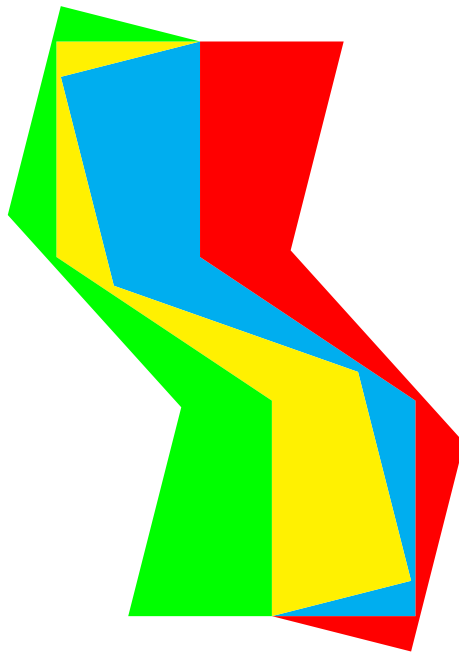


Eigenartige Parkette

Voderbergartige Parkettsteine und Heesch's Parkettproblem

Arbeit für Jugend forscht von

Alexander Thomas und
Christoph Standke



externer Betreuer: Dr. Frank Göring, TU Chemnitz

interner Betreuer: Steffen Polster, Johannes-Kepler-Gymnasium Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Notation und Begriffsklärung	2
3	Voderbergartige Parkettsteine	3
3.1	Historisches	3
3.2	Stand der Forschung	3
3.3	Ergebnisse	4
3.3.1	Grundlegende Eigenschaften des Voderbergschen Neunecks	4
3.3.2	Veränderung des Voderbergschen Neunecks mittels Eschertrick	6
3.3.3	Verbesserung mit Kreisevolventen	7
3.3.4	Beschränkungen des Winkels an der Spitze	8
3.3.5	Rechtwinklige Parkettsteine mit schwacher Umschließungszahl 2	9
4	Heeschs Parkettproblem	10
4.1	Historisches	10
4.2	Stand der Forschung	10
4.3	Ergebnisse	11
4.3.1	Nichtkonvexe Beispiele mit Heesch-Zahl 1 und 2	11
4.3.2	Konvexe Parkettsteine mit endlicher Heesch-Zahl	13
5	Ausblick und weitere Fragestellungen	14
6	Danksagung	16
7	Literaturverzeichnis	16
8	Eidesstattliche Erklärung	17
9	Anhang	18
9.1	Bastelanleitung	18
9.2	Beweise und Herleitungen zu voderbergartigen Parkettsteinen	19
9.2.1	Abstand zwischen glatten Kurven	19
9.2.2	Die Kreisevolvente als optimierte Randkurve	20
9.2.3	Berechnung der nötigen Kreisevolvente	23
9.2.4	Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente	27
9.3	Weitere interessante rechtwinklige Teile	30
9.4	Beweise und Herleitungen zu Heeschs Parkettproblem	32
9.4.1	Ammanns Teil mit Heesch-Zahl 3	32
9.4.2	Zu konvexen Parkettsteinen mit endlicher Heesch-Zahl	32

1 Einleitung

In der Praxis finden sich an vielen Stellen Anwendungen von Parkettierungen. Am auffälligsten äußert sich dies bei Fliesenmustern an Wänden und bei Mustern auf Tapeten oder Bordüren. Prächtige Mosaike gehören ebenso dazu wie einfache Kachelungen in Bad oder Küche. Doch auch bei Fußbodenauslegungen, zum Beispiel von Gehwegen, stößt man auf sie. Ein besonders interessantes Phänomen sind die Bodenplatten an Tankstellen, welche sehr oft regelmäßige Sechsecke sind. Auch in der Natur findet sich an vielen Stellen die Ausnutzung der materialsparenden Parkette. Am bekanntesten ist sicherlich die Bienenwabe, aber auch Schneeflocken bilden sechseckige Muster. Ebenso stecken regelmäßige Auslegungen des Raumes in Kristallen und Moleküllagerungen, zum Beispiel in Graphit. Dabei entstehen aus einfachen Grundbausteinen komplexe Strukturen. In die Technik zurückgekehrt finden sich weitere Anwendungen bei Reifen- und Schuhprofilen sowie bei Firmenlogos. Selbst der moderne Fußball stellt eine Auslegung der Kugel dar.

Schließlich stecken Parkette wegen ihrer hohen Ästhetik und Symmetrie in Mandalamotiven und Kunstwerken. So hat beispielsweise Maurits Cornelis Escher in vielen seiner Werke Parkettierungen verwendet. Dabei entwickelte er selbst eine Möglichkeit der Modifikation eines Parketts, den sogenannten Eschertrick.

Aufgrund dieser Vielzahl an Anwendungen, ihrer Ästhetik und ihrer Bedeutung innerhalb der Geometrie erweckt die Analyse und Erforschung von Parketten großes Interesse in der Mathematik. Besonders im Bereich der periodischen Parkettierungen sind durch die Einführung der Gruppentheorie viele Problemstellungen gelöst worden, so zum Beispiel die vollständige Klassifizierung aller ebenen periodischen Parkettierungen. Besonders viele offene Fragestellungen finden sich im Bereich der aperiodischen Parkettierungen und ebenso bei endlichen Parketten.

In dieser Arbeit gehen wir auf zwei dieser weniger erforschten Gebiete näher ein. Dabei beschäftigen wir uns mit Parketten, welche besonders interessante und eigenartige Eigenschaften aufweisen.

Im ersten Abschnitt untersuchen wir vorderbergartige Parkettsteine. Diese können die Ebene auslegen und haben zusätzlich die Eigenschaft, dass zwei Parkettsteine einen dritten umschließen können. Motivation für die Umschließung ist die überraschende Tatsache, dass es Parkettsteine gibt, von denen beliebig viele Kopien (zum Beispiel 1000) mit nur zwei weiteren umschlossen werden können.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit Heesch's Parkettproblem, welches 1968 von Heinrich Heesch formuliert wurde. Darin stellt er die Frage, ob es eine größtmögliche Anzahl an Schichten um einen zentralen Parkettstein gibt, welche aus dessen Kopien bestehen, ohne dass eine Parkettierung der Ebene mit diesem Parkettstein möglich ist. Der Grund dieser Frage ist die Vorstellung, dass eventuell ein Parkettstein existiert, der dutzende Male umrundet werden kann, mit welchem aber die Ebene trotzdem nicht ausgelegt werden kann¹.

Unsere Arbeit ist wie folgt strukturiert: In jedem der zwei großen Abschnitte beginnen wir mit historischen Begebenheiten, gehen dann zum aktuellen Stand der Forschung und präsentieren danach unsere eigenen Ergebnisse. Im Anhang finden sich dann Beweise, Erläuterungen und Berechnungen zu den eigenen Resultaten.

Am Ende fassen wir bereits bestehende und eigene offene Fragestellungen zusammen, um einen Ausblick auf die weitere Forschung zu geben.

Alle Abbildungen dieser Arbeit sind von uns selbst erstellt.

¹Ein solches Teil würde sich als Fußbodenparkett gut eignen, da es durch seine Eigenschaft die Endlichkeit des Zimmers unterstreicht.

2 Notation und Begriffsklärung

- Parkettierung:

Unter einer *Parkettierung* versteht man eine lückenlose und überlappungsfreie Auslegung der Ebene mit Parkettsteinen. Dabei ist ein Parkettstein, auch einfach „Teil“ genannt, ein beschränkter Bereich der Ebene, der von einer einfach zusammenhängenden Kurve umschlossen wird. Wir beschränken uns in dieser Arbeit nur auf den Fall, dass alle Parkettsteine paarweise kongruent sind.

Eine Parkettierung ist *periodisch*, wenn es unendlich viele Kongruenzabbildungen gibt, die die Parkettierung in sich selbst überführt. Ist dies nicht der Fall, so heißt die Parkettierung *aperiodisch*.

- Parkett:

Ein *Parkett* ist eine lückenlose und überlappungsfreie Auslegung eines endlichen Gebietes der Ebene mit paarweise kongruenten Parkettsteinen.

- fast vollständig umschlossen bzw. vollständig umschlossen:

Ein Gebiet A wird von einem Gebiet B *fast vollständig umschlossen*, wenn jeder Randpunkt von A auch ein Randpunkt von B ist und es mindestens einen Randpunkt von A gibt, sodass in jeder seiner ϵ -Umgebungen ein Punkt existiert, der weder zu A noch zu B gehört. Wird zum Beispiel an ein Quadrat Q an jede Seite ein kongruentes Quadrat gelegt, so ist Q fast vollständig von den vier anderen Quadraten umschlossen, da zum Beispiel an einem Eckpunkt von Q in jeder ϵ -Umgebung ein Punkt existiert, der nicht zu den insgesamt fünf Quadraten gehört.

Dagegen wird ein Gebiet A von einem Gebiet B *vollständig umschlossen*, wenn es für jeden Randpunkt von A eine (beliebig kleine) ϵ -Umgebung gibt, in der nur Punkte liegen, die entweder zu A oder zu B gehören ².

- Umschließungszahl (Surround Number):

Die kleinstmögliche Anzahl an Kopien, die gebraucht wird, um einen Parkettstein vollständig zu umschließen, nennt man die *Umschließungszahl*. Analog sprechen wir von der *schwachen Umschließungszahl* (*Weak Surround Number*), wenn die geforderte Umschließung nur fast vollständig ist.

- voderbergartiger Parkettstein:

Ein Parkettstein heißt *voderbergartig*, wenn er einerseits eine schwache Umschließungszahl 2 hat und andererseits mit ihm eine aperiodischen Parkettierung der Ebene möglich ist.

- verbessertes Voderbergteil:

Den voderbergartigen Parkettstein, dessen Randkurve die Kreisevolvente ist, nennen wir *verbessertes Voderbergteil*.

- rechtwinkliger Parkettstein:

Ein Polygon, dessen Innenwinkel sämtlich Vielfache von 90° sind, nennen wir *rechtwinkligen Parkettstein*.

- Heesch-Zahl (Heesch Number):

Die maximale Anzahl an lückenlosen und überlappungsfreien Schichten (in [8] Koronen

²Diese Definition führt dazu, dass eine Kreisscheibe ihr eigenes Komplement, also die Ebene ohne diese Kreisscheibe, vollständig umschließt. In dieser Arbeit werden wir aber nur endliche Gebiete betrachten.

genannt), die aus kongruenten Teilen T bestehen, die um ein zentrales Teil T gelegt werden kann, nennt man die *Heesch-Zahl*. Dabei muss die erste Korona das zentrale Teil T und jede weitere Korona die vorherige vollständig umschließen. Diese Zahl wurde von dem deutschen Mathematiker Heinrich Heesch eingeführt.

- Eschertrick:

Ausgehend von einem Parkett oder einer Parkettierung wird durch den *Eschertrick* ein neues Parkett bzw. eine neue Parkettierung geschaffen, indem an jeden Parkettstein ein Gebiet angehängt wird und danach so Gebiete wieder weggenommen werden, dass alle Parkettsteine wieder kongruent sind und es keine Überlappungen oder Lücken gibt. Der niederländische Mathematiker und Künstler Maurits Cornelis Escher verwendete in seinen Kunstwerken dieses Verfahren.

3 Voderbergartige Parkettsteine

3.1 Historisches

Im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) von 1934 stellte Karl Reinhardt (1895-1941) folgende Aufgabe: „In der Ebene grenzen zwei beschränkte (nicht konvexe) kongruente Bereiche (z.B. zwei einfach Polygone) von außen so aneinander, daß zwischen ihnen ein Loch bleibt. Es ist zu beweisen, daß dieses Loch nicht in zu den genannten kongruente Bereiche zerlegt werden kann. (Hineinlegen kann man mitunter einige.)“ (aus [10] entnommen). Zu der Zeit war diese Frage eine unbewiesene Vermutung. Dabei wurde diese Aussage allgemein als richtig angenommen. Umso erstaunlicher war es, als Heinz Voderberg (1911-1945), ein Schüler von Karl Reinhardt, die Vermutung widerlegte, indem er ein kurioses Neuneck angab. Es hat die Eigenschaft, dass zwei seiner Kopien von zwei weiteren fast vollständig umschlossen werden können. Es ist sogar möglich mit zwei der Kopien eine dritte fast vollständig zu umschließen. Zudem kann mithilfe dieses Neunecks eine interessante spiralförmige Parkettierung der gesamten Ebene erreicht werden. Zu jener Zeit versuchten einige Mathematiker alle Parkettierungen der Ebene zu klassifizieren, und mit der spiralförmigen Zerlegung gelang es Herrn Voderberg eine bis dahin unbekannte Auslegung zu finden. Seine Entdeckungen finden sich in [12] und [13]. Leider verstarb der junge Heinz Voderberg in den letzten Tagen des Zweiten Weltkrieges, als er sich mit seiner Einheit ergeben wollte. Mehr Einzelheiten zu seinem Leben finden sich in [11]. Eine Darstellung des damaligen Forschungsstandes in dem Gebiet der Geometrie, speziell dem über Parkettierungen, und zugleich eine eingehende Beschreibung des Lebens und der Leistungen von Karl Reinhardt findet sich in [6].

3.2 Stand der Forschung

In dem Gebiet der voderbergartigen Parkette gibt es nur wenig aktive Forschung. In [7] wird die Frage nach einem Parkettstein mit Umschließungszahl 2 gestellt. Casey Mann modifiziert dafür das Voderbergsche Neuneck so mittels Eschertrick, dass es immer noch ein Polygon bleibt, nun aber eine vollständige Umschließung möglich ist. Dabei scheint diese Veränderung unnötig kompliziert zu sein.

Zudem beschreibt Casey Mann auf Seite 385 eine allgemeine Konstruktion für ein voderbergartiges Teil, welches wir mit V_n bezeichnen, mit der Eigenschaft, dass $2n$ und $2n+1$ Kopien des Parkettsteins von nur zwei Teilen fast vollständig umschlossen werden können. Dabei kann auch dieser Parkettstein so verändert werden, dass er eine Umschließungszahl 2 hat.

In seinem Artikel hebt Casey Mann aber auch die vielen noch ungelösten Fragen hervor. So ist bis heute nicht geklärt, ob es einen Parkettstein gibt, der eine ebene Parkettierung möglich macht, in welcher dieses Teil von zwei Kopien vollständig umschlossen wird. Daher wird in der Definition eines voderbergartigen Parkettsteins nur eine schwache Umschließungszahl gefordert, da sonst kein voderbergartiger Parkettstein bisher bekannt wäre. Zudem ist die analoge Fragestellung der möglichst kleinen Umschließungszahl im drei- und höherdimensionalen Raum ungelöst. Casey Mann beweist, dass im dreidimensionalen Raum ein Prisma, welches als Grundfläche sein modifiziertes Voderbergsches Neuneck hat, eine räumliche Umschließungszahl 4 liefert.

