Hanschild

Junge Mathematiker

Mathematischer Lesebogen, herausgegeben von Johannes Lehmann i.A. des Bezirkskabinetts für außerunterrichtliche Tätigkeit

Rat des Bezirkes Leipzig Heft 78

LOS CONCURSOS DE MATEMATICA

DR. LUIS J. DAVIDSON / FELIX RECIO

Aufgaben (und Lösungen) aus kubanischen Mathematikolympiaden

Leipzig, am 7. Oktober 1986

Liebe Freunde der Mathematik!

Mit unserem 78. Lesebogen Junger Mathematiker überreichen wir eine Dokumentation von kubanischen Olympiadeaufgaben. Seit über zwei Jahrzehnten bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen den Organisatoren der kubanischen Olympiadebewegung und der Schülerzeitschrift "alpha". Das vorliegende Heft ist ein Beispiel für einen steten engen Erfahrungsaustausch.
Wir danken Dr. H. Huß für die Übersetzung und Bearbeitung ausgewählter Aufgaben und Prof. Dr. K. Rosenbaum (PH Erfurt) für die umsichtige Unterstützung, zu Ehren der XXVIII. IMO in Havanna diesen Lesebogen für Junge Mathematiker herauszugeben.

Nachfolgende Olympiade-Aufgaben (und Lösungen) wurden aus dem auf dem Titelblatt dargestellten Buch entnommen.

Mit der kontinuierlichen Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden, den Höhepunkten der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik, leisten wir einen wertvollen Beitrag zur Erfüllung des Mathematikbeschlusses.

Wir wünschen Freude und Erfolg bei der Arbeit mit den mathematischen Problemen dieses Arbeitsheftes.

J. Lehmann

OStR J. Lehmann, V.L.d.V.

Chefredakteur der mathematischen
Schülerzeitschrift "alpha"

Aufgaben aus kubanischen Mathematikolympiaden

CONCURSO NACIONAL DE MATEMATICA

Nach dem Sieg der kubanischen Revolution im Jahre 1959 nahm auch die Mathematik in diesem Land einen deutlichen Aufschwung. Ein Ausdruck dafür sind die seit dem Schuljahr 1962/63 zunächst für die Klassen 10 bis 12 und seit 1970 auch für die unteren Klassen durchgeführten Mathematikolympiaden. Nachdem 1971 der erste nationale Schülerwettbewerb stattgefunden hatte, nahm in diesem Jahr auch erstmals eine kubanische Mannschaft an der IMO teil. Ständig zunehmende Breitenarbeit führte bald zu einem deutlichen Leistungsanstieg im nationalen und internationalen Maßstab. So wurde die Mathematikolympiadebewegung in Kuba zu einem Vorbild in ganz Lateinamerika.

Im Dezember 1985 fand in Bogota, der Hauptstadt Kolumbiens, die erste ibero-amerikanische Mathematikolympiade statt, an der neun lateinamerikanische Länder und Spanien teilnahmen. Hierbei belegte Kuba hinter Spanien den zweiten Platz.

Das Jahr 1987 wird für die kubanische Olympiadebewegung einen besonderen Höhepunkt bringen:

Im Juli 1987 findet die XXVIII. Internationale Mathematikolympiade in Havanna, der Hauptstadt Kubas, statt. Damit werden die langjährigen Bemühungen und Erfolge des revolutionären Kuba auf mathematischem Gebiet, die untrennbar mit dem Namen des Initiators Dr. Luis J. Davidson verbunden sind, gewürdigt. Wiederholt haben Spezialisten aus der DDR ihre kubanischen Freunde bei der Entwicklung der Mathematik unterstützt und auch in der Olympiadebewegung Junger Mathematiker mitgewirkt. Es ist für mich eine Ehre und angenehme Pflicht, bei der Vorbereitung kubanischer Schüler auf die Mathematikolympiaden seit 1984 mithelfen zu können.

Dr. Helmut Huß

Aufgaben

1. Man füge am Ende der Zahl 523 drei einstellige Zahlen so an, daß die erhaltene sechsstellige Zahl durch 7, 8 und 9 teilbar ist.

2. Es ist zu zeigen, daß es unter 5 natürlichen Zahlen (nicht notwendig verschieden) immer möglich ist, 3 Zahlen zu finden, deren Summe durch 3 teilbar ist.

3. Wir betrachten die Zahlen 49, 4489, 444889, 44448889, usw. Es ist zu zeigen, daß alle diese Zahlen perfekte Quadrate sind, indem man zeigt, daß wenn 2n die Anzahl der Ziffern ist, dann ist die Quadratwurzel gleich

$$\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}.$$

4. Zu bestimmen sind 3 Zahlen einer geometrischen Reihe, wenn man weiß, daß die Summe dieser drei Zahlen 35 und die Summe ihrer Quadrate 525 ist.
(Hinweis: Man beachte, daß das Polynom $a^4 + a^2 + 1$ ein Vielfaches von $a^2 + a + 1$ ist.)

5. Es ist zu zeigen: Wenn a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sind, dann gilt

i) $\sqrt{abcd} = \frac{bc + ad}{2}$ und

ii) $\sqrt{(a + c)(b + d)} = \sqrt{ab} + \sqrt{dc}$.

6. Zeigen Sie: Wenn für die reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt $-1 \leqq a_2 \leqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dann ist für alle natürlichen Zahlen n

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

7. Es sei $n > 4$ eine gerade Zahl. P sei ein konvexes Polygon mit n Seiten.

a) Man ermittle die Anzahl der Vierecke, in der man P zerlegen kann, wenn man Diagonalen durch einen festen Eckpunkt von P einzeichnet.

b) Ausgehend von dem Ergebnis von a) gebe man eine Formel für die Summe der Innenwinkel des Polygons P an.

8. Es ist zu zeigen: Wenn $a = 1$, dann existieren $x \in \mathbb{R}$, so daß

$$0 < |x| \leqq |a| \quad \text{und } x + \frac{1}{x} = 2a.$$

9. Es seien k, m, n natürliche Zahlen mit $k \leqq m < n$.

a) Es ist zu zeigen, daß gilt

$$\frac{m!}{(m-k)!m^k} = (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \dots (1 - \frac{k-1}{m}).$$

b) Es ist für alle $x \in \mathbb{R}_+$ zu zeigen, daß der Term, der x^k in der Entwicklung von $(1 + \frac{x}{m})^m$ enthält, kleiner ist als der Term, der x^k in der Entwicklung von $(1 + \frac{x}{n})^n$ enthält.

10. Gesucht ist der Koeffizient von x^8 in der Entwicklung von

$$(1 + x^2 - x^3)^9.$$

11. Bestimmen Sie den Rest, der bei Division des Polynoms

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$$

durch $x^2 - 1$ bleibt!

12. a) Es ist zu zeigen, daß für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ $n^5 - n$ durch 10 teilbar ist.

b) Wenn a, b, c natürliche Zahlen sind, so daß $a + b + c$ durch 10 teilbar ist, dann ist auch $a^5 + b^5 + c^5$ durch 10 teilbar.

13. Es sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Es ist die Zahl der Permutationen der Menge A zu finden, in welchen a_1 und a_2 nicht benachbart sind.

14. Sei P(x) ein Polynom vom Grad n. Es seien $a_1, a_2, \dots, a_m$, m verschiedene reelle Zahlen ($m \leqq n$), so daß

$$P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = a.$$

a) Man zeige, daß P(x) bei Division durch das Produkt

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$$

den Rest a läßt.

b) Man zeige, daß das Polynom $(P(x))^k$ bei Division durch $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$ den Rest a^k läßt, wo k eine beliebige natürliche Zahl ist.

15. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu zeigen, daß

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1 \text{ mit } a \neq 1,\ b \neq 1.$$

b) Es ist zu zeigen, daß für $c \neq 1$ gilt

$$\frac{1}{\log_2 c} + \frac{1}{\log_3 c} + \dots + \frac{1}{\log_n c} = \frac{1}{\log_{n!} c}$$

c) Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} \pi} + \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} \pi} > 1.$$

16. a) Es ist zu zeigen: Wenn die Zahl $\frac{1}{a}$ das arithmetische Mittel von $\frac{2}{a-b}$ und $\frac{2}{a-c}$ ist, dann ist a das geometrische Mittel von b und c.

b) Man benutze das Ergebnis von a), um die reellen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 6} + \frac{1}{x^2 + 5x + 9} = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$$

zu berechnen.

17. a) Es sind die reellen Werte von x zu finden, die der Gleichung

$$\sqrt{3} - x = \sqrt[4]{49 - 4\sqrt{3}\,x^3 - 12\sqrt{3}\,x}$$

genügen.

b) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}}}{2} = \sqrt{3}.$$

18. Es seien a, b $\in \mathbb{R}^*$, a $\neq$ b beides Wurzeln der Gleichung

$$x^{10} + p^5x^5 + q^5 = 0.$$

a) Es ist zu zeigen, daß

$$a^5 + b^5 + p^5 = 0.$$

b) Wenn a und b auch Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

sind, dann sind die Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ Wurzeln der Gleichung

$$(x^5 + 1) - (x + 1)^5 = 0.$$

19. a) Wenn die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine geometrische Folge ist, dann auch die Folge $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$.

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} = \frac{1}{3}(x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{99}).$$

20. a) Wenn A + B = C, dann ist

$$3ABC = C^3 - A^3 - B^3.$$

b) Es ist die Gleichung

$$\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{3x - 5} = \sqrt[3]{4x}$$

zu lösen.

21. Gegeben ist die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$.

a) Es ist zu zeigen, daß, wenn a, b, c ihre Wurzeln sind, dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} a + b + c &= -m \\ ab + ac + bc &= n \\ abc &= -p \end{aligned}$$

erfüllt sind.

b) Konstruieren Sie die Gleichung, die als Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung hat!

22. Man löse das System

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{x(z + y)}{5} = \dfrac{y(z + x)}{8} = \dfrac{z(x + y)}{9} \\ yz + zx + xy = \dfrac{11}{6}\, xyz \end{array} \right|$$

23. Man löse das folgende System für $a \neq -2$ und $a \neq 1$.

$$\left|\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array}\right|$$

24. Lösen Sie das folgende System

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 2 \\ 4x + 3y = xy \end{array}\right|$$

25. Man löse die Gleichungen

a) $(\log_x 2) \cdot (\log_{\frac{x}{16}} 2) = \log_{\frac{x}{64}} 2$;

b) $4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1}$.

26. Die Eigenschaft

$$\left[0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 < \sin x < x \\ 0 < x < \tan x \end{Bmatrix}\right]$$

sei vorausgesetzt.

Es ist zu zeigen:

Wenn $0 \leqq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, dann gilt

a) $\alpha + \sin \beta < \beta + \sin \alpha$,

b) $\beta + \tan \alpha < \alpha + \tan \beta$.

27. a) Zeigen Sie!

$\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta$.

b) Lösen Sie die folgende Gleichung!

$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}$.

28. Es ist zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} n \pi - \alpha) \cos(\frac{1}{2} n \pi - \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = (-1)^{n+1}$$

mit $\cos \alpha \neq 0$, $\sin \alpha \neq 0$.

29. Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

a) Welche Werte müssen p und q haben, wenn die Wurzeln der Gleichung (1) gerade p und q sein sollen?

b) Stellen Sie die quadratische Gleischung auf, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung (1) sind!

c) Welche Relation muß zwischen p und q bestehen, damit eine der Wurzeln der Gleichung (1) das Doppelte der anderen ist?

d) Sei $p = -2$. Welchen Wert muß q annehmen, damit eine der Wurzeln von (1) das Quadrat der anderen ist?

30. Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 - 3bx + 4b = 2.$$

Es ist zu zeigen, daß

a) für alle $b \in \mathbb{R}$ diese Gleichung zwei verschiedene reelle Wurzeln hat,

b) wenn beide Wurzeln der Gleichung gleiches Vorzeichen haben, dann sind beide positiv und außerdem ist ihre Summe größer als $\frac{3}{2}$.

31. Zeigen Sie, daß für beliebige reelle Zahlen $x \neq 0$, $y \neq 0$ stets die Ungleichung

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$$

gilt!

32. Es sei $a \in \mathbb{R}^*$ eine gegebene Zahl.
Bestimmen Sie alle die Werte $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung

$$\frac{|x|}{2a} - \frac{2a}{|x|} < \frac{3}{2}$$

genügen!

33. Man bestimme die lineare Funktion f, wenn bekannt ist, daß

$$f(0) = \sqrt{2} \text{ und } \frac{f(2) - f(5)}{f(-3)} = 6 \quad \text{ist.}$$

34. Es seien $a > 0$, $b > 0$.
Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{ax^2 + b}.$$

Bestimmen Sie den Wert von x, für den die Funktion das Maximum erreicht!

35. Sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so beschaffen, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Zeigen Sie, daß:

a) Wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(a) \neq 0$, so ist $f(0) = 1$.

b) Wenn $f(b) \neq 0$, dann ist $f(-b) = \frac{1}{f(b)}$.

c) Wenn $f(c) \neq 0$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(nc) = [f(c)]^n.$$

36. Es sei $k \in \mathbb{R}^*$. Die Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$f(x + k) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}.$$

Außerdem nehme f weder den Wert 0 noch den Wert 1 an.

a) Zeigen Sie, daß

$$f(x + 2k) = -\frac{1}{f(x)}$$

gilt!

b) Zeigen Sie, daß f periodisch ist!

37. Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{1}{\log_{17} 34 - \log_{34} 68} > 20$$

ist.

38. Man zeige, daß für alle reellen x gilt:

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \cdot \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(x - \tfrac{\pi}{2})\cos(x - \tfrac{\pi}{2}).$$

39. Man löse das folgende System!

$$\left|\begin{array}{r} 2x - 4y = \pi \\ \frac{1}{\cos(3x - 4y)} - 2\sin(2x - 6y) = 1 \end{array}\right|$$

Betrachten Sie nur die Lösungen $0 \leq x < \pi$, $0 \leq y < \pi$!

40. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \sin x + \cos x \text{ und } g(x) = \sin x \cos x.$$

a) Es ist die Gleichheit

$$f(\tfrac{\pi}{4} - \alpha) = \sqrt{2} \cos \alpha$$

nachzuweisen.

b) Es ist die Gleichung

$$f(x) + 2\sqrt{2}\, g(x) = 0$$

zu lösen.

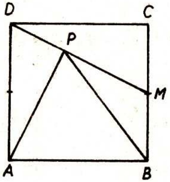
41. In der Figur ist ABCD ein Quadrat, M der Mittelpunkt von BC, $AP \perp DM$.

Es ist zu zeigen, daß

a) $\frac{DP}{AP} = \frac{1}{2}$,

b) $\frac{DP}{PM} = \frac{2}{3}$,

c) $AB = BP$.



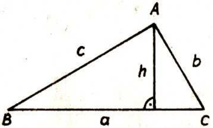
42. In dem Dreieck ABC, das bei A einen rechten Winkel hat, sei h die Höhe auf der Hypotenuse.

a) Man zeige, daß

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \text{ gilt.}$$

b) Man zeige, daß gilt

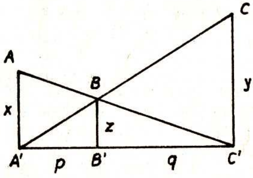
$$a + h \geq b + c.$$



43. In der Figur seien AA', BB' und CC' Senkrechte zu A'C', und der Schnittpunkt von AC' und A'C sei B.

a) Man zeige, daß $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ ist.

b) Man zeige, daß $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ gilt.



