Junge Mathematiker

Mathematischer Lesebogen, herausgegeben vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig

zusammengestellt von J. Lehmann Heft 76

Mathematikolympiaden in der Sowjetunion

Auswahl von Aufgaben aus den Klassenstufen 5 bis 7 (mit Lösungen)

Leipzig, den 8. Mai 1985

Liebe Freunde der Mathematik!

Seit über zwei Jahrzehnten bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen dem Komitee der Mathematikolympiaden der UdSSR, der sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift "Quant" und der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha". Das kommt zum Ausdruck im persönlichen Erfahrungsaustausch und im Austausch von Beiträgen und Aufgabensammlungen.

Das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit Leipzig hat zur weiteren Förderung interessierter Schüler seit 1961 77 Lesebogen Junger Mathematiker mit einer Gesamtauflage von 290 000 Heften herausgegeben. Ein Schwerpunkt war die Veröffentlichung einer Dokumentation der Aufgaben (und Lösungen) der ABC-Mathematikolympiaden, der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Klassen 5 bis 10), eines IMO-Sonderheftes und Aufgabensammlungen aus der Sowjetunion und den Ländern der sozialistischen Staatengemeinschaft. Die Aufgaben der Klassenstufen 11/12 werden aus Anlaß der XXV. OJM im Dezember 1985 veröffentlicht.

In Auswertung der sowjetischen Erfahrungen auf dem Gebiet der Olympiadebewegung seit über einem halben Jahrhundert stellen wir zwei Hefte mit einer Auswahl von Olympiadeaufgaben und Lösungen, einerseits für die Klassenstufen 4 bis 7 (Lesebogen Nr. 76) und andererseits für die Klassenstufen 8 bis 10 (Lesebogen Nr. 71), unseren interessierten Lesern zur Verfügung.

Unser Dank gilt den beiden ehemaligen erfolgreichen IMO-Teilnehmern Dr. W. Moldenhauer, Pädagogische Hochschule "Theodor Neubauer", Erfurt (Kl. 4 bis 7) und Dr. H.-D. Gronau, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, für die Übersetzung, Auswahl, Bearbeitung von Aufgaben und Lösungen des sowjetischen Materials.
Unseren Lesern wünschen wir Freude und Erfolg.

J. Lehmann

OStR J. Lehmann, VLdV
Chefredakteur der
mathematischen Schüler-
zeitschrift "alpha"

Aufgaben aus sowjetischen Mathematik-Olympiaden

Die Traditionen von mathematischen Schülerwettbewerben gehen in der Sowjetunion weit zurück. Bereits 1886 fanden in Rußland die ersten, wenn auch sporadischen Wettstreite statt. Eine größere Entwicklung der Wettbewerbe setzte aber erst nach der Oktoberrevolution ein. Im Jahr 1934 fand die erste Schülerolympiade an der Leningrader Universität statt. Ein Jahr später begannen auch die jährlichen Schülerwettbewerbe an der Moskauer Universität. Nach dem Großen Vaterländischen Krieg wurde ab 1947 in Wologda, Iwanowo, Irkutsk und Smolensk, ab 1949 in Saratow und ab 1950 in der Belorussischen SSR mit regelmäßigen Olympiaden begonnen. Da Schülerwettstreite, gerade auf mathematischem Gebiet, eine große Bedeutung für das sozialistische Bildungssystem haben - insbesondere für die Suche und die Förderung von besonderen Begabungen -, wurde 1961 mit Olympiaden im Rahmen der Unionsrepubliken und ab 1967 in der gesamten UdSSR begonnen.

Die Olympiaden werden in fünf Stufen unter Beteiligung verschiedener Klassenstufen durchgeführt. Die Schulolympiaden (1. Stufe) werden für die Schüler der Klassen 4 bis 10 veranstaltet. Hierbei gibt es auch Mannschaftswettbewerbe. An den Rayonolympiaden nehmen Schüler der Klassen 5 bis 10 teil. Die Oblast-, Gebiets- und Republikanischen Olympiaden (ASSR-Olympiaden) werden für Schüler der 7. bis 10. Klasse organisiert, während die

Republikanischen Olympiaden (SSR-Olympiaden) und die Allunions-Olympiaden für die Klassen 8 bis 10 durchgeführt werden. Aus den Siegern der Allunions-Olympiaden wird die Nationalmannschaft für die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) gebildet.

In zwei Heften werden die verschiedenen Stufen an Hand von ausgewählten Aufgaben vorgestellt, und zwar in den Klassenstufen 4 bis 7 von W. Moldenhauer und in den Klassenstufen 8 bis 10 von H.-D. Gronau.

Die Aufgaben wurden der sowjetischen Broschüre
I. S. Petrakow
Mathematische Schülerolympiaden
Moskau, Verlag für Bildung, 1982,
entnommen.

Die Lösungen wurden überarbeitet. Zahlreiche Aufgaben haben neue Lösungen erhalten.

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, so daß für Interessenten verschiedener Leistungsstufen geeignetes Material enthalten ist.

Für die Bearbeiter, selbst seit langem mit der Olympiadebewegung in der DDR verbunden, war es nicht nur interessant, etwas über die Organisation der Mathematik-Olympiaden im Freundesland UdSSR zu erfahren, sondern zahlreiche Aufgaben gaben neue Impulse für die Schülerförderung. So haben wir die Hoffnung, daß viele Leser die beiden Hefte als echte Bereicherung im Rahmen ihrer Beschäftigung mit der Mathematik ansehen werden.

H.-D. Gronau/W. Moldenhauer

1. SCHULOLYMPIADEN

1.1. Olympiaden für Schüler der 4. Klassen

1.1.1. Beispielaufgaben für die Durchführung der Winterolympiaden (Wettbewerb im Lösen von Aufgaben)

1. Führe folgende Grundrechenarten aus!

a) $(257\,368 + 2573) + (42\,632 - 1573)$

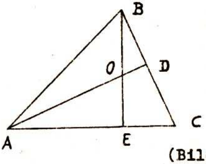
b) $354 \cdot 73 + 23 \cdot 25 + 354 \cdot 27 + 17 \cdot 25$

2. Ergänze die fehlenden Ziffern, und begründe, wie du sie gefunden hast!

a)
```
      *5*8
  +   5*3*
  --------
     *0209
```

b)
```
63 · **
-------
**
  **
-------
***
```

3. Schreibe alle Strecken auf, die im Bild 1 zu sehen sind! Wieviel Strecken erhält man?



(Bild 1)

4. Auf einer Seite einer Waage liegen 6 gleich schwere Teebeutel und ein 50-g-Stück. Auf der anderen Seite der Waage liegen ein gleicher Teebeutel, ein Gewicht von 100 g und ein Gewicht von 200 g. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht. Bestimme, wieviel Gramm ein Teebeutel wiegt!

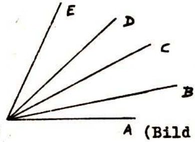
5. Auf einem Weg von der Genossenschaft A zur Stadt M liegen in dieser Reihenfolge die vier Dörfer B, W, G, D. Die Entfernung von A nach W beträgt 15 km, die von A nach D 50 km, die von G nach B 20 km, die von G nach M 30 km und die von W nach G 5 km weniger als die von D nach G. Gib die Entfernungen zwischen jedem der genannten Punkte und zwischen der Genossenschaft und der Stadt an!

