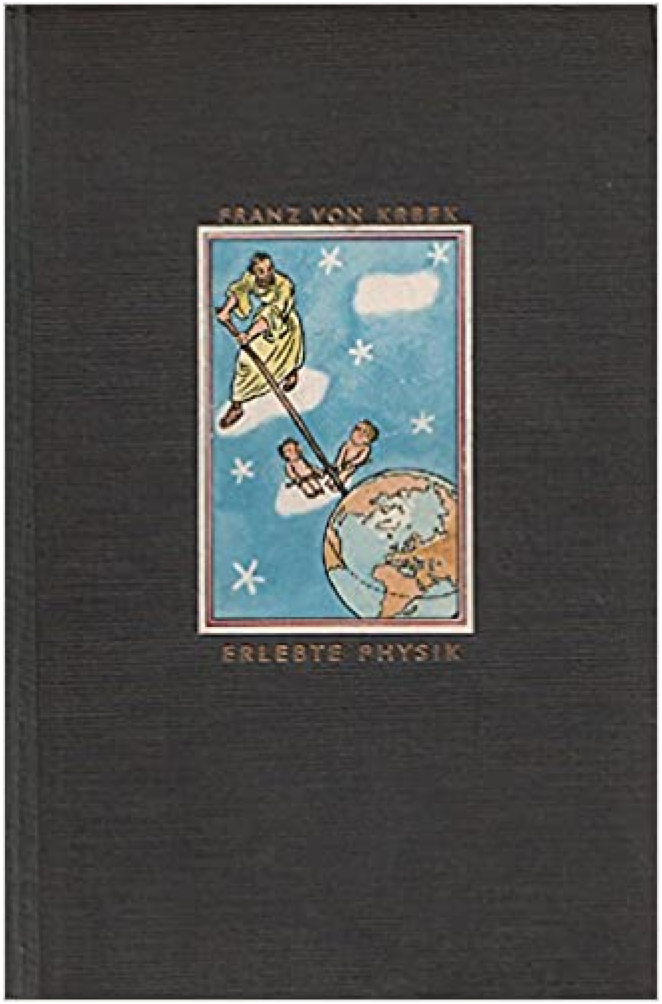
# Erlebte Physik
# von Dr. Franz von Krbek




1. Auflage


Hinweis: Das Buch erschien während des faschistischen Terrorregimes in Deutschland. Franz von Krbek musste dies wohl berücksichtigen, wodurch u.a. Physiker wie Albert Einstein nicht angemessen gewürdigt werden.

Abschrift und LaTex-Satz: Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

# Vorwort

Benvenuto Cellini: "Es ist wahr, dass
manche zu Anfang eines solchen Unternehmens
eine große Abhandlung zur Einleitung
schreiben würden, weil so eine ungeheure
Maschine zu bewegen man sehr viele
Instrumente nötig hat.
Solche große Vorbereitungen erregen jedoch
mehr Überdruss als Vergnügen, und deshalb
wollen wir den Weg einschlagen,
der uns besser dünkt."

Das Interesse an der Naturwissenschaft sollte sich nicht darin erschöpfen, ihre Forschungsergebnisse kennenzulernen. Ebenso interessant sind die Wege, die zu diesen führten, denn sie können neue fruchtbare Forschungen anregen. Nur bei abgeschlossenen Lehren gelingt das nicht, darum redet man dann von geschichtlicher Darstellung.

Unsere Darstellung ist keine geschichtliche. Sie knüpft an Geläufiges an, klärt und erweitert dessen Sinn, um schließlich das Wesen von Mathematik und Physik aufzudecken. Es kam weniger auf Vollständigkeit an als auf das Herausschälen leitender Gesichtspunkte. So gelingt es, das Bild einer Naturwissenschaft im Entstehen zu gewinnen.

Ein solches Bild versetzt erst in die Lage, das Wesen der Naturwissenschaft zu begreifen. Der Forscher, der in seinen Studien aufgeht, ist im Besitze eines solchen Bildes - vielleicht auch nur einer Bildecke -, das Farben in sein Forschungsgebiet bringt. Darum begeistert er sich daran, kann aber Außenstehenden nur schwer begreiflich machen, was ihm so große Freude bereitet. An dieser Freude möge der Leser teilhaben !

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Auf Entdeckungsfahrt

Die Natur ist ein Buch, in dem man lesen lernen sollte.

## 1.1 Die bedrohte Erde

### Man wollte die Erde aus den Angeln heben

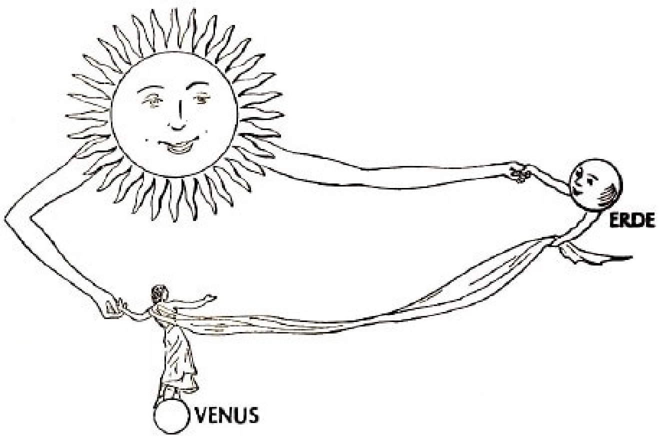
Die Macht des Menschen über die Natur wächst in dem Maße, wie seine Erfahrungen umfassender werden. Allein, das bloße Anhäufen von wertvollstem Material wäre nutzlos und würde bald jede Übersicht unmöglich machen, wenn das Material nicht begrifflich geordnet würde. Es gehört zu den Aufgaben der Wissenschaft, geeignete Begriffe zu entwickeln, und in diesem Sinne darf man vielleicht auf die Frage "Was ist Wissenschaft?" antworten: Einsatzbereites Wissen - obzwar die Wissenschaft in ihrem Fortschreiten und in ihrer Zielsetzung durchaus nach eigenen Gesetzen verfährt und sich nicht an die Forderungen des Alltags bindet.

Die wissenschaftlichen Begriff - die Gussform, in welcher das rohe Material der Erfahrungstatsachen zu einem schönen, übersichtlichen Kunstwerk wird - sind dem jeweiligen Stand unserer Erfahrungen angepasst. Mit wachsender Kenntnis erweisen sie sich im Laufe der Zeit als zu eng und müssen gegen umfassendere ausgetauscht werden. Ein Blick auf die Geschichte der Naturwissenschaften bestätigt diese Behauptung; wir führen hier nur ein Beispiel aus der Mathematik an.
Auf der griechischen Insel Delos befand sich ein würfelförmiger Altar, und die Gottheit verlangte, einen genau doppelt so großen, gleichfalls würfelförmigen Altar zu errichten. Von vornherein unterlag es keinem Zweifel, dass es einen größeren Würfel der verlangten Eigenschaft - das heißt doppelten Inhalts - geben müsse. Wie sollte man aber seine Kantenlänge finden ?
Für uns bedeutet das heute nicht die geringste Schwierigkeit, weil wir mit der Wurzelrechnung vertraut sind und die gesuchte Kante sich als Kubikwurzel darstellt. Die Griechen aber kannten nur ganze Zahlen und Brüche, und mit deren Hilfe lässt sich die gesuchte Kantenlänge beim besten Willen nicht darstellen. So mussten sie an diesem berühmten Delischen Problem scheitern - erst unser allgemeinerer Zahlenbegriff wird mit ihm fertig.

Die Rolle der Begriffe erschöpft sich nicht darin, unser Material in eine übersichtliche Ordnung zu bringen; oft genug decken sie ungeahnte Zusammenhänge auf. Man denke nur an die Bewegungen der Himmelskörper.
Schon seit dem Altertum hatte man beobachtet, das die Planeten am Himmel einherwandeln; man bemühte sich, ihre Bewegungen zu erforschen, ihre Bahnen voraus zu berechnen. Erst Kepler aber gelang es in jahrelanger mühseliger Arbeit, aus den genauen Beobachtungen Tycho Brahes seine drei berühmten Gesetze zu finden, nach denen sich die Bewegung der Planeten vollzieht. Es bedurfte des ganzen Scharfsinns, des mathematischen Genies eines Kepler, um diese Gesetze aus dem Wust des Beobachtungsmaterials herauszuschälen.

Kennt man hingegen das von Newton gefundene allgemeine Gravitationsgesetz, das heißt das berühmte Gesetz, nach dem die Himmelskörper einander anziehen, dann bildet es eine Angelegenheit von wenigen Minuten, aus diesem Newtonschen Gesetz die drei Keplerschen Gesetze abzuleiten. Darüber hinaus gewinnt man aber einen neuen, höheren Standpunkt: Man darf sagen, dass Newton mit der Entdeckung seines allgemeineren Anziehungsgesetzes die Feststellungen Keplers erklärt hat.

Es ist weiter zu bedenken, dass auch die Gültigkeit des Beobachtungsmaterials nur bedingt feststeht; sie ist in hohem Maße vom Stand der Messtechnik abhängig. Neue Versuche, gesteigertes experimentelles Geschick, höhere Genauigkeit führen zur Vermehrung und Verbesserung des Beobachtungsmaterials - und das zwingt uns oft dazu, eine neue Auslegung zu suchen.




So galt zum Beispiel der Begriff der Masse Jahrhunderte hindurch in unveränderter Form: die Masse eines Körpers hielt man für eine gegebene konstante Größe, die sich bei keinem physikalischen Prozess ändern könne. Es gehörten Erfahrungen an schnellfliegenden Elektronen dazu, erkennen zu lassen, dass der ursprüngliche Begriff der Masse einer Verfeinerung bedarf. Heute wissen wir, dass die Masse eines Körpers nur bei geringen Geschwindigkeiten als unveränderlich betrachtet werden kann; mit wachsender Geschwindigkeit aber nimmt die Masse merklich zu. Solche Umstände bewirken, dass die geltenden Theorien einander in immerwährender Folge ablösen. Wir ringen der Natur immer neue Gebiete ab, und wenn sie uns listig Fallen stellt und unser Wissen Lügen zu strafen scheint, befreien wir uns dadurch, dass wir die alte Lehre zugunsten einer neuen aufgeben - nicht anders als die Schlange, die sich häutet, wenn ihr das alte Gewand zu eng geworden ist. Man möchte das Wort "Seid klug wie die Schlangen" manchmal in diesem Sinne auslegen.

Solche Betrachtungen fördern. Sie lassen uns einsehen, dass keine Theorie Anspruch auf Unvergänglichkeit erheben darf. Wie es sich stets zeigte, bleibt das Erfahrungsmaterial vom Fortschritt nicht unangetastet, und mit ihm ändert sich die Theorie. Ihr gegenseitiges Verhältnis pflegt man dahin zu fassen, dass die Theorie das Beobachtungsmaterial zu erklären habe. Weiter aber lassen unsere Betrachtungen erkennen, wie lebensnahe die "grauen" Theorien sind. Sie erfüllen ja die Aufgabe, das Erfahrungsmaterial zu ordnen und damit einsatzbereit zu gestalten.

Wie kam man aber so weit, Theorien aufzustellen? Es bedarf keineswegs eines systematischen Studiums der Geschichte der Naturwissenschaften, um diese grundlegende Frage zu beantworten, sondern es genügt, einige Beispiele herauszugreifen.
Da ist der bescheidene Diener, die Waage, ohne die der Kaufmann nicht verkaufen, die Hausfrau nicht Wirtschaften und der Forscher nicht arbeiten könnte. Sie ist heute unentbehrlich - und außerdem ist sie alt, vermutlich älter als das Wahrzeichen unserer Technik, das Rad. Schon die alten Ägypter kannten sie, wie aus aufgefundenen Darstellungen hervorgeht. Hier schalten wir eine hübsche Aufgabe ein:

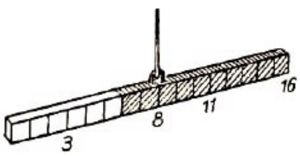
Auf einer gleicharmigen Waage soll bis zu 121 Gramm Höchstgewicht auf das Gramm genau gewogen werden. Wieviel Gewichtsstücke braucht man dazu, und welche Gewichte besitzen diese? Überraschenderweise genügen dazu die Gewichte von 1, 3, 9, 27 und 81 Gramm Um beispielsweise einen 73 Gramm schweren Körper zu wiegen gesellt man ihm das Gewicht 9 Gramm zu und legt die Gewichte 1 und 81 Gramm auf die andere Waagschale.

Totengott Anubis wiegt das Herz eines Verstorbenen. Aus einem ägyptischen Totenbuch. Ende des 14. Jahrh. v. Ztr.

Für den Physiker ist die Waage freilich nicht nur ein Gegenstand des alltäglichen Gebrauchs, sondern auch eine einfache physikalische Maschine: ein Hebel, dessen Gesetze es zu erforschen gilt. Wir wissen zum Beispiel alle, dass es bei der Waage auf das Längenverhältnis der Arme ankommt. So wird bei der Dezimalwaage der längere Arm mit Zehntelgewichten beschwert, weil er zehnmal länger ausfällt als der andere Arm, der den zu wiegenden Körper trägt. Der Physiker begnügt sich nicht damit, dass die angegebene Regel stimmt, sondern fragt, warum sie stimmt. Die stete Frage "Warum?" kennzeichnet den Forscher.
Sie ist vollauf berechtigt.

Denn tausend Einzelerfahrungen allein können noch immer nicht verbürgen, dass die tausendunderste im erwarteten Sinne ausfällt. Nur wenn man die Gründe kennt, die das Geschehen bestimmen, weiß man, was sich einstellen muss; die Gründe aber bilden die Antwort auf das "Warum?"

Anders ausgedrückt: der Forscher wünscht eine Theorie des Hebels. Nun könnte es sein, dass alle Begriffe bereit sind und er sie benutzen kann wie der Dolmetscher eine fremde Sprache. Der Kundige drückt das Hebelgesetz leicht in der Sprache der Mechanik aus. Sie ist uns aber noch fremd, und darum versuchen wir es mit einer Überlegung, die uns zunächst einige Brocken dieser Sprache erraten lassen soll. Hängt man ein Lineal von 16 Zentimeter Länge, das mit Zentimetereinteilung versehen ist und 16 Gramm wiegt, beim Teilstrich 8 auf, dann hängt es waagerecht: es herrscht Gleichgewicht. Selbstverständlich ändert sich daran nichts, wenn man sich das Lineal aus zwei Teilen von 6 und 10 Zentimeter Länge bestehend denkt.




Nun lehrt eine alltägliche Erfahrung, dass es gleichgültig ist, ob ein Körper in seiner ganzen Ausdehnung aufliegt oder nur im Schwerpunkt unterstützt ist; in beiden Fällen belastet er die Unterlage gleicherweise mit dem vollen Gewicht.
Wenden wir das auf die beiden Teile des Lineals an!

Der Schwerpunkt des 6 Zentimeter langen Teiles liegt bei Teilstrich 3, somit 5 Zentimeter links vom Aufhängungspunkt entfernt. Nach dem Gesagten darf man diesen Linealteil durch ein Gewicht von 6 Gramm ersetzen, das am Teilstrich 3 hängt. Ähnlich darf man den anderen Teil des Lineals durch ein Gewicht von 10 Gramm ersetzen, das den Teilstrich 11 belastet. Die beiden Gewichte stehen im Verhältnis 6:10 oder 3:5 zueinander, während die beiden Schwerpunkte 5 und 3 Zentimeter vom Mittelpunkt entfernt sind, somit "Arme" vom Verhältnis 5:3 ergeben. Man sieht also, dass im Gleichgewichtsfall die Gewichte am Hebel in umgekehrtem Verhältnis zueinander stehen wie die Armlängen: je kürzer der Arm, desto größer das Gewicht.

Inwiefern ist man jetzt klüger? Man hat das Hebelgesetz zwar hergeleitet, aber doch nur auf Grund einer Annahme über das Verhalten im Schwerpunkt. Diese Annahme muss das Hebelgesetz schon enthalten, denn sonst hätte man es aus ihr nicht folgern können. Was wir erreichten, besteht darin, dass wir ein Gesetz, ein physikalisches Verhalten, durch ein anderes gerechtfertigt haben. Bedeutet das einen Gewinn? Zweifellos!
Denn es geht stets darum, Gesetze auf andere zurückzuführen, die einfacher oder naheliegender sind. Dies trifft aber auf unser Vorgehen augenscheinlich zu.

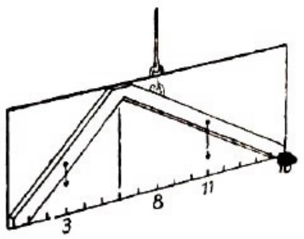
Freilich bleibt man auch dabei nicht stehen, sondern ist bestrebt, immer umfassendere Begriffe einzuführen, die dann auch das Hebelgesetz als einen Spezialfall unter vielen anderen enthalten. Zu solchen umfassenden Begriffen gelangte man nur schrittweise. Wir wollen zusehen, welche Begriffe sich an Hand des Hebelgesetzes darbieten. Zunächst der Begriff des statischen Momentes. Wir hatten gefunden, dass sich die Gewichte umgekehrt verhalten wie die Armlängen, was sich noch anders schreiben lässt, und zwar in der Form:

$$\text{Gewicht } 1 \times \text{Arm } 1 = \text{Gewicht } 2 \times \text{Arm } 2 \ ,$$
$$\text{in unserem Beispiel } 6 \times 5 = 10 \times 8.$$

Man erkennt daraus, dass es beim Hebel weder auf das Gewicht noch auf den Arm allein ankommt. Nur das Produkt beider ist von Bedeutung; man führt es deshalb als neuen Begriff ein und gibt ihm den Namen "statisches Moment".

Das Hebelgesetz können wir nun also auch folgendermaßen ausdrücken: Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die statischen Momente auf beiden Seiten gleich groß sind. Damit scheint zunächst nicht mehr gewonnen als eine neue Formulierung des alten Gesetzes. Indessen ist der Begriff des statischen Moments viel allgemeinerer Anwendungen fähig und erweist sich bei zahlreichen Problemen der Mechanik als äußerst nützlich und vereinfachend; und eben darin liegt die Daseinsberechtigung all solcher physikalischer Begriffe und Abkürzungen.

Noch ein Umstand verdient angemerkt zu werden. Wir redeten vom Schwerpunkt. Für einen Stab oder für eine Kugel lässt er sich leicht angeben. Will man ihn aber für unregelmäßig gestaltete Körper wie zum Beispiel einen Baum erklären, dann gelingt das nicht mehr mit der Elementarmathematik, sondern es müssen Begriffe herangezogen werden, die der höheren Mathematik angehören. Diese spielt also bereits im Alltag eine Rolle, wenn auch eine, die den meisten verborgen bleibt.

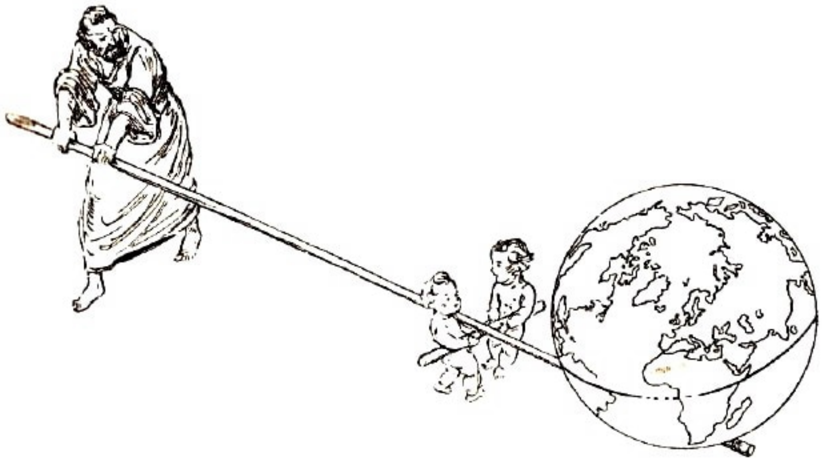



Nehmen wir an, dass unser Lineal aus verformbarem Material besteht, etwa aus Aluminium. Dann können wir es zunächst breit auswalzen, ohne dass sich etwas am Gleichgewicht änderte. Hierauf formen wir die beiden Rechtecke, die den gedachten Teilen des Lineals von 6 und 10 Zentimeter Länge entsprechen, zu diagonal verlaufenden Stäben.

Die beiden Schwerpunkte bleiben dabei unangetastet am selben Ort, ebenso bleibt also das Gleichgewicht erhalten.
Nicht der tatsächliche Abstand der Schwerpunkte vom Drehpunkt, auch nicht die Form und Größe des Hebels spielt eine Rolle, sondern allein der Abstand der Schwerpunkte von der Mittelachse - und diese Strecken gehen in den Begriff des statischen Moments ein, der dadurch eine Verallgemeinerung erfährt.

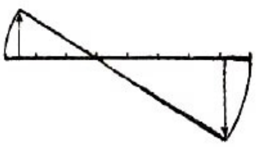
Leonardo da Vinci scheint diesen Sachverhalt bereits durchschaut zu haben. Leider behielt er sein Wissen für sich und befruchtete so die Forschung nicht. Erst die sehr viel später erfolgte

Ausgabe seiner Aufzeichnungen gab seine bedeutsamen Einsichten preis, zu einer Zeit, als sie schon überholt waren. In weniger vollständiger Form war der Hebelsatz übrigens bereits dem Altertum bekannt. Archimedes legt man den stolzen Ausspruch in den Mund, dass er von einem festen Punkt aus die Erde aus ihren Angeln heben könnte. Freilich wurde dabei außer acht gelassen, dass kein Material diese Beanspruchung aushielte. Schon der unvergleichlich bescheidenere Versuch, einen Berg zu bewegen, müsste daran scheitern, dass der überlange Hebel unter dem eigenen Gewicht brechen würde.



Wir sind von einem Lineal ausgegangen, das 16 Zentimeter lang war und ein Gewicht von 16 Gramm hatte, und gelangten zum Hebel mit den Armen von 3 und 5 Zentimeter und den Lasten von 10 und 6 Gramm. Dieser Hebel erwies sich als physikalisches Abbild jenes Lineals. Form, Stoff, Aussehen des Lineals sind gleichgültig. Die Physik bildet eben die Natur nicht mit der ängstlichen Treue einer fotografischen Linse nach, sondern sie versucht, nur das Entscheidende einzufangen - einem Künstler ähnlich, der nur die markanten Züge eines Gesichts heraushebt.

Der Hebel erlaubt uns, neben dem statischen Moment einen weiteren Begriff einzuführen, der für die gesamte Physik von grundlegender Bedeutung ist: die Arbeit. Dreht man den Hebel um ein Stück aus seiner waagerechten Lage heraus, so verschieben sich die beiden Lasten: die eine steigt, die andere sinkt, wie unsere Figur zeigt.



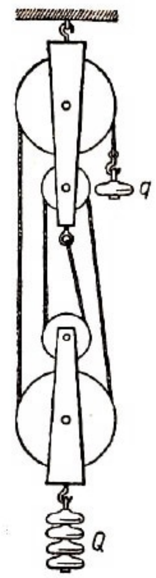
Aus der Ähnlichkeit beider Dreiecke folgt ohne weiteres, dass die Verschiebungen - senkrecht gemessen - im selben Verhältnis stehen wie die Arme selbst; sie verhalten sich in unserem Beispiel wieder wie 3:5, stehen also in umgekehrtem Verhältnis wie die Gewichte.

Genau wie wir früher das statische Moment - das heißt das Produkt aus Gewicht und Arm - gebildet haben, können wir also auch das Produkt aus dem Gewicht und seiner senkrechten Verschiebung bilden. Im Gleichgewichtsfall müssen beide Produkte wieder einander gleich sein.

Dies Produkt erhält einen besonderen Namen: es heißt "Arbeit". Man spricht von positiver Arbeit, wenn das Gewicht gehoben wird, und von negativer Arbeit, wenn es sinkt. Es ist nicht schwer, in diesen Festsetzungen eine Anlehnung an die alltägliche Erfahrung zu erkennen. Jeder weiß, dass es Arbeit kostet, ein Gewicht zu heben - und zwar um so mehr Arbeit, je größer das Gewicht ist und je höher man es hebt. Umgekehrt gewinnt man Arbeit, wenn man ein Gewicht sinken lässt; es sind entgegengesetzte Vorgänge, die deshalb auch in den physikalischen Gleichungen durch entgegengesetzte Vorzeichen charakterisiert werden.

Mit Hilfe des Arbeitsbegriffs können wir das Hebelgesetz nun in einer neuen Form aussprechen. Beim Drehen des Hebels sinkt, wie gesagt, die eine Last, während die andere steigt. Im Gleichgewichtsfall müssen die beiden Arbeiten, die dabei geleistet werden, entgegengesetzt gleich ausfallen; gleichbedeutend damit ist die Forderung, dass die Gesamtarbeit verschwinden muss.

Wir behaupten, die Arbeit sei ein grundlegender Begriff. Tatsächlich ist es mit seiner Hilfe gelungen, das Hebelgesetz in besonders einfacher und allgemeiner Form auszusprechen. Denn der Satz "Die Gesamtarbeit muss verschwinden" lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig; überdies aber fordert er geradezu eine Verallgemeinerung heraus; es erscheint äußerst plausibel, dass sein Anwendungsbereich sich noch viel weiter erstreckt - denn er enthält ja keinerlei Aussagen, die sich speziell auf den Hebel beschränken würden.
Das bringt uns auf den Gedanken, einen Versuch zu wagen. Wir wollen zusehen, ob der Satz "Die Gesamtarbeit muss verschwinden" nicht für alle Maschinen im Gleichgewicht gültig ist. Und tatsächlich wird sich zeigen, dass er gestattet, die Gleichgewichtsbedingungen überall sofort zu durchschauen.




Beginnen wir mit dem Flaschenzug. Um uns an etwas Bestimmtes zu halten, nehmen wir an, der Flaschenzug bestehe aus vier Rollen in der abgebildeten Weise. Infolge der Anordnung der Schnüre sinkt das Gegengewicht $q$ viermal so viel, wie sich die Last $Q$ hebt. Diese soll insgesamt um die Höhe $H$ gehoben worden sein. Dann sank also $q$ um die vierfache Strecke $4H$. Die Arbeit zum Heben der Last beträgt folglich $Q \cdot H$, während sie sich für das Sinken des Gegengewichts als $-q \cdot 4H$ ergibt (negativ, weil es sich um ein Sinken handelt). Unserer Annahme zufolge soll im Gleichgewichtsfall die Gesamtarbeit, also die Summe dieser beiden Arbeiten, verschwinden. In die Formelsprache übersetzt, heißt das

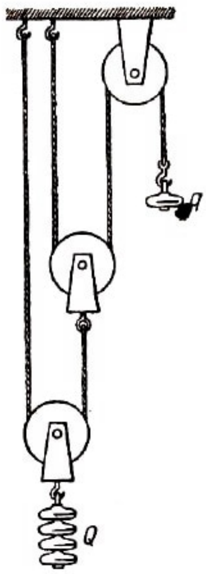
$$Q \cdot H - q \cdot 4H = 0 \qquad \text{woraus} \qquad q = \frac{1}{4}Q$$

folgt, in Worten: Ein Viertel vom Gewicht der Last hält dieser das Gleichgewicht.

Freilich, was man an Gewicht, oder anders ausgedrückt, an Kraft gewinnt, büßt man an Zeit ein, indem der Weg $4H$, auf dem man die Kraft $q$ aufbringen muss, sich vervierfachte.

Dieses Ergebnis lässt sich noch auf eine andere Weise gewinnen. Es zeigt sich dabei, dass umfassende Begriffe wie Arbeit auf Kosten der Unmittelbarkeit erkauft werden. Dies ist jedoch stets eine vorübergehende Erscheinung. Denn das Vertrautwerden mit den neuen Begriffen führt dazu, sie allmählich als fast selbstverständlich und darum anschaulich zu empfinden.
Dieser Sachverhalt wird uns noch oft begegnen, und er wird sich immer klarer herausschälen. Er bildet die Voraussetzung für die Entwicklungsfähigkeit des menschlichen Geistes.

Um die Gleichgewichtsbedingung beim Flaschenzug unmittelbar zu erkennen, genügt es, zu bemerken, dass die Last $Q$ an vier Schnüren hängt, deren jede folglich $\frac{1}{4}Q$ zu tragen hat; $q$ muss dann dem Zug von nur einer dieser Schnüre standhalten, was $q = \frac{1}{4}Q$ bedeutet. An Einfachheit lässt diese Betrachtung kaum zu wünschen übrig. Sie verwertet Erfahrungen, die ein jeder besitzt.




Niemand wird bestreiten wollen, dass die Last sich gleichmäßig auf die Schnüre verteilt. Im Laufe der Jahrhunderte wurden nun mit ähnlichen Ansätzen wiederholt grundlegende Einsichten gewonnen. Solange es darum geht, Neuland zu erobern, ist nichts gegen ein solches Vorgehen einzuwenden. Erst wenn die verschiedenen Ergebnisse reif sind, einheitlich behandelt zu werden, müssen umfassende Begriffe aufkommen und die Betrachtungen mit ihrer Hilfe geführt werden. Beim Flaschenzug beschritten wir zuerst letzteren Weg und erst hinterher einen Weg, auf dem man unmittelbar, losgelöst von anderen Erwägungen, zur Gleichgewichtsbedingung gelangt.

Unser Flaschenzug enthält vier Rollen. Man kann fragen, ob nicht schon weniger genügen würden. Das ist tatsächlich der Fall, wenn man drei Rollen so anordnet, wie die Figur zeigt. Mit einem solchen Flaschenzug lässt sich sogar der Baron Münchhausen in den Schatten stellen, der sich bekanntlich mit der Faust an seinem eigenen Zopf aus einem Sumpf zog.

Nun, dies Kunststück erscheint dem Physiker bedenklich. Man kann sich dagegen mit dem kleinen Finger hochheben. Dazu bediene man sich eines Flaschenzuges, der aus einem halben Dutzend Rollen besteht. Dann genügt es, $\frac{1}{32}$, des Eigengewichts heben zu können, was man mit dem kleinen Finger leicht schafft.

Zu den einfachen Maschinen gehört weiter die schiefe Ebene. Wiederum wollen wir unser Prinzip "Die Gesamtarbeit muss verschwinden" heranholen, um das Gleichgewicht zu durchschauen. Während das Gegengewicht $q$ um die Strecke $H$ sinkt, legt die Last $Q$ augenscheinlich einen ebenso langen Weg auf der Ebene zurück.

Im Sinne des Prinzips kommt es aber nicht auf diesen Weg an, sondern vielmehr auf seine senkrechte Projektion, die angibt, um wieviel die Last gehoben wurde.
Sie beträgt $Hf$, wenn $f = a : c$ das Verhältnis der Höhe $a$ der schiefen Ebene zu ihrer Länge $c$ bezeichnet. Damit können die Arbeiten berechnet werden, die zur betrachteten Verschiebung der Gewichte erforderlich sind. Die Arbeit an $q$ beträgt - $q \cdot H$ und die der Last $Q \cdot Hf$. Die Summe soll verschwinden, weil sie die geleistete Gesamtarbeit darstellt. In Formeln gefasst, heißt das

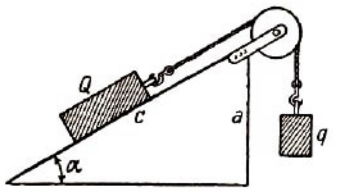
$$Q \cdot H \cdot f - q \cdot H = 0$$

woraus nach Kürzen durch $H$

$$q = Qf$$

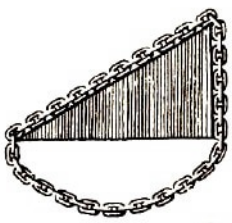
folgt. Ähnlich wie beim Flaschenzug gewinnt man Kraft, denn $f$ ist natürlich ein echter Bruch, das heißt $q$ ist kleiner als $Q$; diesen Kraftgewinn muss man wieder durch ein Mehr an Weg erkaufen.

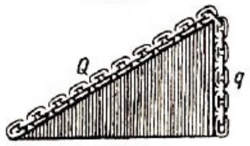
Auch für die schiefe Ebene gibt es eine Betrachtung, die unser Ergebnis unmittelbarer, als es eben geschah, wiederzugewinnen gestattet. Man denke sich eine geschlossene Kette um die schiefe Ebene gelegt. Ruhte die Kette vorher, dann verharrt sie weiter im Ruhezustand, wenn sie von außen nicht gestört wird. Der lose herunterhängende Teil belastet den übrigen Teil symmetrisch, so dass man ihn abschneiden darf. Der Rest bleibt dann noch immer im Ruhezustand. Dieser Rest besteht aber aus zwei Teilen, welche der Scheitelpunkt der schiefen Ebene von einander trennt, und deren Gewichte sich so zueinander verhalten wie ihre Längen.




Damit besitzen wir bereits die Gleichgewichtsbedingung, die wir jetzt in die Worte kleiden:
Das Gegengewicht ist um den Faktor $f$ geringer als die Last. $f$ ist natürlich nichts anderes als $\sin\alpha$, wenn $a$ den Neigungswinkel der schiefen Ebene bezeichnet. Also ist $q = Q \cdot \sin\alpha$.

Ausschlaggebend für diese Betrachtung bleibt die Annahme, dass die Kette nicht zu rotieren beginnt. Das lässt sich plausibel machen, aber auch nicht mehr. Man kann sich darauf berufen, dass es keinen Grund gibt, warum die Rotation im einen und nicht im anderen Sinne erfolgen sollte, dass sie folglich überhaupt nicht stattfinden kann. Man kann anführen, dass nicht einzusehen ist, mit welcher Geschwindigkeit die Kette rotieren soll. All diese Gründe können aber die Annahme nicht voll erhärten, die sich auch durch Versuche nicht bestätigen lässt, weil in Wirklichkeit immer Reibung auftritt, von der hier völlig abgesehen wurde.






So wird der Name "Gedankenversuch" für die Annahme verständlich: er kann nur in Gedanken ausgeführt werden, und zwar in Gedanken, die schon vorhandene Erfahrungen benutzen.

Ob der Gedankenversuch zulässig ist oder nicht, können nur die Folgerungen entscheiden, die man aus ihm zieht. Werden sie von der Natur bestätigt, dann gilt der Gedankenversuch als gelungen, sonst muss er aufgegeben werden. In früheren Zeiten arbeiteten die Forscher häufig mit Gedankenversuchen.

Sie hatten noch keine umfassenden Begriffe zur Verfügung, die ihnen das Geschehen einzufangen gestatteten, sondern sie mussten den begrifflichen Inhalt erst erschauen. Gerade das zeichnete sie aus, dass sie imstande waren, aus Gedankenversuchen, die keinem fremd sind, klare Einsichten zu gewinnen.

Wie kam man auf Gedankenversuche? Das Erfahrungsmaterial häufte sich, und es drängten sich von selbst Annahmen auf. Sie bilden Vorstufen zu einer klaren Übersicht. Es hat deshalb keinen Zweck, Gedankenversuche weiter untermauern zu wollen, sie noch weiter zu erklären.
Wenn Sätze wie "Aus nichts wird nichts" zum Erklären herangezogen wurden, dann bildeten sie eine Selbsttäuschung der Forscher, die nur menschlich zu begreifen ist. Die Philosophie schwebte immer noch als Vorbild vor, und man bedachte nicht, dass man es nicht mit Philosophie, sondern mit Physik zu tun hatte. Freilich befand sich diese Physik erst im Werden, was vieles erklärt.

Hebel, Flaschenzug und schiefe Ebene bilden die einfachen Maschinen. Man benutzt sie, um

mit geringer Kraft große Lasten fortzubewegen. Um sie einsetzen zu können, muss aber das Verhältnis zwischen Kraft und Last bekannt sein. Es wird durch die Gleichgewichtsbedingungen gegeben. Mit ihrer Hilfe erkennt man sofort, welche Kraft zum Heben einer bestimmten Last zu entwickeln ist. Es gelang uns, alle diese Gleichgewichtsbedingungen aus dem einzigen Satz "Die Gesamtarbeit muss verschwinden" herzuleiten.
Alle Erfahrungen, die man an einfachen Maschinen gewinnen kann, liegen damit übersichtlich geordnet vor: Wir besitzen eine Theorie der einfachen Maschinen. Diese Theorie bildet den ältesten Teil der Mechanik und heißt Statik.

Die Geschichte der Statik bildet die beste Illustration für das Entstehen von immer umfassenderen Begriffen, die schließlich in der "Arbeit" gipfeln. Man erlebt, wie die Bedürfnisse des Handwerks die Anfänge einleiten. Nach einiger Erfahrung bevorzugt man einen Hebel mit langem Arm, noch bevor vom Ahnen des Hebelgesetzes die Rede sein könnte. Hinterher will man seine Erfahrungen sammeln und anderen mitteilen. Das kann geschehen, indem man jemand anlernt.
Befriedigender erscheint es aber, wenn man die gesammelten Erfahrungen übersichtlich ordnen kann, um sie jederzeit einsatzbereit zu haben. Das Sammeln allein erstreckte sich in der Statik auf unzählige Geschlechter. Als noch schwieriger erwies es sich, Begriffe zu finden, die ein Ordnen des angehäuften Erfahrungsmaterials ermöglichten. Man versuchte zunächst das wirkliche Geschehen in den Vorstellungen genau nachzubilden. Das Einführen der Kraft als Zug oder Druck entspricht diesem Bestreben. Erst viel später gelangte man zur Ansicht, dass man sich von dieser Einschränkung besser frei macht. Das Endergebnis bildete dann die Prägung des grundlegenden Begriffs der Arbeit oder das Ausdehnen des Kraftbegriffs auf die Schwere.
Die Statik, wie wir sie bisher entwickelt haben, besitzt noch nicht die volle Allgemeinheit, deren sie fähig ist. Auch der Leitsatz "Die Gesamtarbeit muss verschwinden" lässt sich nämlich noch verallgemeinern. Dabei begegnen uns mathematische Größen: die Differentiale. Sie sind Geschöpfe der Neuzeit und stellen an Fruchtbarkeit alles in den Schatten, was das Altertum uns überlieferte. Zunächst lernte man sie zu gebrauchen und erst sehr viel später zu begreifen. Wie konnten sie aber eingeführt werden, wenn niemand sie genau erklären konnte?

Man wäre geneigt, diese Frage für berechtigt zu halten - aber nur, solange man keine geschichtlichen Studien getrieben hat. Denn es kam nicht nur einmal vor, dass Begriffe eingeführt wurden, die man zunächst formal handhabte und deren genauen Inhalt man erst beträchtlich später erkannte. So erging es auch dem mathematischen Differential, das Leibniz einführte und mit der noch heute üblichen Bezeichnung versah. Später haben wir uns damit noch ausführlich auseinanderzusetzen, darum genügen hier einige Bemerkungen. Sie sollen uns mit einer paradoxen Erscheinung vertraut machen. Man kann sie in die Worte kleiden, dass man sich diesmal auf Analogien verließ, die - nicht bestanden! Wie kam man trotzdem zu richtigen Ergebnissen? Indem man die Analogien hinterher korrigierte.

Mit Hilfe der Differentiale lässt sich der Begriff der Arbeit sofort verallgemeinern. Am besten geht man von der Vorstellung eines Körpers aus, von dessen Ausdehnung man absieht.
Der Physiker redet von einem materiellen Punkt. Bewegt man diesen, dann beschreibt er eine Linie, die seine Bahn heißt. Diese lässt sich als ein Aneinanderreihen von Wegelementen auffassen, worunter man sich sehr kleine Wegstücke vorzustellen hat. Denkt man sich statt der "sehr kleinen" nun "unendlich kleine" Wegstücke - wobei wir hier noch nicht untersuchen wollen, was darunter genau genommen zu verstehen sei -, so werden aus den Wegelementen die "Wegdifferentiale" . Damit lässt sich der Begriff der Arbeit sofort verallgemeinern. Unter der Arbeit, die an einem materiellen Punkt geleistet werden muss, um ihn unter Kraftaufwand

ein Stückchen weiter zu bringen, versteht man das Produkt aus Kraft und Wegdifferential.

Man muss sich darüber klarwerden, dass wir auf dem Standpunkt, den wir hier einnehmen, noch nicht in der Lage sind, die neuen Begriffe genau zu umreißen. Das kann erst später geschehen. Vorläufig sind die neuen Begriffe als Fremdwörter zu betrachten, mit denen man so umzugehen lernt, als ob man eine fremde Sprache nicht mit dem Wörterbuch studiert, sondern sie während eines Aufenthaltes im fremden Land im Umgang mit dessen Einheimischen aufschnappt und sich daran gewöhnt.

Die Beweglichkeit eines materiellen Punktes kann Einschränkungen unterworfen sein. Denken wir uns eine kleine Kugel auf einem Tisch, dann kann sie dort zwar noch rollen oder gleiten, sie kann sich aber nicht mehr nach unten, quer durch die Tischplatte, bewegen. Jede der noch möglichen Bewegungen wird als eine "virtuelle Verschiebung" bezeichnet.
Diese denkt man sich nicht so sehr wirklich ausgeführt; man achtet nur darauf, dass sie mit den Einschränkungen der Beweglichkeit verträglich bleibt, führt also einen Gedankenversuch aus. Betrachtet man die virtuellen Verschiebungen als Wegdifferentiale, dann kann man mit ihnen die "virtuellen Arbeiten" berechnen, das heißt die Arbeiten, welche geleistet werden müssten, wenn die virtuellen Verschiebungen wirklich ausgeführt würden. Diese erlauben, unseren Leitsatz "Die Gesamtarbeit muss verschwinden"mit einem Schlage so zu verallgemeinern, dass er die ganze Mechanik enthält. Was dann noch zu tun übrigbleibt, ist einerseits, die Verallgemeinerung zu begründen, andererseits die auftauchenden mechanischen Probleme alle darauf zurückzuführen. Der Inhalt der ganzen Mechanik ist also in dieser Verallgemeinerung verdichtet, weshalb man von einem Prinzip der Mechanik redet.

Handelt es sich gleich um mehrere materielle Punkte, dann erteile man jedem unter ihnen eine virtuelle Verschiebung. Jede dieser Verschiebungen erfordert eine virtuelle Arbeit. Die Gesamtsumme der virtuellen Arbeiten, erstreckt über alle materiellen Punkte, muss nun verschwinden oder negativ ausfallen, damit Gleichgewicht herrscht, oder anders ausgedrückt, keine Bewegung eintritt, wenn die materiellen Punkte vorher geruht haben. Denn in diesem Fall müsste man Arbeit aufwenden, damit die Bewegung stattfindet, und diese Arbeit müsste von außen zugeführt werden. Bei dieser Betrachtungsweise gibt es im Falle des Hebels zwei materielle Punkte, nämlich die Last und das Gegengewicht, ähnlich wie beim Flaschenzug oder bei der schiefen Ebene. Sie alle bilden demnach Spezialfälle. Es lässt sich leicht zeigen, dass die neue Behauptung über die virtuelle Gesamtarbeit den früheren Leitsatz enthält.

Man darf nicht übersehen, dass das neue Prinzip, das gewöhnlich Prinzip der virtuellen Verschiebungen heißt, nicht bewiesen, sondern als Behauptung aufgestellt wurde. Im Augenblick befinden wir uns noch nicht in der Lage, es zu beweisen.
Dazu sind Begriffe notwendig, die umfassender sind als die, auf die wir uns bisher stürzten. Vor allen Dingen gehört eine allgemeine Mechanik dazu, die nicht nur den Fall der Ruhe, sondern auch den der Bewegung mit enthält und in der mm das Prinzip zwanglos gewinnt.

Wie, ist man geneigt zu fragen, bis jetzt fiel noch kein Wort von diesem Grundgesetz, das doch eigentlich gleich am Anfang hätte gebracht werden müssen. Warum nur?
Um dem Vorwurf zu begegnen, berufen wir uns auf die Geschichte der Physik. Die grundlegenden Begriffe wurden keineswegs gleich von Anfang an erkannt, sondern man entwickelte Vorstellungen, welche die Außenwelt auf eine naive Weise nachzubilden trachteten.

Beim Hebel kam man zunächst auf den Arm, dann auf das statische Moment. Erlauben diese auch, das Hebelgesetz zu finden, so sind sie bei weitem nicht in dem Maße geeignet wie die Arbeit, allgemeine Gesetzmäßigkeiten auszudrücken. Vom statischen Moment bis zur Bildung

des Begriffs der Arbeit bedurfte es aber einer Zeitspanne von fast zwei Jahrtausenden.
Archimedes betrachtete den Hebel bereits mit Hilfe des statischen Momentes, während erst Galilei die Arbeit dafür heranzog. Galilei besaß aber den Begriff der Masse noch nicht in solcher Schärfe, wie es erforderlich ist, um das Grundgesetz der Mechanik aufstehen zu können, was erst Newton gelang. Ihrem Namen entgegen werden Grundbegriffe meistens recht spät gefunden. Ihrem Namen entsprechend werden sie aber hinterher an die Spitze der Lehre gestellt, die sich aus ihnen folgerichtig entwickeln lässt.

