Lösungsheft Mathematik zum Lehrbuch Klasse 6

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Lösungsheft

Mathematik

Zum Lehrbuch MATHEMATIK, Klasse 6

(Titel-Nr. 00 06 08; Ausgabe 1988)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1988

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Siegrid Bellack, Walter Blaurock, Dr. Manfred Dennert, Prof. Dr. Brigitte Frank, Dr. Marianne Grassmann, Heinz Junge, Dr. Günter Lorenz, Dr. Manfred Rehm, Dr. Wolfgang Schulz und Dr. Edellinde Siury beteiligt.

Lösungsheft Mathematik : zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 6. Nur für Lehrer. - Ausg. 1988, 1. Aufl. - Berlin : Volk u. Wissen, 1988. - 91 S.

ISBN 3-06-002199-6

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203·1000/88 (E 00 21 99-1)
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Redaktion: Ingrid Fabian
Zeichnungen: Rita Otto
Redaktionsschluß: 2. März 1988
LSV 0645
Bestell-Nr. 709 387 3
00400

Vorbemerkungen

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Schüleraufträge und Aufgaben des Lehrbuches "Mathematik, Klasse 6" (Titel-Nr.: 00 06 08 - Ausgabe 1988). Dabei wurden Konstruktionsaufgaben nicht und Beweisaufgaben nicht in jedem Fall berücksichtigt. Im Falle von Aufgaben, bei denen die Schüler Zahlen angeben sollen, die repräsentativ für eine größere Anzahl möglicher Lösungen stehen, wurden ebenfalls Vorschläge unterbreitet.

Geforderte Begründungen wurden nur in einigen Fällen aufgenommen. Sie tragen Beispielcharakter und sollten keinesfalls ausschließlich in dieser Form vom Schüler erwartet werden.

Bei Anwendungsaufgaben wurde aus Platzgründen im allgemeinen auf den Ergebnissatz verzichtet.

Nicht lösbare Aufgaben treten im Lehrbuch hin und wieder mit voller Absicht auf. Im Lösungsheft wurde in den betreffenden Fällen "n. l." vermerkt.

Inhalt

A. Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Motivierungsaufgabe auf Seite 7

Ein Vorbeimarsch in vollen Dreierreihen ist möglich, denn 246 ist durch 3 teilbar (246 : 3 = 82); in vollen Viererreihen ist ein Vorbeimarsch nicht möglich, denn 246 ist nicht durch 4 teilbar (246 : 4 = 61 R 2).

Zur Wiederholung und Teilbarkeitssätze

1. 18(16); 332(330); 2 001(1 999); 2 100(2 098); 4 101(4 099); 1(kein Vorgänger); 738 642(738 640); n + 1 (n-1); k + 6(k+4); x(x-2); 2 · m + 1 (2·m-1); 3 · k + 1 (3·k-1)

2. Alle natürlichen Zahlen haben einen Nachfolger; 0 hat keinen Vorgänger.

3. a) 217 > 127 d) 138-526=526+138 g) 578 · 17 < 18 · 578
   b) 330 < 330+1 e) 733+211 < 735+211 h) 37·45 = 45·37
   c) 299 = 300-1 f) 618-12 = 619-13 i) 660:12 > 540:12

4. a) x = 10 d) n.l. g) x = 7 k) x = 77
   b) x = 0 e) x = 59 h) x = 29 l) n.l.
   c) x = 36 f) n.l. i) x = 0 m) x = 154
   (Zur Aufg. 4 f): Diese Gleichung hat keine Lösung, da x - x für alle (natürlichen) Zahlen x gleich 0 und daher verschieden von 150 ist. Da es keine Zahl x gibt, die die Gleichung erfüllt, kann sie auch nicht als Summe oder Differenz von Zahlen geschrieben werden.)

5. a) 166 d) 770 g) 128 k) 460
   b) 575 e) 810 h) 648 l) 680
   c) 193 f) 1 300 i) 203 m) 38

6. a) x = 24 c) x = 125 e) x = 500 g) n.l.
   b) x = 0 d) x = 27 f) x = 1 h) x = 5

7. a) x = 8 c) x = 7 152 e) x = 56 g) x = 16
   x = 72 : 9 x = 7 152 : 1 x = 7 · 8 x = 128:8

7. b) $x = 120$ d) $x = 0$ f) n.l. h)* n.l.
$x = 12 \cdot 10$ $x = 17 \cdot 0$

8. a) 2^3 b) 5^2 c) 3^4 d) a^7

e) Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren schreibt man a^n. Die Zahl a heißt Basis, die Zahl n heißt Exponent der Potenz a^n.

9. a) 32 b) 81 c) 125 d) 12 e) 375 f) 72

10. a) $x = 1\,000\,000$ c) $y = 10$ e) $t = 2$ g) $a = 2$
b) $z = 3$ d) $x = 5$ f) $s = 5$ h) $n = 2$

11. a) 7 654 b) 101 010 c) 50 431 d) 6 262

12. a) $5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9$
b) $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1$
c) $8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 8$

13. a) 12; 0; 68; 64; 60 Gerade Zahlen sind Vielfache von 2. (Stoff der Klasse 2)
b) 27; 33; 1; 49; 77 Diese Zahlen sind nicht Vielfache von 2.

Lerneinheit A 1: Vielfache und Teiler

o 1 Er hat nicht recht. Ein Gegenbeispiel genügt, um die Aussage, die für alle einstelligen Zahlen gelten soll, zu widerlegen: $7 \nmid 180$. (Auch mit Hilfe von $8 \nmid 180$ kann die Aussage widerlegt werden.)

o 2 Die Aussage b) $7 \mid 50$ ist falsch, denn es gibt keine Zahl n, so daß $7 \cdot n = 50$.
Die Aussage e) ist ebenfalls falsch: $1 + 2 + 3 = 6$.

1. a) 21 (12; 45; 60; 75; 210; 246)
b) 7 (18; n.l.; 1; 9; 0; 13) c) 37 (1; 0; 19; 25)

2. a) 42 b) 56 c) 108 d) 121 e) 8 f) der dritte Teil
g) der fünfte Teil h) 0 i) 18 376 k) 5

4. a) wahr; $2 \cdot 32 = 64$ c) wahr; $3 \cdot 32 = 96$
b) falsch; $18 \cdot 5 \neq 95$ d) falsch; $8 \cdot 7 \neq 54$

5. a) wahr; $13 \cdot 3 = 39$ b) wahr; $17 \cdot 1 = 17$ c) wahr; $2 \cdot 21 = 42$
d) falsch; $9 \nmid 17$ e) wahr; $13 \cdot 0 = 0$ f) wahr; $17 \cdot 2 = 34$
g) falsch; $16 \nmid 8$
h)* wahr; gemäß Definition gilt $a \mid b$, wenn es (mindestens) eine Zahl x gibt, so daß $a \cdot x = b$. Im vorliegenden Fall gibt es sogar unendlich viele Zahlen x (so z. B. $x = 7$), für die gilt $0 \cdot x = 0$.

6. a) 40; 8; 12; 0; 4; 20; 32 b) 40; 0; 10; 5; 20; 15
c) 12; 0; 18 d) 0; 14 e) 40; 8; 0; 32 f) 9; 0; 18

7. Aussagen sind a), b), e) und f).

8.*

	a)	b)	c)
4	w	w	
10			w

9. a) $a = 1; 2; 3; 4; 6; 12$
b) $b = 0; 7; 14$

Lerneinheit A 2: Beschreibung von Vielfachen mit Hilfe von Variablen

o 3 a) 0; 2; 4; 6; 8; 2 000; es entstehen gerade Zahlen.
b) $14 = 2 \cdot 7$; $10 = 2 \cdot 5$; $56 = 2 \cdot 28$; $2 = 2 \cdot 1$; $0 = 2 \cdot 0$; $108 = 2 \cdot 54$

o 4 a) 15; 11; 57; 1; 109 b) 0; 1; 2; 3; 4; 1 000

o 5 a)

n	4	3	5	20	11	7
7·n	28	21	35	140	77	49

gemeinsamer Teiler 7

b)

n	2	7	4	20	0	5	1
5·n	10	35	20	100	0	25	5

Vielfaches von 5

1. b) 112; 114; 116; 118; 120; 122 c) 753; 755
d) $31 - 15 = 16$
Es gibt keine 2 ungeraden Zahlen mit der Differenz 9.
e) Es gibt keine 2 geraden Zahlen mit der Differenz 11.
$30 - 2 = 28$.

3.

n	11	1	0	13
2 · n	22	2	0	26

n	8	17	3	5
2 · n + 1	17	35	7	11

4.* Gerade Zahlen: b, c, f

5.* Ungerade Zahlen: a, d

6. a)

x	2·x
5	10
9	18
11	22
12	24

2

b)

k	3·k
5	15
8	24
12	36
7	21

3

c)

n	6·n
9	54
10	60
15	90
20	120

6

d)

a	4·a
6	24
9	36
16	64
15	60

4

7. a) 10;$\underline{20}$ 9;$\underline{18}$ 30;$\underline{60}$ 50;$\underline{100}$ 16;$\underline{32}$
   b) 11;$\underline{33}$ 6;$\underline{18}$ 20;$\underline{60}$ 9;$\underline{27}$ 13;$\underline{39}$
   c) 4;$\underline{20}$ 12;$\underline{60}$ 5;$\underline{25}$ 20;$\underline{100}$ 7;$\underline{35}$

8. a) $8 \cdot n$ b) $17 \cdot n$ c) $5 \cdot n$ d) $2 \cdot n$ e) $10 \cdot n$

Lerneinheit A 3: Teilbarkeit eines Produktes

1. a) wahr, denn $6 \mid 24$ d) wahr, denn $12 \mid 36$
   b) wahr, denn $13 \mid 13$ e) wahr, denn $7 \mid 35$
   c) wahr, denn $7 \mid 14$ f) wahr, denn $4 \mid 56$
   g)* z. B. $20 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 18$
   $= 8 \cdot 5 \cdot 18$
   $= 8 \cdot 90$ wahr, denn $8 \mid 8$
   h)* z. B. $16 \cdot 21 = 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7$
   $= 24 \cdot 14$ wahr, denn $14 \mid 14$

2. Aufgrund des Satzes A 2 (Teilbarkeit eines Produktes) sind folgende Angaben zu erwarten:
   a) 1; 2; 3; 6; 7 b) 1; 2; 4; 5; 8; 16 c) 1; 2; 3; 6; 7; 14
   d) 1; 2; 3; 5; 6; 7; 11; 22; 33; 35; 66 e) 1; 2; 5; 11; 13; 26; 55

   Weitere Teiler, z. B. in c) 4, kommen noch hinzu.

3. a) wahr; denn $2 \mid 20$ b) falsch; denn $4 \nmid 15$

4. a) $7 \cdot 600$ b) $8 \cdot 7\,000$ c) $27 \cdot 100$ d) $270 \cdot 100$
   e) $69 \cdot 100$ f) $300 \cdot 100$

5.* 1; $\underline{2}$; $\underline{3}$; $\underline{4}$; $\underline{5}$; 6; 10; 12; $\underline{15}$; 20; 30; 60

6.* a) Wahr – gerade Zahlen sind darstellbar durch $2 \cdot n$.
   Also: $x = 2 \cdot a$; $y = 2 \cdot b$ und $x \cdot y = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a \cdot b$.
   Daraus folgt: $4 \mid 4 \cdot a \cdot b$ bzw. $4 \mid x \cdot y$.
   b) Falsch – ein Gegenbeispiel genügt: $3 \nmid 5 \cdot 7$.

7. Er hat recht. Aus $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ folgt: $8 \mid x$ nur, wenn auch $2 \mid x$, d. h., wenn x geradzahlig ist.

8. Der Betrag läßt sich nur aus Fünfmarkstücken, nur aus Zehnmarkscheinen und auch nur aus Zwanzigmarkscheinen zusammenstellen.

9. a) $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$ b) $24 = 1 \cdot 24 = 3 \cdot 8$ c) n.l.

10. a) n.l. b) $36 = 4 \cdot 9$ (möglich sind auch $1 \cdot 36$ und $3 \cdot 12$)
    c) $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 18$

Lerneinheit A 4: Mengen von Teilern und Vielfachen

1. a); b)
2. a) $M_1 = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $M_2 = \{0; 4; 8; 12; 16\}$, $M_3 = \{20\}$
   b) $16 \in M_1$; $20 \in M_3$; $12 \in M_2$

3. a) $z \mid 100$ $\{10; 20; 25; 50\}$ b) $z \mid 36$ $\{12; 18; 36\}$
   c) $25 \mid z$ $\{25; 50; 75\}$ d) $11 \mid z$ $\{11; 22; 33; \ldots; 99\}$

4. a) $P \in k$, $Q \in k$ b) $P \in g$, $S \in g$, $T \in g$

5. a), b) und d) sind wahre Aussagen.

6. Die Aussage a) ist wahr; die Aussagen b) und c) sind falsch.

7. a) und c) sind wahre Aussagen.

8. b)* $\{34; 35; 36\}$; $\{34; 36; 37\}$; $\{34; 35; 37\}$; $\{35; 36; 37\}$

10.* Die folgenden Wörter erfüllen die Aufgabenstellung:
   a) BUCH, BUG, BAR, REGAL, LAGER, LURCH, UHR, RUHE, BACH, LAGE, BRUCH, EGAL, AUCH, RAUCH, BAUCH, LAUB, RACHE, HAGER, HAGEL, REH
   b) DIENER, DREI c) EI

11. a) $V_{10} \subset V_5$ b)* $V_b \subset V_a$

Lerneinheit A 5: Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

8. a) 1; 3; 7; 21 (4 Teiler) b) 1; 23 (2 Teiler)
   c) 1; 5; 25 (3 Teiler) d) 1; 2; 4; 7; 14; 28 (6 Teiler)
   e) 1 (1 Teiler)

o 9 a) 2; 3; 5; 7; 11; 13   b) 4 = 2·2; 6 = 2·3; 8 = 2·2·2; 9 = 3·3;
10 = 2·5; 12 = 2·2·3; 14 = 2·7; 15 = 3·5

1. a) 1; 3; 5; 15   b) 1; 2; 4; 8; 16   c) 1; 5; 7; 35   d) 1; 19

2. 2; 4; 8 oder 16 Mitspieler

3. a) nein   b) nein   4. a), b) und c) sind wahre Aussagen.

5. a) 17; 19; 23; 29   b) 31; 37

6. a) 7; 17   b) 19; 29; 43; 73

7. a) 2   b) 11   c) keine

8. a) 2 · 2 · 11   b) 2 · 23   c) 3 · 5 · 5   d) 2 · 2 · 3 · 5
e) 7 · 7   f) 2 · 2 · 5 · 5   g) 2 · 2 · 5 · 7   h) 2 · 3 · 3 · 17
i) 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 3   k) 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2

9. a) 1; 3; 7; 11; 21; 33; 77   b) 1; 3; 7; 21; 49
c) 1; 3; 5; 9; 15; 25; 45; 75

10.* 25 · 16 · 21 · 7 = 175 · 8 · 14 · 3
Jedes der beiden Produkte hat die gleiche Zerlegung in Primfaktoren.

11.* 56 · 25 · 27 > 12 · 18 · 75,
denn 56·25·27 = 2·28·25·3·9 = 28·75·18 und 28 > 12.

12.* a) nein; kann nicht 2 sein, muß aber gerade sein;
b) ja (z. B. 2·1)

Lerneinheit A 6: Teilbarkeit von Summen und Differenzen

o 10 a) Wenn bei einer Summe mindestens ein Summand durch 3 teilbar ist, so ist auch die Summe durch 3 teilbar (falsche Aussage).

b)

a	b	3 | a	3 | b	3 | a + b
21	7	ja	nein	nein
14	18	nein	ja	nein
2 400	36	ja	ja	ja

o 11 a) Voraussetzung: 7 | a; 7 | b
Behauptung: 7 | a + b

Beweis:
7 | a   a = 7 · x
7 | b   b = 7 · y
a + b = 7·x + 7·y
= 7 · (x + y)
x + y = z, z ∈ N
a + b = 7 · z
7 | a + b

1.

a	b	a = 3·x	b = 3·y	a + b = 3·z
24	6	24 = 3·8	6 = 3·2	24 + 6 = 3·10
27	18	27 = 3·9	18 = 3·6	27 + 18 = 3·15
21	36	21 = 3·7	36 = 3·12	21 + 36 = 3·19

z = x + y (9 + 6 = 15; 7 + 12 = 19)

2. a) 1; 3   b) 1; 3   c) 1; 5   d) 1; 2; 4   e) 1; 2; 3; 4; 6; 12

3. a) nein; 4 ∤ 78   b) ja; 6 | 78 und 6 | 36
c) nein; 7 ∤ 22   d) ja; 8 | 7 200 und 8 | 56

4. a) ja; 5 | 65 und 5 | 70   b) nein, 3 ∤ 25
c) ja; 210 + 38 = 248 = 200 + 48; 4 | 200 und 4 | 48
d) ja; 7 | 560 und 7 | 35   e) nein; 9 ∤ 80
f) ja; 6 | 420 und 6 | 54

5. 603; 96; 3 072   6. 1 428, (1 400 + 28); 2 828; 70 777

7. a) 36 + 12 (oder 36 + 0; 36 + 24 u. a.)
b) 36 + 1 (oder 36 + 2; 36 + 3 u. a.)
c) n = 6 (13; 20; 27; ...)

9. a) ja   b) nein (9 ∤ 17)

10. a) ja; 7 | 630 + 63   b) ja; 9 | 810 + 72   c) ja; 6 | 360 − 6

11. a) 42 $\underline{2}$80, denn 7 | 42 000 + 280 oder 42 $\underline{9}$80
b) 42 $\underline{1}$80, denn 6 | 42 000 + 180 oder 42 $\underline{4}$80 oder 42 $\underline{7}$80

12. a) (180 − 3) : 3 = 59   b) (270 − 18) : 9 = 28
c) (450 − 5) : 5 = 89   d) (900 − 9) : 3 = 297
e) (350 − 7) : 7 = 49

13.*

a + b	a − b
gerade	gerade
ungerade	ungerade

14. a) 24 = 2 + 22   b) n. l.
c) 23 + 1

15. Da $7 \nmid 1\,430$ ist ($1\,430 = 1\,400+30$ und $7 \mid 1\,400$ und $7 \nmid 30$), kann der Betrag nicht stimmen. Mögliche Beträge wären 1 421 M, 1 428 M, 1 435 M, 1 442 M, 1 449 M.

Lerneinheit A 7: Teilbarkeitsregeln

o 13 a) $7\,300 = 73 \cdot 100$; $4 \mid 100$, also $4 \mid 73 \cdot 100$ und $4 \mid 7\,300$
b) $7\,332 = 7\,300 + 32$; $4 \mid 7\,300$ und $4 \mid 32$, also $4 \mid 7\,332$
c) $7\,315 = 7\,300 + 15$; $4 \mid 7\,300$ und $4 \nmid 15$, also $4 \nmid 7\,315$

o 14 Aus $6 \mid a$ folgt $a = 6 \cdot n$ und weiter $a = 2 \cdot 3 \cdot x$, d. h., a ist auch Vielfaches von 2 und auch von 3.

o 15 27: nein, ja, nein; 22: ja, nein, nein; 42: ja, ja, ja

1. a) 2 370; 7 800; 460; 37 000 b) 7 800; 37 000
c) 2 370; 43 765; 7 800; 460; 37 000; 1 395
d) 2 370; 7 800; 776; 460; 37 000; 9 874

2. a) 1 234 b) 1 243 c) n.l. d) 1 234

3.* a) 97 420; 24 790 b) 7 775; 5 575

4. a) 2; 5; 10 b) 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100

5.* $7\,300 = 73 \cdot 100$; aus $25 \mid 100$ folgt $25 \mid 73 \cdot 100$
$7\,375 = 7\,300 + 75 = 73 \cdot 100 + 75$; aus $25 \mid 100$ und $25 \mid 75$ folgt $25 \mid 73 \cdot 100 + 75$
$7\,323 = 7\,300 + 23 = 73 \cdot 100 + 23$; aus $25 \mid 100$ und $25 \nmid 23$ folgt $25 \nmid 73 \cdot 100 + 23$

6. a) 5 716; 3 120; 4 980; 29 940 b)* 2 350; 14 475

7. b)* 87 532 und 35 728

8. 4 257; 8 721; 24 036; 58 761; 539 820

9. 783; 8 685; 87 444; 564 291

11.

Teiler		2	3	4	5	9	10
a)	3 678	ja	ja	nein	nein	nein	nein
b)	14 586	ja	ja	nein	nein	nein	nein
c)	67 924	ja	nein	ja	nein	nein	nein
d)	23 456 100	ja	ja	ja	ja	nein	ja
e)	5 925	nein	ja	nein	ja	nein	nein
f)	20 000	ja	nein	ja	ja	nein	ja
g)	72 273	nein	ja	nein	nein	nein	nein
h)	15 656 565	nein	ja	nein	ja	nein	nein

12. a) 72 516; 72 536; 72 556; 72 576 oder 72 596
b) n.l. c) 72 516; 72 546 oder 72 576 d) 72 576

13. a) 756 c) 9 462 e) 78 528

14.* 1 002 und 9 996

15.* a) Die entsprechende Aussage "Jede Zahl, die durch 2 und durch 4 teilbar ist, ist durch 8 teilbar" ist falsch. Ein Gegenbeispiel, etwa 12 : 8, genügt.
b) Jede Zahl, die durch 3 und durch 4 teilbar ist, ist durch 12 teilbar. Alle anderen Zahlen sind nicht durch 12 teilbar.

16.* a) $10^3 = 1\,000$
b) $27\,320 = 27\,000 + 320$; $8 \mid 27 \cdot 1\,000$ und $8 \mid 320$
Daraus folgt: $8 \mid 27\,320$.
$45\,776 = 45\,000 + 776$; $8 \mid 45 \cdot 1\,000$ und $8 \mid 776$, [720+56]
Daraus folgt: $8 \mid 45\,776$.
$73\,641 = 73\,000 + 641$; $8 \mid 73 \cdot 1\,000$ und $8 \nmid 641$, [640+1]
Daraus folgt: $8 \nmid 73\,641$.

17.* 0; 2; 4; 5; 6; 8

Lerneinheit A 8: Gemeinsame Teiler

o 16 a) 1 m; 2 m; 3 m; 6 m b) 1 m

1. a) 1; 3 b) 1 c) 1; 2; 3; 6 d) 1; 3; 5; 15

2. Gemeinsame Teiler 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24
   a) 1; 2; 4 b) 1 c) 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24
   d) 1; 2; 3; 4; 6; 12

3. a) 6 b) 15 c) 7 d) 1 e) 9 f)* 3 g)* 1

4. a) $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; $\frac{9}{10}$; 0; $\frac{3}{2}$; 3 c) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$
   d) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{2}$; 0; $\frac{1}{3}$

5. (23; 47), (19; 58), (17; 82)

6. 1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29

7. a) a = 3; b = 12; c = 2; d = 1; e = 14; f = 28
   b) $T = \{1; 2; 4\}$ c) $T \subset T_{12}$

8.* Bild A 11: $T_m = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $T_n = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$
   m = 12; n = 18

Lerneinheit A 9: Gemeinsame Vielfache

o 17 a) 24 min b) 48 min c) 72 min d) 96 min

o 18 a) 30 b) 20 c) 18
   Das k.g.V. zweier Zahlen a und b ist höchstens $a \cdot b$ und mindestens b, wenn $a \mid b$, bzw. a, wenn $b \mid a$.

1. a) z. B.: 60; 120; 180   d) z. B.: 60; 120; 180
   b) z. B.: 120; 240; 360   e) z. B.: 48; 96; 144
   c) z. B.: 450; 900; 1 350

2. a) 40 b) 18 c) 70 d) 5 e) 60 f) 45 g) 33 h) 84
   i) 315 k) 150 l) 36 m) 84 n) 120 o) 90

3. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung:
   a) 5 und 10, b) 3 und 10, c) 8 und 5.

