aus dem kleinen Satz von Fermat: Ist c eine ganze Zahl und p eine Primzahl, so gilt $c^p \equiv c \bmod p$.

12. Wir führen zunächst folgende neue Variable ein:

$$u = xy, \quad v = yz, \quad t = zx.$$

Dann erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2u + v &= 27, \\ 3v - 2t &= 25, \\ t - u &= 4. \end{aligned}$$

Ersetzen wir die 3. Gleichung durch die äquivalente

$$2t - 2u = 8$$

und addieren diese mit den ersten beiden, so folgt

$$4v = 60, \text{ also}$$

erhalten wir als einzige Lösung

$$v = 15, \quad u = 6, \quad t = 10.$$

Damit ist

$$xy = 6, \quad yz = 15, \quad zx = 10.$$

Mithin ist durch Multiplikation $x^2y^2z^2 = 900$, also

a) $xyz = 30$, d. h. $x = \frac{xyz}{yz} = 2$, $y = 3$, $z = 5$,

b) $xyz = -30$, d.h. $x = -2$, $y = -3$, $z = -5$.

Beide Lösungen $(x, y, z) = (2, 3, 5)$, $(-2, -3, -5)$ erfüllen offenbar das gegebene Gleichungssystem, sind damit genau die gesuchten Lösungen.

13. Ist x die Anzahl der 1. Preise, so folgt, daß es $x + 12$ 2. Preise und $2(2x + 12)$ 3. Preise gab. Überdies ist

$$\begin{aligned} 2(2x + 12) &= x(x + 12) - 104, \\ x^2 + 8x &= 128 = 0 \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16 + 128} \\ &= 4 \pm 12 \end{aligned}$$

$x_1 = 8$, $x_2 = -16$ entfällt, da nicht positiv. Es gab 8 1., 20 2. und 56 3. Preise.

14. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 12$ cm.
Offenbar ist $\triangle MKH$ gleichseitig. Die Höhe $\overline{MD}$ in diesem Dreieck ist gleich dem Radius des Umkreises.

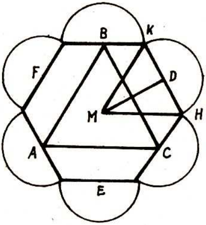


Bild 6

M ist auch Schwerpunkt von $\triangle ABC$, d. h. $\overline{BM} = \frac{2}{3}$ (Höhe im $\triangle ABC$).
Wegen $\overline{AC} = 12$ cm hat die Höhe im $\triangle ABC$ die Länge

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\overline{AC} = 6\sqrt{3}\text{ cm},$$

also $$\overline{BM} = \frac{2}{3}\,6\sqrt{3}\text{ cm} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\overline{DM} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\overline{MK} = \overline{KH} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,4\sqrt{3}\text{cm} = 8\text{ cm}$$

Damit gilt für die Fläche A der Rosette

$$A = 6\,A_{\triangle MKH} + 6\,A_{\frown KH}$$

$$= (6\cdot\frac{1}{2}\,8\cdot 4\sqrt{3} + 6\frac{1}{2}\,\pi\,4^2)\text{cm}^2$$

$$= 48\,(2\sqrt{3} + \pi)\text{ cm}^2$$

15. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln von $x^2 + 55x - 45 = 0$, so ist nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$x_1 + x_2 = -55,\; x_1\cdot x_2 = -45.$$

Eine Gleichung, die die Lösungen x_1^2 und x_2^2 ist

$$(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0$$

also $$x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x - x_1^2x_2^2 = 0,$$

$$x^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]\,x - (x_1x_2)^2 = 0,$$

$$x^2 - [(-55)^2 - 2(-45)]\,x - (-45)^2 = 0,$$

$$x^2 - 3115x - 2025 = 0.$$

16. Sicher ist $10 \equiv 1 \mod 3$,

$$10^{2n-2} \equiv 1 \mod 3,$$
$$10^{2n-2} + 2 \equiv 0 \mod 3,$$

und $$10 \equiv 1 \mod 9,$$
$$10^{3n-3} \equiv 1 \mod 9,$$
$$10^{3n-3} + 2^3 \equiv 1 + 8 \equiv 0 \mod 9.$$

Damit ist jeder Summand ganzzahlig.

17. Die gegebene Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn
a) $x^2 + 3x = 2x - 6$ oder b) $x^2 + 3x = -(2x - 6)$ ist.
Zu a): $x^2 + x + 6 = 0$, $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6}$ und damit keine reelle Lösungen.
Zu b): $x^2 + 5x - 6 = 0$, $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$

$$x_1 = +1. \; x_2 = -6$$

Die einzigen Lösungen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -6$.

18.

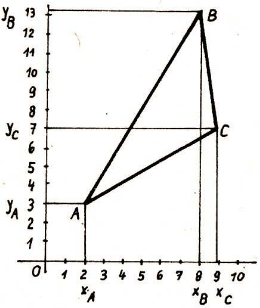


Bild 7

Es ist für den Dreiecksflächeninhalt A:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \sphericalangle BAC$$

und

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \sphericalangle BAC.$$

Nun ist

$$\overrightarrow{AB} = (6;\ 6\sqrt{3}),\ \overrightarrow{AC} = (4\sqrt{3},\ 4), \text{ also}$$

$$\cos \sphericalangle BAC = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot 4}{\sqrt{36 + 108} \cdot \sqrt{48 + 16}}$$

$$= \frac{48\sqrt{3}}{12 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folglich ist

$$A = \frac{1}{2}\, 12 \cdot 8 \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 24.$$

Aus dem Bild 7 folgt aber auch einfach nach der Flächeninhaltsformel für Trapeze

$$A = A_{\square\ ABX_BX_A} + A_{\square\ BCX_CX_B} - A_{\square\ ACX_CX_A}$$

$$= \frac{Y_A + Y_B}{2}(X_B - X_A) + \frac{Y_B + Y_C}{2}(X_C - X_B) - \frac{Y_A + Y_C}{2}(X_C - X_A)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ Y_A(X_B - X_C) + Y_B(X_C - X_A) + Y_C(X_A - X_B) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 3(8 - [2 + 4\sqrt{3}]) + (6\sqrt{3} + 3)([2 + 4\sqrt{3}] - 2) + 7(2-8) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 18 - 12\sqrt{3} + 72 + 12\sqrt{3} - 42 \right\}$$

$$= 24.$$

19. Die linke Seite der Gleichung ist eine geometrische Reihe.
Für $a > 1$ ist $1 + a + a^2 + \ldots + a^x = \frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}$, also

$$a^{x+1} - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) \ldots (a^{32} + 1) = a^{64} - 1,$$

$$x = 63.$$

Für $a = 1$ ist $1 + a + \ldots + a^x = x + 1$, also $x + 1 = 2^7$, $x = 63$ ebenfalls.
Die Gleichung hat die Lösung $x = 63$.

20. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach n.
Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich Eins.
Wir nehmen an, es ist

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{6}$$

und wollen

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}$$

beweisen. Es ist

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{6}(k+3)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

21. Lösungen sind nur für

$3x^2 - 5x - 12 \geqq 0$ möglich, d. h., für

$$x^2 - \frac{5}{3}x - 4 \geqq 0,$$
$$(x - 3)(x + \frac{4}{3}) \geqq 0,$$

also $x \geqq 3$ oder $x \leqq -\frac{4}{3}$.

Wir setzen $y = \sqrt{3x^2 - 5x - 12}$. Dann ist die gegebene Gleichung äquivalent mit

$$y^2 + 5y - 36 = 0,$$
$$y_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}$$
$$= \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$y_1 = 4$, $y_2 = -9$. y_2 entfällt wegen $y \geqq 0$.