Selten nur werden die neuen Begriffe mit solcher Schärfe erklärt, dass es nicht zu einem Hin und Her von Meinungen darüber kommt, was aus ihnen gefolgert werden kann und was nicht. Einen guten Beleg dafür bildet das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Es wurde oft und lebhaft erörtert, ob dies Prinzip aus anderen Voraussetzungen abgeleitet werden kann Oder ob es in seiner vollen Allgemeinheit eine neue Annahme bedeutet.

Gauß, der König der Mathematiker, vertrat diese zweite Ansicht, die sich als irrig erweisen wird. Es ist lehrreich, hierzu noch einige Bemerkungen aus einem viel genannten Werk über Mechanik zu bringen. Darin heißt es: "Die im obigen enthaltene Ausdehnung (des Prinzips der virtuellen Verschiebungen) ist, wie sich von selbst versteht, nicht bewiesen, sondern nur als Behauptung historisch ausgesprochen. Dies ausdrücklich zu sagen, scheint nötig zu sein, denn obgleich Laplace diese Ausdehnung in der 'Mécanique céleste' ebensowenig bewiesen hat, als es hier geschehen ist, sondern sie auch nur historisch behauptet, so hat man dies dennoch für einen Beweis gehalten.

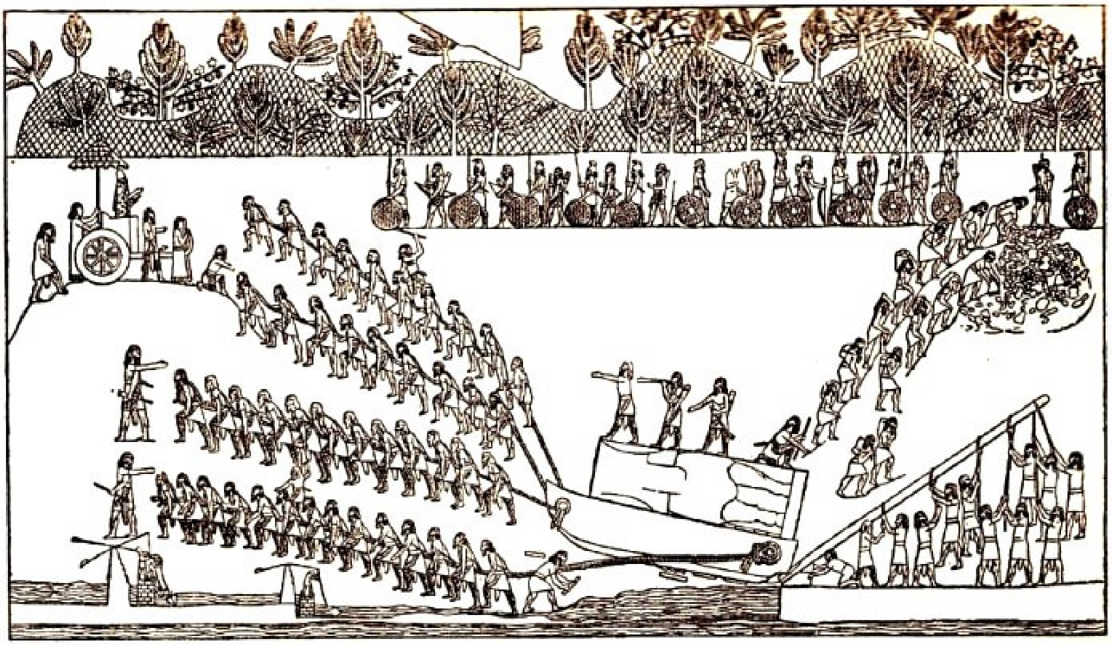
Poinsot hat gegen diese Meinung eine eigene Abhandlung geschrieben und sagt darin sehr richtig, dass sich die Mathematiker häufig durch den sehr langen Weg täuschen lassen, den sie zurückgelegt haben, zuweilen aber auch durch den sehr kurzen. Durch den langen Weg lassen sie sich täuschen, wenn sie durch sehr weite Rechnungen endlich zu einer Identität kommen, dieselbe aber für einen Satz halten. Ein Beispiel von dem Entgegengesetzten gibt unser Fall."

Wenn führende Gelehrte so verschiedener Meinung sein konnten, dann ersieht man daraus, wie groß die Schwierigkeiten waren, die überwunden werden mussten. Wenn Newton gesagt hat, dass er nur deshalb so groß erscheine, weil er auf den Schultern von Riesen stehe, so liegt in diesem Ausdruck der Bescheidenheit auch die Einsicht, dass die persönliche Leistung im Rahmen der Gesamtleistung so gut wie verschwindet. In früheren Zeiten kann es sogar vor, dass der Name des Entdeckers vergessen wurde. Man weiß heute nicht, wer das Rad erfunden hat, trotz des ungeheuren Fortschrittes, den es bedeutet.

Zum Rad lässt sich noch eine interessante Bemerkung machen. Die Kriegswagen der assyrischen Könige besaßen bereits Räder, zu einer Zeit, als Riesensteine noch auf Schlitten befördert wurden. Das lässt sich entweder damit erklären, dass man nicht in der Lage war, Achsen einzusetzen, die genug hielten, oder damit, dass man noch nicht in dem Maße abstrakt denken konnte, wie es erforderlich gewesen wäre, um Zweckmäßigkeiten klar zu erkennen. Man merkte, dass Wagen auf Rädern schneller sind, bemerkte aber nicht, jedenfalls nicht hinlänglich bewusst, dass man dann mit derselben Anstrengung mehr leistet.

Es waren tausend Arbeitssklaven dazu nötig, einen Stein auf Schlitten zu transportieren, den schon fünfzig auf Rädern hätten ziehen können.
Das ist wohl nicht anzunehmen, dass es niemals einen Mangel an solchen Sklaven gegeben habe. Denn dazu wurden Kriegsgefangene verwendet, und siegreiche Kriege waren damals nicht an der Tagesordnung. Die Kriegsgefangenen konnten übrigens froh sein, dass man sie nicht gepfählt hat, sondern milde als Zugvieh verwandte. Jedes Zeitalter hat eben eigene

Vorstellungen von humaner Behandlung. Freilich könnte es möglich sein, dass Räder nur für Könige oder Krieger da waren, denn solche Vorrechte weichen nur einer klaren Einsicht, zu der reines Denken führt. Man dachte eben noch nicht klar.



Asyrische Kriegsgefangene ziehen auf einem Holzschlitten einen steinernen Stierkoloss von einem Fluss an Land. König Senaherib sieht von meinem Prunkwagen zu. Nach einem Relief aus Ninive

Sogar bei fortgeschrittener Wissenschaft kommt es vor, dass die gewonnenen Ergebnisse nicht nach allen Seiten hin durchschaut werden. Insbesondere dann, wenn sie neue Regeln enthalten. Man versucht dann, diese auf Regeln zurückzuführen, die schon geläufig sind.
Gelingt dies nicht, dann untersucht man weiter, ob sie nicht zu Widersprüchen führen. Erst zum Schluss, wenn sie sich bewährten, erhalten sie Bürgerrechte in der Physik. Dies klingt überaus einfach, doch ist dem nicht so, denn sogar in den Überlegungen der größten Gelehrten finden sich schwache Stellen:
Archimedes hat in einer Schrift das Hebelgesetz abzuleiten versucht und zählt darin Voraussetzungen auf, die er für gesichert hält und die ihm hinreichend scheinen, sein Ziel zu erreichen. Im Laufe der Betrachtungen verwendet er aber stillschweigend noch weitere Voraussetzungen, ohne sich dessen bewusst zu werden.

Das Bestreben, neue Regeln auf geläufige zurückzuführen, trübte nicht selten den Blick der ersten Forscher. Sie überlegten nicht, dass eine Regel nicht mehr als neu zu gelten hat, wenn sie sich immer wieder bewährte. Wenn andere Regeln zufällig früher gefunden werden sind, so besagt das keineswegs, dass die neue Regel ihnen nicht ebenbürtig ist. Denn alle Regeln, sowohl die neuen wie die alten, erlangen auf die gleiche Weise Berechtigung, wenn nämlich die Beobachtungen sie bestätigen.
Es sei aber davor gewarnt, dies so auszulegen, als müsste die reife Wissenschaft nicht systematisch vorgehen. Was hier gesagt wurde, bezieht sich auf die Anfänge, auf die ersten Ansätze. Die Begriffe sind dann noch nicht durchgebildet, noch nicht umfassend genug. Sie werden erst an Hand der gefundenen Regeln allmählich so weit entwickelt, dass eine einheitliche Behandlung dieser Regeln stattfinden kann. Unsere Bemerkungen berufen den Zustand, der vorher herrschte.

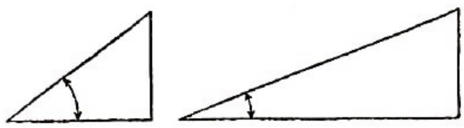
## 1.2 Der unternehmenslustige Galilei

**Galilei besteigt den schiefen Turm von Pisa - Freilich erst im nächsten Kapitel**

Die ersten gesicherten Regeln betrafen naturgemäß die Statik, das heißt die Lehre von den Verhältnissen bei ruhenden Körpern, welche offenbar am leichtesten zu überblicken sind. Sehr viel schwieriger liegen die Dinge, sobald man bewegte Körper betrachtet. Erst dem Genie eines Galilei gelang der Ausbau einer exakten wissenschaftlichen Bewegungslehre. Er hatte einen besonders schweren Stand, denn er musste nicht nur die auftretenden Probleme meistern, sondern sich vor allem zunächst von seinen eigenen Vorurteilen befreien.

Die herrschende Lehre, wie sie die Aristoteliker unter dem ausdrücklichen Schutz der Kirche vertreten, war ein rein spekulativ-philosophisches Gedankengebäude; unter dem Gestrüpp vorgefasster, uns heute oft phantastisch anmutender Meinungen waren die wirklichen Erscheinungen kaum noch zu erkennen. Ein wichtiges Beispiel: der Fall schwerer Körper.
Nach Aristoteles wurde gelehrt, dass jedes Ding seinen Ort suche, dieser Ort aber für schwere Körper unten sei, für leichte Körper oben. Man folgerte weiter daraus, dass die schweren Körper rascher fallen als die leichten, nahm sich aber nicht die Mühe, diese Behauptung nachzuprüfen - denn man hielt, ohne es auszusprechen, für ausgemacht, dass die Natur sich nach den Gelehrten zu richten habe.

Um die Fallbewegung zu untersuchen, sind Versuche anzustellen. Beobachtet werden die Orte, die der fallende Körper zu bestimmten Zeiten einnimmt. Daraus kann man zum Beispiel auf die Geschwindigkeiten schließen, mit der diese Orte passiert wurden, auf die wirkenden Kräfte und ähnliches mehr. Mit heutigen Mitteln wären diese Beobachtungen unschwer auszuführen. Diese Mittel standen aber Galilei noch nicht zur Verfügung. Er half sich durch eine geniale Annahme: er sagte sich, dass er die Fallbewegung nur verlangsame, ohne die Form des Fallgesetzes dadurch zu verändern, wenn er statt frei fallender Körper Kugeln beobachte, die in einer sanft geneigten Fallrinne herabrollen.
Man könnte sagen, dass Galilei die Fallbewegung auf diese Weise im Zeitlupentempo ablaufen ließ. Der geniale Wurf dieses Ansatzes führte Galilei zu einer Kette wunderbarer Erfolge. Auf Grund unserer umfassenden Begriffe sind wir heute in der Lage, seine Annahme in vollem Umfang zu bestätigen, Galilei aber besaß diese Begriffe noch nicht, sondern musste sie erst mit der Intuition seines Genies erschauen.



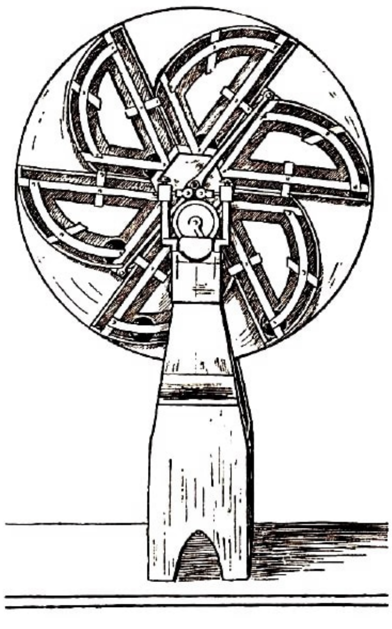
Vom oberen Ende der Fallrinne aus trug Galilei Strecken von der Länge 1, 4, 9, 16, ... ab und fand, dass die zugehörigen Fallzeiten, in denen die Kugel die Endpunkte passierte, sich wie $1 : 2 : 3 : 4 :$ ... verhielten.

Uhren, wie wir sie heute besitzen, gab es damals noch nicht. Sie sind erst auf Grund der Untersuchungen erfunden worden, die Galilei eingeleitet hat.
Er wusste sich aber zu helfen und richtete eine Wasseruhr, die schon dem Altertum bekannt war, so her, dass sie zum Messen von kleineren Zeitspannen tauglich wurde. Er nahm ein großes und weites Gefäß, versah es mit einer feinen Bodenöffnung und ließ das Wasser auf eine Waage fließen. Die ausgeflossenen Wassergewichte waren proportional der Zeit. Öffnete Galilei das Gefäß bei Beginn des Versuches und schloss es, wenn die Kugel ankam, dann konnte er die im wahren Sinne des Wortes "verflossene" Zeit mit hinreichender Genauigkeit angeben.

Mit welcher Geschwindigkeit kommt die Kugel an,wenn sie die schiefe Ebene heruntergerollt ist? Galilei machte die Annahme, dass diese Endgeschwindigkeit genau dieselbe ist, wie sie die Kugel erlangt hätte, wenn sie aus der Höhe der schiefen Ebene frei herunter gefallen wäre.

Je geringere Neigung also die schiefe Ebene aufweist, um so langsamer beginnt die Kugel ihre Bewegung; weil aber die durchlaufene Strecke entsprechend länger ist, erreicht die Kugel schließlich doch immer dieselbe Endgeschwindigkeit.

Wie kam Galilei zu dieser entscheidenden Annahme? In einem Gedankenversuch kann man die herunterrollende Kugel, wenn sie unten angekommen ist, mit der erlangten Endgeschwindigkeit wieder senkrecht nach oben leiten. Dadurch aber, sagte sich Galilei, kann sie weder höher steigen, als sie gefallen ist, noch zurückbleiben.
Im ersten Fall könnte man sonst die Schwere ohne Unterlass für uns arbeiten lassen, was zwar oft versucht, aber nie erreicht wurde. Im zweiten Fall scheint diese Schwierigkeit nicht zu bestehen. Nun nehmen wir im Sinne Galileis an, dass die Bewegung wie ein rückwärts gedrehter Film verläuft, wenn man die Geschwindigkeit umkehrt. Dann müsste die Kugel bei der Rückkehr höher steigen als im Ausgangspunkt, und wieder würde die Schwere ohne Unterlass für uns arbeiten. Es bleibt also nur möglich, dass die Kugel genau so hoch steigt, wie sie sich ursprünglich befand.
Die zum Steigen erforderliche Geschwindigkeit muss infolge des umgekehrten Verlaufs der Bewegung ebenso groß ausfallen wie diejenige, die sie beim freien Fall erlangt haben würde. Damit erweisen sich die Endgeschwindigkeiten der rollenden und der frei fallenden Kugel gleich groß. Ein moderner Physiker würde dieses Ergebnis aus dem Energiesatz, auf den wir noch ausführlich zu sprechen kommen, in wenigen Zeilen folgern können. Aber nur, weil Galilei ihm den Weg geebnet hat.



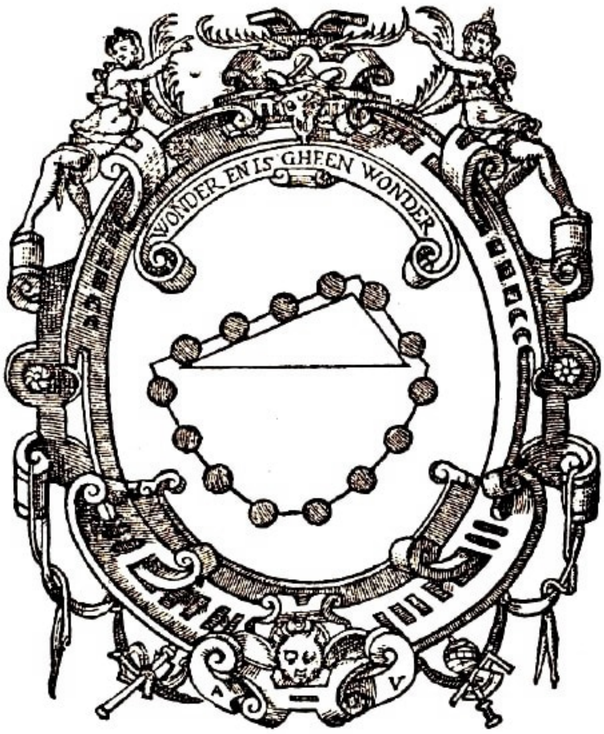
Perpetuum mobile von Leonardo da Vinci. Nach dem Modell im Deutschen Museum, München

Galilei entwickelte bei seiner Annahme ein wunderbares Einfühlungsvermögen. In der damaligen Zeit war das für einen Forscher unumgänglich nötig, wollte er über seine Vorgänger hinausgehen. Es standen ihm ja keine hinreichend umfassenden Begriffe zur Verfügung, sondern er musste diese erst herausschälen, indem er immer wieder auf mehr geahnte als klar erkannte Vorstellungen zurückgriff, die er nur allmählich entwickelte. Als Leitmotiv trat damals das Prinzip der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile in Erscheinung.

Erfinder und Betrüger hatten seit jeher mit dem Gedanken gespielt, eine Maschine zu bauen, die immerwährend Kraft aus dem Nichts erzeugen sollte. Sogar einen Leonardo da Vinci beschäftigte die Frage wovon man sich an einem Modell im Deutschen Museum überzeugen kann - zugleich aber davon, dass es, in Bewegung gesetzt, bald wieder stehenbleibt.

Trotz zahlreicher ähnlicher Misserfolge hat es recht lange, bis 1775, gedauert, ehe sich die Französische Akademie entschloss, keine Lösungsversuche mehr prüfen - sonst hätten die Unsterblichen bis zu ihrem Tode wohl nichts anderes zu tun gehabt.

Den Grund der Misserfolge erkannte man erst allmählich. Ein Forscher wie der Holländer Stevin zog aber das Leitmotiv von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile schon folgerichtig heran, um die Mechanik der schiefen Ebene zu entwickeln, und maß weniger dem Ergebnis als vielmehr der Betrachtung selbst solche Bedeutung bei, dass er sie zur Titelvignette seines Werkes wählte. Erst sehr viel später, Mitte des vorigen Jahrhunderts, hat man dann das Leitmotiv erweitert und als Gesetz von der Erhaltung der Energie klar formuliert.




"Wunder und doch kein Wunder" lockt Stevin auf dem Titelblatt seiner 'Hypomnemata mathematica'

Es besagt, dass die Energie in jeder Maschine nur aus einer in andere Erscheinungsformen übergeht, sich aber weder vermehrt noch verringert. Seitdem bildet diese Einsicht ein Rahmengesetz, das zwar das Geschehen nicht bestimmt, wohl aber wesentlich einengt. Wie gewaltige Anstrengungen es kostete, die erforderlichen Gedanken herauszuschälen, erkennt man mittelbar daraus, dass noch der große Faraday Betrachtungen dazu anstellte, die nicht nur unhaltbar, sondern auch voller Unklarheiten sind.

Man muss jedoch beim Verneinen von Möglichkeiten, Kraftverhältnisse geschickt auszunützen, vorsichtig sein. Berücksichtigt man die Erfahrung, nach der die Schwerkraft örtlich veränderlich ist, dann kann man sie zu der Annahme vereinfachen, an einem Orte A wirke eine etwas größere Schwerkraft als am Orte B, genau parallel zu dieser - einer Annahme, die auf der Erde niemals zu erfüllen ist.


Hebt man nun in B ein Gewicht sagen wir 1 Meter hoch, transportiert es waagerecht nach A, lässt es dort sinken und führt es endlich waagerecht wieder nach B zurück, dann hat man Arbeit und damit Energie gewonnen, weil es infolge unserer Annahme weniger Arbeit kostet, in B das Gewicht zu heben, als man Arbeit gewinnt, indem man es in A sinken lässt, und der Hin- und Rücktransport ohne Arbeitsleistung erfolgt.

Im Prinzip besäße man damit eine Maschine, die durch geschicktes Ausnützen der örtlichen Unterschiede in der Schwerkraft auf deren Kosten unaufhörlich Arbeit leisten würde. Dies verstößt keineswegs gegen das Prinzip, das ein Perpetuum mobile verbietet, denn das angenommene Kraftfeld ist nicht "konservativ" : die Arbeit, die gegen das Kraftfeld zu leisten ist, hängt vom zurückgelegten Weg ab.

Von der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile ausgehend, gelang es, einschneidende Folgerungen zu ziehen. Es ist reizvoll, nicht nur in der Mechanik sondern auch in der übrigen Physik verwandten Gedankengängen nachzuspüren. Der Astronom Camille Flammarion verfiel im vorigen Jahrhundert auf die Idee, sich ein Wesen namens Lumen vorzustellen, das mit Überlichtgeschwindigkeit reisen könnte: das Licht legt im leeren Raum rund 300000 Kilometer in der Sekunde zurück, Lumen wäre aber noch schneller.

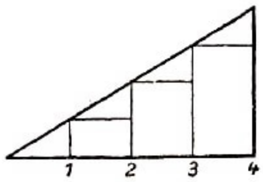
Zunächst sieht man wahrhaftig keinen Grund, warum man sich das nicht denken dürfte. Flammarion zog daraus den überraschenden Schluss, dass man Lumen nur befragen müsste, um über irgendeine Begebenheit aus der Geschichte eine zutreffende Schilderung zu erhalten. Denn Lumen überholt ja das Licht und holt damit das Licht aus einer früheren Zeit irgendwo mal ein, so wie der schnelle Achilles die Schildkröte, wie groß deren Vorsprung auch gewesen sei. Nehmen wir an, dass man Lumen danach fragt, wie sich die Menge bei der Anklage des Antonius vor dem Leichnam Cäsars verhielt.

Wir kennen die Rede und ihre Wirkung nur aus Berichten. Treffen die Bilder, so wie sie Shakespeare schildert, zu? Wir wissen es nicht, sondern sind vom Dichter überzeugt werden. Lumen aber kann Shakespeare kontrollieren! Er tritt seine Reise mit Überlichtgeschwindigkeit an und reist so lange, bis er das Licht eingeholt hat, das vor fast zwei Jahrtausenden von Rom aus in die weite Welt strahlte und die Bilder der Versammlung trägt.
Dann bremst Lumen die Geschwindigkeit seiner Fahrt etwas ab, bis sie gleich schnell mit dem Licht wird, und betrachtet nun das Bild in aller Ruhe, ja für ihn bleibt es unbeweglich, in der Art "lebender Bilder". Hinterher braucht er nur auf die Erde zurückzukehren, um uns alle Einzelheiten berichten zu können.

Physikalisch ausgedrückt besagt das, dass Lumen den Zeitablauf für seine Person beliebig umkehren kann. Er kann jedem Augenblick, auch wenn er längst verflossen ist, nachjagen und ihn wiedererleben; das Einmalige des ersten Kusses bildet für ihn einen Serienerfolg. Für ihn sind Vergangenheit und Zukunft gleichbedeutend. Dieser Schluss widerstrebt uns aber.
Darum lassen wir lieber die Annahme fallen, aus der er gezogen werden konnte: Wir leugnen, dass Überlichtgeschwindigkeiten möglich sind. Damit befinden wir uns in völliger Übereinstimmung mit der modernen Weiterbildung der Mechanik, auf die wir noch ausführlicher zu sprechen kommen werden.

Paradoxerweise sind Leitmotive selbst auf dieser Erkenntnisstufe noch nicht zu begründen, sondern es mussten erst die grundlegenden Begriffe aufgespürt werden, um das zu ermöglichen. Heute kommen uns diese Begriffe, namentlich Masse und Kraft, als selbstverständlich vor, sie sind es aber erst im Laufe von Jahrhunderten geworden, denn noch Galilei besaß weder den einen noch den anderen Begriff. Er erahnte sie aber, noch mehr: er bereitete sie durch seine Untersuchungen vor, und darum ist er der bedeutendste Vorläufer von Newton, der die Grundbegriffe dann abschließend prägte.

Dazu waren neue mathematische Begriffsbildungen erforderlich, die von Newton und Leibniz fast gleichzeitig gefunden und von der damaligen Zeit mit Recht für schwierig gehalten wurden. Heute gelten sie für anschaulich und werden schon in der Schule gelehrt. Galilei standen sie aber noch nicht zur Verfügung, so dass er sehen musste, wie er mit seinen Beobachtungen fertig wurde: Er musste den Schlüssel zum Fallgesetz erst erschauen, während die höhere Mathematik ihn heute unmittelbar bereitstellt.



Die Beobachtungen des Galilei lassen sich durch ein Dreieck darstellen, das man gewinnt, wenn waagerecht von links nach rechts die Zeit abgetragen wird, senkrecht dazu aber die jeweilige Geschwindigkeit der rollenden Kugel. Die Endpunkte aller Senkrechten bilden dann eine gerade Linie.

An dem so entstehenden Dreieck erkennt man, dass die Senkrechte in 2 von der Senkrechten in 3 um ebensoviel überragt wird, wie sie selbst die Senkrechte in 1 überragt. Ähnlich wird die Senkrechte in 3 von der Senkrechten in 4 um ebensoviel überragt, wie sie selbst die Senkrechte in 2 überragt. Das gilt allgemein.

Aus diesem Grunde legt die rollende Kugel denselben Weg zurück, den eine zweite Kugel zurückgelegt haben würde, die mit der halben Endgeschwindigkeit gleichförmig gerollt wäre: was diese Kugel in der ersten Hälfte der Bewegung gegen die gleichförmig bewegte versäumte, holt sie in der zweiten Hälfte gerade ein. Zu diesem Schluss gehört freilich entweder ein Galilei oder die Kenntnis des Differentialquotienten. Wir besitzen diese Kenntnis und können mit ihrer Hilfe den Schluss des Galilei sofort bestätigen. Hier ist also ein Genie durch einen Differentialquotienten zu ersetzen!

Wenn die Geschwindigkeit der rollenden Kugel am Ende der ersten Sekunde $v$ beträgt, dann wächst sie in $t$ Sekunden auf den Wert $vt$ an. Die Hälfte davon ist $\frac{vt}{2}$, und mit dieser Geschwindigkeit soll sich nun die gleichförmig bewegte Kugel fortbewegen. In $t$ Sekunden legt diese also einen Weg zurück, den man erhält, wenn man die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung mit der Zeit multipliziert; genau so berechnet man ja den Weg eines gleichmäßig fahrenden Autos: bei 60 Stundenkilometer Geschwindigkeit legt es in 2 Stunden $60 \times 2 = 120$ Kilometer zurück. Für den Weg der gleichförmig bewegten Kugel ergibt sich also der Wert $t \cdot \frac{vt}{2}$ oder, kürzer geschrieben, $\frac{vt^2}{2}$.

Nach dem Ansatz von Galilei stellt aber dieser Wert zugleich den Weg dar, den die hinabrollende Kugel in $t$ Sekunden zurückgelegt hat. Damit ist also das Bewegungsgesetz der schiefen Ebene ermittelt: die rollende Kugel hat nach $t$ Sekunden den Weg $\frac{vt^2}{2}$ zurückgelegt, worin $v$ die nach Ablauf einer Sekunde erreichte Geschwindigkeit bedeutet.

Wir fragen nun weiter nach dem Gesetz des freien Falles, - und eigentlich haben wir es schon in der Hand. Galilei hatte ja angenommen, dass die Bewegung auf der schiefen Ebene nichts anderes als einen "verzögerten Fall" bedeutet, dass also die Form des Fallgesetzes für die schiefe Ebene und den freien Fall dieselbe sein muss.
Tatsächlich erscheint in dem eben gefundenen Ausdruck auch kein Glied, welches ihn ausdrücklich auf die schiefe Ebene beschränken würde. Man braucht sich nur vorzustehen, dass wir immer steilere Ebenen betrachten und endlich den Neigungswinkel zu 90 Grad machen: dann erkennen wir den freien Fall als Grenzfall der Bewegung auf der schiefen Ebene.

Die Fallgesetze in Zahlen

| Zeit | Geschwindigkeit | Weg |
|---|---|---|
| 1 | $g$ | $\frac{g}{2}$ |
| 2 | $2g$ | $4\frac{g}{2}$ |
| 3 | $3g$ | $9\frac{g}{2}$ |
| ... | | |
| $t$ | $tg$ | $t^2\frac{g}{2}$ |

Unsere Formel bleibt also richtig, und wir müssen nur für $v$ die Geschwindigkeit einsetzen, die ein frei fallender Körper nach der ersten Sekunde erlangt hat; dieser Wert wird heute allgemein mit $g$ bezeichnet und beträgt rund 10 Meter in der Sekunde.
Nun bemerkt Galilei, dass der Zuwachs an Geschwindigkeit proportional der Zeit erfolgt; stets nimmt die Geschwindigkeit in einer Sekunde um $g$ zu, in $t$ Sekunden also um $g \cdot t$.

Damit erkennt Galilei in $g$ das Maß der Geschwindigkeitszunahme beim freien Fall; $g$ heißt

heute "Fallbeschleunigung", und man kann also sagen, dass Galilei Begriff und Bedeutung der Beschleunigung gesehen hat, wenn auch noch nicht in voller Allgemeinheit, weil er den Begriff des Differentialquotienten noch nicht besaß.
Immerhin kennzeichnet er die freie Fallbewegung vollständig richtig. Sie ist keineswegs gleichförmig - denn wir sehen ja, dass die Geschwindigkeit fortwährend zunimmt; aber die Geschwindigkeit nimmt in gleichen Zeiten um gleich viel zu - die Fallbewegung ist gleichmäßig beschleunigt.
Es ist zu beachten, dass hier von der Art des fallenden Körpers keine Rede ist. Die Fallbeschleunigung $g$ hat vielmehr für alle Körper denselben Wert - mit anderen Worten: alle Körper fallen gleich schnell. Die Unterschiede, welche wir jeden Tag beobachten - eine Bleikugel scheint wirklich rascher zu fallen als eine Flaumfeder -, erklären sich ohne weiteres durch den Luftwiderstand; im leeren Raum fallen tatsächlich alle Körper gleich schnell.

Galilei besaß noch nicht unsere technischen Hilfsmittel, darum war er gezwungen, verlangsamte Fallbewegungen zu beobachten, indem er Kugeln schiefe Ebenen herunterrollen ließ. Es fragt sich, ob man aus diesen Versuchen den Wert der Fallbeschleunigung $g$ bestimmen kann. Sowohl die Kugel, die eine schiefe Ebene herunterrollt, als auch ein Körper, der vom höchsten Punkt dieser Ebene frei herunterfällt, gelangen unten mit derselben Endgeschwindigkeit $V$ an. Dabei mögen die Zeiten $t$ beziehungsweise $T$ verstreichen. Dann ergibt sich die Länge der Ebene $AC$ als Produkt aus der halben Endgeschwindigkeit mit der dazugehörigen Zeit, also gleich $Vt : 2$; ähnlich wird die Höhe $BC = VT : 2$. Für das Verhältnis der beiden Seiten $AC$ zu $BC$ des Dreiecks gilt folglich nach Kürzen durch $V : 2$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{t}{T}$$

Nach den Fallgesetzen ist andererseits $V = vt$ und $V = gT$, woraus

$$vt = gT \qquad \text{also} \qquad \frac{t}{T} = \frac{g}{v}$$

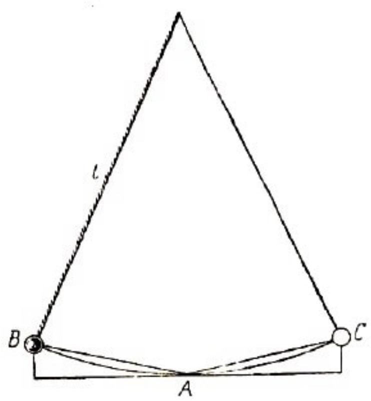
folgt.
Nun ist das Verhältnis der Seiten $AC$ und $BC$ zueinander als bekannt anzusehen, denn es kann durch Ausmessen dieser Seiten bestimmt werden. Dieses Verhältnis besitze den Wert $f$. Damit gilt endlich

$$f = \frac{t}{T} = \frac{g}{v} \qquad \text{also einerseits}$$

$$T = \frac{t}{f} \qquad \text{andererseits} \qquad g = fv$$

so dass man die Werte sowohl der Fallzeit als auch der Fallbeschleunigung allein aus Beobachtungen an der schiefen Ebene ermitteln kann.

Galilei versuchte seine neuen Ergebnisse anzuwenden. Er betrachtete ein Pendel, bestehend aus einer schweren Kugel, die an einem Faden hängt, und sagte sich, dass man dessen Bewegung annähernd als Fall auf der schiefen Ebene ansehen könnte. In der Tat fällt ein kleiner Kreisbogen mit der entsprechenden Sehne nahezu zusammen. Wenn also das Pendel sich nur wenig aus seiner Ruhelage entfernt, liegt es nahe, auf seine Bewegung die Gesetze anzuwenden, die für die schiefe Ebene gelten.




Überraschenderweise ergibt sich dabei die richtige Form für die Schwingungsdauer. Um sie herzuleiten, ist zu beachten, dass ein Pendel nach links und nach rechts auf die gleiche Weise schwingt. Man muss also zwei symmetrisch liegende schiefe Ebenen anlegen, $AB$ und $AC$. Durch die drei Punkte $A$, $B$ und $C$ lässt sich ein einziger Kreis legen, dessen Radius die Pendellänge $l$ bestimmt.

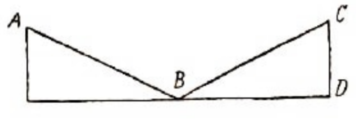
Durch einfache Rechnung lässt sich zeigen, dass ein Körper, der aus der Höhe $2 \cdot l$ frei herunterfällt, gleichzeitig mit einer Kugel ankommt, welche die Ebene $AB$ herunterrollt; $t$ bezeichnet diese Zeit.
Sie gibt die Dauer der Schwingung von $B$ nach $A$ an. Anschließend schwingt das Pendel in derselben Zeit weiter von $A$ nach $C$, so dass $2t$ die Dauer einer vollen Pendelschwingung ist. Wir wissen aber, dass nach den Gesetzen des freien Falles $2l = gt^2 : 2$ gilt, woraus für die Dauer der Pendelschwingung $2t$ der angenäherte Wert

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}$$

folgt. Im genauen Wert steht freilich $\pi$ an Stelle der Zahl 4, wobei $\pi = 3,141...$ das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Der Unterschied ist also nicht erheblich; die Form des Pendelgesetzes ist richtig.

Unter Benutzung seiner neuen Ergebnisse gelang es Galilei, einen wichtigen Einblick in das Trägheitsgesetz zu gewinnen. Wir können dies grundlegende Gesetz heute so aussprechen: Kräfte rufen Beschleunigungen hervor. Dies darf nicht als Erklärung gelten sondern vielmehr als grundlegender Zusammenhang zwischen Grundbegriffen, als Axiom. Wir kommen darauf noch zurück und wollen hier den Gedankengang auseinandersetzen, der Galilei zu dieser Einsicht führte.

Es wurde gezeigt, wie $v$ sich zu $g$ verhält. Im Augenblick genügt es, zu wissen, dass $v$, also die Geschwindigkeit nach Ablauf der ersten Sekunde, um so kleiner ausfällt, je kleiner der Winkel ist, den die schiefe Ebene mit der Waagerechten bildet. So, wie aber die Kugel mit geringerem $v$ herunterrollt, steigt sie auch bei Umkehrung der Bewegung, weil diese spiegelbildlich verlaufen soll, mit um so kleinerer Verzögerung.



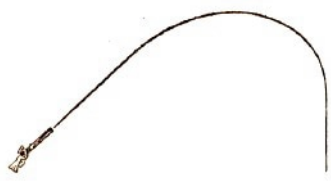

Man denke sich jetzt die Kugel, die eine schiefe Ebene $AB$ heruntergerollt ist, mit der erlangten Endgeschwindigkeit anschließend eine zweite schiefe Ebene $BC$ ersteigen.

Je kleiner der Winkel $CBD$ ausfällt, um so geringer wird die Verzögerung, um so länger und weiter bewegt sich die Kugel. Im Grenzfall, wenn $BC$ mit der Waagerechten $BD$ zusammenfällt, findet gar keine Verzögerung mehr statt, und die Kugel rollt mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter, ohne jemals stehenzubleiben. Dies bildet die unmittelbarste Form des Trägheitssatzes.

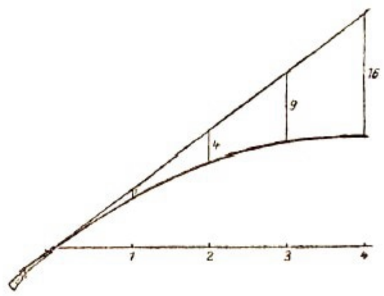
Freilich scheint Galilei dies nicht mit derselben Klarheit gesehen zu haben, wie es hier vorgetragen wurde. Er war noch zu sehr befangen in den Ansichten seiner Zeit, und wenn er sich von ihnen auch schrittweise lossagte, fiel er doch immer wieder in sie zurück. Er hat aber zweifellos in vielen Fällen den Trägheitssatz richtig angewandt. So wusste er, dass eine schwerelose Flintenkugel geradlinig in Richtung des Laufes fortfliegen würde.

Welchen Fortschritt allein diese Bemerkung bedeutet, erkennt man aus der phantastischen Ansicht, die der namhafte Mathematiker Tartaglia wenige Jahrzehnte vorher geäußert hat.

Tartaglia glaubt, dass die Geschossbahn aus einem geradlinigen Anfangsstück, einem anschließenden Kreisbogen und dessen senkrechte Berührenden besteht.
Eine wirklich recht naive Ansicht, die sich bestenfalls auf einen trügerischen Schein gründete.



Anfangs scheint die Schwere auf das Geschoss nicht einzuwirken, aber nur, weil man die Kürze der Zeit nicht beachtet, die mit dem Wort "anfangs" gemeint war. In Wirklichkeit fängt das fortfliegende Geschoss sofort zu fallen an, nur ist die Fallgeschwindigkeit am Anfang gering und damit die Fallstrecke nicht erheblich. So gelangt Galilei zu der grundlegend neuen Auffassung, dass die Geschossbahn das Ergebnis zweier Bewegungen ist, die das Geschoss unabhängig voneinander ausführt.




Die eine Bewegung ist durch den Trägheitssatz bestimmt, und wir haben sie vorhin schon angegeben. Die zweite Bewegung besteht im freien Fall des Geschosses. Um die zusammengesetzte Bewegung graphisch zu verfolgen, trage man in Richtung des Flintenlaufs gerichtete Strecken ab, die ein schwereloses Geschoss in 1, 2, 3, 4, ... Sekunden geflogen wäre.

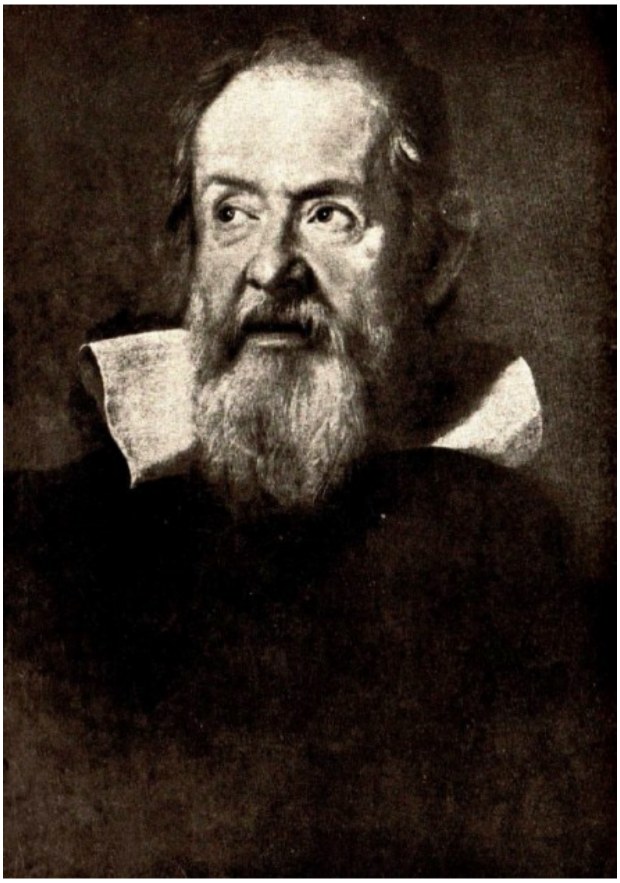
Aus diesen Punkten trage man der Reihe nach senkrecht nach unten Strecken ab, die ein frei fallender Körper in 1, 2, 3, 4, ... Sekunden zurücklegt. Die Endpunkte dieser Strecken bestimmen die Geschossbahn. Die so gefundene Bahn weicht freilich noch sehr erheblich von der wirklichen ab. Schuld daran trägt wieder einmal der Luftwiderstand, den wir hier absichtlich nicht berücksichtigt haben.

Die erläuterten Ergebnisse lassen erkennen, dass die Dynamik, die Bewegungslehre, mit Galilei anfängt. In der Statik trat die Kraft als Druck oder Zug auf; so wurde zum Beispiel im Hebelgesetz von Gewichten geredet. Es bildet aber den entscheidenden Schritt, zu erkennen, dass die Kraft zu Bewegung führt und wie sie diese beherrscht: die Kraft bestimmt die Beschleunigung. Das konnte nur die Erfahrung lehren und lehrte es auch in den Fallgesetzen und im Trägheitssatz. Von vornherein stand es gar nicht fest, ob die Kraft nicht etwa die Geschwindigkeit bestimmt - wie die Aristoteliker es glaubten - oder auch die Änderung der Beschleunigung.

Es geht eben darum, dass die Kraft ein Grundbegriff ist und die Beschleunigung als weiterer Grundbegriff erkannt werden muss, um für die Bestimmung eines Bewegungsverlaufs damit auszukommen, dass man die Kräfte angibt, die wirken, und sie dadurch zur Ursache erhebt.

Wie gelangt man von den Ergebnissen des Galilei aus zum Kraftbegriff ? Man zieht den Trägheitssatz heran, wie ihn Galilei aufgestellt hat, und bemerkt, dass eine Kugel auf der waagerechten Ebene der Schwerewirkung entzogen ist. Darum rollt sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter. Wenn also keine Kraft wirkt, ändert sich die Geschwindigkeit nicht, folglich verschwindet die Beschleunigung, da sie ja ein Maß für die Änderung der Geschwindigkeit darstellt. Andererseits ersieht man aus den Fallgesetzen, dass die Beschleunigung, der Wert $g$, den Bewegungsverlauf vollkommen bestimmt.

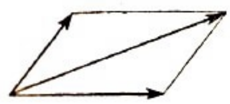
Leonardo da Vinci, Selbstbildnis, um 1513, Rötelzeichnung. Turin, Königliche Bibliothek



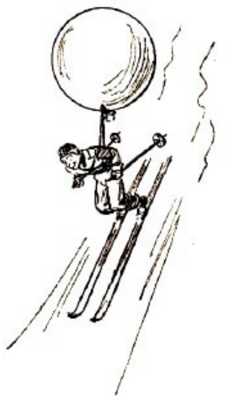
Galileo Galilei, Gemälde von Justus Sustermanns. Florenz, Uffizien

Das erlaubt die Verallgemeinerung: Die Kraft bestimmt den Bewegungsverlauf über die Beschleunigung hinweg.
Fallgesetze und Trägheitssatz bilden zwei Hauptleistungen von Galilei. Die dritte Hauptleistung besteht in der Einsicht, dass voneinander unabhängige Bewegungen sich zu einer resultierenden zusammensetzen. So setzt sich die Geschossbahn uns der gleichförmigen Bewegung in Richtung des Flintenlaufes und aus dem freien Fall des Geschosses zusammen.

Daraus folgt, dass bei Bewegungen, die voneinander unabhängig sind, sowohl Geschwindigkeiten als auch Beschleunigungen sich zusammensetzen lassen und die Geschwindigkeit beziehungsweise Beschleunigung der resultierenden Bewegung ergeben.



Es bleibt aber zu beachten, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht nur eine gewisse Größe, sondern auch eine bestimmte Richtung besitzen. Sie können durch gerichtete Strecken dargestellt werden, deren Länge die Größe der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung und deren Richtung ihre Richtung angibt. Diese gerichteten Strecken heißen Vektoren. Zwei Vektoren spannen nun ein Parallelogramm auf, dessen Diagonale ihre Summe darstellt, und gerade um diese Summe geht es bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen.