1.1.2. Beispielaufgaben für die Durchführung des Mannschaftswettbewerbs

6. Auf dem Tisch liegen verschiedene Dreiecke, rechtwinklige, allgemeine und gleichschenklige. Unter diesen sind einige kongruent. Wie findet man diese? Schreibe ihre Namen und Anzahl auf!

7. Eine Raupe kriecht auf einen Apfelbaum. In der ersten Stunde klettert sie 10 cm hoch, in der zweiten Stunde sinkt sie um 4 cm herunter, in der dritten Stunde kriecht sie erneut 10 cm hoch, und in der vierten rutscht sie wieder 4 cm herunter. Auf diese Weite klettert die Raupe weiter. Um wieviel cm ist die Raupe in 11 Stunden hinaufgeklettert?

8. Ein Junge zeichnet 5 Strahlen, die alle im Punkt O beginnen (Bild2). Wieviel spitze Winkel erhält er insgesamt? Schreibe diese Menge von Winkeln auf!



(Bild 2)

9. Ergänze die fehlenden Ziffern, die durch x gekennzeichnet sind, und begründe, wie du sie gefunden hast!

```
785 · xxx
      xxx
     1xxx
    xxx
    xxxxx
```

10. Eine Mutter beauftragte die Kinder - den Bruder und die Schwester -, ein Paket Pralinen so aufzuteilen, daß am nächsten Tag zum Mittag für die Gäste die Hälfte der Pralinen angeboten werden kann und noch drei Stück übrigbleiben. Zum darauffolgenden Frühstück sollte für die ganze Familie die Hälfte der restlichen Pralinen und noch drei Stück und zum darauffolgenden Abendessen die Hälfte der verbleibenden Pralinen und noch drei Stück vorhanden sein. Die Kinder teilten die Pralinen so auf, wie es ihnen die Mutter auftrug, und behielten noch vier Pralinen übrig, die sie selber essen durften. Wieviel Pralinen waren im Paket?

1.2. Olympiaden für Schüler der 5. Klassen

1.2.1. Beispielaufgaben für die Durchführung der Winterolympiaden (Wettbewerb im Lösen von Aufgaben)

11. Von einer Stadt A zu einer Stadt B fuhr ein Zug 16 Stunden. Auf der Rückfahrt fuhr dieser Zug mit einer um 20 km/h höheren Geschwindigkeit und war 4 Stunden schneller. Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug von A nach B, und wie weit sind die beiden Städte voneinander entfernt?

12. Löse die Gleichung $|2x| \cdot |-3{,}5| = |-28|$!

13. In ein Pionierlager fuhren drei Freunde: Mischa, Wolodja und Petja. Es ist bekannt, daß jeder von ihnen einen der Familiennamen Iwanow, Semenow, Gerassimow führt. Mischa heißt nicht Gerassimow. Der Vater von Wolodja ist Ingenieur. Wolodja geht in die 6. Klasse. Der Pionier mit dem Familiennamen Gerassimow geht in die 5. Klasse. Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Iwanow ist Dreher. Welchen Familiennamen haben die Pioniere?

14. Stelle die Zahl 100 durch neun verschiedene Ziffern dar, die durch Grundrechenarten verbunden sind!

15. Auf einem Kolchos gab es einige Ferkel gleichen Gewichts und einige Lämmer gleichen Gewichts. Ein Pionier fragte einen Kolchosbauern, wieviel ein Ferkel und ein Lamm wiegen. Der Kolchosbauer antwortete, daß 3 Ferkel und 2 Lämmer 22 kg, aber 2 Ferkel und 3 Lämmer 23 kg wiegen. Wieviel wiegt ein Ferkel und wieviel ein Lamm?

1.2.2. Beispielaufgaben für die Durchführung des Mannschaftswettbewerbs

16. Bestimme die Werte der Ausdrücke

a) $25\frac{3}{7} \cdot 7 + (12\frac{23}{25} - 4\frac{2}{5}) \cdot 25 + 125 \cdot 357 \cdot 0{,}008$;

b) $16{,}4 \cdot 25 - \frac{5}{8} \cdot (-9\frac{3}{5}) - (-2{,}5) \cdot 15{,}6 - 9{,}6 \cdot \frac{5}{8}$!

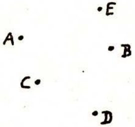
17. a) Zeige, ohne die Division auszuführen, daß 7920 durch 60 teilbar ist!
b) Bestimme, ohne sich auf das größte gemeinsame Vielfache und den kleinsten gemeinsamen Teiler der Zahlen 360 und 84 zu beziehen, wieviel Mal der kleinste gemeinsame Teiler dieser Zahlen in dem größten gemeinsamen Vielfachen enthalten ist! Wie hast du dies ermittelt?

18. a) Veranschauliche wesentliche Eigenschaften der Brüche mit Hilfe einer Zeichnung! (Für die Durchführung dieser Aufgabe sind auf jedem Tisch folgende Dinge vorzubereiten: Papier, Bunt-

stifte, Lineal mit Maßstab, Winkelmesser, Zirkel.)
b) Nenne 2 bis 3 Beispiele für Brüche oder gebrochene Zahlen, die man im Leben der Menschen antrifft!

19. a) Konstruiere ein Dreieck, das einem gegebenen kongruent ist! (Auf dem Blatt Papier ist ein beliebig liegendes allgemeines Dreieck gezeichnet. Auf dem Tisch liegen ein Lineal und ein Winkelmesser.)
b) Konstruiere ein Rechteck, das einem gegebenen kongruent ist! (Auf einem Blatt karierten Papiers ist ein Rechteck gezeichnet. Auf dem Tisch befindet sich Zeichenzubehör.)

20. a) Die Punkte A und B seien symmetrisch in bezug auf eine Achse MN (Bild 3). Konstruiere die Symmetrieachse der Punkte A und B und die Punkte, die symmetrisch zu den Punkten C, D, E bzgl. dieser Achse liegen!
b) Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB}$! (Bild 4)



(Bild 3)

(Bild 4)

1.3. Olympiaden für Schüler der 6. Klassen

1.3.1. Beispielaufgaben für die Durchführung der Winterolympiaden (Wettbewerb im Lösen von Aufgaben)

21. Aus einem Korb mit Eiern entnahm man die Hälfte aller Eier, danach die Hälfte des Restes, dann die Hälfte des neuen Restes und zum Schluß noch einmal die Hälfte des letzten Restes. Danach verblieben im Korb 10 Eier. Wieviel Eier waren zu Anfang im Korb?

22. Bei der Addition von vier unleserlich geschriebenen Zahlen wurde bei der ersten Zahl die Hunderterziffer 2 als 5, bei der zweiten Zahl die Tausenderziffer 3 als 8, bei der dritten Zahl die Einerstelle 9 als 2 und bei der vierten Zahl die Zehnerziffer 7 als 4 gelesen. Das Ergebnis der Addition war 28 975. Bestimme den Fehler, den das Ergebnis hat, und die richtige Summe!

23. Löse die Gleichung $(2x - 5)(\frac{3}{2}x + 9)(0,3x - 12) = 0$!

24. Berechne den Wert des Ausdrucks $\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4}$!

25. Im nebenstehenden Beispiel sind einstellige Zahlen durch Buchstaben gekennzeichnet. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen. Bestimme diese Zahlen, und gib an, wie du sie ermittelt hast!