44. A und B seien Punkte mit den Koordinaten $(0, \sqrt{3})$, $(1, 0)$. k sei der Kreis, der durch die Gleichung

$$(x - 5)^2 + y^2 = 3$$

definiert ist.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P von k, dessen Abstand von der Geraden AB minimal ist!

b) Bestimmen Sie den minimalen Flächeninhalt, der von einem Dreieck ABQ eingenommen werden kann, wenn Q ein Punkt auf dem Kreis k ist.

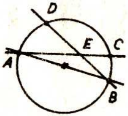
45. In einem regulären Sechseck der Seitenlänge 2 sind n gleiche Kreise einbeschrieben, so daß jeder dieser Kreise zwei benachbarte Seiten des Polygons und 2 andere Kreise berührt.

Gesucht ist der Flächeninhalt des Sterns, der im Zentrum des Polygons gebildet wird.

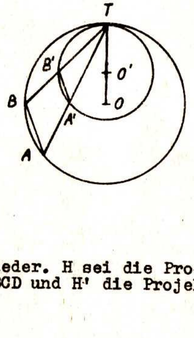
46. In der Figur ist AB Durchmesser des Kreises k, der Schnittpunkt von AD und BC sei E.

Zeigen Sie, daß

$AE \cdot AD + BE \cdot BC = (AB)^2$ gilt!



47. In der nebenstehenden Figur seien die Punkte O, O' und T bzw. A, A' und T bzw. B. B' und T jeweils kollinear'.
Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis um O mit dem Radius OT und die Punkte A' und B' liegen auf dem Kreis um O' und dem Radius O'T.



a) Es ist zu zeigen, daß

$$\frac{AT}{A'T} = \frac{OT}{O'T} \text{ ist.}$$

b) Es ist zu zeigen, daß $AB \parallel A'B'$ ist.

48. Es sei ABCD ein regelmäßiges Tetraeder. H sei die Projektion des Punktes A auf die Fläche BCD und H' die Projektion von H auf die Fläche ACD.

Es ist zu zeigen, daß $HH' = \frac{AH}{3}$ ist.

49. Es sei ABCD ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke MN, wenn M und N die Mittelpunkte der Kanten BC bzw. AD sind!

b) Durch einen Punkt P der Strecke MN ($P \neq M$, $P \neq N$) sei eine Ebene senkrecht zu MN gelegt.
Man zeige, daß die Schnittfläche von α mit dem Tetraeder ABCD ein Rechteck ist.

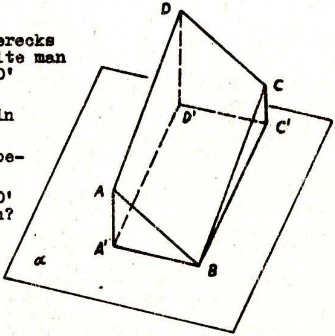
c) Es ist zu zeigen, daß der Umfang dieses Rechtecks unabhängig von der Lage von P ist.

50. Als Projektion des Vierecks ABCD auf die Ebene α erhalte man das Parallelogramm A'B'C'D' (siehe Figur).

a) Zeigen Sie, daß ABCD ein Parallelogramm ist!

b) Berechnen Sie DD' für bekannte AA' und CC'!

c) Können ABCD und A'B'C'D' beide rechtwinklig sein? Warum?



Lösungen

1. Wenn 523abc durch 7, 8 und 9 teilbar ist, so gilt

$$523abc = 504 \cdot q, \qquad q \in N \quad .$$

Außerdem ist $523abc = 523000 + \overline{abc}$, aber

$$523000 = 504 \cdot 1037 + 352.$$

Schließlich gilt

$$\overline{523abc} = 504 \cdot 1037 + 352 + \overline{abc}.$$

Jetzt sieht man, daß

$$352 + \overline{abc} = 504p, \qquad p \in N$$

sein muß, also

$$\overline{abc} = 504p - 352.$$

Für $p = 1$ erhält man $\overline{abc} = 152$, für $p = 2$ erhält man $\overline{abc} = 656$. Für $p \geqq 3$ erhält man keine weiteren Lösungen, da $504p - 352$ mehr als 3 Ziffern hat.
Die Zahlen sind also <u>523152</u> und <u>523656</u>.

2. Wir nehmen an, daß es unter den 5 gegebenen Zahlen wenigstens eine Zahl von jedem Typ gibt. Seien dies z. B.

$$n_1 = 3k_1 \ , \ n_2 = 3k_2 + 1 \ , \ n_3 = 3k_3 + 2.$$

Jetzt sieht man, daß n_1, n_2, n_3 die Bedingung des Problems erfüllen, da

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1) = 3k' \text{ ist.}$$

Nehmen wir nun an, daß es unter den 5 gegebenen Zahlen nicht wenigstens eine von jedem Typ gibt. Dann gibt es aber wenigstens 3 Zahlen vom gleichen Resttyp. Seien dies

$$n_1 = 3k_1 + \quad ,$$

$$n_2 = 3k_2 + \quad , \qquad \text{mit} \quad = 0, \quad = 1 \text{ oder } \quad = 2.$$

$$n_3 = 3k_3 + \alpha \,\} \quad \textit{mit } \alpha = 0 \ , \ \alpha = 1 \ \textit{ oder } \alpha = 2$$

Auch hier sind n_1, n_2, n_3 die gesuchten Zahlen, da

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + \quad) = 3k' \quad \text{ist.}$$

3. Die Zahl mit 2n Ziffern sei

$$A = \underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots8}_{n-1}9$$

Andererseits ist

$$\left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9}$$

$$= \frac{4\overbrace{000\ldots0}^{n-1}4\overbrace{000\ldots0}^{n-1}1}{9}$$

und wenn man die Division durch 9 ausführt, erhält man die Zahl A.

4. Es seien c, xr, xr^2 die gesuchten Zahlen, dann gilt

$$x + xr + xr^2 = 35$$
$$x^2 + x^2r^2 + x^2r^4 = 525$$

Hieraus ergibt sich

$$x(r^2 + r + 1) = 35 \qquad (1)$$
$$x^2(r^4 + r^2 + 1) = 525 \qquad (2)$$

Nach Division von (2) durch (1) erhält man die Gleichung

$$x(r^2 - r + 1) = 15 \qquad (3)$$

Division von (3) durch (1) liefert

$$\frac{r^2 - r + 1}{r^2 + r + 1} = \frac{15}{35}$$

mit $r = 2$ oder $r = \frac{1}{2}$. Setzt man diese Werte in (3) ein, so bekommt man

$$x = 5 \text{ und } x = 20.$$

In beiden Fällen heißen die gesuchten Zahlen 5, 10 und 20.

5. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $ad = bc$ und daraus

$$abcd = b^2c^2 = a^2d^2.$$

Also ist $\sqrt{abcd} = bc = ad$, und daher gilt

$$(i) \quad \sqrt{abcd} = \frac{bc + ad}{2}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} = \sqrt{ab + ad + bc + cd} =$$
$$= \sqrt{ab + 2\sqrt{abcd} + cd}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2}$$
$$= \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

6. Vollständige Induktion: Für $n = 1$ trivial.
Außerdem folgt aus

$$(1 + a_1)\ldots(1 + a_n) \geqq 1 + a_1 + \ldots + a_n$$

sofort

$$(1 + a_1)\ldots(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) = (1 + a_1 + \ldots + a_n)(1 + a_{n+1})$$

$$= 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + (a_1a_{n+1} + \ldots + a_na_{n+1}).$$

Weil $a_i \cdot a_{n+1} \geqq 0$ für $1 \leqq i \leqq n$, ist

$$1 + a_1 + \ldots + a_{n+1} + (a_1a_{n+1} + \ldots + a_na_{n+1}) \geqq 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} ,$$

und man hat die Eigenschaft für $n + 1$.