Aus $y = \sqrt{3x^2 - 5x - 12}$ folgt $x^2 - \frac{5}{3}x - 4 - \frac{y^2}{3} = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + 4 + \frac{y^2}{3}}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{169 + 12y^2}}{6}$$

Für $y_1 = 4$ erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169 + 192}}{6} = \frac{5 \pm 19}{6},$$

also $x_1 = 4$, $x_2 = -2\frac{1}{3}$.

Da x_1 und x_2 auch die Bedingungen $x \geqq 3$ oder $x \leqq -\frac{4}{3}$ erfüllen, sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2\frac{1}{3}$ genau die Lösungen der Gleichung.

22. Die Gleichung $\sin^2 x \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}$ ist äquivalent mit

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2x - \cos 2x \cdot \sin 2x + \cos 2x + \cos^2 2x = 1,$$
$$\sin 2x + \cos 2x - \cos 2x \sin 2x - (1 - \cos^2 2x) = 0,$$
$$\sin 2x + \cos 2x - \cos 2x \sin 2x - \sin^2 2x = 0,$$
$$(\sin 2x + \cos 2x) - \sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) = 0,$$
$$(1 - \sin 2x)(\sin 2x + \cos 2x) = 0,$$
$$\sin 2x = 1 \text{ oder } \sin 2x = -\cos 2x,$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in G \text{ oder } 2x = \frac{3}{4}\pi + \pi k,\ k \in G$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in G \text{ oder } x = \frac{3}{8}\pi + \pi\frac{k}{2},\ k \in G.$$

23. Wir betrachten die Pyramide ABCM (Bild 8).

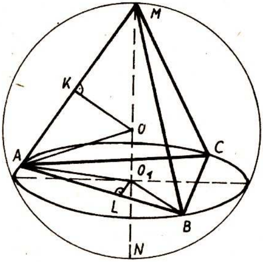


Bild 8

Der Fußpunkt des Lotes von M auf das $\triangle ABC$ sei O_1. Wegen $\sphericalangle MAO_1 = \sphericalangle MBO_1 = \sphericalangle MCO_1$ sind die Dreiecke $\triangle AMO_1$, $\triangle BMO_1$ und $\triangle CMO_1$ untereinander kongruent, also $\overline{AO_1} = \overline{BO_1} = \overline{CO_1}$. Mithin ist O_1 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Ferner folgt leicht, daß der Umkugelmittelpunkt auf MO_1 liegt.

Wegen $\sphericalangle MAO_1 = 2\alpha$ ist $\sphericalangle AMO_1 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, also auch

$$\frac{\overline{AM}}{2} = \overline{KM} = \overline{MO} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = R \sin 2\alpha,$$

$$\overline{AM} = 2R \sin 2\alpha.$$

Ferner ist

$$\overline{MO_1} = \overline{AM} \cdot \sin 2\alpha \ ,$$

$$\overline{MO_1} = 2R \sin^2 2\alpha$$

und

$$\overline{AO_1} = \overline{AM} \cos 2\alpha \ ,$$

$$\overline{AO_1} = 2R \sin 2\alpha \cos 2\alpha \ .$$

Das Dreieck ΔABO_1 ist gleichschenklig, d. h. $\overline{AB} = 2\overline{AL} =$

$= 2\overline{AO_1} \cdot \cos \sphericalangle LAO_1$.

Aus Symmetriegründen ist $\sphericalangle BAO_1 = \sphericalangle CAO_1$ und wegen $\sphericalangle BAC = \alpha$ folgt $\sphericalangle LAO_1 = \frac{\alpha}{2}$ und

$$\overline{AB} = 2\overline{AO_1} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= 4R \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \ .$$

Damit können wir das Volumen V der Pyramide bestimmen.

$$V = \frac{1}{3} A_{\Delta ABC} \cdot \overline{MO_1} = \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \alpha \cdot \overline{MO_1} \ ,$$

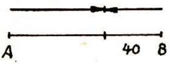
$$V = \frac{1}{6}(4R \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2})^2 \sin \alpha \cdot 2R \sin^2 2\alpha$$

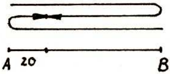
$$= \frac{16}{3} R^3 \sin \alpha \cdot \sin^4 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

24. Es sei $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}$. Dann ist auch $y = \sqrt{x \cdot y}$ und $y^2 = x \cdot y$. Wegen $y \neq 0$ folgt $x = y$, also $x = \sqrt{1980}$.

25. Der Radfahrer, der im Punkt A startet, fährt mit einer Geschwindigkeit von V_A und der andere mit V_B. Ferner sei $s = \overline{AB}$.

1. Treffen (nach Zeit t) 2. Treffen (nach Zeit t + 8)





Es gilt

$$V_A = \frac{s - 40}{t} \ , \ V_B = \frac{40}{t}$$

$$V_A = \frac{2s - 20}{t + 8}, \ V_B = \frac{s + 20}{t + 8} \ ,$$

also

$$V_A + V_B = \frac{s}{t} = \frac{3s}{t+8} \ ,$$

d.h.

$$t + 8 = 3t, \ t = 4.$$

Weiter $V_B = 10$, $s + 20 = 10 \cdot 12$, $s = 100$, $V_A = \frac{60}{4} = 15$.

Die Orte A und B haben eine Entfernung von 100 km. Die Radfahrer fahren mit den Geschwindigkeiten 15 km/h und 10 km/h.

26. Der Definitionsbereich des Systems sind alle Tripel x, y, z mit $x \neq -y$, $y \neq -z$, $z \neq -x$.
Das System ist äquivalent mit

$$xy = x + y - xz - yz,$$
$$yz = 2y + 2z - xy - xz,$$
$$zx = 2z + 2x - zy - xy$$

und

$$xy + yz + zx = x + y,$$
$$xy + yz + zx = 2y + 2z,$$
$$xy + yz + zx = 2x + 2z.$$

Die Summe der zweiten und dritten Gleichung vermindert um das Doppelte der ersten Gleichung ergibt

$$0 = 4z, \quad z = 0.$$

Dann folgt sofort aus dem gegebenen System

$$2 - x = 0, \quad 2 - y = 0.$$

Eingedenk des Definitionsbereiches erhalten wir genau die Lösung $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$.

27. Wegen $a + b + c = 0$ ist

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + (-a-b)^3 &= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 \\ &= -3a^2b - 3ab^2 \\ &= 3ab(-a - b) \\ &= 3abc. \end{aligned}$$

28. Da keine Aufschrift richtig ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung, nämlich

	a)	b)
"zwei weiße":	ws	ss
"weiß und schwarz":	ss	ww
"zwei schwarze":	ww	ws

Man hat also eine Kugel aus der Schachtel "weiß und schwarz" zu wählen und je nachdem, ob diese Kugel weiß oder schwarz ist, wissen wir, ob die Verteilung a) oder b) vorliegt.

29. Für $n \geqq 1$ ist

$$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} = 125 \cdot 25^{n-1} + 27 \cdot 6^{n-1}.$$

Wegen $25 \equiv 6 \mod 19$ ist $25^{n-1} \equiv 6^{n-1} \mod 19$ und

$$\begin{aligned} 5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1} &\equiv 125 \cdot 6^{n-1} + 27 \cdot 6^{n-1} \mod 19 \\ &\equiv 152 \cdot 6^{n-1} \mod 19 \\ &\equiv 8 \cdot 19 \cdot 6^{n-1} \mod 19 \\ &\equiv 0 \mod 19. \end{aligned}$$

30. Es ist $n = 1$ sicher eine Lösung. Sei jetzt $n \geqq 2$. Dann ist

$$\frac{19n + 17}{7n + 11} = 2 + \frac{5n - 5}{7n + 11} .$$

Nun ist $0 < \frac{5n - 5}{7n + 11} < 1$, so daß es keine weiteren Lösungen gibt.