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & = & b \\ - & & & & - \\ c & \cdot & d & = & e \\ \hline f & \cdot & a & = & a \end{array}$$

1.3.2. Beispielaufgaben für die Durchführung des Mannschaftswettbewerbs

Verstehst du zu rechnen?

26. Bestimme den Wert der Ausdrücke

a) $(\frac{810}{162} + \frac{675}{225})(\frac{810}{162} - \frac{675}{225})$;

b) $32 \cdot 0,99 \cdot 25 \cdot 1,25 + 57 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot \frac{4}{19}$!

Aufmerksamkeit und Scharfsinn

27. a) In einer Familie gibt es zwei Brüder, die jeder zwei Schwestern und jeder einen Vater haben. Jede dieser Schwestern hat eine Mutter. Wieviel Menschen gibt es in der Familie?

b) Aus Hölzchen ist das Beispiel VI - IV = XI gelegt. Lege nur ein Hölzchen um, damit die Gleichung richtig wird!

Kannst du Gleichungen lösen?

28. Bestimme x und y, wenn gilt

a) $27x + 35y = 151$
$5x - 7y = 1$;

b) $15x - 41 + 2x = 9 + 15x + 20 - 5x$!

Kannst du Graphen zeichnen?

29. Zeichne die Graphen der Gleichungen

a) $2y = 3x + 6$; b) $3y + 4x = 12$!

Benutze Formeln!

30. a) Zerlege $81a^{20}x^{16} - 16b^8y^{20}$ in Faktoren!

b) Führe die Grundrechenarten aus, und zerlege in Faktoren $(2a + 3b)^3 - 18ab(2a + 3b)$!

Kennst du die Geometrie?

31. Konstruiere eine Figur, die zu einer gegebenen kongruent ist! (Auf ein Blatt Papier wird ein beliebiges Drei- oder Viereck gezeichnet. Auf dem Tisch befinden sich ein Winkelmesser, ein Lineal und ein Zirkel.)

1.4. Olympiaden für Schüler der 7. Klassen

1.4.1. Beispielaufgaben für die Durchführung der Winterolympiaden (Wettbewerb im Lösen von Aufgaben)

32. Löse die Gleichung

$$\frac{11}{5x - 5} + \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{7x + 6}{5x^2 - 10x + 5} - \frac{5}{2 - 2x} \quad !$$

33. Zeige, daß für jede beliebige ganze Zahl k die Ungleichung

$$(k^2 + 1) + \frac{1}{k^2 + 1} \geqq 2 \quad \text{gilt!}$$

34. Konstruiere einen Rhombus, in dem die Höhe gleich 4 cm und eine Diagonale gleich 6 cm lang ist!

35. Welche Zahl ist größer: 99^{20} oder 9999^{10}? Begründe, warum!

36. Setze im nebenstehenden Beispiel die mit einem Sternchen gekennzeichneten Ziffern wieder ein!

```
*8* · 4*2
---------
      7**
     3**
   ****
---------
   *****0
```

1.4.2. Beispielaufgaben für die Durchführung des Mannschaftswettbewerbs

Wie einfach und schnell rechnest du?

37. Berechne

$$\text{a)}\ \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} \quad ; \quad \text{b)}\ \frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} \quad !$$

Kannst du Polynome in Faktoren zerlegen?

38. Kürze die Brüche a) $\frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - a - 12}$; b) $\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^4 - 3x^2 + 1}$!

Kennst du die Graphen von Funktionen?

39. Löse folgendes Gleichungssystem graphisch!

$$2y + 4x = x^2$$
$$y - x = 0$$

40. Löse die Ungleichung $(x + 3)(x - 1)(x - 4) > 0$!

Konstruiere, berechne und wandle geometrische Figuren um!

41. Konstruiere ein Quadrat, das den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck hat, dessen Seitenlängen du nur mit dem Zirkel abmessen kannst!

42. Konstruiere ein Dreieck aus h_c, s_a und α !

43. Konstruiere ein Dreieck aus α, s_a und unter Kenntnis der Beziehung $h_c : c = 2 : 3$!

2. RAYONOLYMPIADEN

2.1. Olympiaden für Schüler der 5. Klassen

44. Durch Rationalisierung eines Produktionsprozesses wurde die Warenanzahl eines Werkes im Oktober um 20 % gegenüber September, im November um 5 % gegenüber Oktober und im Dezember um 10 % gegenüber November vergrößert. Im Ergebnis produzierte das Werk im Dezember 11 088 Waren. Wieviel Waren produzierte das Werk im November, im Oktober und im September?

45. Bestimme x aus der Gleichung

$$4520 : (225 - 4\,209\,520 : \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27} = 40 \text{ !}$$

46. Zur Ernährung benötigen 6 Pferde und 40 Kühe täglich 472 kg, aber 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu. Wieviel Heu benötigen bei dieser Ernährung 30 Pferde und 90 Kühe vom 15. Oktober bis zum 25. März einschließlich? (Das Jahr ist kein Schaltjahr.)

47. Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen beträgt 240, und ihr größter gemeinsamer Teiler ist 8. Bestimme beide Zahlen, wenn bekannt ist, daß die kleinere der Zahlen nur einmal den Faktor 5 enthält und die größere die 5 nicht enthält!

48. Ein Gemüseladen erhielt 5 Kisten Zitronen und Apfelsinen. In jeder Kiste waren nur Früchte einer Sorte. In der ersten Kiste waren 100 Stück, in der zweiten 105, in der dritten 110, in der vierten 115 und in der fünften 130 Stück. Als eine Kiste verbraucht war, waren dreimal weniger Zitronen als Apfelsinen übriggeblieben. Wieviel Früchte waren übriggeblieben?

2.2. Olympiaden für Schüler der 6. Klassen

49. Ein Schulinternat kaufte 675 m roten, blauen und schwarzen Stoff für das Nähen von Mänteln. Für das Nähen von Kindermänteln wurden die Hälfte des roten Stoffes, $\frac{2}{3}$ des blauen und $\frac{3}{4}$ des schwarzen Stoffes verbraucht. Danach blieb von jeder Farbe die gleiche Menge übrig. Wieviel Meter jeder Farbe wurden gekauft?

50. Bestimme den Wert des Ausdrucks
$81a^7b^5c^3 + 36a^5b^6c^4 - 135a^6b^4c^5$ für $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$!

51. Die Eckpunkte eines Dreiecks seien A(2;12), B(26;19) und C(14;3). Zeichne dieses Dreieck und alle Dreiecke, die symmetrisch zum gegebenen bzgl. der Koordinatenachsen und des Koordinatenursprungs liegen! Berechne die Seitenlängen dieser Dreiecke!

52. Durch den Punkt B werden vier Geraden so gezeichnet, daß $AB \perp BD$, $BE \perp BC$ ist und die gezeichnete Gerade AC die anderen Geraden so schneidet, daß $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist. Der Schnittpunkt von AC mit BD sei D, und der von AC und BE sei E. Zeige, daß $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ gilt!