4. a) 20 b) Die Zahlen 60; 80; 100 genügen der Aufgabe. c)* 20

5. Zum Beispiel:
   a) 3 und 8 b) 3 und 5 c) 17 und 1 d) 10 und 20

6. z. B.: a=9; b=2; c –; d=24; e=2; f=12; g –; h=13; i=20; j –

7. a) wahr
   b) falsch; $27 \nmid 1\,368$ oder: Das Produkt der Zahlen ist kleiner als $30 \cdot 32 = 960$; das k.g.V. kann jedoch nicht größer als das Produkt sein
   c) falsch, denn 36 ist kleiner als 720
   d) falsch; ein g.V. von 135 und 28 muß ein Vielfaches von 5 sein, also auf 0 oder 5 enden.

8. a) $2 \cdot 5^2 \cdot 7$ b) $2 \cdot 3^2 \cdot 13$ c) $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ d) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

9.* a) 5 b) 2; 3 c) 7

10. 100, 200, 300, ... Tabletten (Vielfache von 100)

11. 96 Fahrgäste

12.* Nach 105 s fahren beide Züge wieder durch den Bahnhof. Der Schnellzug hat dann 7 Runden und der Güterzug hat 5 Runden zurückgelegt.

Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

1. Die Kantenlängen müssen 45 mm, 75 mm und 105 mm betragen. Bei diesen Abmessungen könnte man die Schachtel aber nicht mit Würfelzucker der Kantenlänge 10 mm lückenlos füllen.

2. a) teilbar durch 3: 459; 798; 819; 2 736
   durch 6: 798; 2 736
   durch 9: 459; 819; 2 736
   b) teilbar durch 4: 856; 1 028; 9 632
   durch 8: 856; 9 632
   durch 7: 9 632
   c)* teilbar durch 11: 187; 341
   durch 13: 273; 442
   durch 17: 187; 442

3.* a) n = 1; 4; 7 b) Es existiert kein n.

4.* falsche Aussage. Gegenbeispiel: n = 10.
   $10 \cdot 10 + 10 + 11 = 121 = 11 \cdot 11$

5. 41; 43; 45; 47; 49 ungerade Zahlen
41; 43 und 47 sind Primzahlen
49 ist eine Primzahlpotenz, nämlich 7^2

6. b)* (1) x+y ist durch 2 teilbar; x·y ist durch 2, 4 und 8 teilbar

(2) x+y ist durch 2 teilbar; x·y ist durch 2,3,4,6 und 12 teilbar

(3) x+y ist durch 2 teilbar; x·y ist durch 2,3,4,6,8,12 und 24 teilbar

7. a) 99 999 und 10 002 b) 99 999 und 10 008

8.* a) falsch b) wahr
Beweis:
Voraussetzung: a ungerade, b ungerade
Behauptung: a + b gerade
Beweis: $a = 2 \cdot n + 1; \quad b = 2 \cdot m + 1$
$a + b = 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1$
$= 2 \cdot n + 2m + 2 = 2\,(n + m + 1)$
Daraus folgt: $2 \mid a + b$

9. Falsch; 35 ist Vorgänger von 36, einer durch 6 teilbaren Zahl; 35 ist aber keine Primzahl.

10. a) $5 \mid 45$; b) $7 \in N$; c) $\{0,1,2\} \subset N$;
d) $\{6,12,18\} \subset \{0,6,12,18,24,30\}$
e) $12 \in \{4,8,12,16\}$ f) $18 \mid 36$ g) $7 \in \{7,14,21\}$

11. a) Nach dieser Definition wäre 1 eine Primzahl. - Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind und höchstens zwei Teiler haben.
b) Da es unendlich viele Primzahlen gibt, ist eine Aufzählung nicht möglich. Es ist nicht erkennbar, wie diese Folge von Zahlen fortgesetzt werden soll.

B. Gebrochene Zahlen

Lerneinheit B 1: Brüche und gebrochene Zahlen

o 1 a), b), c) und e) sind gleichwertige Angaben.

1. a) Bei 3 Punkten werden mehrere Brüche eingetragen; bei 4 Punkten nur ein Bruch.
b) Bei 2 Punkten werden mehrere Brüche eingetragen; bei 6 Punkten nur ein Bruch.

2. Im Bild B 7 wurde die Einheitsstrecke in einer Länge von 18 mm gezeichnet, so daß gilt:
18 mm $\hat{=}$ 1; 1 mm $\hat{=} \frac{1}{18}$; 4,5 mm $\hat{=} \frac{1}{4}$.
Die Längen von $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ usw. werden vom Schüler als Näherungswerte ermittelt, so daß unterschiedliche Ergebnisse akzeptiert werden müssen. Im Zuge der Aufgabenstellung war vorgesehen:
A $(\frac{1}{2})$, B $(\frac{5}{4})$, C $(\frac{22}{10})$, D$(\frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4})$, E $(4\,\frac{6}{10})$, F $(5\,\frac{3}{4})$
Zu akzeptieren ist aber auch zum Beispiel:
C (36 mm + 4 mm $\hat{=}$ $2 + \frac{4}{18} = 2\,\frac{2}{9}$ oder $\frac{20}{9}$)

4. a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{11}$ e) $\frac{3}{4}$ g)* 1 i)* $\frac{2}{5}$
b) $\frac{8}{7}$ d) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{11}{36}$ h)* 1 k)* $\frac{1}{10}$

5. a) $\frac{32}{48}$ c) n.l. e) n.l. g) $\frac{384}{48}$ i) n.l. l) $\frac{50}{48}$ n) $\frac{44}{48}$
b) $\frac{36}{48}$ d) $\frac{72}{48}$ f) $\frac{54}{48}$ h) $\frac{84}{48}$ k) n.l. m) n.l. o) $\frac{80}{48}$

6. a) n = 3 (10) e) n.l. i) n beliebig
b) n = 2 (8) f) n = 1 (2) k) n = 0 (erweitert)
c) erweitert g) erweitert l) n = 3 (6)
d) n = 5 (25) h) n.l. m) n.l.

7. a) ja; erweitert mit 7
b) ja; gekürzt durch 4
c) nein; $3 \cdot 15 \neq 3 \cdot 9$
d) ja; $6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$
e) ja; $11 \cdot 22 = 121 \cdot 2$
f) nein; $2 \cdot 9 \neq 3 \cdot 5$
g) nein; $9 \cdot 64 \neq 8 \cdot 81$
h) nein; $8 \cdot 22 \neq 12 \cdot 12$
i) ja; $12 \cdot 12 = 9 \cdot 16$
k) nein; $\frac{0}{5} = 0$ und $\frac{3}{15} \neq 0$
l) nein; $7 \cdot 14 \neq 9 \cdot 12$
m) ja; $0 = 0$

(Es sind verschiedene Begründungen möglich. In der Lerneinheit wird sowohl auf das Kürzen und Erweitern als auch auf die Gleichung $m \cdot q = n \cdot p$ als Kriterium für die Gleichheit zweier Brüche $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ orientiert. Darüber hinaus zeigt die Lösung zu k, daß auch andere Möglichkeiten denkbar sind.)

8. a) $\frac{5}{4} = \frac{15}{12} = \frac{55}{44}$ c) $\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{36}{48}$ e) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{99}{132}$
b) $\frac{7}{1} = \frac{21}{3} = \frac{77}{11}$ d) $\frac{5}{1} = \frac{40}{8} = \frac{55}{11}$ f) $\frac{12}{15} = \frac{132}{165}$

9. $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$

10. $\frac{1}{3}$ kann durch einen Bruch mit dem Nenner 6 (a), 12 (c) und 15 (d) dargestellt werden.

11. $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30}$ Für b), d) und e) nicht lösbar.

12. $\frac{5}{7} = \frac{45}{63} = \frac{20}{28}$ Der Nenner 15 (Aufgabe b) kann nicht erreicht werden.

13. a) $\frac{6}{15}$ und $\frac{3}{15}$ e) $\frac{8}{30}$ und $\frac{4}{30}$ i) $\frac{28}{64}$ und $\frac{3}{64}$
b) $\frac{9}{24}$ und $\frac{20}{24}$ f) $\frac{6}{28}$ und $\frac{21}{28}$ k) $\frac{10}{24}$ und $\frac{3}{24}$
c) $\frac{16}{40}$ und $\frac{15}{40}$ g) $\frac{12}{20}$ und $\frac{15}{20}$ l) $\frac{6}{48}$ und $\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$
d) $\frac{7}{63}$ und $\frac{18}{63}$ h) $\frac{56}{77}$ und $\frac{55}{77}$ m) $\frac{196}{210}$ und $\frac{225}{210}$

14. a) $\frac{10}{15}$ und $\frac{3}{15}$ b) $\frac{3}{15}$ und $\frac{9}{15}$ c) n.l. d) n.l.

15. a) $\frac{6}{14}$ und $\frac{49}{14}$ b) $\frac{5}{10}$ und $\frac{1}{10}$ c) $\frac{3}{4}$ und $\frac{14}{4}$ d) $\frac{16}{36}$ und $\frac{15}{36}$

Lerneinheit B 2: Vergleichen und Ordnen gebrochener Zahlen

o 4 a) $\frac{0}{17} < \frac{5}{17} < \frac{13}{17} < \frac{17}{17} < \frac{22}{17}$ b) $\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$ c) $\frac{8}{10} > \frac{3}{5}$

o 5. $8{,}932 < 20{,}009 < 20{,}1 < 21{,}0 < 83{,}2 < 111$

2. a) $\frac{5}{8} > \frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{11} > \frac{5}{12}$ c) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ d) $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$

3. a) $\frac{7}{5} > \frac{19}{15}$ d) $\frac{7}{6} = \frac{14}{12}$ g) $\frac{4}{3} > \frac{7}{9}$ k) $\frac{7}{9} > \frac{12}{18}$
b) $\frac{11}{12} > \frac{8}{9}$ e) $\frac{10}{8} < \frac{7}{4}$ h) $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ l) $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
c) $\frac{7}{3} > \frac{9}{4}$ f) $\frac{9}{15} < \frac{20}{15}$ i) $\frac{9}{5} > \frac{11}{8}$ m) $\frac{8}{12} < \frac{15}{12}$

4. a) $\frac{7}{30} < \frac{25}{100}$ b) $\frac{4}{5} < \frac{95}{100}$ c) $\frac{99}{100} < \frac{119}{120}$ d) $\frac{9}{10} < \frac{91}{100}$

5. a) $1{,}5 > 1{,}49$ b) $0{,}75 < 0{,}76$ c) $0{,}55 > 0{,}54$
d) $0{,}48 = 0{,}48$ e) $0{,}875 < 0{,}9$ f) $1{,}007 < 1{,}0625$

6. a) $\frac{6}{15}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{6}{1}$ b) $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{2}{1}$

7. a) $\frac{0}{8}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{8}{12}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{9}$
c) $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{18}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{17}{16}$; $\frac{7}{6}$ d) $\frac{1}{15}$; 0,6; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{19}{9}$

8. a) 0,0654; 0,078; 0,284; 0,978
b) 2,81; 8,12; 8,21; 12,8; 18,2
c) 0,00184; 0,0481; 0,0814; 0,0841
d) 0,732; 7,325; 73,25; 732

9. a) $\frac{5}{1}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{5}$ b) $\frac{52}{17}$; $\frac{40}{51}$; $\frac{97}{136}$; $\frac{59}{85}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{21}{34}$; $\frac{41}{68}$
c) $\frac{17}{8}$; 1,2; $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{20}$ d) $\frac{7}{1}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{7}{17}$; $\frac{7}{21}$

10. a) 0,54; 0,21; 0,054; 0,021 b) 59,1; 19,5; 9,51; 9,15; 5,91
c) 1,503; 1,305; 1,035; 0,135
d) 987; 9,807; 0,987; 0,9087

11. a) $\frac{23}{5}$ b) $\frac{26}{4}$ c) $\frac{111}{10}$ d) $\frac{362}{34}$ e) $\frac{89}{9}$ f) $\frac{43}{17}$ g) $\frac{41}{12}$

12. a) $3\frac{2}{5} > 1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{6}{7} < 2$ c) $10\frac{1}{3} > 4\frac{1}{2}$

d) $13\frac{1}{2} > 12\frac{1}{3}$ e) $2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{7}$

13. a) 15 l = 15 l c) $\frac{1}{2}$ von 5 l

b)* $\frac{2}{3}$ von 8 km d) $\frac{6}{8}$ von 40 kg

15. wahr: b), d), e), f), g), k)

16.* a) n = 4; 5; 6; 7 c) n = 3; 4; 5; 6 e) n.l.

b) n.l. d) n = 3; 4; 5; 6 f) 7; 8

Lerneinheit B 3: Wieviel Zahlen liegen zwischen 19 und 20?

o 6 a) 19 b) 21

o 7 a) 19,94; z. B.: 19,95; 19,99; 19,999

b) $20\frac{1}{5}$; z. B.: $20\frac{1}{6}$, $20\frac{1}{7}$, $20\frac{1}{100}$

o 8 Zum Beispiel: $\frac{705}{1000}$; $\frac{701}{1000}$; $\frac{7005}{10000}$

1. Zum Beispiel:

a) $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5} < \frac{6}{5} < \frac{8}{5}$, c) $\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{8} < \frac{3}{16} < \frac{2}{8}$

$\frac{8}{10} < \frac{9}{10} < \frac{14}{15}$ n.l. $\frac{7}{10} < \frac{12}{11} < \frac{13}{11}$ $\frac{3}{5} < \frac{4}{4} < \frac{5}{3}$

$0,2 < \frac{1}{4} < 0,3$ $0,7 < 0,75 < 0,8$ $0,1 < 0,2 < \frac{1}{4}$ $0,44 < 0,445 < 0,45$

2. Zum Beispiel folgende Zahlen:

a) $\frac{21}{100}$; $\frac{22}{100}$; $\frac{23}{100}$; $\frac{24}{100}$; $\frac{225}{1000}$

b) $\frac{2}{100}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{6}{100}$

c) 1,41; 1,42; 1,43; 1,44; 1,45

d) 0,201; 0,202; 0,203; 0,204; 0,205

e) $\frac{30}{100}$; $\frac{31}{100}$; $\frac{32}{100}$; $\frac{33}{100}$; $\frac{34}{100}$

f) wie a): 0,21; 0,22; 0,23; 0,24; 0,225

3. Zum Beispiel folgende Zahlen:

a) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$ b) 0,31; 0,32; 0,33 c) $\frac{11}{30}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{13}{30}$

d) $\frac{71}{100}$; $\frac{72}{100}$; $\frac{73}{100}$ e) 0,35; 0,40; 0,45 f) $\frac{1}{100}$; $\frac{2}{100}$; $\frac{3}{100}$

g) 1,411; 1,412; 1,413 h) n.l. i) wie g)

k) 0,21; 0,22; 0,23

4. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{10}{11} < \frac{49}{50} < \frac{75}{76} < \frac{100}{101} < 1$

5.* a) 0,755 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{27}{40}$ d) $\frac{1}{2}$

6.* a) n = 1 001

b) n = 5; n = 6; $\boxed{n = 7}$ führt auf einen Bruch, der zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{4}$ liegt; $\boxed{n = 3}$ führt auf einen Bruch, der zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{8}$ liegt – er erfüllt ebenfalls diese Bedingung.

Lerneinheit B 4: Kleiner, gleich oder größer?

2. b), c) und d) führen auf eine wahre Aussage.

3. a), b), c) und d) führen auf eine wahre Aussage.

4. a) 12; 13; ...; 26 b) $11 < n < 27$; $12 \leqq n \leqq 26$

5. a) n = 0; 1; ...; 9 kleinste Zahl: 0; größte Zahl: 9

b) n = 0; 1; ...; 10 kleinste Zahl: 0; größte Zahl: 10

c) n = 8; 9; ...; 15 kleinste Zahl: 8; größte Zahl: 15

6. $M_1 = \{10; 11; 12; \ldots; 100\}$; $M_2 \subset M_1$

$M_2 = \{10; 11; 12; \ldots; 99\}$; $M_3 \subset M_1$

$M_3 = \{11; 12; 13; \ldots; 100\}$; $M_4 \subset M_1$; $M_4 \subset M_2$; $M_4 \subset M_3$

$M_4 = \{11; 12; 13; \ldots; 99\}$

7. a) $M = \{29; 30; 31\}$ b) 29,5; 30,5

8.* a) $29 < n < 31$ b) $29 \leqq n < 31$ und $29 < n \leqq 31$

c) $29 \leqq n \leqq 31$

Lerneinheit B 5: Addition gebrochener Zahlen

o 11 a) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4}$

o 12 $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18}$

1. a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{47}{28} = 1\frac{19}{28}$ c) $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ d) $\frac{23}{30}$ e) $\frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$
   f) $\frac{13}{9} = 1\frac{4}{9}$ g) $\frac{11}{12}$ h) $\frac{38}{45}$ i) $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ k) $\frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$

2. a) $\frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$ b) wie a) c) $\frac{4}{4} = 1$ d) $\frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$ e) $\frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}$
   f) $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ g) $\frac{25}{20} = 1\frac{1}{4}$ h) $\frac{8}{2} = 4$ i) $\frac{5}{13}$ k) $\frac{26}{35}$

3. a) 1 b) $\frac{23}{24}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{7}{7} = 1$

4. a) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{65}{60} = 1\frac{1}{12}$ c) $\frac{19}{24}$ d) $\frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$ oder 1,55
   e) $\frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$

5. a) 1,43 b) 9,28 c) 2,03 d) 19,73

6. a) $\frac{9}{20} = 0{,}45$ b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ c) $\frac{17}{20} = 0{,}85$ d) $1\frac{1}{4}$
   e) $\frac{9}{20} = 0{,}45$ f) 1 g) 1 h) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$
   i) $\frac{4}{5} = 0{,}8$ k) $\frac{17}{10} = 1\frac{7}{10} = 1{,}7$

7. a) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ b) $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ c) $\frac{29}{35}$ d)* $\frac{32}{102} = \frac{16}{51}$ e) $\frac{391}{200} = 1\frac{191}{200}$

8. a) $x = 1$ c) $y = 2$ e) n.l. g) z. B. $x = 5$; $y = 7$
   b) $x = 0$ d) $x = 2$ f) $y = 0$ h) $\frac{x}{y} < \frac{1}{3}$

9. Zum Beispiel:
   a) (3;10), (6;20), (9;30), ...
   b) n.l. c) (1;2), (2;4), (3;6), ... d) (1;4), (1;6), (3;10), ...

10. a) $b = 0{,}5$ b) $a = 0{,}06$ c) $a = 0{,}004$ d) n.l. e) $a = 0{,}25$
    f) $b = 0$ g) $a = \frac{5}{8}$ h) n.l. i) $a = \frac{2}{3}$

12.* a) $\frac{35 \cdot 296 + 70 \cdot 148}{70 \cdot 296} = \frac{35 \cdot 296 + 35 \cdot (2 \cdot 148)}{70 \cdot 296}$
$= \frac{35 \cdot 296 + 35 \cdot 296}{70 \cdot 296} = 1$

b) $99 + \frac{3}{5} + \frac{46}{90} = 99 + \frac{54 + 46}{90} = 99 + 1\frac{1}{9} = 100\frac{1}{9}$

13. etwa $\frac{3}{5}$

Lerneinheit B 6: Subtraktion gebrochener Zahlen

o 13 a) $\frac{4}{9} - \frac{12}{18}$ (n.l.) b) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4} - 0{,}75 = 0$

1. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{17}{3}$ c) $\frac{18}{2} = 9$ d) n.l. e) 0

2. a) 0,4 b) 0,25 c) 3,3 d) 0,2

3. a) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{7}{24}$ e) $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{6}$ i) $\frac{1}{8}$
   b) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{11}{20}$ f) $\frac{1}{6}$ h) $\frac{3}{20}$ k) n.l.

4. a) $\frac{7}{12}$ c) n.l. e) $\frac{3}{20}$ (oder 0,15) g) $\frac{7}{10}$ (oder 0,7)
   b) $\frac{5}{24}$ d) $\frac{2}{15}$ f) $\frac{59}{20} = 2\frac{19}{20}$ (oder 2,95) h) $\frac{1}{4}$ (oder 0,25)

5.* $u = 13\frac{1}{5}$ cm

6. a) n.l. d) $\frac{27}{60} = \frac{9}{20}$ g) n.l. k) n.l.
   b) $\frac{35}{75} = \frac{7}{15}$ e) n.l. h) $\frac{39}{80}$ l) $\frac{7}{20}$
   c) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ f) 0 i) $\frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$ m) $\frac{9}{221}$

7. a) $m = 5$ d) $m = 2$ g) $n = 1$ k) $m = 0$
   b) $n = 1$ e) $n = 3$ h) z.B. $m = 3$; $n = 1$ l) z.B. $m = 1$; $n=2$
   c) $m = 2$ f) n.l. i) n.l. m) $m = 4$

8. a) $x = \frac{1}{4}$ c)* n.l. e) $x = \frac{5}{4}$ g)* $x = \frac{29}{16}$
   b) $x = 0$ d)* $x = \frac{1}{10} = 0{,}1$ f) $x = \frac{1}{12}$ h)* $x = \frac{1}{6}$

9. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung:

a) $\frac{13}{6} - x > \frac{12}{6}$, d. h., es muß $x < \frac{1}{6}$ gelten; man könnte deshalb $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{11}$ ... auswählen.

b) $\frac{8}{3} - x > \frac{6}{3}$, d. h., es muß $x < \frac{2}{3}$ gelten.

$x = \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}$

c)* $\frac{7}{3} - x > \frac{6}{3}$, d. h., es muß $x < \frac{1}{3}$ gelten.

$x = \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}$

d)* $x - \frac{5}{3} > \frac{6}{3}$, d. h., es muß $x > \frac{11}{3}$ gelten.

$x = \frac{12}{3}; \frac{13}{3}; \frac{14}{3}; \frac{15}{3}; \frac{16}{3}$

e) $x > \frac{142}{31}$; $x = \frac{143}{31}; \frac{144}{31}; \frac{145}{31}; \frac{146}{31}; \frac{147}{31}$

f) $x < \frac{1}{100}$; $x = \frac{1}{101}; \frac{1}{102}; \frac{1}{103}; \frac{1}{104}; \frac{1}{105}$

10.* a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ Die gesuchten Zahlen liegen im Intervall $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$ oder auch $(\frac{4}{18}, \frac{8}{18})$. Somit erfüllungen $\frac{5}{18}$ und $\frac{7}{18}$ die Aufgabenstellung.

b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{100} = \frac{23}{200}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{100} = \frac{27}{200}$; $\boxed{\frac{1}{8} = \frac{25}{200}}$

Somit erfüllen z. B. die Zahlen $\frac{24}{200} = \frac{3}{25}$ und $\frac{26}{200} = \frac{13}{100}$ die Aufgabenstellung.