31. Ist $m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, so gilt

$$\underbrace{mm \ldots m}_{n} = m \cdot \underbrace{11 \ldots 1}_{n} = \frac{m}{9}\,\underbrace{99 \ldots 9}_{n} = \frac{m}{9}(10^n - 1).$$

Also ist

$$\sqrt{\underbrace{11 \ldots 1}_{2n} - \underbrace{22 \ldots 2}_{n}} = \sqrt{\frac{1}{9}(10^{2n} - 1) - \frac{2}{9}(10^n - 1)}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(10^n - 1)^2}$$

$$= \frac{1}{3}(10^n - 1)$$

$$= \underbrace{33 \ldots 3}_{n}$$

32. Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Dann ist $AE \perp CD$ und $\overline{AE} = 24$ cm, $\overline{CD} = 18$ cm. (siehe Bild 9)

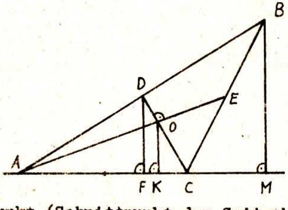


Bild 9

Da der Schwerpunkt (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt, folgt nach dem Strahlensatz:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\,\overline{AE} = 16 \text{ cm},$$

$$\overline{CO} = \frac{2}{3}\,\overline{CD} = 12 \text{ cm},$$

$\overline{OK} : \overline{DF} = 2 : 3$, $\overline{DF} : \overline{BM} = 1 : 2$, also
$\overline{BM} = 3 \cdot \overline{OK}$

Da $\triangle$ AOC rechtwinklig ist, folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{CO}^2} = \sqrt{256 + 144}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}.$$

und nach dem Katheten- und dem Höhensatz:

$$\overline{KC} \cdot \overline{AC} = \overline{CO}^2,$$
$$\overline{KC} = \frac{12^2}{20}\ \text{cm} = 7{,}2\ \text{cm},$$
$$\overline{OK}^2 = \overline{KC} \cdot \overline{AK} = 7{,}2 \cdot 12{,}8\ \text{cm}^2 = 9{,}6^2\text{cm}^2,$$
$$\overline{OK} = 9{,}6\ \text{cm und schließlich}$$
$$\overline{BM} = 28{,}8\ \text{cm}.$$

Für die Fläche A erhalten wir

$$A = \frac{1}{2}\,\overline{AC} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2}\, 20 \cdot 28{,}8\ \text{cm}^2$$
$$= 288\ \text{cm}^2.$$

33. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach n.
Für n = 1 ist die Aussage wahr.
Induktionsvoraussetzung:

$$\frac{(k+1)(k+2)\ \dots\ (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)} = 2^k,$$

Induktionsbehauptung:

$$\frac{(k+2)(k+3)\ \dots\ (2k+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = 2^{k+1}$$

Induktionsbeweis:
Es ist

$$\frac{(k+2)(k+3)\ \dots\ (2k+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1)} = \frac{(k+1)(k+2)\ \dots\ (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2k-1)} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(2k+1)}$$
$$= 2^k \cdot 2$$
$$= 2^{k+1}.$$

34. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}\\ &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}\\ &+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}\\ &+ \\ &+ \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}\,.$$

35. Die Fußpunkte der Lote von M auf AC und BC seien K und L. (siehe Bild 10)

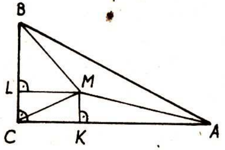


Bild 10

Wegen $A_{\Delta ABM} = A_{\Delta BCM} = A_{\Delta ACM}$ und

$$A_{\Delta ABM} + A_{\Delta BCM} + A_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{AC} \quad \text{ist}$$

$A_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\,\overline{MK} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{AC}$, also $\overline{MK} = \frac{1}{3}\,\overline{BC}$.

Analog folgt $\overline{ML} = \frac{1}{3}\,\overline{AC}$. Da $\square$ LCKM ein Rechteck erhalten wir nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}
5\overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 &= 5(\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - (\overline{AK}^2 + \overline{MK}^2) - (\overline{BL}^2 + \overline{ML}^2)\\
&= 4(\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - (\tfrac{2}{3}\,\overline{AC})^2 - (\tfrac{2}{3}\,\overline{BC})^2\\
&= 4(\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - (2\,\overline{ML})^2 - (2\,\overline{MK})^2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

36. Es ist

$$\begin{aligned}
(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 &= (x-y)^5+(y-z)^5+\left[(z-y)+(y-x)\right]^5\\
&= (x-y)^5+(y-z)^5-\left[(x-y)+(y-z)\right]^5\\
&= (x-y)^5+(y-z)^5-(x-y)^5-5(x-y)^4(y-z)-10(x-y)^3(y-z)^2-\\
&\quad - 10(x-y)^2(y-z)^3-5(x-y)(y-z)^4-(y-z)^5
\end{aligned}$$

$$= -5(x-y)(y-z)\left[(x-y)^3+2(x-y)^2(y-z)+2(x-y)(y-z)^2 + \right.$$
$$\left. +(y-z)^3\right]$$
$$= -5(x-y)(y-z)\ \left\{\left[(x-y)^3+(x-y)^2(y-z)\right] + \right.$$
$$+\left[(x-y)^2(y-z)+(x-y)(y-z)^2\right]$$
$$\left. +\left[(x-y)(y-z)^2+(y-z)^3\right]\right\}$$
$$= -5(x-y)(y-z)\ \left\{(x-y)^2\left[(x-y)+(y-z)\right]+(x-y)(y-z)\right.$$
$$\left[(x-y)+(y-z)\right]+(y-z)^2$$
$$\left.\left[(x-y)+(y-z)\right]\right\}$$
$$= -5(x-y)(y-z)\ \left\{(x-y)^2(x-z)+(x-y)(y-z)(x-z)+\right.$$
$$\left.+(y-z)^2(x-z)\right\}$$
$$= -5(x-y)(y-z)(x-z)\ \left\{(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2\right\}$$
$$= -5(x-y)(y-z)(x-z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

Da $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ ganzzahlig ist, ist der Beweis erbracht.

37. Wir betrachten die ersten 20 der 39 Zahlen. Unter diesen gibt es sicher zwei auf Null endenden Zahlen, eine endet nicht auf 90. Diese sei N. Die Quersummen der Zahlen

$$N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots,\ N+9,\ N+19$$

sind paarweise verschieden, d. h., eine dieser Zahlen hat eine durch 11 teilbare Quersumme.
Die Zahlen 999 980 und 1 000 019 bilden ein gewünschtes Beispiel.