Ein weiteres Beispiel bildet die Abfahrt der Skiläufer. Sieht man davon ab, dass der Läufer sich vielleicht zu Anfang noch selber darum bemüht, seine Geschwindigkeit zu vergrößern, dann liegt ein ähnlicher Fall vor wie bei der Kugel, welche die schiefe Ebene herunterrollt, und man kann fragen, wieviel der Läufer während des Laufes an Gewicht sozusagen einbüßt.
Er ist ja während des Hinabgleitens dem Einfluss der Erdschwere teilweise entzogen. Für eine Ebene von 45 Grad Neigung ergibt sich, dass der Skifahrer bei der Abfahrt nur noch die Hälfte seines ursprünglichen Gewichtes wiegt. Er vermeint zu schweben.

Es mutet paradox an, von der Zusammensetzung von Bewegungen zu reden. Denn in Wirklichkeit findet nur eine Bewegung statt, die resultierende. Trotzdem hat der Ausdruck seine Berechtigung. Denn die Theorie will den wirklichen Bewegungsverlauf aus einfachen Angaben herleiten, was ihr auf diese Weise zweifellos gelingt, wie wir es am Beispiel der Geschossbahn erkannt haben. Bacon nannte dieses Vorgehen "dissecare naturam" , die Natur zergliedern.

Um zu solchen Erkenntnissen vorzustoßen, bedarf es eines unbefangenen Blickes, wie er dem großen Forscher eignet. Er darf sich nicht mit dem Althergebrachten begnügen, sondern muss in der Lage sein, neue Probleme zu erkennen. Ist dann die Zeit reif, diese Probleme zu lösen, dann wird der Forscher auch die Fähigkeit besitzen, die zur Lösung erforderlichen neuen Begriffe zu prägen. Selten nur gelingt das auf den ersten Anhieb und noch viel seltener so, dass die neuen Begriffe in voller Allgemeinheit erkannt werden.

Galilei glückte es, den Begriff der Beschleunigung für den freien Fall einzuführen, ohne ihn gleich für die allgemeinste Bewegung streng fassen zu können. Stets aber behält der Forscher eine Witterung für Neues. Das soll uns eine hübsche Anekdote zeigen.

Eines Tages kam eine Abordnung aus Florenz zu Galilei. Man wollte wissen, warum die Pumpen das Wasser nicht über 30 Fuß heben können. Um das zu wissen, meinte Galilei, müsste man erst in Erfahrung bringen, warum die Pumpen das Wasser bis zu 30 Fuß heben. Einer aus der Abordnung erklärte das mit dem "horror vacui", dem Abscheu der Natur vor dem leeren Raum. Ausgezeichnet, soll Galilei erwidert haben, dann müsste man nur noch wissen, warum die Natur keine Angst mehr vor dem leeren Raum hat, wenn sie Wasser höher als 30 Fuß heben soll.

Es heißt noch, dass ein Schüler von Galilei namens Torricelli bei diesem Gespräch anwesend war. Er war es, der dann den Grund der Erscheinung entdeckt hat, um die es hier ging, nämlich den Luftdruck.

## 1.3 Newton entdeckt die Schwerkraft

### Newton vergisst über einer Entdeckung den Apfel zu verspeisen

Ein fallender Apfel soll Newton dazu angeregt haben, die Schwerkraft zu entdecken. Ein anderer hätte sich mit dem Sprichwort "Der Apfel fällt nicht weit vom Stamm" beruhigt und den Apfel ungerührt verspeist.
Nun, so erbaulich die Geschichte auch ist, sie ist bloß erdichtet. Trotzdem trifft sie Wesentliches: dass ein Forscher hinter Alltäglichkeiten Rätsel erblickt und ergründet. Dazu gehört eine ständige, wache Aufnahmebereitschaft, die aber ohne gründliches Wissen nichts nützen würde. Immer knüpfen Fortschritte an frühere Erkenntnisse an, jeder Forscher baut auf den Leistungen seiner Vorgänger weiter; so vollendete Newton das von Galilei begonnene Werk.

Versucht man, eine Kugel auf der schiefen Ebene am Herunterrollen zu hindern, dann findet man für die Kraft, die man anwenden muss, den Wert $Q \cdot f$. Hierbei wurden die früheren Bezeichnungen beibehalten, so dass $Q$ das Gewicht der Kugel bedeutet und $f$ die Neigung, das heißt das Verhältnis der Höhe zur Länge der schiefen Ebene. Nun erblickt man seit Galilei keinen Unterschied mehr zwischen Kräften, die in der Statik, und solchen, die in der Dynamik auftreten. Bei derselben Kraft kann sowohl Ruhe herrschen - wobei die Kraft als Druck oder Zug erscheint - als auch Bewegung eintreten.
Eine Kugel drückt auf die Tischplatte und fällt andererseits beschleunigt herunter, wenn sie nichts hindert, beide Male unter Einwirkung der Schwerkraft. Dieselbe Schwerkraft ist auch auf der schiefen Ebene treibend wirksam, nur ist sie, wie eben gesagt, um den Faktor $f$ geschwächt; ihr Wert beträgt nicht $Q$, sondern $Q \cdot f$.

Nach einem früheren Ergebnis ist aber die Beschleunigung der herunterrollenden Kugel um eben denselben Faktor $f$ geringer als beim freien Fall: Sowohl Kraft als auch Beschleunigung multiplizieren sich mit dem echten Bruch $f$. Darum bleibt ihr Verhältnis unverändert, wie auch die Neigung der schiefen Ebene ausfällt. Will man der Schwerkraft keine Sonderstellung einräumen, dann muss man fordern, dass dieser Sachverhalt immer und überall zutrifft: für ein und denselben Körper müssen die wirkende Kraft und die von ihr hervorgerufene Beschleunigung stets im selben Verhältnis stehen. Formelmäßig ausgedrückt:

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} = m \qquad \text{oder} \qquad \text{Kraft} = m \cdot \text{Bschleunigung}$$

worin $m$ ein Proportionalitätsfaktor ist, der also für jeden Körper einen ganz bestimmten, zahlenmäßig festliegenden Wert hat. Diesen Faktor $m$ bezeichnen wir als Masse des Körpers; sie regelt offenbar das Verhältnis zwischen wirkender Kraft $\mathfrak{K}$ und hervorgerufener Beschleunigung $\mathfrak{b}$. Je größer die Masse $m$, um so kleiner ist die Beschleunigung, welche eine bestimmte Kraft hervorbringt; bei verdoppelter Masse halbiert sich die Beschleunigung.
Es ist zu beachten, dass Kraft und Beschleunigung gerichtete Größen sind und, um das hervorzuheben, mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden, die Masse aber nicht, weshalb sie

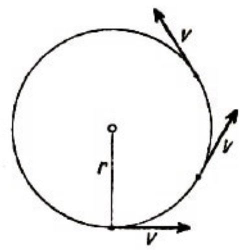
einen lateinischen Buchstaben erhält. Mit diesen Bezeichnungen gilt also

$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{b}$$

Diese einfache Formel enthält die ganze Mechanik, sowohl die Statik als auch die Dynamik. Man verdankt sie Newton. Freilich hat sie Newton nicht so unmittelbar gewonnen und war sich zwar über die Bedeutung, nicht aber über den in alle Einzelheiten gehenden Sinn der Formel im klaren. Das erkennt man schon daraus, dass er die Formel zu zwei weiteren Sätzen gesellt und erst alle drei Gesetze zusammen als ausreichende Grundlage für eine Mechanik ansieht.

Diese drei bezeichnete Newton als Bewegungsgesetze. Unter ihnen nimmt unsere Formel die zweite Stelle ein. Den ersten Platz räumte Newton dem Trägheitssatz ein. Man erhält diesen aber aus dem zweiten Bewegungsgesetz sofort, wenn darin für die Beschleunigung der Wert Null eingesetzt wird. In diesem Fall fällt der Zuwachs an Geschwindigkeit fort, die Geschwindigkeit bleibt also erhalten.
Die Kraft verschwindet, weil sie nach dem zweiten Bewegungsgesetz ein Produkt ist, dessen einer Faktor, die Beschleunigung nämlich, jetzt verschwindet. $\mathfrak{K} = m \cdot 0 = 0$. Die kräftefreie Bewegung erfolgt also mit gleichbleibender Geschwindigkeit, genau wie es der Trägheitssatz verlangt.

Das zweite Bewegungsgesetz erlaubt sofort eine interessante Anwendung. Bewegt sich ein Körper auf einem Kreisbogen gleichförmig, dann ändert sich zwar nicht die Größe seiner Geschwindigkeit, wohl aber deren Richtung, die durch die jeweilige Tangente an den Kreis bestimmt ist. Diese Richtungsänderung bedeutet jedoch ebenfalls, dass eine Beschleunigung auftritt.




Sie ist nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet, und ihr Wert beträgt $\frac{v^2}{r}$, wenn $v$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der die Kreisbewegung verläuft, und $r$ den Kreisradius. Beschleunigung bedingt aber immer Kraft; hier tritt die Fliehkraft auf.

In der Kurve muss der Fahrer gegen die Fliehkraft ankämpfen

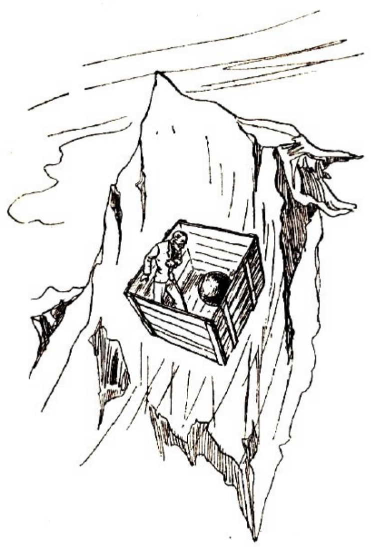
Jeder Autofahrer erlebt sie, wenn er in einer scharfen Kurve auf dem Sitz nach außen gedrückt wird. Flieger erfahren ihre Wirkung infolge der höheren Geschwindigkeiten erheblich stärker, und man befürchtet ernstlich, dass sie es verhindern wird, mit Geschwindigkeiten von über tausend Stundenkilometer zu fliegen; der Mensch würde versagen und nicht die Maschine. Denn es bleibt unvermeidlich, gelegentlich Kurven zu fliegen, in denen die Fliehkraft Werte annehmen würde, die der Organismus nicht mehr verträgt.

Zieht man zur Berechnung die vorhin angegebene Formel heran, dann ergibt sich in einer Kurve, die im Kreisbogen von 1 Kilometer Durchmesser verläuft, für 600 Stundenkilometer Fluggeschwindigkeit der $5\frac{1}{2}$fache Wert der gewöhnlichen Erdbeschleunigung. In sitzender Lage ist das nicht längere Zeit auszuhalten, denn das plötzlich fast 6 mal so schwere Blut strömt mit Gewalt nach außen; Blutleere im Gehirn, Ohnmacht, unter Umständen innere Zerreißungen und Blutungen sind die Folge. In Rücken- und Bauchlage soll allerdings schon das Doppelte 2 bis 3 Minuten lang ohne Schaden ertragen worden sein.

Häufig wird nicht beachtet, dass nur Beschleunigungen sich physiologisch bemerkbar machen können, nie aber Geschwindigkeiten, und sollten sie noch so hoch ausfallen. Das folgt aus dem zweiten Bewegungsgesetz sofort. Denn nur bei Beschleunigungen treten Kräfte auf, die dann auf den Organismus einwirken. Bei verschwindender Beschleunigung, also einer Bewegung mit gleichbleibender und gleichgerichteter Geschwindigkeit, tritt dagegen keine Kraft auf.

Man machte geltend, dass das überflüssige Beiwerk in den Formulierungen von Newton psychologisch verstanden werden müsse. Man habe sich einen Forscher vorzustellen, der von Vorstellungen ausgeht, die ihm geläufig sind, um die Grundsätze der Dynamik aufzustellen. Einzelne Begriffe, wie zum Beispiel die Kraft, führen in seinem Geist ein Doppelleben, indem er sie einmal als Zug oder Druck, ein andermal als Ursache der Beschleunigung ansieht.
Diese Doppelvorstellungen verleiten dann zu einer zersplitternden Darstellung. Dies mag zugegeben werden, ändert aber nichts an der Tatsache, dass die Darstellung nicht so einfach ausfällt, wie es möglich wäre.

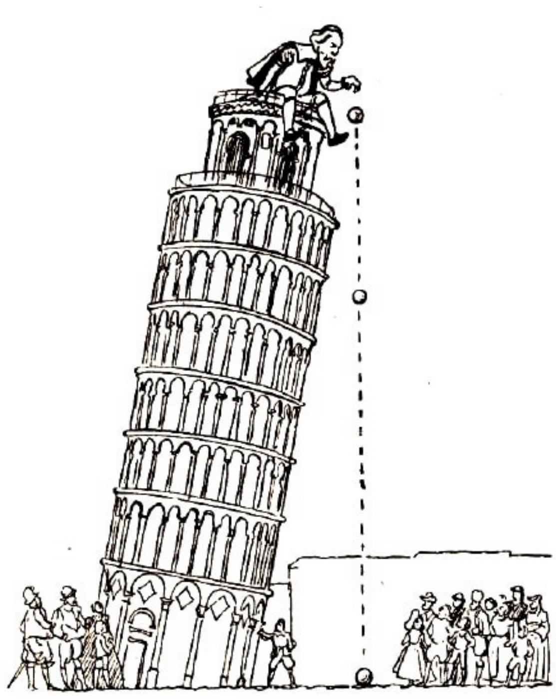
Allerdings muss man hier sorgfältig unterscheiden. Wenn Newton von der Masse sagt, sie würde durch Dichte und Inhalt der Materie gemessen, und das als Erklärung bezeichnet, dann begeht er einen Zirkelschluss. Denn die Dichte lässt sich erst dann erklären, wenn der Massenbegriff schon vorhanden ist.
Die Angelegenheit bekommt aber sofort ein anderes Gesicht, wenn man das Gesagte nicht als Erklärung ansieht, sondern als Versuch, die neu eingeführte Masse mit Begriffen zu verknüpfen, die aus dem Alltag geläufig sind, die aus instinktiven Erfahrungen stammen. Die Dichte gehört zweifellos zu ihnen, denn ein Neger in Afrika wird sich nicht zutrauen, einen großen Stein hochzuheben, während er ein gleich großes Stück Holz ohne Zaudern fortschafft. Es geht ja darum, die Theorie auf die Wirklichkeit anzuwenden, die neuen Begriffe mit unseren Wahrnehmungen in Einklang zu bringen.



Nach diesem weiten Ausflug nach Afrika bleiben wir lieber in unserer Heimat und begeben uns auf die Zugspitze. Lässt man von da eine Kiste mit einer darin befindlichen losen Kugel in die Tiefe fallen, dann müssen beide, Kiste sowohl wie Kugel, unter der Wirkung der Schwerkraft mit der Beschleunigung $g$ fallen, wie die Versuche von Galilei ergaben. Das bedeutet aber, dass die Kugel in bezug auf die Kiste in Ruhe verharrt. Ein Mann, der sich im Innern der Kiste aufhält, müsste daraus schließen, dass auf die Kugel keine Kraft wirkt.
Man muss also, wenn man das zweite Bewegungsgesetz anwenden will, vorsichtig sein. Auf der Erde wirkt die Schwere; in der frei fallenden Kiste ist sie aufgehoben.

Es genügt nicht, anzugeben, dass eine Kraft wirkt, sondern es muss hinzugefügt werden, auf welchen Beobachter sich die Kraftangabe bezieht.

Es bleibt also keineswegs belanglos, von wo aus man beobachtet. Galilei führte den Professoren und Studenten der Universität Pisa die Fallgesetze sehr eindrucksvoll vor, indem er Kugeln von den verschiedenen Stockwerken des schiefen Turms zur Erde fallen ließ. Er machte sich keine weiteren Gedanken darüber, wie die Gesetze aussehen würden, die Ikarus erlebt hätte. Für Galilei stand die Erde als Beobachtungsort von vornherein fest.



Wir dagegen wissen, dass die irdische Schwere in einer frei fallenden Kiste restlos aufgehoben ist. Ein Fallschirmjäger würde wiederum andere Erfahrungen machen. Darum erscheint die Frage berechtigt, welche Beobachter die Fallgesetze ebenso erleben, wie sie hier auf Erden walten?

Und weil die Schwere nur eine unter anderen gleichberechtigten Kräften ist, muss die Frage gleich allgemeiner gestellt werden: Für welche Beobachter besitzt die Mechanik - nicht allein der freie Fall - dieselbe Gestalt, dieselben Gesetze wie für uns?


Die letzte Frage fordert eine paradox anmutende Bemerkung geradezu heraus. Denken wir uns ein Wesen, das noch Millionstelteile einer Sekunde ebenso wahrnimmt wie Tausendstelteile eines Millimeters. Lassen wir dieses Wesen den freien Fall beobachten. Was wird es finden?

Es wird feststellen, dass Körper nie senkrecht herunterfallen. So unglaubhaft das auch klingen mag, behält es recht damit. Denn die Erde dreht sich, und der frei fallende Körper eilt ihr vor, landet also etwas ostwärts. Infolge der Trägheit behält nämlich der Körper die größere Drehgeschwindigkeit bei, die er von der höheren Ausgangslage mitbekommen hat.

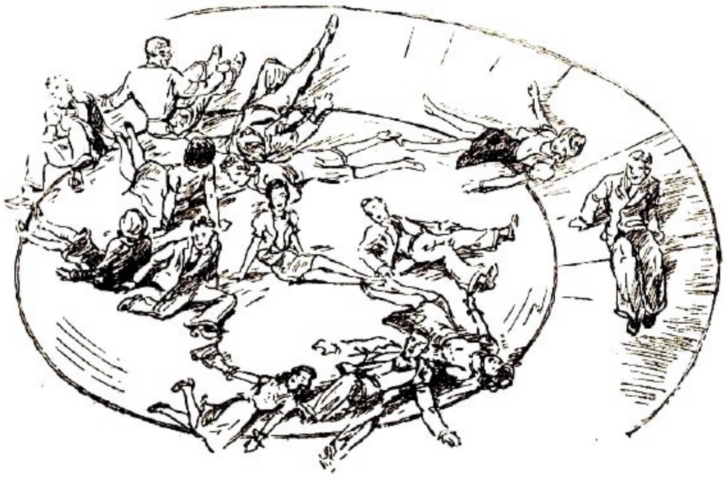
Die Erde selbst ist also nicht der Ort, auf dem die Fallgesetze genau gelten. Wo gelten sie dann genau?

An dieser Frage scheiterte Newton und nach ihm Generationen von Physikern. Um sie aus der Welt zu schaffen, führte Newton den absoluten Raum ein. Es entstand darüber eine ausgedehnte Literatur, in der kluge Bemerkungen mit Spitzfindigkeiten ein seltsames Gemisch bilden. Trotz gewaltiger Anstrengungen fand man aber keinen Ausweg.

Der absolute Raum hatte nun einmal die Aufgabe, Wohnstätte eines ausgezeichneten Beobachters zu sein, der die Fallgesetze so erlebt, wie sie Galilei formulierte, und man konnte ihm durch keinerlei Mittel näherkommen. Das empfindet der Physiker als so unbefriedigend, wie in einem Versdrama eine Person empfunden würde, die ein einziges Mal und nur darum auftritt, um einen besonderen Reim zu gestatten.

Freilich, man wusste, dass nicht nur ein, sondern dann gleich unendlich viele Beobachter dieselbe Mechanik erleben würden: alle diejenigen nämlich, die sich - vom ausgezeichneten Beobachter aus gesehen - mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegen, so etwa wie ein treibendes Boot auf einem Fluss.
Sie alle beobachten nämlich ohne Ausnahme dieselben Beschleunigungen und damit dieselben Kräfte; dass sie selbst verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, stört hier nicht, weil es ausschließlich auf die Geschwindigkeitsänderungen ankommt.

Den entscheidenden Schritt bildet die Aufgabe, eine bestimmte Kraft auszusondern. Gelingt dies, dann fordert man Beobachter, welche diese Kraft genau so erleben, wie sie eben festgelegt wurde. Nach unseren Ausführungen sind es Beobachter, die sich mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten zueinander bewegen. Alle anderen Beobachter - beispielsweise solche, die sich gegeneinander drehen oder beschleunigt bewegen - müssen abweichende Kräfte feststellen. Ihre Beobachtungen werden von Scheinkräften überlagert, die sich aus ihrem Bewegungszustand rein mathematisch ergeben.



Eine solche Scheinkraft erlebt man auf dem Teufelsrad. Sie bewirkt, dass die Besucher trotz verzweifelter Gliederverrenkungen immer weiter weg von der Mitte rutschen, bis sie schließlich auf dem festen Parkett landen. Hier redet man von Fliehkräften.

Es bleibt also die Aufgabe zu lösen, eine bestimmte Kraft auszusondern. Die Schwerkraft erscheint wie geschaffen dafür, wenn es gelingt, sie objektiv zu fassen. Es gehört zu den unvergänglichen Schöpfungen Newtons, dies getan zu haben. Er erkannte in der Schwerkraft den Sonderfall einer Anziehung, die zwischen Körpern immer wirksam ist. Bezeichnen $M$ und $m$ zwei Massen, die man sich als materielle Punkte zu denken hat, $r$ ihren Abstand, dann ziehen sich die beiden Massen mit einer Kraft an, die proportional zu

$$\frac{M \cdot m}{r^2}$$

ausfällt. Findet ein Beobachter für die Anziehung diesen Wert, dann stimmt ihm jeder Beobachter bei, der sich ihm gegenüber mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt. Alle anderen würden einen davon verschiedenen Wert feststellen. Die ersten Beobachter sind also durch die Forderung ausgezeichnet, dass sie für die Anziehung den Ansatz von Newton wiederfinden. So kann - wie hier erstmalig geschehen - der absolute Raum bei der Auslese der ausgezeichneten Beobachter vermieden werden.

Das Anziehungsgesetz erlaubte es Newton, die Mechanik von der Erde auf das Weltall auszudehnen. Es war eine kaum zu überbietende Leistung. Die von Kepler so mühsam aufgespürten Gesetze der Planetenbewegung erschienen mit einem Schlag als einfache Folgerung aus dem Anziehungsgesetz. Wer die Anfangsgründe der höheren Mathematik beherrscht, kann sie in wenigen Zeilen herleiten. Daraus allein lässt sich schon die Leistung von Newton ermessen.

Newton wurde frühzeitig anerkannt und in späteren Jahren mit Ehrungen überschüttet, wie kaum jemals ein Forscher. Als der Grundstock zu seinem Hauptwerk von Halley der englischen Akademie, der Royal Society, vorgelegt wurde, war diese sich völlig im klaren über dessen Bedeutung. Es wurde hervorgehoben, dass die darin enthaltenen zahlreichen Entdeckungen nicht allein von einem einzelnen gemacht, sondern in kurzer Zeit so weit entwickelt wurden, dass nichts hinzuzufügen wäre. Menschlich, allzu menschlich war es, dass ein Misston dabei nicht ausbleiben konnte. Als sich die Akademiker nach der Sitzung wie üblich in ein benachbartes Kaffeehaus begaben, behauptete einer unter ihnen, namens Hooke, dass die wesentlichsten von den neuen Entdeckungen von ihm stammten.

Die Königin Anna ernannte Newton im Jahre 1705 zum Ritter, und so hieß er fortan Sir Isaac Newton. Zwei Jahre vorher hatte ihn die Royal Society zu ihrem Präsidenten gewählt. Er blieb es, jedes Jahr neugewählt, bis an sein Lebensende. Auf diese Weise war er wissenschaftlicher Alleinherrscher in England, mit der Royal Society als Parlament. So nur wurde es ihm möglich, bei dem Prioritätsstreit darüber, wer Entdecker der Infinitesimalrechnung sei, in einer Weise gegen Leibniz vorzugehen, die einen Schatten auf seinen Charakter wirft, wenn auch zu berücksichtigen bleibt, dass er dabei Einflüsterungen erlag.

Nach seinem Tode im Jahre 1727 wurde er in der Westminster Abbey beigesetzt. Die Zipfel des Leichentuches trugen der Lordkanzler, die Herzöge von Roxbourgh und Montrose, die Grafen Pembroke, Sussex und Macclesfield, sämtlich Mitglieder der Royal Society.
Im Jahre 1781 errichtete man ihm in der Westminsterabtei ein Denkmal mit der Inschrift:

"Hier ruht Sir Isaac Newton, welcher als der erste mit fast göttlicher Geisteskraft die Bewegungen und Formen der Planeten, die Bahnen der Kometen und die Flut des Meeres durch die von ihm entwickelte Mathematik bestimmte, die Verschiedenheit der Lichtstrahlen sowie die daraus hervorgehenden Eigentümlichkeiten der Farben, welche vor ihm niemand auch nur geahnt hatte, erforschte, die Natur, die Geschichte wie die heilige Schrift fleißig, scharfsinnig und zuverlässig erklärte, die Majestät des höchsten Gottes durch seine Philosophie darlegte und in evangelischer Einfachheit der Sitten sein Leben vollbrachte. Es dürfen sich alle Sterblichen beglückwünschen, dass eine solche und so große Zierde des menschlichen Geschlechts ihnen geworden ist."

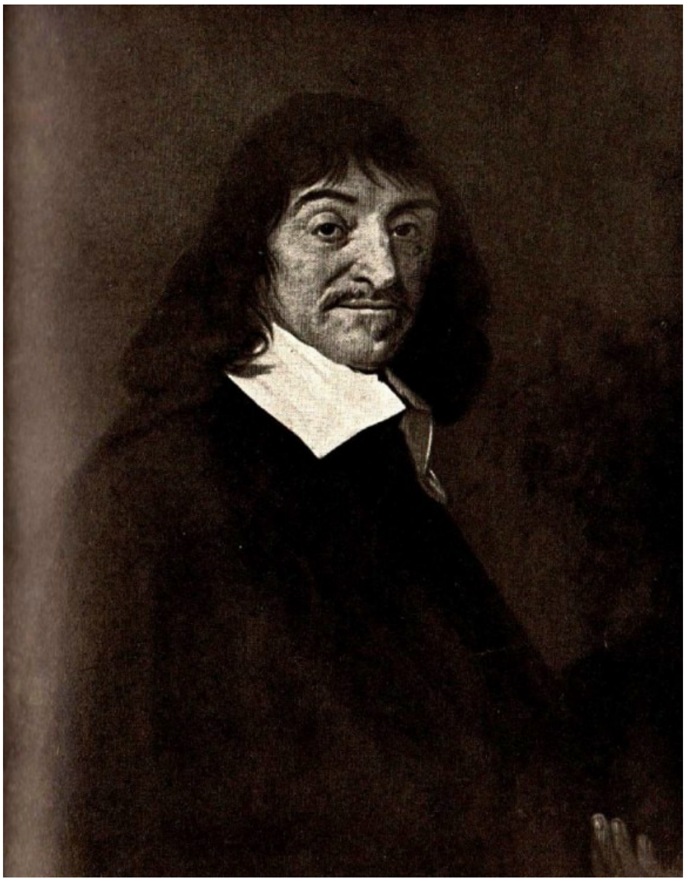
Der Gedanke Newtons, eine Kraft anzunehmen, die zwischen Körpern unmittelbar wirkt, ohne Medium, durch den leeren Raum hindurch, war nicht allein unerhört kühn sondern zugleich so befremdend, dass Newton selbst nach einer Erklärung suchte. Er gab zwar an, dass er sich mit dem Ersinnen von Hypothesen nicht abgebe - "hypotheses non fingo" lauten seine eigenen Worte -, konnte sich aber dabei doch nicht beruhigen, wie aus seinem Briefwechsel hervorgeht. Und wirklich bildet es eine ungeheure Zumutung, Fernkräfte einzuführen. Im täglichen Leben, beim Hebel, Flaschenzug oder sonst einer Maschine, pflanzen sich die Kräfte von Maschinenteil zu Maschinenteil fort. Auf einmal sollte es nun eine Kraft geben, die unvermittelt wirkt. Darum versuchte man, bei der Schwere doch noch ein ähnliches Verhalten herauszufinden, die Schwere zu "erklären" . Als dies aber nicht gelingen wollte, beruhigte man sich endlich dabei und erteilte der Schwere das Prädikat: anschaulich.

Im ersten Augenblick erscheint die Wendung, die Schwere einfach für anschaulich zu erklären und sich dabei zu beruhigen, als plumpes Verschleierungsmanöver, so als ob man einen Verzicht durch tönende Worte in einen Gewinn verwandeln wollte. Besinnt man sich aber, dann gelangt man zu einer anderen Ansicht.
Man wird gewahr, dass Denkgewohnheiten allmählich das werden, was man "anschaulich" nennt, wenn man dieses Wort nicht zu engherzig auslegt. Man hat sich ja mit der Anziehung nicht nur abgefunden, sondern sie so weit in seine Gedankenwelt aufgenommen, dass es kaum noch verständlich erscheint, wie man sich vor diesem Gesetz und seinen wunderbaren Folgen seinerzeit nicht sofort und überall beugte.

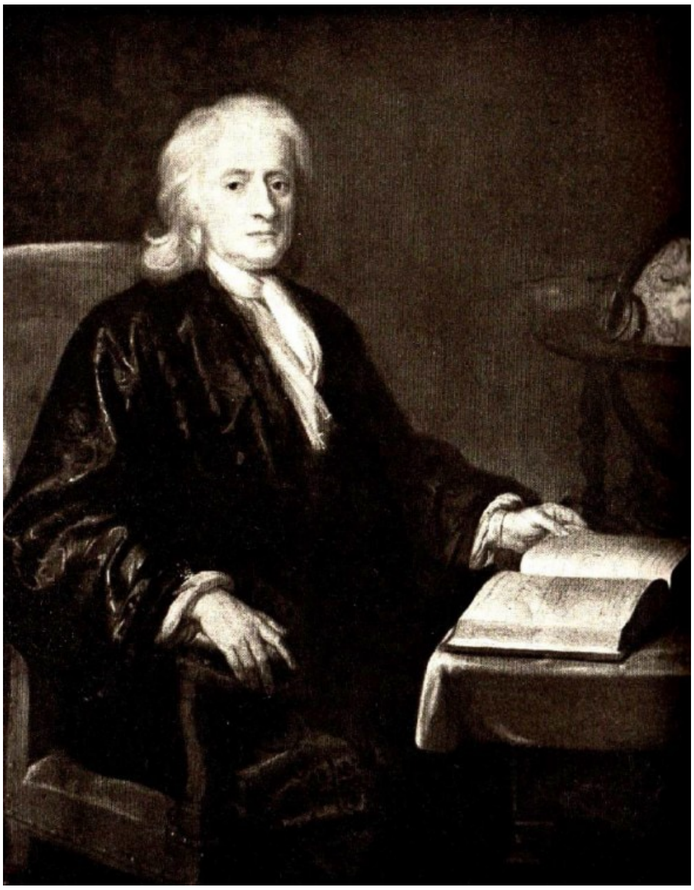
Das war jedoch keineswegs der Fall. Es bedurfte eines Voltaire, um der Himmelsmechanik von Newton - denn darum ging es in erster Linie - auf dem Festland Europa zum raschen Sieg zu verhelfen. Voltaire lernte die Gedankenwelt Newtons im Londoner Exil kennen, und nach Frankreich zurückgekehrt, trat er für sie in vielbeachteten Briefen ein, in denen er zugleich die damals herrschenden Ansichten seines Landsmannes Descartes bekämpfte.

Das Großartige an Newtons Leistung besteht in der Einsicht, dass es dieselben Gesetze sind, die das Geschehen auf der Erde und am Himmel bestimmen. Der Apfel fällt infolge der Massenanziehung vom Baum, und aus demselben Grunde bewegt sich die Erde um die Sonne in einer Ellipse. Der Himmel barg keine Wunder mehr, nur noch Probleme. Eines dieser Probleme beschäftigte die Menschheit seit jeher. Man wurde sehr frühzeitig auf Zusammenhänge aufmerksam, die zwischen der Mondbewegung und dem Naturschauspiel von Ebbe und Flut bestehen. Für den Unbefangenen, der es zum erstenmal zu Gesicht bekommt, bildet es ein tiefes Erlebnis, wie eindrucksvoll aus dem Bericht des Curtius Rufus von den Taten Alexanders des Großen hervorgeht:

"Als sie (die Soldaten Alexanders) nun etwas langsamer, weil sie in ihrem Lauf durch die Meeresflut zurückgetrieben wurden, eine andere mitten im Strom (des Indus) gelegene Insel erreichten, so legten sie mit der Flotte an und zerstreuten sich, um Proviant zu suchen, ohne Ahnung von dem Ereignis, das die Unkundigen überraschte.
Es war um die dritte Stunde, als der Ozean mit seinem stetigen Flutwechsel anzurücken und den Fluss zurückzudrängen begann. Erst gestaut, dann heftiger zurückgetrieben, strömte dieser mit größerer Gewalt nach entgegengesetzter Richtung, als Gießbäche im abschüssigen Bett einherschießen.
Der Menge war die Natur des Meeres unbekannt, und man glaubte ein Wunder und ein Zeichen des göttlichen Zornes zu sehen. Mit immer erneutem Andrang ergoss sich das Meer auch auf die kurz zuvor trockenen Gefilde. Und schon waren die Fahrzeuge in die Höhe gehoben und die ganze Flotte zerstreut, als von allen Seiten die ans Land Gesetzten, erschreckt und bestürzt durch das unerwartete Unglück, zurückrannten.
Aber bei Verwirrung fördert auch Eile nicht. Die einen stießen die Schiffe mit Stangen ans Land, andere waren, während sie das Zurechtmachen der Ruder hinderten, festgefahren. Manche hatten bei ihrer Eile, abzustoßen, nicht auf ihre Kameraden gewartet und brachten nun die lahmen und unlenkbaren Schiffe nur in matte Bewegung; andere Schiffe hatten die sich unbedacht auf sie Stürzenden nicht aufnehmen können, und es war gleichzeitig Überfülle und mangelhafte Bemannung, was die Eile hemmte.

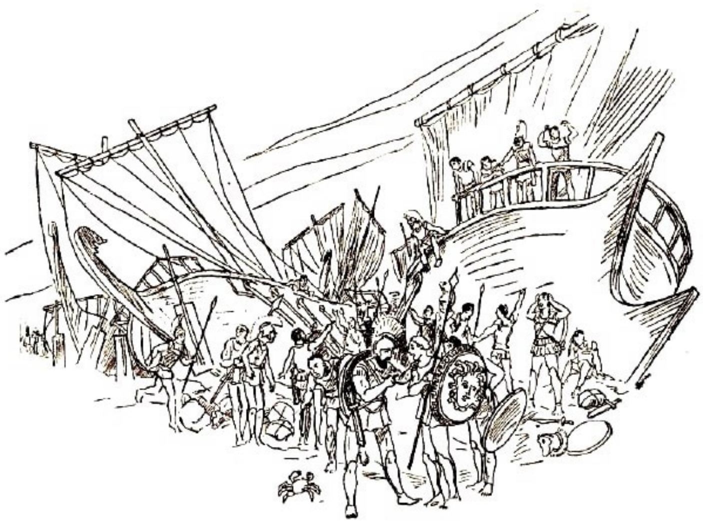


René Descartes. Gemälde von Frans Hals. Paris, Louvre



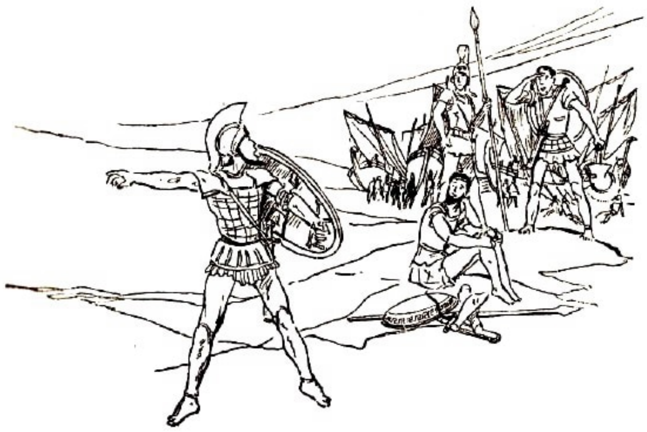
Sir Isaac Newton, Gemälde von John Vanderbank. London, National Portrait Gallery

Das Geschrei, hier, man solle warten, dort, man solle abstoßen, und die widerstreitenden Rufe der niemals ein und dasselbe Wollenden hatten alle Möglichkeit benommen, zu sehen und zu hören. Selbst bei den Steuerleuten war nicht die geringste Hilfe, da weder ihr Ruf von den Tobenden vernommen werden konnte, noch ihr Befehl von den Erschrockenen und Verwirrten beachtet wurde.
Also begannen die Schiffe gegeneinander zu stoßen, sich wechselseitig die Ruder abzubrechen und ein Fahrzeug auf das andere loszudrängen. Man konnte glauben, es führe da nicht die Flotte ein und desselben Heeres, sondern zwei verschiedene seien in einem Schiffskampf begriffen. Vorderteile schmetterten gegen Hinterteile; die eben die Vordern in Verwirrung gebracht hatten, sahen sich von den Folgenden bedrängt, und der Zorn der Streitenden steigerte sich bis zum Handgemenge.



Und bereits hatte die Flut die ganzen Gefilde um den Strom unter Wasser gesetzt, so dass nur noch die Hügel wie kleine Inseln hervorragten; diese schwimmend zu erreichen, eilten sehr viele in ihrer Angst, nachdem sie die Hoffnung auf die Schiffe aufgegeben. Zerstreut, befand sich die Flotte teils auf sehr tiefem Wasser, wo Talsenkungen waren, teils saß sie auf Untiefen, wie eben die Wellen die ungleichen Bodenerhebungen bedeckt hatten: da wurde ihnen plötzlich ein neuer und größerer Schrecken eingejagt.
Das Meer begann, sich zurückzuziehen, indem die Gewässer in langem Wogenzug an ihren Ort zurückrannen, um das kurz zuvor unter tiefer Salzflut versenkte Land wieder herauszugeben. Die also vom Wasser verlassenen Schiffe stürzten, die einen nach vorn über, andere legten sich auf die Seite; die Gefilde waren mit Gepäck, Waffen und Stücken losgebrochener Bretter und Ruder bestreut.
Die Soldaten wagten weder heraus aufs Land zu gehen noch im Schiff zu bleiben, immer noch Weiteres und Schlimmeres als das Gegenwärtige erwartend. Kaum trauten sie ihren eigenen Augen über das, was sie erfahren, auf dem Trocknen ein Schiffbruch, im Strom ein Meer. Auch war des Unglücks kein Ende zu sehen. Denn unbekannt damit, dass die Flut in kurzem das Meer zurück- bringen und die Schiffe flottmachen werde, prophezeiten sie sich Hunger und die äußerste Not. Es krochen auch schreckliche Tiere, von den Fluten zurückgelassen, umher.

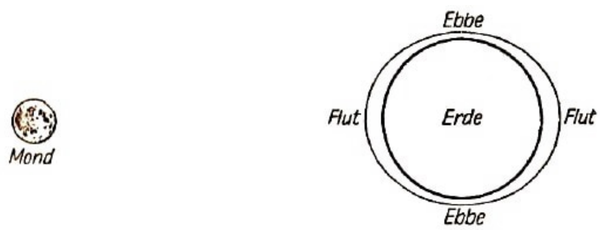
Schon brach die Nacht herein, und selbst der König war durch die Verzweiflung an ihrer Rettung schwer bekümmert. Dennoch überwältigten die Sorgen seinen unbesiegbaren Mut nicht, sondern die ganze Nacht blieb er unablässig auf der Ausschau und schickte Reiter an die Flussmündung voraus, um, sobald sie das Meer wieder herauffluten sähen, vorauszueilen.



Auch gebot er, die geborstenen Fahrzeuge wieder auszubessern und die von den Fluten umgestürzten wieder aufzurichten und fertig bei der Hand zu sein, sobald wieder das Land vom Meer überschwemmt würde. Nachdem er so die ganze Nacht unter Wachen und Ermahnungen zugebracht hatte, kamen die Reiter eiligst im schnellsten Lauf zurückgesprengt, und ebenso schnell folgte die Flut.

Erst begann diese mit ihren im leisen Wellenzug nahenden Gewässern die Schiffe zu heben, bald aber setzte sie, das ganze Gefilde überschwemmend, die Flotte auch in Bewegung. Am ganzen Küsten- und Ufersaum erschallte das Beifallsklatschen der Soldaten und Schiffsleute, die mit maßloser Freude ihre unverhoffte Rettung feierten. Woher doch, fragten sie verwundert, so plötzlich diese große Meeresflut zurückgekehrt? Wohin sie gestern entwichen sei? Und wie die Beschaffenheit dieses bald zwieträchtigen, bald dem Gesetz bestimmter Zeiten gehorchenden Elements?
Da der König aus dem Hergang des Geschehenen schloss, dass nach Sonnenuntergang der bestimmte Zeitpunkt eintrete, so fuhr er, um der Flut zuvorzukommen, gleich nach Mitternacht mit einigen wenigen Schiffen den Fluss hinunter, und als er dessen Mündung hinter sich hatte, schiffte er noch, sich endlich am Ziel seiner Wünsche sehend, 400 Stadien weit in das Meer hinein.
Dann brachte er den Gottheiten des Meeres und jener Gegend ein Opfer und kehrte zur Flotte zurück."

Das Rätsel der Gezeiten Ebbe und Flut findet seine Aufklärung in der Anziehung des Mondes - das heißt in der allgemeinen Gravitation. Die Mondanziehung bewirkt an dem festen, starren Erdkörper eine überall gleiche Beschleunigung, nicht aber bei den frei beweglichen Teilchen, aus denen das Wasser besteht. Die sich auf der dem Mond zugekehrten Seite befinden, erfahren eine größere Beschleunigung infolge der Mondanziehung, weil sie näher dem Mond sind.




Dementsprechend erfahren die Wasserteilchen auf der abgewandten Seite kleinere Beschleunigung, weil sie weiter vom Mond entfernt sind.

Die größere Beschleunigung bedeutet, dass die Teilchen der Erde etwas vorauseilen: auf der dem Mond zugekehrten Seite herrscht Flut. Die kleinere Beschleunigung bedeutet, dass die Teilchen auf der anderen Seite etwas zurückbleiben: auch auf der dem Mond abgewandten Seite herrscht Flut. Sowohl im einen, wie auch im anderen Falle ist es dann die Erdanziehung, welche die Teilchen am Verlassen der Erde hindert.

Berechnet man die Anziehung des Mondes auf der Erdoberfläche, dann findet man dafür einen winzigen Wert. Wie könnte eine so schwache Kraft das Naturschauspiel von Ebbe und Flut verursachen? Es scheint, als hätte uns die Theorie irregeführt.
Und doch behält sie recht! Denn die schwache Kraft wirkt durch lange Zeiten, nämlich immer. Es verhält sich damit so wie mit einer Schaukel, die man mit ganz winzigen Stößen aufschaukeln kann - freilich eine Schaukel wahrhaft kosmischen Ausmaßes.

Am Beispiel der Gezeiten sieht man deutlich, wie die Gedankenwelt von Newton, die man heute als klassische Mechanik bezeichnet, erlaubt, die Erscheinungen am Himmel und auf Erden zu erklären. Damit geht sie weit über alles hinaus, was vorher, insbesondere in der Himmelskunde, geleistet wurde. Denn die Vorgänger beobachteten und deuteten vieles richtig, aber die Wurzel der Erscheinungen, die Anziehung, blieb ihnen verborgen. Darum konnten sie kaum über Ansätze hinauskommen, die mehr geistvoll als überzeugend wirkten. Um so erstaunlicher bleibt es, wenn sie dennoch vieles vorweggenommen haben.

Überblickt man die Entwicklung, die zu einer so leistungsfähigen Mechanik führte, dann fällt es auf, dass die Grundtatsachen nie einzeln geprüft werden können. Durch keinerlei Anordnung ist zu erreichen, dass nur eine Kraft auf einen materiellen Punkt wirkt. Er ist immer der Anziehung sämtlicher Körper des Weltalls gleichzeitig ausgesetzt. Nur weil diese Kräfte überwiegend schwach ausfallen, können wir die Fallgesetze mit guter Annäherung verwirklichen.

Was durch genaue Beobachtungen bestätigt werden kann, sind stets verwickelte Bewegungen. Nur die Unzulänglichkeit unserer Sinne lässt uns die Welt einfach erleben. Zu dieser Einsicht führt die Theorie, die sich durch zutreffende Beobachtungen zu rechtfertigen wünscht, welche jedoch streng genommen stets unzulänglich ausfallen, wie wir zugeben müssen, wenn wir folgerichtig bleiben wollen. Das bedeutet, dass die Theorie uns verdammt, nur Zerrbilder davon zu beobachten, was sie für Wirklichkeit erklärt.

Eine zweite Theorie könnte nun zu einer mehr oder weniger abweichenden "Wirklichkeit" führen. Alle diese Wirklichkeiten sind gedankliche Konstruktionen, wenn man will Vereinbarungen, die aber durch unsere Sinneswelt nicht widerlegt werden dürfen, was auch die einzige sachliche Beschränkung bildet, der sie ohne Ausnahme unterworfen sind. Im ersten Augenblick erscheint diese Formulierung arg enttäuschend. Besinnt man sich aber, dass jede Theorie einsatzbereites Wissen sein soll, dann bekommt die Sache ein anderes Gesicht, die philosophischen Qualen schwinden und machen einer leistungsfähigen Physik Platz.