7. a) Man sieht sehr leicht, daß es für $n = 6$ zwei Vierecke, für $n = 8$ drei Vierecke, für $n = 10$ vier Vierecke gibt.
Dies führt zu der Behauptung, daß es allgemein $\frac{n}{2} - 1$ solcher Vierecke gibt.
Wir zeigen dies durch vollständige Induktion.
Sei die Eigenschaft für n erfüllt, d. h. die Zahl der gebildeten Vierecke ist $\frac{1}{2} n - 1$. Hat das Polynom nun $n + 2$ Eckpunkte, so kann man offenbar ein Viereck mehr bilden, also insgesamt

$$(\tfrac{1}{2} n - 1) + 1 = \tfrac{1}{2}(n + 2) - 1.$$

b) Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks ist 2π. Wegen a) ergibt sich für die Summe der Innenwinkel von P nun

$$2\pi(\tfrac{1}{2} n - 1) = \pi(n - 2).$$

8. Multipliziert man die Gleichung mit x, so ergibt sich

$$x^2 - 2ax + 1 = 0 \text{ mit } x_1 = a + \sqrt{a^2 - 1},$$
$$x_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Wir bemerken, daß $\sqrt{a^2 - 1} \in R$, da $a^2 \geqq 1$.
Andererseits ist $\sqrt{a^2 - 1} < \sqrt{a^2} = |a|$.
Danach nehmen wir $x = x_2$, wenn a positiv und wir haben

$$0 < x \leqq a \Rightarrow 0 < |x| \leqq |a|.$$

Wenn a negativ ist, nehmen wir $x = x_1$;

$$a \leqq x < 0 \Rightarrow 0 < |x| \leqq |a|.$$

9. a) Vereinfacht man den Bruch, so erhält man

$$\frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{m^k},$$

dessen Zähler ein Produkt von k Faktoren ist. Danach kann man schreiben

$$\left(\frac{m}{m}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)\dots\left(\frac{m-(k-1)}{m}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right).$$

b) Die bewährten Terme sind

$$\binom{m}{k}\left(\frac{x}{m}\right)^k \text{ bzw. } \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k.$$

Diese kann man in der Form

$$\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{m!}{(m-k)!\,m^k} \text{ bzw. } \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}$$

schreiben.
Wendet man das Ergebnis von a) an, so erhält man

$$\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

und weil $m < n$, ergibt sich

$$\left(1-\frac{1}{m}\right) < \left(1-\frac{1}{n}\right),\ \left(1-\frac{2}{m}\right) < \left(1-\frac{2}{n}\right),\ \dots,$$

$$\left(1-\frac{k-1}{m}\right) < \left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

10. $$\left[1+(x^2-x^3)\right]^9 = 1+\binom{9}{1}(x^2-x^3)+\binom{9}{2}(x^2-x^3)^2 + $$

$$+\binom{9}{3}(x^2-x^3)^3+\dots+(x^2-x^3)^9.$$

Man sieht jetzt, daß x^8 nur in der Entwicklung des 4. und 5. Terms erscheinen kann. Daraus ergibt sich leicht, daß der Koeffizient von x^8 ist

$$3\binom{9}{3}+\binom{9}{4}.$$

11. Es ist

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100}) = q(x) \cdot (x^2 - 1) + (r_1x + r_2).$$

Für $x = 1$ erhält man $101 = r_1 + r_2$ (1),
für $x = -1$ ergibt sich $1 = r_1 + r_2$ (2).
Aus (1) und (2) folgt $r_1 = 50$, $r_2 = 51$, also ist der Rest gleich $50x + 51$.

12. a) Wir zeigen die Eigenschaft durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist sie trivialerweise erfüllt.
Außerdem ist

$$\begin{aligned}(n + 1)^5 - (n + 1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n \\ &= (n^5 - n) + (5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n).\end{aligned}$$

Daraus ist zu ersehen, daß wenn die Eigenschaft für die natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für $n + 1$, weil

$$\begin{aligned}5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n &= 10(n^3 + n^2) + 5n(n^3 + 1) \\ &= 10(n^3 + n^2) + 5n(n + 1)(n^2 - n + 1)\end{aligned}$$

ebenfalls durch 10 teilbar ist.

b) Es ist

$$\begin{aligned}a^5 + b^5 + c^5 &= \left[(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c)\right] + (a + b + c) \\ &= \left[(a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)\right] + (a+b+c).\end{aligned}$$

Aus Punkt a) ergibt sich sofort die Behauptung.

13. Von der Zahl $n!$ aller Permutationen müssen wir jene subtrahieren, in denen a_1 und a_2 benachbart sind.
Es ist leicht zu sehen, daß es $(n - 2)!$ verschiedene Permutationen gibt für jede benachbarte Position von a_1 und a_2.
Außerdem gibt es genau $2(n - 1)$ verschiedene Positionen für dieses Paar.
Deswegen ist es notwendig $2(n - 1)\left[(n - 2)!\right]$ zu subtrahieren.
Das Resultat ist also

$$n! - 2(n - 1)\left[(n - 2)!\right] = (n - 1)!(n - 2)$$

14. a) Wir betrachten das Polynom $P'(x) = P(x) - a$.
Natürlich ist

$$P'(a_1) = \dots = P'(a_m) = 0,$$

demnach können wir setzen

$$P'(x) = (x - a_1)\dots(x - a_m)Q(x),$$

wo $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ ist.
Hieraus ergibt sich

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m) \cdot Q(x) + a.$$

b) Wir bezeichnen $A(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$.
Danach ist

$$|P(x)|^k = [A(x) \cdot Q(x) + a]^k$$
$$= [A(x) \cdot Q(x)]^k + k\,[A(x)Q(x)]^{k-1}$$
$$a + \ldots + k\,[A(x)Q(x)]\,a^{k-1} + a^k,$$

und wir können schreiben

$$[P(x)]^k = A(x) \cdot Q'(x) + a^k,$$

dabei ist $Q'(x)$ ein Polynom vom Grad $nk - m$.

15. a) Es seien $x = \log_a b$, $y = \log_b a$. Dann ergibt sich aus

$$a^x = b \qquad (1)$$
$$b^y = a \qquad (2)$$

die Beziehung $a^{xy} = b^y$ bzw. $a^{xy} = a$, d. h. $xy = 1$.

b) Wenn wir den vorherigen Teil benutzen, haben wir

$$\frac{1}{\log_2 c} = \log_c 2\,,\ \frac{1}{\log_3 c} = \log_c 3,\ \ldots,\ \frac{1}{\log_n c} = \log_c n,$$

was uns gestattet aufzuschreiben

$$\frac{1}{\log_2 c} + \ldots + \frac{1}{\log_n c} = \log_c 2 + \ldots + \log_c n = \log_c(2 \cdot 3 \ldots n)$$
$$= \log_c n!$$
$$= \frac{1}{\log_{n!} c}\,.$$

c) $$\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} \pi} + \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} \pi} = \log_\pi \sqrt{2} + \log_\pi \sqrt{5} = \log_\pi \sqrt{10}.$$