38. Wir nehmen an, der Vektor (a, b, c, d) tritt in der Folge wieder auf. Wir bilden zu jedem Vektor das Produkt der Komponenten und erhalten die Folge

$$abcd,\ (abcd)^2,\ (abcd)^4,\ \ldots,\ (abcd)^{2^n},\ \ldots .$$

Wenn für eine natürliche Zahl $n \geqq 2$

$$(abcd)^{2^n} = (abcd)$$

gelten soll, muß wegen $abcd > 0$ offenbar $abcd = 1$ sein.
Mithin hat der 2. Vektor (ab, bc, cd, da) die Eigenschaft, daß das Produkt von 1. und 3. sowie auch von 2. und 4. Komponente jeweils gleich 1 ist. Ein Vektor dieser Bauart
$(x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ hat als Nachfolger den Vektor $(xy, \frac{y}{x}, \frac{1}{xy}, \frac{x}{y})$, also auch einen dieser Bauart, d. h., da (a, b, c, d) nochmals

auftritt, muß er auch von diesem Typ sein, also ist
$ac = 1$, $bd = 1$, d. h., $c = \frac{1}{a}$, $d = \frac{1}{b}$. Der Ausgangsvektor ist
$(a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$.
Ist $a = b = 1$, so sind wir fertig.
Sei $a > 1$, $b > 1$ oder $a > 1$, $b < 1$ oder $a < 1$, $b > 1$ oder
$a < 1$, $b < 1$.
In jedem der vier Fälle stehen die beiden Komponenten, die größer als 1 sind, nebeneinander. Wie man leicht nachprüft, hat auch der Folgevektor etc. diese Eigenschaft.
Wir zeigen nun, daß das Maximum der vier Komponenten immer größer wird. Wir nehmen an, daß $a \geqq b > 1$ sei. Dann ist

$$\max \left\{ a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\} = a$$

und

$$\max \left\{ ab, \frac{a}{b}, \frac{1}{ab}, \frac{b}{a} \right\} = ab > a = \max \left\{ a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\} .$$

Da der Ausgangsvektor nochmals auftreten soll, ist dieses jedoch nicht möglich. Also ist mindestens eine der Zahlen a und b gleich 1.
O.B.d.A. sei $b = 1$. Dann hat die Folge folgendes Aussehen:

$$(a, 1, \frac{1}{a}, 1) \rightarrow (a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, a) \rightarrow (1, \frac{1}{a^2}, 1, a^2) \rightarrow (\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}, a^2, a^2)$$

$$\rightarrow (\frac{1}{a^4}, 1, a^4, 1), \ldots$$

Ist $a > 1$ (analog $a < 1$), so ist ab dem 3. Folgeglied eine Komponente a^n $(n \geqq 2)$ enthalten. Damit ist für alle Folgeglieder, ab dem 3.,

$$\max \{ .., .., .., . \} = a^n \geqq a^2 > a = \max \left\{ a, 1, \frac{1}{a}, 1 \right\} ,$$

im Widerspruch zur Annahme. Schließlich ist für $a \neq 1$ auch
$(a, 1, \frac{1}{a}, 1) \neq (a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, a)$. Damit ist der Beweis komplett.

39. Wir fixieren im Innern jedes Rechtecks einen Punkt und einen außerhalb der Figur. Wir verbinden zwei Punkte genau dann mit m Kanten, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben, die aus m Strecken besteht (siehe Bild 11).

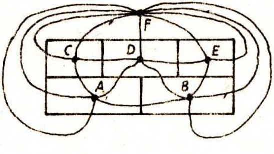


Bild 11

Auf diese Weise erhalten wir einen Graphen mit 6 Knoten und 16 Kanten.
Das Problem ist um zu entscheiden, ob dieser Graph eine Eulersche Linie besitzt, d. h., ob es möglich ist, in einem Punkt des Graphen zu beginnen und in einer ununterbrochenen Folge alle Kanten des Graphen genau einmal zu durchlaufen. Bekanntlich, oder auch leicht nachvollziehbar, ist die Tatsache, daß die Knoten mit ungerader Valenz (= Anzahl der Kanten, die mit diesem Knoten inzidieren) gleich 0 (Eulerscher Kreis) oder 2 (Eulersche Linie) ist. In unserem Graphen haben wir aber 4 Punkte ungerader Valenz, nämlich A, B, D und F. Damit ist bewiesen, daß kein Polygonzug geforderter Bauart existiert.

40. Wir nehmen an, daß es ganze Zahlen a, b, c und d gibt, die die vier Gleichungen erfüllen.
Dann ist $a(bcd - 1) = 11\ldots 1$.
Mithin ist a ungerade. Analog folgt, daß b, c und d ungerade sind. Dann ist aber auch das Produkt bcd ungerade und $bcd - 1$ gerade im Widerspruch dazu, daß $bcd - 1$ Teiler von $11 \ldots 1$ ist. Damit ist die Nichtexistenz von a, b, c, d nachgewiesen.

41. Es gibt $2^{m \cdot n}$ Tabellen, in denen sich nur die Vorzeichen der Elemente unterscheiden. Durch unsere Operation läßt sich also nur eine endliche Anzahl ($\leq 2^{m \cdot n}$) von Tabellen erzeugen. Darunter gibt es (mindestens) eine, bei der die Summe aller Elemente maximal ist. Wir zeigen, daß diese Tabelle die gewünschte Eigenschaft hat. Existiert nämlich eine Spalte (Reihe), in der die Summe der Elemente negativ ist, so wende man auf diese Spalte (Reihe) die Operation an und erhält eine größere Gesamtsumme, im Widerspruch zur Maximalität.

42. Der größte gemeinsame Teiler von b und $(p - a)$ sei gleich d.
Wir wählen $k = \frac{b}{d}$, $l = \frac{p-a}{d}$.
k und l sind offenbar relativ prim. Weiter ist

$$ak + bl = a \cdot \frac{b}{d} + (p - a)\frac{b}{d} = \frac{b}{d}(a + p - a) = \frac{b}{d} \cdot p.$$

Da d Teiler von b ist, ist $r = \frac{b}{d}$ ganzzahlig, also

$$ak + bl = r \cdot p.$$

43. Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion nach n. Mit f(n) bezeichnen wir die Anzahl der Strecken für n Punkte. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Aussage trivialerweise wahr, d. h.,

$$f(1) = 0, \; f(2) = 1.$$

Induktionsvoraussetzung: $f(k) = k - 1$,

Induktionsbehauptung: $f(k + 1) = k$,

Induktionsbeweis:
Wir zeigen, daß es einen Punkt gibt, von dem nur eine Strecke ausgeht.
Angenommen, von jedem Punkt gehen mindestens zwei Strecken aus. Wir beginnen in einem beliebigen Punkt P_1 gehen entlang einer Strecke zu P_2, etc. Dabei benutzen wir keine Strecke doppelt.
Da in jedem Punkt, in dem wir angelangt sind, mindestens noch eine Strecke beginnt, können wir den Streckenzug verlängern bis wir zu einem schon benutzten Punkt kommen (z. B. P_i):

$$P_1 - P_2 - \dots - P_i - \dots - P_j - \dots - P_i \quad (i \neq j)$$

Zwischen P_i und P_j gibt es mindestens zwei Wege, da der Strekkenzug kantendisjunkt ist.
Sei P_1 nun ein Punkt, von dem nur eine Strecke ausgeht. Zwischen den restlichen k Punkten gibt es genau $f(k) = k - 1$ Strecken. Also ist

$$f(k + 1) = f(k) + 1 = k.$$

44. Kolja teilt die Menge der $2n + 1$ Nüsse in zwei Mengen A, B mit $A = n - k$, $B = n + k + 1$ und $0 = k = n - 2$.
Für jedes k bestimmen wir nun in jedem der drei Verfahren den maximalen Gewinn für Petja und minimieren dann über alle k, denn Kolja wird je nach Verfahren das für ihn günstigste k wählen. Petja teilt A in A_1 und A_2 und B in B_1 und B_2 mit

$$|A_1| \leqq |A_2| \quad \text{und} \quad |B_1| \leqq |B_2| .$$

I. Ist $\max \{|A_2| , |B_2|\} = |A_2|$, so folgt

$$\min \{|A_1| , |A_2| , |B_1| , |B_2|\} = \min \{|A_1| , |B_1|\} \leqq |A_1| ,$$

d. h. Petjas Gewinn ist

$$\leqq |A_1| + |A_2| = n - k \text{ in diesem Fall.}$$

Ist $\max \{ |A_2| , |B_2| \} = |B_2|$, so folgt

$$\min |A_1| , |B_1| \leqq |B_1| , \text{ d. h.}$$

Petjas Gewinn ist

$$\leqq |B_1| + |B_2| = n + k + 1.$$

Petjas maximaler Gewinn ist $n + k + 1$, den er mittels

$$|A_1| = \frac{n - k}{2} , \quad |A_2| = \frac{n - k}{2}$$

$$|B_1| = 1, \quad |B_2| = n + k$$

erreichen kann, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl y mit $y \leqq x$ bezeichne. Ferner sei $]x[= - [-x]$.