Ein scharfsinniger Physiker, Ernst Mach, der sich bei der schwierigen Prüfung der Grundlagen bleibende Verdienste erworben hat, äußert sich wie folgt:
"Das wichtigste Ergebnis unserer Betrachtungen ist aber, dass gerade die scheinbar einfachsten mechanischen Sätze sehr komplizierter Natur sind, dass sie auf unabgeschlossenen, ja sogar auf nie vollständig abschließbaren Erfahrungen beruhen, dass sie zwar praktisch hinreichend gesichert sind, um mit Rücksicht auf die genügende Stabilität unserer Umgebung als Grundlage der mathematischen Deduktion zu dienen, dass sie aber keineswegs selbst als mathematisch ausgemachte Wahrheiten angesehen werden dürfen, sondern vielmehr als Sätze, welche einer fortgesetzten Erfahrungskontrolle nicht nur fähig, sondern sogar bedürftig sind."

Diese Worte stehen in seinem Werk über "Die Mechanik in ihrer Entwicklung" aus dem Jahre 1883. Seitdem erlebte dieses Werk viele Auflagen und trug wesentlich zur Neugestaltung der Mechanik bei.

Anfangs legte man sich freilich kaum Rechenschaft über Berechtigung und Tragweite der

Mechanik ab. Sie bildete den ältesten Zweig der Naturwissenschaften und galt schlechthin als Vorbild. Aus dieser Einstellung wird es verständlich, wenn man so weit ging, sie zur Erklärung der ganzen Physik heranzuziehen. Descartes meinte, es gäbe kein physikalisches Problem, das nicht durch die Mechanik gelöst werden könnte.
Seine verschiedentlichen Versuche zeigen aber, dass er dieses Ziel mit dürftigen und unbestimmten Vorstellungen erreicht zu haben glaubte, was übrigens bereits seine Zeitgenossen Pascal und Huygens durchschauten. Häufig genug wurden damals theologische Gesichtspunkte herangezogen, die mit der Physik nichts zu tun haben.

So einleuchtend diese letzte Bemerkung auch uns Heutigen erscheint, es hat erhebliche Schwierigkeiten gemacht, zu dieser Sachlichkeit emporzusteigen. Noch anderthalb Jahrhunderte nach Newton soll Napoleon, ein Förderer der Naturwissenschaften, bemängelt haben, dass er in der Himmelsmechanik von Laplace den Namen Gottes nicht gefunden habe. Die Antwort des Gelehrten: "Sire, ich bedurfte dieser Hypothese nicht" , musste ihn dann von einer neuen, rein sachlichen Naturwissenschaft überzeugt haben.
Es hieße aber, den Forschern aus früheren Jahrhunderten Unrecht antun, wollte man sie darum verdammen. Im Gegenteil, es kann ihnen kaum hoch genug angerechnet werden, dass sie ihre Ergebnisse trotz theologischer Färbung erschauen konnten!

Wir erkennen es heute klar, dass die Naturwissenschaft voriger Jahrhunderte nicht rein sachlich blieb. Sie achtete nicht genug darauf, nur solche Begriffe zuzulassen, die ihr wirklich angehören. Die theologischen Gesichtspunkte, die berücksichtigt wurden, beweisen das zur Genüge. Noch ein Galilei gab sich damit ab, wie das Wunder des Josuah zu erklären sei. Die heutige Naturwissenschaft hält Fremdbegriffe leider auch nicht immer fern von sich.

Ein Beispiel: Im Sinne der Mechanik von Newton ist die Bewegung eines Körpers für alle Zeiten bestimmt, wenn die Kräfte bekannt sind, die auf ihn wirken, und sein Ort nebst Geschwindigkeit für einen bestimmten Augenblick. Laplace drückte das so aus:

"Ein Geist, der für einen Augenblick alle Kräfte kannte, welche die Natur beleben, und die gegenseitige Lage aller Wesenheiten, aus denen sie besteht, müsste, wenn er umfassend genug wäre, um alle diese Daten der mathematischen Analyse unterwerfen zu können, in derselben Formel die Bewegung der größten Himmelskörper und des leichtesten Atoms begreifen, nichts wäre ungewiss für ihn, und Zukunft wie Vergangenheit lägen seinem Auge offen da."

Man spricht bei dieser Auffassung von dem geregelten Ablauf, der Determiniertheit, alles Geschehens oder auch von der Verknüpfung von Ursache und Wirkung, der Kausalität. Dieses Wort birgt aber Gefahren! In der Philosophie wird es nämlich ebenfalls verwendet und hier oft in Gegensatz zur Willensfreiheit gesetzt. Daraufhin setzen Erörterungen ein, wie die Physik mit dem freien Willen zu vereinbaren sei. In der Physik selbst besitzt aber der freie Wille ebenso wenig Bürgerrechte wie ein Stiftsfräulein. Wenn sich ein Physiker dafür interessiert, dann treibt er Philosophie.

Wir müssen uns noch einem Begriff zuwenden, der an Bedeutung den Grundbegriffen der klassischen Mechanik, Raum, Zeit und Masse, keineswegs nachsteht - es ist die Energie.
Als moderner Mensch ist man daran gewöhnt, in Energien zu denken. Heute erscheint es fast selbstverständlich, dass unsere Maschinen Energien aus einer in andere Erscheinungsformen überführen: Die Energie ist ein Verwandlungskünstler; in der Straßenbahn verwandelt sich elektrische Energie, in der Lokomotive Wärme in Bewegungsenergie. Diese Art des Denkens ist aber gar nicht alt. Sie wurde erst vor einem Jahrhundert eingeleitet. Freilich haben auch schon Forscher früherer Zeiten mit ähnlichen Gedankengängen gearbeitet - wenn auch mehr

instinktiv und unter strenger Beschränkung auf das Gebiet der Mechanik.

Obwohl die Energie einen grundlegenden Begriff darstellt, ist es nicht ganz einfach, sie kurz zu definieren. Am besten sagt man vielleicht: Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu leisten.
Ein Beispiel haben wir bereits bei der Schwerkraft kennengelernt. Heben wir einen schweren Körper um eine gewisse Strecke hoch, so müssen wir Arbeit leisten; um diese Arbeit hat sich nun die Energie - genauer: die "potentielle" oder Energie der Lage - des Körpers vermehrt. Umgekehrt kann der Körper wieder dieselbe Arbeit hergeben, wenn er von dem höheren Ort auf den tieferen Ausgangspunkt zurückkehrt; diese Arbeitsleistung geschieht dann auf Kosten seiner potentiellen Energie.

Es ist zu beachten, dass es hier nichts ausmacht, auf welchem Wege der Körper von der Ausgangs- in die Endlage gelangt. Man kann ihn senkrecht hochheben oder ihn langsam über eine schiefe Ebene aufwärts bewegen - immer hängt die geleistete Arbeit, der Energiegewinn, allein vom Höhenunterschied zwischen Ausgangs- und Endlage ab.
Bei einem solchen Verhalten spricht man von "konservativen Kräften" ; die Schwerkraft gehört zu ihnen, ebenso wie zum Beispiel die elektrische Anziehungskraft und manche andere. Rein mathematisch lässt sich dann eine bestimmte Größe einführen, die in jedem Raumpunkt einen bestimmten Wert besitzt, man nennt sie das Potential, und sie ist ein Maß für die potentielle Energie: Der Potentialunterschied zwischen zwei Punkten ist proportional der Arbeit, die zu leisten ist, um den Körper von einem Punkt zum andern zu bringen.

Es gibt noch eine zweite mechanische Energie-Art: die kinetische oder Bewegungsenergie. jeder hat ein Gefühl dafür, dass ein schnell bewegter Körper, zum Beispiel eine Gewehrkugel, dank ihrer Geschwindigkeit, ihrer Wucht eine beträchtliche, häufig zerstörende Arbeitsfähigkeit besitzt. Freilich fiel es seinerzeit schwer, den richtigen mathematischen Ausdruck für die kinetische Energie zu finden; es ist sogar ein lebhafter Streit zwischen den Gelehrten darüber entbrannt, der nur zustande kommen konnte, weil die beiden Parteien verschiedene Dinge mit demselben Namen belegten. Heute messen wir die kinetische Energie durch das halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Dieser Wert ergibt sich nach leichter Rechnung aus unserer früheren Definition der Arbeit, wenn man hierin für die Kraft den Ausdruck aus dem zweiten Bewegungsgesetz heranzieht.

Die Änderung der Bewegungsenergie ist dann gleich der geleisteten Arbeit. Addiert man zur Bewegungsenergie die potentielle, so ändert sich diese Summe nicht, wie auch schon aus rein mathematischen Gründen erhellt: die Summe aus potentieller und kinetischer Energie bleibt unverändert. Wenn also eine Kugel die schiefe Ebene hinabrollt und ihre Bewegungsenergie dabei zunimmt, dann muss ihre potentielle Energie abnehmen.

In den letzten Betrachtungen beriefen wir uns wiederholt auf mathematische Gründe. Da wir keine Dogmatik treiben, heißt es, jetzt näher darauf einzugehen. Denn nur wenn man in der Lage ist, zumindest das Prinzip der erforderlichen mathematischen Betrachtungen zu begreifen, kann von einem wahren Verständnis die Rede sein. Zudem sind diese Betrachtungen reizvoll und bilden heute, nachdem der ihnen zugrunde liegende Begriff des Grenzwerts geklärt wurde, kein Hexeneinnmaleins mehr.
Nur so erklärt es sich, dass sie in der Schule gelehrt werden können, während sie in früheren Jahrhunderten sogar den Gelehrten große Schwierigkeiten bereitet haben. Darum erscheint es angebracht, die leitenden Gedanken herauszuschälen, ohne uns mit Formeln zu belasten.

## 1.4 Ein Hexeneinmaleins entsteht

Mit Galilei und Newton beginnt in der Physik eine Zeit, in der man nicht mehr ohne höhere Mathematik auskommt. Die Grundbegriffe sind nicht minder klar als in der Statik, aber erheblich verwickelter.
Die Elementarmathematik genügt nicht mehr, sondern es muss die Differential- und Integralrechnung, kürzer der Kalkül, herangezogen werden. Zu Galileis Zeiten war er noch nicht vorhanden. Eben darum gelang es Galilei nicht, einen grundlegenden Gedanken ganz auszuführen und die Beschleunigung in voller Allgemeinheit zu erklären, um das zweite Bewegungsgesetz aufstellen zu können. Was noch ausstand, hätte er sicher geschafft, denn am Anfang unserer Entwicklungen zur Dynamik schilderten wir den Weg, der, über Galileisches Gedankengut nur einen Schritt hinausgehend, zum noch ausstehenden Beng der Masse führt, und das sogar mit Hilfe der Elementarmathematik!
Es klingt paradox, dass Galilei, der die Fallgesetze aufgestellt hat, die Masse noch nicht kannte, erklärt sich jedoch damit, dass er sein Augenmerk auf den einzelnen Massenpunkt richtete, die Masse aber erst dann richtig zur Geltung kommt, wenn mehrere Massenpunkte zugleich betrachtet werden.

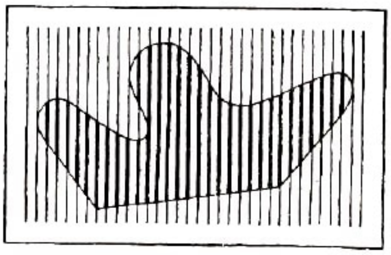
Die Anregungen zum Kalkül gingen bemerkenswerterweise nicht von der Mechanik aus, trotzdem diese ohne ihn nicht bestehen könnte, sondern von der Mathematik selber. Die Physik wurde Nutznießerin, wie später noch wiederholt: Die Relativitätstheorie fand die Riemannsche Geometrie vor, die Quantenmechanik, die Operatorenrechnung. Man möge darin weniger eine "prästabilierte Harmonie" erblicken als vielmehr den Umstand, dass man nur Begriffe anwenden kann, die vorhanden sind. Die physikalischen Zusammenhänge sind mathematischer Natur und nur so weit zu fassen, wie der Vorrat an Mathematik reicht.

Die Anfänge der höheren Mathematik gehen weit zurück. Der weitaus bedeutendste Mathematiker des Altertums, Archimedes, bewältigte schon Integrationen. Das erkennt man aus seinen Briefen. In den veröffentlichten Schriften jedoch wählte er eine Darstellung, die seiner Zeit besser angepasst war. Auf diese Weise ging von Archimedes für das Entstehen unseres Kalküls so gut wie keine Anregung aus. Erst sehr viel später traten Überlegungen auf, die als Vorläufer betrachtet werden können.

Im Anfang war auch diesmal das Wort. Es hieß "indivisibile" , unteilbar, und wurde vom nachmaligen Erzbischof um Canterbury, Bredwardin, im vierzehnten Jahrhundert geprägt. In seinen Schriften sucht man freilich vergeblich nach einer genauen Erklärung, trotzdem er Doctor profundus hieß.
Damals war man im Verteilen solcher Ehrentitel freigebig und nannte, um nur zwei weitere Beispiele anzuführen, Thomas von Aquino Doctor universalis und Raimundus Lullus, der die Erfindung einer Denkmaschine anstrebte, ohne selber vernünftig denken zu können - oder vielleicht gerade deshalb? -, Doctor illuminatus. Man fühlt sich manchmal versucht, an Rothäute zu denken, die ihre Häuptlinge "reißender Wolf" oder "mächtiger Stier" taufen.

Das Wort indivisibile nahm dann der Italiener Cavalieri auf, der daran Betrachtungen knüpfte, die sich bis 1626 zurückverfolgen lassen. Damals, am 21. März, schrieb er darüber an Galilei. Aus dem Brief geht noch hervor, dass Galilei selbst Überlegungen angestellt hat, die in ähnlicher Richtung verliefen. Es dauerte aber noch lange, bis Cavalieri ein Werk darüber drucken ließ. Zuerst erschien es im Jahre 1635, dann in verbesserter Auflage 1653. Ein französischer Kritiker meinte dazu, dass es den Preis der Dunkelheit verdiente, wenn solche Preise vergeben würden.

Es liegt wohl daran, dass Cavalieri integrieren wollte, ohne in der Lage zu sein, das Integral erklären zu können. Versuchen wir, das Dunkel aufzuhellen, und besinnen wir uns darauf, dass es die Grundaufgabe der Integralrechnung ist, den Flächeninhalt ebener Figuren oder den Rauminhalt von Körpern zu bestimmen.



Man betrachte eine ebene Figur mit beliebigem Rande, der sowohl aus geraden als auch aus krummen Linien bestehen mag. Am besten, man denkt sich diese Figur auf einem Blatt Zeichenpapier. Von der einen Ecke des Blattes aus verschiebe man eine Gerade parallel mit sich selbst, wie man es mit Hilfe von zwei Linealen leicht ausführen kann.

Zunächst liegen Gerade und Figur getrennt. Es gibt dann eine Lage, in der die bewegliche Gerade zum ersten Male Punkte mit der Figur gemeinsam hat. Diese Punkte bilden nun eine oder - wenn die Figur Einbuchtungen aufweist - mehrere getrennt liegende Strecken. Einzelne Punkte sollen dabei als Strecken gelten. Verschiebt man die bewegliche Gerade noch weiter, dann hat sie eine Zeitlang stets gemeinsame Strecken mit der Figur, bis sie schließlich zum zweiten Male eine Lage einnimmt, in der sie noch Strecken mit der Figur gemeinsam hat, beim geringsten Weiterbewegen aber nicht mehr. Zwischen diesen beiden Lagen liegt eine unendliche Menge von Geraden, die Strecken mit der Figur gemeinsam haben.

Jede schraffierte Zeichnung bietet eine wahre Musterkollektion von solchen Strecken. Zwischen zwei ausgezogenen Linien liegt dann immer noch eine unendliche Menge von weiteren Strecken. Alle diese Strecken zusammen bilden die Gesamtheiten, von denen Cavalieri ausgeht. Die Strecken, selber sollen vermutlich die Indivisibilien sein.
Man ist nur auf Vermutungen angewiesen, denn Cavalieri erklärt nirgends die Bedeutung des Wortes. Ähnlich verfährt er noch bei Körpern, die er mit Hilfe von parallelen Ebenen zerlegt. Und nun meint er: "Um das Verhältnis zweier ebener oder räumlicher Gebilde kennenzulernen, genügt es, das Verhältnis der Gesamtheiten zu finden. Das ist das Fundament, welches ich dieser meiner neuen Geometrie zugrunde lege."

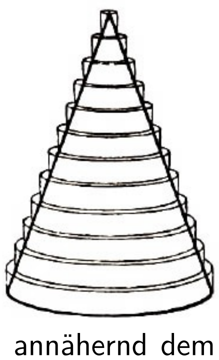
Nun, dieses Fundament war kein Fels, sondern eine Wolke, die, aus der Nähe betrachtet, zerrinnt. Denn Cavalieri gelang es zwar, richtige Ergebnisse zu gewinnen, er musste sich aber ähnlich fühlen wie einer, der eine Rechenmaschine bedient, ohne ihren Mechanismus zu begreifen. Die "Gesamtheiten" gehen heute Anlass, bestimmte Integrale zu bilden, sind aber um diesen keineswegs identisch. Denn erst ein Grenzübergang, den Cavalieri noch nicht kannte, führt von der Gesamtheit zum Integral.

Man kann sich die Figur aus eng nebeneinanderliegenden Streichhölzern bestehend denken und sich vorstellen, dass diese immer dünner werden. Ein Beispiel erleichtert das Verständnis.

Man denke sich die Streichhölzer zunächst so angeordnet, wie es die Zeichnung links angibt. Daraufhin verschiebe man die einzelnen Streichhölzer so, wie aus der Figur rechts hervorgeht. Auf diese Weise sieht um sofort, dass die beiden Vierecke flächengleich sind.
Die geschilderte Betrachtungsweise entfernt sich jedoch von der Cavalierischen und nähert sich der von Kepler, der schon im Jahre 1615 ein Werk veröffentlicht hat, das als Anfang der höheren Mathematik gilt. So wichtig dieses Werk war, fand Kepler keinen Verleger, der es drucken wollte, und damit blieb ihm nichts anderes übrig, als es auf eigene Kosten drucken zu lassen. Ähnliches Schicksal widerfuhr im Laufe der Jahrhunderte noch anderen grundlegenden

Werken.
Den Anlass zu Keplers Untersuchungen bildete das vortreffliche Weinjahr 1612 in Österreich. Als Kepler dort einige Fässer Wein kaufte, fiel es ihm auf, dass der Verkäufer deren Inhalt sehr viel einfacher bestimmte, als Kepler es vom Rhein her wusste. Dreitägiges Nachsinnen genügte Kepler, die richtige Berechnung des Fassinhaltes zu ermitteln.

Kepler denkt sich die Figuren in schmale Streifen aufgeteilt. Weil er den strengen Begriff des Grenzwertes nicht kennt, muss er die Grenzübergänge umgehen. Das tut er, indem er die Streifen unendlich klein wählt. Freilich sucht man bei Kepler vergeblich nach einer genauen Erklärung dafür, was "unendlich klein" bedeuten soll. Dagegen nützt er geschickt das Verhalten unendlich kleiner Größen aus, um Ergebnisse zu gewinnen, die endliche Größen, nämlich Inhalte, betreffen. Es hätte wenig Sinn, wollte man sich von der Tragweite eines solchen Verfahrens eng an Kepler anschließend überzeugen. Vielmehr erscheint es angebracht, das Brauchbare davon in moderner Darstellung zu bringen. Es stellt sich dann heraus, dass die Betrachtung im Rahmen der Ideen von Archimedes verläuft.



Man denke sich einen Kegel parallel der Grundfläche in $n$ gleich dicke Scheiben geschnitten. je größer $n$ ausfällt, um so dünner werden die Scheiben. Der Mathematiker bezeichnet nun Größen, die immer kleiner werden, mit Vorliebe mit dem griechischen Buchstaben $\varepsilon$. Schließen wir uns ihm an und nennen wir die Dicke der Scheiben $\varepsilon$.
Es heißt jetzt, den Inhalt der einzelnen Scheiben zu bestimmen.

Er ist annähernd dem Inhalt der Zylinder gleich, welche dieselben Grundflächen und Höhen besitzen wie die einzelnen Scheiben. Die Annäherung ist um so besser, je dünner die Scheiben ausfallen. Wir denken uns fortan die Scheiben durch diese Zylinder ersetzt. Zunächst muss der Halbmesser des einzelnen Zylinders bestimmt werden. Der $m$-te Zylinder . von der Spitze des Kegels aus gerechnet - liegt zwischen zwei Ebenen, die von der Kegelspitze um $(m-1)\varepsilon$ und $m\varepsilon$ entfernt sind. Bezeichnen wir die letztere Ebene mit $A'B'$ und die der Grundfläche des Kegels mit $AB$, die Kegelspitze mit $S$, so sind die Dreiecke $SAB$ und $SA'B'$ ähnlich. Daraus folgt für den gesuchten Halbmesser der Wert

$$\frac{r}{h}m\varepsilon$$

Wobei $r$ den Halbmesser der Kegelgrundfläche und $h$ die Höhe des Kegels bezeichnet. Der einzelne Zylinder hat also den Inhalt

$$\left(\frac{r}{h}m\varepsilon\right)^2 \pi \cdot \varepsilon$$

Für $\varepsilon$ kann der Wert $h : n$ gesetzt werden, so dass der Zylinderinhalt sich

$$r^2 h\pi \frac{m^2}{n^3}$$

schreibt. Um den Inhalt des Kegels zu finden, hat man alle Zylinderinhalte zu addieren, in der vorherigen Formel also für $m$ nacheinander die Werte $1, 2, ..., n$ zu setzen und zu summieren. Das ergibt, wenn man den gemeinsamen Faktor ausklammert,

$$r^2 h\pi \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

Dieser Ausdruck lässt sich umformen. Man geht dazu von der Gleichung

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

aus, die für $n$ als gültig angenommen, leicht nachrechenbar auch noch für $n+1$, folglich ganz allgemein gilt. Daraus folgt sofort

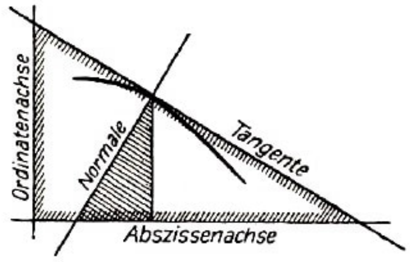
$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = \frac{1}{3} + \frac{}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Wenn nun die Scheiben, in die der Kegel geschnitten wurde, immer dünner werden, dann wächst ihre Anzahl $n$ über alle Maßen. In diesem Fall werden aber der zweite und der dritte Summand auf der rechten Seite der letzten Formel beliebig klein. Die rechte Seite strebt also dem Wert $\frac{1}{3}$ zu. Mit diesem Wert ist folglich $r^2 h\pi$ zu multiplizieren, was

$$\frac{1}{3} r^2 h\pi$$

als Wert des Kegelinhaltes liefert.

Die durchgeführte Betrachtung ergibt den richtigen Wert für den Inhalt des Kegels und vermeidet den Gebrauch von unendlich kleinen Größen. Diese leisteten aber seinerzeit unleugbar gute Dienste. Man gewöhnte sich damals rasch daran, Figuren als Zusammenfügung unendlich kleiner Größen zu betrachten. Eine krumme Linie dachte man sich beispielsweise als aus unendlich kleinen Strecken aufgebaut.




Die Richtung einer unendlich kleinen Strecke wird durch die Tangente der Kurve am betreffenden Ort gegeben. Diese Richtung - nicht die unendlich kleine Strecke selbst, wie es für gewöhnlich heißt - bildet dann mit den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatenkreuzes ein Dreieck, welches von Pascal und Leibniz als "charakteristisches Dreieck" bezeichnet wurde.

Bei diesem kommt es also gar nicht auf die Größe der Seiten an, sondern nur auf deren Verhältnis. Man kann folglich auch irgendein anderes, ihm ähnliches Dreieck als Vertreter des charakteristischen Dreiecks betrachten. Leibniz und Pascal entschieden sich für das in der Figur eingezeichnete: es besteht aus der Kurvennormale, der Abszissenachse und der Ordinate.

Die beiden Gelehrten zogen dies Dreieck immer wieder heran, um Aufgaben der neuen Mathematik zu lösen. Wir dürfen hier daran erinnern, dass die Grundaufgabe der Differentialrechnung lautet: Eine beliebige Kurve ist gegeben; man soll die Richtung der Tangente in jedem ihrer Punkte bestimmen. Diese Wendung war in einer Zeit, in der die zugrunde liegenden Begriffe noch nicht geklärt waren, als glücklich zu bezeichnen. Denn das charakteristische Dreieck besteht aus endlichen, mithin schon genau erklärten Größen.
Für Leibniz und seine Zeitgenossen war es ein psychologisches Bedürfnis, ihre Betrachtungen immer wieder bestätigt zu finden; eine Kontrolle war aber damals nur möglich, wenn man zu endlichen Größen gelangte.

Daran ändert die Erfindung eines neuen Kalküls auch nichts - das heißt die Aufstellung bestimmter Rechenregeln und einer neuen Bezeichnungsweise, die den besonderen Aufgaben der Differential- und Integralrechnung gerecht wurden.
Von den mathematischen Hauptproblemen haben wir schon gesprochen: Beim Differenzieren kommt es darauf an, die Tangente in jedem Punkt einer Kurve zu bestimmen. Die Integralrechnung lehrt, die Länge von Kurven und den Inhalt ebener oder räumlicher Gebilde zu berechnen. Für uns sind natürlich die physikalischen Anwendungen besonders wichtig.

Denken wir uns einen Körper, der eine bestimmte Bahn in bestimmter Zeit durchläuft. Die Differentialrechnung erlaubt uns dann, die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkt seiner Bahn zu bestimmen. Kennen wir umgekehrt die jeweilige Geschwindigkeit des Körpers, so lehrt uns die Integralrechnung, den ursprünglichen Bewegungsverlauf daraus zu berechnen. Differenzieren und Integrieren sind also in gewissem Sinn entgegengesetzte Operationen, so wie das Addieren und das Subtrahieren, das Multiplizieren und das Dividieren.

Es bildet das unvergängliche Verdienst von Leibniz, eine zweckmäßige Bezeichnungsweise eingeführt, einen neuen Kalkül ersonnen zu haben. Damit hat er die mathematische Leistung von Newton, der die Differential- und Integralrechnung selbständig entwickelt hat, bedeutend überboten. Leibniz führte für die Differentiale das Zeichen $d$, für die Integrale das Symbol $\int$ ein, das eine damals übliche Schreibweise von $s$, eine Abkürzung für "Summe" , war. Wir wissen es auf den Tag genau, wann dies geschah: am 29. Oktober 1675. An diesem Tage erfolgte der Durchbruch Leibniz' in die moderne Differential- und Integralrechnung. Die beiden Wahrzeichen der höheren Mathematik treten hier zum ersten Male in einem kurzen Satz friedlich nebeneinander auf.

Leibniz war sich im klaren über die Bedeutung seines Kalküls. Er schrieb: "Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, dass sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, sooft sie das innerste Wesen der Sache mit wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert. Von solcher Beschaffenheit sind aber die Bezeichnungen, die ich im Kalkül angewandt habe und durch die ich oft die schwierigsten Probleme auf wenigen Zeilen löse."

Um die Regeln zu gewinnen, die den neuen Kalkül bilden, benutzte man unendlich kleine Größen. Mit ihrer Hilfe umging man die strenge Erklärung der Grenzwerte, wie wir es schon von Kepler her wissen. Man stufte die unendlich kleinen Größen in solche von erster, zweiter, dritter, ... Ordnung ein. Höhere Ordnungen waren niedrigeren gegenüber zu vernachlässigen, Im Gegensatz zu allem bis dahin Bekannten! Man ist versucht, an das Hexeneinmaleins von Goethe zu denken:

Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmai-Eins.

Dies hat sich eine Unzahl mehr oder weniger geistreicher Auslegungen gefallen lassen müssen; fast noch schwerer aber war es, die unendlich kleinen Größen zu deuten, und erst die Untersuchungen von Cauchy haben die letzten Zweifel beheben können. Er pflückte vom Baum der Erkenntnis den Grenzbegriff und vertrieb uns damit aus dem Paradies unbekümmerten Rechnens.

Schon Newton machte vom neuen Kalkül, den er mit weniger glücklichem Formalismus betrieb als Leibniz, ausgiebigen Gebrauch, allerdings mehr für sich selbst. In seinem monumentalen Werk "Philosophiae naturalis principia mathematica", das im Jahre 1687 erschien, finden sich am Anfang Andeutungen, die Ergebnisse sind aber alle nach den früher üblichen Methoden abgeleitet. Sicherlich fand Newton die meisten unter ihnen mit Hilfe des neuen Kalküls, befürchtete aber Anfeindungen, wenn er zu einer neuartigen Darstellung gegriffen hätte.

Die Zeitgenossen wären dann gezwungen gewesen, sich nicht nur mit völlig neuen physikalischen Ideen vertraut zu machen, sondern außerdem mit ganz neuartigen mathematischen Begriffsbildungen. Die meisten unter ihnen hätte diese doppelte Belastung abgeschreckt. Da sie jedoch beamtete Forscher waren und folglich zu Neuerscheinungen Stellung nehmen mussten, wäre diese Stellungnahme zuungunsten Newtons ausgefallen.
Newtons eigene Worte lauten: "Man kann in diesen Dingen nicht umsichtig genug sein. Die Naturwissenschaft ist eine so abscheulich zanksüchtige Dame, dass man sich ebenso wenig mit ihr als mit einem prozesssüchtigen Rechtsanwalt einlassen sollte. Ich habe sie immer so gefunden, sooft ich mich mit ihr abgab. Deshalb bin ich jetzt so sehr auf der Hut." Mit dem Wort Naturwissenschaft waren wohl die Naturwissenschaftler gemeint.

In den darauffolgenden Jahrzehnten feierte der Kalkül höchste Triumphe im Behandeln physikalischer Fragen. Trotzdem kann nicht geleugnet werden, dass auch ohne ihn wichtigste Ergebnisse gewonnen werden können. Es kommt nun vor, dass ein Forscher allein für Physik begabt ist, ohne Sinn für Mathematik zu besitzen. Gelingt es ihm dann, Neues zu entdecken, ist er nur allzu leicht geneigt, die Mathematik für überflüssig und einen Ballast zu erklären.
Diese Einstellung verraten die Worte des bedeutenden Physikers Daniel Bernoulli, die er am 26. Januar 1760 an Euler, den damaligen Präsidenten der Preußischen Akademie für Wissenschaften, richtete:
"Ich vermeinte, man verlange physische Determinationen und nicht abstrakte integrationes. Es fängt sich ein verderblicher goût an einzuschleichen, durch welchen die wahren Wissenschaften mehr leiden, als sie avanciert werden, und es wäre oft besser für die realem physicam, wenn keine Mathematik auf der Welt wäre."

Klingt das nicht so, als ob es heutzutage gesagt werden wäre? In unserer Zeit wurde die Quantenmechanik aus ähnlichen Gründen angefeindet. Sie hat großartige, überraschende Ergebnisse aufzuweisen, was haben aber die Gegner an ihre Stelle zu setzen?

## 1.5 Die Bewegungslehre wird verbessert

Die klassische Mechanik bewährte sich über zwei Jahrhunderte hindurch glänzend und diente als Vorbild für die übrige Physik. Mit Recht! Denn sie erklärte alles, was damals beobachtet werden konnte, und ihre Schlüsse waren von unanfechtbarer Strenge. Wir hätten auch sagen können, von mathematischer Strenge, denn seit Euklid galt die Mathematik als unanfechtbar, ja sie wurde häufig für den Begriff "unanfechtbar"schlechthin gesetzt.

Um die Jahrhundertwende geriet dann der Glaube an die Allgemeingültigkeit der klassischen Mechanik ins Wanken. Es wurden Beobachtungen angestellt, die sich mit ihren Prinzipien nicht vertrugen. Sehr rasch bewegte Elektronen zeigten - wie schon erwähnt - ein Verhalten, welches nur dadurch erklärt werden konnte, dass ihre Masse bei der Bewegung zunahm. Diese Aussage erschöpft aber den vollen Tatbestand keineswegs, sondern muss näher untersucht werden. Die Massenzunahme könnte beispielsweise von der Beschleunigung der Elektronen abhängen. In Wirklichkeit hängt sie aber von der Geschwindigkeit ab.

Diese Abhängigkeit verhindert die Elektronen daran, eine ganz bestimmte, freilich sehr große "Grenzgeschwindigkeit" $c = 300000$ Kilometer in der Sekunde zu überschreiten.
Die klassische Mechanik kennt kein solches Verbot. In ihrem Rahmen ist jede noch so große Geschwindigkeit erlaubt, in der verbesserten Mechanik dagegen nicht, weil die Masse ins Unendliche wächst, wenn die Geschwindigkeit dem Wert $c$ zustrebt. Der Wert $c$ scheidet demnach die Geschwindigkeiten in mögliche und unmögliche: eine Bewegung schneller als $c$ ist unmöglich.

Mit Recht reden wir von einer verbesserten Mechanik. Denn mit ihr können wir nicht allein die neue Erfahrung an sehr schnellen Elektronen erklären, sondern auch andere Beobachtungen, von denen man bis vor kurzem nichts ahnte. Wir meinen eine Erscheinung am Himmel, der man nur mit den stärksten Fernrohren beikommen kann und die "Flucht der Spiralnebel" heißt; mitunter redet man auch vom sich ausdehnenden Weltall.
Spiralnebel bilden ähnliche Anhäufungen von Sternen wie unser Milchstraßensystem und verdanken ihren Namen ihrer Gestalt: sie bestehen aus einem Mittelstück, um das sich zwei Arme spiralförmig winden. Die einzelnen Spiralnebel sind unvorstellbar weit voneinander entfernt. Zwischen ihnen befindet sich "kosmischer Staub" , der die Sicht stört, zumindest das Licht schwächt.

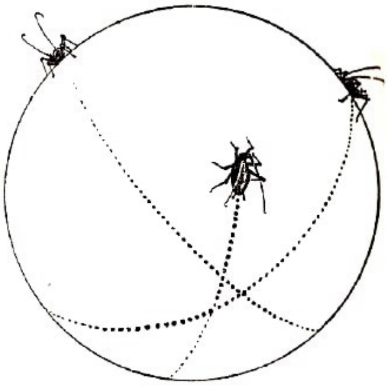
Bis in die jüngste Zeit haben die Beobachter diesen Umstand nicht berücksichtigt, und darum ist es heute noch etwas fraglich, wie weit unsere Ansichten vom Aufbau des Weltalls zutreffen. Zwischen den Sternen in ein und demselben Milchstraßensystem befindet sich ebenfalls fein verteilte Materie, ähnlich dem kosmischen Staub. Bemerkenswerterweise besitzen alle Sterne - alle Sonnen, wie wir auch sagen können - ungefähr die gleiche Masse, die zwischen $10^{33}$ und $10^{35}$ Gramm schwankt. Das sind Zahlen, die sich mit einer 1 und dahinter 33 beziehungsweise 35 Nullen schreiben. Unsere Sonne, um die wir mit der Erde kreisen, weist die Masse von rund $1,9 \cdot 10^{33}$ Gramm auf.

Diese Angaben mussten vorausgeschickt werden, um für das Folgende richtiges Verständnis zu gewinnen. In der letzten Zeit konnte eine höchst merkwürdige Beobachtung gemacht werden. Es zeigte sich, dass die Spiralnebel sich von uns fortzubewegen scheinen. Je weiter sie von uns entfernt sind, mit einer um so größeren Geschwindigkeit - die bei den entferntesten unter ihnen in die Zehntausende von Kilometer in der Sekunde geht - fliehen sie uns. Nun erscheint daran zweierlei unglaubwürdig.
Erstens, dass wir gerade im Mittelpunkt sein sollten, von dem aus diese Flucht stattfindet,

zweitens aber, dass Riesenmassen sich mit solchen Geschwindigkeiten bewegen.

Im Rahmen der klassischen Mechanik müssten wir uns mit beidem abfinden. Der erste Einwand könnte noch zur Not dadurch entkräftet werden, dass man annimmt, die Welt sei in der Vorzeit zerplatzt - ähnlich einer Granate, deren Sprengstücke sich um so weiter entfernt haben, je schneller sie waren. Wir Erdbewohner sitzen zufällig auf einem recht langsamen Sprengstück. Der zweite Einwand aber würde bedeuten, dass die schnellsten Sprengstücke Geschwindigkeiten mitbekommen haben, die schier unglaubwürdig erscheinen.

Die verbesserte Mechanik findet da einen Ausweg. Sie betrachtet zunächst das Weltall als einen Raum, der keine Grenzen besitzt und trotzdem endlich ist. Wenn dies auch Schwierigkeiten für unsere Anschauung bereitet, ist an dem Begriff selbst nichts auszusetzen. Die Mathematiker haben ihn viele Jahrzehnte vorher geprägt, und so kann der Verdacht nicht aufkommen, man hätte ein Begriffsungeheuer erfunden, nur um einer Schwierigkeit auszuweichen.



Das Versagen der Anschauung hört sofort auf, wenn man von Räumen zu Flächen übergeht. Flächen, in denen es keine Grenzen gibt und die trotzdem endlich sind, lassen sich leicht angeben. Die einfachste unter ihnen ist die Kugeloberfläche. Man braucht sich nur eine Blattlaus vorzustellen, die auf dieser Fläche lebt, und schon besitzt man ein Analogon zu unserem endlichen Weltraum. Die Blattlaus kann noch so lange herumkriechen, sie trifft nie an ein "Ende" ihrer Welt. Wenn sie aber immerzu "geradeaus" kriecht, gelangt sie schließlich zu ihrem Ausgangsort zurück.

Darin unterscheidet sich die Kugeloberfläche einschneidend von der Ebene, in der man, geradeaus gehend, sich vom Ausgangsort immer weiter entfernt. Auf der Kugeloberfläche hingegen entfernt man sich zunächst vom Ursprung der Reise, um sich ihm dann wieder zu nähern. Damit hören aber die Überraschungen für die Blattlaus noch nicht auf - vorausgesetzt, dass sie keine gewöhnliche Blattlaus ist, sondern ein Geometer, der durch eine Seelenwanderung zur Blattlaus wurde.


Wenn er - oder sie? - die Winkelsumme in einem Dreieck ausmisst, findet er einen Wert, der zwei rechte Winkel übertrifft. Man redet von einer nichteuklidischen Geometrie, weil in der euklidischen die Winkelsumme im Dreieck stets genau zwei Rechte ausmacht.

Denkt man sich die Kugeloberfläche als Kinderballon, auf den Sterne gemalt sind, dann entfernen sich diese voneinander immer mehr, wenn man den Kinderballon aufbläst, ohne sich in der Kugeloberfläche bewegt zu haben. Ein Blattlausprofessor würde das als "Flucht der Spiralnebel" erleben. Deren Geschwindigkeiten sind dann nur vorgetäuscht, und in Wirklichkeit ist für die scheinbare Flucht die Schnelligkeit verantwortlich, mit der sich der Kinderballon ausdehnt.

Die Geschichte der angeführten Gedanken bildet einen Indizienbeweis dafür, dass die neue Mechanik noch keineswegs abgeschlossen vorliegt, sondern immer weiter entwickelt wird. Es bleibt sehr aufschlussreich, diese Entwicklung zu verfolgen. Liest man von Missverständnissen, die den Pionieren der Differential- und Integralrechnung widerfahren sind, dann begnügt man sich meistens damit, missbilligend den Kopf zu schütteln. Das geht leicht. Denn der Kalkül ist längst durchforscht, keine Frage blieb unbeantwortet, keine Schwierigkeit ungelöst. Von der

Höhe heutigen Wissens kann man sich aber kein zutreffendes Bild von der damaligen Lage machen und darum auch kein gerechtes Urteil bilden.
Missverständnisse beginnen erst bei nicht restlos geklärten Schwierigkeiten, die es so lange gibt, bis eine Theorie abgeschlossen vorliegt. Das trifft für die neue Mechanik zu. Als ein Russe vor zwei Jahrzehnten die Idee eines sich ausdehnenden Weltalls zum erstenmal aussprach, wurde er kurzerhand abgelehnt. Man wies ihm einen unerheblichen Rechenfehler nach und beruhigte sich dabei.

Später sah man sich dann gezwungen, auf die Idee zurückzugreifen, um die Flucht der Spiralnebel zu erklären. Die wissenschaftlichen Zeitschriften waren daraufhin eine Zeitlang mit Abhandlungen überflutet, die sich alle mit diesem Problem beschäftigten. Man würde von Mode reden, wenn man nicht wüsste, dass es um den Wunsch nach wissenschaftlichem Ruhm ging.

Wir werden uns damit begnügen, die Anfangsgründe der verbesserten Mechanik auseinanderzusetzen. Zu ihr gibt es verschiedene Zugänge. Wir wählen einen mit möglichst wenig Rechnungen, die wir vorerst alle unterdrücken wollen, was ohne die Gefahr geschehen kann, entscheidende Gedanken zu übergehen.
Im wesentlichen bilden zwei Annahmen das Fundament, auf dem die neue Mechanik errichtet werden kann. Die erste Annahme schreibt der Energie Masse zu. Dieser Gedanke lässt sich in die neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts zurückverfolgen. Es wird angenommen, dass die Masse der Energie proportional ist, der Proportionalitätsfaktor selber aber wird vorerst offengelassen. Aus dieser Annahme folgt bereits, dass die Masse von der Geschwindigkeit abhängt, und auch die Gestalt dieser Abhängigkeit.

Eine zweite Annahme fordert eine ausgezeichnete Geschwindigkeit $c$: Gab es früher eine Schar von Beobachtern, auf die sich die ursprünglichen Aussagen der Mechanik bezogen haben, die Beobachter in den sogenannten "Inertialsystemen" , dann wird jetzt verlangt, dass alle diese Beobachter für $c$ denselben Wert finden. Mit der klassischen Mechanik lässt sich diese Forderung nicht vereinigen. Gegeneinander bewegte Beobachter würden darin lauter verschiedene Werte messen. Diese zweite Forderung bringt es mit sich, für den Proportionalitätsfaktor zwischen Energie und Masse den Wert $c^2$ zu setzen.

Es bleibt nur übrig, den Wert von $c$ zu bestimmen. Er beträgt, wie schon gesagt, rund 300000 Kilometer in der Sekunde. Dies führt zu bemerkenswerten Folgen. Wenn man in der Lage wäre, die Materie in Energie zu verwandeln, dann genügte die Masse eines einzelnen Briketts, um ein Riesenschiff wie die "Europa" in einem Tempo quer über den Atlantik zu lagen, mit dem es sich in einer nie erträumten Rekordzeit das Blaue Band des Ozeans holen würde. Man befindet sich aber leider nicht in dieser Lage, wenn auch die jüngsten Erfolge der Physik des Atomkerns in dieser Hinsicht gewisse Aussichten eröffnen.

Die klassische und die neue Mechanik sind sich darin einig, dass das Naturgeschehen sich in den Inertialsystemen nach denselben Naturgesetzen abspielt. Nicht zu verwechseln damit sind die Messergebnisse der Beobachter, die voneinander verschieden ausfallen. Das ist nicht weiter überraschend. Wenn ich aus einem fahrenden Zug ein Flugzeug beobachte, welches den Zug überholt, dann finde ich für dessen Geschwindigkeit einen anderen Wert als der Bahnwärter; der beobachtete Unterschied ist in der klassischen Mechanik ganz "natürlich" gleich der Zuggeschwindigkeit.

Freilich würde die klassische Mechanik mit aller Entschiedenheit bestreiten, dass der Bahnwärter und ich für die Länge des Speisewagens einen anderen Wert messen könnten. Gerade das

behauptet die neue Mechanik! Sie geht noch weiter und behauptet Ähnliches von der Zeit. Nach ihr beziehen sich Raum- und Zeitangaben immer auf einen ganz bestimmten Beobachter, und es hat gar keinen Sinn, von "Länge" und "Dauer" zu reden, ohne hinzuzufügen, wer sie erlebt. Darum heißt die neue Mechanik Relativitätstheorie.
Diese Bezogenheit von Raum- und Zeitangaben auf den Beobachter folgt bereits aus den beiden angeführten Annahmen. So paradox sie erscheinen mag, ist sie einwandfrei durchführbar. Das erweisen die wenigen mathematischen Formeln, in die sich der ganze Sachverhalt kleiden lässt. Sie sind elementaren Charakters und darum für den, der im Handhaben von solchen Formeln geübt ist, durchsichtiger als ihre Einkleidung in Worte.

Formeln bilden eine Kunstsprache, die aus unvergleichlich weniger "Worten" besteht als die Kultursprachen und deren "Grammatik" keine Ausnahmen duldet. Es wäre aufschlussreich, dem Grund nachzugehen, warum trotzdem allgemein eine gewisse Scheu vor mathematischen Formeln herrscht. Sollten das Schulerinnerungen sein?

Das allein reicht zum Erklären kaum bin, denn andere Schulfächer wie Geschichte wirken keineswegs abschreckend nach. Es scheint mehr an einem Mangel an Abstraktionsfähigkeit zu liegen, der durch Üben zu beheben wäre. Kein Meister fällt vom Himmel - das gilt auch hier. Das Klavierspielen wird unermüdlich geübt - warum eigentlich nicht die Mathematik? Sie ist nicht minder reizvoll, wenn man sie beherrscht!