11. 23,90 m Stoff

Lerneinheit B 7: Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition

o 14 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{11}{12}$ d) $\frac{3}{4}$

1. a) $\frac{37}{60}$ d) $4\frac{1}{4}$ g) $\frac{127}{88} = 1\frac{39}{88}$ k) $\frac{128}{75} = 1\frac{53}{75}$
b) $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$ e) $4\frac{1}{3}$ h) $\frac{22}{10} = 2\frac{1}{5}$ l) $\frac{659}{315} = 2\frac{29}{315}$
c) $\frac{47}{24} = 1\frac{23}{24}$ f) $\frac{111}{70} = 1\frac{41}{70}$ i) $\frac{126}{42} = 3$ m) $\frac{123}{72} = 1\frac{17}{24}$

2.* a) $\frac{455}{120} = \frac{91}{24} = 3\frac{19}{24}$ c) $\frac{140}{36} = \frac{35}{9} = 3\frac{8}{9}$
b) $\frac{244}{60} = \frac{61}{15} = 4\frac{1}{15}$ d) $\frac{633}{168} = \frac{211}{56} = 3\frac{43}{56}$

3. a) 0 b) n.l. c) 0

4. a) 0 b) n.l. c) 0 d) n.l. e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{8}$

5. a) $\frac{2}{5}$ b) 1 c) $\frac{1}{4}$

6. a) $12\frac{1}{5}$ b) 11 c) $\frac{31}{30} = 1\frac{1}{30}$ d) $\frac{81}{8} = 10\frac{1}{8}$

7. a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{7}{8}$

8. a) $x = \frac{1}{7}$ b) $x = \frac{7}{10}$ c) $x = \frac{1}{7}$ d) $x = \frac{1}{4}$ e) $x = \frac{3}{4}$

9.* a) $\frac{5}{6} - (\frac{2}{7} + \frac{3}{42}) = \frac{10}{21}$ c) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$
b) $\frac{3}{4} - (\frac{2}{5} - \frac{1}{3}) = \frac{41}{60}$ d) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6} = \frac{7}{24}$

10. a) $\frac{7}{30}$ b) $\frac{11}{30}$ c) $\frac{101}{180}$ c) $\frac{31}{60}$ e) $\frac{61}{120}$

11. a) 2 b) $\frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ d) $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$ e) $\frac{3}{10}$

12. a) $\frac{43}{14} = 3\frac{1}{14}$ b) $\frac{13}{30}$ c) $\frac{11}{5}$ d) $\frac{7}{24}$ e) n.l.

13. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} < \frac{1}{2} + \frac{7}{4}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} < \frac{3}{5} + \frac{5}{4}$ c) $5\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} > 4\frac{9}{10} - 3\frac{1}{2}$
d) $2\frac{1}{2} + 7\frac{3}{8} > 6\frac{1}{10} + 2\frac{1}{5}$ e) $\frac{7}{3} - \frac{1}{5} < \frac{10}{3} - \frac{1}{5}$ f)* $\frac{8}{9} - \frac{2}{7} > \frac{7}{8} - \frac{4}{7}$

14. a) für alle $x \in Q_+$ b) $x = \frac{3}{5}$ c) $x = \frac{1}{7}$
d) für alle $x \in Q_+$ e) für alle $x \in Q_+$
f) für kein x g) $x = 0$ h) für kein x

Lerneinheit B 8: Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen in verschiedenen Darstellungen

o 15 a) 0,5; 0,75; 0,4; 1,5; 0,125; $\frac{5}{6}$ n.l. (liefert einen unendlichen, periodischen Dezimalbruch – noch nicht behandelt)

b) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{17}{5}$; $\frac{3}{5}$

o 16 $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$; $1\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

o 17 a) $\left[\frac{1}{2} + (0{,}75 - 0{,}25)\right] + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$

b) $(38{,}5 - 7\frac{1}{2}) + (\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) = 31 + \frac{5}{8} = 31\frac{5}{8}$

c) $(121{,}41 - 101{,}07) - (\frac{27}{4} + 0{,}25) = 20{,}34 - 7 = 13{,}34$

d) $(\frac{7}{1} + 5) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 12 - 1 = 11$

1. a) 1,5; 0,8; $\frac{1}{3}$ (n.l.); 2,1; 3,5; 1,6

b) 1,8; 1,7; 10,5; $\frac{7}{9}$ (n.l.); 7,25; 3,75

(n.l. bedeutet hier: nicht lösbar zum gegenwärtigen Zeitpunkt, denn periodische Dezimalbrüche sind noch nicht bekannt)

2. a) $\frac{23}{8} < 3$ c) $\frac{38}{7} < 6$ e) $2{,}4 < \frac{12}{2}$ g) $3{,}2 < \frac{14}{3}$

b) $4 < \frac{32}{5}$ d) $\frac{28}{5} > 4{,}5$ f) $\frac{9}{4} > 2{,}2$ h) $\frac{21}{6} < 3{,}6$

3. a) 6,75 d) 1,05 g) 16,129

b) 1,9 e) n.l. h) 14,135

c) $\frac{3\,091}{3\,000}$ f) 2 i) $\frac{29}{15} = 1\frac{14}{15}$

4. a) 53,6 b) 81,546 c) 0,02 d) n.l.

36,946 9 90,526 98,046

5.* a) $61{,}5 - (2{,}5 - \frac{3}{2}) = 60{,}5$ b) $84{,}7 - 5{,}4 - (7{,}6 - 4{,}6) = 76{,}3$

6. a) 23,625 b) 65 c) 6,75 d) 465,8 e) 22,099 f) 2,715

7.* a) $x = 1$ d) $z = 0{,}85$ g) $m = 3{,}6$

b) $w = 0{,}85$ e) $v = 0$ h) $x = \frac{2}{3}$

c) $y = 0{,}3$ f) $a = 11{,}3$ i) $k = 0$

8.* a) 45,78 b) 456,87 c) 107,76

9. a) $3{,}72 + 0{,}89 + 5{,}21 < 3{,}84 + 0{,}98 + 5{,}64$

b) $21{,}4 + 8{,}3 + 6{,}1 > 20{,}7 + 8{,}1 + 5{,}73$

c) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} > 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$

10. 1. Quadrat

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{7}{18}$
$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{18}$
$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{18}$

2. Quadrat

$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{36}$
$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{14}{36}$
$\frac{11}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{1}{4}$

3. Quadrat

$\frac{13}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$
$\frac{4}{15}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{12}{30}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{7}{30}$

11. a) 11,12 b) 28,02 c) 26,142 d) 47,64 e) 63,12 f) 0,23331

12. a) 1,08 b) n.l. c) 1,543 d) 0,017 e) 4,5809 f) 339,63

13. b) und e) sind wahr 14. 100,13 ha ≈ 100,1 ha

15. 28,39 kg ≈ 28 kg 16. 39,05 m Zaun; 39,05 m ≈ 40 m

17. 4 000 Jahre ist ein Näherungswert, so daß 4 011 Jahre nicht berechtigt ist.

Lerneinheit B 9: Multiplikation gebrochener Zahlen

o 20 Das Quadrat mit 1 m Seitenlänge ist viermal so groß wie das Quadrat mit $\frac{1}{2}$ m Seitenlänge.

o 22

Das Doppelte von 9 ist 18 Das Siebenfache von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$		$2 \cdot 9 = 18$ $7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	
$\frac{1}{3}$ von 3 ist 1	$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$	$\frac{1}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind $\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{2}{7}$
$\frac{2}{3}$ von 3 sind 2	$\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$	$\frac{3}{4}$ von $\frac{8}{7}$ sind $\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$
$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$l ist $\frac{1}{4}$l	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$ von 18 km sind 2 km	$\frac{1}{9} \cdot 18 = 2$

o 23 x	y	$y \gtrless 1$	$x \cdot y$	$x \cdot y < x$	$x \cdot y > x$	$x \cdot y < y$	$x \cdot y > y$
10	$\frac{3}{2}$	$y > 1$	15	nein	ja	nein	ja
10	$\frac{1}{2}$	$y < 1$	5	ja	nein	nein	ja
3	$\frac{1}{4}$	$y < 1$	$\frac{3}{4}$	ja	nein	nein	ja
$\frac{1}{2}$	10	$y > 1$	5	nein	ja	ja	nein
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$y < 1$	$\frac{2}{15}$	ja	nein	ja	nein

o 24 $a < 1$ <u>und</u> $b < 1$

1. a) $\frac{15}{28}$ c) $\frac{28}{15}$ e) $\frac{99}{28}$ g) $\frac{24}{91}$ i) $\frac{10}{3}$ l) $\frac{14}{3}$

   b) $\frac{8}{45}$ d) $\frac{28}{99}$ f) $\frac{7}{30}$ h) $\frac{5}{7}$ k) $\frac{5}{16}$ m) 6

2. a) $\frac{9}{8}$ c) $\frac{15}{28}$ e) $\frac{15}{2}$ g) $\frac{21}{2}$ i) $\frac{15}{2}$

   b) $\frac{8}{15}$ d) $\frac{6}{5}$ f) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{9}{4}$ k) 1

3. a) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{9}$ g) 1 k) $\frac{21}{20}$ n) $\frac{49}{4}$

   b) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{11}$ h) $\frac{5}{12}$ l) $\frac{2}{5}$ o) 1

   c) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{8}{9}$ i) $\frac{1}{2}$ m) $\frac{12}{55}$ p) $\frac{25}{22}$

4. a) 7 b) n.l. c) 4 d) 0 e) 9 f) n.l.

5. a) 7 b) n.l. c) 20

6. a) $x = \frac{7}{5}$ b) Zum Beispiel für $x = \frac{1}{3}$. (Es muß $x < \frac{2}{3}$ gelten.)

   c) $x = 0$ d) $x = 1$

7. a) $x = \frac{4}{7}$ b) $x = 0$ c) $y = 1$ d) n.l.

8. a) $x = \frac{8}{3}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $y = 2$

   d) $x = \frac{5}{3}$ e) $x = \frac{20}{7}$ f) $x = \frac{7}{121}$

9. a) Ja, zum Beispiel $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (y muß stets kleiner als 1 sein).

   b) Nein

10. a) $z < 1$ b) $z < 1$ c) $z < 1$ d)* n.l.

11. a) $m = 0; 1; 2; 3$ $(m < 4)$ b) $m = 0; 1; 2; 3; 4$

    c) $m = 2; 3; 4; \ldots$ $(m \geqq 2)$ d) $m = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$

    e) $m = 0; 1; 2; 3$ f) $m = 0; 1; 2; \ldots; 8$

    g) $m = 6; 7; 8; \ldots$ h)* $m = 5; 6; 7; 8$

12. a) 1 km b) $\frac{11}{6}$ km $= 1\frac{5}{6}$ km $\approx$ 2 km c) 4 km d) $\frac{5}{6}$ km $\approx$ 1 km

13. a) 25 b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{49}{16}$ d) 6,25 e) $\frac{9}{196}$

14. a) 12 kg b) $\frac{6}{4}$ h $= 1\frac{1}{2}$ h (90 min) c) $\frac{12}{5}$ m = 2,4 m

    d) $\frac{12}{10}$ t = 1,2 t e) $\frac{5}{12}$ h = 25 min f) $\frac{18}{5}$ km = 3,6 km g) 6 kg

    h) 60 kg i) 20 M k) 2,5 l l) 1 m m) $\frac{2}{3}$ h (40 min)

15. ein Viertelkreis 16. ein Achtel (ein Sechzehntel)

17. ein Ganzes (das Anderthalbfache)

18.* a) n = 4 b) n = 3 c) n = 42

19.* a) (1;2), (2;4), (3,6), ...

    b) (1;11), (2,22), (3,33), ...

    c) (4;3), (8;6), (12;9), ...

Lerneinheit B 10: Multiplikation gebrochener Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

o 25 337,5 m Stoff

1. $\boxed{143,25}$ 1 432,5; 14 325; 143 250; 14,325; 1,4325; 0,14325

   $\boxed{9,7031}$ 97,031; 970,31; 9 703,1; 0,97031; 0,097031; 0,0097031

2. a) 3,2 c) 0,54 e) 0,08 g) 1,25 i) 0,81

   b) 2,5 d) 0,16 f) 0,127 h) 4,9

3. Vorschlag für Überschläge:

   a) $15 \cdot 0{,}2 = 3$ b) $0{,}4 \cdot 100 = 40$ c) $25 \cdot 4 \cdot 1 = 100$

   d) $0{,}3 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}3$

   (Es muß deutlich gemacht werden, daß es beim Überschlag um die Bestimmung der Größenordnung des Ergebnisses und nicht um das Festigen der Rundungsregeln geht.)

4. a) 0,2146 b) 2,3436 c) 90,0795 d) 0,12596

   e) 43,86 f) 11,684 g) 11,4902 h) 0

   i) 0,0121 k) 2,18254 l) 76 m) 1,3

5. a) (richtiges Ergebnis) Ü.: $7 \cdot 40 = 280$

   b), c) und e) sind gewiß falsch, weil das Ergebnis 3 Dezimalstellen haben muß.

   d) ist gewiß falsch, weil die letzte Dezimalstelle eine 6 sein muß.

6. a) $x = \frac{3}{5}$ b) $y = \frac{7}{4}$ c) $z = 1$ d) $x = 1$

7.* a), b), c) und f) sind wahr

8. a) 151,29 b) 1,0404 c) 0,01 d) 0,0025 e) 177 662,25

9. $25{,}65\ \text{cm}^2 \approx 26\ \text{cm}^2$

10. $A = 19{,}44\ \text{m}^2$

    Zur Berechnung des Bedarfs an Farbe wird man auf $A = 20\ \text{m}^2$ aufrunden; also $20 : 5 = 4$. 4 Dosen Farbe werden benötigt.

11. a) "Auf o,1 cm genau" heißt, daß die Kantenlänge um 0,1 cm differieren kann, also auch 12,5 cm oder 12,7 cm betragen kann: $12{,}5^3\ \text{cm}^3 \leqq V \leqq 12{,}7^3\ \text{cm}^3$.

    V liegt somit zwischen 1 953,125 cm^3 und 2 048,383 cm^3.

    b) $V \approx 2\,000\ \text{cm}^3$

Lerneinheit B 11: Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen

o 27 a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{5}{18}$ c) 5,13

o 28 a) $\frac{7}{3}$ b) 0,27 c) 0 d) 0 e) 0,77

1. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{27}{64}$ d) 0

2. a) 0,08 c) 219,78 e) 0,000001

   b) 1,056 d) 0,008 f) 0,1424

3. a) 0,2 b) 0,8 c) 1,2 d) 0,16 e) 0,125 f) 0,0004

4. Vorschläge für Überschläge

   a) $3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$ b) $0{,}5 \cdot 5 \cdot 10 = 25$ c) $25 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10 = 25$

   d) $5 \cdot \frac{5}{1000} \cdot 10 = 0{,}25$ e) $5 \cdot \frac{5}{100} \cdot 5 = 1{,}25$ f) $\frac{1}{10} \cdot 1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

5. a) $\frac{65}{24}$ b) $\frac{253}{260}$ c) 1 d) 0

6. a) $\frac{25}{12}$ c) $\frac{3}{4}$ e) 0 g) $\frac{59}{12}$

   b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ f) 1 h) $\frac{111}{22}$

7. a) $\frac{17}{20} \cdot \frac{7}{6} = \frac{119}{120}$ c) $\frac{209}{120}$ e) $\frac{139}{60}$

   b) $\frac{76}{60} = \frac{19}{15}$ d) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{4}$

8. a) 0,65 b) 0,6 c) 0,5 d) 0

9.

x	$633 \cdot x + 637 \cdot x$	$583 \cdot x - 283 \cdot x$	$2{,}3 \cdot x + x$
0,1	127	30	0,33
0,5	635	150	1,65
$\frac{2}{3}$	$\frac{2\,540}{3}$	200	2,2
$\frac{4}{5}$	1 016	240	2,64
3,4	4 318	1 020	11,22
$\frac{141}{10}$	17 907	4 230	46,53

10. a) 20,3264 b) 17,9813 c) 72 d) n.l.

11. a) $7{,}6 \cdot (2{,}1 + 3{,}9) = 45{,}6$ b) $\frac{5}{2} \cdot (\frac{7}{3} + \frac{9}{12}) = \frac{185}{24}$

    c) $8{,}2\ (6{,}5 - 3{,}5) = 24{,}6$ d) $\frac{14}{12} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$

    e) $0{,}43 \cdot 0{,}6 = 0{,}258$ f) $2 + \frac{2}{5} = 2\ \frac{2}{5}$ g) $2{,}4 - 0{,}6 + 4{,}5 = 6{,}3$

12.

a	b	a · b
27,4	9,8	268,52
2 · 27,4	9,8	537,04
27,4	2 · 9,8	537,04
3 · 27,4	9,8	805,56
27,4	3 · 9,8	805,56

$2 \cdot 27{,}4 \cdot 9{,}8 = 27{,}4 \cdot 2 \cdot 9{,}8$

$3 \cdot 27{,}4 \cdot 9{,}8 = 27{,}4 \cdot 3 \cdot 9{,}8$

13. a) 62,495
b) $11 \cdot 9{,}2 = 101{,}2$
c) $244{,}75 - 47{,}52 = 197{,}23$

14. a) 5 b) 0 c) n.l.

15. a) $x = 50$ b) $x = 12\frac{1}{2}$

16. a) $x = 0{,}5$ b) $x = 7$ c) $x = 0{,}1$ d) $x = 1$

17. a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{6} < \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6}$, denn $\frac{2}{5} < \frac{4}{3}$

b) $\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{6} > \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{2}$, denn $\frac{10}{3} > \frac{5}{2}$ und $\frac{7}{6} > \frac{7}{9}$

c) $3{,}5 \cdot 0{,}03 < 0{,}03 \cdot 3{,}52$, denn $3{,}5 < 3{,}52$

d) $2{,}6 \cdot 0{,}008 > 2{,}58 \cdot 0{,}0075$, denn $2{,}6 > 2{,}58$ und $0{,}008 > 0{,}0075$

18.* a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{15} - (\frac{1}{5} - \frac{2}{15}) = \frac{2}{15}$ c) n.l.

b) $\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}) \cdot (\frac{7}{6} - \frac{1}{3}) = 0$ d) $0{,}2 \cdot (12 - 3{,}8) = 1{,}64$

Lerneinheit B 12: Division gebrochener Zahlen

o 29 a) 51 b) n.l. c) 4 d) n.l. e) n.l.

o 30 $\frac{3}{4}$ Äpfel

o 31 a) $x = 7$ b) $y = \frac{3}{2}$ c) $t = \frac{1}{3}$ d) n.l.

o 32 $\frac{4}{3}$ ist das Reziproke (der Kehrwert) von $\frac{3}{4}$.

o 34

x	y	x : y	x : y < x	x : y > x
2	3	$\frac{2}{3}$	ja	nein
2	$\frac{1}{2}$	4	nein	ja
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{8}$	nein	ja
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	ja	nein

o 35 $0 < b < 1$

1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{11}$ c) $\frac{11}{2}$ d) $\frac{15}{8}$ e) 0

2. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) 6 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{7}{13}$

3. a) 10 b) 0 c) $\frac{49}{36}$ d) $\frac{12}{7}$ e) 1

4. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ c) 3 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{4}$

5. a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{63}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{35}{2}$ e) 2

6. a) $\frac{56}{45}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{75}{16}$ d) 0

7. a) 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 6; 12; 24; 36; 48; 72; 96; 144
b) 6; 4; 3; $\frac{12}{5}$; $\frac{3}{2}$

8. a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 15$ d) $x = 12$
e) $x = \frac{6}{35}$ f) $x = \frac{10}{11}$ g) $x = \frac{1}{9}$ h) $x = \frac{4}{7}$

9. a) $n = 7$ b) $n = 5$ c)* $n = 6$ d)* n.l.

10. a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = 1$ c) $x = 3$ d) $x > 0$

11.

	$x+y$	$x-y$	$y-x$	$x \cdot y$	$x:y$	$y:x$	y^2	$x:y \lesseqgtr y:x$
a)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	n.l.	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$>$
b)	$\frac{31}{20}$	n.l.	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{16}{25}$	$<$
c)	$\frac{68}{15}$	n.l.	$\frac{2}{15}$	$\frac{77}{15}$	$\frac{33}{35}$	$\frac{35}{33}$	$\frac{49}{9}$	$<$
d)	$\frac{19}{24}$	n.l.	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{25}{144}$	$<$
e)	$\frac{37}{60}$	$\frac{1}{12}$	n.l.	$\frac{7}{75}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{16}{225}$	$>$
f)	$\frac{19}{24}$	$\frac{1}{24}$	n.l.	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{64}$	$>$

12. a) Falsch: für $x = 0$ gibt es kein y.
    b) Richtig: das Reziproke zu jeder Zahl. c) Falsch

13. Folgende Zahlen erfüllen z. B. die Aufgabenstellung:
    a) $x = \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ $(x < 1)$ b) $t = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ $(t < 1)$ c) $z = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ $(z < 1)$
    d) $z = 2; 1$ $(z > 0)$ e) $x = 2; 3$ $(x > 1)$ f) $x = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ $(x < 1)$
    g) $x = 1; 2$ $(x > 0)$ h)* n.l.

14. a) Richtig; z. B. $x = 5$; $y = \frac{1}{2}$ (für y gilt: $0 < y < 1$)
    b) Nein. Es gibt keine natürlichen Zahlen n, m, so daß $\frac{n}{m} > n$ gilt.

Lerneinheit B 13: Bruchstrich und Divisionszeichen

o 36

$32 : 8$	4	$\frac{32}{1} : \frac{8}{1} = \frac{32}{1} \cdot \frac{1}{8} = 4$
$205 : 50$	n.l.	$\frac{205}{1} : \frac{50}{1} = \frac{205}{1} \cdot \frac{1}{50} = \frac{41}{10}$
$7 : 14$	n.l.	$\frac{7}{1} : \frac{14}{1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$
$21 : 3$	7	$\frac{21}{1} : \frac{3}{1} = \frac{21}{1} \cdot \frac{1}{3} = 7$
$\frac{42}{4} : \frac{3}{2}$	n.l.	$\frac{42}{4} : \frac{3}{2} = \frac{42}{4} \cdot \frac{2}{3} = 7$

o 37 $\frac{7}{2} : 4 = \frac{7}{8}$; $7 : \frac{2}{4} = 14$; $\frac{7}{8} < 14$

o 38 a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{31}{10}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{17}{4}$

1. a) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{45}{14}$ e) $\frac{72}{7}$ g) 1 i) $\frac{2}{3}$ l) $\frac{1}{3}$
   b) $\frac{27}{2}$ d) $\frac{16}{3}$ f) $\frac{20}{3}$ h) $\frac{3}{2}$ k) $\frac{1}{4}$ m) $\frac{2}{5}$

2. a) $\frac{21}{32}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{32}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{13}{24}$; n.l.; $\frac{39}{8}$; $\frac{25}{24}$; $\frac{27}{8}$
   b) $\frac{7}{30}$; $\frac{7}{90}$; $\frac{7}{225}$; $\frac{35}{24}$; $\frac{35}{8}$; $\frac{59}{450}$; $\frac{11}{450}$; $\frac{59}{8}$; $\frac{191}{300}$; $\frac{43}{12}$
   c) $\frac{25}{48}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{25}{72}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{35}{36}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{35}{16}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{85}{48}$
   d) $\frac{5}{81}$; $\frac{14}{81}$; $\frac{35}{1458}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{49}{216}$; $\frac{77}{648}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{323}{648}$; $\frac{101}{126}$

3. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{225}{256}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{3}{8}$ f) $\frac{32}{7}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{3}{2}$

4. Karin bezieht sich auf den Fall $a = b$; $a \neq 0$; $b \neq 0$.

5. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{16}{9}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{16}{3}$ g) 12

6. a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{7}{24}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{49}{32}$ e) $\frac{49}{20}$ f) $\frac{49}{4}$ g) 7

7. a) $\frac{24}{8} = 3$ b) $\frac{96}{12} = 8$ c) $\frac{136}{4} = 34$ d) $\frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
   e) $\frac{4}{2} = 2$ f) $\frac{180}{9} = 20$ g) $\frac{120}{12} = 10$ h) $\frac{3600}{12} = 300$
   i) $\frac{7}{35} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ k) $\frac{30}{126} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$

9. a) $\frac{1}{8}$ b) 8 c) $\frac{1}{10}$ d) 10 e) 25 f) $\frac{1}{12}$

10. a) 1 b) 2 c) $\frac{25}{72}$ d) $\frac{6}{5}$ 11. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{9}{49}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{80}{3}$

12. a) $\frac{49}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1120}{27}$ d) 6
    Hinweis: Falls nur Multiplikationszeichen und Divisionszeichen und keine Klammern auftreten, wird von links nach rechts gerechnet.