Bezeichnen wir dieses Resultat mit x, dann erhalten wir

$$\pi^x = \sqrt{x} \quad \text{bzw.} \quad \pi^{2x} = 10.$$

Da $10 > 3{,}15^2 > \pi^2$ ist, ergibt sich

$$\pi^{2x} > \pi^2\,, \text{ also } x > 1.$$

16. Wir haben zu zeigen, daß aus $\frac{2}{a - b} + \frac{2}{a - c} = \frac{2}{a}$ folgt $a = \sqrt{bc}$.

a) In der Tat, aus $\frac{1}{a - b} + \frac{1}{a - c} = \frac{1}{a}$ folgt

$$\frac{a - c + a - b}{(a - b)(a - c)} = \frac{1}{a}\,,$$
$$a(20 - b - c) = (a - b)(a - c), \text{ also } a = \sqrt{bc}.$$

b) Wir setzen

$$a = x^2 + 6x + 10 \qquad (1)$$
$$a - b = x^2 + 2x + 6 \qquad (2)$$
$$a - c = x^2 + 5x + 9 \qquad (3)$$

mit $b = 4x + 4 = 4(x + 1)$ und $c = x + 1$.
Aus Punkt a) erhalten wir nun

$$x^2 + 6x + 10 = \sqrt{4(x + 1)^2} = \pm 2(x + 1),$$

also

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \text{ bzw. } x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen hat keine reelle Lösung, die zweite Gleichung liefert die Lösungen $x = -2$ und $x = -6$. Setzt man diese Werte in die gegebene Gleichung ein, so sieht man, daß beide Werte Lösung sind.

17\. a) Erhebt man beide Seiten in die vierte Potenz und faßt zusammen, so ergibt sich

$$x^4 + 18x^2 - 40 = 0 \quad \text{bzw.} \quad (x^2 - 2)(x^2 + 20) = 0.$$

Daraus erhält man die Lösungen $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.
Beide genügen der Originalgleichung, da $\sqrt{3} - x \geq 0$ für x_1 und x_2.

b) Setzt man $x = \sqrt{2}$, so erhält man aus der gegebenen Gleichung a)

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} \qquad (1)$$

und für $x = -\sqrt{2}$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}. \qquad (2)$$

Addiert man (1) und (2), ergibt sich sofort die aufgestellte Identität.

18\. a) Da a und b Wurzeln der Gleichung $x^{10} + p^5x^5 + q^5 = 0$ sind, gilt

$$a^{10} + a^5p^5 + q^5 = 0 \quad \text{und} \quad b^{10} + b^5p^5 + q^5 = 0.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so gelangt man zu

$$(a^{10} - b^{10}) + (a^5 - b^5)p^5 = 0,$$

und nach Division durch $(a^5 - b^5)$, was wegen $a \neq b$ möglich ist, erhält man

$$a^5 + b^5 + p^5 = 0.$$

b) Da a und b Wurzeln von $x^2 + px + q = 0$ sind, gilt $a + b = -p$. Daraus ergibt sich $(a + b)^5 = -p^5$, und wenn man das Resultat von a) verwendet, erhält man

$$a^5 + b^5 - (a + b)^5 = 0.$$

Dividiert man durch a^5 oder durch b^5, was wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$ möglich ist, erhält man

$$1 + (\tfrac{b}{a})^5 - (1 + \tfrac{b}{a})^5 \quad \text{bzw.} \quad (\tfrac{a}{b})^5 + 1 - (\tfrac{a}{b} + 1)^5 = 0.$$

Dies zeigt, daß $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ Wurzeln der Gleichung $(x^5 + 1) - (x + 1)^5 = 0$ sind.

19. a) Da die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine geometrische Folge ist, hat man $a_n = a_1 r^{n-1}$ mit konstantem $r \in \mathbb{R}$.
Betrachtet man zwei aufeinanderfolgende Glieder von $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$, zum Beispiel a_{2k} und a_{2k+2}, so hat man

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{a_1 r^{2k+2-1}}{a_1 r^{2k-1}} = r^2.$$

Das zeigt, daß die Folge $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ ebenfalls eine geometrische Folge ist.

b) Wenn man beachtet, daß beide Seiten der Gleichung die Summe der ersten Glieder von zwei geometrischen Folgen sind, so kann man setzen

$$\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}\, x \;\; \frac{(x^2)^{50} - 1}{x^2 - 1}, \qquad (1)$$

bzw.

$$(x^{100} - 1)(x - 1)\left[(x + 1) - \tfrac{1}{3}\, x\right] = 0.$$

Die ersten Faktoren haben nun 1 und -1 als reelle Lösungen, die wegen (1) unzulässig sind, demzufolge bleibt als einzige Lösung

$$x = -\frac{3}{2}.$$

20. a) Aus $A + B = C$ folgt

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = C^3,$$
$$3AB(A + B) = C^3 - A^3 - B^3$$
$$3ABC = C^3 - A^3 - B^3.$$

b) Nach dem Resultat von a) kann man schreiben

$$3\sqrt[3]{(x - 1)(3x - 5)4x} = 4x - (x - 1) - (3x - 5),$$

$$\sqrt[3]{(x - 1)(3x - 5)4x} = 2.$$

Daraus erhält man

$$(x - 1)(3x - 5) \cdot 4x = 8 \quad \text{bzw.}$$
$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Da 2 eine Lösung dieser Gleichung ist, bekommt man

$$(x - 2)(3x^2 - 2x + 1) = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} i$ und $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} i$ für die quadratische Gleichung.
Damit sind die drei Lösungen der gegebenen Gleichung

$$2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3} i, \frac{1}{3} - \frac{2}{3} i.$$

21. a) Aus $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + mx^2 + nx + p$ folgt

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc =$$
$$= x^3 + mx^2 + nx + p$$

und hieraus die Behauptung.

b) Setzt man die Gleichung in der Form

$$x^3 + m'x^2 + n'x + p' = 0$$

an, so hat man die Beziehungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = -m'$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = n'$$
$$a^2b^2c^2 = -p'.$$

Da $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = m^2 - 2n$, gilt $m' = 2n - m^2$.
Analog $n' = n^2 - 2mp$ und trivialerweise $p' = p^2$.
Die gesuchte Gleichung lautet

$$x^3 + (2n - m^2)x^2 + (n^2 - 2mp)x = p^2 = 0.$$

22.
$$8x(y + z) = 5y(z + x) \qquad (1)$$
$$9y(z + x) = 8z(x + y) \qquad (2)$$
$$yz + zx + xy = \frac{11}{6} xyz \qquad (3)$$

Wenn wir $xyz \neq 0$ voraussetzen, erhalten wir nach Division durch xyz:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{5}{x} - \frac{8}{y} - \frac{3}{z} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y} + \frac{9}{z} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \end{array} \right| \qquad (4)$$

Faßt man (4) als lineares Gleichungssystem für $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ auf, so erhält man leicht $\underline{x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$.
Sei nun $x \cdot y \cdot z = 0$.
Wenn $x = 0$, dann ergibt sich aus (3) $yz = 0$.

Nehmen wir $x = 0$, $y = 0$; dann werden (1), (2) und (3) in die Identität $0 = 0$ überführt für alle Werte von z.
Also genügen alle Tripel $(0, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dem System.
Ebenso erhält man, daß alle Tripel $(0, \alpha, 0)$ für alle $\in \mathbb{R}$ Lösung sind und gleichfalls $(\alpha, 0, 0)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
Das gegebene System wird erfüllt von den Tripeln
$(1, 2, 3)$, $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \alpha, 0)$, $(0, 0, \alpha)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

23. Addiert man die drei Gleichungen, so erhält man

$$(a + 2)(x + y + z) = 1 + a + a^2.$$

Für $a \neq -2$ ist demnach

$$x + y + z = \frac{1 + a + a^2}{a + 2}. \qquad (1)$$

Subtrahiert man (1) von der ersten Gleichung des gegebenen Systems, so erhält man

$$x(a - 1) = \frac{1 - a^2}{a + 2},$$

$$x = -\frac{a + 1}{a + 2}.$$

Analog ergeben sich $y = \frac{1}{a + 2}$ und $z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}$.