Wir wollen uns nicht abschrecken lassen und geben die grundlegenden Formeln an. Den Schlüssel zur Relativitätstheorie bildet ein Wert, den die Quadratwurzel aus dem Ausdruck

$$1 - \frac{v^2}{c^2}$$

darstellt, worin $v$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit dem ein Inertialsystem, das beobachtet werden soll, am Beobachter vorbeizieht. Diesen Wert bezeichnen wir mit einem einzigen Buchstaben, dem griechischen $\beta$. Ein paar Zwischenrechnungen schenken wir uns und führen nur die Ergebnisse an, die aus unseren bisherigen Ansätzen folgen. Zunächst erscheinen in der neuen Mechanik die Längen der Körper verkürzt:
Ruht ein Stab von der Länge $L$ im vorbeiziehenden Inertialsystem, dann erscheint er unserem Beobachter um den Faktor $\beta$ verkürzt, mithin von der scheinbaren Länge $\beta L$. Damit also ein Körper scheinbar auf die Hälfte zusammenschrumpft, muss er mit einer Geschwindigkeit von rund 257000 Kilometer in der Sekunde an uns vorbeisausen, denn dann nimmt $\beta$ gerade den Wert $\frac{1}{2}$ an. Unter diesen Umständen würde ein Fußball als Diskus und die beleibtesten Bierbrüder würden plattgedrückt erscheinen, denn alles schrumpft nur in der Bewegungsrichtung scheinbar zusammen. Sie selber würden von der vorgetäuschten Entfettungskur freilich nichts merken und ihr Bier unbekümmert weitertrinken.

Zeitspannen dagegen dehnen sich scheinbar aus: Ruht eine Uhr im vorbeiziehenden Inertialsystem und gibt sie für die Dauer eines Geschehens $T$ Sekunden an, dann erscheint diese Zeitangabe unserem Beobachter um den Divisor $\beta$ verlängert, mithin von der scheinbaren Dauer $T : \beta$.
Man darf nicht vergessen, dass $\beta$ nur dann den Wert 1 besitzt, wenn $v$ verschwindet, sonst aber stets kleiner als 1 ausfällt. Der reziproke Wert von $\beta$, eben $1 : \beta$, ist daher größer als 1, mithin $T : \beta$ größer als $T$. Unser Beobachter erlebt darum alles, was in dem Inertialsystem vor sich geht, welches an ihm vorbeizieht, sozusagen durch die Zeitlupe.

Allerdings würde ein zweiter Beobachter aus dem vorbeiziehenden Inertialsystem die Handlungen unseres Beobachters genau so verlangsamt erleben. Das klingt paradox, ist aber vollkommen in Ordnung. Denn keines der Inertialsysteme ist vor den anderen ausgezeichnet.

Lebte Dante heute, könnte er von den dadurch gebotenen Möglichkeiten für seine Hölle teuflichen Gebrauch machen. Er würde einen Eifersüchtigen damit strafen, dass er ihn einem Liebeswerben zusehen lässt, das an ihm vorbeisaust und dessen Dauer er mit einer Million Jahren erlebt. Freilich gehörte dazu eine Reisegeschwindigkeit, die nahezu bei $c$ liegt, einem Dichter ist aber nichts, also auch dies nicht, unmöglich.

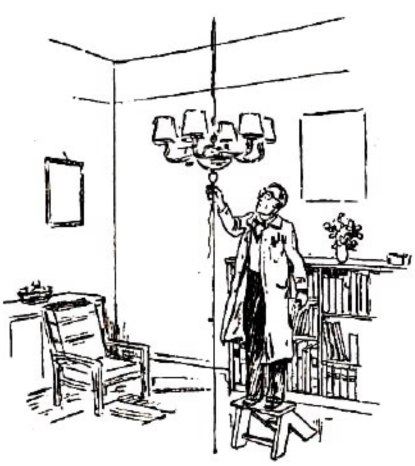
Bewegte Massen scheinen zuzunehmen.
Eine Masse $m$, die sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v$ bewegt, erscheint ähnlich der Zeit um den Divisor $\beta$ vergrößert, besitzt mithin die scheinbare Größe $m : \beta$. Man bezeichnet den Wert der Masse für verschwindendes $v$ - das heißt für die Geschwindigkeit Null - als "Ruhmasse" und erkennt, dass dieser Wert ein Minimum darstellt, weil für alle nichtverschwindenden $v$ der Faktor $1 : \beta$ größer als 1 ausfällt.

Damit befinden wir uns in der Lage, das Analogon zum zweiten Bewegungsgesetz in der neuen Mechanik anzugeben. Wir hatten es zunächst in der Form $\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{b}$ kennengelernt. Nun lässt sich die rechte Seite auch anders schreiben.
Man bildet zunächst das Produkt Masse mal Geschwindigkeit. Diese Größe spielt auch in der alten Mechanik eine wesentliche Rolle. Sie wird als Impuls bezeichnet und stellt so etwas wie die "Stoßkraft" des mit der fraglichen Geschwindigkeit bewegten Körpers dar - ohne dass wir diesen anschaulichen Vergleich hier allzu wörtlich nehmen wollen. Nun wissen wir, dass die Beschleunigung die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit bedeutet. Die Masse ist in der alten Mechanik konstant.
Folglich können wir das Produkt $m \cdot \mathfrak{b}$ auch als zeitliche Änderung des Impulses betrachten und das zweite Bewegungsgesetz in der neuen Form aussprechen: Die Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses.

An dieser Definition halten wir in der neuen Mechanik fest: auch in ihrem Gedankengebäude wird die Kraft als zeitliche Änderung des Impulses erklärt. Zunächst scheint damit nichts geändert. Es ist aber zu bedenken, dass in der neuen Mechanik die Masse nicht mehr konstant bleibt. Deshalb ergibt die Ausrechnung für die Kraft nicht einfach das Produkt aus Masse mal Beschleunigung, sondern einen etwas komplizierteren Wert. Es folgt daraus, dass Kraft und Beschleunigung verschiedene Richtungen besitzen, im Gegensatz zur klassischen Mechanik, wo diese beiden Richtungen notwendigerweise zusammenfallen.

Wenn auch Dauer und Länge die Größen sind, an die man zuerst denkt, wenn von Mechanik die Rede ist, so bilden sie doch nicht die letzten Elemente. Der Physiker muss ja, wie wir schon gesehen haben, seinen Aussagen ein bestimmtes Koordinatensystem - ein Inertialsystem - zugrunde legen, wenn er zu mathematischer Präzision durchstoßen will. Er bestimmt jeden Punkt im Raume durch die Angabe seiner drei Koordinaten $x$, $y$, $z$; ferner gibt er den Zeitpunkt

$t$ an, in dem er den Punkt betrachten will. Alle vier Größen, die drei Raumkoordinaten $x$, $y$, $z$ und die eine Zeitkoordinate $t$, fasst er unter dem Namen "Ereignis" zusammen. Es soll soviel besagen, dass etwas an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit geschieht. Ort und Zeit beziehen sich auf ein bestimmtes Inertialsystem.



Was der Physiker wahrnimmt, was er messen kann, besteht aus der Feststellung, ob zwei Ereignisse räumlich oder zeitlich zusammenfallen. Fallen sie räumlich zusammen, dann bleibt die Zeitdauer zu bestimmen, um die sie auseinander liegen. Fallen sie zeitlich zusammen - das heißt spielen sie sich zum gleichen Zeitpunkt ab -, dann ist ihre Entfernung zu ermitteln.
Wann sie zeitlich zusammenfallen, wenn sie räumlich auseinander liegen, bedarf einer eingehenden Erörterung. Zwei beliebige Ereignisse lassen sich miteinander vergleichen, indem ein drittes herangezogen wird, das mit dem einen räumlich, mit dem anderen zeitlich zusammenfällt.

Dieses Zusammenfallen, sei es räumlich, sei es zeitlich, heißt Koinzidenz, wie denn überhaupt mit Vorliebe lateinische Kunstworte angewendet werden; so bezeichnet man das scheinbare Zusammenschrumpfen von Längen als Kontraktion, die scheinbare Verlängerung von Zeitspannen als Dilatation.

Das Grundproblem der Relativitätstheorie, genauer der speziellen Relativitätstheorie, lautet: Wie hängen die Bestimmungsstücke eines Ereignisses miteinander zusammen, wenn es aus zwei verschiedenen Inertialsystemen beobachtet wurde?
Diese Größen in einem der Inertialsysteme seien wie bisher mit $x$, $y$, $z$ und $t$ bezeichnet; die entsprechenden Größen im anderen Inertialsystem nennen wir $x'$, $y'$, $z'$, $t'$. Aus den anfangs näher angegebenen beiden Annahmen folgt dann zwischen gestrichenen und ungestrichenen Größen der Zusammenhang

$$\beta x' = x - vt \qquad ; \qquad \beta t' = t - \frac{v}{c^2}x$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass die Bewegung parallel zur x-Achse vor sich geht. Darum fallen $y$ und $y'$, ferner $z$ und $z'$ miteinander zusammen, es ist $y = y'$, $z = z'$. Man nennt diese Formeln ihrem mathematischen Aufbau gemäß "lineare Transformationen" und bezeichnet sie gewöhnlich nach dem um ihre Herleitung verdienten holländischen Physiker Lorentz-Transformationen.
Es seien noch zum Vergleich die Formeln vermerkt, die in der klassischen Mechanik den Übergang von einem System zum anderen vermitteln:

$$x' = x - vt$$

Die übrigen Größen fallen miteinander zusammen, also $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$. Die Formeln heißen Galilei-Transformationen. Sie sind offenbar erheblich einfacher gebaut.

Einen Mathematiker schrecken die Transformationsformeln von Lorentz in keiner Weise ab. Im Gegenteil! Sein Herz schlägt höher, denn er sieht jetzt seinen Weizen blühen, viel mehr noch als bei den Galilei-Transformationen. Und tatsächlich hat es ein Mathematiker zuwege gebracht, der speziellen Relativitätstheorie die angemessene Gestalt zu verleihen. Alles, was sie lehrt, lässt sich dann in wenige und durchsichtige Formeln kleiden. Diese spielen zunächst in einer vierdimensionalen "Welt" , der aber das wirkliche Geschehen leicht so zu entnehmen ist, wie es sich vor unseren Sinnen abspielt.

Die Struktur dieser Überwelt weicht von der üblichen euklidischen Geometrie ab. Noch im achtzehnten Jahrhundert wäre das undenkbar gewesen, denn man kannte damals nur eine einzige Geometrie, die des Euklid. Was Wunder, wenn man annahm, sie gelte in unserer Sinneswelt unbeschränkt. Das Eigenartige dabei bleibt, dass man schon längst eine Geometrie der Kugeloberfläche besaß, ohne auf den Gedanken zu kommen, dass sie als nichteuklidische Geometrie angesehen werden könnte.
Und dies, obgleich schon der erste Kommentator des Euklid, Proclus, um 450 herum Zweifel äußerte, die immer wieder laut wurden und als Versuche anzusehen sind, die Berechtigung von abweichenden Geometrien zu erforschen.

Ist man einmal im Besitz der Einsicht, dass es verschiedene Geometrien gibt, so erhebt sich von selbst die Frage, welche unter ihnen in unserer Welt gilt. Sie ist keine rein mathematische Frage, denn es geht dabei um das geometrische Verhalten von physikalischen Dingen. Um dieser Frage näher zu treten, hat man sich an die Erfahrung zu wenden.
Das versuchte bereits Gauß, der ein Dreieck ausgemessen hat, dessen Seiten Lichtstrahlen bildeten und dessen Spitzen drei Berggipfel waren. Ihn interessierte die Winkelsumme in diesem Dreieck. Sollte sie sich von zwei Rechten verschieden zeigen, dann war damit offenkundig, dass der Raum unserer Sinne keine euklidische Struktur besitzt. Kaum nötig, zu sagen, dass Gauß mit der denkbar größten Sorgfalt gemessen hat. Wie sorgfältig man aber auch misst, immer ist das Ergebnis mit einem unvermeidlichen Messfehler behaftet.

Darunter ist folgendes zu verstehen: Messe ich etwa die Länge einer Strecke wiederholt hintereinander, dann fallen die Messwerte voneinander verschieden aus. Der neue Stift, der seinen Chef mit zehn verschiedenen Werten einer Addition überrascht hat, die er vorsichtshalber zehnmal hintereinander vorgenommen hat, ist im Unrecht, der Physiker dagegen, der mit zehn voneinander verschiedenen Messwerten ein und derselben Länge aufwartet, befindet sich vollauf im Recht. Welche Länge die Strecke wirklich besitzt, bleibt uns für alle Zeiten verschlossen. Den Messungen lässt sich allein ein wahrscheinlichster Wert entnehmen. Die Atomphysik geht allerdings noch radikaler vor und leugnet grundsätzlich die Berechtigung der ganzen Fragestellung: sie behauptet, dass eine Strecke zugleich verschieden lang ist!
Darin liegt gar kein Widerspruch, wie wir es noch erkennen werden. Vorerst kümmern wir uns um die Makrophysik weiter. Wir erhalten hier aus den Messungen einen wahrscheinlichsten

Wert und ferner eine ergänzende Angabe darüber, wie weit der wirkliche Wert von dem gemessenen wahrscheinlichsten Wert voraussichtlich abweicht.

Diese Angabe heißt der Messfehler, und es bildet den Ehrgeiz des Physikers, ihn möglichst weit herunterzudrücken. Dabei weiß er, dass ihm das nie vollständig gelingen wird. Der Messfehler bei Gauß war nun so ausgefallen, dass für die Winkelsumme sowohl der euklidische Wert möglich blieb wie auch ein davon etwas abweichender; die Größe der Abweichung wird durch den Messfehler eingeengt. Man muss also in diesem Fall von einem negativen Ausfall des Experimentes reden. Trotzdem blieb es nicht ganz ergebnislos, denn es zeigt, dass unser Raum nur wenig von der euklidischen Struktur abweichen kann. Die weitere Entwicklung der neuen Mechanik in Gestalt der allgemeinen Relativitätstheorie bestätigt das.

Man erinnere sich, wie verschieden die Geometrie auf der Kugeloberfläche von der auf der Ebene ausfiel. Die Großkreise spielen bei ihr eine ähnliche Rolle wie die uns allen wohlvertrauten Geraden in der Ebene. Sie können geradezu als "Geraden" auf der Kugeloberfläche gelten. Freilich sind sie gekrümmt, aber gerade auf diese Krümmung kommt es an.
Der Physiker führt nämlich alles Geschehen auf Bewegungen zurück. Sein Grundproblem bildet es, zu erforschen, wie sich materielle Punkte unter dem Einfluss von Kräften bewegen. Den Kräften fällt die Rolle zu, den materiellen Punkt zu führen, und es kommt letzten Endes nur auf den zeitlichen Verlauf der Bewegung an. Gelingt es also, eine Geometrie ausfindig zu machen, deren "Geraden" gerade die von den materiellen Punkten tatsächlich zurückgelegten Wege bilden, dann ist das Ziel des Relativitätstheoretikers erreicht.

Von Kräften noch zu reden wird überflüssig: sie sind in die Geometrie eingegangen. Bei der Schwerkraft wurde dieses Ziel bereits erreicht. Dagegen steht die Erfüllung des Wunsches, auch die Elektrizität und den Magnetismus zu "geometrisieren" , trotz wiederholter Versuche noch aus. Bei jedem neuen Versuch hieß es, die früheren wären damit hinfällig, bald danach zeigte es sich aber, dass auch der neue nicht anders zu werten war.
Die Relativitätstheorie ist tot, es lebe die Relativitätstheorie.
So könnte man in Anlehnung an ein französisches Wort sagen. Heute steht es aber fest, dass die Relativitätstheorie, auch wenn es ihr gelingt, ihr Programm zu verwirklichen, für die Welt des Atoms nicht ausreicht.

## 1.6 Das Licht findet heim

**in die Elektrizitätslehre**

In der verbesserten Mechanik gibt es eine Größe, die eine Sonderstellung einnimmt. Wir bezeichneten sie mit $c$ und stellten fest, dass sie in sämtliche Formeln eingeht. Deshalb heißt sie fundamentale Konstante. Ihr Wert beträgt 300000 Kilometer in der Sekunde. Genau so groß ist bemerkenswerterweise die Geschwindigkeit des Lichts!
Diese Übereinstimmung ist kein Zufall. Um das zu erkennen, müssen wir uns zunächst mit dem Licht eingehender befassen, vorher aber die Tatsache, dass es sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, einer Pythia nicht unwürdig, in die Worte kleiden: Was wir sehen, in Vergangenheit, während die Gegenwart unsere Zukunft bildet.

Das Auge spricht auf Lichtreize an, die übrigen Sinne dagegen nicht. Damit stellt sich das Licht zunächst als besondere Sinnesqualität dar. Sich mit dieser Erklärung begnügen hieße freilich einen allzu menschlichen Standpunkt einnehmen, der den Menschen als Maß aller Dinge zu sehr in den Vordergrund rückt. Es ist zu begreifen, wenn die Wissenschaft ursprünglich selbst so vorgegangen ist und zunächst die Optik als selbständigen Wissenszweig entwickelt hat. Mit wachsenden Kenntnissen ergab es sich aber, dass die Optik nur einen Ausschnitt aus der Elektrizitätslehre bildet.

Das erkannte zuerst der Theoretiker Maxwell im vorigen Jahrhundert; die Versuche von Hertz bekräftigen seine Erkenntnisse. Seitdem bildet die Optik einen Abschnitt in der Elektrizitätslehre. Die Auffassung von Maxwell führte dazu, scheinbar völlig verschiedene Erscheinungen als gleichartig zu erkennen, zu durchschauen, dass sie denselben physikalischen Gesetzen gehorchen. So zeigte sich, dass Licht und strahlende Wärme wesensverwandt sind, wie verschieden sie auch unseren Sinnen vorkommen mögen. Das antropomorphe Weltbild wurde wieder einmal überholt.

Licht bildet eine Wellenbewegung im Ozean elektrische: Felder. Die Vorstellung, dass Licht eine Wellenbewegung ist, geht auf den hochverdienten holländischen Physiker Huygens zurück, der freilich als Träger der Schwingungen, aus denen die Wellenbewegung besteht, sich keineswegs elektrische Felder vorstellte, die damals noch gar nicht bekannt waren, sondern ein besonderes Medium, den Lichtäther. Er ist ein Stoß, der alles durchdringt, so dachte es sich Huygens, der unwägbar bleibt und sich - abgesehen von der Erschütterung durch die Lichtwellen - in ewiger Ruhe befindet.
Offensichtlich ist diese Vorstellung dem Verhalten von Wasserwellen in einem stillen Teich nachgebildet. Dieser Vergleich wird auch noch mit Nutzen herangezogen, um Wellenbewegungen aller Art zu veranschaulichen. Man darf aber nie vergessen, dass es sich bloß um ein Bild handelt.
Es wäre verkehrt, beim Anblick eines Ölgemäldes darauf schließen zu wollen, dass die dargestellte Tänzerin auch in Wirklichkeit aus Ölfarbe besteht - wenn sie auch zweifellos Farben auflegt. Ebenso verkehrt wäre es, für das Licht ein wirkliches, stoffliches Medium anzunehmen, welches schwingt, nur weil bei den Wasserwellen das schwingende Medium Wasser stoffliche Natur besitzt.

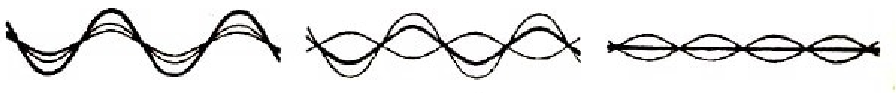
Beginnen wir mit dem, was wir als Kind selbst oft genug gemacht haben, mit einem Steinwurf in stehendes Wasser. Um die Stelle herum, wo der Stein ins Wasser fiel, geht kreisförmig eine Erregung der Wasseroberfläche aus. Jedes davon betroffene Wasserteilchen schwingt auf und ab. Zwischen den einzelnen Schwingungen besteht ein Zusammenhang, den unser Auge als Wellenbewegung zusammenfasst. Damit gleichbedeutend ist das Verhalten irgendeines herausgegriffenen Wasserteilchens. Die Weite seiner Schwingungen ändert sich mit der Zeit. Sie erreicht einen größten Wert, um dann bis zu Null abzunehmen.

Daraufhin nimmt sie in genau entgegengesetzter Richtung wieder zu, bis sie den vorherigen größten Wert erreicht, und wenn es keine Reibung gäbe, würde sich das in alle Ewigkeit so fortsetzen. Diese größten Werte bezeichnet man als Schwingungsweite oder Amplitude der Welle, die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde als Schwingungszahl oder Frequenz $\nu$.

Der Abstand zwischen zwei Wellenbergen wird als Wellenlänge $\lambda$ bezeichnet, die Schnelligkeit, mit der die Erregung sich über die Wasseroberfläche ausbreitet, als Fortpflanzungsgeschwindigkeit $u$ der Welle. Sie ist gleich dem Produkt aus Schwingungszahl und Wellenlänge, $u = \nu \cot \lambda$.
Beim Licht verwendet man für die Geschwindigkeit stets den Buchstaben $c$. Es ist außerdem üblich, den reziproken Wert der Wellenlänge als Wellenzahl $k$ zu bezeichnen, also $1 : \lambda = k$ zu setzen.

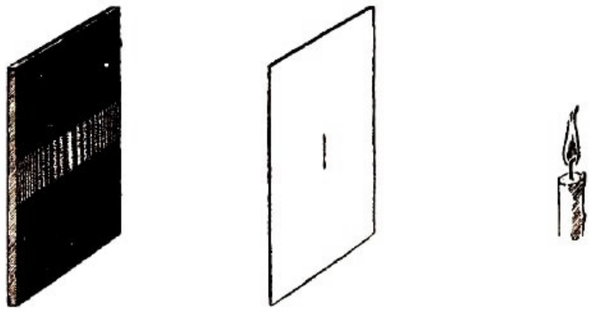
Wir wissen, wie sich zwei Bewegungen ganz allgemein zu einer neuen Bewegung zusammensetzen. Bei zwei Wellen ist es üblich, in diesem Fall von Interferenz zu reden. Man kann diese Erscheinung gut beobachten, wenn zwei Steine gleichzeitig ins Wasser fallen. Die beiden sich kreisförmig ausbreitenden Wellen durchdringen einander nach einiger Zeit, wobei sie sich an gewissen Stellen verstärken, an anderen ganz oder teilweise aufheben. Das wird aus der Zusammensetzung der beiden Ausschläge, die ein und dasselbe Wasserteilchen von den beiden Wellen empfängt, sofort verständlich. Erfolgen die beiden Ausschläge im gleichen Sinn, dann summieren sie sich, was sich im verstärkten Ausschwingen des Teilchens zeigt, wenn sie dagegen im entgegengesetzten Sinne stattfinden sollten, dann behält der stärkere Ausschlag die Oberhand, erfährt jedoch eine Abnahme, die dem schwächeren Ausschlag gleichzusetzen ist.
Zwei Wellen können sich auf diese Weise vollkommen auslöschen. Überträgt man die gewonnene Einsicht auf Lichtwellen, dann gelangt man zu der paradoxen Formulierung, dass Licht, zu Licht hinzugefügt, mitunter Dunkel ergibt; freilich lässt sich hier die Interferenz nur beobachten, wenn beide Lichtstrahlen aus derselben Lichtquelle stammen

Den Unerfahrenen berührt es befremdend, zu erfahren, wie der Physiker das, was das Auge sieht, zerpflückt: wenn es beispielsweise plötzlich heißt, das Sonnenlicht bestehe aus einem Gemisch von farbigen Lichtarten. Denn es erscheint uns doch weiß, und man findet sich nur schwer damit ab, das unmittelbare Erlebnis gegen eine gekünstelt erscheinende Erklärung einzutauschen.
Kein Geringerer als Goethe hat Zeit seines Lebens dagegen angekämpft. Tatsachen führen aber eine harte Sprache, und es bleibt nichts anderes übrig, als sich ihnen zu fügen. Man muss sich damit abfinden, dass nicht Sinneswahrnehmungen die Bausteine bilden, aus denen der stolze Bau der Physik entstand, sondern dass sie zusammengesetzter Natur sind. Das Weiß des Sonnenlichts ist vorgetäuscht; es entsteht aus dem Zusammenspiel von Farben, welche Wellen darstellen, die ihrerseits wiederum eine bestimmte Erregung von elektrischen Feldern bilden. Welches die letzten Elemente sind, bildet eine mäßige Frage, die von jedem Jahrhundert erneut beantwortet werden muss.



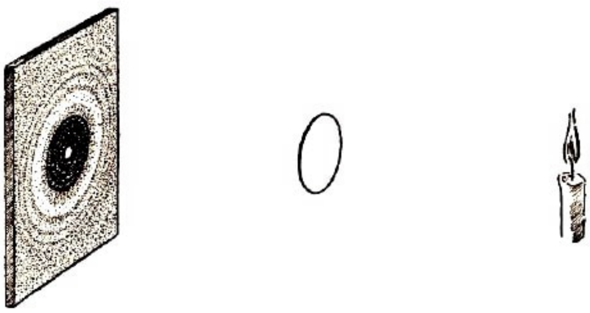
Die einzelnen Lichtarten, aus denen der Sonnenschein besteht, sind durch ihre Wellenlänge gekennzeichnet. Je nach dem Wert von $\lambda$ erscheint uns die Lichtwelle als Rot, Grün, Blau oder in einer anderen der unendlich vielen Spektralfarben. Alle diese Werte von $\lambda$, die uns als sichtbares Licht erscheinen, liegen in einem schmalen Bereich in der Nähe von $10^{-4}$ Zentimeter, das ist der zehntausendste Teil eines Zentimeters. Werte von $\lambda$, die größer oder kleiner ausfallen, sehen wir nicht. Sie üben aber physikalische, chemische oder physiologische Wirkungen aus - jeder kennt das von der Ultraviolettstrahlung der Höhensonne her.
Man unterscheidet üblicherweise einzelne Wellenlängenbereiche, wie die kurzwelligen Röntgenstrahlen oder die langwelligen Wärmestrahlen. Letzte empfindet man unmittelbar als Wärme, während die Röntgenstrahlen undurchsichtige Gegenstände durchleuchten, wie das ja aus der medizinischen Praxis hinlänglich bekannt ist.

Jede Wellenbewegung genügt einer bestimmten Bedingung, die der Mathematiker als Wellengleichung bezeichnet. Aus dieser kann eine wichtige Folgerung gezogen werden. Allein der Umstand, dass die Wellen der mathematischen Wellengleichung genügen, erlaubt es, die Schwingung an irgendeinem Ort zu berechnen, wenn sie überall auf einer Oberfläche bekannt ist, die diesen Ort umschließt. Dies leistet eine von Kirchhoff aufgestellte Formel.



Beugungsbild eines schmalen Spalts

Die Kirchhoffsche Formel ermöglicht es, das Verhalten des Lichts zu bestimmen, wenn es eine Öffnung passiert. Aus Erfahrung weiß man, dass nichts Außergewöhnliches zu beobachten ist, wenn diese Öffnung groß ausfällt.



Beugungsbild einer runden Scheibe

Ganz anders aber, wenn sie sehr klein ist. Dann entsteht mitunter Licht dort, wo man Schatten erwarten würde, und Schatten dort, wo man Licht erwarten sollte.

Ähnlich geht es zu, wenn ein kleiner Schirm in den Weg des Lichts gebracht wird. Unter Umständen entsteht in der Mitte hinter diesem ein heller Fleck. Sowohl bei kleinen Öffnungen als auch bei Schirmen geht also Licht sozusagen um die Ecke. Der Physiker redet von Beugung. Dies merkwürdige Verhalten des Lichts wurde zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts von dem jungen französischen Physiker Fresnel einwandfrei experimentell erwiesen. Fresnel entschied damit endgültig einen Streit zwischen Huygens und Newton zugunsten des erstgenannten. Freilich erlebten das beide nicht mehr.

Die Beugung kann als Interferenz von Lichtwellen betrachtet werden. Dazu muss man zunächst auf eine Auffassung von Huygens zurückgreifen. Er stellte sich die Ausbreitung des Lichts so vor, dass von jedem Punkt aus, den die Lichtwelle erreicht hat, eine neue Lichtwelle ausgeht, die sogenannte Sekundärwelle. Und nun kam Fresnel und fügte hinzu, dass diese Sekundärwellen das beobachtete Licht dadurch hervorrufen, dass sie an dem Beobachtungsort miteinander interferieren. Auf Grund dieser Auffassung hat man sich die Beugung durch eine kleine Öffnung so vorzustellen, dass von dieser Sekundärwellen ausgehen, deren Interferenz dann am Beobachtungsort Licht oder Schatten hervorruft.

Das Licht bildet, wie schon berichtet, eine besondere Erregung elektrischer Felder, und damit gliedert sich die Lehre vom Licht, die Optik, in die Theorie des Elektromagnetismus ein. Dieser Ansicht stand zwei Jahrhunderte hindurch eine andere Auffassung gegenüber, die das Licht als einen Strom kleinster Teilchen betrachtete. Diese Auffassung geht auf Newton zurück, der mit ihrer Hilfe viele optische Erscheinungen erklären konnte.
Wie wenig angebracht ein Autoritätskult in der Wissenschaft ist, erkennt man gerade an diesem Fall recht deutlich. Denn die Autorität von Newton trägt die Schuld daran, dass die fast gleichzeitig damit entstandenen Ansichten von Huygens, der das Licht als Wellenbewegung auffasste, so lange nicht beachtet wurden. Macht man sich Gedanken darüber, wieso es zu einem solchen Autoritätskult kommen mag, dann scheint dieser sich immer aus Unzulänglichkeiten zu nähren. Entweder weist die Darstellung des Meisters Unklarheiten auf, alle als letzte Weisheit galten, oder die Schuld liegt bei den Zeitgenossen, die er zu sehr überholt hat. Für den ersten Fall diene Aristoteles als Beispiel, für den zweiten aber Archimedes.

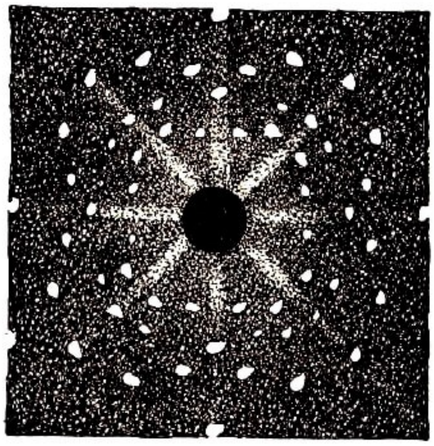
Um die Beschaffenheit des Lichts zu erforschen, verwendet man optische Gitter, die ein schönes Beispiel für die bisher nur in großen Zügen angeführte Interferenz geben. Ein Gitter entsteht zum Beispiel, wenn in eine spiegelnde Fläche aus Glas oder Metall in gleichen Abständen Striche eingeritzt werden. Viele Hunderte, ja Tausende von Strichen müssen auf einen Zentimeter gehen, und es ist eine hohe Kunst, sie richtig und gleichmäßig einzuritzen.
Der Amerikaner Rowland steht auf diesem Gebiet unübertroffen da. Insbesondere hat er während seines Studienaufenthaltes in Deutschland zu Ende des vorigen Jahrhunderts einige hervorragende Gitter hergestellt, die noch heute als Kleinodien gehütet werden.

Fällt das Licht von einer sehr entfernten Lichtquelle senkrecht auf das Gitter - wir setzen einfarbiges Licht von der einheitlichen Wellenlänge $\lambda$ voraus - und fängt man dieses Licht hinterher auf einem Schirm auf, dann reihen sich an eine mittlere helle Linie symmetrisch nach rechts und links mehrere ebenfalls helle Linien. Sie alle entstehen durch Interferenz, indem sich das Licht in den Linien verstärkt, während es sich in den dunklen Zwischenräumen auslöscht.

Beugungsbilder eines Rowlandgitters

In den hellen Linien erreicht also das Licht ein Maximum an Intensität. Aus der Kirchhoffschen Formel können die Abstände zwischen den einzelnen Maxima berechnet werden. Für den Abstand $a$ der $n$-ten Linie von der Mittellinie ergibt sich der Ausdruck $a = Dn\lambda : d$.
Hierbei bedeutet $d$ den Abstand zwischen je zwei Strichen des Gitters - die Gitterkonstante - und $D$ die Entfernung der Linie vom Gitter.
An Hand der angegebenen Formel und mit Hilfe eines geeigneten Gitters kann leicht eine Wellenlängenbestimmung vorgenommen werden. Man wählt etwa $n = 1$ und misst die Gitterkonstante $d$, ferner $D$ und $a$ - alles geläufige Längenmessungen. Die Bestimmung von $\lambda$ ergibt, dass die Wellenlängen der sichtbaren Farben zwischen den Werten $397 \cdot 10^{-6}$ bis $723 \cdot 10^{-6}$ Millimeter liegen, wobei der Faktor $10^{-6}$ den millionsten Teil eines Millimeters bedeutet. Diesen Wellenlängenbereich nennt man das sichtbare Spektrum.

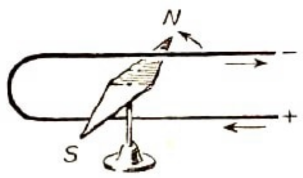
Ein Gitter, das sich zu Messungen im sichtbaren Spektrum eignet, versagt für Wellenlängen, die davon erheblich abweichen. Je geringer nämlich die Wellenlänge ausfällt, um so kleiner ist die Gitterkonstante zu wählen, damit die einzelnen Maxima unterscheidbar bleiben. Es ist zu berücksichtigen, dass diese keine Linien im streng geometrischen Sinn darstellen, sondern eine endliche Breite besitzen und die Lichtintensität in ihnen von einem Spitzenwert allmählich heruntersinkt.
Werden die Linien zu breit oder rücken sie zu nahe zusammen, so überschneiden sie sich und lassen sich nicht mehr voneinander trennen. Je kleiner die Gitterkonstante und je größer die Strichzahl, desto schärfer werden die Linien, desto höher das "Auflösungsvermögen" des Gitters.
Freilich reicht auch das beste Rowlandgitter nicht aus, um im Bereich der Röntgenstrahlen, die ja eine weitaus kleinere Wellenlänge aufweisen als sichtbares Licht, Wellenlängenbestimmungen vorzunehmen.
Glücklicherweise kommt uns die Natur selbst zur Hilfe. In den Kristallen besitzen wir die geeigneten Gitter, um die Wellenlänge von Röntgenstrahlen zu bestimmen.



Beugungsbild (Laue-Diagramm) bei Durchstrahlung eines Kristalls mit Röntgenstrahlung

Es hat sich herausgestellt, dass die Kristalle völlig regelmäßig gitterförmig aus ihren Bausteinen - Atomen oder Molekülen - aufgebaut sind und dass die Gitterkonstante, der Abstand zweier Bausteine, etwa die Größenordnung der Röntgenwellenlänge fällt. Freilich, diese Kristallgitter sind nicht eindimensional, wie die bisher betrachteten - welche aus der regelmäßigen Wiederholung von Elementen, nämlich Strichen in einer einzigen Richtung, bestehen -, sondern dreidimensional. Das Licht darf deshalb nicht mehr willkürlich einfallen, sondern nur in ganz bestimmten geeigneten Richtungen, die vom inneren Aufbau des Kristalls abhängen.

Umgekehrt lassen sich bei der Durchleuchtung mit Röntgenstrahlen aus den Interferenzerscheinungen Schlüsse auf die Materialbeschaffenheit ziehen, was Metall- und Textilindustrie in steigendem Maße ausnützen.



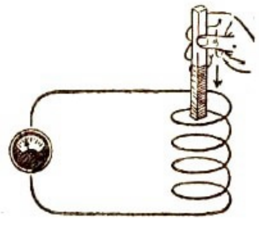
Alle diese Folgerungen ergeben sich zwangsläufig aus der Auffassung, dass Licht eine Wellenbewegung in elektrischen Feldern bedeutet. Es hat sich übrigens herausgestellt, dass die Schwingungen in den Lichtwellen transversal erfolgen, das heißt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung.

Huygens dachte noch an longitudinale Wellen, deren Schwingungen - wie bei den Schallwellen - in der Fortpflanzungsrichtung selber vor sich gehen. Nun sind aber elektrische Felder mit magnetischen gekoppelt, wie das der Däne Oersted schon im Jahre 1820 erkannt hat. Er sandte einen gleichbleibenden elektrischen Strom durch einen Draht und beobachtete, dass eine Magnetnadel dabei ausschlug, ein Zeichen, dass beim Stromdurchgang ein magnetisches Feld entsteht.

Wenn aber nicht allein in den elektrischen Feldern eine Wellenbewegung stattfindet, sondern sich in den magnetischen Feldern, die mit diesen stets gekoppelt erscheinen, gleichfalls eine Erregung fortpflanzt, so fragt sich, ob die magnetischen Wellen nicht ebenfalls Licht bedeuten. Es stellte sich jedoch heraus, dass dem nicht so ist; die Lichtwirkungen gehen ausschließlich von dem elektrischen Bestandteil der elektromagnetischen Gesamtwelle aus.

Nach der Entdeckung von Oersted suchte Faraday zehn Jahre lang unermüdlich nach der umgekehrten Erscheinung. Es war zu erwarten, dass mit magnetischen Feldern irgendwie elektrische Felder gekoppelt sind. So wie man durch den elektrischen Strom Magnetismus hervorrufen konnte, musste man auch durch Magnetismus Elektrizität erzeugen können! Das herauszufinden, war sehr schwer, und es heißt, dass Faraday jahrelang ein Stück Eisen und einen kleinen Kupferdraht in der Tasche hatte, um stets an das Problem erinnert zu werden. Die Lösung, die er endlich fand, lautet:
Nähert man einem Ring aus Kupferdraht einen Magneten, dann kreist im Ring ein elektrischer Strom. Ebenso, wenn man den Magneten entfernt. Zunahme oder Abnahme eines magnetischen Feldes, allgemeiner seine Änderung, erzeugen also einen elektrischen Strom: das Gegenstück zur Entdeckung von Oersted. Elektromotor und Dynamo bilden eine Nutzanwendung dieser wunderbaren Entdeckungen, welche die beiden vorher getrennten Reiche der Elektrizität und des Magnetismus endgültig vereinigten.

Die Gedankenwelt Faradays war den Zeitgenossen nur schwer zugänglich. Sie waren daran gewöhnt, in Fernkräften zu denken: ähnlich der Schwerkraft sollten auch elektrische und magnetische Kräfte unmittelbar und augenblicklich über den leeren Raum hinweg wirken. Demgegenüber entwickelte Faraday den Begriff der elektromagnetischen Felder, die sich von einem Punkt zum Nachbarpunkt fortpflanzen.



Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist dabei endlich, so dass von einer augenblicklichen Wirkung nicht die Rede sein kann. Erschien diese Idee damals schon ungewöhnlich und abschreckend genug, so wurde ihr Verständnis den zeitgenössischen Physikern noch dadurch erschwert, dass Faraday seine völlig neuartigen Gedanken nicht in das der quantitativen Prüfung allein zugängliche Gewand zu kleiden vermochte.

Dies geschah erst durch den ihm ebenbürtigen Maxwell, der fast ein halbes Jahrhundert später auf Grund der Faradayschen Feldvorstellungen die Grundgleichungen des Elektromagnetismus aufstellte.

Gottfried Wilhelm Leibniz. Gemälde von Andreas Scheits. Braunschweig, Landesmuseum

Leonhard Euler. Gemälde von Emanuel Handmann. Basel, Öffentliche Kunstsammlung

Wir begegnen hier einem Sachverhalt, der in der Geschichte der Physik oft zu beobachten ist. Die berühmten Maxwellschen Gleichungen bilden den mathematischen Ausdruck von Faradays Auffassungen über Elektrizität und Magnetismus, die bei diesem zunächst in rein physikalischer Gestalt auftraten.
Ebenso nahmen die Vorstellungen von Huygens und Fresnel einen Sachverhalt in rein physikalischer, anschaulicher Einkleidung vorweg, den Kirchhoff dann später in seiner Formel zusammenfasste.
Es verlangt zwei verschiedenartige Begabungen, einen Sachverhalt mehr als Mathematiker oder mehr als Physiker zu sehen. Nur selten vereinigen sie sich in ein und derselben Person, meist neigen sie dazu, sich gegenseitig zu bekämpfen. Die Geschichte der Physik ist reich an Beispielen dafür.

Wir brachten schon eine Briefstelle von Daniel Bernoulli, die das deutlich erkennen lässt. Aber auch aus unseren Tagen lassen sich nur zu leicht Beispiele anführen. Es scheint zum Beispiel, dass der tiefere Grund der Feindschaft gegenüber der Quantenmechanik darin zu suchen ist, dass die Gegner mehr eine physikalische Begabung besitzen und weniger eine mathematische. Die beiden Begabungen sollten sich jedoch nicht bekämpfen, sondern ergänzen, damit so großartige Theorien entstehen wie diejenige des Elektromagnetismus, ohne die unsere Zivilisation undenkbar ist.
Die Natur stellt dem Mathematiker Aufgaben, die ein Kirchhoff oder Maxwell zu lösen vermochte. Erst die Mathematik ermöglicht es, den gesamten Elektromagnetismus in die wenigen Formeln der Maxwellschen Gleichungen zu fassen. Auf sie hat der große Physiker Boltzmann in heller Begeisterung die Worte aus Goethes "Faust" bezogen:

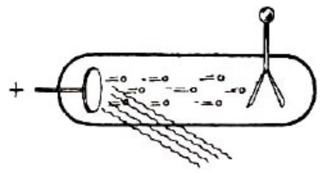
Ha ! welche Wonne fließt in diesem Blick ...
War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
Die mit geheimnisvollem Trieb
Die Kräfte der Natur rings um mich her enthüllen?

Rein theoretisch schließend, ging dann Maxwell über Faraday noch hinaus und behauptete, dass das sichtbare Licht wesensverwandt mit von ihm berechneten langwelligen Erregungen von elektromagnetischen Feldern sei: heute nennen wir sie Rundfunkwellen.
Es gehörte hohe Experimentierkunst dazu, solche Wellen als erster herzustellen und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Ein Schüler von Helmholtz, Heinrich Hertz, hat dieses Kunststück fertiggebracht. Seine Apparatur, die zu den Kostbarkeiten des Bonner Physikalischen Institutes gehört, überbrückt eine Entfernung von 4 bis 5 Meter. Im Empfänger dieses Urmodells unseres Rundfunks blitzen winzige Funken auf, die nur durch das Vergrößerungsglas sichtbar werden. Immerhin, die Voraussage Maxwells wurde gerechtfertigt, und damit hat Hertz der Theorie zum Siege verholfen.

Aber genau so wie bei der klassischen Mechanik stellte es sich auch hier bald heraus, dass die Theorie verbesserungsbedürftig ist. Es kamen völlig neuartige Gedanken auf, doch scheint alles viel verwickelter zu sein als in der Relativitätstheorie und dementsprechend noch viel weiter entfernt von einer befriedigenden Klärung. Sehen wir zu, wie es damit steht.

## 1.7 Planck kommt hinter die Sprünge der Natur

Es wirkt wie eine Ironie des Schicksals, dass derselbe Hertz, welcher der Maxwellschen Theorie zum Siege verholfen hat, eine Entdeckung machte, die geeignet war, den neu errichteten stolzen Bau wieder einzureißen. Er fand, dass der elektrische Funke im Hellen Strecken überspringt, die er in der Dunkelheit nicht schafft. Als Hallwachs und vor allem Lenard dieser Erscheinung nachgingen, entdeckten sie ihre Ursache im photoelektrischen Effekt.
Darunter versteht man die Tatsache, dass beim Bestrahlen eines Metalls Elektronen aus diesem heraustreten. Die Bewegungsenergie der Elektronen wächst mit der Schwingungszahl des bestrahlenden Lichtes, während die Intensität der Bestrahlung sich allein in der Anzahl der heraustretenden Elektronen auswirkt. Das bedeutete eine Überraschung.



Man hätte nach dem Energiesatz zunächst vermuten müssen, dass die Elektronen um so energiereicher würden, je stärker man das Metall bestrahlte. Das war aber durchaus nicht der Fall.

Am klarsten zeigt ein Versuch von Millikan aus dem Jahre 1916 die Verhältnisse. Millikan legte eine positive elektrische Spannung an die Metallplatte, aus der beim Bestrahlen die Elektronen heraustraten. Er ließ dann diese Spannung anwachsen, so lange, bis auch die schnellsten Elektronen das Metall nicht mehr verließen. Dies konnte er dadurch feststellen, dass ein Elektroskop, das er in einiger Entfernung der Platte gegenüber aufgestellt hatte, sich nicht auflud. Aus der gemessenen Spannung ließ sich die Bewegungsenergie der schnellsten Elektronen berechnen.
Es ergab sich, dass sie proportional der Schwingungszahl ausfällt, wobei freilich zu berücksichtigen bleibt, dass diese Bewegungsenergie um einen Betrag vermindert erscheint, der davon herrührt, dass die Elektronen beim Austreten aus dem Metall ein Hindernis zu überwinden haben. Man nennt diesen Energieverlust die "Austrittsarbeit" ; sie hängt von der Natur des verwendeten Metalls ab.