II. Ist $\min\{|A_1|, |B_1|\} = |B_1|$, so folgt

$$\max\{|A_2|, |B_2|\} = |B_2|, \text{ d. h.}$$

Petja erhält A_1 und A_2, d. h. einen Gewinn von $n - k$.

Ist $\min\{|A_1|, |B_1|\} = |A_1|$, so ist für Petja sicher günstig, A_1 zu minimieren, d. h. er wählt $A_1 = 1$, $A_2 = n-k-1$. Petja erhält sicher die Menge B_1 und die kleinere der Mengen B_2 und A_2. Es ist für ihn am besten, B_1 zu maximieren, d. h. die beste Strategie ist, wenn er

$|B_1| = \frac{n+k+1}{2}$ und damit $|B_2| = \frac{n+k+1}{2}$ wählt.

Er erhält

für $k \leq \frac{n}{3} - 1$: B_1 und B_2, also $n + k + 1$ Nüsse und

für $k > \frac{n}{3} - 1$: B_1 und A_2, also $\frac{n+k+1}{2} + n-k-1 = \frac{3n-k-1}{2}$ Nüsse.

III. Unter Ausnutzung der Ergebnisse von I. und II. erhält Petja unter Beachtung der Strafnuß

für $k \leq \frac{n}{3} - 1$: $n + k$ Nüsse und

für $k > \frac{n}{3} - 1$: $\max\left\{\frac{3n-k-1}{2}, n+k+1\right\} - 1 = n+k$ Nüsse,

wegen $$\frac{3n-k-1}{2} - (n+k+1) = \frac{n-3k-3}{2} \leq 0.$$

Unter Anwendung der besten Strategie von Kolja erhält Petja beim I. Verfahren $n + 1$ (für $k = 0$), beim II. Verfahren n (für $k = n - 2$) und beim III. Verfahren auch n ($k = 0$) Nüsse.

45. Aus der Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ suchen wir eine unendlich lange Teilfolge $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}, \ldots$ mit $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_n} \leq \ldots$ aus. Das ist möglich, da die a_i natürliche Zahlen sind. Eine genaue Analyse der möglichen Folgen überlassen wir dem Leser.

Nun betrachten wir die Folgen $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}, \ldots$

und $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}, \ldots$.

Nach demselben Schluß gibt es eine Teilfolge

$$b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_n}, \ldots \text{ von } b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}, \ldots$$

mit $b_{j_1} \leq b_{j_2} \leq \ldots \leq b_{j_n} \leq \ldots$.

Schließlich suchen wir aus $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_n}, \ldots$ eine Teilfolge $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_n}, \ldots$ mit $c_{k_1} \leqq c_{k_2} \leqq \ldots \leqq c_{k_n} \leqq \ldots$ aus.
Dann ist

$$a_{k_1} \leqq a_{k_2} \leqq \ldots \leqq a_{k_n} \leqq \ldots$$
$$b_{k_1} \leqq b_{k_2} \leqq \ldots \leqq b_{k_n} \leqq \ldots$$
$$c_{k_1} \leqq c_{k_2} \leqq \ldots \leqq c_{k_n} \leqq \ldots ,$$

also gibt es sogar unendlich viele Paare (p, q) mit der gewünschten Eigenschaft.

46. Wir vergrößern die Quadrate, in dem wir alle Punkte hinzunehmen, die einen Abstand kleiner oder gleich als $\frac{1}{2}$ von Punkten der Quadrate haben. Diese "erweiterten Quadrate" haben offenbar das Aussehen gemäß Bild 12 und einen Flächeninhalt von $3 + \frac{\pi}{4}$.

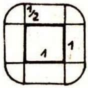


Bild 12

Vom Rechteck schneiden wir ringsherum einen Streifen von der Breite $\frac{1}{2}$ ab. Die Restfläche des Rechtecks ist $19 \cdot 24 = 456$.
Die Summe der Flächen der "erweiterten Quadrate" beträgt

$$A_\Sigma = 120(3 + \frac{\pi}{4}) = 360 + 30\pi \quad \text{und wegen}$$
$$\pi < 3{,}2 \quad \text{folgt}$$
$$A_\Sigma < 360 + 30 \cdot 3{,}2 = 456.$$

Mithin gibt es also einen Punkt, der von jedem Quadrat und den Kanten des Rechtecks einen Abstand $\geqq \frac{1}{2}$ hat. Ein Kreis um P mit dem Radius $\frac{1}{2}$ leistet das Gewünschte.

47. Wir fixieren den Punkt A. Der Punkt B liegt dann auf einem Kreis um P mit dem Radius 2. Durchläuft B diesen Kreis, so durchläuft der Punkt C, gemäß Δ ABC ist gleichseitig, einen Kreis um P_1 mit dem Radius 2, wobei $\Delta\, APP_1$ ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 ist, siehe Bild 13.

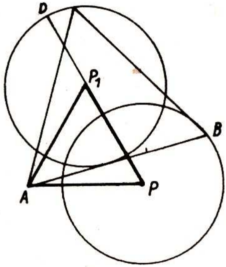


Bild 13

Diese Tatsache folgt einfach aus der Überlegung, daß man von B zu C gelangt, wenn man die Ebene um 60° um den Punkt A dreht. Mithin geht P in P_1 und der Kreis um P in den Kreis um P_1 über. Nun ist klar, daß $\overline{CP}$ maximal wird, wenn P, P_1 und C auf einer Geraden liegen, also C ≡ D ist. Dann haben wir $\overline{PC} = 5$.

48. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach k.
k = 1. Dann gibt es genau die folgenden Vektorenfolge

$$\begin{matrix} (+,-) \searrow & & & \\ & (-,-) & \rightarrow & (+,+)\circlearrowleft \\ (-,+) \nearrow & & & \end{matrix}$$

k - 1 → k. Wegen $x_1^2 = 1$ ist der Anfang der Vektorfolge

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2^k})$$
$$\downarrow$$
$$(x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{2^k-1}x_{2^k}, x_{2^k}x_1)$$
$$\downarrow$$
$$(x_1x_2^2x_3, x_2x_3^2x_4, \ldots, x_{2^k-1}x_{2^k}^2x_1, x_{2^k}x_1^2x_2 =$$

$$= (x_1x_3, x_2x_4, \ldots, x_{2^k-1}x_1, x_{2^k}x_2)$$

Nach jeweils zwei Operationsschritten erhalten wir einen Vektor, bei dem die Komponenten mit ungeraden Indices nur von den Komponenten des Ausgangsvektors mit ungeraden Indices abhängt. Analoges gilt für Komponenten mit geraden Indices. Nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir nach $2n_1$ Schritten einen Vektor, der nur aus +1 in der Koordinaten mit ungeradem Indices besteht und nach $2n_2$ Schritten nur +1 in den Koordinaten mit geradem Indices hat.

Nach 2 max $\{n_1, n_2\}$ erhalten wir (1, 1, ..., 1), der dann konstant bleibt.

49. Wir nehmen an, es gibt eine Zahl a, so daß die Summe von a mit einer Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern von a entsteht, gleich $\underbrace{99\ldots9}_{1967}$ ist. Dann ist a offenbar 1967-ziffrig.