3.3 Ergebnisse

3.3.1 Grundlegende Eigenschaften des Voderbergschen Neunecks

Die wichtigste Eigenschaft des Voderbergschen Neunecks ist, dass es eine schwache Umschließungszahl 2 hat, d.h. dass es von zwei Kopien fast vollständig umschlossen werden kann. Zudem kann die Ebene auf mehrere Arten aperiodisch mit diesem Neuneck ausgelegt werden. Die bekannteste Parkettierung mit dem Voderbergschen Neuneck ist eine Doppelspirale, die in Abbildung 1 in Ansätzen zu sehen ist. Es ist aber auch eine Auslegung in Form von konzentrischen Kreisen möglich. In diesen Parkettierungen taucht die fast vollständige Umschließung eines Parkettsteins durch zwei Kopien an vielen Stellen auf. Dennoch ist auch eine periodische Parkettierung möglich. In [11] finden sich anschauliche Bilder zu diesen drei Parkettierungen.

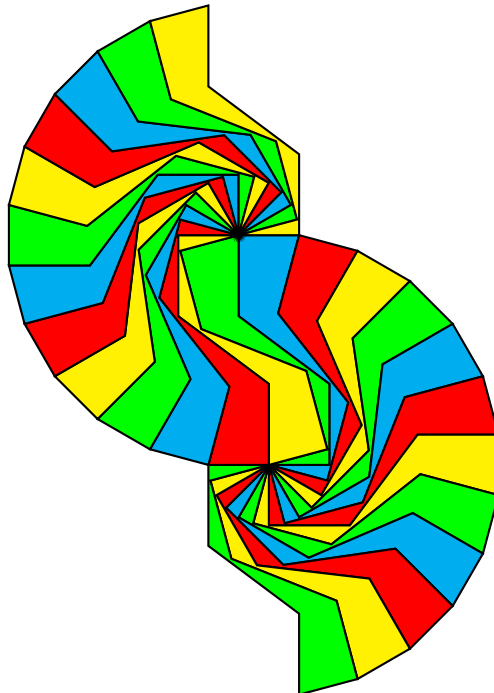


Abb. 1: Doppelspirale mit Voderbergschen Neunecken

Ausgehend von der fast vollständigen Umschließung in Abbildung 2 rechts wollen wir nun Eigenschaften des links daneben befindlichen Vorderbergschen Neunecks ableiten. Damit der rote in den blauen Parkettstein überführbar ist, braucht es einen kleinen Winkel φ . Das Drehzentrum für diese Abbildung liegt im Eckpunkt F , der „Spitze“ des Neunecks. Aufgrund der Bedingung an einen vorderbergartigen Parkettstein, dass er eine aperiodische Parkettierung ermöglichen muss, ist φ ein positiver ganzzahliger Bruchteil von 360° , also der Form $\frac{360^\circ}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Damit der blaue in den gelben Parkettstein überführbar ist, braucht es noch eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt M der Seite $\overline{CD}$. Damit ergibt sich, dass der Streckenzug von E über D zu M kongruent ist mit demjenigen von M über C zu B und dass der gesamte Streckenzug von E zu B kongruent zu demjenigen von G zu A ist.

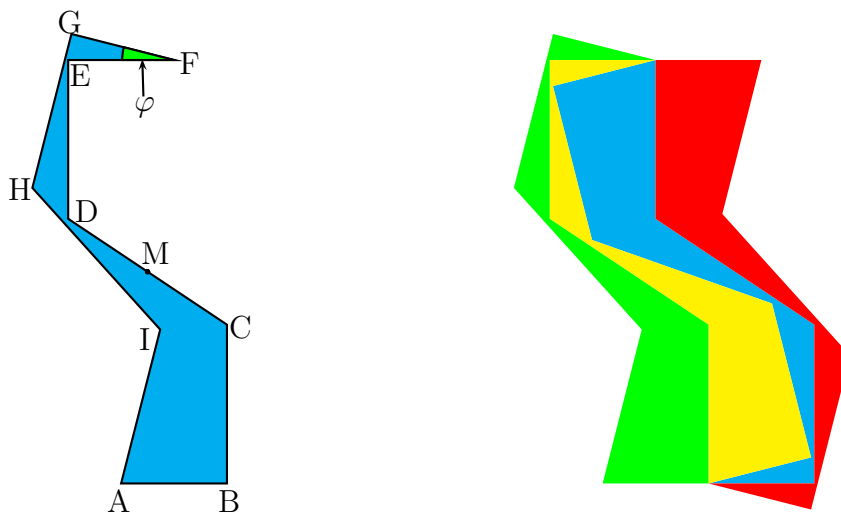


Abb. 2: Vorderbergsches Neuneck und dessen Umschließung

Damit ist es möglich eine Konstruktion des Vorderbergschen Neunecks anzugeben. Dabei wollen wir die Drehzentren F und M sowie den Drehwinkel φ als bekannt voraussetzen. Dreht man F um M mit dem Winkel 180° , so erhält man A . Wird nun A um F mit dem Winkel φ gedreht, so bekommt man B . Dieser wiederum um M um 180° gedreht ergibt den Punkt E . Diesen um F um $-\varphi$ gedreht ergibt schließlich G . Mit dem Festlegen der Drehzentren und dem Winkel an der Spitze φ ergibt sich also ein Gerüst für ein vorderbergartiges Teil. Im speziellen nimmt man sich nun noch einen Punkt C , aus welchem sofort D , H und I folgen. Dabei muss bei der Wahl von C darauf geachtet werden, dass das resultierende Neuneck nicht überschlagen ist. Im Folgenden gehen wir immer von der Konstruktion des Vorderbergschen Neunecks nach [7] auf S. 385 aus. Diese wird im Anhang im Abschnitt „9.2.4 Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente“ eingehend beschrieben. Diese Konstruktion führt dazu, dass der Winkel $\angle CBA$ immer ein rechter ist. Die Eckenbezeichnung des Vorderbergschen Neunecks aus Abbildung 2 gilt für die gesamte Arbeit.

Auffällig an dem Neuneck ist, dass der Eckpunkt E sehr nah an der Seite $\overline{GH}$ und D sehr nah an der Seite $\overline{HI}$ zu liegen kommt. Daher ist eine Herstellung des Vorderbergschen Neunecks nur mit einem sehr robusten Material möglich. Diese Region des Neunecks bezeichnen wir als seinen „Hals“. Wie wir in „3.3.3 Verbesserung mit Kreisevolventen“ ausführen, optimieren wir die Halsdicke des Neunecks mit einer beliebigen Randkurve, sodass eine Herstellung zu Hause aus Pappe möglich wird.

3.3.2 Veränderung des Vorderbergschen Neunecks mittels Eschertrick

Zu Beginn unserer eigenständigen Arbeit versuchten wir ein Gegenbeispiel zur Aufgabe von Herrn Reinhardt (siehe [10]) zu finden, bei dem das Loch, bestehend aus zwei Teilen, vollständig von zwei weiteren umschlossen wird. Zudem wollten wir eine im Vergleich zu der Konstruktion aus [7] einfachere Abänderung des Vorderbergschen Neunecks erreichen, damit ein Parkettstein mit Umschließungszahl 2 entsteht. Dabei fiel schnell auf, dass es mit glatten Kurven besser und einfacher zu gehen scheint, als zu versuchen ein Polygon zu erhalten.

Für das erste Ziel legten wir um den Eckpunkt B des Vorderbergschen Neunecks einen Kreis mit sehr kleinem Radius (siehe Abbildung 3). Mithilfe des Eschertricks, angewendet auf das Parkett, bei dem zwei Neunecke von zwei weiteren umschlossen werden, gelang es dann schnell das Teil so abzuändern, dass das Loch, bestehend aus dem gelben und blauen Teil, von zwei Kopien vollständig umschlossen wird. Hier ein Bild des so entstandenen Parkettsteins sowie seine Umschließung:

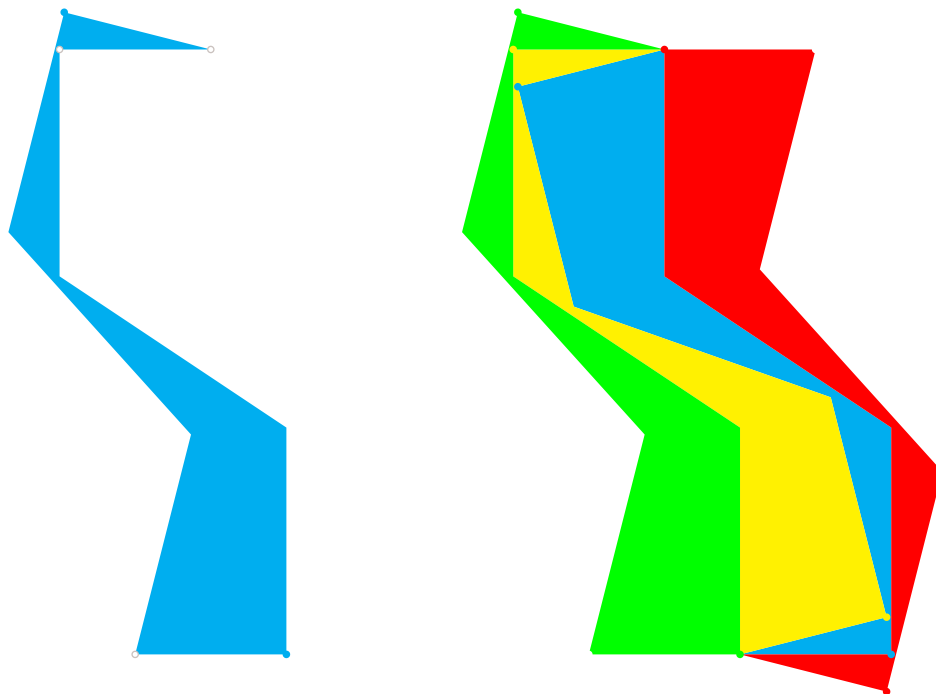


Abb. 3: erste Modifikation des Vorderbergschen Neunecks und deren Umschließung

Dieser Parkettstein hat zudem die kuriose Eigenschaft, dass es drei Kopien braucht, um ein Teil vollständig zu umschließen (es hat also eine Umschließungszahl 3), aber nur zwei, um zwei Teile einzuschließen.

Um das zweite Ziel zu erreichen, legten wir um den Eckpunkt A des Vorderbergschen Neunecks einen Kreis mit sehr kleinem Radius. Zusätzlich brachten wir bei B eine Einfassung an, in welche der Kreis bei A hineinpasst (siehe Abbildung 4). Durch Anwendung des Eschertricks

gelangten wir zu folgendem Parkettstein mit Umschließungszahl 2:

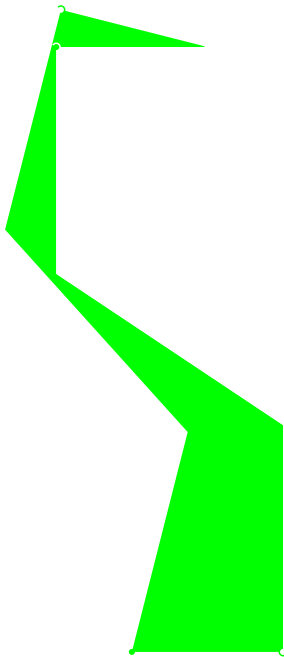


Abb. 4: zweite Modifikation des Vorderbergschen Neunecks

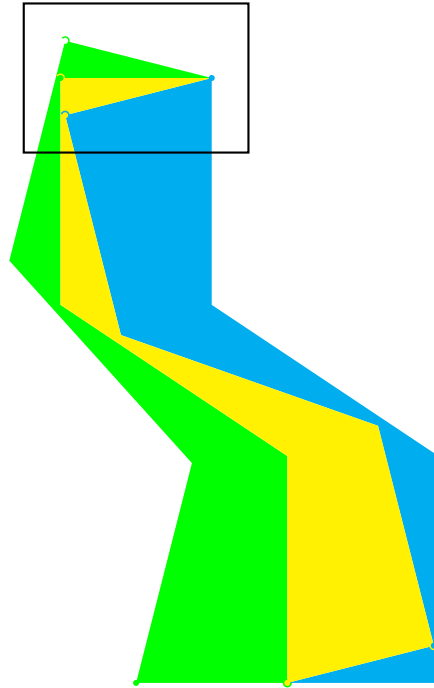


Abb. 5: Umschließung mit der zweiten Modifikation

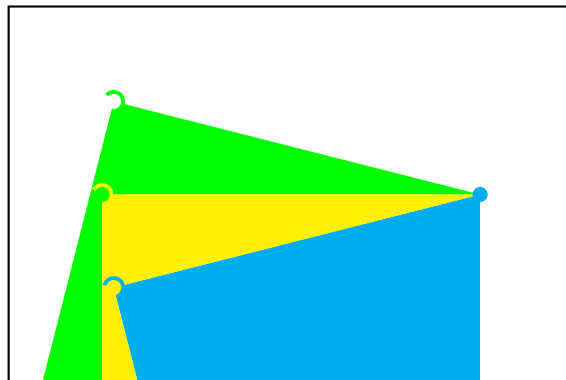


Abb. 6: Ausschnitt aus der Umschließung mit der zweiten Modifikation

Der kleine Kreis um B bzw. A wurde aufgrund seiner Drehsymmetrie verwendet. Für einen konkreten Parkettstein mit $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ kann auch ein regelmäßiges n -Eck anstatt des Kreises verwendet werden. Dadurch bleibt der modifizierte Parkettstein ein Polygon.

Die zweite Modifikation kann auch auf die allgemeinen Vorderbergschen Polygone V_n von Casey Mann (vgl. [7]) angewendet werden. Alle veränderten Parkettsteine haben zudem eine Heesch-Zahl 1. Mit allen diesen Modifikationen geht die Möglichkeit des Parkettierens verloren. Bis heute ist ungeklärt, ob es ein vorderbergartiges Teil mit Umschließungszahl 2 gibt.

3.3.3 Verbesserung mit Kreisevolventen

Auffällig am Vorderbergschen Neuneck ist, dass es eine sehr enge Stelle am Hals besitzt. Dadurch ist es schlecht möglich, sich das Neuneck selbst zu basteln. Doch gerade wenn es in der Mathematik die Möglichkeit gibt, etwas leicht anzufertigen und damit zu experimentieren, kommen

plötzliche Entdeckungen und Anregungen für weitere Forschung.

Durch dieses motiviert optimierten wir zuerst den voderbergartigen Parkettstein mit beliebiger Randkurve. Ausgehend von Überlegungen über den Abstand zweier Kurven kommen wir zu dem Resultat, dass eine Randkurve, die bei der Drehung um den Winkel φ in eine Kurve mit konstantem Abstand zu ihr übergeht, eine deutliche Verbesserung der Halsdicke hervorruft. Um nun eine solche zu finden, zeigen wir, dass es sogar eine Kurve gibt, bei der dies für Drehungen um einen beliebigen Winkel gilt. Wie wir im Anhang im Abschnitt „9.2.2 Die Kreisevolvente als optimierte Randkurve“ zeigen, wird diese Bedingung von der Kurve erfüllt, die man erhält, wenn ein um einen Kreis gewickelter Faden straff abgezogen wird.