53. Aus zwei Neubausiedlungen, die 36 km voneinander entfernt sind, gehen sich zwei Freunde entgegen. Der erste geht mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h, der zweite mit 4 km/h. Gleichzeitig mit dem ersten fährt ein Junge mit einem Fahrrad aus dessen Stadt dem zweiten entgegen. Er fährt mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Summe der Geschwindigkeiten der Freunde ist. Wenn er den zweiten Freund trifft, wendet er und fährt zum ersten zurück. Trifft er den ersten, dann wendet er und fährt zum zweiten zurück usw. Auf diese Weise fährt der Radfahrer

zwischen dem ersten und dem zweiten Freund hin und her, bis sie sich treffen. Wieviel Kilometer fuhr der Radfahrer in dieser Zeit?

2.3. Olympiaden für Schüler der 7. Klassen

54. In einem konvexen ungleichseitigen Viereck ABCD verbindet man die Seitenmitten und erhält das Viereck EFKL. Bestimme, welche Fläche das Viereck ABCD im Vergleich zur Fläche des Vierecks EFKL einnimmt!

55. Gegeben sei die Gleichung
$\frac{x(a-x)}{x+a} + x - a = 10 - \frac{10x}{x+a}$, wobei a eine gegebene Zahl ist. Bestimme die Lösung der Gleichung in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a!

56. Zeige, daß für beliebiges $a \neq 0$ die Ungleichung
$1 + \frac{1}{a^2} \geq \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}$ gilt!

57. Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{OB}$, B(8;6). Konstruiere alle Punkte, die man aus dem gegebenen Punkt B erhält, wenn man den Vektor $\overrightarrow{OB}$ aufeinanderfolgend um rechte Winkel um den Koordinatenursprung dreht! Um welche Figur handelt es sich, wenn man die erhaltenen Punkte aufeinanderfolgend verbindet?

58. Drei eigensinnige Fischer kamen überein, den ganzen Fang in gleiche Teile aufzuteilen. Der erste Fischer teilte den Fang auf und verteilte die Fische auf drei Pakete. Er sagte, daß in jedem Paket 1 kg 780 g Fisch sind. Der zweite Fischer traute nur seiner Großmutter. Diese ermittelte als Gewichte der Pakete 1 kg 790 g, 1 kg 770 g, 1 kg 780 g. Der dritte Fischer traute nur dem Gewicht, das im Geschäft ermittelt wurde. Dort maß man die gleichen Gewichte wie die Großmutter, nur in anderer Reihenfolge. Wie muß man die Pakete unter den Fischern verteilen, damit jeder der Fischer auf Grund seiner Aussagen sagen kann, daß er nicht weniger als 1 kg 780 g erhalten hat?

3. OBLAST-, GEBIETS-, REPUBLIKANISCHE (ASSR) OLYMPIADEN

3.1. Olympiaden für Schüler der 7. Klassen

59. Ein Reisender fährt mit einem Zug, der mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h fährt. Er sieht, daß am Fenster ein entgegenkommender Zug innerhalb von 4 s vorbeifährt. Welche Geschwindigkeit hat der Gegenzug, wenn seine Länge 120 m beträgt?

60. Zerlege das Polynom $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ in Faktoren!

61. Es seien x und y solche ganzen Zahlen, daß $3x + 7y$ durch 19 teilbar ist. Zeige, daß auch $43x + 75y$ durch 19 teilbar ist!

62. Im Dreieck ABC ist die Differenz der Winkel bei C und A gleich 90°. Die innere und äußere Winkelhalbierende des Winkels bei B schneiden die Gerade AC in den Punkten D und E. Zeige, daß $\overline{BD} = \overline{BE}$ ist!

63. Rekonstruiere die fehlenden Ziffern bei folgender Multiplikation!

```
*** · ***
---------
     *0**
     **5
   *1**
---------
   *****8
```

4. REPUBLIKANISCHE OLYMPIADEN

4.1. Olympiaden für Schüler der 7. Klassen

64. Die Seiten eines beliebigen konvexen Vielecks seien von außen gefärbt. Man zeichne irgendwelche Diagonalen so ein, daß sich keine drei in einem Punkt schneiden. Jede dieser Diagonalen färbe man auch auf einer Seite. Zeige, daß es mindestens ein Vieleck gibt, das aus den Diagonalen des Ausgangsvielecks entstanden ist und das nur von außen gefärbt ist!

65. Im Quadrat ABCD befinde sich auf der Seite AB ein Punkt P, auf BC ein Punkt Q, auf CD ein Punkt R und auf DA ein Punkt S. Es zeigt sich, daß PQRS ein Rechteck ist. Zeige, daß PQRS entweder ein Quadrat ist oder seine Seiten parallel zu den Diagonalen des Quadrates ABCD liegen!

66. Zeige, daß es unter 39 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine gibt, bei der die Summe der Ziffern

durch 11 teilbar ist!

67. Gegeben ist ein Brett mit 4 mal 4 Quadraten. Einige Quadrate sind durch Sternchen gekennzeichnet. Zeige, daß man 7 Sternchen so anordnen kann, daß beim Streichen von 2 beliebigen Zeilen und 2 beliebigen Spalten dieses Brettes in den übriggebliebenen Quadraten immer mindestens 1 Sternchen verbleibt! Zeige, daß, wenn die Anzahl der Sternchen kleiner als 7 ist, man dann immer 2 Zeilen und 2 Spalten so streichen kann, daß alle übriggebliebenen Quadrate leer sind!

5. LÖSUNGEN

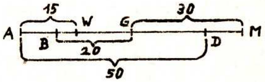
1. a) 301 000, b) 36 400

2. a) Die letzte Ziffer des zweiten Summanden ist 1. Dann ist die vorletzte Ziffer des ersten Summanden gleich 7. Die zweite Ziffer des zweiten Summanden ist dann 6 und die erste Ziffer des ersten Summanden 4. Die fehlende Ziffer in der Summe ist 1.
b) Das Produkt einer einstelligen Zahl mit 63 ist nur dann zweistellig, wenn es sich um eine 1 handelt. Daher ist der zweite Faktor gleich 11.

3. Es sind die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{BE}$, $\overline{BO}$, $\overline{EO}$, $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{OD}$. Insgesamt sind es 13 Strecken.

4. Es sei das Gewicht eines Teebeutels gleich x Gramm. Dann erhalten wir die Gleichung $6x + 50 = x + 300$ und hieraus $x = 50$ g.

5. Es gilt $\overline{WG} < \overline{GD}$ um 5 km (siehe Bild 5);
$\overline{GD} + \overline{WG} = 50 - 15 = 35$;
$35 - 5 = 30$; $\overline{WG} = 30:2 = 15$;
$\overline{GD} = 15 + 5 = 20$. Damit ist
$\overline{BW} = 20 - 15 = 5$; $\overline{AB} = 15 - 5 = 10$; $\overline{MD} = 30 - 20 = 10$;
$\overline{AM} = 50 + 10 = 60$.



(Bild 5)

6. Die Kongruenz weist man durch Übereinanderlegen der Figuren nach.

7. In je 2 Stunden klettert die Raupe 10 -4 = 6 cm hoch, d. h., in 10 Stunden ist sie $5 \cdot 6 = 30$ cm hochgeklettert, und in der 11. Stunde klettert sie noch einmal 10 cm höher. Insgesamt ist sie dann 40 cm hochgeklettert.

8. Es ist $M = \{ \sphericalangle EOD, \sphericalangle EOC, \sphericalangle EOB, \sphericalangle EOA, \sphericalangle DOC, \sphericalangle DOB, \sphericalangle DOA, \sphericalangle COB, \sphericalangle COA, \sphericalangle BOA \}$. Also treten insgesamt 10 Winkel auf.