Die Ziffernfolge von a sei $a_1 a_2 \ldots a_{1967}$. Die Ziffernfolge von der zweiten Zahl ist $\overline{a_1}\,\overline{a_2}\ldots\overline{a_{1967}}$. Dann ist wegen $a_i, \overline{a_i} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $a_{1967} + \overline{a_{1967}} = 9$, $a_{1966} + \overline{a_{1966}} = 9, \ldots, a_1 + \overline{a_1} = 9$. Da die Ziffern $\overline{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 1967)$ genau die Ziffern a_i, nur mit anderen Indices, sind, haben wir

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1967}) = (a_1 + \overline{a_1}) + (a_2 + \overline{a_2}) + \ldots + (a_{1967} + \overline{a_{1967}})$$
$$= 1967 \cdot 9.$$

Diese Gleichung ist aber nicht erfüllbar, da die linke Seite gerade und die rechte ungerade ist.
Also ist unsere Annahme falsch, d. h., die Behauptung ist bewiesen.

50. Es ist $\overline{AH} = \overline{BM}$ und $\overline{AH} \geqq \overline{CD}$, siehe Bild 14.

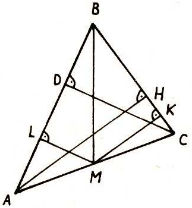


Bild 14

Offenbar $\triangle AHC \sim \triangle MKC$, d. h.

$$\overline{AH} : \overline{MK} = \overline{AC} : \overline{MC} = 2.$$

Also ist $\overline{MK} = \frac{1}{2}\,\overline{AH} = \frac{1}{2}\,\overline{BM}$.

Das Dreieck $\triangle BMK$ ist rechtwinklig und das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse beträgt 2, d. h. $\sphericalangle MBK = 30^\circ$.
Analog folgt $\overline{LM} = \frac{1}{2}\,\overline{DC} \leqq \frac{1}{2}\,\overline{AH} = \frac{1}{2}\,\overline{BM}$. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle ABM \leqq 30^\circ$. Zusammen haben wir

$$\sphericalangle ABC \leqq 60^\circ.$$

51. Zunächst legen wir zwei Geraden l und g in die Ebene, die senkrecht aufeinanderstehen und die vier Punkte in jeweils einem Quadranten liegt.

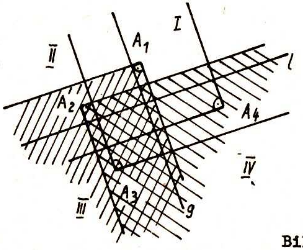


Bild 15

Eventuell könnten die Punkte auf den Achsen liegen. Es ist klar, daß man geeignete Geraden l und g finden kann. Gegebenenfalls sind die Geraden geeignet zu verschieben. Nun werden die Scheinwerfer so gedreht, daß die Begrenzungsgeraden parallel zu l und g verlaufen und der Schnittpunkt von l und g von jedem Scheinwerfer beleuchtet wird. Nun sieht man, daß A_1 den III., A_2 den IV., A_3 den I. und A_4 den II. Quadranten beleuchtet, d. h., die gesamte Ebene wird beleuchtet, siehe Bild 15.

52. Eine derartige Anordnung ist nicht möglich. Würde es eine geben, so dürften keine zwei der Zahlen 0, 1, 2, 8 und 9 benachbart sein. Da wir genau 10 Zahlen haben, muß jede zweite Zahl eine der oben erwähnten sein. Betrachten wir die Zahl 7. Ihre Nachbarn sind aus $\{0, 1, 2, 8, 9\}$, aber nur die "2" liefert eine Differenz aus $\{3, 4, 5\}$, d. h., die "7" dürfte nur einen Nachbarn haben, was der Anordnungsvorschrift widerspricht.

53. Hat die Zahl $z_1 = 5^{1000}$ keine Null, so sind wir bereits fertig.
Nun nehmen wir an, $z_1 = 5^{1000}$ habe in der Dezimaldarstellung Nullen. Die am weitesten rechts stehende Null stehe an der k-ten Stelle. Offenbar ist auch die Zahl $5^{1000} \cdot 10^{k-1}$ durch 5^{1000} teilbar und auch

$$z_2 = 5^{1000} + 5^{1000} \cdot 10^{k-1} = z_1 + 5^{1000} \cdot 10^{k-1}.$$

z_2 hat sicher in den letzten k-Stellen keine Null, da 5^{1000} auf 5 endet. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens (addieren

von $5^{1000} \cdot 10^m$ mit geeignetem m) erhalten wir schließlich eine Zahl z', die durch 5^{1000} teilbar ist und an den letzten 1000 Stellen keine Null enthält. Falls sie noch Nullen enthält, mögen diese an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_l$ mit $a_1 > a_2 > \ldots > a_l > 1000$ stehen.
Da auch 10^n Vielfaches von 5^{1000} für $n \geq 1000$ ist, ist

$$z = z' + 10^{a_1-1} + 10^{a_2-1} + \ldots + 10^{a_l-1}$$

eine gesuchte Zahl.
(Bemerkung der Redaktion: 1. Man beachte, daß der erste Schritt zwar Nullen weiter "nach links" schiebt, doch ist nicht sicher, daß auf diese Weise eine gesuchte Zahl gefunden wird, d. h., daß eine Zahl ohne Nullen entsteht.
2. Die Aussage der Aufgabe bleibt richtig, falls 5^{1000} durch eine zu 10 relativ prime Zahl ersetzt wird. Der Beweis im 2. Teil ist dann komplizierter.)

54. Eine gewünschte Anordnung existiert nicht. Wir beweisen das indirekt, nehmen also an, wir können die 13 Zahlen so anordnen, daß sich je zwei benachbarte Zahlen um 3, 4 oder 5 unterscheiden. Wir betrachten die 6 Zahlen 1, 2, 3, 11, 12, 13. Alle möglichen Differenzen unter diesen Zahlen gehören nicht zu $\{1, 2, 3, 11, 12, 13\}$. Also müssen zwischen je zwei dieser Zahlen Zahlen der restlichen 7, nämlich 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 stehen. Also gibt es genau ein Paar von Zahlen aus $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, die benachbart sind.
Betrachten wir nun die Zahl 4. Aus der Menge $\{1, 2, 3, 11, 12, 13\}$ hat nur 1 eine Differenz zu 4 aus der Menge $\{3, 4, 5\}$.
Also muß 4 zu dem erwähnten Paar benachbarter Zahlen aus $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ gehören. Ganz analog folgt gleiches für 10, also sind 4 und 10 benachbart, doch deren Differenz gehört nicht zu 3, 4, 5, d. h., unsere Annahme ist falsch, die Nichtexistenz einer gewünschten Anordnung bewiesen.

55. Offenbar ist die gegebene Zahl 10-stellig. Die Ziffernfolge sei $a_1a_2 \ldots a_{10}$ und die der Ziffern-vertauschten Zahl $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{10}$. Wir nehmen an, die gegebene Zahl sei nicht durch 10 teilbar, d. h. $a_{10} \neq 0$.
Wegen $a_i, \bar{a}_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und

$$a_1a_2 \ldots a_{10} + \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{10} = 10\,000\,000\,000$$

folgt $a_{10} + \bar{a}_{10} = 10$ und weiter

$$a_9 + \bar{a}_9 = 9,\ a_8 + \bar{a}_8 = 9,\ \ldots,\ a_1 + \bar{a}_1 = 9.$$

Also

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) &= (a_1 + \bar{a}_1) + (a_2 + \bar{a}_2) + \ldots + (a_{10} + \bar{a}_{10}) \\ &= 9 \cdot 9 + 10 \\ &= 91. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nicht erfüllbar, d. h., unsere Annahme ist falsch, die Behauptung bewiesen.
(Bemerkung d. Red.: Die Aussage bleibt für beliebige 2m-Stellen 10^{2m} anstatt für 10^{10} richtig. Für 10^{2m+1} ist die Aussage nicht mehr richtig. Man betrachte z. B. die Zahl

$$\underbrace{44 \ldots 4}_{m}\ \underbrace{55 \ldots 55}_{m}$$ und die ziffernvertauschte Zahl

$$\underbrace{55 \ldots 5}_{m}\ \underbrace{44 \ldots 45}_{m}.)$$

56. Zunächst zeigen wir, daß in jedem (spitzwinkligen) Dreieck ABC der Endpunkt E der Winkelhalbierenden CE zwischen den Endpunkten D und K von der Seitenhalbierenden CD und der Höhe CK liegt.