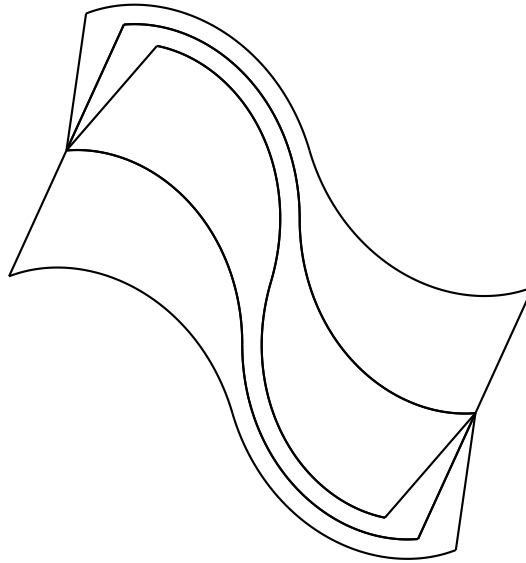


Abb. 7: Voderbergteil mit Kreisevolventenabschnitten als Randkurve

Dieses verblüffende Resultat führt zu einer Berechnung der nötigen Kreisevolvente und dadurch zu einer Konstruktionsbeschreibung des verbesserten Voderbergteils (siehe im Anhang in „9.2.3 Berechnung der nötigen Kreisevolvente“). Diese ist in Abbildung 7 mit Umschließung zu sehen. Alternativ kann auch eine geometrische Bestimmung durch den Schnitt zweier Kreisevolventen verwendet werden, um eine Konstruktion zu ermöglichen. Diese Methode liefert in der Praxis aber sehr ungenaue Werte. Werden die Drehzentren und der Drehwinkel φ vorgegeben, so gibt es genau eine Evolvente, die den Anforderungen genügt. Durch den Einsatz der optimierten Randkurve wird eine Dickenverbesserung von 250% erreicht, wie wir im Anhang in „9.2.4 Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente“ zeigen. Der dadurch dreieinhalbfach so dicke Hals sorgt dafür, dass das verbesserte Voderbergteil gut aus Pappe ausschneidbar ist. Eine Beschreibung dafür findet sich in „9.1 Bastelanleitung“.

3.3.4 Beschränkungen des Winkels an der Spitze

Vorab ist zu betonen, dass alle Winkelbeschränkungen, die in diesem Abschnitt gegeben werden, im Anhang in „9.2.4 Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente“ bewiesen werden.

Bei dem Voderbergschen Neuneck liegt φ durch die Konstruktion von Casey Mann [7] zwischen 0° und $16,43^\circ$. Aufgrund der Forderung an ein voderbergartiges Teil, dass sein Winkel an der Spitze ein ganzzahliger Bruchteil von 360° sein muss (siehe Abschnitt „2 Notation und Begriffsklärung“), nimmt φ also nur die Werte $\frac{360^\circ}{n}$ für $n \geq 22$ an ($\frac{360^\circ}{22} \approx 16,36^\circ$). Dabei ist der maximal mögliche Winkel gleichzeitig derjenige, der für die optimale Halsdicke sorgt.

Bei dem verbesserten Vorderbergteil liegt φ zwischen 0° und $\frac{360^\circ}{13} \approx 27,69^\circ$, damit das Teil überschneidungsfrei bleibt. Der Winkel, der für die optimierte Dicke sorgt, beträgt $\frac{360^\circ}{22} \approx 16,36^\circ$.

3.3.5 Rechtwinklige Parkettsteine mit schwacher Umschließungszahl 2

Nach der umfangreichen Analyse des Vorderbergschen Neunecks stellten wir uns die Frage nach einem rechtwinkligen Parkettstein, welcher ein Gegenbeispiel für die Aufgabe von Herrn Reinhardt (siehe [10]) ist. Ebenso interessierte uns die Existenz eines rechtwinkligen Parkettsteins mit schwacher Umschließungszahl 2.

Ausgehend von der in Abbildung 8 zu sehenden Ausgangslage wendeten wir den Eschertrick an, um ein lückenloses Parkett zu erreichen ³.

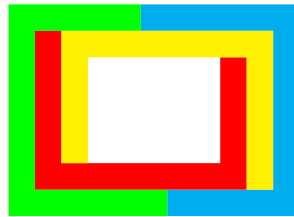


Abb. 8: Ausgangslage für den Eschertrick ⁴

Nach mehrmaliger Anwendung des Eschertricks gelangten wir zu einem Teil, von dem zwei Kopien zwei weitere vollständig umschließen, wobei allerdings zwei dünne Lücken verbleiben. Da der so entstandene Parkettstein einen langen „Rüssel“ hat, taufte wir ihn „Thomas Trunk Tile“. Die zwei Lücken in der Konfiguration in Abbildung 9 können beliebig dünn gemacht werden, wenn der Rüssel beliebig dünn wird.

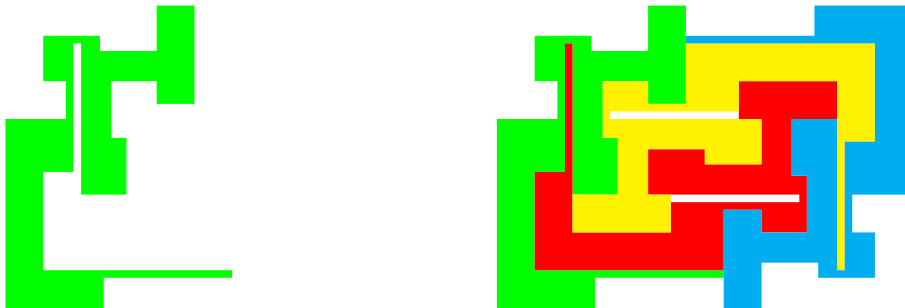


Abb. 9: Thomas Trunk Teil und dessen Konfiguration

Leider kommt es damit nicht zu einer lückenlosen Umschließung. Daher ist nicht geklärt, ob die Aufgabe von Herrn Reinhardt mit der zusätzlichen Einschränkung, dass der Parkettstein rechtwinklig ist, sich als lösbar erweist.

³Dabei ist zu bemerken, dass hier auch gespiegelte Teile verwendet werden. Obwohl in den uns bekannten vorderbergartigen Beispielen mit schwacher Umschließungszahl 2 keine gespiegelten Parkettsteine auftauchen, ist dies nach der Definition der Umschließungszahl erlaubt.

⁴Aus der Ausgangslage ist ersichtlich, warum bei der Fragestellung nach Teilen mit kleiner Umschließungszahl die Forderung nach lückenloser Umschließung gestellt wird: ohne diese Bedingung hätte das u-förmige Teil eine Umschließungszahl 2 und damit wäre die Fragestellung zu einfach.

Bei der Frage nach einem rechtwinkligen Parkettstein mit schwacher Umschließungszahl 2 führte einiges Experimentieren zu einem fast zusammenhängenden Teil (d.h. dass seine Randkurve nicht einfach geschlossen ist), bei dem ein Zentralteil (alle gelben Flächen zusammen) von zwei weiteren Kopien fast vollständig umschlossen wird:

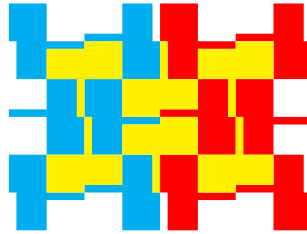


Abb. 10: nichtzusammenhängendes rechtwinkliges Teil mit schwacher Umschließungszahl 2

Nach der strengen Definition ist dieses Teil mit schwacher Umschließungszahl 2 kein Parkettstein, da seine Randkurve Selbstüberschneidungen aufweist. Daher ist die Existenz eines rechtwinkligen Parkettsteins mit schwacher Umschließungszahl 2 weiterhin ungelöst. Zwei Verbesserungen des Thomas Trunk Tiles und einen weiteren Parkettstein finden sich im Anhang (siehe „9.3 Weitere interessante rechtwinklige Teile“).

4 Heeschs Parkettproblem

4.1 Historisches

Heeschs Parkettproblem wurde 1968 von dem deutschen Mathematiker Heinrich Heesch (1906-1995) in seinem Buch „Reguläres Parkettierungsproblem“ formuliert (siehe [3]). Heesch fragt darin, ob es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, welches die Eigenschaft hat, dass eine Parkettierung der Ebene mit einem Teil T möglich ist, wenn es von Kopien k Mal umrundet werden kann. Anders ausgedrückt wirft er das Problem nach der Existenz einer größten endlichen Heesch-Zahl auf. Eine kurze Biographie zum Leben und Werk von Heinrich Heesch findet sich in [5].

Bevor die Fragestellung explizit formuliert wurde, war nur ein Teil mit einer endlichen Heesch-Zahl größer 0 bekannt - ein krummliniges Teil, welches 1928 von Karl Julius Lietzmann veröffentlicht wurde. Heinrich Heesch selbst gab in seiner Arbeit ein konvexes Fünfeck mit Heesch-Zahl 1 an. Erst 1991 wurde ein u-förmiges Polyomino ⁵ mit Heesch-Zahl 2 von Anne Fontaine gefunden. Im gleichen Jahr wurde ein modifiziertes Sechseck mit Heesch-Zahl 3 von Robert Ammann gefunden, welches lange Zeit Rekordhalter blieb (siehe Abbildung 37 im Anhang). Näheres zur Entwicklung von Heeschs Parkettproblem zusammen mit vielen Abbildungen findet sich in [8].

4.2 Stand der Forschung

In [1] werden aktuelle offene Probleme und Vermutungen, aber auch aktuelle Errungenschaften im Gebiet der Parkette und Parkettierungen sehr gut zusammenfassend dargestellt. Dabei wird

⁵Ein Polyomino ist ein aus mehreren Einheitsquadraten aufgebautes Polygon. Es ist also die Verallgemeinerung des Dominosteins.

besonders betont, dass in diesem Gebiet der Mathematik noch viele Fragen ungeklärt sind und dass selbst zusätzliche Einschränkungen, wie zum Beispiel eine Konvexitätsforderung, zu keinen signifikanten Erleichterungen führt. Insbesondere wird indirekt eingestanden, dass kein konvexes Teil mit Heesch-Zahl größer gleich 2 bekannt ist.

Der aktuelle Forschungsstand wird in [8] umfangreich dargestellt. Casey Mann zeigt darin zuerst die neuesten Entwicklungen von Teilen mit Heesch-Zahl 4 und 5. Er führt aus, dass bisher kein Teil mit einer endlichen Heesch-Zahl größer gleich 6 gefunden wurde. Illustrationen und Erklärungen finden sich auch in [9]. Danach stellt er Verbindungen von Heesch's Parkettproblem zu zwei tiefliegenden und bisher ungelösten Problemen in der Geometrie her. Das erste ist das sogenannte Dominoproblem für Einzelteile. Es soll dabei ein Algorithmus oder eine Entscheidungsregel gefunden werden, die angibt, ob ein vorgegebener Parkettstein die Ebene parkettiert oder nicht. Casey Mann zeigt, dass es keine größte Heesch-Zahl gibt, wenn das Dominoproblem für Einzelteile unentscheidbar ist. Daher gilt auch die Kontraposition des Satzes: wenn es eine größte Heesch-Zahl gibt, so ist das Dominoproblem für Einzelteile entscheidbar. Das zweite fundamentale Problem in dem Gebiet der Parkettierungen ist das Einsteinproblem (im wahren Sinne des Wortes), welches nach der Existenz eines Parkettsteins fragt, welcher nur eine aperiodischen Parkettierung der Ebene ermöglicht. Casey Mann zeigt, dass ein solcher Parkettstein existiert, wenn das Dominoproblem unentscheidbar ist. Aufgrund dieser Verbindung zu anderen ungelösten Fragestellungen zeigt sich die Bedeutung von Heesch's Parkettproblem in der Geometrie.

4.3 Ergebnisse

4.3.1 Nichtkonvexe Beispiele mit Heesch-Zahl 1 und 2

Am Anfang versuchten wir ein Gefühl für Parkettsteine zu entwickeln, die endliche Heesch-Zahl größer 0 haben. Ausgehend von einer periodischen Parkettierung mit Quadraten fügten wir einem Quadrat oben links eine kleine Spitze hinzu. Dazu sollten noch Einkerbungen kommen, in welche die Spitze hineinpasst. Intuitiv benutzten wir also das Schlüssel-Schloss-Prinzip, welches selbst in der aktuellen Forschung die wichtigste Methode ist, um Parkettsteine mit hoher endlicher Heesch-Zahl zu konstruieren, wie aus den Beispielen in [8] ersichtlich wird. Zudem war klar, dass eine Anwendung des Eschertricks nicht zu einer endlichen Heesch-Zahl führt, da dieser die Parkettierung erhält. Daher wanden wir diesen Trick „falsch“ an und setzten eine Einkerbung unten rechts. Damit eine Parkettierung nicht möglich wird, gaben wir dem Quadrat noch eine zweite Einkerbung (siehe Abbildung 11). Somit gelangten wir sofort zu einem sehr einfachen Teil, welches Heesch-Zahl 1 hat.

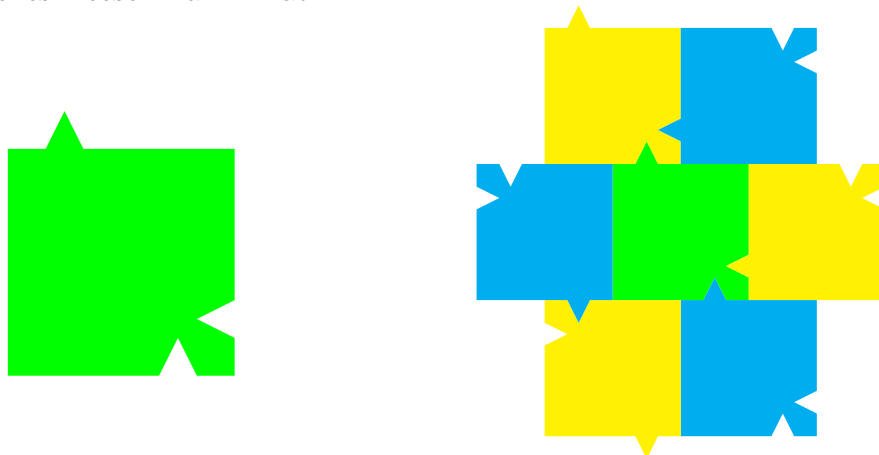


Abb. 11: einfaches Teil mit Heesch-Zahl 1 und dessen Umschließung

Allgemein gilt, dass Polygone, welche mehr Einkerbungen als Spitzen haben, meist keine Parkettierung möglich machen. Wie die Argumentation bei speziellen Teilen läuft, stellen wir im Beweis der Heesch-Zahl 3 des Teils von Robert Ammann im Anhang in „9.4.1 Ammanns Teil mit Heesch-Zahl 3“ dar. Diese Art des Schlüssel-Schloss-Prinzips, bei der die Anzahl der Spitzen und diejenige der Einkerbungen verschieden sind, nennt sich unausgeglichen. Bei der aktuellen Suche nach Parkettsteinen mit hoher endlicher Heesch-Zahl bedient man sich maßgeblich dieser unausgeglichene Methode, da der Beweis einer endlichen Heesch-Zahl dann möglich ist.