24. Wir betrachten die Fälle

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 2 \text{ und } \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -2.$$

Im ersten Fall erhalten wir das System

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 1 \end{array} \right| .$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ und $y = -2$.
Analog erhält man im zweiten Fall $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{10}{7}$.

25. a) Wenn man $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ benutzt, so kann die gegebene Gleichung in der Form

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}}$$

geschrieben werden.
$(\log_2 x)^2 - 5 \cdot \log_2 x + 6 = 0$, woraus sich ergibt $\log_2 x = 2$ oder $\log_2 x = 3$ mit den Lösungen $x = 4$ bzw. $x = 8$.

b) Dividiert man beide Seiten durch 4^x, so erhält man

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^x = \sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{1}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und folglich $x = \frac{3}{2}$.

26. a) $\alpha + \sin\beta < \beta + \sin\alpha \Longleftrightarrow \sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha$

$$\Longleftrightarrow 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < \beta - \alpha \quad (1)$$

Da nun $0 < \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, ist

$$0 < \sin\frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Weil auch $0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, weiß man, daß

$$0 < \cos\frac{\alpha+\beta}{2} < 1. \qquad (3)$$

Durch Multiplikation von (2) und (3) ergibt sich

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{und damit (1).}$$

b) $\beta + \tan\alpha < \alpha + \tan\beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha < \tan\beta - \tan\alpha$.

Aber wenn $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$, wissen wir, daß

$$\beta - \alpha < \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$< \tan\beta - \tan\alpha \quad (\text{weil } 1 + \tan\alpha\tan\beta > 1).$$

27. a) Setzt man $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ ein, so erhält man $\cos^2\alpha - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \sin^2\beta$.
Mit $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$ und $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ergibt sich

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = \sin^2\beta.$$

Da $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$, hat man die Behauptung.

b) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4},$$

$$-\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$-\sin 4x = 1.$$

Daraus folgt $x = \frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

28. (Vollständige Induktion)
Für n = 0 ist

$$\frac{\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = -1.$$

Für n + 1 ist

$$\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi - \alpha\right]\cos\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi - \alpha\right]}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{2}\pi - \alpha)\cos(\frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{2}\pi - \alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\pi - (\alpha - \frac{1}{2}n\pi)\right]\cos\left[\frac{1}{2}\pi - (\alpha - \frac{1}{2}n\pi)\right]}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{2}n\pi)\sin(\alpha - \frac{1}{2}n\pi)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= -\frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi - \alpha)\cos(\frac{1}{2}n\pi - \alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

29. a) Aus $p + q = -p$ folgt

$$p \cdot q = q$$

$p = 0$, $q = 0$ oder $p = 1$, $q = -2$.

b) Seien x_1, x_2 die Wurzeln von (1). Dann ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q \quad \text{und}$$

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = q^2$$

und die gesuchte Gleichung lautet

$$x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0.$$

c) Wegen $-p = x_1 + 2x_1 = 3x_1$ und $q = 2x_1^2$ folgt $q = \frac{2}{9}p^2$.

d) Wegen $x_1^2 + x_1 = 2$ und $x_1^3 = q$ folgt $x_1 = 1$ oder $x_1 = -2$ und $x_1^3 = q$, d. h. $q = 1$ oder $q = -8$.

30. a) Damit die Gleichung zwei verschiedene reelle Wurzeln hat, ist es notwendig, daß ihre Diskriminante positiv ist, d. h.

$$(-3b)^2 - 4(4b - 2) > 0.$$

Die linke Seite der obigen Ungleichung ist ein Trinom zweiten Grades $(9b^2 - 16b + 8)$, in dem das Vorzeichen des Koeffizienten von b^2 positiv ist. Damit dieses Trinom für alle reellen Werte von b positiv ist, genügt es, daß seine Diskriminante negativ ist, was wegen

$$(-16)^2 - 4(9)(8) < 0$$

der Fall ist.

b) Wenn beide Wurzeln der Gleichung gleiches Vorzeichen haben, dann ist ihr Produkt positiv, d. h. $4b - 2 > 0$, woraus $b > \frac{1}{2}$ folgt. Andererseits ist ihre Summe gleich $3b$. Da $b > \frac{1}{2}$, ist $3b > \frac{3}{2}$. Das zeigt, daß die Summe der Wurzeln größer als $\frac{3}{2}$ ist und das diese Wurzeln gleiches Vorzeichen haben, ist klar, daß beide positiv sind.

31. Setzt man $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = n$, so erhält man

$$2n^2 - 3n + 2 \geqq 0$$

Die Diskriminante von $2n^2 - 3n + 2$ ist $(-3)^2 - 422 = -7$, also gilt für alle reellen Werte von n

$$2n^2 - 3n + 2 \geqq 0$$

und damit die angegebene Ungleichung.

32. Wir betrachten zuerst $a > 0$.
Multiplikation mit $2a \;\; x$ ergibt

$$|x|^2 - 4a^2 < 3a\,|x|,$$
$$|x|^2 - 3a\,|x| - 4a^2 < 0,$$
$$(\,|x| - 4a)(\,|x| + a) < 0.$$

Da $a > 0$, gilt

$$|x| + a > 0 \text{ und } |x| - 4a < 0.$$

Aus $|x| + a > 0$ folgt $|x| > -a$, was für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Aus $|x| - 4a < 0$ folgt $|x| < 4a$, d. h. $-4a < x < 4a$.
Damit haben wir für $a > 0$ die Lösungen

$$-4a < x < 0 \quad \text{oder} \quad 0 < x < 4a$$

($x = 0$ ist ausgeschlossen).
Für den anderen Fall $a < 0$ ist

$$(\,|x| - 4a)(\,|x| + a) > 0$$

und wir bekommen

$$|x| - 4a > 0 \quad \text{und} \quad |x| + a > 0.$$

Aus $|x| - 4a > 0$ folgt $|x| > 4a$, was für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Aus $|x| + a > 0$ folgt $|x| > -a$, d. h. $x > -a$ oder $x < a$.
Damit haben wir für $a < 0$ die Lösungen $x > -a$ oder $x < a$.

33. Es sei $f(x) = ax + b$. Wegen $f(0) = \sqrt{2}$ folgt $b = \sqrt{2}$.
Außerdem ergibt sich aus $\frac{(2a + \sqrt{2}) - (5a + \sqrt{2})}{-3a + \sqrt{2}} = 6$ die Beziehung $-3a = -18a + 6\sqrt{2}$, also $a = \frac{2}{5}\sqrt{2}$.
Damit ist

$$f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{2}x + \sqrt{2}.$$

34. Es ist $f(x) = \dfrac{x}{ax^2 + b}$ äquivalent zu

$a \cdot f(x) \cdot x^2 - x + bf(x) = 0,$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(a \cdot f(x))(b \cdot f(x))}}{2a \cdot f(x)}$$

Hieraus ergibt sich $1 - 4ab(f(x))^2 \geq 0$, demnach

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{4ab}} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{\sqrt{ab}}{2ab} .$$

Für dan anderen Teil erhält man

$$x = \frac{1}{2a \cdot \frac{\sqrt{ab}}{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a} .$$

Tatsächlich ist

$$f\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right) = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{a}}{a\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right)^2 + b} = \frac{\sqrt{ab}}{2ab}$$

d. h. der maximale Wert wird für $x = \dfrac{\sqrt{ab}}{a}$ erreicht.

35. a) Wenn man $x = 0$ und $y = a$ setzt und die Eigenschaft $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ anwendet, erhält man

$$f(a) = f(0) \cdot f(a) \Rightarrow f(0) = 1.$$

b) Erhält man ebenso für $x = b$, $y = -b$.

c) Nach Induktion:
Für $n = 0$ trivial.
Außerdem folgt aus $f(nc) = [f(c)]^n$ sofort

$f(nc) \cdot f(c) = [f(c)]^{n+1}$, also $f((n + 1)c) = [f(c)]^{n+1}$.