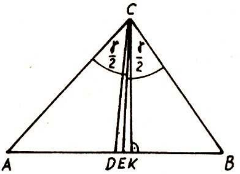


Bild 16

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\overline{AC} \geq \overline{BC}$, d. h. $b \geq a$, an.
Sei $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Ferner sei $\overline{BK} = x$ und $\overline{BE} = y$.
Offenbar ist $\overline{BD} = \frac{c}{2}$. Dann gilt

$b^2 = (c - x)^2 + \overline{CK}^2$, $a^2 = x^2 + \overline{CK}^2$, d. h. $b^2 - a^2 = c^2 - 2cx$

und

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Bekanntlich ist (oder leicht über Sinussatz beweisbar)

$$y : (c - y) = a : b, \text{ d. h., } y = \frac{a}{a + b}\, c.$$

Wegen $a - b \leq 0$ und $a + b > c$ ist

$$x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c} = \frac{(a-b)(a+b)}{2c} + \frac{c}{2} \leq \frac{(a-b)c}{2c} + \frac{c}{2} \leq \frac{(a-b)c}{2(a+b)} + \frac{c}{2} =$$

$$= \frac{a-b+a+b}{2(a+b)}\, c = \frac{a}{a+b}\, c = y$$

und aus $a \leqq b$ folgt $a \leqq \frac{1}{2}(a + b)$, d. h. $y \leqq \frac{c}{2}$. Mithin ist

$$x \leqq y \leqq \frac{c}{2} \quad \text{bewiesen.}$$

Sei weiter bezeichnet: $h_c = \overline{CK}$, h_b = Höhe von B auf b,
h_a = Höhe von A auf a,

$$s_c = \overline{CD},\ w_c = \overline{CE},\ s_b = \overline{BQ}.$$

Dann ist nach Aufgabenstellung $h_a = s_b = w_c$.
Nun folgt hieraus sofort

$$h_b \leqq h_a \text{ und } h_c \leqq h_a \qquad (1)$$

und nach dem oben untersuchten Sachverhalt

$$s_b \leqq s_c\ . \qquad (2)$$

Wegen $s_b = w_c \leqq s_c$.
Aus der Flächenformel folgt aus (1):

$$b \geqq a,\ c \geqq a. \qquad (3)$$

Nach dem Kosinussatz folgt:

$$b^2 = s_c^{\ 2} + (\tfrac{c}{2})^2 - 2 \cdot s_c \tfrac{c}{2} \cos \sphericalangle ADC$$

und $$a^2 = s_c^{\ 2} + (\tfrac{c}{2})^2 - 2 \cdot s_c \tfrac{c}{2} \cos \sphericalangle BDC.$$

Wegen $\sphericalangle BDC = \pi - \sphericalangle ADC$ folgt durch Addition
$2a^2 + 2b^2 = 4s_c^{\ 2} - c^2$ und $s_c^{\ 2} - s_b^{\ 2} = b^2 - c^2$, d. h. aus (2)
folgt $b \geqq c$, also mit (3):

$$b \geqq c \geqq a. \qquad (4)$$

Nach Aufgabe 50 erhalten wir $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ (wegen $h_a = s_b$ und
(1)), d. h. nach (4)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \sphericalangle ABC \leqq a^2 + c^2 - ac = a(a - c) + c^2 \leqq$$
$$\leqq c^2 \leqq b^2.$$

Diese Kette kann nur für $a = b = c$ bestehen.

57. Angenommen, es gibt ein Paar ganzer Zahlen x und y mit

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

Dann ist

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$
$$= (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1.$$

Für $y \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ist einerseits

$$3y^2 + 4y + 1 = 2(2y^2 + y) + 1 + \{-y^2 + 2y\} < 2(2y^2 + y) + 1$$

und andererseits

$$3y^2 + 4y + 1 = 3(y + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{1}{3} > 0,$$

also

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2. \quad (1)$$

Da $(2y^2 + y)$ und $(2y^2 + y + 1)$ zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind, hat (1) keine Lösung.

$y = -1$: $x^2 + x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$,

$y = 0$: $x^2 + x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$,

$y = 1$: $x^2 + x = 4$, $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4}$ keine ganzzahlige Lösung,

$y = 2$: $x^2 + x = 30$, $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 30} = -\frac{1}{2} \pm \frac{11}{2}$

$$x_1 = 5, \; x_2 = -6.$$

Die gegebene Gleichung hat genau die folgenden Lösungen (x, y): $(-6, 2)$, $(-1,-1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(5, 2)$.

58. Die gesuchte maximale Länge ist 2952 und wird mit der Folge

$$1966, 1967, 1, 1966, 1965, 1, \ldots, 4, 3, 1, 2, 1, 1$$

erreicht.
Wir werden dieses Ergebnis als Spezialfall einer allgemeineren Aussage erhalten:
Ist $f(n)$ die maximale Länge einer Folge von positiven ganzen Zahlen, sämtlich nicht größer als n, in der jedes Folgeglied, beginnend mit dem dritten, gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden Vorgänger ist, so gilt

$$f(n) = \left[\frac{3n + 3}{2}\right] \text{ für } n \geq 2.$$

Betrachten wir die Folgen

$n-1, n, 1, n-1, n-2, 1, \ldots, 4, 3, 1, 2, 1, 1$ für ungerade n und

$n-1, n, 1, n-1, n-2, 1, \ldots, 3, 2, 1, 1$ für gerade n,

so folgt durch einfaches Abzählen

$$f(n) \geq \left[\frac{3n + 3}{2}\right]. \quad (1)$$

Die Behauptung beweisen wir nun per Induktion nach n.

1. $n = 2$. Da maximale Folgen sicher nicht mit zwei gleichen Elementen beginnen (dann nur Länge 2), gibt es nur die beiden Folgen
   1, 2, 1, 1 und 2, 1, 1, also $f(2) = 4$.

$n = 3$. Es gibt nur 6 Folgen:
1, 2, 1, 1; 1, 3, 2, 1, 1; 2, 1, 1; 2, 3, 1, 2, 1, 1;
3, 1, 2, 1, 1; 3, 2, 1, 1, d.h. $f(3) = 6$

2. Wir führen jetzt den Induktionsschritt durch.

Induktionsvoraussetzung: $f(n) = \left[\frac{3n+3}{2}\right]$ für $n \leq k$

Induktionsbehauptung: $f(k+1) = \left[\frac{3k+6}{2}\right]$.