Weiterhin fiel uns auf, dass mit einer allgemeinen Abänderung der oberen halben Quadratischecke mit einer Kurve und einer entsprechenden Veränderung der unteren rechten Quadratischecke (wie oben in Abbildung 11) eine unendliche Anzahl an Teilen mit Heesch-Zahl 1 gegeben ist. Dabei muss diese Abänderung die Bedingung erfüllen, dass an der unteren rechten Quadratischecke die beiden Kurven sich nur in einem Punkt treffen, es also nicht zu Überlappungen kommt. Hier eine Abbildung, die eine allgemeine Veränderung verdeutlichen soll.

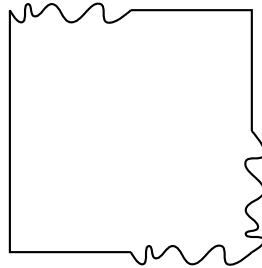


Abb. 12: allgemeines Beispiel mit Heesch-Zahl 1

Nach einigen weiteren Versuchen und Anregungen gelangten wir sogar zu einem Parkettstein, welcher Heesch-Zahl 2 hat:

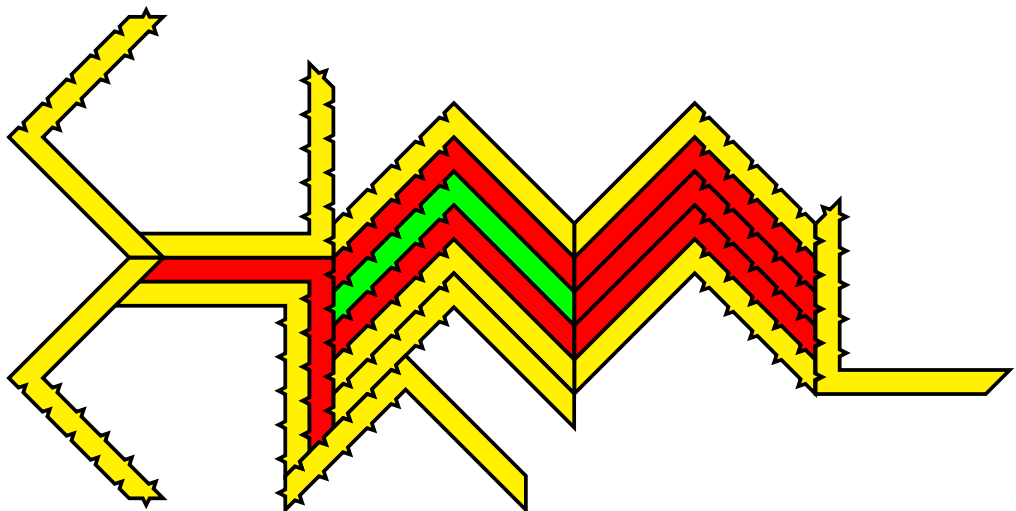


Abb. 13: Teil mit Heesch-Zahl 2

Dabei ist zu bemerken, dass die Anzahl der Spitzen und Einkerbungen entlang der langen Seite eine beliebige natürliche Zahl größer gleich 5 sein kann. Dadurch haben wir eine unendliche Anzahl an Teilen mit Heesch-Zahl 2 gefunden.

Außer dem Schlüssel-Schloss-Prinzip gibt es nur eine weitere bislang angewendete Methode, um Teile mit großer endlicher Heesch-Zahl zu erzeugen. Bei dieser Methode wird auch von einer Parkettierung ausgegangen und anschließend werden mehrere Parkettsteine zu einem großen zusammengeschlossen. An diesen werden dann meist Spitzen und Einkerbungen angebracht. Es wird also häufig eine Kombination aus Zusammenschluss mehrerer Parkettsteine und anschließendem Schlüssel-Schloss-Prinzip verwendet. Es ist ebenso möglich ein Teil mit hoher endlicher Heesch-Zahl in kleinere kongruente Untereinheiten zu zerlegen, welche dann mindestens die gleiche Heesch-Zahl haben.

4.3.2 Konvexe Parkettsteine mit endlicher Heesch-Zahl

Heeschs Parkettproblem ist mit der Einschränkung der Konvexität bisher kaum untersucht worden. Außer dem konvexen Fünfeck mit Heesch-Zahl 1, welches Heinrich Heesch in seiner Arbeit von 1968 angab, ist uns kein weiteres konvexes Beispiel mit endlicher Heesch-Zahl größer gleich 1 bekannt. Daher analysieren wir im Folgenden Heeschs Parkettproblem mit der Einschränkung, dass der zugrundeliegende Parkettstein konvex sein muss.

Als erstes stellten wir fest, dass alle konvexen Parkettsteine mit endlicher Heesch-Zahl größer gleich 1 Polygone sein müssen. Aus diesem Grund fragten wir uns, für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ es ein n -Eck mit Heesch-Zahl 1 gibt. Wie wir schnell zeigen konnten parkettieren alle Drei- und Vierecke, unabhängig der Konvexität, und haben somit keine endliche Heesch-Zahl. Daher muss $n \geq 5$ gelten. Für $n \geq 7$ fanden wir folgende allgemeine Konstruktion eines n -Ecks mit Heesch-Zahl 1:

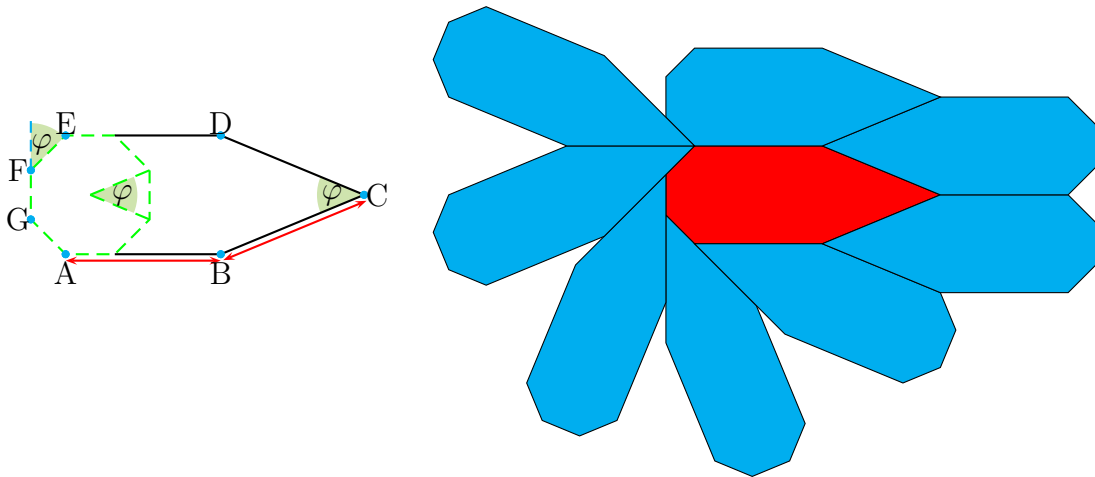


Abb. 14: allgemeines Beispiel für ein n -Eck mit Heesch-Zahl 1 und dessen Umrundung (hier am Beispiel des Siebenecks)

Ausgehend von einem $(2n - 6)$ -Eck verlängern wir zwei gegenüberliegende Seiten so zu Punkten B bzw. D , dass ein Punkt C existiert, der $|AB| = |BC| = |ED| = |DC|$ und $\angle DCB = \varphi$ erfüllt. Dieses allgemeine Beispiel liefert jedoch kein konvexes Fünf- und Sechseck mit Heesch-Zahl 1. Nach einiger Suche, fanden wir dann aber auch dafür eigene Beispiele:

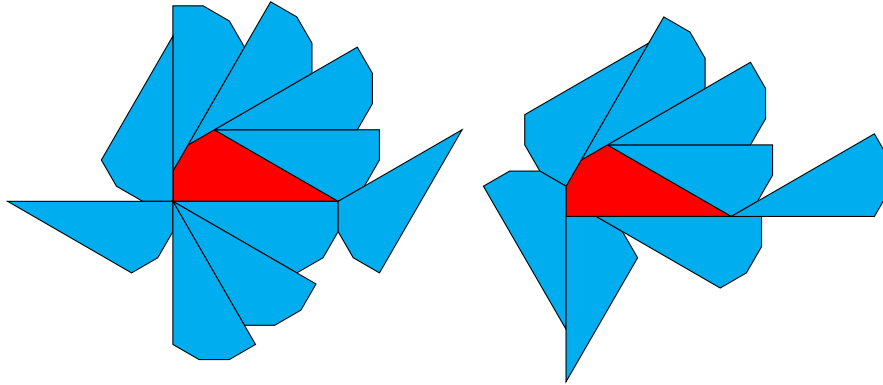


Abb. 15: Beispiele für Umschließungen mit unserem konvexen Fünfeck

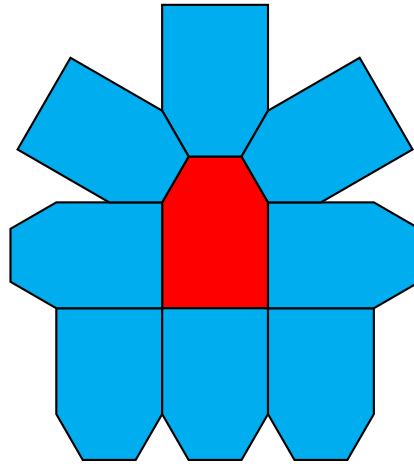


Abb. 16: Umschließung mit unserem Beispiel für ein konvexes Sechseck

Das konvexe Fünfeck besteht aus einem rechtwinkligen Dreieck, an dessen eine Seite ein Ausschnitt eines regelmäßigen Zwölfecks gelegt ist. Das Sechseck hingegen besteht aus einem Quadrat, dem ein halbes regelmäßiges Sechseck aufgesetzt ist. Deshalb gilt: Für alle $n \geq 5$ gibt es ein konvexes n -Eck mit Heesch-Zahl 1, für $n \leq 4$ gibt es keine. Durch Modifikation der Beispiele können wir sogar für alle $n \geq 5$ unendlich viele konvexe Parkettsteine mit Heesch-Zahl 1 angeben, was im Anhang im Abschnitt „9.4.2 Zu konvexen Parkettsteinen mit endlicher Heesch-Zahl“ erläutert wird.

Um konvexe Beispiele zu finden, ist die Anwendung des Schlüssel-Schloss-Prinzips nicht mehr möglich, da dieses sofort zu konkaven Teilen führt. Unsere Methode bestand darin die Innenwinkel des Parkettsteins so zu wählen, dass viele Auslegungen des Vollwinkels möglich sind. Die Streckenlängen müssen dann so gewählt werden, dass eine erste Korona zustande kommen kann.

5 Ausblick und weitere Fragestellungen

In unserer Arbeit haben wir an vielen Stellen darauf hingewiesen, wie wenig im Gebiet der Parkette bekannt ist. Gerade wegen dieser Tatsache ist es wichtig die ungelösten Probleme aufzulisten und durch weitere Beschränkungen zu neuen Aufgaben zu kommen, die eventuell angreifbar sind.

Im Gebiet der voderbergartigen Parkettsteine besteht schon lange Zeit folgende offene Fragestellung:

Offene Frage 1 *Gibt es ein voderbergartiges Teil mit Umschließungszahl 2?*

Wie schon Casey Mann in [7] schreibt, ist die analoge Fragestellung nach Teilen mit kleiner Umschließungszahl im dreidimensionalen Raum ungeklärt. Dies gilt ebenso für höherdimensionale Räume.

Offene Frage 2 *Gibt es dreidimensionale Teile mit (schwacher) Umschließungszahl 2 oder 3?*

Nun ist es möglich von einem Parkettstein gleichzeitig seine Umschließungs- und Heesch-Zahl zu betrachten. Damit erhalten wir eine Kombination unserer zwei großen Themen. Inwieweit hängen die beiden Zahlen voneinander ab? Die erste offene Frage könnte auch umformuliert so gestellt werden, ob es einen Parkettstein mit Umschließungszahl 2 gibt, welcher eine unendliche Heesch-Zahl aufweist. Unsere erste Modifikation des Voderbergschen Neunecks weist eine Umschließungszahl 3 und eine Heesch-Zahl 1 auf (siehe Abbildung 3). Die zweite Modifikation dagegen hat eine Umschließungszahl 2 und eine Heesch-Zahl 1.

Offene Frage 3 *Für welche Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen mit $n \geq 2$ gibt es einen Parkettstein mit Umschließungszahl n und Heesch-Zahl m ?*

Im Bereich von Heeschs Parkettproblem ist vieles noch offen, allem voran natürlich das Problem selbst:

Offene Frage 4 *Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Parkettstein mit Heesch-Zahl n ?*

Wir haben uns in dieser Arbeit besonders auf konvexe Parkettsteine konzentriert und konnten eine untere Schranke von 1 für die maximale Heesch-Zahl für alle konvexen n -Ecke mit $n \geq 5$ geben. Wie auch in [1] betont wird, ist noch kein konvexes Teil mit Heesch-Zahl 2 bekannt.

Offene Frage 5 *Gibt es eine größte endliche Heesch-Zahl bei konvexen Parkettsteinen?*

Uns fiel weiterhin auf, dass besonders bei den Beispielen mit hoher Heesch-Zahl stets gespiegelte Teile benutzt werden. Soweit wir wissen wurde Heeschs Parkettproblem noch nicht mit der Einschränkung, dass Spiegelungen nicht zugelassen sind, untersucht. Unsere Beispiele für konvexe n -Ecke mit Heesch-Zahl 1 funktionieren mit dieser Einschränkung immer noch, ebenso das mit einer Spitze und zwei Einkerbungen verpasste Quadrat. In unseren Nachforschungen sind wir nur in [9] auf ein Teil mit Heesch-Zahl 2 gestoßen, welches in der Konfiguration keine Spiegelungen benötigt. Vielleicht ist es möglich eine obere Schranke für die Heesch-Zahl zu finden, wenn Spiegelungen nicht erlaubt werden.

Offene Frage 6 *Gibt es eine größte endliche Heesch-Zahl, wenn Spiegelungen nicht zugelassen sind?*

Zuletzt ist es natürlich auch möglich Heeschs Parkettproblem im n -dimensionalen Raum zu stellen. Wie aus [8] entnommen werden kann, ist es leicht einsichtig, dass ein Prisma, welches als Grundseite ein Teil mit Heesch-Zahl n hat, im dreidimensionalen Raum ebenfalls mindestens eine Heesch-Zahl n aufweist. Dazu nimmt man die zur ebenen Konfiguration analoge räumliche und kann diese mehrmals übereinander stapeln. Daher sind dreidimensionale Teile mit endlicher Heesch-Zahl 0 bis 5 bekannt.

Offene Frage 7 *Welche Werte kann die Heesch-Zahl im n -dimensionalen Raum annehmen?*

Neben dem Dominoproblem für Einzelteile und dem Einsteinproblem sind in [1] noch weitere tiefgreifende ungelöste Probleme der Geometrie aufgeführt, welche allerdings den Rahmen dieser Arbeit übersteigen.