Die Theorie von Maxwell versagt angesichts dieser Erscheinung. Um sie zu erklären, denkt man sich das Licht aus kleinsten Energiebrocken bestehend, die Photonen heißen. Das Licht, jede einzelne Farbe, gekennzeichnet durch die Schwingungszahl $\nu$, besteht aus lauter gleichen, ja geradezu ununterscheidbaren Photonen. Die Energie des einzelnen Photons beträgt $h\nu$, wobei $h$ ein für alle Farben gleicher Proportionalitätsfaktor ist, der die Plancksche Konstante heißt und den Betrag $6,63 \cdot 10^{-27}$ besitzt.
Danach gibt es Photonen, die einen beliebig großen oder kleinen Wert an Energie darstellen, entsprechend der kleinen oder großen Wellenlänge der Farbe, der sie angehören. Offenbar kann man $\nu$ immer so wählen, dass $h\nu$ jeden gewünschten Wert annimmt. Für sichtbares Licht liegt der Energiewert $h\nu$ zwischen 25 und 46 Zehnbillionstel Energieeinheiten. Dabei ist schon die Energieeinheit, das "Erg" , selber recht winzig; es kommt der Arbeit gleich, die erforderlich ist, um einen Stecknadelkopf von einem Tausendstel Gramm 1 Zentimeter hoch zu heben.

Wie schwer man sich mit diesen umstürzlerischen Vorstellungen befreunden konnte, geht aus den Worten hervor, mit denen Millikan selber seinen Bericht über den photoelektrischen Effekt schloss: "Nichtsdestoweniger erscheint mir diese physikalische Theorie gänzlich unhaltbar."
Millikan erwies sich als falscher Prophet. Die von ihm geächtete physikalische Theorie entwickelte sich rasch weiter und führte zu Folgen, an die noch hin vor kurzem niemand zu denken gewagt hätte.

Den Anstoß zu solchen umwälzenden Vorstellungen, zunächst über die Beschaffenheit des Lichts, nicht lange danach aber auch über den Aufbau der Materie, bildete ein Strahlungsproblem. Ein geheizter Ofen strahlt Wärme aus, aber kein Licht; ein brennendes Streichholz beides, Wärme und Licht, die Sonne gleichfalls. Strahlung bedeutet aber Energie, und es erhebt sich die Frage nach den Energiebeträgen, die ein Strahler auf die einzelnen Spektralfarben verteilt. Insbesondere dann, wenn der Strahler ein sogenannter schwarzer Körper ist.

Der schwarze Körper ist ein Gedankending, ein Geschöpf der theoretischen Physiker; in der Wirklichkeit kommt ihm ein innen schwarz angestrichener Hohlraum mit einer kleinen Öffnung am nächsten. Das Innere des Hohlraumes hat man sich mit Strahlung angefüllt zu denken, die Wände seien undurchlässig, und im Hohlraum selber sei etwa ein Kohlestäubchen vorhanden. Nach längerer Zeit bildet sich dann ein stabiler Zustand heraus; man spricht kurz von "schwarzer Strahlung" .
In den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ging es darum, die Verteilung der Energiebeträge auf die einzelnen Farben in dieser "schwarzen Strahlung" zu bestimmen, und es wurden zu diesem Ende sorgfältige Messungen angestellt. Auf diese Weise lernte man das Ergebnis vom Experiment her kennen. Als man daran ging, den experimentellen Befund theoretisch zu erklären, versagte die Theorie von Maxwell.

Gelegentlich eines gemütlichen Beisammenseins klagte ein berühmter Experimentator dem Professor der theoretischen Physik an der Berliner Universität, Max Planck, seine Not. Nächsten Tages erhielt er von Planck eine Postkarte mit einer Formel, die Planck später auf Grund einer völlig neuartigen Annahme begründen konnte; leider ging dieses einzigartige Schriftstück verloren.
Es ist an Bedeutung, wenn auch freilich nicht an Vollendung, den Aufzeichnungen von Leibniz als ebenbürtig zur Seite zu stellen, in denen die Zeichen $d$ und $\int$ eingeführt wurden. Die Formel aber, um die es diesmal geht, wurde nach Planck benannt, und die neue Annahme bildet den Grundgedanken der Quantentheorie. Veröffentlicht wurde sie am 14. Dezember 1900.

Planck setzte sich damit über einen Grundsatz hinweg, den man in die Worte gekleidet hatte „natura non facit saltus“, die Natur macht keine Sprünge. Im Gegensatz dazu sah sich Planck veranlasst, anzunehmen, dass Lichtaufnahme und Lichtabgabe sprunghaft erfolgen. Irgendein mitwirkendes Atom kann nur ganz bestimmte Energiebeträge an Licht verschlucken und nur ebendieselben wieder von sich geben.
Diese Energiebeträge sind die Photonen. Damit wird beispielsweise die Entdeckung von Bunsen und Kirchhoff sofort verständlich, welche experimentell festgestellt hatten, dass jedes Gas in ganz bestimmten Farben leuchtet und nur dieselben Farben verschlucken, absorbieren, kann. Bekanntlich bildet dieser Fund die Grundlage für die Spektralanalyse, die es erlaubt, die Zusammensetzung der Gestirne zu erforschen, während der berühmte französische Philosoph Comte noch kurz vorher erklärt hat, die Menschheit würde nie kennenlernen, aus welchen Stoffen die Sterne auf- gebaut seien - derselbe Comte, von dem es hieß: "Il n'y a pas de Dion, dont Comte est le prophéte."
In der Physik bewähren sich Propheten schlecht, denn die Natur macht sich nichts aus den Mühsalen unserer Gedankenwelt.

Scherzhaft könnte man sagen, dass für jede Atomart eine besondere Diätvorschrift gilt. Die Atome können nur bestimmte Energiebrocken verschlucken. Insofern geht es ihnen besser als sonstigen Patienten, die nicht selten gegen ihre Diätvorschrift sündigen.
Die Photonen bilden also eine Atomnahrung, die keineswegs einheitlich ist. Photonen, die von Wasserstoffatomen verschluckt werden können, sind für Kohlenstoffatome völlig ungenießbar. Diese Vorstellungen stehen in völligem Gegensatz nur Theorie von Maxwell, die keine Photonen kennt. Erst wenn man bedenkt, welchen Entschluss es bedeutet, mit einer an sich bewährten

Theorie zu brechen und den damaligen Grundsatz alles Naturbetrachtens aufzugeben, dass nur stetige Veränderungen möglich seien, wird man das Verdienst von Planck richtig ermessen können.

Er selbst schildert sich als "Bergknappen, der jahrelang mit Einsetzen seiner ganzen Kraft nach edlen Erzen schürft und dem es bei seiner Arbeit eines Tages begegnet, dass er eine Ader angeschlagen hat, die sich bei näherer Untersuchung noch unendlich ergiebiger erweist, als irgend jemand im voraus vermuten konnte. Wäre er selbst nicht auf den Schatz gestoßen, so wäre dies unfehlbar kurz darauf einem seiner Mitarbeiter geglückt."

Der letzte Satz spricht mehr für die Bescheidenheit von Planck als dafür, dass er die von ihm überwundene Schwierigkeit richtig einschätzte, denn es ist mehr als zweifelhaft, ob ein anderer die Entdeckung so kurz darauf gemacht hätte.

Nach der neuen Auffassung besteht das Licht aus Lichtatomen, den Photonen. Ein Photon verkörpert die Energie $h\nu$. Nun wissen wir von der Relativitätstheorie her, dass jeder Energie Masse zukommt, die man durch Division mit $c^2$ erhält. Das Photon $h$ besitzt danach die Masse $h\nu : c^2$. Das Photon besitzt außerdem eine Geschwindigkeit, nämlich $c$.
Trifft es auf ein Hindernis, dann übt es folglich darauf einen Stoß aus wie eine Billardkugel auf die Bande. Natürlich stoßen beim Licht unzählige Photonen gleichzeitig, was sich als winziger, aber stetiger Druck auf das Hindernis äußert: als Lichtdruck. Licht übt also eine Druckwirkung aus, ja ein genügend starker Lichtstrom würde jedes Hindernis fortblasen. Diesen Lichtdruck kannte bereits die Theorie von Maxwell; nach der neuen Auffassung ergibt er sich aber ganz von selbst und ohne viel Rechnen.

Halt! wird hier der aufmerksame Leser ausrufen. Die Photonen bewegen sich mit der Grenzgeschwindigkeit $c$, bei der jede endliche Masse einen unendlich großen Wert annehmen müsste, wogegen Photonen eine durchaus endliche Masse besitzen sollen. Um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, sah man sich gezwungen, anzunehmen, dass die Ruhmasse der Photonen verschwindet. Damit entsteht jedoch eine neue Schwierigkeit. Denn die Null ergibt, mit einem noch so großen Wert $1 : \beta$ multipliziert, immer wieder Null. Es muss zugegeben werden, dass dies eine wunde Stelle bei den neuen Vorstellungen bildet; ein Hinweis darauf, dass wir noch nicht die letzten Einblicke in das Wesen des Lichts gewonnen haben.

Einige der als gesichert geltenden Lichtgesetze genügen aber bereits, um zu einer vertieften Auffassung vom atomaren Geschehen vorzudringen. Schon seit jeher war man sich darüber im klaren, dass jeder Stoff atomare Struktur besitzen muss. Wie wäre sonst die Zusammendrückbarkeit von Materie anders zu erklären? Allmählich gewann man die Überzeugung, der sichtbare Stoff bestünde aus unsichtbaren kleinsten Teilchen, die einem Mückenschwarm ähnlich durcheinander schwirren.
Heftige Bewegungen der Mücken äußern sich in Wärme, langsame in Kälte. Vieles konnte damit befriedigend erklärt werden. Es entwickelte sich ein neuer Wissenszweig, die kinetische oder statistische Theorie der Materie. Sie erforderte Überlegungen, die der Mathematiker in seiner Wahrscheinlichkeitslehre bereit halte.

Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzen Ihren Ursprung in der Spielleidenschaft. Ein französischer Edelmann, der Chevalier de Méré, spielte nämlich, wenn er nicht gerade schlief, Karten, fand aber immerhin Gelegenheit, dabei Beobachtungen über Gewinn- und Verlustaussichten anzustellen, die ihm nicht bloßer Zufall zu sein schienen.
Er teilte sie dem jungen, berühmten Mathematiker Pascal mit, und dieser, ferner sein Zeitgenosse Fermat, entwickelten die Grundzüge einer Wahrscheinlichkeitslehre.

Den Grundbegriff bildet die Wahrscheinlichkeit. Von der Schule her weiß man wohl noch, was sie zu bedeuten hat. Bei einem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Augenzahl zu werfen, $\frac{1}{6}$. Das ist nicht so aufzufassen, als würde unter den Würfen stets genau der sechste Teil diese Augenzahl aufweisen. Es ist durchaus möglich, wenn auch selten, dass unter tausend Würfen kein einziger mit der fraglichen Augenzahl vorkommt.
Eine Wahrscheinlichkeit ist eben keine Bestimmtheit. Sie behauptet lediglich, dass bei zunehmender Wurfzahl die fragliche Augenzahl mit einem Teilbetrag fällt, dessen Wert dem sechsten Teil aller Würfe zustrebt. Dann bedeutet die Wahrscheinlichkeit 1 noch keine Sicherheit im alltäglichen Sinn, und die Wahrscheinlichkeit 0 noch keineswegs, dass ein Fall nie eintrifft.

Die Wahrscheinlichkeit bildet nun den Hebel, den die kinetische Theorie der Materie ansetzt. Es ist das Verdienst von Boltzmann, dies als erster folgerichtig durchgeführt zu haben. Ein nach ihm und seinem Vorgänger auf diesem Gebiet Maxwell benanntes Gesetz gibt die Wahrscheinlichkeit an, an einem bestimmten Ort Teilchen eines Gases von ganz bestimmten Geschwindigkeiten anzutreffen.
Solchen Angaben unterliegt eine ganz bestimmte Zählweise, oder, anders ausgedrückt, eine vorher ausgemachte Auffassung darüber, was als verschieden und was als gleich zu gelten habe. Eine erste Zählweise bildete die von Boltzmann, die man darum die klassische nennt. Fasst man aber das Licht als ein Gas, bestehend aus Photonen, auf, dann versagt diese klassische Zählweise.
Der Inder Bose fand nun eine neue Zählweise, die sich für das Licht eignet und beispielsweise das Plancksche Gesetz für die schwarze Strahlung ungezwungen ergibt. Es ist üblich geworden, diese Zählweise als Bose-Statistik zu bezeichnen, im Gegensatz zur klassischen Statistik von Bolmmann.

Es wurde später noch eine dritte Zählweise entdeckt, die sich insbesondere für Metalle eignet. Sie wird heute Fermi-Dirac-Statistik genannt und gibt Rechenschaft über elektrische und thermische Eigenschaften der Metalle; an diesem Problem war noch kurz nach der Jahrhundertwende der Berliner Ordinarius für Physik, Drude, gescheitert und hatte sich deshalb das Leben genommen.

Die statistische Behandlung bringt es mit sich, dass alle Aussagen auf Wahrscheinlichkeiten bezogen werden und folglich nie zu eindeutigen Voraussagen führen. Vielmehr beziehen sich die Voraussagen stets auf das Verhalten einer überwältigend großen Anzahl von Teilchen, von Kollektiven, sind aber für Einzelteilchen nicht verbindlich. Wenn es beispielsweise heißt, dass die Wahrscheinlichkeit 1 dafür besteht, alle Teilchen in dem und dem Raumteil anzutreffen, dann besagt das keineswegs, dass in einem außerhalb liegenden Raumteil kein Teilchen angetroffen werden kann.
Der Grund hierfür liegt in unserer Unkenntnis. Wir nehmen zwar an, dass wir die Bewegungsgesetze für klassische materielle Punkte kennen, ohne jedoch in der Lage zu sein, jeden einzelnen unter ihnen zu verfolgen. Klassisch betrachtet, besteht die Unkenntnis in unserem Unvermögen, bis zu den Einzelteilchen vorzudringen. Bald wird es sich zeigen, dass die Atomphysik darin noch viel radikaler vorgeht.

Wenn aber die statistische Behandlungsweise keine eindeutigen Voraussagen gewährt, dann, scheint es, widerspricht sie der Forderung nach Kausalität. Nur scheinbar! Die Lage ist vielmehr die, dass die statistische Behandlungsweise auf Kausalität von vornherein verzichten muss, weil sie es mit Kollektiven zu tun hat, was so viel besagen will, dass ihr das Einzelschicksal von vornherein gleichgültig ist.
Lebensversicherungen arbeiten ähnlich mit Kollektiven und kommen dabei durchaus auf ihre

Kosten, ohne dass sie voraussagen könnten, ob der versicherte Herr Müller sechzig oder achtzig Jahre alt werden wird. Man hat es auch nie ernstlich erwogen, die statistische Betrachtungsweise gegen kausales Geschehen auszuspielen.

Im Jahre 1927 schien es dagegen um die Kausalität geschehen zu sein, denn die damals begründeten neuen Gesetze der Atomphysik erlauben keine eindeutigen Voraussagen mehr. Gewiss, aber sie können nur an Kollektiven geprüft werden. Niemals lernt man Einzelteilchen kennen. Wir bezweifeln ihre Existenz nicht, wir wissen aber nicht, welchen Gesetzen das isolierte Einzelteilchen gehorchen würde, ja wir wissen nicht einmal, ob es wirklich einen Sinn hat, sich ein unabhängig existierendes Einzelteilchen zu denken.
Was wir wissen, sind die Gesetze, denen Einzelteilchen gehorchen, die sich in Kollektiven befinden. Sie benehmen sich hier so, als ob für sie diese Gesetze gelten würden. Dann aber lassen sich daraus weder für noch wider die Kausalität Schlüsse ziehen: der ganze Streit, der weit über die Grenzen der Fachliteratur gedrungen ist und damit Zeugnis dafür ablegt, dass er unsachlich geführt wurde, ist bloße Spiegelfechterei.

Nach dieser Vorbemerkung ist es Zeit, uns den neuen Gesetzen zuzuwenden. In ihrem Besitz überkommt einen das Gefühl, einem Käfig entronnen zu sein, in dem unsere Gedanken bisher gefangen waren.
Die neue Atomphysik wurde von Louis de Broglie in seiner Doktorarbeit 1924 begründet, und zwar durch die umstürzende, kühne Prägung des Begriffes der "Materiewellen" . Wir wollen versuchen, ihn anzudeuten.

Am besten geht man von der früher besprochenen merkwürdigen Doppelnatur des Lichtes aus. Das Licht stellt einmal, wie die Beugungsexperimente klar beweisen, eine Wellenbewegung dar, welche der Wellengleichung genügt. Die an den lichtelektrischen Effekt und die Hohlraumstrahlung anknüpfenden Erfahrungen zwangen uns andererseits dazu, dem Licht atomare Struktur zuzuschreiben: es besteht aus Photonen von der Energie $h\nu$ und dem Impuls $hk$. Diese beiden Aussagen scheinen einander strikt zu widersprechen. Aber dennoch brauchen wir alle beide, wenn wir die Gesamtheit der optischen Erscheinungen erklären wollen. Weder die Wellen- noch die Photonentheorie allein reichen dazu aus. Notgedrungen bescheiden wir uns also und sagen: das Licht ist zwiespältiger Natur, es erscheint uns manchmal als Welle, manchmal als Teilchen, als Photon.

De Broglies folgenschwere Idee war es nun, hier aus der Not eine Tugend zu machen. Diese "Doppelexistenz" des Lichtes erschien ihm grundsätzlicher Natur, ein äußerst wichtiger Hinweis auf die wahre Beschaffenheit der Welt. Aber war sie auf das Licht beschränkt?
Weder die Wellengleichung noch die Begriffe Impuls und Energie gehören der Optik allein an. Deshalb wenden wir sie einmal versuchsweise auch auf Materieteilchen, etwa auf Elektronen, an. Ein bewegtes Elementarteilchen besitzt natürlich Energie und Impuls, so viel sagt schon die klassische Mechanik. Rein formal setzen wir jetzt seine Energie $E = h\nu$ und seinen Impuls $I = mv = hk$. Diese beiden Gleichungen liefern uns eine "Schwingungszahl" $\nu$ und eine "Wellenlänge" $\lambda = 1 : k$.

Noch wissen wir freilich gar nicht, welcher "Welle" diese beiden Größen eigentlich entsprechen sollen. De Broglie sagt: So wie dem Photon eine bestimmte Lichtwelle entspricht, so muss auch dem bewegten Elementarteilchen eine bestimmte "Materiewelle" entsprechen - wobei wir uns vorläufig gar nicht darum kümmern wollen, was eigentlich darunter zu verstehen sei. Schwingungszahl $\nu$ und Wellenlänge $\lambda$ dieser Materiewelle lassen sich, wie eben angegeben, berechnen.

Es ist $\nu = E : h$, $\lambda = h : mv$. Nimmt man weiter an, dass auch diese Materiewelle der Wellengleichung gehorcht, so lässt sich ihr Ausbreitungsgesetz in einer Rechnung von wenigen Zeilen bestimmen: das Ergebnis heißt die berühmte Schrödingergleichung, die als Grundlage der modernen Atomphysik zu betrachten ist.

So ist nun auch der Materie dieselbe Doppelnatur wie dem Licht zugesprochen. Damit scheint zunächst freilich nichts gewonnen, sondern das Problem nur verwickelt werden zu sein.
War früher die Materie wenigstens noch "vernünftig" , so unterliegen nun beide, Licht wie Materie, demselben Dilemma, beide sind Welle und Teilchen zugleich. Immerhin stellt auch dies einen Schritt zu einer neuen, höheren Einheitlichkeit dar und führt uns zu einer vertieften Naturauffassung. Es hätte ja auch keine Berechtigung, in der Physik Vogel-Strauß-Politik treiben und vor den Problemen die Augen schließen zu wollen.
Wir werden noch sehen, dass die Schwierigkeiten gar nicht so groß sind, sofern man sich von alten Vorurteilen befreien kann.

Ursprünglich wurde die Wellengleichung gar nicht so einfach hergeleitet. Schrödinger fand sie im Jahre 1926 auf Grund von Überlegungen, bei denen er sich wesentlich auf Vorstellungen stützen musste, die der Ire Hamilton ein Jahrhundert früher entwickelt hatte. Sie betreffen Analogien, die zwischen der Mechanik und der Optik bestehen.
Hamilton war mehr Mathematiker, und seine Untersuchungen ziehen in der Hauptsache auf eine Lösung von Gleichungen, die in der klassischen Mechanik die Bewegung von Punktsystemen bestimmen. Sie können in verschiedener Gestalt hingeschrieben werden und heißen dann nach demjenigen, der sie als erster fand, d'Alembertsche, Lagrangesche oder Hamiltonsche Gleichungen. War auch die Leistung von Hamilton danach eine vorwiegend mathematische, so gelang ihm doch eine optische Voraussage, die sein Kollege Lloyd experimentell bestätigen konnte und die heute unter dem Namen "konische Refraktion" bekannt ist.

Hamilton ließ diese Untersuchungen in die Berichte der irischen Akademie einsetzen. Nun gab es schon damals eine so große Anzahl von wissenschaftlichen Zeitschriften, dass man zu einer Auslese gezwungen war. Kein Forscher konnte alle Veröffentlichungen verfolgen, und darum griff er nach denen, die in den angesehensten erschienen sind. Nur ausnahmsweise, wenn ein befreundeter Kollege ihn darauf aufmerksam machte, mag er hin und wieder Aufsätze gelesen haben, die in weniger verbreiteten Zeitschriften standen. Ja sogar in den vom Forscher regelmäßig verfolgten Zeitschriften alle Mitteilungen zu lesen, wäre zuviel verlangt gewesen, und so konnte es schon geschehen, wenn auch unter diesen sehr bedeutende übersehen werden sind.
Einer der genialsten Mathematiker alle: Zeiten, Evariste Galois, Zeitgenosse von Hamilton, bediente sich des Bulletins von Férussac, einer angesehenen Zeitschrift; trotzdem wurden seine Arbeiten nicht beachtet. Sie zählen heute zu den tiefsten auf dem Gebiet der Algebra. Freilich, sie waren nicht leicht zu lesen, aber keineswegs so unverständlich, wie ihm das dir Französische Akademie vorgeworfen hat, denn schon zehn Jahre nach dem Tode des jugendlichen Verfassers stellte ein namhafter Mathematiker, Liouville, ihre Bedeutung klar heraus.
Wäre der Schüler Galois mit führenden Kollegen persönlich bekannt gewesen, dann wäre ihm das kaum widerfahren. Und hätte Hamilton engere Beziehungen zu Kollegen unterhalten, dann wären seine Untersuchungen nicht nur verstümmelt in die zeitgenössische Literatur eingegangen. Anregungen des lebenden Forschers scheinen die Fünfhundert-Kilometer-Grenze oft nicht zu überschreiten, ähnlich dem Liebeskummer, gegen den man ja den Rat gibt, zu reisen, um zu vergessen. Neuerdings hat es allerdings den Anschein, als ob die Entfernungen von Forscher zu Forscher zusammenschrumpfen würden.

Es ist Zeit, uns den genaueren Sinn der Schrödingergleichung klarzumachen. Wir wissen, dass

sie sich auf Elementarteilchen bezieht, die in Kollektiven auftreten und sich in diesen so benehmen, als ob sie einzeln der Schrödingergleichung genügen wurden.
Diese führt nun zu einer umwälzenden Umdeutung. Es hat keinen Sinn mehr, den Ort eines Elementarteilchens genau angeben zu wollen. Es hat nur einen Sinn, anzugeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit es sich an einem Ort befindet. Es kann damit zugleich an jedem Ort angetroffen werden.
Im ersten Augenblick klingt das fast unfassbar, aber nur so lange, wie man es mit den herkömmlichen Vorstellungen begreifen will. Man muss sich jedoch besinnen, woher diese stammen! Aus der Physik des Alltags. Wenn man sich aber einmal zur Ansicht durchgerungen hat, dass die Sinneswahrnehmungen sich aus verwickelten atomaren Vorgängen aufbauen, dann ist billigerweise zu erwägen, ob letztere noch immer den Gesetzen gehorchen, die aus einer ganz anderen Welt herrühren, oder aber eigene Gesetze erfordern.

Zunächst freilich versuchte man es, eine Atomphysik mit Vorstellungen zu betreiben, die in der so glänzend bewährten klassischen Physik gewonnen wurden. Man betrachtete das Atom als Miniatursonnensystem, mit Elektronen als Planeten um den Atomkern als Sonne. Damit erzielte man schöne Teilerfolge. Es blieb aber unbefriedigend, Zulassen zu müssen, dass die klassischen Gesetze dabei nicht näher zu motivierenden Einschränkungen unterlagen. Die Planeten durften nicht in beliebigen Bahnen um ihre Sonne kreisen, sondern nur in wenigen ganz bestimmten: alle anderen Bahnen waren ihnen "verboten"Ḋie klassische Mechanik kennt keine solche Verbotstafel für Planeten mit der Aufschrift: "Du sollst nicht ..."

Erst das Jahr 1927 brachte eine Lösung dieser Schwierigkeit. Sie lautet: Physikalischen Größen wie Ort oder Geschwindigkeit entsprechen ganz bestimmte mathematische Gebilde. Sie heißen Operatoren und sind zugleich mehrerer Werte fähig. Für jeden der möglichen Werte gilt eine bestimmte, sich von Wert zu Wert verändernde Wahrscheinlichkeit. Man hat es mit einer ganz neuen Art von mathematischen Größen zu tun, völlig verschieden von denjenigen, deren sich die klassische Physik bedient.

Wie schon wiederholt in der Geschichte der Naturwissenschaften fand der Physiker die neuen mathematischen Begriffe fertig vor. Sie wurden kurz nach der Jahrhundertwende entwickelt, um mit ihrer Hilfe zunächst rein mathematische Probleme zu bewältigen. Sie gedeihen auf dem Boden eines Raumes, der unendlich viel Dimensionen aufzeigt und nach seinem Schöpfer, dem Göttinger Mathematiker Hilbert, benannt wird.
Dem Unvorbereiteten mutet der Begriff des Hilbert-Raums Ungeheuerliches zu, aber, wie es sich auch diesmal wieder herausstellt, nur so lange, als man mit Vorurteilen herantritt. Vorurteile aber bedeuten Begriffe, die für andere Zwecke gebildet ins Feld geführt werden. Wiesen erfordern die Sense und Äcker den Pflug, klassische Mechanik die Infinitesimalrechnung und Atommechanik die Operatorenrechnung. Differentiale und Integrale bewähren sich im gewöhnlichen Raum, Operatoren im Hilbert-Raum. Es fällt schwer, aber man muss umlernen.

Aus Beziehungen, die zwischen Operatoren bestehen, folgt ein bemerkenswerter und folgenschwerer Satz in der Physik. Die Operatoren lassen sich so in Klassen einteilen, dass es bei der Bildung des Produkts von zwei Operatoren aus ein und derselben Klasse auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt, im Gegensatz zum Produkt, dessen Faktoren verschiedenen Klassen entnommen wurden.
Man drückt das so aus, dass die Operatoren aus ein und derselben Klasse miteinander vertauschbar sind, während zwei aus verschiedenen Klassen stets unvertauschbar ausfallen. Dies wirkt sich beim Messen von möglichen Werten aus. Wenn die Messungen mögliche Werte von physikalischen Größen bestimmen sollen, deren Operatoren vertauschbar miteinander sind,

dann stören sie sich nicht gegenseitig, während für unvertauschbare Operatoren das Gegenteil zutrifft. Für diese gegenseitige Störung lassen sich sogar Grenzen abstecken. Es ist üblich, sie als Unschärfebeziehung zu bezeichnen, weil es infolge der gegenseitigen Störung nicht möglich ist, für beide Operatoren zugleich scharfe Werte zu messen.

Ort und Geschwindigkeit eines Elementarteilchens sind physikalische Größen, denen nicht vertauschbare Operatoren entsprechen. Je genauer man den Ort einengt, wo sich das Elementarteilchen befinden soll, um so ungenauer kennt man die Geschwindigkeit, die es besitzt. Würde man versuchen, die Genauigkeit in der Ortsangabe dadurch zu erzwingen, dass man kurzwelliges Licht als Maßstab benutzt, dann bleibt zu bedenken, dass die Photonen, aus denen dieses Licht besteht, einen größeren Impuls besitzen. Treffen sie auf das Elementarteilchen, dann stoßen sie kräftiger zu und verändern damit dessen Geschwindigkeit. Diese Überlegung besitzt mehr einen heuristischen als überzeugenden Wert, denn aus ihr geht noch nicht hervor, dass die Unschärfebeziehung aus prinzipiellen Gründen gilt. Immerhin führte sie Heisenberg darauf, die Unschärfebeziehung zu entdecken. Damit erreichte die Atommechanik: einen ersten Abschluss.

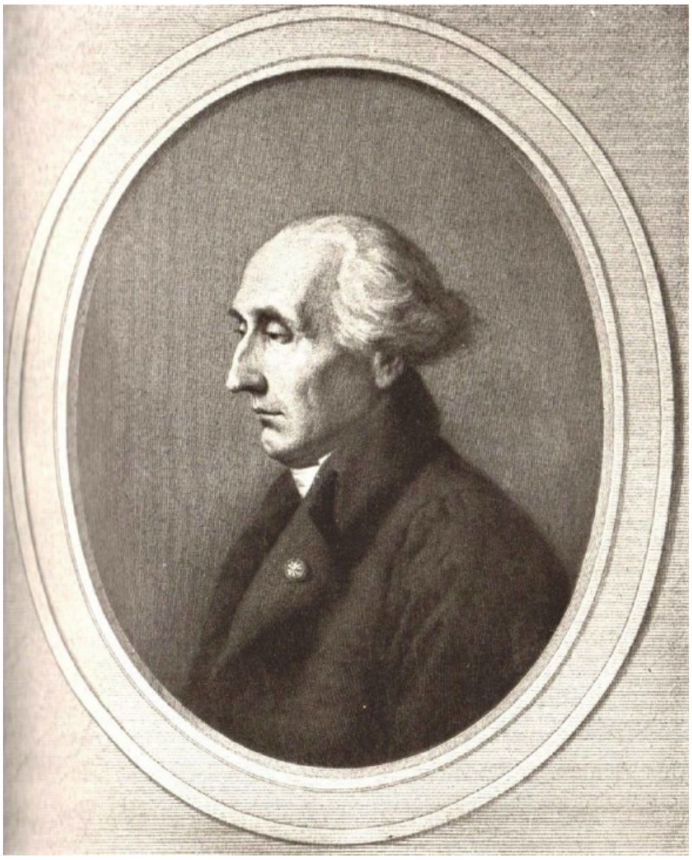
Die erst 1927 ausgesprochene Unschärfebeziehung bildet übrigens den Grund für eine Vorschrift, die man schon lange vorher angewandt hat. Man versuchte frühzeitig, die ersten Ansätze der Atomphysik in der statistischen Theorie anzuwenden, und stellte fest, dass diese abgeändert werden müsse. Bis dahin teilte man den Raum, in dem die statistischen Betrachtungen verlaufen, den sogenannten Phasenraum, in beliebig kleine Zellen. Treibt man Atomphysik, dann müssen diese Zellen alle die ganz bestimmte Größe $h^3$ besitzen. Warum, das konnte man mit den damaligen Kenntnissen in keiner Weise beantworten.
Heute weiß man, dass diese Aufteilung des Phasenraumes einfach mit der Unschärfebeziehung zwischen Ort und Geschwindigkeit gleichbedeutend ist.

Wir haben uns noch über das Messen nähere Gedanken zu machen. In der klassischen Physik ist es erlaubt, beliebig feine Messgeräte zu fordern, etwa eine Waage mit Gewichten, die jeden gewünschten Bruchteil eines Gramms ausmachen können. Solche Gewichte kann es in der Atomphysik nicht geben, denn die kleinsten Bausteine der Welt sind Elementarteilchen mit ganz bestimmten Massen. Diese Schranke nach unten hin bildet den Grund, warum die Atomphysik behauptet, die Messung oder anders ausgedrückt der Beobachter störe den Zustand, der bestimmt werden soll, unbedingt. Der Beobachter ist ein Riese, der, ein Gulliver in Liliput, unweigerlich Zerstörungen anrichtet: das Messen bedeutet einen Eingriff.

Diese völlig neuartigen Vorstellungen bleiben an die Einsicht geknüpft, dass in der Welt des Atoms das Geschehen nicht stetig, sondern sprunghaft verläuft. Zum ersten Male tauchte der Gedanke beim Licht auf, das aus Photonen oder, wie man damals sagte, Lichtquanten bestehen sollte. Diese erste Bezeichnung behielt man bei, so dass man meistens von Quantenphysik redet.

Man erhebt gegen sie den Vorwurf, sie mache sich abenteuerliche Vorstellungen und entferne sich damit von jeder Wirklichkeit. Schon die ersten Ansätze der Quantenphysik waren ähnlichen Vorwürfen ausgesetzt. Planck meinte bereits vor zwei Jahrzehnten dazu:

"Entweder war das Wirkungsquantum $h$ nur eine fiktive Größe - dann war die ganze Deduktion des Strahlungsgesetzes prinzipiell illusorisch und stellte weiter nichts vor als eine inhaltsleere Formelspielerei - oder aber der Ableitung des Strahlungsgesetzes lag ein wirklich physikalischer Gedanke zugrunde; dann musste das Wirkungsquantum in der Physik eine fundamentale Rolle spielen, dann kündigte sich mit ihm etwas ganz Neues, bis dahin Unerhörtes an, das



Joseph Louis Lagrange. Stich von Ach. Martinet nach dem Bildnis von J. Heim

Carl Friedrich Gauß. Gemälde von Chr. A. Jensen. Göttingen, Sternwarte berufen schien, unser physikalisches Denken, welches seit der Begründung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz und Newton sich auf der Annahme der Stetigkeit aller ursächlichen Zusammenhänge aufbaut, von Grund aus umzugestalten."

Es ist zu begreifen, wenn auf umwälzende Neuerungen zunächst Widerspruch erfolgt. Denn sie verlangen eine Umstellung im Denken, die zweifellos schwerfällt. Freilich wird dieser Grund nicht angeführt und tritt auch kaum klar zum Bewusstsein. Welche Rolle er aber spielt, geht daraus hervor, dass nach erfolgter Umstellung die Einwände einfach ausgelöscht sind. Sie waren nicht sachlich begründet, sondern entstammten der psychologischen Sphäre.

Selbstverständlich müssen zwingende Gründe vorliegen, bevor man sich zu Neuerungen entschließt. Sie können im Versagen der alten Theorie angesichts neuer experimenteller Befunden liegen, aber auch in einer neuen Fassung, die das Bisherige ebenfalls erklärt und darüber hinausgehend zu neuen, überprüfbaren Folgerungen führt. Die ersteren Gründe lagen vor, als Planck sich entschloss, die Stetigkeit im Naturgeschehen preiszugeben, die letzteren, als de Broglie die Materiewellen eingeführt hat. Eine Folgerung aus den Materiewellen bildet es, ähnlich wie beim Licht auch bei Strahlen, die aus kleinsten materiellen Teilchen bestehen, Beugungserscheinungen zu erwarten. Sie wurden experimentell bestätigt. Davisson und Germer haben im Jahre 1927 schnelle Elektronen auf einen Kristall fallen lassen und erzielten damit Beugungsbilder, wie sie bei Röntgenstrahlen auftreten.
Die Masse des Elektrons beträgt $9 \cdot 10^{-28}$ Gramm, so dass bei einer Elektronengeschwindigkeit von $10^8$ Zentimeter in der Sekunde die Länge der Materiewellen nach der Formel von de Broglie $7 \cdot 10^{-8}$ Zentimeter wird, also gleich der Wellenlänge von Röntgenstrahlen, für die ja Kristalle ebenfalls die geeigneten Gitter bilden. Damit hat die Neuerung ihre Feuerprobe bestanden. Später werden wir sie weiterzuverfolgen haben und gehen jetzt dazu über, von der Mathematik so viel zu entwickeln, wie es für ein weiteres Eindringen in die Physik erforderlich erscheint.

# 2 Denken Mathematiker anders ?

Kant:
In jeder Wissenschaft ist nur so viel wahre Wissenschaft,
als Mathematik in ihr enthalten ist.

Russel:
Mathematik ist die Wissenschaft, bei der man nicht weiß,
wovon man spricht, noch ob das, was man sagt, wahr ist.

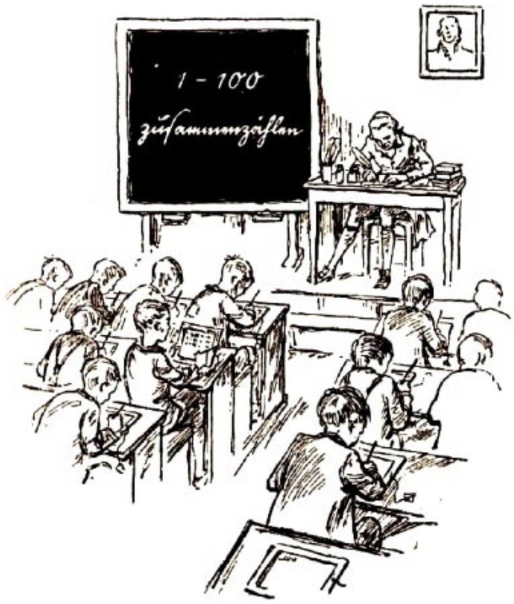
## 2.1 Die Kunst zu addieren

Seit jeher gelten die Mathematiker als versponnen. Sie seien wirklichkeitsfremd, heißt es, und ihre Gedankengänge verstünde niemand außer ihnen selbst, möglicherweise sie selber nicht. Begreiflich daher, dass so mancher von ihnen als Hexenmeister angesehen oder verbrannt wurde, wenn er etwas lehrte, was über das Verständnis der Zeitgenossen hinausging.
Allerdings wollte dies im Mittelalter nicht eben viel besagen; noch im zehnten Jahrhundert musste ein Hochschullehrer seine Studenten ein volles Jahr hindurch im Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren unterweisen, die besonders Begabten schritten zum Dividieren vor! Dabei war der Mann nicht etwa untüchtig, er wurde späterhin sogar zum Papst gewählt.

Einige Jahrhunderte danach änderte sich freilich das Bild. An dem großartigen Aufschwung aller Naturwissenschaften, der damals einsetzte, nahm die Mathematik lebhaften, ja führenden Anteil. Wir haben schon gesehen, wie man lernte, die Natur in wohldurchdachten Versuchen auszuhorchen, ihr sinnvolle Fragen zu stellen, in ihr endlich den obersten Richter zu erblicken, der allein über Richtig und Falsch zu entscheiden hat.
Mut und Unbefangenheit gehörten dazu, sich von der Zwangsherrschaft der aristotelischen Autorität zu lösen: so mussten beispielsweise die uns heute so geläufigen Vorstellungen von der Bewegung erst mühselig entwickelt werden, und sogar bei Galilei finden wir zunächst eine unzutreffende Ansicht über die gleichförmig beschleunigte Bewegung, die er fünf Jahre später dann berichtigt hat - und zwar mit falscher Begründung!

Dies langsame Vorwärtstasten, diese aus Wahrheit und Irrtum wunderlich gemischten ersten Versuche mögen einen Begriff von den überwundenen Schwierigkeiten geben. Im Lauf dieser Entwicklung erkennt man in der Mathematik die geeignete Sprache, die Gesetzmäßigkeiten der Natur auszudrücken. Es entsteht in verhältnismäßig kurzer Zeit die höhere Mathematik: das Altertum findet seinen Meister, denn die neuen Lehren gehen weit über die mathematischen Leistungen der Griechen hinaus.
Von dieser neueren Mathematik haben wir hier zu reden; und wir müssen uns darüber klar sein, dass sie eine strenge Wissenschaft ist - streng nicht nur in ihren Schlüssen, die unangreifbar ausfallen müssen, sondern streng auch insofern, als sie keine Lücke in den Kenntnissen duldet. Das verpflichtet uns, mit dem Einfachsten anzufangen.

Vor rund einhundertfünfzig Jahren wollte ein Volksschullehrer ein Weilchen ungestört bleiben und stellte darum seinen Schülern eine Aufgabe, an der sie nach seiner Meinung wohl eine Stunde lang herumrechnen mussten. Es galt, die ersten hundert Zahlen zu addieren, mithin die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100$ zu bilden. Macht man sich keine weiteren Gedanken, dann addiert man 2 zu 1, was 3 gibt, hierauf zu dieser Summe weiter 3, was 6 gibt, dann zu dieser 6 weiter 4, was 10 gibt, und setzt das solange fort, bis man zuletzt die 100 hinzuaddiert hat. Auf diese Weise erhält man als Endergebnis die Zahl 5050.




Ein Knirps unter den Schülern machte sich dagegen Gedanken über die gestellte Aufgabe und bemerkte, dass das erste und letzte Glied in der Summe, also 1 und 100, zusammen 101 ergeben; ebenso wie das zweite und das vorletzte Glied, nämlich 2 und 99; das dritte und drittletzte Glied, 3 und 98; und so fort. Nun brauchte er nur noch festzustellen, dass die ersten hundert Zahlen 1 bis 100 sich zu 50 solcher Paare zusammenfinden, und besaß damit das Ergebnis

$$1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Der Knirps war damals kaum neun Jahre alt und hieß Karl Friedrich Gauß; später wurde er so berühmt, dass man ihn noch zu Lebzeiten "princeps mathematicorum" nannte, Führer der Mathematiker.

Die Abkehr vom üblichen Rechenverfahren führte hier überraschend schnell zum Ziel. Dies Vorgehen bleibt aber nicht auf den hier erwähnten Einzelfall beschränkt, sondern kann auf jede beliebige Folge von Zahlen angewandt werden, wenn jede Zahl ihre Vorgängerin um denselben Wert übertrifft. Beispielsweise könnte man auf ebendieselbe Weise die Summe aller geraden Zahlen $2 + 4 + 6 + ... + 28 + 30$ berechnen, oder die Summe der ungeraden Zahlen $1 + 3 + 5 + ... + 29$, oder auch eine Folge dieser Art: $17 + 34 + 51 + ... + 170$, und der Leser tut, hier wie auch späterhin, gut daran, diese Summen auf dem eben beschriebenen Wege zu bilden: Mathematik lernt man nur, wenn man sie selbst treibt.

Der Mathematiker nennt solche Zahlenfolgen "arithmetische Reihen" - genauer "arithmetische Reihen erster Ordnung" : Man kann nämlich weitergehen und wesentlich verwickeltere Folgen untersuchen. Als Beispiel betrachten wir die Reihe, die aus den dritten Potenzen - den Kuben - der aufeinanderfolgenden Zahlen besteht. Die dritte Potenz bilden - so erinnern wir uns wohl noch aus der Schule -, das bedeutet, eine Zahl zweimal hintereinander mit sich selber multiplizieren; in der üblichen Schreibweise ist also (gesprochen: Eins hoch drei) $1^3 = 1$, $2^2 3 = 8$m $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 348$ und so weiter. Unsere Folge lautet mithin

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ...$$

Sie stellt offenbar keine arithmetische Reihe erster Ordnung mehr dar, denn die Zahlen wachsen sehr viel rascher, als sie es nach deren einfachem Bildungsgesetz dürften. Indessen gelingt es leicht, die neue Reihe auf eine der alten Art zurückzuführen.

Bildet man zunächst die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Zahlen, also $8-1$, $27-8$, $64-27$ und so fort, so gewinnt man die Folge

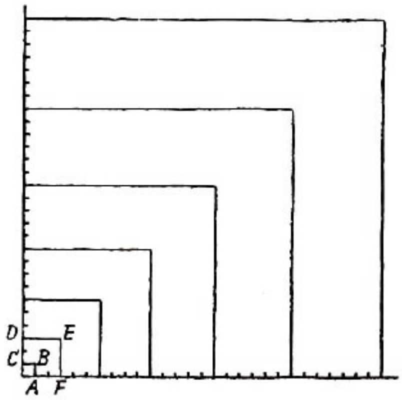
$$7, 19, 37, 61, 91, 127, ...$$

Wiederholt man dies, das heißt bildet man noch einmal die Differenzen $19-7$, $37-19$, $61-37$, $91-61$ und so fort, so ergibt sich die Folge

$$12, 18, 24, 30, 36, ...$$

Und hier erkennen wir alte Bekannte, denn dies ist offenbar wieder eine arithmetische Reihe erster Ordnung, weil jede Zahl ihre Vorgängerin um denselben Wert 6 übertrifft. Die ursprüngliche Folge der Kuben, $1, 8, 27, 64, ...$, von der wir ausgingen, nennt man mit einer leichtverständlichen Bezeichnung eine "arithmetische Reihe dritter Ordnung" , weil erst die dritte aus ihr abgeleitete Folge eine Reihe erster Ordnung ergibt. Dies Beispiel mag einen ersten Eindruck davon vermitteln, wie der Mathematiker von einfachen Begriffsbildungen zu immer verwickelteren aufsteigt; dasselbe Vorgehen wird uns im ganzen Bereich der Mathematik stets aufs neue begegnen.