9. Eine dreistellige Zahl kann bei einem Produkt aus 785 nur mit der 1 entstehen, und eine vierstellige Zahl, deren erste Ziffer eine 1 ist, ergibt sich nur bei 2. Folglich ist der zweite Faktor gleich 121.

10. Es ist $4 + 3 = 7$; $7 \cdot 2 = 14$; $14 + 3 = 17$; $17 \cdot 2 = 34$; $34 + 3 = 37$; $37 \cdot 2 = 74$. Es waren also 74 Pralinen.

11. Die Geschwindigkeit von A nach B des Zuges sei x km/h. Dann betrug die Geschwindigkeit von B nach A x + 20 km/h und die Fahrzeit 12 Stunden. Wir benutzen $s = v \cdot t$ und erhalten $16 \cdot x = (x + 20) \cdot 12$ und hieraus $x = 60$ km/h. Dann gilt $\overline{AB} = 60 \cdot 16 = 960$ km.

12. Es ist $|2x| \cdot |-3{,}5| = |-28|$ genau dann, wenn $|2x| \cdot 3{,}5 = 28$; $|2x| = 8$; $2x = 8$ oder $2x = -8$; $x = 4$ oder $x = -4$.

13. Aus untenstehendem Schema wird klar, daß Petja Gerassimow, Wolodja Semenow und Mischa Iwanow heißt.

Mischa	Wolodja 6. Klasse Vater Ingenieur	Petja
Iwanow Vater Dreher	Semenow	Gerassimow 5. Klasse

14. Zwei Möglichkeiten sind: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$ und $3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 1 + 2 + 7 = 100$.

15. Wenn man die Gewichte addiert, die 3 Ferkel und 2 Lämmer bzw. 2 Ferkel und 3 Lämmer wiegen, dann erhalten wir das Gewicht von 5 Ferkeln und 5 Lämmern. Es ist gleich 45 kg. Damit wiegen 1 Ferkel und 1 Lamm 9 kg und 2 Ferkel und 2 Lämmer 18 kg. Vergleicht man dies mit dem ersten gegebenen Gewicht, so wiegt ein Ferkel 4 kg und daher ein Lamm 5 kg.

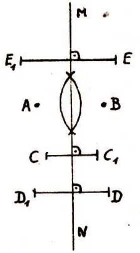
16. a) 748, b) 449

17. a) Nach den Teilbarkeitsregeln ist 7920 durch 3; 4 und 5 teilbar, d. h., 7920 ist durch $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ teilbar.
b) Es ist $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ und $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Folglich ist das kleinste gemeinsame Vielfache um $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$mal größer als der größte gemeinsame Teiler.

18. a) Zum Beispiel: Ein Kreis, zerlegt in Sektoren; ein Rechteck, zerlegt in kongruente Rechtecke; ein Winkel, eingeteilt in kongruente Winkel.

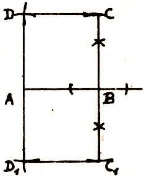
19. a) Das kongruente Dreieck läßt sich durch Parallelverschiebung aus dem gegebenen Dreieck konstruieren.
b) Das Rechteck, das zu einem gegebenen kongruent ist, läßt sich durch Parallelverschiebung konstruieren. Man darf bei der Konstruktion die Karos ausnutzen.

20. a) Für die Konstruktion der Symmetriegeraden der Punkte A und B nehmen wir einen Radius, der größer als die Hälfte von $\overline{AB}$ ist, in den Zirkel und zeichnen mit diesem Radius Kreise um A und B. Die Schnittpunkte liegen auf der Geraden MN. Für die Konstruktion der Punkte, die zu den gegebenen symmetrisch sind, fällen wir von den gegebenen Punkten auf MN das Lot, und auf der Verlängerung liegt dann im gleichen Abstand dieses Punktes von MN der gesuchte Punkt. (Bild 6)



(Bild 6)

b) Die Konstruktion zeigt das Bild 7.
Die Aufgabe hat 2 Lösungen.



(Bild 7)

21. Zum Anfang mögen x Eier im Korb gewesen sein. Dann ist $x - 0{,}5x = 0{,}5x$;
$0{,}5x - 0{,}5 \cdot 0{,}5x = 0{,}25x$;
$0{,}25x - 0{,}25 \cdot 0{,}5x = 0{,}125x$;
$0{,}125x - 0{,}5 \cdot 0{,}125x = 0{,}0625x = 10$;
also $x = 160$.

22. Der Fehler beträgt $(5 - 2) \cdot 100 + (8 - 3) \cdot 1000 + (2 - 9) \cdot 1 + (4 - 7) \cdot 10 = 5263$. Die erhaltene Summe ist also größer als die richtige Summe. Daher ist sie gleich $28\,975 - 5263 = 23\,712$.

23. Es ist $(2x - 5)(\frac{3}{2}x + 9)(0{,}3x - 12) = 0$ genau dann, wenn $2x - 5 = 0$ oder $\frac{3}{2}x + 9 = 0$ oder $0{,}3x - 12 = 0$ bzw. $x = 2{,}5$ oder $x = -6$ oder $x = 40$ ist.

24. Es ist

$$\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4} = \frac{3^9 \cdot 2^{10}}{2^8 \cdot 3^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 5^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^4} = 3 \cdot 2^2 - 5 - 2^2 = 3.$$

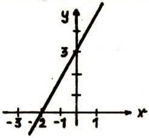
25. Da $f \cdot a = a$ ist, folgt $f = 1$. Da $b \leqq 9$ ist, ist a gleich 2 oder 3, da die 1 schon für f vergeben ist. Da $f = 1$ ist, ist $c \neq 1$, also $c > 1$. Andererseits ist $a > c$, und folglich gilt $a = 3$, $c = 2$. Dann ergibt sich $b = 9$, $e = 8$ und $d = 4$.

26. a) 16. Hinweis: Kürze zuerst jeden Bruch!
b) 1990. Hinweis: Beachte die Faktoren, deren Produkt 100 oder 10 ergibt!

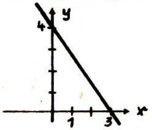
27. a) In der Familie gibt es zwei Brüder, zwei Schwestern, einen Vater und eine Mutter, also insgesamt 6 Personen.
b) VI + IV = X.

28. a) $x = 3$, $y = 2$. b) $x = 10$.

29. Die Graphen sind in den Bildern 8a und 8b dargestellt.



(Bild 8a)



(Bild 8b)

30. a) $81a^{20}x^{16} - 16b^8y^{20} = (9a^{10}x^8 - 4b^4y^{10})(9a^{10}x^8 + 4b^4y^{10})$
$= (3a^5x^4 - 2b^2y^5)(3a^5x^4 + 2b^2y^5)(9a^{10}x^8 + 4b^4y^{10})$
b) $(2a + 3b)^3 - 18ab(2a + 3b) = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

$- 36a^2b - 54ab^2 = 8a^3 + 27b^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

31. Man konstruiert, indem man die Symmetrie bzgl. beliebiger Achsen ausnutzt oder Parallelverschiebung durchführt oder bei beliebiger Lage der Figuren die Kongruenz der Strecken und die Kongruenzeigenschaft der Figur benutzt.