6 Danksagung

Besonderer Dank gebührt unserem außerschulischen Betreuer Dr. Frank Göring, der uns in die Fragestellung einführte, uns bei der Ideenfindung und Umsetzung half und jederzeit für Fragen und Unklarheiten zur Seite stand. Seine Motivation und Unterstützung trugen maßgeblich für das Gelingen dieser Arbeit bei.

Ebenso danken wir unserem schulischen Betreuer Steffen Polster, welcher bei Fragen zu Form und Anforderungen an die Arbeit zur Stelle stand.

7 Literaturverzeichnis

- [1] Brass, Peter/ Moser, William Oscar Jules/ Pach, Janos: *Research Problems in discrete geometry*, Springer, 2005, S. 161-169.
- [2] Grünbaum, Branko/ Shephard, Geoffrey Colin: *Tilings and Pattern*, Freeman and Company, New York, 1987.
- [3] Heesch, Heinrich: *Reguläres Parkettierungsproblem*, Westdeutscher Verlag, Köln, 1968.
- [4] Kershner, Richard B.: *On Paving the Plane*, The American Mathematical Monthly, Vol. 75, No. 8 (Oktober 1968), S. 839-844
- [5] Küppers, Horst: *Heinrich Heesch*,
http://www.ifg.uni-kiel.de/eckenundkanten/hk-02_de.html
(Stand: 18.01.2011).
- [6] Maier, Wilhelm: *Karl Reinhardt*, Jahresbericht der DMV, Band 52, 1942, S.75-83,
zugänglich unter
<http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN00213358X>
(Stand: 18.01.2011).
- [7] Mann, Casey: *A Tile with Surround Number 2*, The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 4 (April 2002), S. 383-388.
- [8] Mann, Casey: *Heesch's tiling problem*, The American Mathematical Monthly, Vol.111, No.6 (Juni/Juli 2004), S. 509-517.
- [9] Mann, Casey: *Heesch's Problem*,
<http://math.utttyler.edu/cmann/math/heesch/heesch.htm>
(Stand: 18.01.2011).
- [10] Reinhardt, Karl: *Aufgabe 170*, Jahresbericht der DMV, Band 44, 1934, S.41.
- [11] Sontag, Ralph/ H. Geisler: *Voderbergsche Neunecke und Voderbergsche Doppelspiralen*,
<http://www.mathe-insel.de/theorie/voderberg/>
(Stand: 18.01.2011).

- [12] Voderberg, Heinz: *Zur Zerlegung der Umgebung eines ebenen Bereiches in kongruente*, Jahresbericht der DMV, Band 46, 1936, S. 229-231, zugänglich unter <http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002131773> (Stand: 18.01.2011).
- [13] Voderberg, Heinz: *Zur Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jahresbericht der DMV, Band 47, 1937, S.159f, zugänglich unter <http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002132079> (Stand: 18.01.2011).

8 Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erklären wir, Alexander Thomas und Christoph Standke, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt haben. Dabei wurden wir von Dr. Frank Göring und Steffen Polster unterstützt.

9 Anhang

9.1 Bastelanleitung

benötigte Materialien:

- Pappe
- Faden (einer, der nicht nachgibt, wenn an ihm gezogen wird)
- kreisrunde Scheibe (zum Beispiel Boden einer Tasse oder eines Glases)
- Zeichengeräte (Lineal, Zirkel, Winkelmesser)

Bastelanleitung:

1. Miss den Durchmesser der Kreisscheibe, die du benutzt und ermittle daraus den Radius r . Dieser sollte nicht größer als 3 cm sein, damit der Parkettstein nicht zu groß wird.
2. Markiere auf der Pappe einen Punkt F , den Ursprung eines Koordinatensystems, von welchem du die x -Richtung noch selbst wählen musst. Schlage einen Kreis mit Radius r um F .
3. Zeichne nun den Punkt $E(1, 16r; 1, 56r)$ und den Punkt $M(3, 07r; -1, 68r)$ ein.
4. Zeichne die Evolvente von E nach M , indem du dein Gefäß mit kreisrundem Boden genau auf den Kreis stellst, den Faden um das Gefäß wickelst, am Ende von diesem einen Bleistift befestigst und dann das Ende straff abziehst, wobei du am oberen Punkt N_1 des Kreises beginnst (siehe Abbildung 17).
5. Spiegele E und F an M , sodass du die Punkte B und A erhältst. Verbinde diese geradlinig.
6. Zeichne G und M' , indem du E und M um F mit dem Winkel $\varphi = 16^\circ$ drehst. Zeichne die Strecken $\overline{FE}$ und $\overline{FG}$ ein.
7. Zeichne die Evolvente von G nach M' ein, indem du dein Gefäß auf den Kreis um F stellst, aber dieses Mal im Punkt N_2 , der durch eine Drehung um F mit Winkel 16° aus N_1 entsteht, mit dem Abziehen des Fadens beginnst.
8. Schlage um A einen Kreis mit Radius r und zeichne die Evolvente von B nach M , indem du dein Gefäß auf den Kreis mit Mittelpunkt A stellst und im untersten Punkt N'_1 beginnst.
9. Schlage um X , dem Spiegelpunkt von F an M' , einen Kreis mit Radius r und markiere auf ihm den Punkt N'_2 , den Spiegelpunkt von N_2 an M' . Zeichne die Evolvente von A nach M' , indem du dein Gefäß auf den Kreis mit Mittelpunkt X stellst und im Punkt N'_2 beginnst.
10. Nun müsste die Skizze auf der Pappe wie in der Abbildung 17 aussehen. Schneide die Figur aus der Pappe aus. Wenn du vier solche Figuren hast, kann anhand der Abbildung 7 überprüft werden, ob du genau konstruiert hast. Lässt sich die Umschließung lückenlos legen, ist die Konstruktion geglückt.

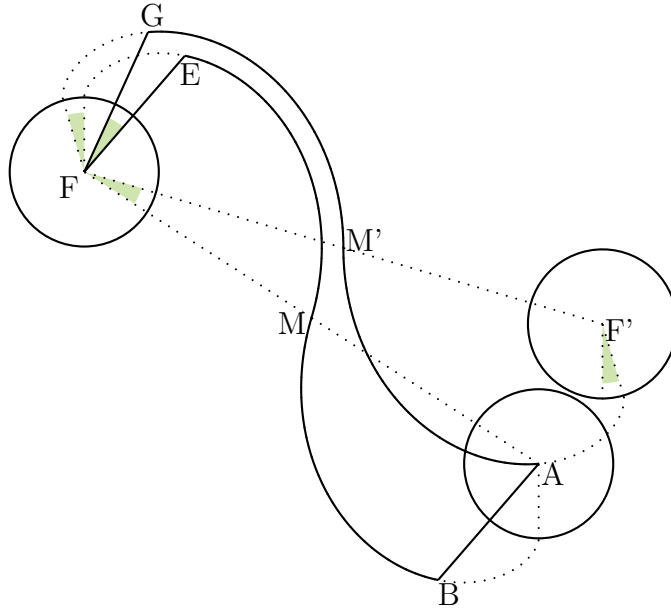


Abb. 17: Bastelanleitung des verbesserten Vorderbergteils

9.2 Beweise und Herleitungen zu voderbergartigen Parkettsteinen

9.2.1 Abstand zwischen glatten Kurven

Um die Halsdicke des Voderbergschen Neunecks bestimmen und diese dann optimieren zu können, muss erst der Abstand zweier Kurven charakterisiert werden. Wir beschränken uns dabei auf glatte Kurven, wobei auch für lediglich stetige ähnliche Analysen durchgeführt werden können.

Zuerst wollen wir den Abstand eines Punktes P von einer Kurve k bestimmen. Dazu legen wir um P einen kleinen Kreis k' , den wir dann solange stetig zentrisch an P strecken, ihn also gewissermaßen aufblasen, bis dieser Kreis mindestens einen Punkt Q der Kurve k berührt (siehe Abbildung 18). Nun behaupten wir, dass folgender Satz gilt:

Satz 1 *Ist in der Ebene ein Punkt P und eine glatte Kurve k gegeben und ist Q einer der Punkte auf k , die den geringsten Abstand zu P haben, so ist die Gerade PQ Normale von k .*

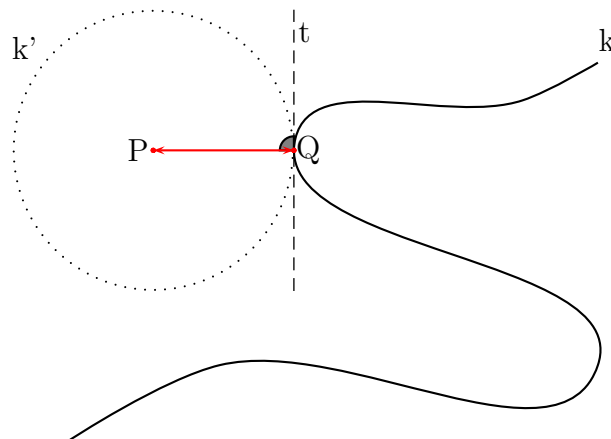


Abb. 18: Abstand von Punkt zu Kurve

Dazu reicht es zu zeigen, dass die Tangente t an der Kurve k in Q auch eine Tangente des Kreises k' ist. Nach Definition ist die Tangente t der Grenzübergang einer Sekante QQ_o , wobei Q_o oberhalb von Q auf k liegt und Q_o gegen Q entlang k strebt. Sollte t oberhalb von PQ mit dem Inneren von k' einen Punkt gemeinsam haben, so müsste Q_o im Inneren von k' liegen,

was aber im Widerspruch steht mit der anfänglichen Forderung, dass beim Aufblasen von k' der Punkt Q zuerst berührt wird. Daher kann t oberhalb von PQ keinen inneren Punkt mit k' gemeinsam haben. Analog argumentiert man mit der unteren Seite von PQ , wobei dann t als Grenzübergang einer Sekante QQ_u aufgefasst wird, wobei Q_u ein Punkt unterhalb von Q auf k ist. Demnach ist t auch Tangente an k' und somit muss PQ die Normale von k in Q sein. $\square$

Nun betrachten wir zwei Kurven k_1 und k_2 , welche sich nicht schneiden. Ihr Abstand definiert sich durch die minimale Streckenlänge PQ , wobei P auf k_1 und Q auf k_2 liegt (siehe Abbildung 19). Nun lässt sich schnell folgender Satz zeigen:

Satz 2 *Die kürzeste Verbindung PQ zweier glatter Kurven ist gemeinsame Normale von diesen.*

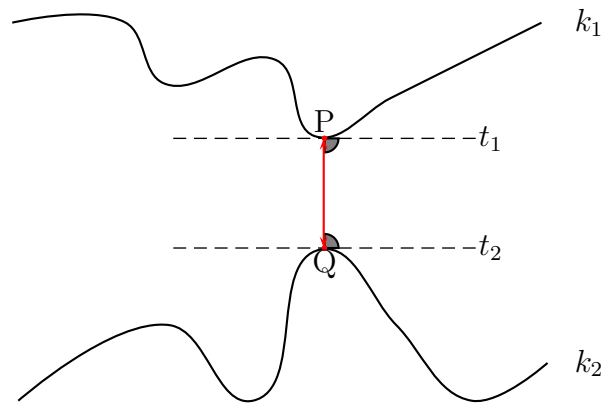


Abb. 19: Abstand zweier Kurven

Zum Beweise ersieht man, dass Q einer der Punkte ist, die k_1 am nächsten liegt, und nach Satz 1 muss also PQ Normale von k_1 sein. Analog ist P der Punkt mit dem kürzesten Abstand zu k_2 und somit ist PQ auch Normale von k_2 . $\square$

9.2.2 Die Kreisevolvente als optimierte Randkurve

Wir gehen von dem im Abschnitt „3.3.1 Grundlegende Eigenschaften des Vorderbergschen Neunecks“ beschriebenen Gerüst, bestehend aus den Punkten F , M , A , B , E und G , aus. Die Randkurve von E nach M bezeichnen wir mit k und diejenige von G zu M' mit k' (dabei bezeichne M' den Punkt, der aus M bei einer Drehung um F um φ entsteht). Offenbar erhält man k' aus k , in dem k um F mit dem Winkel φ gedreht wird (siehe Abbildung 20⁶). Diese Drehung sei mit σ bezeichnet.

⁶Abbildung 20 suggeriert, dass M' auf AE liege, was aber nicht der Fall ist.

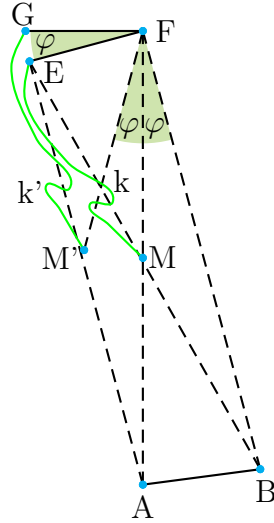


Abb. 20: Grundgerüst des Vorderbergteils mit beliebiger Randkurve

Zuerst machen wir die Tatsache plausibel, dass die beiden Randkurven k und k' an jeder Stelle gleichen Abstand haben, wenn der vorderbergartige Parkettstein eine optimale Halsdicke hat.

Dafür gehen wir von einem Teil mit maximaler Halsdicke aus. Nun nehmen wir an, dass der Abstand der Randkurven nicht überall gleich sei. Der zu E nächste Punkt auf k' sei mit Q bezeichnet (siehe Abbildung 21). Nimm nun eine der Stellen, die minimalen Abstand d hat. Diese sei zwischen K'_0 und K_1 . Durch eine Deformation von k weiten wir diese Stelle auf. Dabei gibt es auch eine Änderung bei k' , aber an einem anderen Punkt K'_1 , den man durch Anwendung von σ auf K_1 erhält. Der zu K'_1 nächste Punkt auf k sei K_2 . Da die Stelle zwischen K_2 und K'_1 meist größer als d ist, kann die Aufweitung zwischen K'_0 und K_1 so klein gehalten werden, dass zwischen K_2 und K'_1 die Dicke größer als d bleibt. Sollte diese Stelle zwischen K_2 und K'_1 ebenfalls die Dicke d haben, so weiten wir zuerst diese auf, bevor wir dies zwischen K'_0 und K_1 tun. Dies führt zu einer weiteren Stelle durch Anwendung von σ auf K_2 . Dieses Argument kann solange fortgesetzt werden, bis man an eine Stelle kommt, die in dem Bereich zwischen Q und G liegt. In diesem können nun beliebige Deformationen ausgeführt werden. Die Aufweitung von dünnen Stellen ist also möglich. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme der Maximalität der Halsdicke. Somit ist bei dem vorderbergartigen Teil mit der maximalen Halsdicke der Abstand zwischen k und k' an jeder Stelle gleich.