13. a) $\frac{10}{7}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{3}{2}$

14. a) $\frac{115}{76}$ b) $\frac{3}{5}$ c) 1 d) $\frac{15}{8}$

15. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{12}$ c) n.l. d) $\frac{19}{34}$

Lerneinheit B 14: Division von Dezimalbrüchen

o 39 a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{7}{4}$ c) 2 d) 2

1. 100; 10; 100; 1 000; 1 000; -; 10; -

2. a) 2 b) 2 c) 4 d) 28,5 e) 15

3. a) 0,7 b) 0,1 c) 70 d) 4 e) 0,0075

4. a) 0,3 b) 2,4 c) 2,3 d) 30 e) 300

5. a) 9 b) 2 c) 1,3 d) 0,1

6. a) 45 : 15 = 3 b) 32 : 8 = 4 c) 3 : 0,6 = 5
   d) 320 : 1 = 320

7. a) 1,1 c) 1,3 e) 5,8 g) 208
   b) 90 d) 7,5 f) 30,7 h) 1,6

8. a) 70 b) 7,8 c) 0,22 d) 600 e) 1 590 f) 0,9075
   g) 0,6 h) 10 i) 6,125 k) 61,25 l) 0,06125 m) 61 250

9. a) 4 b) 2,25

10.* a) $\frac{8,4 \cdot 1,2}{12} = \frac{8,4}{10} = 0,84$ b) $\frac{2,5 \cdot 4,7}{10} = 1,175$

c) $\frac{1,4 \cdot 0,29}{1,8 \cdot 58} = \frac{7 \cdot 0,29}{9 \cdot 58} = \frac{7 \cdot 29}{9 \cdot 100 \cdot 58} = \frac{7}{9 \cdot 100 \cdot 2} = \frac{7}{1\,800}$

d) $\frac{2,5 \cdot 48}{12 \cdot 7,5} = \frac{4}{3}$

11. a) 12,5 c) 13,5 e) 0,385 12. a) 250 b) 15
    b) 17,5 d) 18,5 f) 18,7

13. 2,2 $g \cdot cm^{-3}$ Die Schüler können aus der Tabelle im Lehrbuch Physik, Klasse 6 (Titel-Nr. 02 06 07), Seite 46, einen passenden Stoff entnehmen, z. B. Beton.

14. 8,5 $g \cdot cm^{-3}$ (Vgl. Hinweis zur Lösung der Aufgabe 13)

Komplexe Übungen

1. a) m = 45 = 3 · 3 · 5 b) Gemeinsame Teiler sind 1 und 3.
   n = 42 = 2 · 3 · 7

   c) m + n = 87 hat die Teiler 1, 3, 29 und 87.
   m - n = 3 hat die Teiler 1 und 3.

   d) 2; 3; 5; 7 e) z. B. 10 und 18 f) 630

2. a) 9 und 10 b) 10 und 11 c) n.l. d) 37 und 38
   e) 1 und 2 f) 0 und 1 g) 2 und 3

4. a) 3 | 2 724; 3 | 5 724; 3 | 8 724
   9 | 5 724

   b) 3 | 5 136; 3 | 5 436; 3 | 5 736
   9 | 5 436

   c) 3 | 1 110; 3 | 1 113; 3 | 1 116; 3 | 1 119
   9 | 1 116

   d) 3 | 9 108; 3 | 9 138; 3 | 9 168; 3 | 9 198
   9 | 9 108 9 | 9 198

5. 8 = 2 · 2 · 2; 27 = 3 · 3 · 3; 64 = 4 · 4 · 4;
   125 = 5 · 5 · 5; 1 000 000 = 100 · 100 · 100

6. a) 16 cm^2 b) 324 cm^2 c) 6,25 cm^2

7.* a) 10 cm^2 b) 40 cm^2 c) 22,75 cm^2

8. a) $\frac{188}{101}$ b) 2,89 c) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{3}$

9.* a) 11,05 und 15,05 b) 2,3 und 3,1

10. a) 2; 3; 4; ...; 14 b) 12 c) 7; 8; 9; ...; 12
    d) 1 096; 1 097; 1 098; 1 099; 1 100
    e) 0 f) 0; 1; 2; ...; 6

11.* 5 Rechtecke: 1 · 36; 2 · 18; 3 · 12; 4 · 9; 6 · 6
Das Quadrat mit a = 6 cm Seitenlänge ist das Rechteck mit dem kleinsten Umfang.

12.* Wenn u = 20 cm, gilt a + b = 10 cm.
10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5

13. a), b)

$\frac{37}{21}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{21}$
$\frac{1}{7}$	1	$\frac{13}{7}$
$\frac{23}{21}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{21}$

c)

1,25	0,25	1,5
1,25	1	0,75
0,5	1,75	0,75

Wir suchen Zahlen, Größen und Figuren

14. 50 15.* 8,7

16. a) $\gamma = 70{,}8^\circ$ b) $\gamma = 0^\circ$ (kein Dreieck) c) $\frac{5}{4}\alpha = 109{,}2^\circ$
$= 87{,}36^\circ$
$= 21{,}84^\circ$

d) $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ($\triangle$ ABC gleichschenklig und sogar gleichseitig.)

e) $\gamma = 90^\circ$ f)* $\alpha = \beta = 72^\circ$ ($\triangle$ ABC gleichschenklig)
$\beta = 70^\circ$ $\gamma = 36^\circ$

17. a) $0{,}75 + (\frac{4}{7} - \frac{3}{8}) = \frac{53}{56}$ b) $(\frac{7}{3} - 3\frac{1}{2}) - 2{,}5$ n.l.
c) $(3\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}) - 2{,}8 = 6{,}45$ d) $(\frac{4}{5} + 0{,}5) + (\frac{4}{5} - 0{,}5) = 1{,}6$

18. a) $x < \frac{5}{8}$ b) n.l., da $\frac{5}{5} = 1$ und $\frac{7}{4} > 1$ c) $x = 1{,}6$
d) $x = 1$ e) $x = \frac{4}{7}$ f) $x < 1$

Überlege und überprüfe!

20. a) $\frac{5}{2} + u - \frac{1}{3} < 2$; keine der angegebenen Zahlen ist Lösung.
$z + 1{,}7 - \frac{3}{5} < 2{,}1$; Lösungen sind $\frac{2}{3}$ und 0,8.
b) $\frac{5}{2} + u - \frac{1}{3} < 2$; im Bereich Q_+ existieren keine Lösungen.
$z + 1{,}7 - \frac{3}{5} < 2{,}1$ Lösungen sind z. B. $\frac{1}{3}$; 0,1; 0,4.
c)* $\frac{5}{2} + u - \frac{1}{3} < 2$; keine Lösung
$z + 1{,}7 - \frac{3}{5} < 2{,}1$; die kleinste Lösung ist $z = 0$, eine größte Lösung existiert nicht.

21. a) 34,6 cm < l < 34,8 cm
b) Höchstens 21,5 cm - 13,2 cm = 8,3 cm
Mindestens 21,4 cm - 13,3 cm = 8,1 cm

22. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung:
z. B.
a) $x = \frac{9}{16}; \frac{10}{16}; \frac{11}{16}$ b) $x = \frac{29}{48}; \frac{30}{48}; \frac{31}{48}$ c) $x = \frac{29}{36}; \frac{30}{36}; \frac{31}{36}$
d) $x = \frac{31}{8}; \frac{32}{8}; \frac{33}{8}$ e) n.l. f) $x = \frac{61}{24}; \frac{62}{24}; \frac{63}{24}$

23.* a) Ja, wenn $x = 0$ (und $y \in Q$).
b) (1) Zwischen x und y liegt $x + y - \frac{5}{2}$ z. B. im Falle
$x = 1$ und $y = 3$; es gilt $1 + 3 - \frac{5}{2} = 1{,}5$.
(2) Nicht zwischen x und y liegt $x + y - \frac{5}{2}$ z. B. im Falle
$x = 1$ und $y = 2$; es gilt $1 + 2 - \frac{5}{2} = 0{,}5$.

24.* $x - y = y - x$ gilt nur für $x = y$.

25.* a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{12}$ b) $\frac{9}{32} : \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ c) $3\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{4} = 4$

26. 1 27. * a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{9}$; $\frac{2+6}{3+9} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$\frac{4}{6}$ und $\frac{10}{15}$; $\frac{4+10}{6+15} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

28.* Falsch ist d).
Im Falle b) kann in Abhängigkeit von den für m und n eingesetzten Zahlen sowohl eine wahre als auch eine falsche Aussage entstehen.

Freizeit, Haus und Garten

29. a) 12 m^2 b) 3 Büchsen c) nein; $3 \cdot 5$ m < 16,8 m
d) 5,9 m^3 (4,4 m^3) Sand

30. 65 Pilze 31. etwa 10 m^2 32. $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$

33. $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ 34. 7 Flaschen

Aus der Schule

35. Ja, denn $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. 36. Dieter: 4,50 M Fritz: 4,50 M

37. a) Sport-AG: 300 Schüler b) 120 Schüler
Mathematik-AG: 60 Schüler
Bastel-AG: 60 Schüler
Elektronik-AG: 30 Schüler
Handarbeit-AG: 30 Schüler

38. Schule A: 116 Schüler
Schule B: 108 Schüler. $116 > 108$

An Schule A nehmen 8 Schüler mehr als an Schule B an der Mathematikolympiade teil.

Aus alten Mathematikbüchern

39. a) ja b)* $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} < \frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}$

Weitere Hinweise:

a) $\frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{6}{15}}}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \underline{\underline{\frac{6}{15}}}$

$\frac{2}{7} = \underline{\underline{\frac{8}{28}}}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{7+1}{28} = \underline{\underline{\frac{8}{28}}}$

$\frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{18}}}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{3+1}{18} = \underline{\underline{\frac{4}{18}}}$

$\frac{2}{99} = \underline{\underline{\frac{4}{198}}}$; $\frac{1}{66} + \frac{1}{198} = \frac{3+1}{198} = \underline{\underline{\frac{4}{198}}}$

* $\frac{2}{97} = \underline{\underline{\frac{112}{5432}}}$; $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776} = \frac{97+8+7}{5\,432} = \underline{\underline{\frac{112}{5\,432}}}$

Die Hauptnennersuche muß, da das bisher verwendete Schema nicht zur Verfügung steht, durch Probieren erfolgen:

$679 = \boxed{7 \cdot 97}$

776 | 1552 | 2328 | 3104 | 3880 | 4656 | $5\,432 = 7 \cdot \boxed{776}$

679 | 1358 | 2037 | 2716 | 3395 | 4074 | 4753 | $5\,432 = 8 \cdot \boxed{679}$

$5\,432 = \boxed{97} \cdot \boxed{56}$; HN: 5 432

b)* 1. Teil der Gleichung

$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$

114 | 228 | 342 | 456 = 4 · 114

76 | 152 | 228 | 304 | 380 | 456 = 6 · 76

$456 = 24 \cdot 19$; $456 = 38 \cdot 12$

HN: 456

$\frac{2}{19} = \underline{\underline{\frac{48}{456}}}$; $\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} = \frac{38+6+4}{456} = \underline{\underline{\frac{48}{456}}}$

2. Teil der Gleichung

$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220}$ $\boxed{220} = 4 \cdot \boxed{55}$

$220 \cdot \boxed{19} = 4\,180$

12 4 180, aber $12 \mid 3 \cdot 4\,180$; $3 \cdot 4\,180 = 12\,540$

HN: 12 540

$\frac{2}{19} = \underline{\underline{\frac{1\,320}{12\,540}}}$; $\frac{1}{12} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220} = \frac{1\,045 + 228 + 57}{12\,540}$

$= \underline{\underline{\frac{1\,330}{12\,540}}} \neq \frac{1\,320}{12\,540}$

40. 66 Kinder bzw. 70 Kinder

41.* Die Brüder sind 24 Jahre bzw. 15 Jahre alt.

42.* 12 Jahre

43. 52 m^2 (Bei dieser Aufgabe aus einem Lehrbuch von 1957 sollte mit den Schülern über:
- Größenangabe (sinnvollerweise gibt man 1,3 m^2 an) sowie
- Klassenfrequenz damals und heute

diskutiert werden.)

Scherz- und Knobelaufgaben

44.*

Maurer	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
Alter	$\underline{64}$	$\underline{16}$	$\underline{25}$	24
Alter vor 15 Jahren	$\underline{49}$	$\underline{1}$	10	$\underline{9}$

(Quadratzahlen wurden unterstrichen)

$64 + 16 + 25 + 24 = 129$

45. a) ein "Acht-el" b) Ein-kaufs-beu-tel
c) Wachtel - Achtel

Lerneinheit B 15: Endliche und unendliche Dezimalbrüche

o 41 a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{1}{8}$

b) 0,4; 0,5; 0,4; 0,125; 2,5; 1,25; 0,16; 0,005; 2,666...; 0,222...

o 42 $0{,}2 < \frac{2}{9} < 0{,}3$ kleiner als $\frac{1}{10}$

$0{,}22 < \frac{2}{9} < 0{,}23$ kleiner als $\frac{1}{100}$

$0{,}222 < \frac{2}{9} < 0{,}223$ kleiner als $\frac{1}{1000}$

1. a) $\frac{9}{16} = 0{,}5625$ b) $\frac{2}{21}$ nicht c) $\frac{3}{12} = 0{,}25$
d) $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ nicht e) $\frac{1}{512} = 0{,}001953125$ f) $\frac{6}{30} = 0{,}2$
Enthält der gekürzte gemeine Bruch im Nenner eine Zahl, die bei der Primfaktorenzerlegung nur Potenzen von 2 und 5 enthält, so kann der gemeine Bruch in einen endlichen Dezimalbruch umgeformt werden.

2. Vgl. mit Aufg. 1. b) 0,09523809... d) $\frac{18}{27} = 0{,}666...$

3. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{101}{50}$ c) $\frac{99}{100}$ d) $\frac{55}{2}$ e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{8}{5}$ g) $\frac{801}{200}$

4. ($\frac{1}{4}$; 0,25), ($\frac{1}{3}$; 0,333...), ($\frac{4}{9}$; 0,444...), ($\frac{2}{5}$; 0,4),
($\frac{2}{3}$; 0,666...), ($\frac{3}{8}$; 0,375)

5. a) 3,333... b) 1,4 c) 5,833... d) 1,3636...
e) 1,2857142... f) 5 g) 0,4166... h) 2,4 i) 1,5454...

Lerneinheit B 16: Periodische Dezimalbrüche

o 44 a) Periode 3 b) Periode 6 c) Periode 37
d) Periode 5 e) Periode 0348 f) keine Periode

o 45 a) $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ b) $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ c) $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$ d) $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$

1. a) $0{,}\overline{61}$ d) $1{,}\overline{1213}$ e) $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ g) $27{,}4371\overline{437}$

2.

Stelle	4	7	12	15	20
a) $0{,}\overline{123}$	1	1	3	3	2
b) $0{,}12\overline{3}$	3	3	3	3	3
c) $5{,}\overline{34217}$	1	4	4	7	7
d) $0{,}\overline{6}$	6	6	6	6	6
e) 2,4040040004...	0	0	0	4	0
f) 127,1122334411...	2	4	2	4	2
g) 0,6 (endl. Dezimalbr.)					
h) $\frac{2}{3}$	6	6	6	6	6

(Bei den Aufgaben e und f soll eine Gesetzmäßigkeit für die weiteren Stellen angedeutet sein. Diese Andeutung ist jedoch nicht eindeutig festgelegt, denn mit ... wurde ja eigentlich nur angegeben, daß sich der Dezimalbruch an der betreffenden Stelle nicht nur durch Nullen fortsetzt.)

3.* Nicht lösbar, da die zweistellige Periode an der 9. Stelle wieder eine 7 erfordert.

4. a) $0{,}\overline{6} > 0{,}666\underline{\underline{4}}8$ b) $4{,}16\underline{\underline{1}}\ 717 < 4{,}16\underline{\underline{\overline{7}}}$ (Periode $\overline{67}$)
c) $0{,}0\underline{\underline{9}}0\ 090\ ... > 0{,}0\underline{\underline{0}}9$ (Periode $\overline{09}$)
d) n.l. (Es ist nicht erkennbar, welche Dezimalstellen im Bruch 0,234... folgen.)

5. a) 0,8 b) $0{,}\overline{6}$ c) 16 d) $122{,}\overline{72}$ e) $5{,}\overline{142\ 857}$
f) 1,226 562 5 g) $38{,}\overline{36}$ h) $25{,}1\overline{3}$ i) $114{,}9\overline{3}$

6. a) $1{,}69\overline{6}$ c) 4 110 e) 9,7
b) $19{,}0\overline{57}$ d) 29,146 f) 0,5

7. a) 1 192,288   c) 794,112   e) 65,230 954 584
   b) 130,248   d) 177,056   f) 65,005 215 030

8. a) 0,4   b) 1,6   c) 0,2   d) 2,45   e) 9   f) 25

9. a) $\frac{21,68}{5,42} = 4$ b) $\frac{31,60}{6,32} = 5$

   c) 1,219 399 53... + 1,301 470 58... = 2,520 870 21...
   Man könnte dem Schüler eine Stellenzahl als Orientierung vorgeben; angemessen wären zum Beispiel 2 bis 4 Dezimalstellen.

   d) 1,664 694 28... + 2,438 325 99... = 4,103 020 27...

Lerneinheit B 17: Näherungswerte; zuverlässige Ziffern

o 46 a) 741 ≈ 740;   9 245 ≈ 9 250;   47,12 ≈ 50;   9,75 ≈ 10

   b) 3 255; 3 256; 3 257; 3 258; 3 259; 3 260; 3 261; 3 262; 3 263; 3 264
   $3\,255 \leqq x < 3\,265$

o 47 Näherungswerte treten bei a), d) und f) auf.

o 48 0,7; 0,714; 0,714 3; 0,714 29; 0,714 286

1.

	Zahl	Vielfaches von 10	Vielfaches von 100
a)	8 248	8 250 (2)	8 200 (48)
b)	7 473	7 470 (3)	7 400 (27)
c)	1 157	1 160 (3)	1 200 (43)
d)	1 035	1 040 (5)	1 000 (35)
e)	4 144	4 140 (4)	4 100 (44)
f)	4 145	4 150 (5)	4 100 (45)
g)	7 998	8 000 (2)	8 000 (2)

2.

	Zahl	Vielfaches von 10	Vielfaches von 100
a)	464	460 (4)	500 (36)
b)	10 706	10 710 (4)	10 700 (6)
c)	999	1 000 (1)	1 000 (1)
d)	849	850 (1)	800 (49)
e)	851	850 (1)	900 (49)
f)	27 043	27 040 (3)	27 000 (43)
g)	31 450	31 450 (0)	31 500 (50)

3. a) 835; 836; 837; 838; 839; 840; 841; 842; 843; 844
   b) $835 \leqq x < 845$

4. a) 0,6 (0,57)   c) 27,2 (27,2)   e) 7,3 (7,35)   g) 9 (8,99)
   b) 0,5 (0,53)   d) 4,4 (4,45)   f) 6,8 (6,80)

5. a) und c) täuschen eine nicht mögliche Genauigkeit vor.

7. a) 650 kg   b) 8 m^2 c) 8 cm^2 d) 18 cm

8. a) 3 821; 3 822; ...; 3 829   b) 1 170; 1 171; 1 172; ...; 1 180
   c) 2 240; 2 241; ...; 2 250

9. a) $0,205\ m \leqq x \leqq 0,215\ m$ c) $0,21355\ m \leqq x \leqq 0,21365\ m$
   b) $0,2135\ m \leqq x \leqq 0,2145\ m$

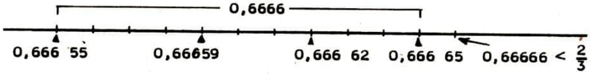
10. a) $0,335 \leqq x \leqq 0,345$ d) $48,5 \leqq x \leqq 49,5$
    b) $0,2045 \leqq x \leqq 0,2055$ e) $48,95 \leqq x \leqq 49,05$
    c) $0,04335 \leqq x \leqq 0,04345$ f) $1\,200,5 \leqq x \leqq 1\,201,5$

11. a) 0,47 (0,474)   c) 1,0 (1,03)   e) 0,0073 (0,00735)
    b) 0,024 (0,0243)   d) 1 300 (1 250)   f) 200 (204)

12. 0,17; 0,167; 0,1667; 0,166 67

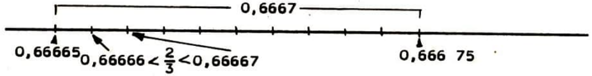
13. 0,6667 ist richtig. Bei Klaus liegt der Bruch $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ nicht in dem durch den Näherungswert 0,666 6 aufgespannten Intervall.

$\boxed{0{,}666\underline{55}} \leqq 0{,}666\,\underline{6} \leqq \boxed{0{,}666\underline{65}} < \frac{2}{3}$.



Bei Peter trifft das wohl zu:

$\boxed{0{,}666\underline{65}} \leqq \frac{2}{3} < 0{,}666\underline{7} \leqq \boxed{0{,}666\underline{75}}$.



14. $\boxed{\frac{3}{8} = 0{,}375}$ 0,38; 0,375; 0,3750 (In diesem Fall darf eine Null angehängt werden, da $\frac{3}{8} = 0{,}375$ ein genauer Wert ist.)

15. a) $5{,}35 \leqq x \leqq 5{,}45$ c) $5{,}3995 \leqq x \leqq 5{,}4005$
    b) $5{,}395 \leqq x \leqq 5{,}405$ d) $4{,}5 \leqq x \leqq 5{,}5$

Lerneinheit B 18: Addition und Subtraktion von Näherungswerten

1. Zwischen 650 M und 980 M

2. a) 139,3 km b) 329 m c) 35,37 kg

3. a) 311 m b) 70,2 kg c) 344 km

4. 116,45 m ≈ 116,5 m; 117 m werden beschafft

5. ja; 10,005 t ≈ 10 t

6. 3 Stellen nach dem Komma sind möglich, also:
   a = 0,905 m, b = 0,756 m, c = 0,424 m, d = 0,523 m

7. mindestens 15,7 cm, höchstens 15,9 cm

8. a) Christian b) 289 m

9. Holzzaun: 23 m
   Maschendrahtzaun: 60 m

Lerneinheit B 19: Multiplikation und Division von Näherungswerten

o 49 Der Näherungswert 723 m^2 hat nicht drei zuverlässige Ziffern. Wären alle Ziffern zuverlässig, so müßte für A gelten:

$722{,}5\ m^2 \leqq A \leqq 723{,}5\ m^2$.