32. Der Definitionsbereich der Gleichung ist $x \neq 1$. Es ist

$\frac{11}{5(x-1)} + \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{7x+6}{5(x-1)^2} + \frac{5}{2(x-1)}$ genau dann, wenn

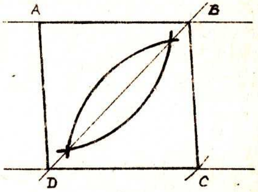
$22x - 22 + 10x + 30 = 14x + 12 + 25x - 25$; also $x = 3$ ist.

33. Es ist

$$(k^2 + 1) + \frac{1}{k^2 + 1} - 2 = \frac{(k^2 + 1)^2 + 1 - 2(k^2 + 1)}{k^2 + 1} = \frac{(k^2 + 1 - 1)^2}{k^2 + 1}$$

$$= \frac{k^4}{k^2 + 1} \geq 0.$$

34. Zeichne zwei parallele Geraden im Abstand 4 cm voneinander! (Bild 9) Auf einer dieser Geraden wählen wir einen beliebigen Punkt A. Um A schlagen wir mit einem Radius von 6 cm einen Kreisbogen, der die andere Gerade in C schneidet. Im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ errichten wir die Senkrechte, die die Geraden in B und D schneidet. ABCD ist der geforderte Rhombus.



(Bild 9)

35. Es ist $9999^{10} = (99 \cdot 101)^{10} = 99^{10} \cdot 101^{10} > 99^{10} \cdot 99^{10} = 99^{20}$, und daher ist 9999^{10} die größere Zahl.

36. Am Ende des Ergebnisses tritt die Ziffer 0 auf, also endet der erste Faktor auf 5 oder 0, da man bei Multiplikation mit 2 nur bei den Faktoren 0 oder 5 eine Null erhält. Aus der Ziffer 7 und der Multiplikation mit 2 erhalten wir, daß die erste Ziffer des ersten Faktors eine 3 ist. Aus dem zweiten Teilprodukt ergibt sich, daß die zweite Ziffer des zweiten Faktors gleich 1 ist. Daher ist der erste Faktor 385 und der zweite 412 oder der erste 380 und der zweite 412.

37. a) $\frac{4^6 9^5 + 6^9\cdot 120}{8^4 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12}3^{10} + 2^9 3^9 5\cdot 3\cdot 2^3}{2^{12}3^{12} - 2^{11}3^{11}} = \frac{2^{12}3^{10}(1 + 5)}{2^{11}3^{11}(2\cdot 3 - 1)}$

$= \frac{2\cdot 6}{3\cdot 5} = 0{,}8$

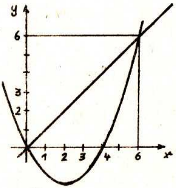
b) $\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} = \frac{(437 - 363)(437 + 363)}{(537 - 463)(537 + 463)} = \frac{74\cdot 800}{74\cdot 1000} = 0{,}8$

38. a) $\frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - a - 12} = \frac{(a - 2)(a - 4)}{(a + 3)(a - 4)} = \frac{a - 2}{a + 3}$

b) $\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{x^4 - (x + 1)^2}{(x^4 - 2x^2 + 1) - x^2} = \frac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2 - x^2}$

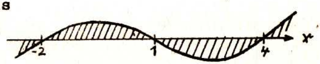
$= \frac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1 - x)(x^2 - 1 + x)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1}$

39. Zeichne die Graphen jeder der Gleichungen des Systems (Bild 10): $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $y = x$! Die Lösungen sind die Koordinaten der Punkte, in denen sich beide Graphen schneiden: (0;0), (6;6).



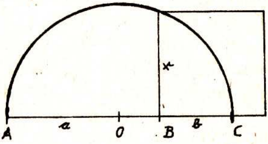
(Bild 10)

40. Zur Illustration stellen wir den linken Teil der Ungleichung als Funktion in dem interessierenden Intervall dar. (Bild 11) Hieraus erhält man das Ergebnis. Man kann die Ungleichung auch mit anderen Methoden lösen, indem man ein System von drei Ungleichungen betrachtet, wo genau ein Faktor positiv und zwei Faktoren negativ sind. Ergebnis: $x \in \{(-3;1) \cup (4;\infty)\}$.



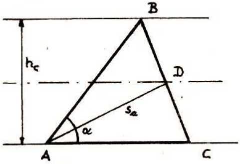
(Bild 11)

41. Die Konstruktion des Quadrates zeigt das Bild 12.

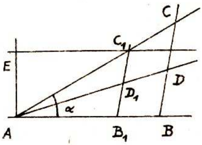


(Bild 12)

42. Wir zeichnen zwei Parallelen im Abstand h_c. In dem beliebig auf einer Parallelen festgelegten Punkt A tragen wir den Winkel α an. Der freie Schenkel schneidet die andere Parallele im Punkt B. Wir konstruieren die Symmetriegerade der beiden Parallelen. Um A schlagen wir mit dem Radius s_a einen Kreis, der diese Symmetriegerade in D schneidet. Die Gerade durch B und D schneidet die andere Gerade in C. Die Analysis zeigt, daß $s_a > \frac{1}{2} h_c$ gelten muß, damit ein Dreieck ABC existiert. (Bild 13)



(Bild 13)



(Bild 14)

43. Wir zeichnen den Winkel α. Auf einem Schenkel tragen wir eine beliebig gewählte Strecke $b_1 = \overline{AB_1}$ ab. Für die Höhe auf AB_1 gelte $\overline{AE} = \frac{2}{3} b_1 = h_1$. Durch den Punkt E zeichnen wir eine Gerade, die parallel zu AB_1 ist. Der freie Schenkel des Winkels wird von dieser Geraden im Punkt C_1 geschnitten. Das Dreieck AB_1C_1 ist ähnlich zu dem gesuchten Dreieck. Wir zeichnen seine Seitenhalbierende AD_1. Auf dieser tragen wir die Strecke $s_a = \overline{AD}$ ab. Durch D zeichnen wir eine Parallele zu B_1C_1, die die Schenkel des Winkels α in B und C schneidet. Das Dreieck ABC ist damit konstruiert. Die Aufgabe hat immer eine eindeutige Lösung. (Bild 14)

44. 11 088 Stück entsprechen 110 % Waren im Dezember, wenn im November 100 % Waren produziert wurden. Im November wurden damit 11 088 : 1,10 = 10 080 Stück produziert. Diese Stückzahl bedeutet 105 % im Vergleich mit dem Oktober. Also wurden im Oktober 10 080 : 1,05 = 9600 Stück produziert. Diese Stückzahl entspricht aber 120 % im Vergleich zum September. Folglich wurden im September 9600 : 1,20 = 8000 Stück hergestellt.

45. x = 30

46. 6 Pferde und 40 Kühe benötigen täglich 472 kg Heu. 12 Pferde und 37 Kühe benötigen täglich 514 kg Heu. Wir multiplizieren die erste Beziehung mit 2 und erhalten: 12 Pferde und 80 Kühe benötigen täglich 944 kg Heu. Da aber 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu benötigen, benötigen 43 Kühe am Tag 430 kg Heu, d. h., eine Kuh braucht täglich 10 kg Heu, und 40 Kühe brauchen 400 kg. Folglich benötigen 6 Pferde am Tag $472 - 400 = 72$ kg, also ein Pferd 12 kg. Vom 15. Oktober bis zum 25. März sind es 162 Tage. Damit benötigen 30 Pferde und 90 Kühe in dieser Zeit $(12 \cdot 30 + 10 \cdot 90)162 = 204\,120$ kg Heu.