36. a) $f(x + 2k) = f((x + k) + k) = \dfrac{1 + f(x + k)}{1 - f(x + k)}$

$$= \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{1}{f(x)} .$$

b) $f(x + 4k) = f((x + 2k) + 2k) = \dfrac{1}{f(x + 2k)} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x).$

37. Es ist

$$\log_{17}34 = \frac{\log_2 34}{\log_2 17} = \frac{\log_2(2 \cdot 17)}{\log_2 17} = \frac{1 + \log_2 17}{\log_2 17}$$

und ebenso

$$\log_{34}68 = \frac{2 + \log_2 17}{1 + \log_2 17}.$$

Setzen wir $\log_2 17 = a$, so haben wir

$$\frac{1}{\log_{17}34 - \log_{34}68} = \frac{1}{\frac{1+a}{a} - \frac{2+a}{1+a}} = a(1 + a).$$

Wenn wir beachten, daß $a = \log_2 17 > \log_2 16 = 4$ ist, dann gilt $a(1 + a) > 4 \cdot 5 = 20$.

38. Es ist

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin\left[\pi - (\frac{\pi}{2} - x)\right] = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] = \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x,$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.$$

Setzt man diese Beziehungen in die gegebene Gleichung ein, so erhält man die Gleichheit.

39. (Es ist notwendig zu bemerken, daß man die Funktionen, die in der zweiten Gleichung auftreten, wesentlich vereinfachen kann, wenn man die erste Gleichung im Auge hat.)
Es ist

$3x - 4y = (2x - 4y) + x = \pi + x$, also gilt

$$\cos(3x - 4y) = \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Analog erhält man $\sin(2x - 6y) = \sin(\pi - 2y) = \sin 2y$.
Aus der ersten Gleichung erhält man ferner $2y = x - \frac{1}{2}\pi$, also ist jetzt

$$\sin(2y) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x.$$

Setzt man die erhaltenen Werte in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$-\frac{1}{\cos x} + 2\cos x = 1$$

mit den beiden Lösungen $\cos x = 1$ oder $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Betrachtet man die für x gemachten Einschränkungen, so ergeben sich

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{2\pi}{3} .$$

Setzt man $x = 0$ in die erste Gleichung ein, so ergibt sich $y < 0$ im Widerspruch zu $0 \leq y < \pi$.
Schließlich ergibt sich die einzige Lösung des Systems

$$x = \frac{2\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{12} .$$

40. a) $f(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + {}$$
$$+ \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$
$$= \sqrt{2}\cos\alpha .$$

b) Da $2g(x) = \sin 2x$, kann die linke Seite der Gleichung in der Form

$$f(x) + \sqrt{2}\sin 2x$$

geschrieben werden.
Setzen wir zunächst $x = \frac{\pi}{4} - \alpha$ und wenden das Resultat von a) an, so reduziert sich der vorherige Ausdruck zu

$$\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha), \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{2}(\cos\alpha + \cos 2\alpha).$$

Die vorausgesetzte Gleichung ist jetzt

$$\sqrt{2}(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 0 \iff \cos 2\alpha = -\cos\alpha .$$

Daraus erhält man

$$2\alpha = (\pi + \alpha) + 2k\pi , \qquad (1)$$
$$2\alpha = (\pi - \alpha) + 2k\pi ; \qquad (2)$$

woraus

$$\alpha = \frac{(2k + 1)\pi}{3}$$

folgt. (Die Lösungen von (2) schließen die Lösungen von (1) ein.)
Damit haben wir

$$x = \frac{\pi}{4} - (2k + 1)\frac{\pi}{3}$$

bzw. nach einigen einfachen Transformationen

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} ,$$

wo n die Menge der ganzen Zahlen durchläuft.

41. a) Die Dreiecke APD und CDM sind ähnlich, also gilt

$$\frac{DP}{AP} = \frac{CM}{CD} .$$

Da M Mittelpunkt von BC und BC = CD, ist $\frac{DP}{AP} = \frac{1}{2}$.

b) Ist k die Seitenlänge des Quadrates, so haben wir

$$(DP)^2 + (2DP)^2 = k^2, \qquad \text{(Dreieck ADP)}$$

$$5(DP)^2 = k^2 \Longrightarrow \underline{\underline{DP = \frac{k\sqrt{5}}{5}}} . \qquad (1)$$

$$(DM)^2 = (\tfrac{1}{2}k)^2 + k^2 \quad \text{(Dreieck CDM)}$$

$$= \frac{5}{4}k^2 \Longrightarrow \underline{\underline{DM = \frac{k\sqrt{5}}{2}}} . \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$PM = \frac{k\,5}{2} - \frac{k\,5}{5} = \underline{\underline{\frac{3k\sqrt{5}}{10}}} . \qquad (3)$$

Schließlich erhält man aus (1) und (3)

$$\frac{DP}{PM} = \frac{2}{3} .$$

c) Sei jetzt M' der Mittelpunkt von AD und H der Schnittpunkt von AP und BM'. Da außerdem BM ≅ M'D und BM ∥ M'D, ist BMDM' ein Parallelogramm, demnach BM' ∥ DM.
Weil auch DM ⊥ AP, schließt man auf

$$\underline{\underline{BM' \perp AP}} . \qquad (4)$$

Andererseits hat man im Dreieck ADP

$$\frac{AH}{PH} = \frac{AM'}{DM'} = 1, \text{ woraus } \underline{\underline{AH = PH}} \qquad (5)$$

folgt.
Aus (4) und (5) erhält man, daß BH die Seitenhalbierende von AP ist, so daß $\underline{\underline{AB = BP}}$ gilt.

42. a) Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$ folgt $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{h^2}$ bzw. $\frac{b^2 + c^2}{b^2} = \frac{c^2}{h^2}$.

Nach Division durch c^2 erhält man

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2} .$$

b) Aus $a^2 = b^2 + c^2$ folgt $a^2 + h^2 \geqq b^2 + c^2$ (1)

und aus

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \text{ folgt } ah = bc \text{ bzw. } 2ah = 2bc. \qquad (2)$$

Nach Addition von (1) und (2) erhält man

$$(a + h)^2 \geqq (b + c)^2, \text{ d. h. } a + h \geqq b + c.$$

43. a) Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AA'C und BB'C folgt

$$\frac{x}{z} = \frac{p + q}{q} \ . \qquad (1)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke A'CC' und A'BB' folgt

$$\frac{y}{z} = \frac{p + q}{p} \ . \qquad (2)$$

Division von (1) durch (2) liefert

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \ . \qquad (3)$$

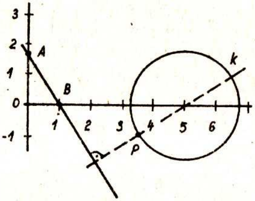
b) Aus (3) erhält man

$$\frac{x + y}{y} = \frac{p + q}{q} \ . \qquad (4)$$

Nun ergibt sich aus (1) und (4)

$$\frac{x}{z} = \frac{x + y}{y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ .$$

44. a) Der gesuchte Punkt liegt auf der Senkrechten r zur Geraden AB durch den Mittelpunkt von k, d. h. durch (5, 0). Um die Koordinaten von P zu bestimmen, genügt es, die Gleichung der Geraden r aufzustellen und diese gemeinsam mit der Gleichung des Kreises als Gleichungssystem zu betrachten.



Der Anstieg von AB ist $-\ 3$, daher ist der Anstieg von r gleich $\frac{1}{3}$.