Induktionsbeweis: Wir betrachten eine maximal lange Folge. Ihre Länge ist also $f(k+1)$. Zunächst zeigen wir, daß die Zahl $(k+1)$ in der Folge vorkommt. Würde sie nicht auftreten, wäre nach Induktionsvoraussetzung widersprüchlich

$$f(k+1) \leq f(k) = \left[\frac{3k+3}{2}\right] < \left[\frac{3k+6}{2}\right] \leq f(k+1) \quad \text{nach (1).}$$

$(k+1)$ tritt also in der Folge auf. Offenbar kann $(k+1)$ nicht Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ sein, d. h., $(k+1)$ kann nur an erster oder zweiter Stelle stehen. Beginnt die Folge

$$(k+1), m, \ldots \qquad 1 \leq m \leq k,$$

so läßt sie sich durch Vorsetzen von $k - m + 1$ ($\in \{1, 2, \ldots, k\}$) verlängern, im Widerspruch zur Maximalität. Also beginnt die Folge

$$m, k+1, k-m+1, m, \ldots \qquad 1 \leq m \leq k.$$

Für $2 \leq m \leq k-1$ tritt ab dem 3. Glied keine Zahl größer als $k-1$ auf, d. h. nach Induktionsvoraussetzung ist

$$f(k+1) \leq 2 + f(k-1) = 2 + \left[\frac{3k}{2}\right] < \left[\frac{3k+6}{2}\right] \leq f(k+1).$$

Also ist $m = 1$ oder $m = k$. Wir erhalten für

$m = 1$: $v_1 = (1, k+1, k, 1, k-1, k-2, 1, \ldots, 4, 3, 1, 2, 1, 1)$ für ungerade k

und $v_2 = (1, k+1, k, 1, k-1, k-2, 1, \ldots, 5, 4, 1, 3, 2, 1, 1)$ für gerade k.

Einfaches Auszählen der Elemente ergibt für

$$v_1: \frac{3k+5}{2} \quad \text{und } v_2: \frac{3k+4}{2}$$

v_2 ist wegen $\frac{3k+4}{2} < \left[\frac{3k+6}{2}\right] \leq f(k+1)$, k gerade, nicht maximal. Dagegen ist $\frac{3k+5}{2} = \left[\frac{3k+6}{2}\right]$ für ungerade k.

Schließlich erhalten wir für $m = k$ die eingangs angegebenen Folgen. Damit ist der Beweis komplett. Überdies haben wir auch alle maximalen Folgen bestimmt, nämlich die eingangs angegebenen und

$$1, n, n-1, 1, n-2, n-3, 1, \ldots, 2, 1, 1 \quad \text{für gerade } n.$$

59. Der Beweis läuft analog zum Beweis zur Aufgabe 51. Man führt ein räumliches Koordinatensystem ein, so daß jeder der 8 Punkte in einem Oktanten liegt. Dann richtet man die Scheinwerfer so, daß die Begrenzungsebenen des Scheinwerferlichts parallel zu den Koordinatenebenen verlaufen und der Koordinatenursprung von allen angeleuchtet wird. Dann ist gewährleistet, daß jeder Scheinwerfer mindestens einen Oktanten des Koordinatensystems beleuchtet, d. h., insgesamt wird der ganze Raum beleuchtet.

60. Zunächst begibt sich der schwarze König in das Feld links unten in der 2. Reihe und 2. Spalte. Nachdem weiß gezogen hat, müssen die unteren 3 Reihen und linken 3 Spalten frei von weißen Türmen sein (siehe Bild 17a).

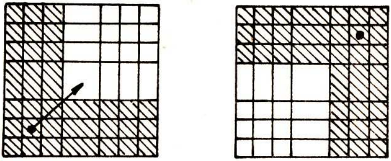


Bild 17 a) b)

Sonst könnte sich der schwarze König ins Schach begeben. Er wandert nun entlang der Diagonalen zum diametral gelegenen Punkt (siehe Bild 17 b). Dafür benötigt er genau 997 Züge. Nachdem weiß am Zug war müssen die 3 oberen Reihen und 3 rechten Spalten frei von weißen Türmen sein. Jeder Turm muß mindestens 2 Züge machen, einen um den König horizontal und einen um ihn vertikal zu passieren. Weiß braucht dafür aber $2 \cdot 499 = 998$ Züge, d. h., der schwarze König stand zwischenzeitlich im Schach oder kann im nächsten Zug ins Schach gelangen.

61. Es seien L, K, N drei aufeinanderfolgende Ecken des Rhombus LKNM. Wir fixieren K. Lassen wir L und N auf AB bzw. DC wandern, so daß LKNM ein Rhombus ist, so bewegt sich M auf einer zu AD senkrechten Geraden mit AE = KC (siehe Bild 18).

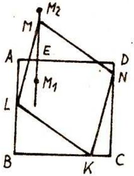


Bild 18

Ist $\overline{KC} \leq \frac{1}{2}$, so liegen alle Punkte M zwischen M_1 und M_2, wobei $M \equiv M_1$ für $B \equiv L$ und $M \equiv M_2$ für $N \equiv D$. Man beachte, daß alle Punkte M zwischen M_1 und M_2 tatsächlich als vierter Punkt des Rhombus auftritt.

Ist $\overline{KC} \geq \frac{1}{2}$, so liegt ein gespiegelter Fall vor.

Wir haben also nur den Rand des Gebietes zu bestimmen, d. h., wir müssen den geometrischen Ort aller Punkte M bestimmen, für die $L \equiv A$, $L \equiv B$, $N \equiv D$ oder $N \equiv C$ ist.

Wir betrachten jetzt den Fall $L \equiv B$ (siehe Bild 19).

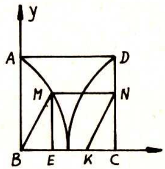


Bild 19

Sei $\overline{KC} = x$, $x \leq \frac{1}{2}$. Dann ist auch $\overline{BE} = x$ und $\overline{ME} = \sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{BE}^2}$

$$= \sqrt{\overline{BK}^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{(1 - x)^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2x}$$

M liegt also auf der Kurve $y = \sqrt{1 - 2x}$. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Ganz analog erhalten wir für $N \equiv C$:

$$y = \sqrt{1 - 2(1 - x)} = \sqrt{2x - 1} \qquad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

für $N \equiv D$:

$$y = 1 + \sqrt{2x}, \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

Für $L \equiv A$:

$$y = 1 + \sqrt{2 - 2x}, \; \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Insgesamt ergibt sich folgende Fläche (siehe Bild 20).

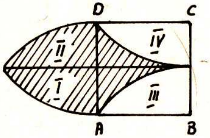


Bild 20

Da durch einfache Translation die Fläche I auf die Fläche IV deckungsgleich gebracht werden kann und analoges für die Flächen II und III gilt, ist die schraffierte Fläche gleich dem Flächeninhalt des Quadrates $\square$ ABCD, deren Flächeninhalt 1 ist.

62. Zunächst zeigen wir, daß k relativ prim zu 10 ist.
Sicher gibt es Zahlen, die mit 1 beginnen und durch k teilbar sind. Die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge endet auf 1 und enthält damit sicher keinen Teiler 2 und 5.
Wir betrachten nun eine Zahl, die mit 500 beginnt und durch k teilbar ist, d. h. M = 500 abc...z (Ziffernfolge).
Dann ist k auch Teiler der folgenden Zahlen:

$$M_1 = z\ldots cba005,$$

$$\overline{M}_1 = z\ldots cba005000\ldots0,$$

$$M = 500a\ldots z,$$

$$M + \overline{M}_1 = z\ldots cba01000abc\ldots z,$$

$$M_2 = z\ldots cba00010abc\ldots z,$$ der Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge von $M + \overline{M}_1$, also

$$M + \overline{M}_1 - M_2 = 9900\ldots0,$$

$$k \mid 9900\ldots0$$ und wegen der eingangs gemachten Bemerkung

$$k \mid 99.$$

Aufgrund der bekannten Teilbarkeitsregeln für 3, 9 und 11 ist leicht einzusehen, daß tatsächlich für jeden Teiler k von 99, d. h.,

$K \in \{3, 9, 11, 33, 99\}$ gilt:

Ist k ein Teiler von M, so ist k auch ein Teiler der Zahl, die aus M durch Umkehrung der Ziffernfolge entsteht.