Der wahre Wert für A kann durchaus außerhalb dieses Intervalls liegen, wie das Rechnen mit den Wertschranken zeigte:

$719{,}7875\ m^2 \leqq A \leqq 725{,}2575\ m^2$.

o 50 670 cm^3

o 51 $7{,}333 \cdot 1{,}364 = 10{,}002212 \approx 10{,}00$

3. 2,4 g 4. 6 Büchsen Farbe 5. 167,832 $m^3 \approx 170\ m^3$

6. 413,34 $cm^2 \approx 410\ cm^2$; 571,787 $cm^3 \approx 570\ cm^3$

7. 2,3 $g \cdot cm^{-3}$ (Glas)

8. a) 23 cm; 60 cm; 30 cm; 18 cm; 45 cm; 30 cm; 45 cm

9. 22 Jahre 10. 8,2 $\frac{dt}{ha}$

11. 3 001,868 dt ≈ 3 000 dt 12. 35 Flaschen

13. a) 16,57 b) 48,1 c) 86,1 d) 12,5

14. a) 76,05 b) 10,6 c) 16,7
    118,9 29,6 83,8
    98,7 3,09

Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. 154 2. a) $0{,}43 + (2{,}74 \cdot 0{,}3) = 1{,}252$
   b) $(0{,}73 \cdot 22{,}2) - 4{,}2 = 12{,}006$
   c) $(2{,}35 + 7{,}2) \cdot (21{,}3 - 0{,}7) = 196{,}73$

3. x = 12,35

4.

x	y	$x+y$	$x-y$	$y+x$	$y-x$	$x \cdot y$	$x(x+y)$	$x : y$
$4\frac{1}{5}$	2,6	6,8	1,6	6,8	n.l.	10,92	28,56	$\frac{21}{13}$
5,6	3,1	8,7	$\frac{5}{2}$	8,7	n.l.	17,36	48,72	$\frac{56}{31}$
n.l.	4,2	3,9	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.
9,75	$5\frac{1}{4}$	15	4,5	15	n.l.	51,1875	146,25	$\frac{13}{7}$
$\frac{14}{3}$	n.l.	1,6	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.	n.l.
0,75	0,75	1,5	0	1,5	0	0,5625	1,125	1

5. a) $\frac{50}{27}$ b) $\frac{61}{30}$ c) $\frac{85}{98}$ d) $\frac{39}{16}$ e) $\frac{25}{12}$ f) $\frac{283}{108}$

6. a)* $1,\overline{2} = \frac{11}{9}$; $\frac{11}{9} \cdot \frac{45}{10} = \frac{55}{10} = 5,5$ oder $1,22 \cdot 4,5 = 5,49 \approx 5,5$

b) $1,\overline{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 4} = 3$ oder $1,33 \cdot 2,25 = 2,9925 \approx 2,99$
($1,333 \cdot 2,25 = 2,99925 \approx 3,00$)

c) $3,\overline{6} = \frac{11}{3}$; $\frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 3} = \frac{11}{8} = 1,375$ oder $3,67 \cdot 0,375 \approx 1,38$

d) $21 \cdot 2,\overline{3} = \frac{21 \cdot 7}{3} = 49$ oder $21 \cdot 2,33 = 48,93 \approx 48,9$

e) $37,\overline{7} : 3,7 = 10$ oder $37\frac{7}{9} : 3\frac{7}{9} = \frac{340 \cdot 9}{9 \cdot 34} = 10$

f) $7,\overline{6} \cdot 1,2 = \frac{23 \cdot 12}{3 \cdot 10} = \frac{92}{10} = 9,2$ oder $7,667 \cdot 1,2 = 9,2004 \approx 9,20$

7. $(\frac{5}{2} + \frac{11}{8}) - (\frac{5}{2} - \frac{11}{8}) = \frac{31}{8} - \frac{9}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

8. $(3,75 + \frac{1}{2}) - (3,75 - \frac{1}{2}) = 4,25 - 3,25 = 1$

9. a) $x = 1$ b) $x = 1$ c) $x < 1$
d) $x = 1$ e) $x = \frac{1}{5}$ f) $x = \frac{5}{6}$
g) $0 < x < \frac{3}{4}$ h) $x < \frac{1}{100}$

10. 25 Beutel

11. a) 15 Büchsen b) 37,10 m (Man kauft sicherheitshalber 37,50 m.)
c) 15 oder 16 Rollen d) 138 m^3
(hängt von der Höhe der Fenster bzw. Tür ab)

12. 240 kg 13. 4 mal 14. 3,5 kg

C. Planimetrie

Lerneinheit C 1: Ebene Figuren

o 1 $15 \cdot 10 = 150$ o 2 b) 6

o 3 a) Sterne, Rechtecke, Rhomben
b) Alle Figuren, ausgenommen die Häschen

o 4 3 Symmetrieachsen

2. a) O(0;0), P(2;0), Q(2;4), R(0;4)
b) z. B. (0,5;1), (1;2), (1,5;3)
c) z. B. (2,5;5), (3;6)
d) $\overline{OP} = 1,0$ cm, $\overline{OQ} = 2,2$ cm, $\overline{OR} = 2,0$ cm,
$\overline{PQ} = 2,0$ cm, $\overline{PR} = 2,2$ cm, $\overline{QR} = 1,0$ cm
e) z. B. (1;1) und (3;1) f) z. B. (1;1) und (1;3)

4. α - stumpf, β - spitz, γ - Rechter, δ - stumpf

Lerneinheit C 2: Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

o 5 a) Drehung um M um 60° (um 180°)
b) Drehung um M um 90° (um 270°) oder Spiegelung an der Diagonalen des Quadrats, die die gemeinsame Seite der Figuren 1 und 2 enthält (die die gemeinsame Seite der Figuren 1 und 4 enthält).
c) Verschiebung $\overrightarrow{CD}$ (Verschiebung $\overrightarrow{CG}$)
d) Spiegelung an g (an h oder Spiegelung an g und dann Verschiebung um 7 Einheiten nach rechts)

o 7 a)

Punkt	Bildpunkt
P(7;4)	Q(10;2)
Q(10;2)	Q'(13;0)
M(3;4)	M'(6;2)
S(5;8)	S'(8;6)
A(1;3)	A'(4;1)
B(2;3)	B'(5;1)
C(2;1)	-
D(3;1)	-
E(5;5)	E'(8;3)
F(3;7)	F'(6;5)

b)

Punkt	Bildpunkt
P(7;4)	M(3;4)
Q(10;2)	Q'(0;2)
M(3;4)	M'(7;4)
S(2;6)	S'(8;6)
A(1;3)	A'(9;3)
B(2;3)	B'(8;3)
C(2;1)	C'(8;1)
D(3;1)	D'(7;1)
E(5;5)	E'(5;5)
F(3;7)	F'(7;7)

c)

Punkt	Bildpunkt
P(7;4)	P'(3;8)
Q(10;2)	Q'(5;11)
M(3;4)	M'(3;4)
-	S'(8;6)
A(1;3)	A'(4;2)
B(2;3)	B'(4;3)
C(2;1)	C'(6;3)
D(3;1)	D'(6;4)
E(5;5)	E'(2;6)
F(3;7)	F'(0;4)

o 8 a) 1 cm und 3 cm; 1 cm und 4 cm; 2 cm und 3 cm

b) Zu u = 12 cm z. B. A = 5 cm^2 (oder 8 cm^2 oder 9 cm^2)

c) Zu u = 16 cm z. B. A = 7 cm^2 (oder 12 cm^2 oder 15 cm^2 oder 16 cm^2)

o 9 a) ja b) nein c) Spiegelungen und Drehungen haben ebenfalls diese Eigenschaften.

o 10 Zum Beispiel haben B und C den gleichen Bildpunkt.

1. Bild C 16

	a	b	c
A(4;1)	A'(6;1)	A'(6;5)	A'(5;6)
B(4;4)	B'(6;4)	B'(6;8)	B'(2;6)
C(2;4)	C'(8;4)	C'(4;8)	C'(2;4)
D(2;2)	D'(8;2)	D'(4;6)	D'(4;4)
E(1;2)	E'(9;2)	E'(3;6)	E'(4;3)
F(1;1)	F'(9;1)	F'(3;5)	F'(5;3)

2.

	a	b	c
A(2;1)	A'(5;6)	A'(14;1)	A'(10;3)
B(4;2)	B'(7;7)	B'(12;2)	B'(9;5)
C(5;6)	C'(8;11)	C'(11;6)	C'(5;6)
D(1;7)	D'(4;12)	D'(15;7)	D'(4;2)

3. a) Spiegelung b) Verschiebung
c) Drehung (Drehzentrum (4;3), Drehwinkel 180°)

Lerneinheit C 3: Eigenschaften der Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

o 11 Ute konnte davon ausgehen, daß bei einer Verschiebung das Bild g' einer Geraden g zu g parallel ist.

o 12 Verschiebungen: (a), (b), (c), (d), (e), (f)
Spiegelungen und Drehungen: (a), (b), (d), (e), (f)
Gemeinsame Eigenschaften: (a), (b), (d), (e), (f)

1. a) Verschiebung $\overrightarrow{AA'}$ b) nein
c) Spiegelung an der Geraden durch den Punkt (5,5;0) parallel zur y-Achse
d) Drehung um den Punkt C mit dem Drehwinkel 270° oder Spiegelung an der Geraden durch C und (9;0).

4. Versch.: (1), (2), (3); Spieg.: (1), (2), (3), (4); Dreh.: (1), (2), (4)
Gemeinsame Eigenschaften: (1) und (2)

5. A"(9;8); B"(11;6); C"(8;5)

Lerneinheit C 4: Nacheinanderausführung von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen

o 13 a) Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ b) Drehung um den Schnittpunkt von k und m oder Spiegelung an k und Spiegelung an m.
c) Verschiebung $\overrightarrow{AG}$ dann Spiegelung an m.

o 14 a) A" = U; B" = T; C" = S; D" = R b) A" = Q; B" = P; C" = O; D" = N
Die Nacheinanderausführung dieser Bewegungen ist nicht kommutativ.

1. a)

A	B	C	D
H	G	F	E

Verschiebung $\overrightarrow{AH}$ und Spiegelung an HG

b)

A	B	C
E	D	F

Verschiebung $\overrightarrow{AE}$ und Drehung um E um 270°

c)

A	B	C	D	E	F
I	H	G	L	K	J

Spiegelung an AB, Verschiebung $\overrightarrow{BH}$ und Drehung um H um 270°

2. a) A"(7;3), B"(5;3), C"(7;6) b) A"(11;3), B"(9;3), C"(11;6)

4.*a) Spiegelung an g, Drehung um P um 90^0

b) Drehung um M um 270^0, Verschiebung $\overrightarrow{AK}$, Spiegelung an g

Lerneinheit C 5: Bewegung und Kongruenz von Figuren

o 16 a) Fig. 1 ≅ Fig. 7 (Spiegelung an g); Fig. 1 ≅ Fig. 8 (Spiegelung an h, dann an m); Fig. 2 ≅ Fig. 7 (Drehung um B um 180^0)

b) Fig. 1 ≅ Fig. 4 ($\overrightarrow{AN}$; Drehung um N um 90^0); Fig. 2 ≅ Fig. 3 (Spiegelung); Fig. 2 ≅ Fig. 7 ($\overrightarrow{GZ}$); Fig. 5 ≅ Fig. 6 ($\overrightarrow{PS}$; Drehung um S um 90^0)

1. 1 → 2 (Spiegelung an g), 1 → 3 ($\overrightarrow{AC}$), 1 → 4 (Verschieb.),
1 → 5 (Drehung um A um 180^0), 1 → 6 ($\overrightarrow{AC}$ und Spiegelung an m)

3. a) Dreh. um B, 180^0 b) $\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{CD}$ und Dreh. um D, 180^0 d) Spieg.

4. a) Fig. 2 ≅ Fig. 1 b) $\overrightarrow{AM}$ und Drehung um M um 270^0

c) $\overrightarrow{EO}$ und Drehung um O um 90^0 (oder $\overrightarrow{EO}$ und Spiegelung an PO)

Lerneinheit C 6: Eigenschaften von Bewegungen

o 17 a) ja b) nein (nicht für Spiegelung und Drehung)

o 19 Trapez e

o 20 Für gleichseitige Vierecke, Fünfecke ... gilt das nicht. Sie brauchen nämlich nicht - wie gleichseitige Dreiecke - auch "gleichwinklig" (und damit "regelmäßig") zu sein.

2. $\overline{AB} \cong \overline{KJ}$

4. Stets ist g' ∥ g; es gibt Geraden mit g' = g.

5. a) Zueinander senkrechte Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ haben als Bilder Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{C'D'}$. Weil AB ⊥ CD gilt auch A'B' ⊥ C'D', also $\overline{A'B'} \perp \overline{C'D'}$.

b) Weil M Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, gilt $\overline{MA} \perp \overline{MB}$. Jede Strecke hat als Bild eine gleich lange Strecke. Deshalb gilt $\overline{M'A'} = \overline{M'B'}$, also ist M' Mittelpunkt von $\overline{A'B'}$. g ⊥ AB, somit auch g' ⊥ A'B'. Also ist g' Mittelsenkrechte von $\overline{A'B'}$.

Lerneinheit C 7: Scheitelwinkel und Nebenwinkel

o 22 a) α und γ; β und δ

b) α und β; α und δ; γ und β; γ und δ

o 23 Drehung um 180^0 um den gemeinsamen Scheitelpunkt

o 24 a) einmal b) Die Aussage ist falsch.

o 25 a) Wenn x + y = 5, so x = 3 und y = 2; Aussage ist falsch.

b) Wenn $\alpha + \beta = 180^0$, so $\alpha = 90^0$ und $\beta = 90^0$; Aussage ist falsch.

c) Wenn 2 | a, so 4 | a; Aussage ist falsch.

d) Wenn die betreffenden Winkel wie im Bild C 39 liegen und $\alpha \cong \beta$ gilt, so ist α ein Rechter - Aussage ist wahr.

1. $\alpha + \beta \neq 180^0$ bzw. γ und δ haben keinen gemeinsamen Scheitelpunkt.

2. a) spitz b) stumpf c) Rechter

3. Die Winkel seien α und β.
a) $\alpha = 30^0$ $\beta = 150^0$ b) $\alpha = 36^0$ $\beta = 144^0$

6.

28^0	74^0	90^0	115^0
152^0	106^0	90^0	65^0

7.

65^0	110^0	135^0	160^0
115^0	70^0	45^0	20^0
65^0	110^0	135^0	160^0
115^0	70^0	45^0	20^0

9. Wenn $\alpha \cong \gamma$, so sind α und γ Scheitelwinkel. Die Aussage ist falsch.

Lerneinheit C 8: Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen

o 26 Bild C 45 a: zweimal; Bild C45 b: einmal

o 28 b) $\gamma = 80^0$. Der Scheitelwinkel zu γ sei δ. Dann gilt nach dem Stufenwinkelsatz $\delta = \gamma = 80^0$.

o 30 a) $g \parallel h$ nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes, denn $\alpha \cong \beta$ laut Voraussetzung und α und β sind Wechselwinkel.

b) $r \parallel s$. Wenn γ Nebenwinkel von β, so $\gamma = 110^\circ$. γ ist entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel zu α. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes bzw. Wechselwinkelsatzes gilt $r \parallel s$.

4. a) falsch b) falsch c) wahr d) falsch

5.* $\beta = 1{,}5 \cdot \gamma$
$\beta + \gamma = 180^\circ$ (Nebenwinkelsatz)

Daraus folgt $1{,}5\gamma + \gamma = 180^\circ$
$2{,}5 \cdot \gamma = 180^\circ$
$\gamma = \frac{1800^\circ}{25} = 72^\circ$

Da $\alpha = \gamma = 72^\circ$, liegen nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen vor: $g \parallel h$.

6. $\beta - 20^\circ + \beta = 180^\circ$
$2 \cdot \beta = 200^\circ$
$= 100^\circ$

Da $\alpha = \beta = 100^\circ$, liegen nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen vor: $a \parallel b$.

7. Die Behauptung folgt aus dem Nebenwinkelsatz und der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

8. a) $\alpha = 45^\circ$, denn es sind kongruente Wechselwinkel (110°) gegeben, so daß die Parallelität der beiden Geraden, an denen α und der Winkel mit der Größe 135° liegen, gesichert ist.

b) $\alpha = 110^\circ$ c) $\alpha = 60^\circ$

Lerneinheit C 9: Einteilung der Dreiecke

1. a) spitzwinklig: 2,3,4,6,7
rechtwinklig: 5
stumpfwinklig: 1,8

b) unregelmäßig: 5,8
gleichseitig: 4
gleichschenklig: 1,2,3,6,7

3. a) w b) f c) f d) f e) w

4.*

ja	ja	ja
ja	ja	nein
ja	ja	nein

5. Das große Dreieck ist ebenfalls gleichseitig, seine Seiten sind doppelt so lang wie die des Ausgangsdreiecks.

7.* a) 12 8. Die Aussage ist wahr. 9.* Das ist nicht möglich.

Lerneinheit C 10: Sätze über die Winkel eines Dreiecks

o 33 Die Leiter reicht bei $\alpha = 70^\circ$ am höchsten ($\beta = 20^\circ$).
Bei $50^\circ \leqq \alpha \leqq 70^\circ$ kann β nicht zwischen 50° und 70° liegen.

o 35 Um die Größe eines Außenwinkels zu erhalten, muß zur Größe eines nichtanliegenen Innenwinkels die des anderen nichtanliegenden Innenwinkels addiert werden. Deshalb ist der Außenwinkel größer.

1. a) $\gamma = 48^\circ$ b) $\alpha = 48^\circ$ c) $\beta = 47^\circ$

2. a) $\beta = \gamma = 53^\circ$ b) $\beta = 96^\circ$; $\gamma = 48^\circ$ c) z.B. $\gamma = 90^\circ$ und z.B. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 50^\circ$

3. a) $\alpha_1 = 138^\circ$, $\beta_1 = 125^\circ$, $\gamma_1 = 97^\circ$
b) $\alpha_1 = 136^\circ$, $\beta_1 = 103^\circ$, $\gamma_1 = 121^\circ$
c) $\alpha_1 = 159^\circ$, $\beta_1 = 67^\circ$, $\gamma_1 = 134^\circ$

4. a) 39° und 51°
b) 53° und 37°

5. $\sphericalangle$ BMD $= 85^\circ$

6.* $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle SRT = \varepsilon$ (Scheitelwinkelsatz)
$\alpha + \delta + \varepsilon = \beta + \gamma + \varepsilon = 180^\circ$ (Innenwinkelsatz)
$\alpha + \delta = \beta + \gamma$ und wegen $\delta = \alpha$ folgt $\alpha = \beta$

7. a) $\alpha = 27^\circ$, $\beta = 107^\circ$, $\boxed{\gamma = 46^\circ}$, $\alpha_1 = 153^\circ$, $\boxed{\beta_1 = 73^\circ}$, $\gamma_1 = 134^\circ$
b) $\alpha = 99^\circ$, $\boxed{\beta = 38^\circ}$, $\gamma = 43^\circ$, $\boxed{\alpha_1 = 81^\circ}$, $\beta_1 = 142^\circ$, $\gamma_1 = 137^\circ$
c) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\boxed{\gamma = 55^\circ}$, $\boxed{\alpha_1 = 110^\circ}$, $\beta_1 = 125^\circ$, $\gamma_1 = 125^\circ$

8. a) Beide Winkel sind stumpf, da es sich um ein spitzwinkliges Dreieck handelt.
b) Handelt es sich um ein spitzwinkliges Dreieck, so sind auch die anderen beiden Außenwinkel stumpf.
Handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck, so ist der zweite Außenwinkel stumpf und der dritte ein Rechter.
Handelt es sich um ein stumpfwinkliges Dreieck, so ist der zweite Außenwinkel spitz und der dritte Außenwinkel stumpf.

Lerneinheit C 11: Gleichschenklige Dreiecke

o 37 $\alpha_1 = \alpha_2 = 15^\circ$, $\beta_1 = \beta_2 = 125^\circ$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$

o 38 Nach dem Basiswinkelsatz sind die Innenwinkel alle gleich groß. Folglich ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz: $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

1. a) ja b) nur stumpf
2. Falls $\gamma = 90^\circ$, so $\gamma_1 = 90^\circ$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 135^\circ$.
3. a) 28°, 76°, 76° b) 122°, 29°, 29°
   c) 68°, 68°, 44° d) 36°, 36°, 108°
4. Mit Hilfe der Symmetrie begründen oder mit Hilfe des Basiswinkelsatzes unter Hinzuziehung des Nebenwinkelsatzes.
5.* (1) 30°, 30°, 120° (2) 30°, 75°, 75°
6. Rechtwinklige Teildreiecke mit 90°, 60°, 30°
7. a) 80° b) 120° c) 40° d) 90°
   (b) ist nicht geeignet, wegen $4 \cdot 120^\circ = 480^\circ$ (vgl. Bild C 78)
   (d) ist nicht geeignet, wegen $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$

Lerneinheit C 12: Seiten - Winkel - Beziehungen

o 39 a) Nach Satz C 14 folgt die Behauptung.
b) Nach Satz C 14 folgt, daß jede von $\overline{PC}$ verschiedene Strecke länger als $\overline{PC}$ ist.

1. a) 50°, 50°, 80° 2. $\beta > \gamma$
3. a) $\gamma = 40^\circ$; $b > c > a$ b) $\alpha = \beta$, $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$
4. a) 1. Möglichkeit:
   $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 90^\circ$; $a = b < c$
   2. Möglichkeit:
   $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 67{,}5^\circ$; $\gamma = 67{,}5^\circ$; $b = c > a$
   b) Winkel an der Spitze: 90°; Innenwinkelsatz: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$;
   Basiswinkelsatz: $90^\circ : 2 = 45^\circ$

5. gleichseitiges Dreieck (Außenwinkel 120° groß)
6. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, so ist es ein gleichschenkliges Dreieck (so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang) - wahre Aussage.
7. a) ja ($\alpha > \beta > \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)
   b) nein ($\alpha < \beta$)
   c) ja ($\alpha > \beta > \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)
   d) nein ($\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$)
   e) ja ($\alpha > \beta > \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)
9. a) wahr b) falsch (Gegenbeispiel: ein gleichseitiges Dreieck werde durch eine Höhe h_c in zwei Teildreiecke zerlegt; dann ist die Höhe gegenüber dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ nicht doppelt so groß wie die halbe Dreiecksseite gegenüber dem Winkel $\frac{\gamma}{2} = 30^\circ$.)

Lerneinheit C 13: Dreiecksungleichung

o 40 a) $\overline{AB} + \overline{BC}$; denn $\overline{AB} + \overline{BC} < \overline{AD} + \overline{DC}$
b) von Arlsheim nach Carlsburg

1. a) ja b) nein, denn $a + c = b$ c) ja d) nein, denn $a + c < b$
3. $c = 6$ cm, 7 cm, 8 cm
4.* $a < c < 3 \cdot a$ (c muß länger als a sein und kürzer als a und b zusammen, d. h. kürzer als $3 \cdot a$.)

Lerneinheit C 14: Ausführbarkeit von Konstruktionen

o 42 c) nicht ausführbar

1. a) ausführbar - nicht eindeutig ausführbar
   b) nicht ausführbar (Winkelsumme 170°)
   c) ausführbar - nicht eindeutig ausführbar
   d) ausführbar - nicht eindeutig ausführbar
   e) eindeutig ausführbar
3. Zum Beispiel a) Zeichne ein Quadrat ABCD mit $\alpha = 90^\circ$!
   b) Zeichne ein Quadrat ABCD mit $a = 3$ cm!
   c) Zeichne ein Quadrat ABCD mit $\overline{AB} = 3$ cm und $\overline{AC} = 2$ cm!

Lerneinheit C 15: Eigenschaften zueinander kongruenter Dreiecke

o 44 F muß als Scheitelpunkt des stumpfen Winkels im Dreieck DEF das Bild von A sein. C liegt im Dreieck ABC der kürzeren Seite gegenüber, also muß E das Bild von C sein.

Original	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\sphericalangle$ BAC	$\sphericalangle$ ABC	$\sphericalangle$ ACB
Bild	$\overline{DF}$	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\sphericalangle$ DFE	$\sphericalangle$ EDF	$\sphericalangle$ DEF

usw.

o 45

Original	D	E	F	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{DF}$	$\sphericalangle$ EDF	$\sphericalangle$ DEF	$\sphericalangle$ DFE
Bild	B	C	A	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\sphericalangle$ ABC	$\sphericalangle$ ACB	$\sphericalangle$ BAC

1. a)

Original	A	B	C	
1. Bewegung	E	F	D	$\longrightarrow$ Verschiebung
2. Bewegung	F	E	D	$\longrightarrow$ Spiegelung

2. Eckpunkte: A–H, B–G, C–E, D–F
Seiten: $\overline{AB}$–$\overline{GH}$, $\overline{BC}$–$\overline{EG}$, $\overline{CD}$–$\overline{EF}$, $\overline{AD}$–$\overline{FH}$
Winkel: $\sphericalangle$ BAD – $\sphericalangle$ FHG, $\sphericalangle$ ABC – $\sphericalangle$ EGH
$\sphericalangle$ BCD – $\sphericalangle$ FEG, $\sphericalangle$ ADC – $\sphericalangle$ EFH

3. $a = 2{,}5$ cm; $b = 4{,}5$ cm; $c = 3{,}8$ cm; $\alpha = 34^\circ$; $\gamma = 56^\circ$ ($\beta = 90^\circ$)

4. In $\triangle$ NOP ist der größte Winkel 92° groß, in $\triangle$ QRS aber 95°; deshalb können diese Winkel nicht einander entsprechen.