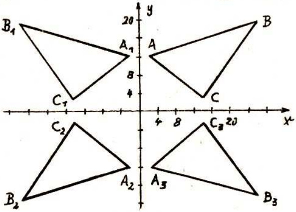
47. Die kleinere der Zahlen enthält alle Teiler, die der größte gemeinsame Teiler enthält und ferner den Teiler 5. Das bedeutet, daß sie ein Vielfaches von $8 \cdot 5 = 40$ ist, sagen wir $40k$ mit $k \in N$. Für die zweite Zahl bleiben dann noch die Faktoren $240 : (40k) = 6 : k$. Also ist sie gleich $(8 \cdot 6) : k = 48 : k$. Da $48 : k$ größer als $40k$ sein soll, ist $k = 1$. Die gesuchten Zahlen sind dann 40 und 48.

48. Die Summe der Früchte aus den übriggebliebenen Kisten muß durch 4 teilbar sein, d. h., es sind die Früchte der Kisten 2, 3, 4 und 5. In ihnen sind insgesamt $105 + 110 + 115 + 130 = 460$ Stück. Folglich sind $460 : 4 = 115$ Stück Zitronen und $460 - 115 = 345$ Stück Apfelsinen übriggeblieben.

49. Bei dem übriggebliebenen Stoff seien von jeder Farbe x Meter vorhanden. Es blieben die Hälfte des roten, $\frac{1}{3}$ des blauen und $\frac{1}{4}$ des schwarzen Stoffs übrig, d. h., $x : \frac{1}{2} = 2x$ roter Stoff, $x : \frac{1}{3} = 3x$ blauer und $x : \frac{1}{4} = 4x$ schwarzer. Damit waren insgesamt $2x + 3x + 4x = 675$ Meter Stoff gekauft worden. Folglich ist $x = 75$. Das heißt, es wurden $2 \cdot 75 = 150$ m roter, $3 \cdot 75 = 225$ m blauer und $4 \cdot 75 = 300$ m schwarzer Stoff gekauft.

50. -10

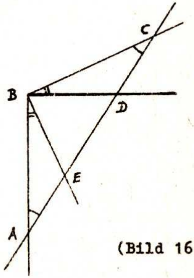
51. Zur Zeichnung siehe Bild 15. Die Seitenlängen sind $\overline{AB} = \sqrt{(26-2)^2 + (19-12)^2}$
$= 25$,



(Bild 15)

$\overline{AC} = \sqrt{(14-2)^2 + (3-12)^2} = 15$ und $\overline{BC} = \sqrt{(26-14)^2 + (3-19)^2} = 20.$

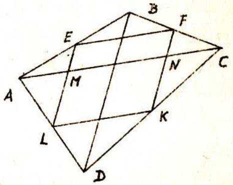
52. Es ist (Bild 16) $\overline{AB} = \overline{BC}$, also $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC$ und ferner $\sphericalangle ABE = 90^\circ - \sphericalangle EBD$, $\sphericalangle CBD = 90^\circ - \sphericalangle EBD$, also $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$. Damit gilt $\triangle ABE \cong \triangle BCD$.



(Bild 16)

53. Der Radfahrer fuhr mit einer Geschwindigkeit von $5 + 4 = 9$ km/h so lange, bis die beiden Freunde sich trafen. Beide legten in einer Stunde 9 km zurück, d. h., ihr gesamter Weg dauerte $36 : 9 = 4$h. In dieser Zeit fuhr der Radfahrer $9 \cdot 4 = 36$ km.

54. S bezeichne die Fläche. Dann ist $S(EBF) = \frac{1}{2}\overline{EF} \cdot h_1$, $S(EFNM) = \overline{EF} \cdot h_2$ und $h_1 = h_2$ (vgl.Bild 17). Folglich ist $S(EBF) = \frac{1}{2}S(EFNM)$. Da $S(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{EF} \cdot 2h_1 = 4S(BEF)$ ist, folgt $S(ABC) = 2S(EFNM)$. Analog ist $S(ADC) = 2S(MNKL)$. Addieren wir die letzten beiden Beziehungen, so erhalten wir $S(ABCD) = 2[S(EFNM) + S(MNKL)]$, $S(ABCD) = 2S(EFKL)$. Folglich ist $S(EFKL) = \frac{1}{2}S(ABCD)$.



(Bild 17).

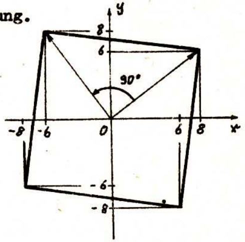
55. Für $x = -a$ hat die Gleichung keine Lösung. Wir multiplizieren die Gleichung mit $x + a$ und erhalten $a(x - a - 10) = 0$. Hieraus ergibt sich: Ist $a = 0$, so erfüllt jede beliebige reelle Zahl $x = 0$ die Gleichung. Ist $a \neq 0$ und $x \neq -a$, dann ist $x = 10 + a$ die einzige Lösung.

56. $$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}\right) = \frac{a^2 + 1}{a^2} - \frac{50a - 11 + 10a}{25a^2}$$

$$= \frac{25a^2 + 25 - 50a + 11 - 10a}{25a^2} = \frac{25a^2 + 36 - 60a}{25a^2} = \frac{(5a - 6)^2}{25a^2} \geq 0 ,$$

und daher gilt die behauptete Ungleichung.

57. Es ergibt sich ein Quadrat (s. Bild 18).



(Bild 18)

58. Der zweite oder dritte Fischer nimmt das Paket mit dem größten Gewicht. Der andere nimmt das Paket mit dem mittleren Gewicht von 1 kg 780 g, d. h., er hat nicht weniger als 1 kg 780 g erhalten. Der erste Fischer erhält das letzte Paket, von dem er sagte, daß sich 1 kg 780 g darin befinden.

59. Die Geschwindigkeit des Gegenzuges sei x km/h. Dann fährt er am Reisenden des ersten Zuges mit einer Geschwindigkeit von 60 + x km/h vorbei. Daher fährt er in $\frac{120}{1000(60 + x)}$ vorbei. Der Reisende sah ihn in 4 s, also gilt $\frac{120}{1000(60 + x)} = \frac{4}{3600}$ und damit x = 48 km/h nach Lösung der linearen Gleichung.

60. Es ist $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 3\cdot 2\cdot x^2 + 3\cdot 4x + 8 - x - 2$ $= (x + 2)^3 - (x + 2) = (x + 2)[(x + 2)^2 - 1)] = (x + 2)(x + 2 + 1)$ $\cdot(x + 2 - 1) = (x + 2)(x + 3)(x + 1)$.

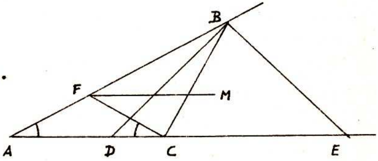
61. Wir trennen aus dem Ausdruck $43x + 75y$ eine maximal mögliche Anzahl der Summanden $3x + 7y$ ab. Es ist

$$\begin{aligned}43x + 75y &= 10(3x + 7y) + 13x + 5y\\ &= 10(3x + 7y) + 13x + 5y - 19(x + y) + 19(x + y)\\ &= 10(3x + 7y) - 6x - 14y + 19(x + y)\\ &= 10(3x + 7y) - 2(3x + 7y) + 19(x + y)\\ &= 8(3x + 7y) + 19(x + y).\end{aligned}$$

Jeder der Summanden ist durch 19 teilbar, und damit ist auch die Summe $43x + 75y$ durch 19 teilbar.