Es liegt nahe, so wie früher nach der Summe der ersten hundert Zahlen nun nach der Summe der ersten hundert Kuben zu fragen; und es steht fast zu vermuten, dass unser Volksschullehrer sich bei dieser Aufgabe selbst den kleinen Gauß etwas länger vom Hals gehalten hätte - von der übrigen Klasse ganz im schweigen.
In der Tat, wollte man schematisch vorgehen, dann müsste man zunächst die Kuben der ersten hundert Zahlen umrechnen, was recht mühsam wäre, und hinterher die erhaltenen Zahlen noch addieren. Indessen lässt sich die fragliche Summe fast mühelos ermitteln, wenn die besonderen Eigenheiten der Aufgabe berücksichtigt werden.




Unsere Überlegung wird sich der Geometrie bedienen, und wir beschränken uns von vornherein darauf, die Summe der ersten sieben Kuben zu bestimmen, weil das Vorgehen sich unmittelbar auf höhere Anzahlen anwenden lässt.

Berechnen wir in unserer Abbildung von der linken unteren Ecke aus die Fläche der aufeinanderfolgenden Gebiete. Zunächst hat man ein Quadrat von der Seitenlänge 1, mithin vom Inhalt 1.

Darauf folgt eine "knieförmige" Figur, $ABCDEF$, von den Griechen Gnomon getauft, die man sich durch eine Linie in zwei Rechtecke zerlegt denke, deren Inhalte $1 \cdot 2$ und $2 \cdot 3$ betragen. Damit gewinnt man für die Fläche des Gnomons den Wert $2 + 6 = 8$, was offenbar gleich $2^3$ ist. Ähnlich folgen für die übrigen Gnomonen die Werte $3^3$, $4^3$ und so fort. Andererseits füllen diese Figuren gerade das große Quadrat von der Seitenlänge $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ aus, dessen Flächeninhalt gleich $28^2$ ist. Mithin ergibt sich die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 28^2$$

(Summe aller Gnomonen) (Fläche des Quadrats)

als Lösung der gestellten Aufgabe. Augenscheinlich bleibt dieses Ergebnis nicht allein auf den Fall der ersten sieben Kuben beschränkt, sondern lässt sich beliebig fortführen. Für die ersten hundert Kuben folgt sofort die Lösung

$$1^3 + 2^2 + ... + 100^3 = 5050^2$$

Bemerkenswert bleibt die Tatsache, dass sich die Summe von lauter Kuben als Quadrat ergibt.

Die gewonnene Einsicht lässt sich leicht in Formeln fassen, wenn man von der Buchstabenrechnung Gebrauch macht. Ihr liegt die wichtige Einsicht zugrunde, dass im Reich der Zahlen allgemeine Gesetze gültig sind, die nicht von den zufälligen Werten abhängen, mit denen man gerade zu tun hat. Beispielsweise darf man in jeder Summe die Reihenfolge der Glieder beliebig abändern, ohne dass die Summe sich damit verändert.
Es ist offenbar $2+3=3+2$, ebenso $5+11=11+5$. Diesen Sachverhalt drückt man so aus, dass man das erste Glied mit $a$ bezeichnet, das zweite mit $b$ und nun $a+b=b+a$ setzt; $a$ und $b$ können hier irgendwelche, ganz beliebige Zahlenwerte bedeuten, immer bleibt die Beziehung richtig.

Die Buchstabenrechnung ist eine neue Sprache, die erlernt und geübt werden muss wie jede Sprache. Mit ihrer Hilfe können wir zunächst den allgemeinen Ausdruck für die Summe der ersten $n$ Zahlen nachholen. Um ihn zu gewinnen, schreibe man die ersten $n$ Zahlen erst in der gegebenen Reihenfolge hin, darunter in umgekehrter Reihenfolge, und addiere die untereinanderstehenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & ..., & n-1, & n \\ n, & n-1, & ..., & 2, & 1 \end{array}$$

was stets auf den Wert $n+1$ führt. Es gibt $n$ solcher Paare; für die Summe beider Zahlenfolgen finden wir also $n \cdot (n+1)$. Freilich haben wir hier jede Zahl zweimal berücksichtigt. Für die gesuchte Summe $1+2+...+n$ ergibt sich also der halbe Wert $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Dieselbe Zahl kommt heraus, wenn gefragt wird, auf wieviel verschiedene Weisen $n+1$ Gegenstände miteinander gepaart werden können. Hat man zum Beispiel 10 Boxer, von denen - abweichend vom Üblichen - jeder gegen jeden antreten soll, und sucht man die Anzahl der Kämpfe zu berechnen, die zustande kommen, so liefert unsere Formel sogleich die Lösung:
Es ist $n+1=10$, mithin gibt es $10 \cdot 9 : 2 = 45$ Kämpfe zu sehen. Um ähnliche Fragen bildete sich ein besonderer Wissenszweig, die Kombinatorik, in der man sich damit beschäftigt, die Anzahlen von gewissen Anordnungsmöglichkeiten zu bestimmen.

Durch Verzicht auf ein Schema gewinnt man Problemen mitunter neue Seiten ab, wie wir das im Fall der arithmetischen Reihen erster Ordnung sahen, als wir mit Gauß statt des schematischen Addierens die "Paarbildung" einführten. Bei näherem Zusehen erkennt man, dass das Vorgehen darin besteht, gewisse Voraussetzungen abzuschwächen. Es genügte zu wissen, dass jede Zahl der Folge ihren Vorgänger um denselben Wert übertrifft, und es war ganz belanglos, ob dieser Wert gerade 1 betrug oder mehr oder weniger.
Diese Einsicht lieferte ein allgemeines mathematisches Gesetz, und hierin liegt ihr Wert. Dagegen empfindet man die Lösung der nächsten Aufgabe, die Summe der Kuben zu bestimmen, letzten Endes als unbefriedigend. Das liegt daran, dass das geometrische Vorgehen, so reizvoll es auch wirkt, doch nicht weiter führt als zur Lösung der gestellten Aufgabe; die Lösung lässt sich nicht erweitern.

Ein Fortschritt besteht demnach wirklich im Abschwächen von Voraussetzungen, um so einen größeren Bestand mathematische: Gesetzmäßigkeiten zu erfassen. Immer wieder begegnet man diesem Sachverhalt. Wir wollen gleich noch ein besonders eindrucksvolles Beispiel betrachten und uns dabei von den Zahlen und Formeln erholen.

## 2.2 Geometrie des Gummis

Den sehr bedeutenden und ungemein vielseitigen Mathematiker Leonhard Euler beschäftigte einst die Frage, ob sich eine bestimmte Wanderung in der Stadt Königsberg durchführen ließe. Unsere Zeichnung veranschaulicht das Problem.
Man sieht einen Fluss mit verschiedenen Brücken, und es fragte sich: Kann man den Wanderweg so einrichten, dass er nur einmal über jede Brücke führt, dass aber auch keine Brücke ausgelassen wird?

Zunächst steht man etwas hilflos vor der Sache. Es handelt sich wohl um geometrische Verhältnisse, mit der Schulgeometrie haben sie aber nichts mehr gemein. Es kommt weder auf die Länge des Weges an noch auf die Winkel, die Brücken und Fluss miteinander bilden. Kurz, hatten wir vorhin bei der Summation uns freien Stücken auf das Schema verzichtet - so lässt uns hier das geometrische Schema seinerseits im Stich!
Man könnte versuchen, die Frage durch Probieren zu klären. Abgesehen aber davon, dass es mühsam wäre, befriedigt dieser Weg auch nicht, denn er führt auf gar keine neuen Einsichten. Des Probierens gäbe es kein Ende, jede neue Verteilung der Brücken, jeder abgeänderte Flussverlauf würden eine völlig neue Aufgabe bedeuten, für deren Lösung die Mühe vorher durchprobierter Fälle gar keinen Gewinn bedeutete.

Darum versuchte Euler von vornherein eine Überlegung anzustellen, die sich auf andere Fälle übertragen lässt. Da in Eulers Überlegungen die Maßverhältnisse der Geometrie ganz unterdrückt blieben, beginnt damit ein neues Wissen um Geometrie, das seitdem unter dem Namen Topologie selbständig wurde.
Heute geht man beim Aufbau der Topologie von ganz anderen Gesichtspunkten aus als Euler; wesentlich aber bleibt, dass sich die Topologie aus geometrischen Überlegungen herauskristallisierte, in denen sonst übliche Voraussetzungen abgeschwächt wurden, insofern als es hier weder auf Maße noch auf Geraden, weder auf Strecken noch auf Winkel mehr ankommt.

Um die Aufgabe, die Euler beschäftigte, zu lösen, betrachte man in der Zeichnung zunächst die Gebiete, zu denen drei Brücken führen, zum Beispiel das Flussdelta rechts. Es gibt offenbar nur zwei Möglichkeiten, wenn jede der drei Brücken einmal passiert werden soll: entweder gelangt man zweimal aus dem Delta hinaus und einmal hinein, oder man kommt zweimal hinein und geht einmal hinaus im Laufe der Wanderung.

Im ersten Fall muss die Wanderung im Delta beginnen, sonst könnte man sich aus ihm nicht zweimal bei nur einer Rückkehr entfernen, während im zweiten Fall die Wanderung aus ähnlichen Gründen im Delta enden muss. Was vom Delta gesagt wurde, gilt für die beiden anderen Gebiete mit drei Brücken ebenfalls. Insgesamt gibt es also drei solche Gebiete, in denen die Wanderung entweder beginnen oder enden müsste. Naturgemäß hat aber jede Wanderung nur einen Anfang und nur ein Ende, und darum bleibt die Forderung unerfüllbar: Es gibt keine Wanderung, die über jede der Brücken führt und über jede nur einmal.

Wie man sieht, handelt es sich um eine eigenartige Klasse geometrischer Probleme. Unsere Lösung verlief in einem Rahmen, in dem es weder auf die Geradlinigkeit der Figuren ankam noch auf deren Größenverhältnisse. Alles, was etwa von einer Figur behauptet wird, muss richtig bleiben, wenn man die Fläche aus einer Gummihaut herstellt, die Figur daraufzeichnet und hinterher die Gummihaut nach Belieben verzerrt.

Den Wissenszweig, der sich mit dieser Frage beschäftigt, die Topologie, könnte man darum auch eine Geometrie des Gummis nennen.

Unter diesen Umständen hätte es offenbar wenig Sinn, Winkel zu messen, denn sie verändern sich beim Zerren an der Gummihaut; ebenso steht es mit der Länge von Kurvenbögen.

Trotzdem findet man leicht Aussagen, die augenscheinlich in die Geometrie gehören und bei beliebiger Verzerrung der Gummihaut gültig bleiben. Beispielsweise teilt eine geschlossene Linie die Gummihaut so in zwei Teile, dass man aus dem einen nicht in den anderen gelangen kann, ohne die Linie zu passieren. Sie bildet eine Grenze zwischen den beiden Teilen, sie ist und bleibt es, wie immer ich auch die Gummihaut verzerre; hier liegt also ein einfachstes Gesetz aus der Gummigeometrie vor.

Nun bildet es eine Eigentümlichkeit derartiger Sätze, schwer beweisbar zu sein - wenigstens empfinden wir das so. Zwar hat sich unsere Anschauung im Alltag längst an derlei Dinge gewöhnt, wir haben aber unser Denken an ihnen noch nicht so weit geübt, dass uns ein rein logisches Schließen auf diesem Gebiet geläufig wäre. Das ist kein Wunder. Unser Verstand muss in Stufe für Stufe einen Turm von Erkenntnissen erklimmen, den die Menschheit nur ganz allmählich baut. Die Erkenntnisse bilden Bausteine, die wir uns entweder aus der Außenwelt holen - wie hier bei der Topologie - oder aber aus den Ergebnissen rein begrifflicher Schlussketten.

Groß bleibt dabei die Gefahr, den Turmbau von Babel zu wiederholen, die Spezialisierung ist gefährlich weit getrieben, ja auf Mathematiker-Kongressen müssen sich namhafte Teilnehmer verschiedener Fachgebiete, falls sie überhaupt miteinander reden wollen, schon heute nicht selten über das ... Wetter unterhalten!

## 2.3 Ein Soldat gerät in Verlegenheit

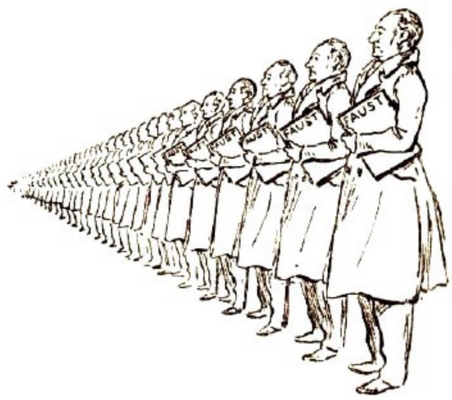
Wir verlassen die Gummigeometrie und wenden uns einer sehr modernen mathematischen Disziplin zu: der Mengenlehre.
Unter einer Menge versteht man dabei die Zusammenfassung von beliebigen Dingen. Es können stolze Rosse sein oder bescheidene Äpfel, ebenso aber Farben oder Zahlen, mithin sowohl wirkliche als auch gedachte Gegenstände. Das Zusammenfassen besorgt eine Vorschrift, wenn sie nur von jedem Gegenstand entscheidet, ob er zur Menge gehört oder nicht. Wir können zum Beispiel die Menge aller Deutschen betrachten, deren Körperlänge zwischen 1,60 und 1,80 Meter liegt. Hier entscheidet der Zollstock sofort, ob irgendein einzelner zu unserer Menge gehört - die Vorschrift ist klar. Leider sind wir aber nicht in der Lage, die Gesamtheit der zulässigen Vorschriften so einzuengen, dass nie Denkschwierigkeiten entstehen. Ein Beispiel möge das zeigen:

Ein Soldat soll die Leute aus seiner Kompanie rasieren, die sich nicht selbst rasieren. Das klingt vernünftig und harmlos. Darf nun unser Soldat sich selbst rasieren oder nicht? Bejaht man die Frage, dann lässt sich dagegen einwenden, dass der Soldat den Befehl nicht genau befolgt, denn er rasiert einen, der sich selbst rasiert, nämlich sich selbst.
Verneint man dagegen die Frage, dann handelt der Soldat wiederum gegen den Befehl, denn wenn er sich selbst nicht rasiert, müsste er das dem Wortlaut des Befehls nach doch tun! Hier versagt also unsere Vorschrift. Nur wenn der Soldat keinen Bartwuchs hat, bleibt das Dilemma gegenstandslos.

Die Mengenlehre wartet noch mit ganz anderen Überraschungen auf, die aus dem Wesen des Unendlichen folgen.
Nehmen wir einmal im Anschluss an Giordano Bruno an, dass es eine unendliche Anzahl von Welten gibt, deren Einwohner sich alle eines ähnlich regen geistigen Lebens erfreuen wie wir, also zum Beispiel auch Literatur treiben. Ihre Werke mögen in gedruckten Büchern niedergelegt sein, und wir fragen uns, wieviel solcher Werke es geben kann.

Zunächst ist klar: auch die unsterblichste Dichtung lässt sich mit rund 30 Schriftzeichen niederschreiben, die zu Wörtern und zum Text zusamengefügt werden. Gestatten wir großzügig Dichtungen bis zu 1000000 Wörtern und Wörter bis zu 50 Buchstaben! Dann lässt sich leicht berechnen, auf wie viele Arten man 30 Schriftzeichen zu 1000000 Wörtern anordnen kann. Die Aufgabe fällt in den Bereich der Kombinatorik und liefert eine zwar sehr große, aber doch

endliche Zahl.
Diese endlich vielen Werke müssten jetzt unter unendlich vielen Verfassern verteilt werden - denn wir haben angenommen, dass es unendlich viel Welten, also auch unendlich viel Schriftsteller gibt. Daraus folgt, dass mindestens eines der Bücher unendlich vielen Verfassern zugesprochen werden müsste.




Es könnte nun zutreffen, dass dieses Buch gerade "Faust" heißt und als Verfasser auf dem Titelblatt den Namen Goethe trägt. Dann hätte es also unendlich viele Schriftsteller namens Goethe gegeben; sie alle hatten Wort für Wort dasselbe gedichtet, ohne Plagiatoren zu sein. Verblüffend daran ist weniger, dass es unendlich viele Goethe, als vielmehr, dass es nicht nur einen einzigen gegeben haben soll. Dies ergibt sich offensichtlich schon dann, wenn die Anzahl der Welten gehörig groß ausfällt, ohne unendlich zu sein.

Zu dem gleichen Schluss gelangt man auch dann noch zwangsläufig, wenn man annimmt, unsere Welt dauerte ewig. Denn die, wie wir gesehen haben, endlich vielen Bücher mussten auch diesmal wieder auf unendlich viele Schriftsteller verteilt werden, und wie vorhin wird man dabei auf eine Legion Goethe geführt. In früheren Zeiten hätte man dies als Beweis für die endliche Dauer unserer Welt betrachtet.

## 2.4 Das Einmaleins mit Unendlich

Handelte es sich eben um eine paradoxe Folgerung, so dringt die nächste Überraschung, die uns das Unendliche beschert, viel tiefer. Wie wir schon hörten, verlangte einst das Orakel die Verdoppelung des Würfels.
Versucht man, die Kantenlänge eines Würfels von doppeltem Rauminhalt wirklich zu berechnen, dann ergibt sich ein unendlicher Dezimalbruch 1,259... - die Rechnung bricht nie ab. Wie weit man nun bis heute vorgedrungen ist, die Ziffernfolge 1 2 3 5 7 ist in diesem Bruch nicht aufgetreten, und so bleibt es dahingestellt, ob sie bei fortgesetzter Berechnung doch noch zum Vorschein kommt. Wenn ich also als Vorschrift für die Zugehörigkeit zu einer Menge die Forderung wähle, alle und nur diejenigen Zahlen zusammenzufassen, die obige Ziffernfolge enthalten, so weiß ich nicht, ob die Kantenlänge des neuen Würfels dazu gehört oder nicht: die Vorschrift trifft zwar eine Entscheidung, man kann diese aber nicht wahrnehmen!

Besteht nach allem noch Aussicht, Rechenregeln für dieses tückische Unendlich zu finden, um es mathematisch einzufangen und eine Arithmetik des Unendlichen aufzustellen? Überraschenderweise ja - freilich nur, wenn man darauf verzichtet, sämtliche Rechenregeln aus der Arithmetik der gewöhnlichen Zahlen wiederzufinden.
Das folgt aus der Bedeutung des Unendlichen als Anzahl, wenn der Begriff der Anzahl dahin erweitert wird, dass nicht allein Mengen aus nur endlich viel Elementen betrachtet werden, sondern eben auch unendliche Mengen. Wieder wird also eine einengende Voraussetzung abgeschwächt!

Der Begriff der Anzahl gestattet diese Verallgemeinerung unmittelbar, wenn man nur bedenkt, wie er im üblichen Fall von Mengen mit endlich viel Elementen erfasst werden muss. So selbstverständlich uns dieser Begriff erscheint, so genau wir zu wissen meinen, was eine "Anzahl" bedeutet, der Mathematiker kann sich mit solchem Alltagswissen nicht zufrieden geben, sondern muss eine scharfe, präzise Definition finden. Das geschieht mit Hilfe der "eineindeutigen Abbildung" , eines für die ganze moderne Mathematik grundlegenden Begriffes. Das mathematische Kunstwort "eineindeutig" bedeutet eine Verschärfung des gewöhnlichen Ausdrucks "eindeutig" .

Ein Beispiel: Fünf Pferde und fünf Reiter stellen zwei Mengen dar; sie lassen sich eineindeutig aufeinander abbilden, indem man jeden der Reiter auf eines der Pferde aufsitzen lässt. Wesentlich daran ist, dass je ein Element aus der einen Menge mit einem Element aus der anderen Menge gepaart wird und dabei kein Element einsam bleibt. Kein Reiter blieb ohne Pferd, aber auch kein Pferd herrenlos. Man erkennt, dass die beiden Anzahlen gleich sind, weil die beiden Mengen eineindeutig aufeinander abgebildet werden konnten. Das gilt augenscheinlich ganz allgemein, so dass die Anzahlen van zwei Mengen dann, und nur dann, gleich ausfallen, wenn zwischen den beiden Mengen eine eineindeutige Abbildung gestiftet werden kann.

Enthält die eine Menge mehr Elemente als die andere, gibt es beispielsweise sechs Reiter und nur fünf Pferde, dann bleibt ein Reiter zu Fuß. Man kann zwar jetzt noch die Pferde eindeutig auf die Reiter "abbilden" , kein Pferd herrenlos lassen, aber diese Abbildung lässt sich nicht umkehren. Ein Reiter bleibt zu Fuß, wie gesagt, oder zwei müssen sich mit einem und demselben Pferd bescheiden. Die Abbildung ist zwar eindeutig, aber nicht mehr "eineindeutig" , das heißt nicht eindeutig umkehrbar; so rechtfertigt sich die Einführung des Kunstwortes, mag es auch wenig schön gebildet sein. Es kann aber von beiden Mengen die nur, die Menge der Pferde, auf einen echten Teil der anderen, auf fünf von den sechs Reitern, eineindeutig bezogen werden.

Augenscheinlich gilt das wiederum für beliebige endliche Anzahlen, so dass wir sagen können: je nachdem von zwei endlichen Mengen die erste auf die zweite eineindeutig abgebildet werden kann oder aber die erste auf einen echten Teil der zweiten, sind die dazugehörigen Anzahlen gleich oder aber ist die erste kleiner als die zweite. Kurz, zwei endliche Mengen kann man stets auf ihre Anzahlen hin miteinander vergleichen.

Wie weit kann das verallgemeinert und auf unendliche Mengen übertragen werden? Zunächst redet man hier nicht mehr von Anzahlen, sondern nennt den entsprechenden Begriff die "Mächtigkeit" der unendlichen Menge, und man kann leider auch nicht mehr von vornherein behaupten, dass zwei unendliche Mengen sich auf ihre Mächtigkeiten hin stets miteinander vergleichen lassen. Es lässt sich nämlich nicht mehr wie im Fall von endlichen Mengen der Satz aufrechterhalten, dass die eine entweder auf die ganze andere Menge eindeutig abgebildet werden kann oder auf einen echten Teil von ihr.
Bei genauerem Zusehen erkennt man, dass diese Abbildung auf der Möglichkeit beruht, die Elemente von endlichen Mengen in eine Reihenfolge zu bringen, sie "wohlzuordnen" . Streicht man dann vom Anfang dieser Reihe Elemente weg, so besitzt die restliche Menge wiederum ein erstes Element, und die eineindeutige Abbildung erfolgt derart, dass man in beiden Mengen zunächst das erste Element streicht und als gepaart betrachtet, dann das zweite, und das so lange fortsetzt, bis die eine Menge oder beide Mengen zugleich erschöpft sind.

Danach bleibt zu erwarten, dass auch bei unendlichen Mengen erst eine "Wohlordnung" ihre Vergleichbarkeit erwirken wird. Zum Herbeiführen einer Wohlordnung genügt schon die Annahme, dass von vornherein aus jeder Teilmenge ein Element als ausgewählt gilt, ähnlich dem ersten Element in den Restmengen von vorhin. Diese Annahme bildet einen neuen Grundsatz, und aus ihr wird die Wohlordnung mit einer scharfsinnigen Überlegung erschlossen, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Es sei nur vermerkt, dass die meisten Mathematiker den ersten Beweis seinerzeit völlig missverstanden haben.

Die denkbar einfachste unendliche Menge bilden die natürlichen Zahlen, also 1, 2, 3, 4, 5, ..., die man auch eine Folge nennt. Die Mächtigkeit dieser Menge stellt das kleinste Unendlich dar. Denn jeder unendlichen Menge kann offensichtlich eine ganze Folge von Elementen entnommen werden, und wenn dann noch Elemente übrigblieben, so wäre die Menge "größer" als die einfache Folge. Vielleicht aber ist gerade diese Nichtigkeit der Folge das einzige Unendlich, dem alle anderen gleich sind?
Die Frage muss verneint werden, denn es lässt sich zeigen, dass die Menge aller reellen Zahlen - die alle endlichen und unendlichen Dezimalbrüche umfasst - eine größere Mächtigkeit besitzt. Ob aber zwischen diesen beiden Mächtigkeiten noch andere liegen, konnte bis heute nicht entschieden werden; die Frage bildet das heiß umstrittene "Kontinuumproblem" .

Zum Beweis für unsere Behauptung nehmen wir zunächst an, die Menge aller reellen Zahlen sei abzählbar, bilde mithin eine Folge. Nun denke man sich die Dezimalentwicklung der einzelnen Zahlen ins Unendliche fortgesetzt, was stets und, wenn man Ziffernfolgen mit lauter 9 ausschließt, nur auf eine Weise möglich ist. Bei den ganzen Zahlen stehen dann hinter dem Komma lauter Nullen. Bei den echten Brüchen befolgen die Ziffern leicht überschaubare Regeln; beispielsweise ist $\frac{1}{2} = 0,5000...$, $\frac{1}{3} = 0,3333...$ Durch alle übrigen Dezimalbrüche, deren Bildungsgesetz nicht überschaubar ist, wird das Reich der reellen Zahlen dann vervollständigt.

Nun betrachtet man die Folge dieser Dezimalbrüche und konstruiert eine neue Zahl auf folgende Weise. Man wählt eine Ziffer, die von der ersten Ziffer hinter dem Komma im ersten Element verschieden ausfällt, daraufhin eine weitere Ziffer, die von der zweiten Ziffer hinter

dem Komma im zweiten Element verschieden ist, und so fort. Man erhält so eine Ziffernfolge, die, als Dezimalbruch gelesen, von jedem Element in der Folge abweicht, vom ersten beispielsweise in der ersten Stelle hinter dem Komma.
Da die so konstruierte Zahl sich nicht unter den Elementen der Folge befindet, aber zweifellos eine reelle Zahl darstellt, umfasst also die Folge noch nicht alle reellen Zahlen. Bei der Abzählung bleiben noch Elemente übrig.
Also fällt die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen größer aus als das kleinste Unendlich, was zu beweisen war.

Schreibt man übrigens die aufeinanderfolgenden Elemente der Folge untereinander und verbindet die abzuändernden Ziffern durch eine Gerade miteinander, so verläuft diese als Diagonale, und darum redet man bei diesem Beweis mitunter von einem Diagonalverfahren.

Man kann noch weiter gehen und zu jeder Mächtigkeit einer beliebigen Menge $M$ sofort eine andere nennen, die noch größer ausfällt. Man hat dafür nur die Menge $\mathfrak{M}$ aller Teilmengen der vorliegenden Menge $M$ zu bilden. Man bedenke dann zunächst, dass $M$ auf einen echten Teil von $\mathfrak{M}$ eineindeutig abgebildet werden kann, wenn man nämlich jedes Element $m$ aus $M$ mit dem Element aus $\mathfrak{M}$ paart, das gerade die Teilmenge ist, die aus dem einzigen Element $m$ besteht.
Bei dieser Paarung bleiben Elemente aus $\mathfrak{M}$ einsam, beispielsweise Teilmengen, bestehend aus zwei Elementen von $M$. Vielleicht aber könnte $M$ durch eine andere Paarung doch noch auf die vollständige Menge $\mathfrak{M}$ eineindeutig abgebildet werden?

Es geht jetzt darum, diese Hoffnung zu zerstören. Wenn irgendeine Paarung vorliegt, so fasse man diejenigen $m$ zu einer Menge $N$ zusammen, denen Teilmengen zugeordnet sind, die $m$ nicht enthalten. Wir behaupten dann, dass $N$ einsam ausfällt. Sonst nämlich müsste $N$ entweder das ihm zugeordnete zu enthalten, was der Erklärung von $N$ widerspricht, oder das ihm zugeordnete $m$ nicht enthalten, entgegen der Vorschrift für die Bildung von $N$, nach der $m$ dann in $N$ aufzunehmen wäre.

Nach allem erheischen die Begriffe Gleichheit und Ungleichheit bei unendlichen Mengen besondere Untersuchungen, die mitunter zu neuen Überraschungen führen. So gehe man von der Menge der ersten 100 Zahlen aus: 50 darunter sind gerade Zahlen, also genau die Hälfte. Bei 1000 wären es 500, wiederum die Hälfte. Es wäre jedoch verfehlt, bei der unendlichen Folge 1, 2, 3, 4, ... Ähnliches zu erwarten.
Im Gegenteil, die Menge aller geraden Zahlen besitzt dieselbe Mächtigkeit wie die ganze Folge, trotzdem sie nur einen echten Teil von ihr ausmacht. Denn man kann die geraden Zahlen der Größe nach in eine Folge bringen, und zwei Folgen lassen stets eine Paarung zu, indem Elemente einander zugeordnet werden, die gleich weit stehen. Insbesondere fallen also die Folge aller ganzen Zahlen und die Folge der geraden Zahlen gleich mächtig aus. Damit fällt das Glaubensbekenntnis "totum parte maius" , das Ganze ist mehr als der Teil.

Nachdem feststeht, dass es unendlich viel verschiedene Mächtigkeiten gibt, heißt es, Rechenregeln für sie aufzustellen. Hier seien nur Beispiele angeführt, um einen Eindruck von der eigenartigen Arithmetik des Unendlichen zu vermitteln. Zunächst erklären wir die Summe.
Haben endliche Mengen kein gemeinsames Element, so vereint man ihre Elemente zu einer neuen Menge, die Summe heißt, weil die ihr zukommende Anzahl die Summe von den Anzahlen der beiden Mengen darstellt. Haben wir also eine Menge von 5 weißen Schafen, eine zweite Menge von 7 schwarzen Schafen, so bilde man die Menge aller dieser Schafe als Summe: für deren Anzahl ergibt sich 12. Dies lässt sich unmittelbar auf unendliche Mengen übertragen,

und man erkennt sofort, dass es auf die Reihenfolge der Summanden gut nicht ankommt.

Der einschneidende Unterschied zwischen der gewöhnlichen Arithmetik und der von unendlichen Mengen kommt bereits bei dieser einfachsten Rechenoperation zum Vorschein. Für Anzahlen gilt stets der Satz

$$a + b \neq a \qquad (a \text{ plus } b \text{ ist ungleich } a)$$

während sich die Nichtigkeit einer unendlichen Menge nicht ändert, wenn man eine Folge zu ihr addiert. Wir erinnern daran, dass sich aus jeder unendlichen Menge $M$, deren Mächtigkeit gleich $a$ sei, stets eine Folge $f$ abspalten lässt, so dass man

$$a = b + f$$

schreiben kann, wenn $b$ die Mächtigkeit der Restmenge bezeichnet, die nach Abspalten der Folge aus der Menge übrigbleibt. Damit erhält man

$$a + f = (b + f) + f = b + (f + f)$$

Wenn man sich jetzt in der Klammer rechts die erste Folge aus den geraden Zahlen bestehend denkt und die zweite aus den ungeraden Zahlen, dann leuchtet es ein, dass durch Vereinigen von beiden Folgen gerade die Folge aller natürlichen Zahlen entsteht. Das besagt

$$f + f = f$$

und damit gilt weiter

$$b + (f + f) = b + f$$

Nach der ersten Gleichung ist aber $b + f = a$, das heißt wir haben endlich

$$a + f = a$$

so dass die behauptete Gleichheit tatsächlich erwiesen ist: durch Addieren einer Folge ändert sich die Nichtigkeit einer unendlichen Menge nicht.

In der Mengenlehre besitzt man eine mathematische Lehre, die an Sachkenntnissen nichts voraussetzt. Streng genommen bilden sogar die natürlichen Zahlen einen Gegenstand der Mengenlehre und wären erst innerhalb dieses Rahmens einzuführen. Dafür stellt freilich die Mengenlehre stellenweise nicht geringe Anforderungen an ein abstraktes Denken, unserer Überzeugung nach aber bildet das nur einen vorübergehenden Zustand, der nach längerer Gewöhnung an die mengentheoretischen Überlegungen einem emporkeimenden Anschauungsvermögen weicht.

Wir haben Denkschwierigkeiten kennengelernt, die innerhalb der Mengenlehre auftreten. Das jedoch bildet keinen Einwand gegen sie und wurde auch eher als Anregung aufgefasst, das naive Schlussverfahren so einzuengen, dass ein Auftreten von derartigen Schwierigkeiten ausgeschlossen bleibt. Viel wurde schon darüber geschrieben, aber noch steht die Lösung dieses gordischen Knotens aus. Wie dem auch sei, man erkennt an Hand der naiven Mengenlehre begriffliche Möglichkeiten, an die früher die größten Geister nicht dachten, und die uns erst eigentlich klarmachen, wie weit wir in überkommenen Vorstellungen denken. Allein dieser Umstand leistet unschätzbare Dienste.

Weiter erkennt man in der Mengenlehre eine Arithmetik, die vieles davon preisgeben muss, was sonst im Reich der gewöhnlichen Zahlen als selbstverständlich gilt: Die Gleichheit einer

Summe mit einem der Summanden wäre im Reich der natürlichen Zahlen undenkbar, während sie für Mächtigkeiten sehr wohl zutreffen kann. Die Beispiele ließen sich leicht mehren, uns liegt aber nicht daran, einen vollständigen Bericht zu erstatten, sondern nur an einem befreienden Blick in die Werkstatt, wo die neuesten mächtigen Waffen des Menschengeistes geschmiedet werden.

Überraschung auf Überraschung erlebt man dabei: Antinomien, Aussagen also, die mit gleichem Recht bejaht wie verneint werden können, ähnlich dem Soldaten, der nicht weiß, ob er sich rasieren soll oder nicht, und Paradoxien wie die Legion Goethe. Der als selbstverständlich geltende Satz, dass das Ganze mehr ist als ein Teil, erweist sich in der Mengenlehre als unhaltbar, weil zwei gleich mächtige Mengen zueinander sehr wohl im Verhältnis des Ganzen zum Teil stehen können.
Eine weitere Überraschung bildet die Einsicht, dass man nicht behaupten darf, zwei beliebige Mengen stets miteinander vergleichen zu können. Erst wenn sie wohlgeordnet vorliegen, sind ihre Mächtigkeiten mit Bestimmtheit vergleichbar. Aus allem geht hervor, dass man sich in der Mengenlehre zwar wiederholt an natürlichen Zahlen orientiert hat, durch Abschwächen der Voraussetzungen sich aber Folgerungen von mitunter erheblich verschiedenem Charakter ergeben haben, die eine wirklich neue Lehre darstellen.

## 2.5 Galois begründet die moderne Algebra

### Ein Siebzehnjähriger begründet die moderne Algebra

Stellt die Mengenlehre eines der jüngsten Fachgebiete der Mathematik dar, so darf sich die Algebra, deren Gedankenwelt wir uns jetzt zuwenden wollen - und die ebenfalls aus arithmetischen Anfängen erwuchs -, eines sehr ehrwürdigen Alters rühmen. Die ersten Ansätze liegen Jahrtausende zurück; und auch die Bezeichnung "Algebra" - die Verstümmelung eines arabischen Buchtitels - wurde bereits im frühen Mittelalter gebräuchlich.

Die Algebra beschäftigt sich zunächst mit der Auflösung von Gleichungen, wie sie uns aus der Schule ja noch in mehr oder weniger angenehmer Erinnerung sind, also mit Ausdrücken von der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{oder} \qquad ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$$

Die Koeffizienten $a$, $b$, $c$, $d$, für die wir die allgemeine Buchstabenbezeichnung gewählt haben, dachte man sich anfangs als Zahlen; und man suchte nun für $x$ solche Zahlwerte zu bestimmen, die der Gleichung genügen; diese Zahlwerte heißen bekanntlich die Wurzeln der Gleichung, zum Beispiel hat die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

die beiden Wurzeln $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{1}{2}$, wie man sich durch Einsetzen sofort überzeugen kann. Freilich gibt sich damit der Mathematiker nicht zufrieden, die Wurzeln etwa durch Probieren zu finden, denn Probieren, und sei es noch so erfolgreich, liefert niemals neue Erkenntnisse. Der Algebraiker versucht vielmehr, die allgemeinen Gesetze aufzuspüren, denen die Gleichungen und ihre Wurzeln genügen. Er wird nach Formeln suchen, welche die Wurzeln der Gleichung unmittelbar aus den Koeffizienten zu berechnen gestatten. Für die quadratische Gleichung sehen diese Formeln verhältnismäßig einfach aus,

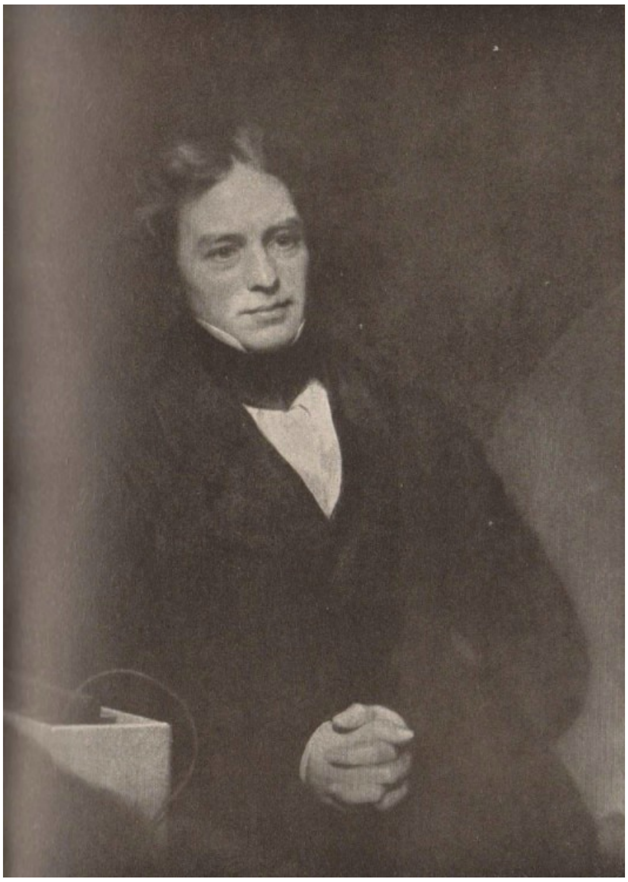
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In dieser Formel sind, darin liegt ihr großer Wert, sämtliche quadratischen Gleichungen gewissermaßen verdichtet. Man braucht nur für $a$, $b$, $c$ die besonderen Zahlenwerte einzusetzen, um sofort die Wurzeln bereit zu haben. Mit einer Einschränkung freilich: Es lassen sich sehr leicht Fälle angeben, in denen die Wurzelformel auf keinen reellen Wert führt. So besitzt z.B. die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

keine reelle Wurzel. Im Mittelalter wurde diese Aufgabe denn auch schlechterdings für "unmöglich" erklärt. Der moderne Mathematiker ist vorsichtiger in der Verwendung des Begriffs "unmöglich" .

Wir haben schon oft gesehen, wie man durch Abschwächen von Voraussetzungen zu neuen Begriffen verstößt. So geschah es auch hier. Um die "unmögliche" Gleichung zu lösen, erweitert man bekanntlich die Menge der reellen Zahlen durch die Einführung der "imaginären Zahl" $i = \sqrt{-1}$ zur Menge der komplexen Zahlen. Die komplexen Zahlen stellen eine Verallgemeinerung des Zahlbegriffes dar; die reellen Zahlen bilden einen Spezialfall in diesem größeren Reich.
Ursprünglich wurden die komplexen Zahlen eng im Anschluss an die speziellen Probleme eingeführt, bei deren Lösung sie sich als notwendig erwiesen.

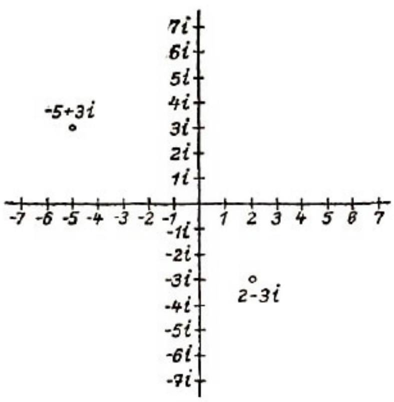


Michael Faraday. Gemälde von Thomas Phillips. London, National Portrait Gallery

Évariste Galois. Zeitgenössische Zeichnung

Als erster betrachtete sie der Arzt, Philosoph und Mathematiker, außerdem Spaltungsirre Cardano im Jahre 1545 als Wurzeln $5 + \sqrt{-15}$ und $5 - \sqrt{-15}$ der quadratischen Gleichung $x^2 - 20x + 40 = 0$ und rechnete mit ihnen, bezeichnete sie aber als "sophistisch" und fügte eilig hinzu: "so weit erstreckt sich die Feinheit der Arithmetik, doch ist dieses Äußerste so subtil, dass es von keinem Nutzen ist!"

Selbst ein Leibniz erklärte sie noch 1702 für "eine Missgeburt der Gedankenwelt" . Es mussten weitere Jahrhunderte vergehen, bis Henkel im Jahre 1867 als wegweisendes Prinzip, als sein "hodegetisches Prinzip der Permanenz" , erkannt hat, dass es für die algebraischen Rechnungen gleichgültig ist, ob sie an reellen oder an komplexen, ja, soweit ausführbar, an ganzen oder an rationalen Zahlen vorgenommen werden.



Die Ebene der komplexen Zahlen

In der Zwischenzeit zog man die komplexen Zahlen erst schüchtern, dann, nachdem d'Alembert und Euler 1746 ihren Nutzen gezeigt haben, konsequent heran, sie blieben aber trotzdem mehr geduldet als anerkannt, bis Gauß endlich in seiner Doktorarbeit 1799 der Nachweis gelang, dass sie unentbehrlich sind, während sie in geometrischer Einkleidung bereits zwei Jahre vorher in der Mitteilung von Wessel an die Dänische Akademie vorkommen. Erst Cauchy hat später, im Jahre 1847, einen Weg eingeschlagen, der im Sinne der modernen Algebra verläuft, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Die moderne Algebra nahm erneut eine Wendung zum Abstrakten, indem man nicht mehr von Zahlen ausgeht, sondern von allgemeineren Größen, die entstehen, wenn man nur noch gewisse Eigenschaften der Zahlen aufrechterhält und das übrige abstreift. Damit gewinnt man eine allgemeine Lehre, in der die gewöhnliche Algebra als Sonderfall aufgeht. Wir müssen uns zunächst mit einem grundlegenden mathematischen Begriff vertraut machen: mit der "Gruppe" .

Unter einer Gruppe versteht man eine gewisse - endliche oder unendliche Menge - von Größen, welche bestimmten Beziehungen genügen. Die Formulierungen werden zunächst etwas abstrakt erscheinen, wirken aber sofort vertraut, wenn man sich an einfachen Beispielen vergegenwärtigt, wie sie aussehen.

Zwischen den Elementen $a$, $b$, $c$, ... einer Gruppe herrscht eine gewisse Zusammensetzungsvorschrift. Setzt man irgend zwei Elemente der Gruppe, zum Beispiel $a$ und $b$, nach dieser Vorschrift zusammen, so ergibt sich ein neues Element, das mit $ab$ bezeichnet wird und, so wird gefordert, ebenfalls der Gruppe angehören muss. Für diese Zusammensetzung verlangt man ferner die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes: es soll in einer leicht verständlichen Schreibweise

$$(ab)c = a(bc)$$

sein. Weiter muss die Gruppe ein besonderes Element $e$ enthalten, welches bei der Zusammensetzung jedes Elements $a$ wieder in sich selbst überführt; es soll also gelten

$$ea = a$$

$e$ heißt dann linksseitiges Einheitselement der Gruppe. Endlich fordern wir noch, dass es zu jedem Element $a$ ein anderes Element $a^{-1}$ in der Gruppe gibt, so dass die Gleichung

$$a^{-1}a = e$$

besteht. $a^{-1}$ heißt das linksseitig reziproke Element von $a$. Wenn außerdem die Gleichung

$$ab = ba$$

für irgend zwei Elemente $a$ und $b$ der Gruppe gilt - das heißt, wenn durchweg das kommutative Gesetz gültig ist -, so redet man von einer Abelschen Gruppe, so genannt nach einem jung verstorbenen norwegischen Mathematiker; das bedeutet aber, wie ersichtlich, bereits eine Spezialisierung. Am besten macht nun sich diese Verhältnisse an einem geläufigen Beispiel klar.

Als Gruppe wähle man sämtliche Brüche unter Ausschluss der Null; als Zusammensetzungsvorschrift die gewöhnliche Multiplikation. Ist dann zum Beispiel $a = \frac{2}{7}$, $b = \frac{3}{5}$, so wird

$$ab = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$$

Das ist offenbar wieder ein Bruch, gehört also wirklich der Gruppe an, wie es sein muss. Das Einheitselement dieser Gruppe ist offenbar $e = 1$.

Denn wenn $a$ irgendeinen Bruch bedeutet, zum Beispiel $\frac{4}{17}$, so ist $1 \cdot \frac{4}{17} = \frac{4}{17}$, die Multiplikation mit 1 führt jedes Element in sich selbst über. Natürlich wird die 1, wie jede ganze Zahl, auch als Bruch betrachtet: $1 = \frac{1}{1}$; $19 = \frac{19}{1}$.
Fragen wir endlich nach dem reziproken Element, so ist auch das leicht zu finden. Definitionsgemäß sollte $a^{-1}a = 1$ sein, also wird jetzt

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

in unserem Beispiel: das reziproke Element für $\frac{2}{7}$, heißt $1 : \frac{2}{7} = \frac{7}{2}$, das heißt: das reziproke Element entsteht durch Vertauschen von Zähler und Nenner eines Elements.