6. $\overline{AB} = 2{,}2$ cm, $\overline{BC} = 1{,}7$ cm, $\overline{CD} = 2{,}4$ cm, $\overline{AD} = 1{,}0$ cm
$\sphericalangle$ BAD $= 108^\circ$, $\sphericalangle$ ABC $= 82^\circ$, $\sphericalangle$ BCD $= 80^\circ$ ($\sphericalangle$ ADC $= 90^\circ$)

Lerneinheit C 16: Der Kongruenzsatz (s w s)

o 47b) Das Dreieck ist eindeutig konstruierbar

1. Eindeutige Konstruierbarkeit jeweils nach s w s.
a) $\alpha = 59^\circ$, $\gamma = 48^\circ$; spitzwinklig ($b = 6{,}3$ cm)
b) $\beta = 49^\circ$, $\gamma = 46^\circ$; spitzwinklig ($a = 9{,}5$ cm)
c) $\alpha = 37^\circ$; $\beta = 53^\circ$; rechtwinklig ($c = 7{,}5$ cm)
d) $\alpha = 55^\circ$, $\gamma = 35^\circ$; rechtwinklig ($b = 9{,}3$ cm)

2. Eindeutige Konstruierbarkeit (s w s); $\overline{AB} = 14$ m

3. Eindeutige Konstruierbarkeit nach Kongruenzsatz (s w s).
$\overline{AB} = 4{,}0$ cm; $\overline{BC} = 5{,}6$ cm; $\overline{AC} = 7{,}8$ cm
$\sphericalangle$ BAC $= \alpha = 29^\circ$; $\sphericalangle$ ABC $= \beta = 107^\circ$; $\sphericalangle$ ACB $= \gamma = 44^\circ$

4. 1. Ich zeichne die Strecke $\overline{AC} = b$.
2. Ich trage an den Strahl CA den Winkel γ an.
3. Ich trage auf dem anderen (dem freien) Schenkel von γ die Strecke a ab und erhalte B.
4. Ich verbinde A und B miteinander.
(Das Dreieck ABC hat die verlangten Eigenschaften)

Lerneinheit C 17: Weitere Kongruenzsätze

o 48 a) Man müßte im zweiten Schritt auf einem der beiden Schenkel vom Scheitelpunkt aus c abtragen.
b) Nein, denn es wäre $\alpha + \beta = 187^\circ$ (Widerspruch zum Innenwinkelsatz).

o 49 ja; Begründung beispielsweise:
$\sphericalangle$ ABC und $\sphericalangle$ QPR sind gleich groß
(Winkelsummensatz; Größe beträgt $180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$).
Also stimmen die Dreiecke ABC und PQR in einer Seite und den dieser Seite anliegenden Winkeln überein
($\overline{AB} \cong \overline{QR}$, $\sphericalangle$ CAB $\cong$ $\sphericalangle$ PQR, $\sphericalangle$ ABC $\cong$ $\sphericalangle$ QPR).
Sie sind also einander kongruent nach (w s w).

o 50 c) Die Dreiecksungleichung muß erfüllt sein.

1. a) eindeutig konstruierbar (wsw); $\alpha = 60^\circ$; $b = 5{,}4$ cm; $c = 5{,}0$ cm
b) eindeutig konstruierbar (wsw); $\gamma = 40^\circ$; $b = 2{,}7$ cm; $c = 2{,}3$ cm
c) eindeutig konstruierbar (sss); $\alpha = 46^\circ$; $\beta = 76^\circ$; $\gamma = 58^\circ$
d) eindeutig konstruierbar (sss); $\alpha = 59^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 78^\circ$

4. a) Nein, da $\alpha + \beta > 180^\circ$.
b) Ja, eindeutig, nach (wsw).
c) Ja, eindeutig, nach (sss).
d) Nein, da $\beta + \gamma > 180^\circ$.
e) Nein, da $a + b < c$.
f) Nein, da $a + b < c$.
g) Nein, da $a < b$, β aber nicht $>$ als α sein kann (α ist stumpfer Winkel).
h) Nein, da $\beta + \gamma > 180^\circ$.

5. a) Nicht eindeutig, da $b > c$ und γ somit der kleineren Seite gegenüberliegt.
b) Eindeutig nach (SsW)
c) Eindeutig nach (SsW)
d) Nicht eindeutig, da $a < b$ und α somit der kleineren Seite gegenüberliegt.

6.* $\triangle ABC \cong \triangle NOP$ (Kongruenzsatz SsW)
$\triangle ABC \cong \triangle GHJ$ (Die Verlängerung von $\overline{BC}$ über C hinaus um 3 cm ergibt den Punkt T. $\triangle ABC \cong \triangle ACT$ wegen sws. Somit ist $\triangle ABT$ gleichseitig und $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Ferner gilt $\sphericalangle BAC = 30^\circ$. Aufgrund des Kongruenzsatzes sws folgt $\triangle ABC \cong \triangle GHJ$.)
Daraus folgt dann weiter: $\triangle ABC \cong \triangle KLM$.
Ergebnis: $\triangle ABC \cong \triangle GHJ \cong \triangle KLM \cong \triangle NOP$

Lerneinheit C 18: Erste Anwendungen der Kongruenzsätze

o 53 Kongruenzsatz (sss)

o 54 Mit dem Kongruenzsatz (sws) begründen.

o 55 a) Bezeichnet man den Fußpunkt des Lotes von A auf g mit P, den Fußpunkt des Lotes von B auf g mit Q, so gilt $\triangle APQ \cong \triangle BQA$ nach (wsw). Denn $\overline{AQ}$ ist beiden Dreiecken gemeinsam, und $\sphericalangle BAQ \cong \sphericalangle PQA$ wie auch $\sphericalangle QAP \cong \sphericalangle AQB$ folgt aus dem Wechselwinkelsatz. (Eigentlich müßte erst mittels der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes auf die Parallelität von AP und BQ geschlossen werden.)
b) Zwei Parallelen zu g im Abstand d (jeweils eine auf jeder Seite von g).

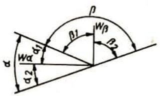
o 56 Kongruenzsatz (wsw) - und Winkelsummensatz

1. a) $\overline{AB} = \overline{PQ}$ folgt nach dem Kongruenzsatz (sws), denn die entsprechenden Dreiecke stimmen im rechten Winkel und in den Seitenlängen 4 Einheiten bzw. 3 Einheiten überein.
b) Umkehrung des Stufenwinkelsatzes

2. Die Stelle ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ mit der Uferlinie.

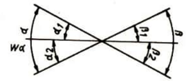
Lerneinheit C 19: Geometrische Grundkonstruktionen

7. Die Winkelhalbierenden von <u>einem Paar Nebenwinkeln</u> stehen zueinander senkrecht.
Wegen $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$ (↗ Bild). Wegen $\alpha + \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180^\circ$
$= 2\,\alpha_1 + 2\,\beta_1 = 180^\circ$



gilt $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$.

Die Winkelhalbierenden von <u>einem Paar Scheitelwinkeln</u> liegen auf ein und derselben Geraden.
Die Winkelhalbierende w_α bestimmt eine Gerade, die auch β in zwei Winkel zerlegt (↗ Bild)



Aus $\alpha_1 = \beta_2$ und $\alpha_2 = \beta_1$ (Scheitelwinkelsatz) folgt wegen $\alpha_1 = \alpha_2$ auch $\beta_1 = \beta_2$.
Die Winkelhalbierende von β liegt also auch auf der von w_α bestimmten Geraden.

Lerneinheit C 20: Besondere Linien in Dreiecken

o 59 Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

o 60 S sei der Schnittpunkt von w_α und w_β. Nach Satz C 23 hat S als Punkt von w_α den gleichen Abstand von b und von c. Als Punkt von w_β hat S den gleichen Abstand von a und von c. Daraus folgt, daß S auch von a und b den gleichen Abstand hat und somit nach Satz C 24 auf w_γ liegt. Demnach ist S Schnittpunkt von w_α, w_β und w_γ.

1. Schnittpunkt ist Mittelpunkt des Umkreises.

2. Der Abstand des Schnittpunktes von den drei Seiten ist gleich groß.

3. Das Teil kann durch die Einfahrt transportiert werden, wenn es auf die 2,50 m breite Seitenfläche gelegt wird. Seine Höhe beträgt dann rund 1,56 m.

5.* <u>Die durch die Höhen im Dreieck ABC bestimmten Geraden sind Mittelsenkrechten im Dreieck PQR</u>. Wählt man die Bezeichnung so, daß der Punkt C zwischen P und R liegt, so kann nachgewiesen werden, daß $\overline{PC} \cong \overline{CR}$ (Kongruenzsatz wsw). Da ferner $AB \parallel PR$, ist die Höhe h_c gleichzeitig Mittelsenkrechte von $\overline{PR}$. Entsprechendes gilt für die anderen Seiten des Dreiecks ABC in Verbindung mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks PQR.

o 62 Kongruenzsatz (wsw)
(anwendbar, weil mit $\sphericalangle$ CAD = α und $\sphericalangle$ ADC = 90° auch $\sphericalangle$ DCA festgelegt ist.)

o 63 b) 2 Lösungen, da $c > h_a$.
c) nicht konstruierbar: z. B. c = 2,1 cm (allgemein c < 2,6 cm)
eindeutig konstruierbar: c = 2,6 cm

Lerneinheit C 21: Konstruktion von Dreiecken, bei denen eine Höhe gegeben ist

1. a) Konstruktion ist eindeutig ausführbar
b), c) Konstruktion ist ausführbar (jeweils 2 Lösungen)
d) Konstruktion ist eindeutig ausführbar

2.* Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar.

Lerneinheit C 22: Vielecke

o 64 a) $n \in N$, $n > 2$ b) B liegt auf $\overline{AC}$.

1. Dreiecke, Vierecke (speziell Quadrate) und Fünfecke.

2. (a) 3 Punkte, (b) 4 Punkte, (c) keinen Punkt

4. Spitze Winkel bei B und D, rechte bei A und E, kein stumpfer Innenwinkel. (Der Innenwinkel bei C ist überstumpf.)
$\alpha = 90^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 241^\circ$, $\delta = 56^\circ$, $\varepsilon = 90^\circ$. Das Fünfeck ist nicht konvex.

6. b) nicht möglich

7.* a) 2 beim 5-Eck, 3 beim 6-Eck, 4 beim 7-Eck
b) 5 beim 5-Eck, 9 beim 6-Eck, 14 beim 7-Eck
c) 35 Diagonalen

Lerneinheit C 23: Vierecke - ihre Diagonalen und Innenwinkel

o 67 Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar

o 68 a) konstruierbar, aber nicht eindeutig b) nein

o 69 Auch bei nicht konvexen Vierecken gibt es eine Diagonale, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt. Beweis über die Winkelsumme der beiden Teildreiecke führen.

1. a) 570 m b) 270 m

4. a) eindeutig ausführbar
b), c) ausführbar (jeweils 2 Lösungen)

5. a) und c): Konstruktion ist eindeutig ausführbar.
b): Konstruktion ist nicht ausführbar.
d)*: Konstruktion ist ausführbar (4 Lösungen).

6. a) $\delta = 34^\circ$ (konvex; kein überstumpfer Winkel)
b) $\beta = 226^\circ$ (nicht konvex) c) $\alpha = \delta = 35^\circ$ (nicht konvex)
d) $\beta = \delta = 147^\circ$ (konvex) e) $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ (konvex; Rechteck)
f) $\alpha = \beta = \gamma = 103^\circ$ (konvex)

Lerneinheit C 24: Parallelogramme

o 70 a) $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ ACD kongruent nach (wsw)
b) $\triangle$ ABD = $\triangle$ BCD kongruent nach (wsw)

o 72 a) Die Winkel DAC und ACB sind zu betrachten.
$\sphericalangle$ DAC $\cong$ $\sphericalangle$ ACB (entsprechende Winkel in kongr. Drei.)
AD $\parallel$ BC (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)
Daraus folgt wegen AD $\parallel$ BC und AB $\parallel$ DC, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

b) V sei ein Viereck. Wenn V zwei Paare gleich großer Gegenwinkel hat, so ist V ein Parallelogramm. (wahr)
(Entsprechend weiter)

o 73 a) Wegen $\triangle$ ABM $\cong$ $\triangle$ CDM (Kongruenzsatz wsw in Verbindung mit Satz C 31 a) gilt $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{DM} \cong \overline{MB}$, denn es handelt sich jeweils um einander entsprechende Seiten.

o 74 a) Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar.
b) C kann man als Schnittpunkt zweier Kreisbögen erhalten.
c) Dann muß der Teil c) des Satzes C 31 genutzt werden.

1. a) $\beta = \delta = 112^\circ$; $\gamma = 68^\circ$ b) $\alpha = \gamma = 106^\circ$; $\delta = 74^\circ$
c) $\alpha = \gamma = 56^\circ$; $\delta = 124^\circ$ d) $\beta = \delta = 85^\circ$; $\alpha = 95^\circ$
e) $\beta = \delta = 62^\circ$; $\alpha = 118^\circ$ f) $\alpha = \gamma = 120^\circ$; $\beta = 60^\circ$
g) $\beta = \delta = 105^\circ$; $\gamma = 75^\circ$ h) $\alpha = \gamma = 135^\circ$; $\delta = 45^\circ$

2. $\dfrac{A \quad B \quad C \quad D \quad a \quad \beta}{C \quad D \quad A \quad B \quad c \quad \delta}$ Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen um 180°

3. C ist der Mittelpunkt von $\overline{EF}$, denn $\triangle BEC \cong \triangle DCF$ (Kongruenzsatz sws), so daß $\overline{FC} \cong \overline{CE}$ als entsprechende Seiten in den betreffenden Dreiecken.

4.* Voraussetzung: ABCD ist ein Viereck mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Behauptung: ABCD ist ein Parallelogramm, d. h. $AD \parallel BC$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (nach Voraussetzung)

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$

$\triangle ABC = \triangle ACD$ (Kongruenzsatz sws)

$\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle ACB$ (einander entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken)

$AD \parallel BC$ (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)

5. a) $c = 2{,}4$ cm; $d = 4{,}8$ cm; $\alpha = \gamma = 106^\circ$; $\delta = 74^\circ$; $e = 4{,}7$ cm; $f = 5{,}9$ cm

b) $a = 3{,}6$ cm; $b = 2{,}6$ cm; $\alpha = \gamma = 70^\circ$; $\beta = 110^\circ$; $e = 5{,}1$ cm; $f = 3{,}6$ cm

c) $c = 5{,}8$ cm; $d = 3{,}6$ cm; $\alpha = \gamma = 129^\circ$; $\beta = \delta = 51^\circ$; $f = 8{,}5$ cm

d) $a = c = 3{,}6$ cm; $d = 2{,}5$ cm; $\alpha = \gamma = 82^\circ$; $\delta = 98^\circ$; $f = 4{,}0$ cm

Lerneinheit C 25: Besondere Parallelogramme

o 75 Das Rechteck besitzt als Parallelogramm die Eigenschaft, daß gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Ist z. B. $\alpha = 90^\circ$, so ist auch $\gamma = 90^\circ$ und $\beta + \delta = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. Da auch $\beta = \delta$ gilt, folgt $\beta = 180 : 2 = 90^\circ$ und $\delta = 90^\circ$.

o 76 a) Voraussetzung: ABCD ist Rechteck

Behauptung: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Beweis: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (Gegenseiten im Parallelogramm)

$\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle ABC$ (Rechte Winkel als Innenwinkel des Rechtecks)

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$

$\triangle ABD \cong \triangle ABC$ (Kongruenzsatz sws)

$\overline{BD} \cong \overline{AC}$

b) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.

o 77 Man erhält einen Rhombus.

1. b) Unregelmäßige Dreiecke: 3 verschiedene Parallelogramme,
gleichschenklige Dreiecke: 2 verschiedene Parallelogramme,
gleichseitige Dreiecke: nur 1 Parallelogramm.

c) Rechtwinklige Dreiecke (gleichschenklige Dreiecke, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke)

2. a) Gleiche Streifenbreite

b) Mindestens 5 cm lang; eine obere Grenze kann nicht angegeben werden.

Lerneinheit C 26: Trapeze

o 80 a) $\overline{SP}$ und $\overline{RQ}$ bzw. $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$

b) Die Aussage ist wahr (Stufen- und Nebenwinkelsatz anwenden). Parallelogramme weisen als spezielle Trapeze selbstverständlich auch diese Eigenschaft auf.

o 81 b) Die Parallele zu a durch D wird vom Kreis um B mit dem Radius b zweimal geschnitten.

o 82 a) Man verlängert die Schenkel über D bzw. C hinaus bis zum Schnitt miteinander.

b) Gleichschenklige Trapeze sind axialsymmetrisch.

1. a) $\gamma = 99^\circ$, $\delta = 105^\circ$ b) $\beta = 92^\circ$, $\delta = 116^\circ$ c) $\alpha = 68^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

5. a) (Vorüberlegung: Wegen des Stufenwinkelsatzes liegen die Lote von E auf AB und auf CD auf ein und derselben Geraden. Das Gleiche gilt für die Lote von F.)
$\triangle AUE \cong \triangle DVE$ nach wsw (Hälften der Schenkel als Seiten, Scheitelwinkel, Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Entsprechend gilt: $\triangle WBF \cong \triangle CFX$.

b) Aus a) folgt $\overline{EU} \cong \overline{EV}$ und $\overline{FW} \cong \overline{XF}$. Da $\overline{VU} \cong \overline{XW}$. (Parallelität von AB und CD) gilt auch $\overline{EU} \cong \overline{FW}$. UWFE ist also ein Rechteck, und m mithin parallel zu AB und CD.

7.* Ein gleichschenkliges Trapez. (Falls die Sehnen die gleiche Länge haben, entsteht ein Rechteck.)
Begründung: Jede Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises ist Symmetrieachse des Kreises, so auch die Senkrechte s durch die Sehne $\overline{CD}$ durch M. Wegen des Stufenwinkelsatzes ist s auch Senkrechte zur Sehne $\overline{AB}$. s muß deshalb auch Symmetrieachse des Trapezes ABCD sein, insbesondere muß $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ gelten.

Lerneinheit C 27: Drachenvierecke

o 84 a) Rhombus, Quadrat c) wie Figur (3) im Bild C 150

4. Das Papier reicht aus.

5.* Ja; zur Begründung fängt man mit einer beliebigen Seite an zu überlegen, etwa mit a. a muß eine Nachbarseite gleicher Länge haben, dies sei b. Die andere Nachbarseite von a ist d, und d kann eine andere Länge als a haben. Da auch d eine Nachbarseite gleicher Länge haben muß, muß c = d sein. Also handelt es sich um ein konvexes Viereck mit a = b und c = d; in ihm ist BD Symmetrieachse. Es ist also ein Drachenviereck.

Lerneinheit C 28: Axialsymmetrie bei Vierecken

o 85 a) Rechtecke

1. a) wahr b) falsch (Drachenviereck möglich) c), d) wahr
2. a) Rechteck b) Quadrat c) Rhombus
3. Quadrat und Rhombus
4.* Parallelogramme (speziell Rechtecke, Rhomben, Quadrate) Symmetriezentrum ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Lerneinheit C 29: Der Flächeninhalt und der Umfang von Rechtecken

o 86 a) 1 200,- M b) 50,- M c) 20 m

1. Eine Kiste 3,24 m^2; 20 Kisten 64,8 $m^2 \approx 65$ m^2 (Runden auf 2 Ziffern im Endergebnis.)

2. Für ein Gerät 1,421 $m^2 \approx 1{,}42$ m^2; für 30 Geräte: 42,63 $m^2 \approx 43$ m^2

3. a)

a	b	u	A
56 cm	0,20 m	152 cm	1 120 cm^2
20,0 m	21,0 m	82,0 m	420 m^2
0,410 km	8,780 km	18,38 km	360 ha
72 mm	28 mm	200 mm	2 016 mm^2

b)

a	b	u	A
42 cm	2,1 dm	126 cm	882 cm^2
25 m	36 m	122 m	900 m^2
4,371 km	0,350 km	9,442 km	153 ha
1 860 mm	640 mm	5,00 m	1,190 m^2

4. a) mindestens 4 050 m^2 b) höchstens 10 800 m^2

5. a) $A_2 = 2\,A_1$ b) $A_1 = 2\,A_2$ c) $A_1 = 6\,A_2$ d) $A_1 = A_2$

Lerneinheit C 30: Flächeninhalt und Umfang von Vielecken

o 89 a) 400 m^2 b) 90 m

1. a) 57,75 cm^2; 35,0 cm c) 65,75 cm^2; 44 cm
   b) 149,1 dm^2; 55,4 dm d) 137,9 dm^2; 65,4 cm

2. c = 6 m

3. a) 43,4 m^2 b) 49,4 m^2 c) 300 m^2 5. nein

Lerneinheit C 31: Der Flächeninhalt von Dreiecken

o 91 $\triangle$ ABC: 10 cm^2; $\triangle$ PQR: 4,5 cm^2

o 92 $\triangle$ ABC: 14 cm^2; $\triangle$ PQR: 6 cm^2

o 93 a) Der Fall 2 entspricht der Aussage im Satz C 44
b) $A_2 = A + A_1$ (Satz C 43)

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\overline{BD}\cdot h;\; A_1 = \frac{1}{2}\,\overline{AD}\cdot h \text{ (Satz C 44)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,(\overline{AB}+\overline{AD})\cdot h = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot h + A_1 = A + A_1$$

$$A = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot h$$

o 94 Die Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt, weil die Höhen zur Seite $\overline{AB}$ gleich lang sind.

1. Bei einer Längeneinheit von 1 cm ergibt sich:
   a) 3 cm^2; 8,6 cm   b) 3,5 cm^2; 9,5 cm

2. a) $A \approx 9$ cm^2; $u \approx 15{,}7$ cm
   b) $c \approx 6{,}69$ cm (zeichnerisches Ergebnis: 6,7 cm)
   $A = 11{,}37$ $cm^2 \approx 11$ cm^2; $u = 17{,}59$ cm $\approx 17{,}6$ cm

3. a) $15,75\ cm^2 \approx 16\ cm^2$ b) $17,49\ m^2 \approx 17\ m^2$
   c) $41,25\ dm^2 \approx 41\ dm^2$ d) $7,5\ km^2$

4. a) $21,375\ cm^2 \approx 21\ cm^2$ b) $20,13\ cm^2 \approx 20\ cm^2$

5. a) $a = 2$ cm   b) $d = 2,5$ cm

6. a) Rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ und $b = 5,2$ cm
   $u = 14,2$ cm; $A = 7,8\ cm^2$
   b) $a = 7,04\ cm \approx 7,0$ cm; $b = 5,22\ cm \approx 5,2$ cm
   $u = 20,2$ cm; $A = 18,0\ cm^2$ ($h_c \approx 4,5$ cm)
   c) Rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ und
   $a = 6,9$ cm; $b = 5,8$ cm
   $u = 21,7$ cm; $A = 20\ cm^2$
   d) Gleichschenkliges Dreieck mit $a = b = 4,3$ cm
   $u = 14,1$ cm; $A = 9,1\ cm^2$ ($h_c \approx 3,3$ cm)

7. a) $u = 71$ m; $A = 195\ m^2 \approx 200\ m^2$
   b) $u = 101$ m; $A = 450\ m^2$
   c) $u \approx 109$ m; $A = 500\ m^2$ d) $u = 70,5\ m \approx 71$ m; $A \approx 230\ m^2$

8. (1) $A = 0,68\ m^2$; (2) $A = 954,32\ cm^2 \approx 954\ cm^2$; (3) $h = 4,6$ cm
   (4) $g = 0,5829\ km \approx 0,58$ km; (5) $A = 8\ dm^2$; (6) $A = 1\ m^2$

9. Falls $\beta = 90^\circ$.   11. a) $550\ m^2$ b) 95,6 m

12. Es sind aus kongruenten Rechtecken kongruente Vielecke ausgespart worden bzw. zu kongruenten Rechtecken kongruente Vielecke ergänzt worden.