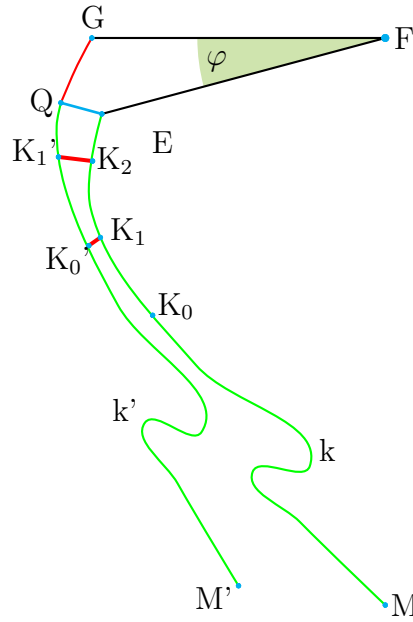


Abb. 21: Plausibilisierung für konstanten Abstand optimaler Kurven

Wir suchen nun also die Kurve k , die bei der Drehung σ in eine Kurve übergeht, die von k an jeder Stelle konstanten Abstand hat. Nach dem Satz 2 gilt also, dass jede Normale von k auch eine von k' ist. Die Normalenschar von k , also die Gesamtheit aller Normalen, ist also mit der von k' identisch. Folglich muss die Normalenschar von k bei Anwendung der Drehung σ in sich selbst übergehen. Wir konstruieren nun eine Kurve, die sogar die Eigenschaft hat, dass sie bei einer Drehung um jeden beliebigen Winkel φ gleichen Abstand zu ihrer Bildkurve hat. Dazu fixieren wir eine Normale n von k und betrachten den Kreis Γ um F , der n berührt (siehe Abbildung 22). Bei einer Drehung um F um einen beliebigen Winkel φ gehe n in n' über. Aufgrund der Drehsymmetrie des Kreises Γ ist n' auch eine Tangente von diesem. Da n' für alle φ wieder Normale von k sein soll, muss die Normalenschar von k also die Tangentenschar des Kreises Γ sein. Bei einer beliebigen Drehung um F geht dann die Normalenschar tatsächlich in sich selbst über. Damit können wir versuchen eine solche Kurve k zu finden.

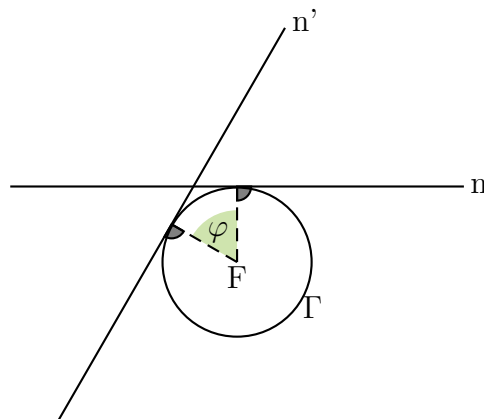


Abb. 22: Eigenschaft der Normalenschar der Kurve k

Wir geben nun eine Konstruktion für eine solche Kurve an. Dabei ist klar, dass diese Kurve bis auf eine Ähnlichkeitstransformation eindeutig durch die Normalenschar bestimmt ist.

Ein Faden sei um eine Kreisscheibe gewickelt. Nun nimmt man das Ende des Fadens und wickelt ihn so ab, dass er zu jedem Zeitpunkt straff gespannt ist, wie in Abbildung 23 dargestellt

wird. Der Endpunkt des Fadens beschreibt dann eine Kurve k . Wir behaupten, dass diese die Eigenschaft hat, dass ihre Normalenschar gleich der Tangentschar der Kreisscheibe ist.

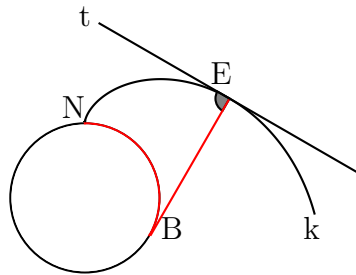


Abb. 23: Konstruktion einer Kreisevolvente

Da der Faden straff gespannt ist, muss die Verbindung vom Endpunkt E zum aktuell letzten Auflagepunkt B des Fadens mit dem Kreis Tangente an diesen sein. Nun muss noch gezeigt werden, dass EB Normale von k ist. Nehme dazu E' kurz vor E auf k . Da der Faden straff ist, bewegt er sich in jedem Punkt von k senkrecht zu der Lage des Fadens. Somit ist EE' senkrecht zu EB , wenn E' gegen E auf k strebt. Da EE' für $E' \rightarrow E$ Tangente an k durch E ist und da Tangente und Normale an einem Punkt senkrecht aufeinander stehen, muss daher EB tatsächlich Normale sein. Folglich erfüllt unsere Kurve k , die sogenannte Kreisevolvente, die gestellten Bedingungen. Sie optimiert also die Halsdicke des Voderbergschen Neunecks. Damit folgt folgender Satz:

Satz 3 *Im allgemeinen Fall optimiert die Kreisevolvente als Randkurve die Halsdicke des Voderbergschen Neunecks.*

Wie aus der Abbildung 23 auch zu erkennen ist, kann die Kreisevolvente so beschrieben werden, dass ein Punkt genau dann auf der Evolvente liegt, wenn der Tangentenabschnitt $\overline{BE}$ so lang ist wie der Bogen $\widehat{NB}$ ⁷. Dies ist sofort einsichtig, wenn sich die Fadenkonstruktion vor Augen geführt wird.

Für einen konkreten Winkel $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ kann sogar die Kreisevolvente noch geringfügig verbessert werden, indem der Faden zum Beispiel von einem regelmäßigen n -Eck abgewickelt wird. Aufgrund der Allgemeingültigkeit der Kreisevolvente betrachten wir im Folgenden nur diese.

9.2.3 Berechnung der nötigen Kreisevolvente

Wie im Satz 3 bewiesen, benötigen wir also eine Kreisevolvente, um die Halsdicke zu optimieren. Diese soll durch die Punkt E und M gehen und als Kreismittelpunkt F haben. Wir wollen diese nun berechnen, um eine Konstruktion des verbesserten Voderbergteils und die Bestimmung der Halsdicke zu ermöglichen. Es bezeichne τ die Drehstreckung mit Zentrum F , die E auf M abbildet. Wir arbeiten in der komplexen Zahlenebene, da in ihr eine Drehung gut durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl darstellbar ist. Dennoch werden wir nicht konkret mit komplexen Zahlen rechnen.

Wir gehen nun wie folgt vor: ausgehend von einer Standardevolvente in der komplexen Zahlenebene (das ist die Evolvente vom Einheitskreis, die im Punkt $(0; i)$ beginnt) suchen wir den Punkt E auf der Kreisevolvente, der unter Anwendung von τ wieder auf der Evolvente

⁷Mit $\widehat{XY}$ meinen wir sowohl den Bogen zwischen X und Y als auch seine Länge.

landet. Dazu bestimmen wir zuerst die Drehstreckung τ und berechnen danach den Punkt E , sodass M auch auf der Evolvente liegt. Um festzustellen, ob M auf der Evolvente liegt, benutzen wir die zweite Möglichkeit die Evolvente zu beschreiben und legen dafür von M die Tangente an den Kreis und berechnen deren Länge. Wenn diese mit der entsprechenden Bogenlänge übereinstimmt, liegt M auf der Evolvente.

Für die Bestimmung von τ gehen wir von dem Gerüst, bestehend aus den Punkten F , M , A , B , E und G , aus (siehe Abbildung 24). Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck ABF . Dabei ist $\angle AFB = \varphi$. Damit gilt wegen Wechselwinkelsatz (Viereck $ABFE$ ist ein Parallelogramm): $\angle EFA = \angle BAF = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$. Der Winkel φ' unserer Drehstreckung τ ist also gleich $\frac{180^\circ - \varphi}{2}$. O.B.d.A. setzen wir $|FM| = \frac{1}{2}$ (das können wir tun, da die absolute Länge bei dem Streckenverhältnis keine Rolle spielt). Damit lässt sich leicht ausrechnen, dass $|FE| = \sqrt{2 - 2\cos\varphi}$ ist (zum Beispiel mit Hilfe der komplexen Koordinaten). Folglich gilt für den Streckfaktor k von τ : $k = \frac{|FM|}{|FE|} = \frac{1}{2\sqrt{2-2\cos\varphi}}$. Damit ist die Drehstreckung τ vollständig bestimmt.

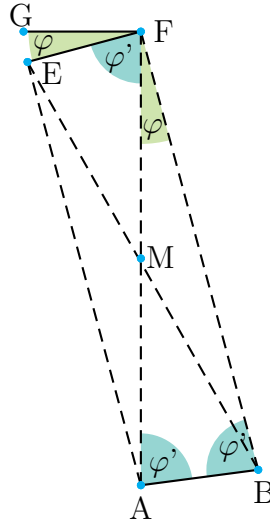


Abb. 24: Bestimmung der Drehstreckung τ

Bekanntlich gilt folgende Gleichung für die Standardevolvente: $x(\mu) = \sin\mu - \mu\cos\mu$ und $y(\mu) = \mu\sin\mu + \cos\mu$ ⁸. Dabei ist aus der Abbildung 25 ersichtlich, dass der Winkel μ entsteht, wenn man von dem Punkt auf der Evolvente die entsprechende Tangente an den Kreis legt

⁸Im Folgenden müssen Winkel bei Berechnungen immer im Bogenmaß verwendet werden.

(welche dem Faden in der Konstruktion der Evolvente entspricht).

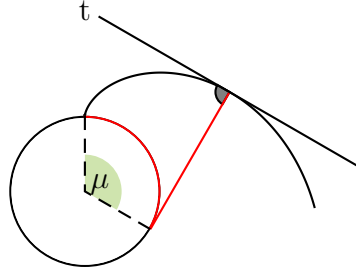


Abb. 25: Winkel μ bei der Standardevolvente

Betrachte nun unsere Abbildung 26. F ist der Koordinatenursprung, N der Austrittspunkt der Evolvente und B_1 bzw. B_2 der Tangentenberührungspunkt von E bzw. M mit dem Einheitskreis. Wir wollen E so bestimmen, dass $|MB_2| = \widehat{NB_2}$ gilt. Dazu rechnen wir $|MB_2|$ und $\widehat{NB_2}$ in Abhängigkeit von μ und φ aus.

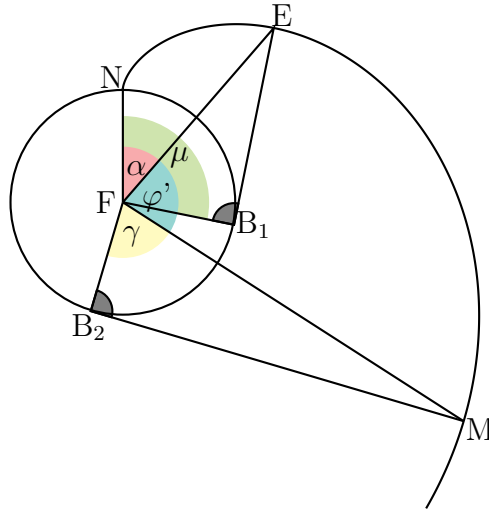


Abb. 26: Berechnung der benötigten Evolvente

Zuerst wenden wir den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck FB_2M an und erhalten $|MB_2|^2 = |FM|^2 - 1$. Für $|FM|$ gilt wegen τ folgende Beziehung: $|FM| = k \cdot |FE|$. Wegen des rechtwinkligen Dreiecks FB_1E und aufgrund der Tatsache, dass E auf der Evolvente liegt, gilt zudem: $|FE|^2 = 1 + |EB_1|^2 = 1 + \widehat{NB_1}^2 = 1 + \mu^2$. Damit gilt: $|FM|^2 = k^2 \cdot |FE|^2 = k^2(1 + \mu^2) = \frac{1 + \mu^2}{8(1 - \cos \varphi)}$. Dies in obige Formel für $|MB_2|$ eingesetzt ergibt schließlich:

$$|MB_2| = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{8(1 - \cos \varphi)} - 1} \quad (1)$$

Nun berechnen wir noch $\widehat{NB_2}$. Dabei gilt: $\widehat{NB_2} = \alpha + \varphi' + \gamma$ (Bezeichnungen siehe Abbildung 26). Für γ gilt im rechtwinkligen Dreieck FB_2M , dass $\gamma = \arctan(|MB_2|)$ ist. In der Abbildung 27 erkennt man, dass $\mu = \widehat{NB_1} = |EB_1| = \tan \beta$ und somit $\alpha = \mu - \beta = \mu - \arctan \mu$ gilt.

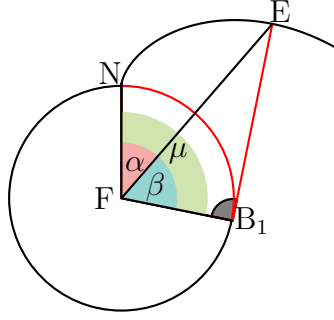


Abb. 27: Zerlegung des Winkel μ

Somit haben wir schließlich:

$$\widehat{NB_2} = \mu - \arctan \mu + \frac{\pi - \varphi}{2} + \arctan(|MB_2|) \quad (2)$$

Mithilfe der Gleichung (1) und der Bedingung $|MB_2| = \widehat{NB_2}$ haben wir also folgenden Zusammenhang zwischen φ und μ :

$$\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{8(1 - \cos \varphi)}} - 1 - \arctan \left(\sqrt{\frac{1 + \mu^2}{8(1 - \cos \varphi)}} - 1 \right) - \mu + \arctan \mu - \frac{\pi - \varphi}{2} = 0 \quad (3)$$

Somit sind wir in der Lage für einen gegebenen Winkel φ den Winkel μ zu bestimmen, trotz dass Gleichung (3) nicht nach μ auflösbar ist. Dies geschieht durch Nullstellenbestimmung der Gleichung (3) mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners (GTR). Damit sind wir in der Lage den Eckpunkt E zu finden und durch die Anwendung von τ bekommen wir den Punkt M . Dadurch haben wir die passende Evolvente, die von E nach M geht, gefunden. Diese muss dann nur an M um 180° gedreht werden, wobei der Eckpunkt B entsteht (siehe Abbildung 28). Der gesamte Streckenzug von E nach B muss dann noch an F mit dem Winkel φ gedreht werden, wobei der Eckpunkt A entsteht. Dann verbinden wir noch F mit E und G geradlinig und ebenso A mit B . Nun haben wir die vollständige Konstruktion des verbesserten Vorderbergteils angegeben.

Alternativ kann M geometrisch bestimmt werden. Dazu muss auf die Standardevolvente die Drehstreckung τ angewendet werden. Die dabei entstehende Evolvente schneidet die Standardevolvente im Punkt M . Mit diesem erhält man dann E und die weiteren Punkte. Diese Methode ist aber in der Praxis nicht anwendbar, da schon sehr geringe Ungenauigkeiten bei der Konstruktion zu großen Fehlern in der Figur führen.