Weil r außerdem durch (5, 0) geht, lautet die Gleichung von r

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - 5).$$

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 5)$$
$$(x - 5)^2 + y^2 = 3$$

sind $x = \frac{13}{2}$ und $x = \frac{7}{2}$.

Für $x = \frac{7}{2}$ ergibt sich $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, also sind die Koordinaten des gesuchten Punktes $P(\frac{7}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) Der minimale Flächeninhalt wird für Q = P erreicht. Danach ist

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

45. Es genügt zu bemerken, daß die Mittelpunkte der einbeschriebenen Kreise ein neues regelmäßiges Sechseck bilden. Der Flächeninhalt des gebildeten Sterns ist gleich dem Flächeninhelt dieses neuen Sechsecks vermindert um den Flächeninhalt des Durchschnitts dieses Sechsecks mit den sechs Kreisen. Dieser Durchschnitt sind sechs gleiche Sektoren mit jeweils dem Zentriwinkel

$$\frac{2\pi}{3}.$$

Man kann den Radius der sechs einbeschriebenen Kreise schnell berechnen:

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

Es ist klar, daß danach die Seite des neuen Sechsecks die Länge $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ hat, also sein Flächeninhalt $\frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}$ ist.
Der gesuchte Flächeninhalt ist also

$$\frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2} - 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{(\sqrt{3}+1)^2}.$$

46.
$$\begin{aligned} AE \cdot AD &= AE \cdot (AE + AD) \\ &= (AC)^2 + (EC)^2 + (AE) \cdot (AD), \end{aligned}$$

aber $AE \cdot ED = BE \cdot EC$, demnach

$$\begin{aligned} AE \cdot AD &= (AC)^2 + (EC)^2 + (BE) \cdot (EC) \\ &= (AC)^2 + EC(EC + BE) \\ &= (AC)^2 + EC \cdot BC \\ &= (AC)^2 + (BC - BE) \cdot BC \\ &= (AC)^2 + (BC)^2 - BE \cdot BC. \end{aligned}$$

Also ist

$$AD \cdot AE + BE \cdot BC = (AB)^2.$$

47. a) Man zeigt, daß die Dreiecke OAT und O'A'T ähnlich sind. In der Tat, beide Dreiecke sind gleichschenklig, und haben den Basiswinkel OTA gemeinsam.
Aus der Proportinalität entsprechender Seiten, ergibt sich

$$\frac{AT}{A'T} = \frac{OT}{O'T}. \qquad (I)$$

b) Analoger Weise wie in a) bekommt man

$$\frac{BT}{B'T} = \frac{OT}{O'T}. \qquad (II)$$

Aus (I) und (II) ergibt sich

$$\frac{AT}{A'T} = \frac{BT}{B'T}. \qquad (III)$$

Die Dreiecke ABT und A'B'T ähnlich, da sie außer (III) noch den Winkel ATB gemeinsam haben, also gilt

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle B'A'T.$$

Danach sind die Sehnen AB und A'B' parallel.

48. H ist Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks BCD, also ist

$$HE = \frac{1}{3} BE . \qquad (1)$$

Ist $BB' \perp AE$, so haben wir $EBB' \sim EHH'$, danach gilt

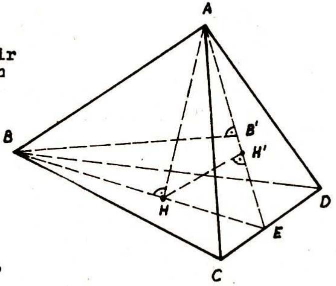
$$\frac{HE}{BE} = \frac{HH'}{BB'} .$$

Aus (1) erhält man

$$\frac{HH'}{BB'} = \frac{1}{3} . \qquad (2)$$

Andererseits sind die Dreiecke BB'E und AHE kongruent, da sie rechtwinklig sind und AE = BE, so daß BB' = AH.
Aus (2) folgt dann

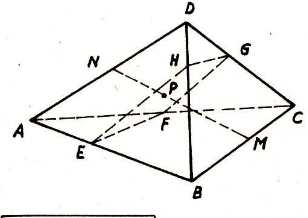
$$\frac{HH'}{AH} = \frac{1}{3} .$$



49. a) Die Höhe in jedem der Oberflächendreiecke ist

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(gleichseitige kongruente Dreiecke). Im gleichschenkligen Dreieck BNC ist MN Mittelsenkrechte, demnach Höhe auf BC und nach dem Satz des Pythagoras in Dreieck BNM gilt



$$MN = \sqrt{(BN)^2 - (BM)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\,3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} .$$

b) Wir zeigen nur, daß $EF \perp EH$ ist, weil die anderen Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den Seiten des Vierecks EFGH analog zu zeigen sind.
Erstens ist BC ∥ Fläche EFGH, da $BC \perp MN$ und $MN \perp$ Fläche EFGH.

Hieraus schließt man, daß BC $\parallel$ EF, da

$$EF = (\text{Fläche } ABC) \cap (\text{Fläche } EFGH).$$

Analog gilt AD $\parallel$ EH.
Außerdem gilt AD $\perp$ BN und AD $\perp$ CN (Da BN und CN Höhen in den Dreiecke ABC bzw. ACD sind), danach ist AD $\perp$ Fläche BNC, also AD $\perp$ BC.
Aus BC $\parallel$ EF, AD $\parallel$ EH und AD $\perp$ BC ergibt sich

$$EF \perp EH.$$

c) Wir bemerken, daß aus BC $\parallel$ EF folgt, daß die Dreiecke ABC und AEF ähnlich sind, d. h. es ist

$$EF \cong AE \,. \qquad (1)$$

Analog ergibt sich

$$EH \cong EB \,. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

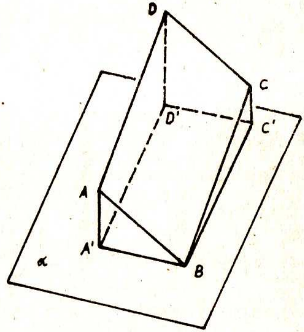
$$EF + EH = AE + EB = a$$

und es ist klar, daß auch FG + GH ist.
Damit ist gezeigt, daß der Umfang des Rechtecks EFGH gleich 2a und unabhängig von der Lage von P ist.

50. a) $AA' \parallel DD'$ (1)
(beide sind Lote auf α)

$$A'B \parallel D'C' \qquad (2)$$

(da sie entgegengesetzte Seiten eines Parallelogramms sind).
Aus (1) und (2) folgt, daß die Ebenen AA'B und DD'C'C sind, damit sind auch AB und CD parallel.
Auf ähnliche Weise ergibt sich auch AD $\parallel$ BC.



b) Sei O der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms und O' seine Projektion auf α .
Da O Mittelpunkt von BD und außerdem $OO' \parallel DD'$ ist, folgt nach dem Strahlensatz

$$DD' = 2(OO'). \quad (3)$$

Andererseits ist wegen $AA' \parallel CC'$ das Viereck AA'C'C ein Trapez, dessen Mittellinie OO' ist, so daß gilt

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2} \,. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) erhält man $DD' = AA' + CC'$.

c) Nehmen wir an, daß A'BC'D' ein Rechteck ist. Damit ist A'B $\perp$ BC', und da BC' die Projektion von BC auf ist, gilt außerdem A'B $\perp$ BC, also ist A'B senkrecht zur Ebene BCC'.
Andererseits folgt aus BC' $\perp$ A'B auch BC' $\perp$ AB.
Wäre jetzt BC $\perp$ AB, so wäre AB Senkrechte zur Ebene BCC' was aber absurd ist, da es dann für den Punkt B der Ebene BCC' zwei Senkrechte (AB und A'B) zu der gegebenen Ebene gäbe.

III/18/172.747.95.-L 1733/86