Lerneinheit C 32: Der Flächeninhalt von Trapezen und Parallelogrammen

1. Bei einer Längeneinheit von 1 cm ergibt sich:
   a) $a = 6$ cm; $b = 5,8$ cm; $c = 4$ cm; $d = 4,2$ cm; $a \parallel c$;
   $h = 3$ cm; $u = 20$ cm; $A = 15\ cm^2$
   b) $a = 3,2$ cm; $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $d = 3$ cm
   $u = 13,2$ cm; $A = 10,5\ cm^2$
   c) $a \approx 5,7$ cm; $b = 4$ cm; $c = d \approx 2,8$ cm; $u = 15,3$ cm; $A = 12\ cm^2$
   d) $a = c = 4$ cm; $b = d = 4,2$ cm; $u = 16,4$ cm; $A = 12\ cm^2$

2. a) $d = 4,4$ cm; $u = 19,3$ cm; $A = 17,2\ cm^2 \approx 17\ cm^2$
   b) $c = 3,0$ cm; $u = 12$ cm; $A = 8,1\ cm^2$
   c) nicht lösbar

4. $330\ m^2$ 5. $45,98\ m^2 \approx 46\ m^2$

6. $2 \cdot 12\ m^2 + 29,6\ m^2 = 53,6\ m^2 \approx 54\ m^2$

7. b) $28\,675\ m^2 \approx 2,87$ ha
   c) 3,03 dt je ha ≈ 3 dt je ha

8. a) $A = 40\ cm^2$ b) $A = 40\ cm^2$ c) $A = 40\ cm^2$
   Die Flächeninhalte sind gleich groß - die Diagonalen sind jeweils gleich lang.

Komplexe Übungen

1.

Punkt	A	B	C	D
Bildpkt.	C	D	A	B

Punkt	A	B	C	D
Bildpkt.	C	B	A	D

2. Es entsteht
   a) ein Drachenviereck, b) ein gleichschenkliges Dreieck,
   c) ein Parallelogramm.
   Bei einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck entsteht
   a) ein Quadrat, b) ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck,
   c) ein Parallelogramm.

3. a) Für die drei Punkte P, Q, R muß dann bei ein und derselben Verschiebung Q Bildpunkt von P und R Bildpunkt von Q (und damit P Originalpunkt von Q und Q Originalpunkt von R sein. Dazu müssen P, Q, R auf ein und derselben Geraden liegen, und es muß $\overline{PQ} = \overline{QR}$ sein.
   b) Für eine Drehung läßt sich "dasselbe" machen, für eine Spiegelung nicht.
   (Bei der Drehung liegen P, Q, R auf ein und demselben Kreis um das Drehzentrum, und an die Stelle der gleichen Streckenlängen treten gleiche Drehwinkel.)

4. b)* b ist selbst eine Drehung mit dem Drehwinkel 180°.
   Die Geraden AA', BB', CC' schneiden sich nämlich in einem einzigen Punkt D (dem Drehzentrum), und es ist $\overline{AD} = \overline{DA'}$, $\overline{BD} = \overline{DB'}$, $\overline{CD} = \overline{DC'}$.

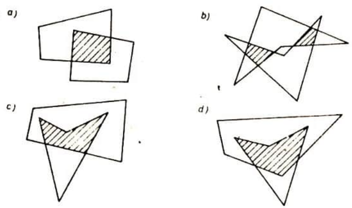
5. $170^\circ \geqq \beta \geqq 160^\circ$

6. a) $\alpha = 38^\circ$ (Summe der Innenwinkel in $\triangle$ ABF)
   $\beta = 117^\circ$ (z. B. AC ∥ CE nach Umkehrung des Stufenwinkelsatzes, dann Wechselwinkel anwenden)
   b) $\alpha = 95^\circ$ (Nebenwinkelsatz, Scheitelwinkelsatz, Innenwinkelsatz)
   $\gamma = 35^\circ$ (Nebenwinkelsatz, Innenwinkelsatz)

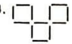
7.

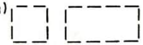
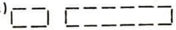
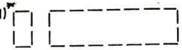
Dreieckswinkel			Seitenbeziehung			Dreiecksarten nach	
			$a \gtreqless b$	$a \gtreqless c$	$b \gtreqless c$	Winkeln	Seiten
α	β	γ					
72°	65°	43°	$a > b$	$a > c$	$b > c$	spitzw.	unregelm.
75°	75°	30°	$a = b$	$a > c$	$b > c$	spitzw.	gleichsch.
31°	90°	59°	$a < b$	$a < c$	$b > c$	rechtw.	unregelm.
40°	100°	40°	$a < b$	$a = c$	$b > c$	stumpfw.	gleichsch.
60°	60°	60°	$a = b$	$a = c$	$b = c$	spitzw.	gleichs.
56°	68°	56°	$a < b$	$a = c$	$b > c$	spitzw.	gleichsch.

8. a) z. B. ABL, ACK, ACN
   b) z. B. ABFE, BCML, BCHF
   c) z. B. AGINL
   d) 6-Ecke ja (z. B. ABCKNL)
   7-Ecke ja (z. B. ABDKCNL)
   8-Ecke ja (z. B. ACNKMLFE)
   9-Ecke ja (z. B. ABDKCNLFE)
   10-Ecke ja (z. B. ADBCNKMLFE)
   11-Ecke ja (z. B. ADBCHGKMLFE)
   12-Ecke ja (z. B. ADBCHINKMLFE)
   13-Ecke und 14-Ecke nein

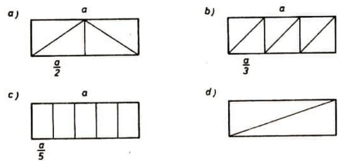
9. 

10. (a) 12 (6 Rhomben wie ABMF, 6 Trapeze wie ABCF); alle konvex
    (b) 9 (ABEF, ABEG, ACEH, ACGD, ACHG, BCFD, BCHD, BDFE, BHFG)
    ACEH, BHFG, ACGD, BHFG – nicht konvex

11. a)  b) z.B.  c) 30

12. a)  b) 
c)  d)* 

13. a) 1 104 Streichhölzer b)* Mathias: I METER

14. 

15. a) wenn sie im Radius übereinstimmen
    b) wenn sie in der Seite(nlänge) übereinstimmen
    c) wenn sie in der Seite(nlänge) und einem Innenwinkel übereinstimmen
    <u>oder</u>
    wenn sie in der Seite(nlänge) und (der Länge) einer Diagonale übereinstimmen
    <u>oder</u>
    wenn sie in beiden Diagonalen(längen) übereinstimmen
    d) wenn sie gleich lang sind
    e) stets
    f) wenn sie gleich groß sind
    g) wenn die Katheten gleich lang sind
    h) nicht möglich

16. a)

$\triangle PQR$	$\overline{PQ}$	$\overline{QR}$	$\overline{RP}$
$\triangle ABC$	$\overline{AC}$	$\overline{CB}$	$\overline{BA}$
	b	a	c

b)

$\overline{PQ}$	$\overline{QR}$	$\overline{RP}$
$\overline{CA}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$
b	c	a

oder

$\overline{PQ}$	$\overline{QR}$	$\overline{RP}$
$\overline{AB}$	$\overline{CA}$	$\overline{BC}$
c	b	a

c)

$\overline{PQ}$	$\overline{QR}$	$\overline{RP}$
$\overline{CA}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$
b	c	a

17. $1{,}6\ \text{cm} < c < 6{,}8\ \text{cm}$

18.* b) $u > s$; ja (Begründung mit Dreiecksungleichung)
c) es stimmt (Begründung mit Dreiecksungleichung)

19. $\triangle ABC$ ist gleichschenklig
Begründung: $\triangle DEC$ ist gleichschenklig mit $\overline{DC} \cong \overline{EC}$. Da $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle CEB$ (Außenwinkel gleich groß der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel <u>oder</u> jeweils Nebenwinkel zu gleich großen Winkeln), gilt $\triangle ADC \cong \triangle CEB$ (sws). Daraus folgt: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, w.z.b.w.

20. Aus $a = b$ folgt wegen (*) $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ (Flächeninhalt von $\triangle ABC$) $h_a = h_b$.
Umkehrung: Wenn ein Dreieck zwei gleich lange Höhen hat, so ist es gleichschenklig. Umkehrung ist wahr, weil wegen (*) mit $h_a = h_b$ auch $a = b$ gilt.

21. a) C(7;13) b) C(7;7)

22. a) D(5;8) b) D(9;8)
c) z. B. D(11;5), D(9;6), ...,D(2;5), D(3;6), ...
(auch Lösungen wie D(2,5;5,5) oder D(6;7,5), D(4,8;7,8) sind möglich)
<u>Allg. Form:</u> D(x; 10,5-0,5x) mit $0 \leqq x < 13$ und $x \neq 5$ bzw.
D(x; 3+x) mit $1 < x$ und $x \neq 5$)

23. b) Parallelogramm
Begründung: AD ∥ BC (nach Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)
Wegen $\overline{AD} = \overline{BC}$ ist auch AB ∥ CD (genauere Argumentation dafür über Kongruenz der Dreiecke, die durch Fällen der Lote von B auf CD bzw. von D auf AB entstehen, nach (wsw) unter Benutzung des Winkelsummensatzes)

24. Alle Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt
$A = 7{,}75\ \text{cm}^2 \approx 7{,}8\ \text{cm}^2$

25. a) und d) eindeutig konstruierbar, b) nicht konstruierbar,
c) konstruierbar, aber nicht eindeutig
e)* Derartige Änderung bei a) nicht möglich; bei b) <u>etwa</u> $\beta = 45^\circ$ oder $d = 6{,}0$ cm; bei d) <u>etwa</u> $c = 6{,}5$ cm

26. a) $h_a = 6{,}5$ cm b) $b = 12{,}8$ cm c) $c = 18$ cm d) $h_c = 24$ cm

27. etwa 4,9 km

28. etwa 25 m (29 m - 4 m)

29. etwa 61 m

30.* etwa 4 m

31. Man errechnet 197 m für die gesuchte Entfernung.
Die Angabe des Flächeninhalts auf Zehntel Quadratmeter "genau" ist unsinnig. Sie ist gewiß erfolgt, weil $13\,494{,}5 \cdot 2 = 26\,989$ Vielfaches von 137 ist.

32. $\overline{PQ} = 260$ m

33. a) $\overline{AD} < \overline{AB} < \overline{BD} < \overline{BC} < \overline{CD}$ (Berechnung von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle BCD$ nach Winkelsummensatz, dann Anwendung der Seiten-Winkel-Relation in $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$)
b) ABCD ist ein Trapez (AB ∥ CD wegen $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$)

34. 9 cm^2

36. a) 4 b) 12, sämtlich gleich lang, weil die Quadrate einander kongruent sind.
c) Jede Raumdiagonale ist längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen kürzere Seiten eine Würfelkante und eine Flächendiagonale sind. Diese Dreiecke sind kongruent (nach (sws)), also sind die Raumdiagonalen gleich lang.
d)* ebenfalls 4 Raum- und 12 Flächendiagonalen;
Raumdiagonalen sämtlich gleich lang;
4 Flächendiagonalen haben die Länge der Quadratdiagonalen, 8 die (davon verschiedene) Länge der Diagonalen der Rechteckflächen, die den Quader außerdem begrenzen.
e)* ebenfalls 4 Raum- und 12 Flächendiagonalen; Raumdiagonalen sämtlich gleich lang; bei Flächendiagonalen 3 "Gruppen", 4 untereinander gleich lang (jeweils Diagonalen einander gegenüberliegender Begrenzungsflächen)

37. a) $\triangle$ ABC

Begründung: Dieses Dreieck ist gleichseitig, Seitenlänge sei a.

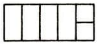
Die gleichschenkligen Dreiecke ABD, BCD, ACD sind einander kongruent. Ihre Basis ist a, Basiswinkel kleiner als bei $\triangle$ABC, also auch Höhe kleiner und damit der Flächeninhalt.

b) Dreiecke ABD, BCD, ACD auch hier kongruent und haben damit gleichen Flächeninhalt. Wegen der größeren Basiswinkel ($\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ > 60^\circ$) ist die Höhe und damit auch dieser Flächeninhalt größer als der des Dreiecks ABC.

38. a) nein b) ja c) ja

39. a) 432 cm^3 (6 cm · 6 cm · 12 cm)

b)



c) n.l., falls ebenfalls kein Abfall entstehen soll

40. a) 588 $cm^3 \approx$ 590 cm^3 b) 650 cm^3

c) 684 $cm^3 \approx$ 680 cm^3 d) 680 cm^3

41. Mit Hilfe einer Schnur könnte überprüft werden, ob die Diagonalen gleich lang sind.

42. a) je 1,4 m

b) 18 mm = 0,018 m Niederschlag je 1 m^2

Jedes Beet hat 3,5 m^2 Flächeninhalt.

Niederschlagsmenge je Beet: 3,5 m^2 · 0,018 m = 0,063 m^3 = 63 l

Die Niederschlagshöhe entspricht dem Gießen von (etwas über) 6 Gießkannen pro Beet.

43. a) 56 cm^2 (55,5 cm^2) b) 990 cm^2

44. a) 8,5 ha b) 1 200 m

45. 24,8 m . 18,0 m + $\frac{1}{2}$ (24,8 m + 10,8 m) . 3 m = 499,8 m^2

499,8 . 2,45 M = 1 224,51 M rund 1 220 M

46. a) 4 m b) 5,6 m

D. Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität

Lerneinheit D 1: Terme, Gleichungen, Ungleichungen

1. a) $5 \cdot a = 35$ b) $a + 4 = 10{,}3$ c) $\frac{b}{5} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{a}{2} = 0{,}3$ e) $2 \cdot x < 13$ f) $2 \cdot a + 2 \cdot b = 24$ cm

g) $v = \frac{75\ m}{15\ s}$ h) $1 \cdot 600 < 1{,}8$ cm

2. ja: a), b), c) f) nein: d), e), g)

3. Gleichungen: a), b), d), f), l) Ungleichungen: e), i)

g) ist eine Kurzform für zwei Ungleichungen, h) eine Kurzform für zwei Gleichungen.

m) ist eine Kurzform für eine Gleichung und eine Ungleichung.

Lerneinheit D 2: Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen

o 1 a), b) und c) sind Aussagen. a) und c) sind wahre Aussagen, b) ist eine falsche Aussage.

o 2 a) x = 3 b) keine Zahl c) t = 10

d) n.l. im Bereich Q_+ e) $b \neq \frac{1}{5}$ f) z.B. a = 1 (jede Zahl)

g) u = 2 h) c = 0; c = 2

o 3 a) keine natürliche Zahl b) nur $x = \frac{5}{2}$

1. a) $5 + 4 < 11$ b) $4 + 3 < 13$

$\frac{34}{12} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3}$ $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{38}{12}$

$2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8} > \frac{36}{7} - \frac{16}{5}$ $1{,}83 + 0{,}5 > 1{,}14 + 1{,}07$

2.

	2	$\frac{1}{2}$	4	7	0	1,2	0,4
a) $3 \cdot x = 12$	f	f	w	f	f	f	f
b) $4 \cdot x = 8$	w	f	f	f	f	f	f
c) $\frac{1}{2} \cdot x = 2$	f	f	w	f	f	f	f
d) $\frac{1}{4} \cdot x = 1$	f	f	w	f	f	f	f
e) $6{,}1 + x = 4{,}9$	f	f	f	f	f	f	f
f) $5{,}1 + x = 6{,}3$	f	f	f	f	f	w	f
g) $\frac{3}{2} \cdot x = 0{,}6$	f	f	f	f	f	f	w
h) $\frac{3}{4} \cdot x = 0{,}3$	f	f	f	f	f	f	w

3.

	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{5}$	1,5	$\frac{7}{3}$	3	2,5
a) $1 < a$	f	f	f	f	w	w	w	w
b) $2 < a$	f	f	f	f	f	w	w	w
c) $a + 3,5 < 1$	f	f	f	f	f	f	f	f
d) $a + 3,0 < 10$	w	w	w	w	w	w	w	w
e) $\frac{2}{3} \cdot a < 1$	w	w	w	w	f	f	f	f
f) $\frac{4}{3} \cdot a > 1,5$	f	f	f	f	w	w	w	w
g) $3 \cdot a > 2,25$	f	w	f	f	w	w	w	w
h) $2 \cdot a > 1,5$	f	w	f	f	w	w	w	w

4. a) Das Doppelte einer Zahl ist 22. Dann ist 11 die Zahl. $t = 11$
   b) Da die Multiplikation mit 1 eine Zahl nicht ändert, ist jede Zahl Lösung. $L = Q$
   c) Wenn eine Summe $\frac{2}{3}$ ist, und ein Summand ist $\frac{1}{2}$, dann ist der andere Summand $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. $x = \frac{1}{6}$
   d) $\frac{3}{8}$ ist die Hälfte von $\frac{3}{4}$. Also $v = 2$.
   e) Multipliziert man irgendeine Zahl mit 0, so ergibt sich immer 0, nie 7. Also gibt es keine Lösung. (Ergebnis: n.l.)
   f) Ein Produkt kann nur Null sein, wenn wenigstens ein Faktor 0 ist. Also gilt: $c = 0$.
   g) Wenn eine Summe 23 ist und ein Summand 5, dann ist der andere Summand 18; also $3 \cdot t = 18$. Wenn ein Produkt 18 ist und ein Faktor 3, dann ist der andere Faktor 6; also $t = 6$.
   h) Wenn ein Produkt 28 ist und ein Faktor 4, dann ist der andere Faktor 7; also $d - 3 = 7$. Wenn eine Differenz 7 ist und der Subtrahend 3, dann ist der Minuend 10; also $d = 10$.

5. (Vergleiche mit der Lösungsermittlung, die in Aufgabe 4 vorgeschlagen wurde!)
   a) $L = \emptyset$ c) $L = \{4\}$ e) $L = \{2\}$ g) $L = \{3\}$
   b) $L = \{\frac{7}{3}\}$ d) $L = \emptyset$ f) $L = \{\frac{4}{21}\}$ h) $L = \{\frac{3}{28}\}$ i) $L = \{12\}$

6. a) $L = \{4\}$ c) $L = \{1\}$ e) $L = \{2;3;5;7\}$
   b) $L = \emptyset$ d) $L = \{0\}$ f) $L = \emptyset$

7. a) z. B. $2 \cdot x = 4$; $x + 2 = 4$; $10 - x = 8$
   b) z. B. $4 \cdot x = 3$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = x$; $x = \frac{3}{4}$
   c) z. B. $3 \cdot x = 4$; $\frac{10}{3} - 2 = x$; $x = \frac{8}{3} : 2$
   d) z. B. $0,2 + x = 1,0$; $2 \cdot x = 1,6$; $x = 6,4 : 8$
   e) z. B. $2 \cdot x = 0$; $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$; $2x = 3x$
   f) z. B. $12 \cdot a + 5 = 0$; $0 \cdot a = 7$

8. Alle Gleichungen haben die Lösungsmenge $\{6\}$

Lerneinheit D 3: Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$

o 4 Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, ergibt sich: a) 13, b) 2,5, c) $\frac{6}{5}$.
Für die Angabe der Lösung von Gleichungen werden den Schülern die Formen $\underline{\underline{L = \{...\}}}$ und $\underline{\underline{x = ...}}$ zur Auswahl vorgegeben.
Im Lösungsheft wurden ebenfalls beide Formen genutzt, nur daß auf die doppelte Unterstreichung verzichtet wurde.

1. a) $L = \{32\}$ b) $L = \{\frac{7}{2}\}$ c) $L = \{96\}$ d) $L = \{8\}$
   e) $L = \{36\}$ f) $L = \{40\}$ g) $L = \{0\}$ h) $L = \emptyset$

2. a) $L = \{\frac{7}{6}\}$ b) $L = \{\frac{5}{4}\}$ c) $L = \{\frac{3}{32}\}$ d) $L = \{0,4\}$
   e) $L = \{76\}$ f) $L = \{0,315\}$ g) $L = \{28,8\}$ h) $L = \{7,5\}$

3.* a) $L = \{7\}$ b) $L = Q_+$ c) $L = \{4,8\}$ d) $L = \{3\}$

5.* $a \cdot x = 12,6$ $6,3 \cdot x = 12,6 \quad | : 6,3$
$a \cdot 2 = 12,6 \quad | : 2$ $x = 12,6 : 6,3$
$a = 6,3$ $x = 2$

6.* $b = 14$ 7. $b = 50$ m

8. a) $x = \frac{p}{n}$ b) $t = \frac{s}{v}$ c) $v = \frac{s}{t}$ d) $m = V \cdot \varrho$

Lerneinheit D 4: Lösen von Gleichungen der Form $\frac{a}{x} = b$

o 6 Folgende Überlegung wird angestrebt: Als Lösung der Gleichung $\frac{0}{x} = 0$ kommt keinesfalls $x = 0$ in Betracht, denn $\frac{0}{0}$ ist nicht definiert. Dagegen ist jede andere Zahl Lösung dieser Gleichung; denn teilt man 0 durch eine von 0 verschiedene Zahl, so ergibt sich stets 0. Die Lösungsmenge besteht also aus allen von Null verschiedenen Zahlen.

1. a) $\frac{1}{3}$ b) $L = \emptyset$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $L = \emptyset$

   e) $x = \frac{8}{9}$ f) $x = \frac{1}{3}$ g) $x = \frac{1}{3}$ h) $x = \frac{9}{10}$

2.* a) $x = \frac{20}{9}$ b) $x = \frac{5}{6}$ c) $t = \frac{1}{2}$ d) $t = 0{,}4$

3. a) z. B. $\frac{12}{x} = 4$; $\frac{36}{x} = 12$; $\frac{0{,}5}{x} = \frac{1}{6}$

   b) z. B. $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$; $\frac{2}{x} = 3$; $\frac{0{,}5}{x} = 0{,}75$

   c) Kein Muster möglich, da die Division durch 0 nicht erklärt ist.

   d) z. B. $\frac{1}{x} = \frac{4}{7}$; $\frac{10}{x} = \frac{40}{7}$; $\frac{0{,}5}{x} = \frac{2}{7}$

   e) z. B. $\frac{3}{x} = 0$; $\frac{0{,}5}{x} = 0$; $\frac{0}{x} = 5$

4.* $a = 14{,}4$ 5.* $b = \frac{1}{2}$

6. $v = \frac{s}{t}$ $s = 15\,\frac{km}{h} \cdot \frac{5}{2}\,h$ $s = 37{,}5$ km
   (Näherungswerte, deshalb auf 2 Stellen runden! $s \approx 37$ km
   Abrunden wegen des Sachverhalts.)

7. a), b), f), i), l), m), n), o), q): Typ $a \cdot x = b$
   e), k), p): Typ $\frac{a}{x} = b$

8. a) $x = 1{,}5$ b) $L = \emptyset$ c) $t = 0{,}8$ d) $L = \emptyset$ e) $u = 1{,}6$
   f) $v = 1$ g) $x = 1$ h) $x = 2$ i) $s = 252$ k) $x = 2$
   l) $L = Q_+$ m) $z = 9$ n) $x = \frac{3}{5}$ o) $x = 17{,}1$ p) $x = \frac{1}{10}$ q) $a = \frac{5}{2}$

Lerneinheit D 5: Darstellen von Zuordnungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

o 7 a) Auf einer Parallelen zur Ordinatenachse. Der Abstand der beiden Strahlen beträgt 1.
   Auf einer Parallelen zur Abszissenachse. Der Abstand der beiden Strahlen beträgt 3.
   Auf der Ordinatenachse.