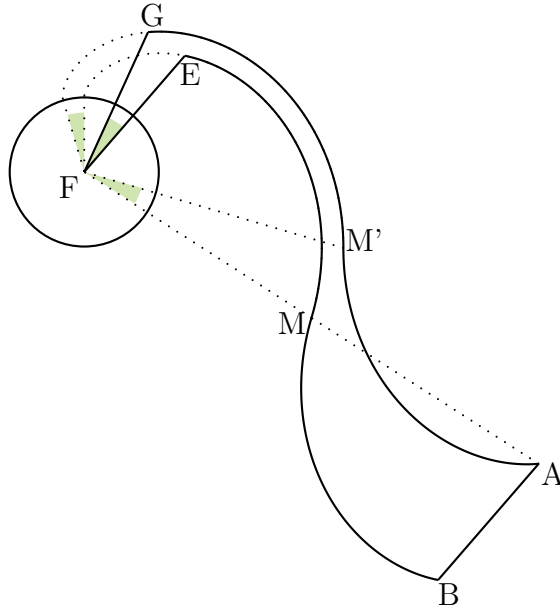


Abb. 28: das verbesserte Voderbergteil

9.2.4 Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente

Um die Verbesserung durch den Einsatz der Kreisevolvente ausrechnen zu können, werden wir zuerst die Halsdicke in dem optimierten Fall berechnen. Danach werden wir auf die allgemeine Konstruktion aus [7] zurückgreifen, um die optimale Dicke des Voderbergschen Neunecks zu errechnen. Damit können wir dann die Verbesserung bestimmen. Alle Betrachtungen aus dem vorherigen Abschnitt benutzten, dass der Radius des Kreises der Evolvente gleich 1 beträgt. Wir möchten aber, um dann einen Vergleich mit der Halsdicke beim Voderbergschen Neuneck zu ermöglichen, als Maßeinheit $|FA| = 1$ setzen. Hierfür skalieren wir alle Betrachtungen des vorangehenden Abschnitts mit einem Faktor $\frac{1}{|FA|}$, sodass dies möglich wird. Im nachfolgenden Abschnitt zur Dickenberechnung beim verbesserten Voderbergteil benutzen wir die Streckenlängen vor der Skalierung. Ab der Analyse des Voderbergschen Neunecks benutzen wir dann $|FA| = 1$.

Der Abstand der Evolventen vor der Skalierung ist, da er überall konstant ist, leicht an dem Einheitskreis ablesbar (siehe Abbildung 29). Legt man an die Evolvente k , die E enthält, am Austrittspunkt die Normale an, so ist diese auch Normale an der Evolvente k' , die G enthält. Nun ist diese Normale aber auch Tangente an den Einheitskreis und somit gilt für den Abstand d der beiden Evolventen wegen der Fadenkonstruktion: $d = \widehat{NN'} = r \cdot \varphi = \varphi$.

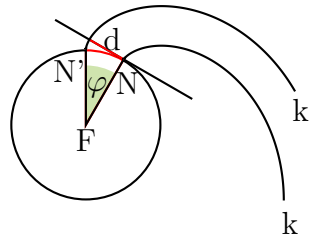


Abb. 29: Berechnung des Abstandes der Evolventen

Nach der Skalierung beträgt der Kreisradius $r = \frac{1}{|FA|}$. Nun müssen wir also $|FA|$ in Abhängigkeit von μ und φ bestimmen.

Wir benutzen dazu den Kosinussatz im Dreieck ABF und benutzen dabei, dass $|FA| = 2 |FM|$ und $|AB| = |FE|$ ist (siehe Abbildung 30). Wir erhalten, dass $|FB|^2 = 4 |FM|^2 + |FE|^2 - 4 |FM| |FE| \cos \varphi'$ gilt. Mithilfe der Streckenlängen $|FE|$ und $|FM|$, die aus dem vorigen Abschnitt bekannt sind, können wir weiter umformen: $|FB|^2 = 4 \frac{1+\mu^2}{8(1-\cos \varphi)} + 1 + \mu^2 - 4 \frac{1+\mu^2}{2\sqrt{2-2\cos \varphi}} \cdot \cos \varphi' = (1+\mu^2)(1 + \frac{1}{2-2\cos \varphi} - \frac{2\cos(\frac{\pi-\varphi}{2})}{\sqrt{2-2\cos \varphi}})$. Somit gilt für den Abstand $d = \frac{\varphi}{|FA|} = \frac{\varphi}{|FB|}$ schließlich:

$$d = \frac{\varphi}{\sqrt{(1+\mu^2)(1 + \frac{1}{2-2\cos \varphi} - \frac{2\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2-2\cos \varphi}})}} \quad (4)$$

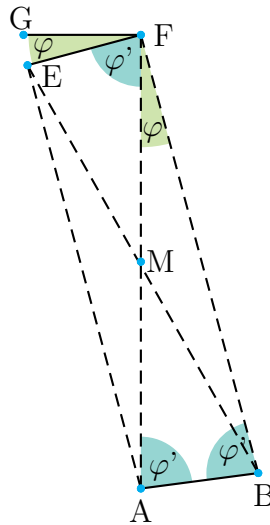


Abb. 30: Berechnungen zu $|FA|$

Mit Gleichung (3) und (4) ist es nun also möglich für gegebenes φ zuerst das entsprechende μ und danach den Abstand d zu berechnen. Nachfolgend ist eine Wertetabelle angegeben, aus welcher für ein φ (im exakten Bruch und Gradmaß) das entsprechende μ und die entsprechende Dicke d ablesbar sind. Dabei sind die Werte der zweiten Zeile auf zwei Kommastellen und die Werte für d auf vier Nachkommastellen genau gerundet. Ist μ größer als 360° , so bedeutet dies, dass der Faden bei der Konstruktion der Evolvente schon mehr als eine Runde von der Kreisscheibe abgewickelt wurde.

φ	$\frac{360^\circ}{30}$	$\frac{360^\circ}{24}$	$\frac{360^\circ}{23}$	$\frac{360^\circ}{22}$	$\frac{360^\circ}{21}$	$\frac{360^\circ}{20}$	$\frac{360^\circ}{15}$	$\frac{360^\circ}{14}$	$\frac{360^\circ}{13}$
φ	12°	15°	$15,65^\circ$	$16,36^\circ$	$17,14^\circ$	18°	24°	$25,71^\circ$	$27,69^\circ$
μ	$42,10^\circ$	$81,05^\circ$	$90,43^\circ$	$101,42^\circ$	$114,59^\circ$	$130,83^\circ$	$384,59^\circ$	$624,40^\circ$	$1705,71^\circ$
d	0,0353	0,0395	0,0398	0,0400	0,0399	0,0394	0,0257	0,0183	0,0078

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, beträgt die maximale Dicke 0,04 bei einem Winkel von $\varphi = \frac{360^\circ}{22} \approx 16,36^\circ$. Nun berechnen wir noch die maximale Dicke beim Vorderbergschen Neunecks.

In der Abbildung 31 sieht man die Konstruktion des Vorderbergschen Neunecks nach Casey Mann [7].

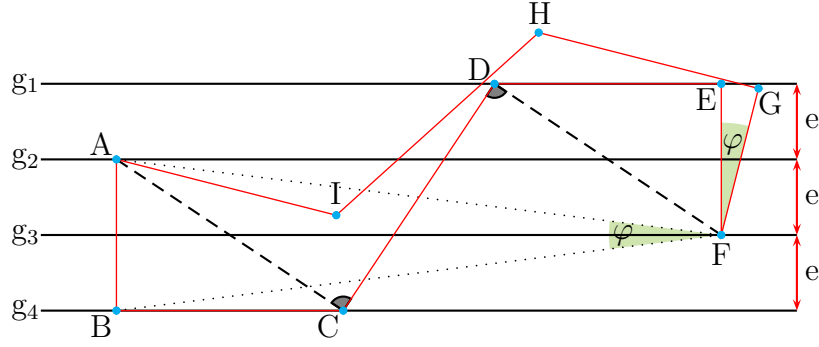


Abb. 31: Konstruktion des Vorderbergschen Neunecks

Ausgehend von vier Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 mit gleichem Abstand e wähle man auf g_3 einen Punkt F . Das Lot von F auf g_1 sei dann E . Nun wähle man einen Punkt D beliebig auf g_1 und lasse die Senkrechte zu FD durch D mit g_4 im Punkt C schneiden. Die Senkrechte zu DC durch C schneide g_2 im Punkt A . Das Lot von A auf g_4 sei dann der Eckpunkt B . Schließlich erhält man die Eckpunkte G, H und I durch Drehung der Punkte E, D bzw. C um F mit dem Winkel $\varphi = \angle AFB$. Durch die beliebige Wahl von D können also selbst beim Vorderbergschen Neuneck verschiedene Halsdicken erreicht werden und wir werden nun die optimale finden.

Der Abstand von E zu HG kann wie folgt charakterisiert werden: da $|FE| = |FG|$ und da $\angle HGF = 90^\circ$ gilt, betrachtet man den Kreis mit Mittelpunkt F und Radius $|FE|$ und legt in G die Tangente. Der Abstand von E zu dieser Tangente entspricht dem Abstand von E zur Seite GH . Analog gilt diese Betrachtung auch für den Abstand von D zu HI . Wir zeigen nun, dass die maximale Halsdicke bei dem größtmöglichen Winkel φ erreicht wird.

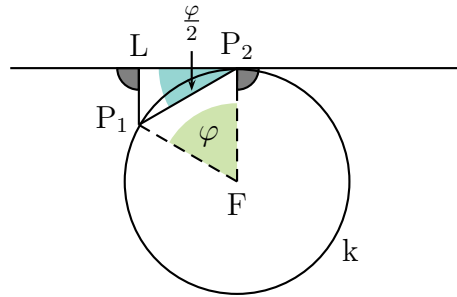


Abb. 32: Abhängigkeit von Abstand und φ

Ausgehend von Abbildung 32, in der die Punkte allgemeine Bezeichnungen haben, erkennen wir, dass zum einen durch den Kosinussatz $|P_1P_2|^2 = 2r^2(1 - \cos \varphi)$ ⁹ und zum anderen durch den Sehnen-Tangenten-Zentriwinkelsatz $\angle LP_2P_1 = \frac{\varphi}{2}$ gilt. Somit haben wir für den Abstand: $|P_1L| = |P_1P_2| \sin \frac{\varphi}{2} = r\sqrt{2 - 2\cos \varphi} \sin \frac{\varphi}{2}$. Dieser Abstand sei als Funktion $f(\varphi)$ aufgefasst. Betrachten wir nun zwei Winkel $90^\circ > \varphi_1 > \varphi_2 > 0^\circ$. Dann gilt: $0 < \cos \varphi_1 < \cos \varphi_2 < 1 \Leftrightarrow 2 - 2\cos \varphi_1 > 2 - 2\cos \varphi_2 > 0 \Leftrightarrow r\sqrt{2 - 2\cos \varphi_1} > r\sqrt{2 - 2\cos \varphi_2} > 0$. Zusammen mit der Beziehung $\sin \frac{\varphi_1}{2} > \sin \frac{\varphi_2}{2}$ erhalten wir: $f(\varphi_1) > f(\varphi_2)$. Somit haben wir zum einen gezeigt, dass der maximale Abstand bei größtmöglichem Winkel φ auftritt und zum anderen, dass der Abstand von E zu GH kleiner ist als der von D zu HI , da in der Abstandsformel $f(\varphi)$ der

⁹Der hier verwendete Radius r ist nicht der gleiche wie der Radius des Kreises der Evolvente.

Faktor r steckt und offenbar $|FE| < |FD|$ gilt. Daher kann P_1 mit E und P_2 mit G assoziiert werden.

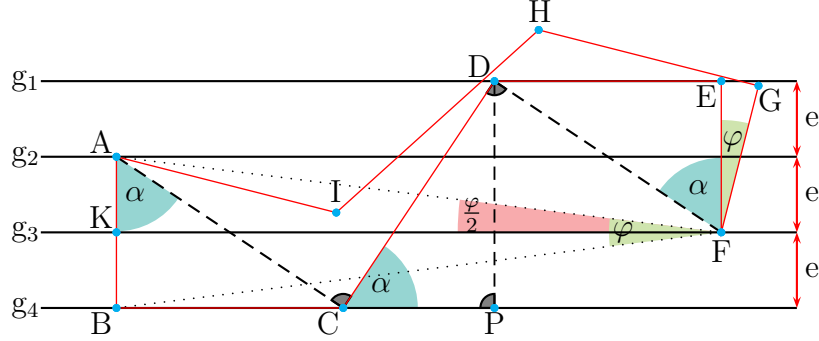


Abb. 33: Berechnungen am Vorderbergschen Neuneck

Betrachte nun obere Abbildung 33. K sei der Lotfußpunkt von A auf g_3 und P sei der Lotfußpunkt von D auf g_4 . Da Dreieck ABF gleichschenkelig ist, muss der Winkel $\angle AFK = \frac{\varphi}{2}$ sein. Zudem sei $\angle EFD = \angle PCD = \angle BAC = \alpha$. Nun gilt im Dreieck AKF : $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{e}{|FK|}$. Aufgrund der Monotonie des Tangens im Intervall $(0; \frac{\pi}{4})$ ist φ maximal, wenn $|FK|$ minimal ist. Nun gilt: $|FK| = |DE| + |CP| + |BC| = 2e \tan \alpha + \frac{3e}{\tan \alpha} + 2e \tan \alpha = 4e \tan \alpha + \frac{3e}{\tan \alpha}$. Es bezeichne $g(\alpha)$ den letzten Ausdruck, der minimiert werden soll. Dann gilt für die Ableitung: $g'(\alpha) = \frac{4}{\cos^2 \alpha} - \frac{3}{\sin^2 \alpha}$. Setzen wir diese 0 erhält man nach einigen Umformungen: $\sin \alpha = \frac{3}{7}$. Im Intervall $(0; \frac{\pi}{2})$, in dem α liegt, gibt es für $\alpha = \arcsin(\frac{3}{7})$ nur die Lösung $\alpha \approx 40,89^\circ$. Damit erhalten wir für das minimale $|FK| = g(\alpha)$, dass es rund $6,9282e$ ist. Somit ergibt sich für den größtmöglichen Winkel an der Spitze mithilfe der obigen Gleichung $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{e}{|FK|} \Leftrightarrow \varphi = 2 \arctan(\frac{e}{|FK|})$: $\varphi_{max} \approx 16,43^\circ$. Aufgrund der Forderung, dass ein vorderbergartiges Teil die Ebene parkettieren kann, ist φ_{max} also $\frac{360^\circ}{22}$. Der Abstand von E zu GH ist dann $r\sqrt{2-2\cos\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \approx 0,0408r$, wobei r nun für $|FE|$ steht.

Als Maßeinheit legen wir $|FA| = 1$ fest. Im Dreieck AKF gilt daher $\sin \frac{\varphi}{2} = e$ und damit erhalten wir mit $\varphi = \frac{360^\circ}{22}$, dass $e \approx 0,1423$ ist. Nun ist $|FE| = 2e$ und somit $r = 2e \approx 0,2846$. Mit dem und der obigen Formel für den Abstand von E zu GH ist die optimale Halsdicke beim Vorderbergschen Neuneck gleich $0,0116$.