Wir geben noch einen anderen Lösungsweg an (der Übersetzer). Wir versuchen, beide Ausdrücke durcheinander zu teilen, und erhalten $43x + 75y = 10(3x + 7y) + 13x + 5y$. Gelingt es uns zu zeigen, daß $13x + 5y$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch $43x + 75y$ durch 19 teilbar, da es jeder Term der Gleichung ist. Wenn $13x + 5y$ durch 19 teilbar wäre, dann wäre es auch

$13x + 5y + (3x + 7y) = 16x + 12y$ und dann auch
$16x + 12y + (3x + 7y) = 19x + 19y$. Tatsächlich ist aber diese letzte Zahl durch 19 teilbar, also ist es auch $16x + 12y$, $13x + 5y$ und damit $43x + 75y$.

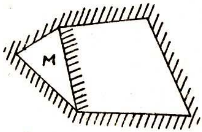


(Bild 19)

62. Wir zeichnen den Punkt F auf AB so, daß $\sphericalangle FCA = \sphericalangle FAC$ ist (s.Bild 19). Dann ist $\sphericalangle FCB = 90^\circ$ (und $FM \parallel AE$). Hieraus ergibt sich
$2 \cdot \sphericalangle BAC + 2 \cdot \sphericalangle DBC = 90^\circ$,
also $\sphericalangle BAC + \sphericalangle DBC = 45^\circ$,
$\sphericalangle DBC = 45^\circ - \sphericalangle BAC$,
$\sphericalangle ACB = 90^\circ + \sphericalangle BAC$. Daher ist
$\sphericalangle BDC = 180^\circ - (\sphericalangle ACB + \sphericalangle DBC) = 180^\circ - (90^\circ + \sphericalangle BAC + 45^\circ - \sphericalangle BAC)$
$= 45^\circ$. Da $\sphericalangle DBE = 90^\circ$ ist, folgt $\sphericalangle BED = 45^\circ$, d. h., Dreieck DBE ist gleichschenklig, also ist $\overline{BD} = \overline{BE}$.

63. Das erste Teilprodukt endet auf die Ziffer 8, das zweite auf 5. Dies ist nur möglich, wenn die letzte Ziffer des ersten Faktors auf 1 endet und der zweite Faktor auf 58 endet. Da das zweite Teilprodukt dreistellig ist, beginnt der erste Faktor mit einer 1. Im ersten Teilprodukt muß man bei Multiplikation des ersten Faktors mit 8 am Anfang eine 10 erhalten. Dies ist nur möglich, wenn die zweite Ziffer des ersten Faktors 3 ist. Das dritte Teilprodukt ist größer als das erste, d. h., die erste Ziffer des zweiten Faktors ist größer als die letzte Ziffer des zweiten Faktors. Folglich ist sie gleich 9. Damit lautet der erste Faktor 131 und der zweite 958.

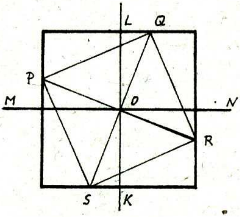
64. Wenn die Anzahl der Diagonalen Null ist, dann ist das Ausgangsvieleck (das aus Diagonalen besteht) von außen gefärbt. Betrachten wir die erste Diagonale (Bild 20) und färben sie auf einer ihrer Seiten. Es ist klar, daß eines von den zwei erhaltenen Vielecken (M) von außen gefärbt ist. Wenn wir die zweite Dia-



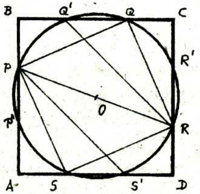
(Bild 20)

gonale betrachten, dann schneidet sie entweder das Vieleck M nicht, oder sie zerlegt es in zwei Vielecke, von denen eines von außen gefärbt ist. Bei jeder weiteren Hinzunahme einer neuen Diagonalen erhalten wir, daß das von außen gefärbte Vieleck entweder in zwei Vielecke zerfällt, von denen eines von außen gefärbt ist, oder daß die Diagonale es nicht schneidet, aber dann ist es bereits von außen gefärbt. So verfahren wir der Reihe nach mit allen Diagonalen. Zum Schluß bleibt mindestens ein von außen gefärbtes Vieleck übrig.

65. Zuerst zeigen wir, daß der Diagonalenschnittpunkt O des Rechtecks PQRS (Bild 21) mit dem Zentrum des Quadrates zusammenfällt. Es ist $\overline{QO} = \overline{OS}$. Daher liegt O auf der Mittellinie MN des Quadrates. Analog liegt O auf KL. Also liegt O im Schnittpunkt von KL und MN, d. h. im Zentrum des Quadrates. Wir vermerken, daß $\overline{PO} = \overline{QO} = \overline{RO} = \overline{SO}$ ist. Wir betrachten den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\overline{PO}$. Dieser Kreis schneidet das Quadrat in 8 Punkten (je zwei auf jeder Seite): P', P, Q', Q, R', R, S', S (Bild 22). Beim Verbinden dieser Punkte erhält man die Rechtecke PQ'RS' und PQRS. Es ist klar, daß das Viereck PQ'RS' die Eigenschaft besitzt, daß seine Seiten parallel zu den Diagonalen des Quadrates ABCD sind und das Viereck PQRS ein Quadrat ist.



(Bild 21)

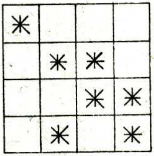


(Bild 22)

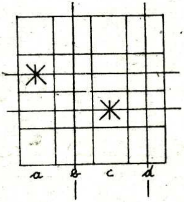
Analog kann man die Vierecke P'Q'R'S' und P'QR'S betrachten.

66. Unter den ersten 20 Zahlen befinden sich zwei, die auf Null enden. Unter diesen beiden Zahlen gibt es eine, die vor der Null keine Neun hat. Diese Zahl sei N, und n sei ihre Quersumme. Dann haben die Zahlen N, N + 1, ..., N + 9, N + 19 die Quersummen n, n + 1, ..., n + 9, n + 10. Dies sind aber 11 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Daher ist eine von ihnen durch 11 teilbar.

67. Wenn man die 7 Sternchen so anordnet, wie im Bild 23 gezeigt, können wir nicht zwei Zeilen und Spalten so streichen, daß kein Sternchen übrigbleibt. Wenn es sich um 6 oder weniger Sternchen handelt, kann man immer wie folgt verfahren:
Wir bezeichnen mit a, b, c, d die Anzahl der Sternchen in der ersten, zweiten, dritten, vierten Spalte. Dann sind zwei dieser Zahlen, sagen wir a und c, nicht größer als 1, da $a + b + c + d \leq 6$ ist, d. h., in zwei Spalten steht nicht mehr als ein Sternchen. Wir streichen die beiden anderen Spalten und die beiden Zeilen, die die beiden restlichen Sternchen (oder weniger) enthalten (Bild 24).



(Bild 23)



(Bild 24)