1. b) $(0{,}5;0)$, $(0{,}5;\frac{1}{2})$, $(0{,}5;2\frac{1}{4})$
   $(1;0)$, $(1;\frac{1}{2})$, $(1;2\frac{1}{4})$
   $(2{,}5;0)$, $(2{,}5;\frac{1}{2})$, $(2{,}5;2\frac{1}{4})$

2. $P_1(0;0)$, $P_2(1{,}5;2)$, $P_3(4;3)$, $P_4(2;3{,}5)$, $P_5(0;3{,}5)$
   $P_6(0;2)$ $P_7(1{,}2;3)$, $P_8(5{,}5;0)$, $P_9(9{,}5;0)$, $P_{10}(8;0{,}5)$
   $P_{11}(5{,}5;2{,}5)$, $P_{12}(8;2{,}5)$, $P_{13}(10;4{,}5)$, $P_{14}(4;4{,}5)$,
   $P_{15}(7{,}5;2{,}3)$, $P_{16}(7{,}3;1{,}8)$

3. a) Die Punkte liegen auf einem Strahl, der vom Koordinatenursprung ausgeht.
   Wenn die Seitenlänge zunimmt, wird auch der Umfang größer.
   b) Siehe Lehrbuch, Bild D 4! Die Punkte liegen auf einer gekrümmten Linie.
   Wenn die Seitenlänge zunimmt, wird auch der Flächeninhalt größer.
   c) Die Punkte liegen auf Parallelen zur Abszissenachse.
   Wenn die Masse größer wird, kann der Preis gleich bleiben.
   d) Die Punkte liegen auf einem Strahl, der von dem Punkt (0;1) ausgeht.
   Wenn x größer wird, wird auch y größer.

4. a) z. B. $(\frac{1}{4};0)$, $(\frac{1}{2};20)$, $(1;60)$ für den D-Zug
   z. B. $(0;0)$, $(\frac{1}{2};30)$, $(\frac{3}{4};30)$ für den Personenzug
   Beide Linien verlaufen von links unten nach rechts oben.
   Eine Linie ist ein Strahl.
   Die Linie für den D-Zug ist steiler als die Linie für den Personenzug.

   b) für I: $(2{,}5;2)$, $(3{,}7;3)$, $(5;4)$
   für II: $(0;3)$, $(1;2{,}5)$, $(3;1{,}5)$
   für III: $(2;0{,}5)$, $(1;1)$, $(4;\frac{1}{4})$
   für I: Strecke; wenn x größer wird, wird auch y größer
   für II: Strecke; wenn x größer wird, wird y kleiner
   für III: gekrümmte Linie; wenn x größer wird, wird y kleiner

Lerneinheit D 6: Beispiele für Proportionalität

o 8 b) Peter: 4,34 M; Herr Lehmann: 4,68 M
   c) Peter: 6,82 M; Herr Lehmann: 8,58 M

o 9 $\frac{22{,}5}{2{,}5} = 9$; $\frac{14{,}1}{1{,}6} \approx 8{,}8$; $\frac{35{,}6}{4{,}0} = 8{,}9$; $\frac{196}{22} \approx 8{,}9$
   Meßfehler verhindern, daß sich gleiche Ergebnisse einstellen.

o 10

a	3	5	6	2	7	12	8	4	11	9
b	21	35	42	14	49	84	56	28	77	63

o 11 (2;1), (6;3), (10;5), (14;7), (18;9)

a) $x = \frac{1}{2} \cdot y$ b) $k = \frac{1}{2}$

1. a) ja; immer $y = 3 \cdot x$; $k = 3$ oder $k = \frac{1}{3}$

b) ja; immer $y = 1,5 \cdot x$; $k = \frac{3}{2}$ oder $k = \frac{2}{3}$

c) nein; $\frac{18}{2} \neq \frac{9}{4}$ d) nein; $\frac{10}{3} : \frac{5}{3} \neq \frac{15}{5} : \frac{7}{5}$

e) ja; immer $b = \frac{2}{3} \cdot a$; $k = \frac{2}{3}$ oder $k = \frac{3}{2}$

2. a) ja; immer $y = 4 \cdot x$; $k = 4$ oder $k = \frac{1}{4}$

b) nein; $\frac{10,5}{7} \neq \frac{5,5}{2}$ c) nein; $\frac{12}{2} \neq \frac{6}{4}$

d) nein; $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} \neq \frac{4}{5} : \frac{5}{4}$ e) ja; immer $b = 1,5 \cdot a$; $k = 1,5$ oder $k = \frac{2}{3}$

3. a)

x	3	5	7	9	11
y	15	25	35	45	55

b)

x	3	5	7	9	11
y	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5

c)

x	3	5	7	9	11
y	2,25	3,75	5,25	6,75	8,25

d)

x	3	5	7	9	11
y	1,8	3	4,2	5,4	6,6

4. a)

a	30	60	90	120	150
b	150	300	450	600	750

b)

a	60	120	180	240	300
b	150	300	450	600	750

c)

a	200	400	600	800	1000
b	150	300	450	600	750

d)

a	250	500	750	1000	1250
b	150	300	450	600	750

5. a)

m	4	5	7	9	7,5	6,5
n	8	10	14	18	15	13

$n = 2 \cdot m$

b)

r	1,2	2,5	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{16}$
s	4,8	10	2	8	$\frac{3}{4}$

$s = 4 \cdot r$

Lerneinheit D 7: Darstellen von Proportionalität in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

o 12 a) $y = 5 \cdot x$; ja b) keine Proportionalität; $\frac{6}{1} \neq \frac{8}{3}$

1. a) Es liegt Proportionalität vor.

b) Es liegt keine Proportionalität vor.

c) Es liegt keine Proportionalität vor.

2. a) Beim D-Zug besteht zwischen Fahrzeit und Weg Proportionalität.

b) Die Zuordnung I ist eine Proportionalität.

Lerneinheit D 8: Proportionalität in der Praxis

1. a) ja b) nein c) nein, wenn Mietgebühr (Grundbetrag) berücksichtigt wird; ja, wenn dies nicht der Fall ist.

d) nein e) nein

2. a) $k = \frac{1}{6}$ oder $k = 6$ b) nein; $\frac{1\ dt}{1\ dt} = 1$

c) ja; bei gleichem Zuckergehalt der Rüben

3. a) $\varrho = 2,3\ \frac{t}{m^3} = k$

b) Der Proportionalitätsfaktor ist die Dichte für Beton.

c) $m = k \cdot V = 2,3\ \frac{t}{m^3} \cdot V$

Lerneinheit D 9: Umgekehrte Proportionalität

o 13 Aus $x \cdot y = 10$ entsteht durch Division durch x

$y = 10 \cdot \frac{1}{x}$, also $y \sim \frac{1}{x}$. Daher y proport. dem Kehrwert von x.

1. a) ja; $x \cdot y = 1$ b) ja; $x \cdot y = 0,5$ c) nein; $3 \cdot 2 \neq 6 \cdot 4$

2. a) ja; $x \cdot y = 2$ b) ja; $r \cdot s = 0,5$ c) nein; $1 \cdot 5 \neq 15 \cdot 3$

3. a) Bild D 11

M	1	2	3	4	6	24
N	24	12	8	6	4	1

b) Bild D 12

M	1	3	6	9	12	36
N	36	12	6	4	3	1

4. a) ja b) nein c) ja (alle Schüler sind gleichermaßen fleißig; die Zahl der Schüler ist nicht sehr groß)

d) nein

Lerneinheit D 10: Weitere Eigenschaften der direkten bzw. umgekehrten Proportionalität

o 14 An den von Klaus genannten Eigenschaften kann man zwar nicht Proportionalität oder umgekehrte Proportionalität erkennen, man kann aber Proportionalität ausschließen, wenn diese Eigenschaften nicht erfüllt sind.

o 15 a) Wenn $a \sim b$, so existiert eine Zahl k mit $a = k \cdot b$. Dann gilt auch $b = \frac{1}{k} \cdot a$, also $b \sim a$; $\frac{1}{k}$ ist Proportionalitätsfaktor.

b) Wenn $a \sim \frac{1}{b}$, so existiert eine Zahl k mit $a \cdot b = k$. Dann gilt auch $b \cdot a = k$, also $b \sim \frac{1}{a}$.

1. Es besteht keine Proportionalität. Die Begründung ist falsch.

2. Es besteht umgekehrte Proportionalität, aber die Begründung ist falsch.

3. Es besteht keine Proportionalität. Die Begründung ist falsch.

4. Es besteht direkte Proportionalität. Die Begründung ist falsch.

5.* a) Keine direkte Proportionalität; denn z. B. $\frac{100}{70} \neq \frac{15}{10}$.
Keine umgekehrte Proportionalität; denn z. B. wächst mit x auch y.

b) Keine direkte Proportionalität; es ist zwar $b = 0 \cdot a$, aber in der Definition wird $k \neq 0$ verlangt.
Keine umgekehrte Proportionalität; es ist zwar $a \cdot b = 0$, aber in der Definition wird $k \neq 0$ verlangt.

Lerneinheit D 11: Verhältnisse

1. a) 3 : 2   b) 4 : 5   c) 1 : 2   d) 3 : 2

2. a) 4 : 6 = 2 : 3   b) $\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = 3:5$ c) $\frac{39}{16} : \frac{13}{4} = 3:4$
d) 0,84 : 0,36 = 7 : 3

3. a) 1 : 200 000 b) 1 : 2 500 c) 1 : 20 000 d) 1 : 1 000 000

4. a) 15 mm ≙ 150 m
2,3 cm ≙ 230 m
15 cm ≙ 1,5 km

b) 300 m ≙ 3 cm
4 km ≙ 40 cm
1,9 km ≙ 19 cm
10 m ≙ 0,1 cm

5. Zwei Antworten sind möglich:
(1) Das meiste Geld hat Klasse 6 a erbracht.
(2) Bei Berücksichtigung der Klassenstärke ergibt sich:

Klasse	6 a	6 b	7 a	7 b
M je Schüler	4,50	4,20	5,00	4,00

Danach hatte die Klasse 7 a das beste Ergebnis.

6. VR Polen: $\frac{36\,900\,000}{313\,000} \approx 118$ ČSSR: $\frac{15\,500\,000}{128\,000} \approx 121$ DDR: $\frac{16\,600\,000}{108\,000} \approx 154$

Die DDR hat von den drei Ländern die größte Bevölkerungsdichte und die VR Polen die kleinste Bevölkerungsdichte.

Lerneinheit D 12: Verhältnisgleichungen

o 16 Die Gleichung kann man auch so aufschreiben:
$\frac{6}{x} = \frac{18}{3}$, also a = 6, $b = \frac{18}{3} = 6$, $L = \{1\}$

1. a) wahr   b) falsch   c) wahr   d) falsch

2. a) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{15}$, $b = \frac{4}{12}$; $L = \{5\}$
b) $\frac{a}{x} = b$; $a = 8$, $b = \frac{24}{3}$; $L = \{1\}$
c) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{5}{15}$; $L = \{4\}$
d) $\frac{a}{x} = b$; $a = 6$, $b = \frac{18}{6}$; $L = \{2\}$

3. a) $\frac{a}{x} = b$; $a = 2$, $b = 8$; $L = \{\frac{1}{4}\}$
b) $\frac{a}{x} = b$; $a = \frac{5}{8}$, $b = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{8}{63}}$; $L = \{\frac{4}{9}\}$
c) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{36}$, $b = \frac{4}{9}$; $L = \{16\}$
d) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{1,2}$, $b = \frac{4,6}{2,3}$; $L = \{2,4\}$

4. a) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{3,4}$, $b = \frac{15}{10,2}$; $L = \{5\}$

b) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{6,6}{4,4}$; $L = \{9\}$

c) $\frac{a}{x} = b$; $a = 0,4$, $b = \frac{9,6}{12}$; $L = \{0,5\}$

d) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{0,001}$, $b = \frac{12}{0,12}$; $L = \{0,1\}$

e) $\frac{a}{x} = b$; $a = 0,3$, $b = \frac{30}{17}$; $L = \{0,17\}$

f) $a \cdot x = b$; $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1,7}{4}$; $L = \{3,4\}$

Lerneinheit D 13: Verhältnisgleichungen bei direkter Proportionalität und umgekehrter Proportionalität

o 17 z. B. 30 : 1 = 60 : 2, 30 : 1 = 150:5, 90 : 3 = 210 : 7

o 18 z. B. 1 : 3 = 30 : 90, 180 : 90 = 6 : 3, 150 : 210 = 5 : 7

o 19 Die Verhältnisse $\frac{y}{x}$ sind alle voneinander verschieden.
$\frac{36}{1} = 36$; $\frac{18}{2} = 9$; $\frac{12}{3} = 4$, ...

o 20 z. B. 36 : 12 = 3 : 1, 9 : 6 = 6 : 4, $\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

1. a) $k = 0,75$ b) $k = 60$ c) $k = 3,5$ d) $k = 5,0$

2. a) Es gilt $y \sim x$. b) z. B. $\frac{1,6}{0,9}$, $\frac{3,2}{1,8}$, $\frac{4,8}{2,7}$, $\frac{6,4}{3,6}$

Lerneinheit D 14: Anwendungen zur direkten und zur umgekehrten Proportionalität

o 21 Weil die Geschwindigkeit in Kilometern je Stunde angegeben war.

o 22 a) $\frac{1,3}{2,0} = \frac{x}{8,0}$ und $\frac{x}{1,3} = \frac{8,0}{2,0}$ lassen sich besonders einfach umformen, da die Variable im Zähler steht.

b) Bei direkter Proportionalität gehört in dieser Aufgabe zum Verhältnis $\frac{1,3}{2,0}$ das Verhältnis $\frac{x}{8,0}$ und nicht das Verhältnis $\frac{8,0}{x}$.

o 23 Bei umgekehrter Proportionalität gehört in dieser Aufgabe zum Verhältnis x : 5 das Verhältnis 15 : 20 und nicht das Verhältnis 20 : 15.

1.

	3	8	7,5	15	24
k = 43	129	344	322	645	1 032
k = 47	141	376	352	705	1 128

2. a) Die Fahrzeit ist umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit.
b) 180 km

3.* a) $\gamma = 30°$ $\alpha = 75°$; $\gamma = 40°$ $\alpha = 70°$; $\gamma = 50°$ $\alpha = 65°$
b) Keine direkte Proportionalität, denn je größer y wird, desto kleiner wird x.
Keine umgekehrte Proportionalität, denn z. B. $30:75 \neq 40:70$.

4. Zwischen Masse und Kantenlänge eines Würfels aus Glas besteht keine Proportionalität, denn $\frac{20}{2} \neq \frac{160}{4}$.

5. 6,80 M 6. a) 103,2 kg b) 25,8 kg

7. a) 240 m b) 144 m c) 80 m d) 480 m

8. a) Peter 6 Jahre; Ute 18 Jahre
Ute war dreimal so alt wie Peter.
b) Nein, vor 6 Jahren war Ute dreimal so alt, heute ist sie nur noch doppelt so alt wie Peter.

9. Keine direkte Proportionalität, da die Anzahl der Hefte im Schrank abnimmt und die Anzahl der ausgegebenen Hefte zunimmt.
Keine umgekehrte Proportionalität, da z. B. $40 \cdot 10 \neq 30 \cdot 20$ ist.

10. a) 75 l Benzin b) 2,4 l Öl c) 49,5 l Benzin; 3,6 l Öl

11. a) 10 h b) 6 h c) 15 h d) 7,5 h e) 1,2 h (aber nicht real)

12. a) 9 Schüler b) 8 Schüler c) 12 Schüler
d) 7 Schüler schaffen die Arbeit nicht in 10 h, jedoch 8 Schüler werden in weniger als 10 h fertig.

13. a) $\frac{11}{12}$ h = 55 min b) $\frac{11}{15}$ h = 44 min c) $\frac{11}{20}$ h = 33 min

14. a) 10,5 km b) 17,5 km c) 8,75 km

15. 1,20 M

1. a) $x = 23$ d) $b = \frac{7}{2}$ g) $k = \frac{1}{2}$ k) $x = 2,4$
   b) $x = 31,5$ e) $x = 0$ h) $w = 96$ l) $y = 82,11$
   c) $x = \frac{1}{6}$ f) $x = 2,16$ i) $x = 8$ m) $z = \frac{51}{55}$

2. a) $t = \frac{5}{12}$ d) $a = 3,76$ g) $t = 0,8$ k) $c = \frac{7}{6}$
   b) $L = \emptyset$ e) $x = \frac{11}{5}$ h) $b = 0,6$ l) $t = 0$
   c) $x = \frac{7}{27}$ f) $x = \frac{50}{3}$ i) $t = \frac{72}{91}$ m) $a = 1,2$

3.* a) $L = Q_+$ d) $t = \frac{7}{18}$ g) $L = \emptyset$
   b) $t = 5$ e) $L = \emptyset$ h) $x = \frac{8}{7}$
   c) $x = \frac{1}{4}$ f) $x = 1,75$ i) $L = \emptyset$

4. a) Nein (4 577 ist ungerade)
   b) Ja (4 576 ist wie 2 · x eine gerade Zahl)
   c) Nein (5238 ist nicht durch 4 teilbar)
   d) Ja (36 243 ist durch 3 teilbar)
   e) Ja (4 · x und 6 728 sind durch 4 teilbar)
   f) Ja (4 524 ist wie 3 · x durch 3 teilbar)
   g) Ja (82 584 ist durch 9 teilbar)
   h) Ja (462 354 ist durch 2 und durch 3 teilbar)
   i) Nein (2 358 ist nicht durch 10 teilbar)
   k) Ja (53 436 ist durch 3 und durch 4 teilbar)
   l) Ja (621 456 ist durch 8 teilbar)
   m) Nein (56 274 ist nicht durch 4 teilbar)

5. a) 11,9 l ≈ 12 l b) 31,45 l ≈ 32 l c) 17 l

6. 1,2 ha b) $\frac{5}{6}$ h = 50 min

7. 400 l Wasser je Quadratmeter 8. 84 Tage

9. a) 42,9 kg ≈ 43 kg Butter
   b) $54,\overline{54} \approx 55$; 55 l Milch

10. a) 27 h
    b) 58 h

11. a) $x : 22 = 12 : 10$
    $x = \frac{12 \cdot 22}{10} = 26,4 \approx 27$
    Rund 27 h werden benötigt.
    b) Mehr als 4 h, aber weniger als 5 h Verzögerung

12. a = 4,5 cm 13. a) 12 m b) fast 16 m 14. nein

15. Bild D 15 a) Mo: 119 km; Di: 138 km; Mi: 128,5 km; Do: 111,5 km; Fr: 158 km; insgesamt: 655 km
    b) Mo: 23,8 l ≈ 24 l; Di: 27,6 l ≈ 28 l; Mi: 25,7 l ≈ 26 l; Do: 22,3 l ≈ 22 l; Fr: 31,6 l ≈ 32 l; insgesamt: ≈ 132 l
    c) $v = \frac{s}{t}$; $s = 12,5$ km, $t = \frac{1}{4}$ h
    $v = 12,5 \cdot 4 \frac{km}{h} = 50 \frac{km}{h}$

16. 6 Eier (Diese Aufgabe ist nicht real, denn die Legefreudigkeit von Hühnern kann man nicht durch Proportionalitäten berechnen, schon gar nicht aus Bruchteilen von Hühnern, Tagen und Eiern.)

17. a) m ≈ 8,1 g; m ≈ 14,9 g b) V ≈ 3,7 cm^3, V ≈ 18,5 cm^3

18. Nach einem weiteren Jahr, also nach 6 Jahren.

19. Genauso lange, also 6 min. 20. 20 cm

21. Nach 6 min hat das Wasser eine Temperatur von 80 °C.

22. a) 909 kg Leinsamen, also etwas weniger als 10 dt Leinsamen.
    b) 66 kg Öl, also mehr als 60 kg oder weniger als 70 kg Öl.

23. 228 M Lohn; etwas mehr als 4 h.

24. Nach 2 h legt er 320 km zurück.
    Für 450 m benötigt er etwas mehr als 10 s.
    (0,002 812 5 h = 0,002 812 5 · 60 min = 0,168 75 min = 10,125 s)

25. a) 54 min bzw. 24 min b) 108 min bzw. 48 min
    c) 180 min bzw. 80 min d) 90 min bzw. 40 min
    e) 144 min bzw. 64 min f) 162 min bzw. 72 min

26. $\frac{1}{2}$ h 27.* 45 kg Pflaumenmus

28. a) 1 min; 80 °C $2\frac{1}{2}$ min; 65 °C 5 min; 48 °C
    b) 75 °C; $1\frac{1}{2}$ min 60 °C; 3 min 45 °C; $5\frac{3}{4}$ min

29. Aufgabe ist nicht sinnvoll. Daher gibt es auch keine vernünftige Antwort.

30. 105 cm Höhenunterschied, denn es sind 7 Stufen.

32. a)

x	1	10	15	0	$\frac{40}{3}$	40
y	7,5	75	112,5	0	100	300

b)

x	1	10	15	n.l.	2	$\frac{2}{3}$
y	200	20	$\frac{40}{3}$	0	100	300

33. $\frac{2\,890}{190} = \frac{289}{18} = 15\frac{4}{19}$

Der Bäcker kommt 15 Tage mit dem Vorrat aus.

34.

Verkehrsflugzeug mit Kolbenmotor	TU 134
a) 1 000 km	2 250 km ≈ 2 300 km
b) 1 666 $\frac{2}{3}$ km ≈ 1 700 km	3 750 km ≈ 3 800 km
c) 2 666 $\frac{2}{3}$ km ≈ 2 700 km	6 000 km
d) 666 $\frac{2}{3}$ km ≈ 670 km	1 500 km
e) 1 333 $\frac{1}{3}$ km ≈ 1 300 km	3 000 km
f) 2 000 km	4 500 km

35. Radfahrer: 72 km; PKW: 288 km; Schnellzug: 360 km

36. $b \sim \frac{1}{a}$; $a \cdot b = A = 18\ cm^2$

z. B.

a in m	1	2	3	4	9	0,5
b in m	18	9	6	4,5	2	36

37. Ja; Kisten insgesamt 9 515 kg = 9,515 t < 10 t

38. 3 375 m = 3,375 km ≈ 3,4 km; 6 750 Schritte

39. a) 84 kg b) 56 Brote

40.

Maurer	1	2	3	4
Alter	<u>64</u>	<u>16</u>	<u>25</u>	24
Alter vor 15 Jahren	<u>49</u>	<u>1</u>	10	<u>9</u>

(Quadratzahlen wurden unterstrichen)

64 + 16 + 25 + 24 = 129

41. a) $\frac{1}{4}$ kg Rotkohl; $\frac{1}{12}$ l Wasser; $\frac{1}{24}$ l Weinessig; 6,7 g Zucker;

33 $\frac{1}{3}$ g Schmalz; 1,7 g Salz; 1 Nelke; $\frac{1}{3}$ Zwiebel; $\frac{2}{3}$ Äpfel

b) $\frac{3}{2}$ kg Rotkohl; $\frac{1}{2}$ l Wasser; $\frac{1}{4}$ l Weinessig; 40 g Zucker;

200 g Schmalz; 10 g Salz; 6 Nelken; 2 Zwiebeln; 4 Äpfel

c) 2,5 kg Rotkohl; $\frac{5}{6}$ l Wasser; $\frac{5}{12}$ l Weinessig; 67 g Zucker;

333 $\frac{1}{3}$ g Schmalz; 17 g Salz; 10 Nelken; 3 $\frac{1}{3}$ Zwiebeln; 6,7 Äpfel

(Es wurden hier die rechnerischen Ergebnisse angegeben. Der Hinweis darauf, daß beim Kochen geeignete Mengen verwendet werden, ist hier besonders wichtig.)

Kurzwort: 002199 Loesungsh. Mathe 6
ISBN 3-06-002199-6