Damit haben wir eine Halsdicke von $0,04$ beim verbesserten Vorderbergteil und eine von $0,0116$ beim Vorderbergschen Neuneck. Durch den Einsatz der Kreisevolvente als Randkurve erhalten wir also eine Halsdicke, die fast dreieinhalb Mal so groß ist. Die Dickenverbesserung beträgt also rund 250% .

9.3 Weitere interessante rechtwinklige Teile

Zuerst sind uns zwei weitere Verbesserungen des Thomas Trunk Tiles gelungen, welche aber wesentlich komplizierter und daher weniger ästhetisch sind. Eine geringfügige Verbesserung sieht man hier:

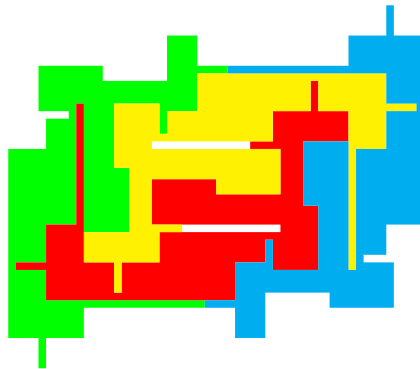


Abb. 34: erste Verbesserung des Thomas Trunk Tiles

Danach kamen wir durch eine etwas andere Anwendung des Eschertricks zu folgender Konfiguration:

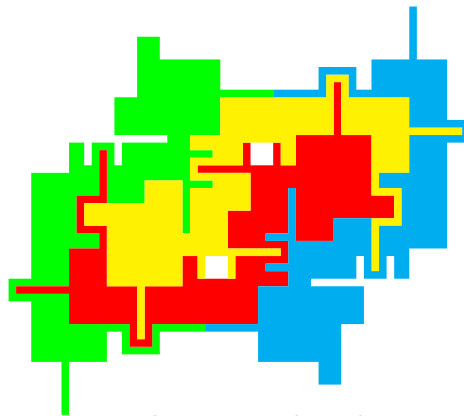


Abb. 35: zweite Verbesserung des Thomas Trunk Tiles

Zuletzt kamen wir bei der Suche nach einem rechtwinkligen Parkettstein mit schwacher Umschließungszahl 2 auf folgendes H-förmiges Teil, welches sich sicherlich gut als Logo eignet:

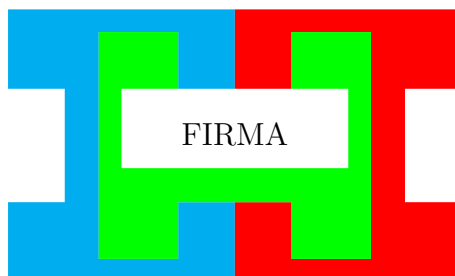


Abb. 36: H-förmiges Logo

9.4 Beweise und Herleitungen zu Heesch's Parkettproblem

9.4.1 Ammanns Teil mit Heesch-Zahl 3

Im Abschnitt „4.3.1. Nichtkonvexe Beispiele mit Heesch-Zahl 1 und 2“ erwähnten wir, dass ein Parkettstein, der mehr Einkerbungen als Spitzen, also mehr Schlösser als Schlüssel hat, meist keine Parkettierung möglich macht. Wie die Argumentation bei speziellen Teilen läuft, stellen wir am Beweis der Heesch-Zahl 3 des Teils von Robert Ammann dar.

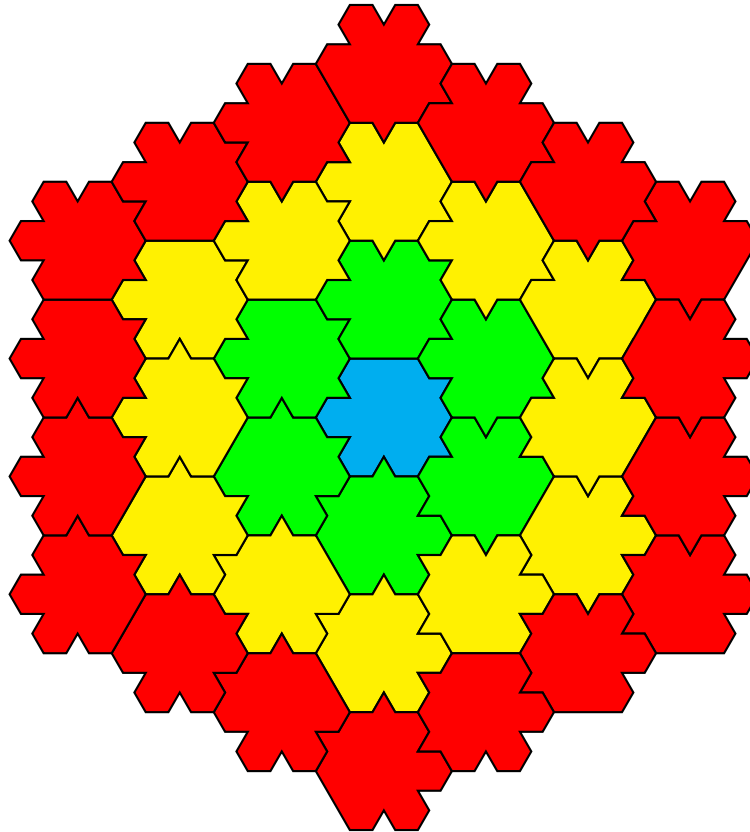


Abb. 37: Ammanns Teil mit Heesch-Zahl 3

Bei diesem kann aufgrund der Sechseckstruktur schnell gezeigt werden, dass mit einer eventuellen vierten Korona insgesamt 61 Teile im Parkett wären, welches nur von 54 Kanten umrandet wird. Dadurch gibt es mindestens 61 Einkerbungen, die nicht mit Spitzen gefüllt sind, und diese haben aber nicht alle auf der Umrandung Platz (vgl. [8]). Folglich hat es höchstens eine Heesch-Zahl 3 und wie in Abbildung 37 zu sehen ist, gibt es eine Möglichkeit drei Koronen zu legen. Folglich hat dieser Parkettstein eine Heesch-Zahl 3.

9.4.2 Zu konvexen Parkettsteinen mit endlicher Heesch-Zahl

Als erstes beweisen wir folgenden Satz:

Satz 4 *Ein konvexer Parkettstein mit endlicher Heesch-Zahl größer gleich 1 ist ein Polygon.*

Zum Beweise zeigen wir zunächst, dass in der ersten Korona jedes konvexen Teils mit Heesch-Zahl größer gleich 1 nur eine endliche Anzahl an Kopien von T vorkommt. Für ein konvexes Teil T sei $d(T)$ der größtmögliche Abstand zweier Punkte aus T . Betrachtet man die Menge aller Punkte, die von T maximal den Abstand $d(T)$ haben, so besitzt diese eine endliche Fläche. Alle Teile in der ersten Korona von T berühren T in mindestens einem Punkt und sind somit

in dieser Fläche zu finden. Da T und alle seine Kopien einen Flächeninhalt haben, der nicht beliebig klein ist, kann die erste Korona deshalb nur aus endlich vielen Teilen bestehen.

Den zweiten Teil des Beweises führen wir indirekt: Wir nehmen an, T hätte eine Randkurve mit einem streng konvexen Abschnitt von positiver Länge. Der Gegenbogen dazu ist jedoch streng konkav und besteht aus Teilstücken von Kopien von T . Da in der ersten Korona nur endlich viele Kopien von T zu finden sind, besteht der streng konkave Abschnitt auch nur aus endlich vielen Teilabschnitten, dass heißt, es gibt eine Kopie von T , deren Randkurve einen streng konkaven Abschnitt positiver Länge enthält. Damit besitzt jedoch auch die Randkurve von T einen streng konkaven Abschnitt positiver Länge, was der Forderung widerspricht, dass T konvex ist.

Damit ist bewiesen, dass die Randkurve eines konvexen Teils mit Heesch-Zahl größer gleich 1 aus Abschnitten besteht, die gleichzeitig konvex und konkav sind, also aus Strecken. Der Parkettstein ist also ein Polygon. $\square$

Nun beweisen wir folgenden Satz:

Satz 5 *Ein konvexes n -Eck mit $n \leq 4$ parkettiert die Ebene, wohingegen es für alle $n \geq 5$ eines mit Heesch-Zahl 1 gibt.*

Dass Drei- und Vierecke die Ebene parkettieren ist schnell ersichtlich: Ein Dreieck wird durch Drehung um 180° um einen Seitenmittelpunkt zu einem Parallelogramm, welches offenbar die Ebene parkettiert. Vierecke legen die Eben aus, indem man ein Viereck immer wieder an seinen Seitenmittelpunkten um 180° dreht. Dadurch werden immer nur gleichlange Seiten aneinander gelegt und in jeder Ecke stoßen alle vier Innenwinkel, also 360° , aneinander. Daher ist der erste Teil der Behauptung schon bewiesen.

Unser Beispiel für ein Fünfeck mit Heesch-Zahl 1 sieht wie folgt aus:

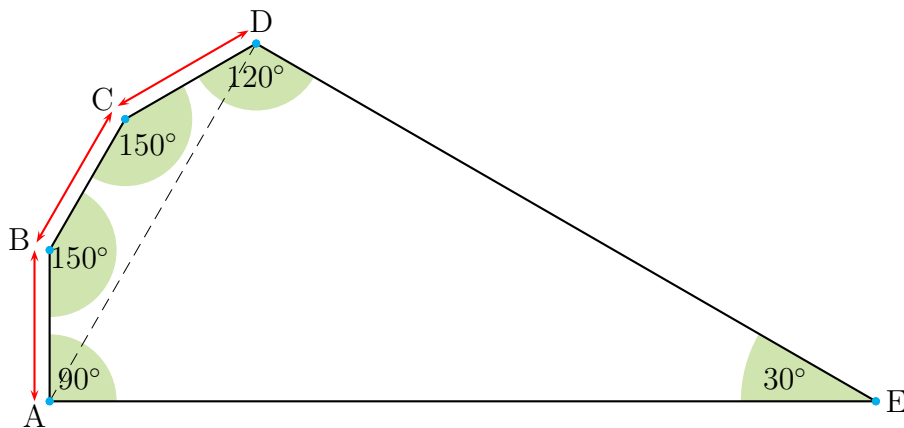


Abb. 38: unser Beispiel für ein konvexes Fünfeck mit Heesch-Zahl 1

Es besteht aus einem Dreieck mit den Innenwinkeln 30° , 60° und 90° , an dessen kürzester Seite ein Ausschnitt eines regelmäßigen Zwölfecks angehängt wurde. Mithilfe von [4], in welcher eine Klassifizierung aller konvexen Fünf- und Sechsecke, die die Ebene parkettieren, angegeben ist, lässt sich schnell zeigen, dass dieses Fünfeck nicht parkettiert.

Allgemein stellten wir fest, dass ein Fünfeck mit einem Paar paralleler Seiten keine endliche Heesch-Zahl haben kann, da es die Ebene parkettiert. Durch eine Drehung um den Mittelpunkt der Seite, die die beiden Parallelen verbindet, gelangt man zu einem punktsymmetrischen Sechseck, welches durch Translationen offenbar die Ebene auslegt.

Unser Beispiel für ein Sechseck mit Heesch-Zahl 1 ist folgendes:

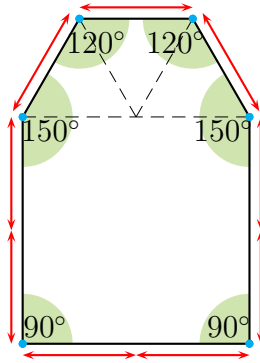


Abb. 39: unser Beispiel für ein konvexes Sechseck mit Heesch-Zahl 1

Einem Quadrat wurde die Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks aufgesetzt. Hier ist leicht zu sehen, dass es Heesch-Zahl 1 hat. Würde eine lange Seite einer Kopie an eine kurze Seite des zu umrundenden Sechsecks liegen, würde ein noch zu füllender 30° - oder 60° -Winkel verbleiben, was aber nicht möglich ist. Damit auch die langen Seiten des Originals noch umschlossen werden können, müssen also die Kopien an den kurzen Seiten wie in der Abbildung 16 angeordnet sein. Dadurch ergibt sich jedoch ein nicht auslegbarer 60° -Winkel in der ersten Korona, damit das Teil also Heesch-Zahl 1 hat.

Für $n \geq 7$ haben wir ein allgemeines Beispiel gefunden, welches hier für das Siebeneck gezeigt wird:

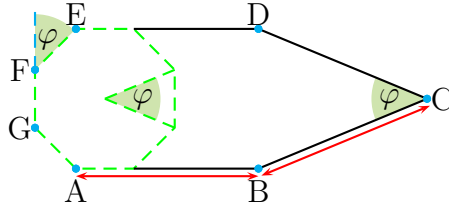


Abb. 40: unser Beispiel für ein konvexes n -Eck mit n größer gleich 7 (hier am Beispiel des 7-Ecks demonstriert)

Ausgehend von einem $(2n - 6)$ -Eck verlängern wir zwei gegenüberliegende Seiten so zu Punkten B bzw. D , dass ein Punkt C existiert, der $|AB| = |BC| = |ED| = |DC|$ und $\angle DCB = \varphi$ erfüllt.

Da die Innenwinkel des $(2n - 6)$ -Ecks für $n \geq 7$ größer als 120° sind, kann man keine zwei benachbarten kurzen Seiten (wie EF und FG) mit kurzen Seiten der Kopien umschließen. Dadurch liegen in der ersten Korona zwangsläufig zwei lange Seiten nebeneinander, die um die Länge einer kurzen Seite versetzt sind. Dadurch entsteht an der Randkurve der äußeren Korona ein Winkel, der nur halb so groß wie der kleinste Winkel des Polygons ist, wodurch diese nicht mehr umschlossen werden kann. Das Polygon hat also Heesch-Zahl 1. Damit ist der Satz 5 bewiesen. $\square$

Bei genauerer Analyse unserer konvexen Beispiele erkennt man, dass durch kleine Modifikationen sogar für jedes $n \geq 5$ unendlich viele Parkettsteine mit Heesch-Zahl 1 angegeben werden können. Für das allgemeine Beispiel für $n \geq 7$ reicht es, dass der Winkel bei C ein ganzzahliger Teil von φ , also der Form $\frac{\varphi}{m}$ mit ganzem m , ist. Dabei behält der Parkettstein seine Heesch-Zahl 1, da in der ersten Korona ein nicht auslegbarer Winkel $\frac{\varphi}{2m}$ auftritt. Bei dem Beispiel für $n = 6$ ist es nicht nötig ein Quadrat zu nehmen. Es geht ebenfalls, wenn das halbe

Sechseck an ein Rechteck gelegt wird, dessen eine Seite, die nicht an dem Sechseck liegt, länger oder so lang wie die andere Rechtecksseite ist. Schließlich kann bei dem konvexen Fünfeck die Seite $\overline{BD}$ parallel zu $\overline{AD}$ verschoben werden, sodass nur noch $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Dann können die beiden Konfigurationen aus Abbildung 15 immer noch gelegt werden. Somit haben wir für alle $n \geq 5$ unendlich viele konvexe n -Ecke mit Heesch-Zahl 1 angegeben.