Wir können die Brüche noch auf andere Weise zu einer Gruppe zusammenfassen: die Null wird in die Gruppe aufgenommen, und als Zusammensetzungsvorschrift wird die gewöhnliche Addition bestimmt.
Unter dem Ausdruck $ab$ ist dann die Summe zweier Elemente $a + b$ zu verstehen. Das Einheitselement wird hier $e = 0$, denn es ist

$$es = e + a = 0 + a = a$$

und das reziproke Element entsteht durch Vorzeichenwechsel:

$$a^{-1} = -a, \qquad \text{denn es ist} \qquad -a + a = 0 = e$$

wie verlangt. Augenscheinlich ist auch hier die Gruppenforderung erfüllt.

Der Gruppenbegriff geht über den Mengenbegriff insofern hinaus, als es hier in der Zusammensetzungsvorschrift eine Verknüpfung zwischen den Elementen gibt, während diese in der Menge ganz beziehungslos nebeneinander existieren.
Noch in anderer Hinsicht geht man jetzt abweichend vor. Hatten wir bei Mengen stets nach eineindeutigen Abbildungen gesucht - als dem einzigen Mittel, welches uns gestattete, zwei Mengen ihrer Mächtigkeit nach miteinander zu vergleichen -, so lassen wir diese Forderung jetzt fallen, erheben aber dafür eine andere: die Abbildung soll das Ergebnis von Verknüpfungen wahren, die zwischen den Elementen der Gruppe bestehen.

Darunter versteht man folgendes. Sind $a$, $b$, $c$, ... die Elemente einer Gruppe, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... die

Elemente einer zweiten Gruppe, und geht durch unsere Abbildung $a$ in $\alpha$, $b$ in $\beta$ über, so soll stets auch das Element $ab$ in $\alpha\beta$ übergehen. Erfüllt die Abbildung diese Forderung, so heißt sie homomorph, "gleichgestaltig" - weil beide Gruppen offenbar verwandten Aufbau zeigen. Die Abbildung besorgt eine Art Verkleinerungsglas.

Wohlgemerkt, es ist jetzt keineswegs mehr notwendig, dass sich die Elemente beider Gruppen paarweise zusammenfinden, dass jedem Element einer Gruppe auch eines und nur eines der zweiten Gruppe entspricht; im Gegenteil, man gewinnt durch die homomorphe Abbildung nun die wichtige Möglichkeit, eine unendliche Gruppe auf eine endliche Gruppe zurückzuführen.

Ein Beispiel möge das erläutern. Wir betrachten die Gruppe aller ganzen Zahlen und fassen in ihr gewisse Elemente folgendermaßen zu Klassen zusammen: man wähle eine feste Zahl $m$ und rechne alle Zahlen, die bei der Division durch zu denselben Rest lassen, zu einer und derselben Klasse. Wählen wir etwa $m = 5$, so ergeben sich fünf Klassen:

| | | |
|---|---|---|
| 0, 5, 10, 15 | ...... | (Rest 0) |
| 1, 6, 11, 16 | ...... | (Rest 1) |
| 2, 7, 12, 17 | ...... | (Rest 2) |
| 3, 8, 13, 18 | ...... | (Rest 3) |
| 4, 9, 14, 19 | ...... | (Rest 4) |

Alle Zahlen aus einer Klasse ordnen wir jetzt durch die homomorphe Abbildung dem entsprechenden Divisionsrest zu; die Zahlen 0, 5, 10, ... entsprechen also alle dem Element 0, die Zahlen l, 6, 11, ... dem Element 1 usw. Von einer Eineindeutigkeit kann hier offenbar keine Rede sein - es sind ja die unendlich viel Zahlen jeder Klasse auf eine einzige Zahl, den Divisionsrest, abgebildet. Wir müssen nun untersuchen, ob die Homomorphie wirklich besteht, ob also das Element $ab$ auch Wirklich in $\alpha\beta$ übergeht.

Wählen wir zwei beliebige Zahlen, etwa 6 und 13, so gibt deren Zusammensetzung 19; in unserer Abbildung entsprach die 0 dem Rest 1, die 13 dem Rest 3; setzen wir beide zusammen, in ergibt sich 4, und tatsächlich ist die 19 dem Rest 4 zugeordnet - unsere Forderung ist also erfüllt.

In der Zahlentheorie spielen solche Verfahren eine wesentliche Rolle. Man kann nun weitergehen und statt einer einzigen Zusammensetzungsvorschrift deren mehrere betrachten: so gelangt man zu Begriffsbildungen, welche erst rückwirkend völlige Klarheit in der älteren Algebra schaffen.

Eine Menge, zwischen deren Elementen zwei Zusammensetzungsvorschriften erklärt sind, die zueinander im Verhältnis der Addition zur Multiplikation stehen, heißt ein Ring. Wenn auch noch die Division stets ausführbar ist, redet man von einem Körper. Diese Begriff von Ring und Körper wurden hier - ohne Wesentliches aufzugeben - enger als üblich gefasst. Beispielsweise bildet die Menge aller ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation als Zusammensetzungsvorschriften einen Ring, aber noch keinen Körper. Um zu einem Körper zu gelangen, muss der Ring aller ganzen Zahlen erst durch Hinzunahme sämtlicher Brüche erweitert werden. Dies bekannte Vorgehen bietet zugleich ein Vorbild dafür, wie das bei einem beliebigen Ring zu geschehen hat.

Wiederum bleibt zu untersuchen, wie ein Ring durch Abbildungen verändert wird, welche jetzt beide Zusammensetzungsvorschriften zugleich berücksichtigen: also $a + b$ in $\alpha + \beta$ und $ab$ in $\alpha\beta$ überführen. Solche Abbildungen heißen auch diesmal homomorph, und ähnlich wie bei Gruppen kommt man weiter dazu, mehrere Elemente zu Klassen zusammenzufassen.

Um noch die Terminologie des Algebraikers anzuführen: in einer Gruppe heißt die Klasse, welche das Einheitselement enthält, Normalteiler, entsprechend nennt man die Klasse von Elementen in einem Ring, zu der die Null (mit anderen Worten das Einheitselement der Addition) gehört, ein Ideal. Normalteiler und Ideal können ihrerseits dazu dienen, die Homomorphie in die Wege zu leiten, was ihnen eine Schlüsselstellung sichert.

Ideale können als Zahlen aufgefasst werden, für die sich ähnlich wie für gewöhnliche Zahlen eine Teilbarkeitslehre entwickeln lässt. Insbesondere gilt für sie eine Zerlegung in gewisse Ideale, die sich dadurch als einfachste Bausteine erweisen, aus denen sich jedes Ideal aufbaut. Damit gelang die Übertragung eines grundlegenden Satzes aus der Zahlentheorie: jede natürliche Zahl lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt von Primzahlen schreiben, beispielsweise 6 als $2 \cdot 3$ oder 63 als $3 \cdot 3 \cdot 7$. Alle diese abstrakten Begriffsbildungen lassen sich gut an zwei einfachen Beispielen verfolgen. Das eine Beispiel bildet der Ring der ganzen Zahlen, das zweite die Menge aller Ausdrücke der Gestalt

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

mit beliebigen $n$ und Koeffizienten aus einem Körper. Die einzelnen Sätze, zu denen die Teilbarkeitslehre von Idealen in diesen beiden Fällen führt, waren freilich schon vorher bekannt, wie denn überhaupt die moderne Algebra erst so entstand, dass man auf die Wiederkehr derselben Schlussweisen in verschiedener Einkleidung aufmerksam wurde und nun die tief liegenden Gemeinsamkeiten herausschälte.

Wie lässt sich nun das ursprüngliche Problem, Gleichungen wie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$$

aufzulösen, im Rahmen der modernen Algebra behandeln?
Anfangs hoffte man die Wurzeln stets als algebraische Ausdrücke aus den Koeffizienten gewinnen zu können, nachdem das für Gleichungen der vier untersten Grade gelungen war. Diese Hoffnung schwand aber immer mehr, als alle Bemühungen erfolglos blieben, und machte endlich, zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts, der Überzeugung Platz, dass allgemeine Gleichungen fünften und höheren Grades algebraisch nicht mehr auslösbar sind. Wohl ist eine Gleichung wie

$$x^5 - 1 = 0$$

algebraisch auflösbar in der Form $x = \sqrt[5]{1}$, doch ist das für eine beliebige Gleichung fünften Grades nicht mehr der Fall. Der Beweis für diese Behauptung beruht auf Untersuchungen, die sich mit unseren Begriffsbildungen wie folgt in Angriff nehmen lassen. Es sei dazu bemerkt, dass zwar der geschichtliche Weg scheinbar erheblich von dem unseren abweicht, die Originalarbeiten sich aber nachträglich wie von selbst in unserem Sinne ausrichten und so erst Verständnis für die Berechtigung der modernen Algebra erbringen.

Man geht von einem Körper aus und erweitert diesen durch Hinzunahme einer Wurzel von einer Gleichung, deren Koeffizienten aus dem Körper stammen. Auf diese Weise gelangt man ja, von den reellen Zahlen ausgehend, zu den komplexen Zahlen: man fügt zum Körper der reellen Zahlen die mit $i$ bezeichnete Wurzel der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hinzu, $i = \sqrt{-1}$.
Es kommt nun darauf an, die neue Größe - die Wurzel, welche dem $i$ entspricht - den beiden Zusammensetzungsvorschriften für Körperelemente unterzuordnen, was durch die Vermittlung von Idealen geschieht. Genauer gesagt handelt es sich dabei erst um die Schöpfung der neuen Größe und hinterher um ihre Einordnung in den umfassenden Körper. Die nächste Frage

lautet dann nach dem Verhältnis aller der Körper zueinander, die aus einem und demselben Körper dadurch hervorgehen, dass zur Erweiterung verschiedene Wurzeln derselben Gleichung herangezogen werden.
Diese Körper fallen alle zusammen und bieten damit einen Ansatz für das Eingreifen der Gruppentheorie. Betrachtet man nämlich sämtliche eineindeutigen Abbildungen des umfassenden Körpers auf sich selbst, bei denen Addition und Multiplikation, insbesondere aber die Gleichungskoeffizienten, unberührt bleiben, dann bilden diese eine Gruppe; ihre Zusammensetzungsvorschrift besteht darin, nacheinander zwei solche Abbildungen auszuführen.

Damit besitzt man den Schlüssel zur prinzipiellen Beantwortung der Frage, welche Gleichungen überhaupt algebraisch auflösbar sind, einer Frage, die weit über den Anfang unserer algebraischen Entwicklungen hinausgeht. Denn zu jeder Gleichung gehört eine Gruppe, die aus den eben näher beschriebenen Abbildungen besteht, und die Struktur dieser Gruppe entscheidet es, ob die Gleichung algebraisch auflösbar ist oder nicht. Die Gruppentheorie bildet also eine Metaphysik der Gleichungslehre, von der wir heute noch kaum mehr wissen als ihr siebzehnjähriger Schöpfer, Évariste Galois, der drei Jahre später, 1832, im Duell fiel.

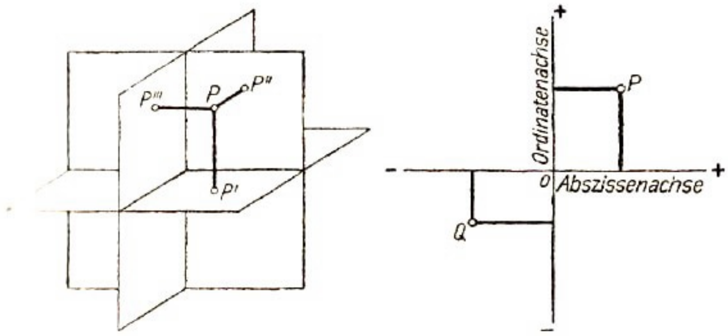
Die wenigen und kurzen Veröffentlichungen von Galois zählen heute noch zu der schwierigsten mathematischen Lektüre. Die Französische Akademie wies seinerzeit mehrere Mitteilungen von ihm zurück, mit der Begründung, ihr Sinn wäre dunkel und kaum verständlich infolge seines "übertriebenen Wunsches nach Kürze" . Heute denkt man anders.
So steht in einem führenden Lehrbuch, dass Galois die Darstellung seiner Gedanken mit "wunderbarer Klarheit und Schärfe" meisterte.

Aufschlussreich bleibt es an dieser so sehr verschiedenen Wertung, zu sehen, welche Rolle die Zeit nicht allein bei der Aufnahme von Kunstwerken spielt, sondern auch bei der Beurteilung rein verstandesmäßiger Leistungen. Wenn ein Bahnbrecher, sei es in der Kunst, sei es in der Wissenschaft, seiner Zeit weit vorauseilt, dann kann ihm nur zu leicht widerfahren, dass er nicht verstanden und darum abgelehnt wird.
Gelingt es ihm, wie zum Beispiel Richard Wagner, die Weisung "Survivre, c'est tout" zu befolgen, dann hat er Glück. Gelingt es ihm aber nicht, nach dieser Weisung zu leben, dann geht es ihm so wie Galois. Und es bedeutet nur einen schwachen Trost, wenn heute eine ganze algebraische Disziplin, die übrigens noch immer nur wenigen wirklich zugänglich ist, den Namen "Galoissche Theorie" trägt.

Die abstrakten Begriffsbildungen verdanken ihre Berechtigung in der modernen Algebra dem Umstand, dass sie verschiedene Auslegungen zulassen und damit eine Wirtschaftlichkeit des Denkens bewirken. Eine Überlegung braucht in abstraktem Gewande nur ein einziges Mal durchgeführt zu werden, um hinterher durch verschiedene Auslegungen eine Fülle von Sätzen zu ergeben, die unmittelbar mitunter nur recht umständlich zu beweisen wären. Alles das erreicht man wiederum durch Abschwächen von Voraussetzungen, was hier zu Begriffen wie Gruppe oder Ideal führte.

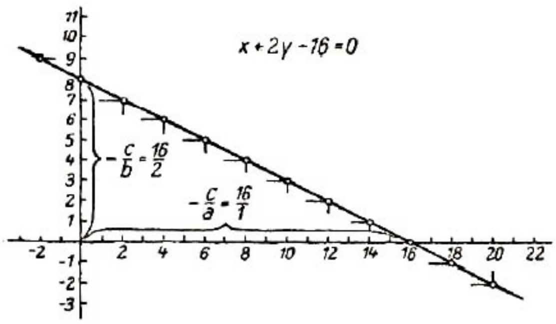
## 2.6 Geometrie in Zahlen

Gewisse Aussagen der Algebra können auch geometrisch ausgelegt werden. Das geschieht in der analytischen Geometrie, die wir einem französischen Edelmann, dem Offizier, Philosophen und Mathematiker René Descartes, verdanken. Sie ordnet geometrischen Gebilden - wie Punkten, Linien und Flächen - arithmetische Gebilde zu und deckt eine Übereinstimmung in beider Verhalten auf.




Diese Zuordnung kann so erfolgen, dass man drei aufeinander senkrecht stehende Geraden wählt - die Koordinatenachsen - und die Abstände eines Punktes von den durch sie aufgespannten Ebenen betrachtet. Auf diese Weise werden jedem einzelnen Punkt drei Zahlen, das heißt ein Wertetripel zugeordnet - nämlich eben die drei Abstandswerte.
Umgekehrt entspricht jedem Wertetripel ein einziger Punkt. Beschränkt man sich auf die Ebene, dann kommt man schon mit zwei aufeinander senkrechten Geraden aus. Die erste dieser beiden Koordinatenachsen heißt Abszissenachse, während die zweite die Bezeichnung Ordinatenachse trägt, und entsprechend heißen die Abstände, die "Koordinaten" des Punktes, hier insbesondere Abszisse und Ordinate.

Betrachtet man eine Gerade in der Ebene, so liegt es nahe, danach zu fragen, welche Beziehung zwischen den Koordinaten der einzelnen Punkte auf dieser Geraden besteht. Wird die Abszisse mit $x$ und die Ordinate mit $y$ bezeichnet, so zeigt sich, dass die Koordinaten sämtlicher Punkte auf der Geraden eine: Gleichung $ax + by + c = 0$ genügen.




Alle möglichen Lösungen dieser Gleichung stellen umgekehrt Koordinaten von Punkten dar, die auf der Geraden liegen. Die Koeffizienten in der Gleichung bestimmen weiter die Lage der Geraden in bezug auf die Koordinatenachsen.

Ein Satz aus der Algebra besagt, dass zwei Gleichungen wie $ax+by+c = 0$ und $dx+ey+f = 0$ entweder gar keine gemeinsame Lösung besitzen oder nur ein gemeinsames Wertepaar $x, y$, oder dass endlich alle Wertepaare, die Lösungen der einen Gleichung bilden, zugleich der anderen Gleichung genügen.

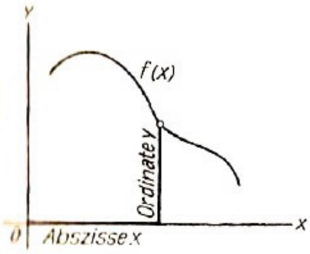
Dieser algebraische Satz kann sofort in die Sprache der Geometrie übersetzt werden. Auf geometrisch heißt dann der Satz, dass zwei Geraden entweder parallel laufen, ohne sich zu schneiden, oder sich in einem einzigen Punkt treffen oder endlich ganz zusammenfallen.

Die analytische Geometrie führt in vielen Fällen, wo die rein geometrische Betrachtungsweise so umständlich wird, dass man jede Übersicht verliert, noch immer zum Ziele. Diese Tatsache muss sehr hoch eingeschätzt werden. Indem die analytische Geometrie schwierige geometrische Probleme auf rechnerische Schemata reduziert, ermöglicht sie erst die Anwendung einer geläufigen, eben rechnerischen Betrachtungsweise, die durch ihre Dynamik fast von selbst zu Sätzen führt, deren Auslegung dann ungeahnte Zusammenhänge aufdeckt.
Der zweifellose Erfolg solchen Vorgehens gründet sich letzten Endes auf die Beschaffenheit unseres Geistes.

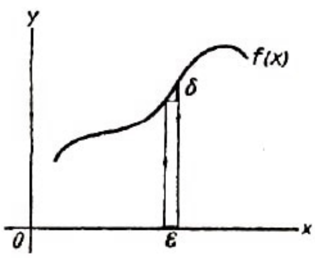
## 2.7 Das Geheimnis der Stetigkeit

Sogar im Alltag erfährt die analytische Geometrie Anwendungen. So wird im Wirtschaftsleben die Preisentwicklung als Kurve verzeichnet, deren Abszissen einzelne Zeitpunkte bilden, während die Ordinaten die jeweiligen Preise darstellen. Damit besitzen wir ein Vorbild dafür, wie man den Begriff einer Kurve in der analytischen Geometrie prägen soll:
Punkten der Abszissenachse $x$ werden eindeutig bestimmte, und zwar endliche Ordinaten $y$ zugeordnet. Wiederum erscheint also die Abbildung als Grundlage einer neuen Begriffsbildung.
Die Abszissenwerte bilden eine Menge im früher erörterten Sinn; man bezeichnet sie als unabhängige Veränderliche $x$.

Die entsprechende Menge der Ordinaten $y$ bezeichnet man dann mit $f(x)$ - gelesen "Funktion $f$ von $x$" -, um anzudeuten, dass man es mit einer abhängigen Veränderlichen zu tun hat, weil die Ordinatenmenge ja durch Abbildung aus der Menge $x$ entsteht.
Damit besitzt man einen Funktionsbegriff von größter Allgemeinheit, während frühere Jahrhunderte nur spezielle Funktionen, wie zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen "sinus", "cosinus", usw. kannten. Der Begriff der Funktion offenbar eng mit dem der Abbildung verwandt - nimmt eine beherrschende Stellung in der modernen Mathematik ein.




Wir wollen versuchen, ein paar der wichtigsten Sätze über Funktionen und ihre Eigenschaften abzuleiten. Die Tatsache, dass manche Überlegungen recht abstrakt, andere wieder sehr trivial erscheinen mögen, darf uns nicht hindern. Bei gutem Willen ist die Sache nicht allzu schwer - und zur Belohnung gewinnen wir gerade hier einen charakteristischen Einblick in das Wesen der höheren Mathematik, wie sie sich etwa im neunzehnten Jahrhundert entwickelt hat.
Wenden wir uns zunächst der wichtigen Klasse stetiger Funktionen zu. Stetigkeit - das ist eine sehr suggestive Bezeichnung. Wir glauben alle zu wissen, wann eine Kurve, und damit die von ihr dargestellte Funktion, stetig verläuft. Stetig ist eine Kurve, die keine Sprünge macht - die Anschauung lehrt das ohne weiteres!




Man kann aber dennoch nicht umhin, eine scharfe begriffliche Bestimmung zu geben; ohne sie wäre die heutige Mathematik einfach undenkbar, um so mehr, als wir den Begriff ja auf unsere allgemeinen, durch Abbildung erklärten Funktionen ausdehnen müssen.

Was soll also im allgemeinen Fall unter Stetigkeit verstanden werden?

Die Antwort auf diese Frage wurde erst im vorigen Jahrhundert gegeben und lautet: Eine Funktion $y = f(x)$ ist dann stetig, wenn folgendes gilt: Wie klein auch eine Zahl $\delta$ vorgegeben wird, stets lässt sich eine Zahl $\varepsilon$ so angeben, dass für zwei Werte $x_1$ und $x_2$ der unabhängigen Veränderlichen, die um weniger als $\varepsilon$ auseinanderliegen, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_1)$

und $f(x_2)$ sich um weniger als $\delta$ unterscheiden.

Diese langatmige Erklärung wird sofort klar, wenn man sie sich an der geometrischen Figur vorstellt: nahe beieinander gelegenen Abszissen sind auch nahe beieinander gelegene Ordinaten zugeordnet. In Mathematikerkreisen führen ähnliche Formulierungen, die sich immer wiederholen und trotz ihrer Umständlichkeit leider unumgänglich sind, wegen des steif verwendeten Buchstabens $\varepsilon$, Epsilon, den Spitznamen "Epsilontik" . Man muss sie aus dem EffEff beherrschen, wenn man sich mit Funktionen abgeben will.

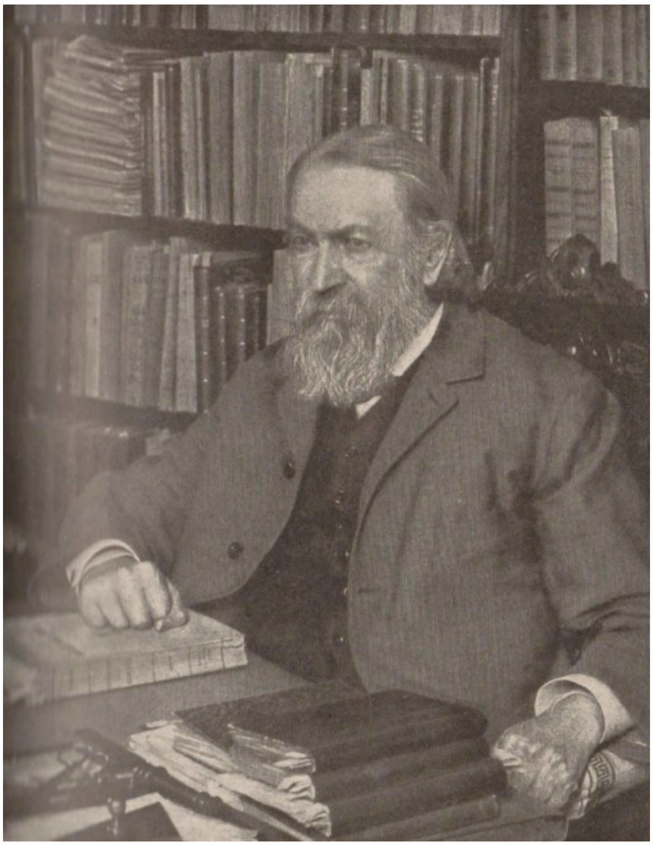
Aus unserer Figur liest man weiterhin ab, dass die Kurve in dem von uns betrachteten Bereich, das heißt in dem gewählten Intervall der Abszissenachse, irgendwo einen höchsten Gipfel erreicht. Wie lässt sich dieser Tatbestand aus der eben gegebenen Erklärung der Stetigkeit heraus erschließen?
Der Weg, auf dem das gelingt, fällt beschwerlich aus, wie so oft, wenn geläufige Alltagsweisheiten streng begründet werden sollen. Man muss schon mehrere Schritte hintereinander machen.

Zunächst zeigen wir, dass alle Ordinaten, alle $y$-Werte in unserem Intervall zwischen zwei Zahlenwerten liegen, die zwar sehr groß ausfallen können, aber doch immer endlich bleiben müssen, dass also, wie man sich ausdrückt, der "Wertevorrat" der abhängigen Veränderlichen $y$ "beschränkt"ist.
Wäre das nicht der Fall, so müsste es irgendwo in unserem Intervall beliebig große - "gegen Unendlich wachsende" - Ordinaten geben. Wenn ich folglich das Intervall, in dem die Funktion erklärt ist, halbieren würde, müsste es mindestens in der einen von den beiden entstandenen Intervallhälften beliebig große $y$-Werte geben, sagen wir in der linken. Diese linke Hälfte kann, ich dann abermals halbieren und behaupten, dass es in einer dieser neuesten Hälften wiederum beliebig große $y$-Werte geben muss.
Das kann ich offenbar beliebig oft wiederholen und erhalte damit eine Folge von Intervallen, deren jedes die Hälfte seines Vorgängers ist und in dieser ganz enthalten; es entsteht so eine ineinander geschachtelte Intervallfolge, um in der Fachsprache den Mathematikers zu reden.

Allen diesen Intervallen ist ein, aber auch nur ein Punkt gemeinsam, auf den sich die Intervalle der Folge allmählich zusammenziehen.
Soll die Funktion stetig sein, dann müsste die Ordinate in diesem gemeinsamen Punkt sich von den beliebig großen, gegen Unendlich strebenden Ordinaten der Nachbarschaft um beliebig wenig unterscheiden, was offensichtlich unmöglich ist. Wir kommen also zu einem Widerspruch, der sich aus der Annahme ergab, dass der Wertevorrat unserer Funktion im betrachteten Intervall nicht beschränkt ausfällt. Mithin bleibt nichts anderes übrig, als die gegenteiliger Annahme anzuerkennen: die $y$-Werte müssen beschränkt sein.

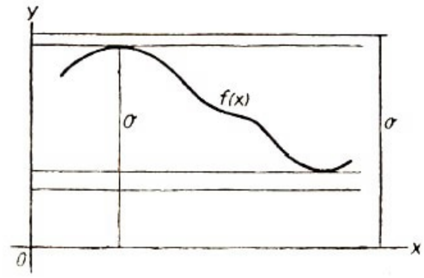
Solch eine Schlussweise kommt in der Mathematik häufig vor, und wir selber sind ihr in der Mengenlehre begegnet; man redet von einem indirekten Beweis. Er ist eine Art von Kriegslist, der man sich bedient, wenn es aussichtslos erscheint, eine "feindliche" Behauptung unmittelbar anzugreifen. Man geht dann, wie wir eben gesehen haben, von der entgegengesetzten Behauptung aus und zeigt, dass sie unweigerlich zu Widersprüchen führt. Wir haben jetzt bewiesen, dass die Ordinaten unserer Funktion beschränkt sind, also zwischen zwei endlichen Zahlenwerten liegen; dem entspricht die Tatsache, dass die Kurve in unserem Intervall ganz innerhalb eines waagerechten Streifens verläuft.

Weiter können wir nun nach dem schmalsten Streifen fragen, das heißt die Kurve soweit wie möglich einzuengen versuchen.



Ernst Mach. Aus dem Corpus Imaginum der Photografischen Gesellschaft Berlin

Ludwig Boltzmann. Zeitgenössische Kreidezeichnung




Man bezeichne die Ordinate des oberen Randes mit $o$; dann kann $o$ offenbar nicht kleiner sein als eine Ordinate der Kurve - denn $o$ sollte ja, seiner Erklärung nach, eine obere Schranke für die $y$-Werte bedeuten. Jeder zulässige $o$-Wert definiert einen anderen Streifen. Je kleiner $o$ ist, desto mehr nähert es sich der Kurve, desto schmaler ist der Streifen.

Wir fragen nun: Gibt es einen kleinsten $o$-Wert? Einen schmalsten Streifen? Kann man seine Existenz rein begrifflich erschließen?

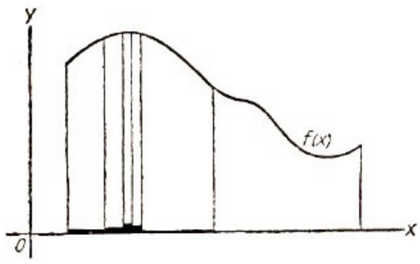
Dass die Frage nicht trivial ist, möge ein Beispiel zeigen. Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... werden offenbar immer kleiner - aber dennoch gibt es keinen "kleinsten" unter ihnen. Denn zu jedem noch so kleinen $\frac{1}{n}$ kann ich sofort einen noch kleineren, nämlich $\frac{1}{n+1}$ angeben; man hat eine Folge, welche ihren kleinsten Wert nicht annimmt.

Wieder einmal wenden wir uns an die Mengenlehre und betrachten die Menge aller möglichen $o$-Werte, das heißt aller Zahlen, welche größer als die $y$-Werte im betrachteten Intervall sind. Jede Zahl, die größer als irgendein $o$ ausfällt, gehört offenbar zu dieser Menge, und der Mathematiker redet darum von einem "Schnitt" im Zahlenreich: es zerfällt dabei in eine "obere" Menge und in eine "untere" Menge; jede Zahl der oberen Menge ist größer als irgendeine Zahl aus der unteren Menge.
Erzeugt wird der Schnitt immer von einer Zahl, die man entweder zur oberen oder zur unteren Menge rechnen darf und die mit gleichem Recht als kleinste Zahl der oberen oder größte Zahl der unteren Menge gelten darf. Für die grundlegende Bedeutung dieser Betrachtung spricht, dass es Dedekind am 24. November 1858 gelang, die irrationalen Zahlen als gewisse Schnitte im Reich der rationalen Zahlen einzuführen.

Wenn man danach die Zahl, die den Schnitt mit den $o$ als obere Menge erzeugt hat, mit $O$ bezeichnet, bleibt noch zu zeigen, dass $O$ selbst ein $o$ ist. Das wollen wir indirekt beweisen, also zunächst annehmen, dass $O$ nicht zur Menge der $o$-Werte gehört, mit anderen Worten es eine Ordinate gibt, welche größer als $O$ ausfällt, sagen wir $y_1$. Dann ließe sich eine Zahl $o_1$ angeben, welche einerseits größer als $O$ wäre, also der Menge der $o$ angehören würde, andererseits aber kleiner als $y_1$ ausfiele - im Widerspruch zur Erklärung der $o$-Menge. Dieser Widerspruch schwindet nur dann, wenn $O$ selbst zur Menge der $o$-Werte gehört. Offenbar bestimmt $O$ den oberen Rand des gesuchten schmalsten Streifens. Ähnlich erschließt man eine Ordinate, die den unteren Rand bestimmt.

Endlich sind wir in der Lage zu zeigen, dass $o$ zum Wertevorrat der abhängigen Veränderlichen $y = f(x)$ gehört. Denn durch fortgesetzte Unterteilung des Abszissenintervalls erhält man eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen, in deren jedem es Ordinaten gibt, die $O$ beliebig nahe kommen.

Im gemeinsamen Punkt dieser Intervallfolge muss also die Kurvenordinate wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ den Wort $O$ besitzen. Und damit haben wir schließlich bewiesen, dass die Kurve im betrachteten Intervall wirklich ihren Gipfel erreicht. Wahrlich, ein verschlungener Weg, den aber die hohen Ansprüche der modernen Mathematik an begriffliche Strenge gebieterisch verlangen!
Sowohl Gegenstand wie Art dieser Betrachtung können von der analytischen Geometrie ganz losgelöst werden und erscheinen dann als "arithmetische" Aussagen über stetige Funktionen $f(x)$.



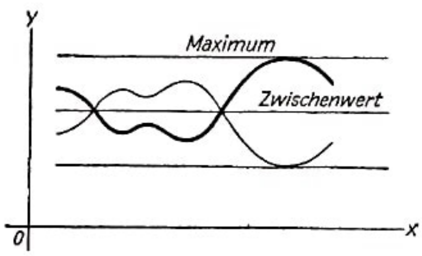

Natürlich sind nicht etwa alle Funktionen stetig. Das folgt aus der allgemeinen Begriffsbestimmung sofort, denn Funktion bedeutet einfach Abbildung, und damit ist noch nichts über die Stetigkeit gesagt.

Der Begriff der Stetigkeit kann aber auch noch anders entwickelt werden, als es hier geschehen ist. Fassen wir das Verhalten unserer als stetig bezeichneten Funktionen in einem einzelnen Punkt ins Auge.

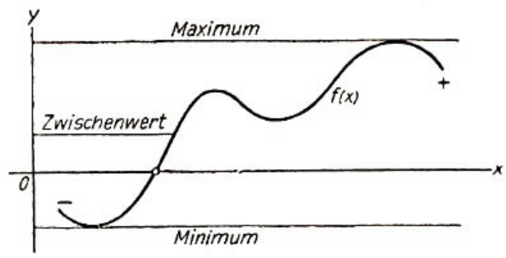
Die Funktionswerte der Nachbarschaft schließen sich dem Funktionswert in diesem Punkt an; bezeichnen wir den Punkt mit $x_0$ und die Werte der Nachbarschaft mit $x$, dann liegt $f(x)$ von $f(x_0)$ um weniger als $\delta$ entfernt, wenn nur $x$ hinreichend nahe bei $x_0$ liegt.

Um das restlos in arithmetische Zeichen umzusetzen, muss noch an die Erklärung erinnert werden: Unter dem Absolutwert $|a|$ einer Zahl $a$ versteht man die Zahl $a$ selbst, wenn sie positiv ist, dagegen die Zahl $-a$, wenn $a$ negativ ausfällt.
Man setzt $|o| = o$. Mit dieser Bezeichnung ist $f(x)$ im Punkte $x_0$ stetig, wenn $|f(x)-f(x_0)| < \delta$ für $|x-x_0| < \varepsilon(\delta)$ gilt. Die Schreibweise $\varepsilon(\delta)$ soll dabei andeuten, dass zu jeder vorgegebenen Zahl $\delta$ sich stets eine Zahl $\varepsilon$ angeben lässt, mit der obige Ungleichheit angesetzt werden darf. Die frühere Erklärung der Stetigkeit und die soeben entwickelte sind einander gleichwertig.

Nachdem wir aus der Stetigkeit folgern konnten, dass eine stetige Funktion ihr Maximum in einem Intervall wirklich erreicht, lassen sich die übrigen Eigenschaften stetiger Funktionen aus diesen Satz ableiten. Ändert man das Vorzeichen der Funktion, dann stehen die ursprüngliche und die neue Funktion im Verhältnis zueinander, dass das Maximum der einen ein Minimum für die andere bedeutet, woraus folgt, dass die stetige Funktion auch ihr Minimum annimmt.



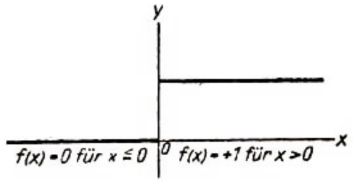

Ja noch mehr, sie nimmt sogar jeden Wert zwischen Maximum und Minimum an.
Um das einzusehen, braucht man die Funktion nur an der Geraden zu spiegeln, die der gewählte Zwischenwert in der Abbildung bestimmt, und auf die so entstehende neue stetige Funktion den Satz anzuwenden, dass sie ihr Minimum erreicht. Die ursprüngliche Funktion muss dann an derselben Stelle ersichtlich den Zwischenwert annehmen.




Weniger besagt der oft angewandte Satz, dass eine stetige Funktion jeden Wert annimmt, der zwischen die Funktionswerte in den beiden Endpunkten eines Intervalls Fällt. Denn diese beiden Funktionswerte liegen bestimmt zwischen Maximum und Minimum der Funktion, und damit unterordnet sich der Fall dem vorigen Satz. Insbesondere folgt daraus, dass eine stetige Funktion die Abszissenachse schneiden muss, wenn sie sowohl negativ wie auch positiv wird. Untenstehende Abbildung erläutert alle diese Sitze.

Auf Grund des geschilderten Sachverhaltes spielt die Stetigkeit eine wichtige Rolle, wenn auch keine ausschließliche. Denn für wesentliche Untersuchungen wäre die Klasse von stetigen Funktionen viel zu eng. Es lassen sich einfache Beispiele für unstetige Funktionen geben, so die

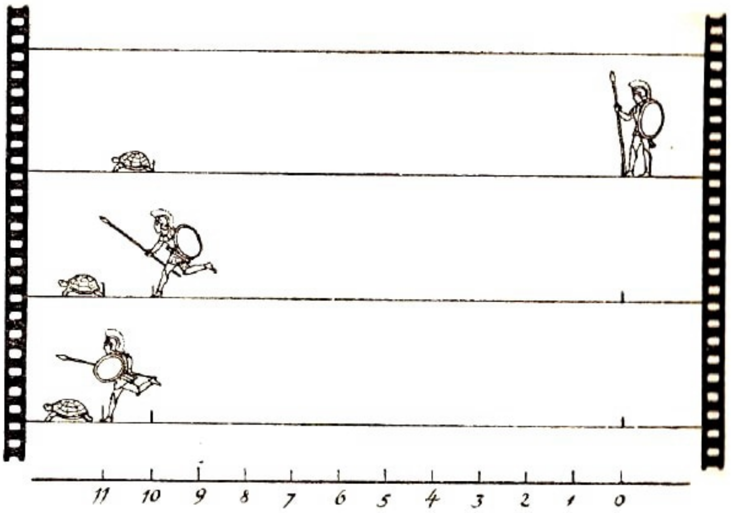
Funktion, die links vom Nullpunkt und im Nullpunkt selbst die Abszissenachse darstellt, rechts davon aber irgendeine Gerade, die parallel zur Abzissenachse verläuft.




Vielleicht erscheint solch eine Funktion im ersten Augenblick bei den Haaren herbeigezogen. Sie ist es aber nicht, denn sie ergibt sich ganz zwanglos aus tiefer schürfenden mathematischen Betrachtungen.

Es sei noch vermerkt, wie sich Grenzübergänge mit Hilfe der Stetigkeit erklären lassen: Die Funktion $f(x)$ besitzt für $x \to a$ den Grenzwert $f(a)$, wenn sie im Punkte $a$ stetig ausfällt.

## 2.8 Achilles und der Grenzwert




Der griechische Philosoph Zeno pflegte allen, die es hören wollten, das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte vorzulegen, welche einen Wettlauf veranstalteten.
Es wird angenommen, dass Achilles zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte, ihr dafür aber anfangs einen Vorsprung von 10 Schritt gewährt. Hat der Held diese 10 Schritt durcheilt, so ist die Schildkröte um einen Schritt vorangekommen. Hat Achilles auch diesen Schritt zurückgelegt, so beträgt der Vorsprung der Schildkröte nur noch $\frac{1}{10}$ Schritt. Tut Achilles diesen $\frac{1}{10}$ Schritt, so legt die Kröte $\frac{1}{100}$ Schritt zurück. So geht es fort.
Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer geringer, sinkt aber nie zu Null herab: Achilles kann die Schildkröte niemals ganz einholen!

Mit diesem Trugschluss wollte Zeno seinen Zeitgenossen die Fragwürdigkeit alles Denkens beweisen. Seine Argumente haben viel Eindruck gemacht, sie wurden aber unter anderen von Aristoteles zurückgewiesen. Der Mathematiker schließt aus ihnen nur, dass Zeno den Begriff des Grenzwerts offenbar nicht kannte und dass er folglich auf immer aus dem Wunderreich der höheren Mathematik ausgeschlossen bleiben musste - zu seinem eigenen Schaden.

Wie behebt man auf mathematische Weise die Zenosche Schwierigkeit? Nun, wir berechnen die Wege, welche die Schildkröte nacheinander zurückgelegt hat. Das liefert die Summe

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...$$

Schritt, eine Summe, die wir heute freilich als Dezimalbruch $1,111...$ schreiben können. Gewiss geht die Reihe ins Unendliche weiter. Im Gegensatz zu Zeno aber behaupten wir, dass die Summe dennoch einen festen Wert besitzt, den wir sogleich berechnen werden. Man hat es hier mit einem Sonderfall der geometrischen Reihe

$$q + q^2 + q^3 + ...$$

zu tun, in der nur $q = \frac{1}{10}$ zu setzen ist, um bis auf das erste Glied unsere Reihe zu erhalten.
Was ist nun unter der Summe solcher Reihen zu verstehen?
Um sie zu erklären, geht man am besten von der Summe der ersten $n$ Glieder aus, also von $q + q^2 + ... + q^n$, die mit $s_n$ bezeichnet sei. Entsprechend verstehen wir unter $s_{n+1}$ die Summe $q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$. Es gilt dann einerseits die Beziehung

$$qs_n = q^2 + q^3 + ...q^{n+1} = (q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}) - q = s_{n+1} + q$$

mithin

$$s_{n+1} = qs_n + q$$

Durch Gleichsetzen der beiden eben erhaltenen Ausdrücke für $s_{n+1}$ folgt

$$s_n + q^{n+1} = qs_n + q \qquad \text{also} \qquad s_n = q\frac{1-q^n}{1-q}$$

Soweit ist alles klar. Aber eine endliche Reihe bildet ja auch keine Schwierigkeit. Wir versuchen nun, zur unendlichen Reihe vorzudringen, und fragen: Wie ändert sich der Wert von $s_n$ mit wachsendem $n$?
Da allein das Glied $q^n$ davon betroffen ist, kommt es nur auf dessen Verhalten an. Es sind die vier Fälle zu unterscheiden: $q = 1$, $q = -1$, $|q| > 1$, $|q| < 1$. Die beiden ersten Fälle behandelt man am besten so, dass man auf die Erklärung von $s_n$ zurückgreift.
Man erkennt, dass $1 + 1 + 1 + ...$ unendlich groß wird, während $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ zu einer Folge führt, die abwechselnd aus der 1 und der 0 besteht und darum keinem bestimmten Wert zustrebt.

Wenn der Absolutwert von $q$ größer als 1 und $q$ selbst positiv ausfällt, setze man $q = 1 + k$, mit positivem $k$. Es gilt sodann

$$q^n = (1+k)^n = (1+k)(1+k)...(1+k) = 1 + nk + R$$

wo im Rest $R$ die übrigen Glieder zusammengefasst wurden, die sich beim Ausmultiplizieren ergeben würden. Jedenfalls ist $R$ positiv und darum $q^n > 1 + nk$. Die rechte Seite dieser Ungleichung wächst mit $n$ selber ins Unendliche, und darum tut das $q^n$ erst recht. Genauer gesprochen: Wird eine noch so große Zahl vorgegeben, stets übertrifft $q^n$ sie von einem gewissen Wert von $n$ an. Man gebraucht dafür das Zeichen $q^n \to +\infty$.
Offenbar wächst dann die Summe $s_n$ erst recht über alle Grenzen: $s_n \to +\infty$.

Fällt dagegen der Absolutwert von $g$ größer als 1, aber $q$ selbst negativ aus, dann gilt für gerade Potenzen $q^n = |q|^n$, für ungerade hingegen $q^n = -|q|^n$. Man schreibt in diesem Fall $q^n \to \infty$ und meint damit, dass man zwar von den Absolutwerten behaupten darf, sie würden beliebig groß, aber nicht mehr, dass die Größe $q^n$ ihr Vorzeichen dabei bewahrt.
Damit ergibt sich dann auch für die Summe $s_n$ durch Einsetzen in den für sie abgeleiteten Ausdruck $s_n \to \infty$. Für $|q| < 1$ ergibt sich $q^n \to \infty$, was besagt, dass mit zunehmendem $n$ die Potenz $q^n$ beliebig klein wird.
Man sagt, $q^n$ strebe gegen den Grenzwert Null. Denn setzt man $q = 1 : p$, so fällt nun $|p| > 1$ aus, folglich gilt $p^n \to +\infty$, woraus durch Einsetzen

$$q^n = \frac{1}{p^n} \qquad \to \qquad +\frac{1}{\infty} = 0$$

folgt. Damit erhält man

$$s_n = q\frac{1-q^n}{1-q} \quad \to \quad q\frac{1-0}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

Damit können wir nun den Weg der Schildkröte berechnen. Er betrug, wie wir uns erinnern,

$$1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right)$$

Der Klammerausdruck stellt aber nichts anderes als die geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{1}{10}$ dar, deren Summe also nach unserer Formel den Wert

$$s = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

ergibt. Mithin hat die Schildkröte insgesamt $1\frac{1}{9}$ Schritt zurückgelegt, wenn Achilles sie einholt: ein klares Ergebnis, dem alle philosophischen Spitzfindigkeiten nichts mehr anhaben können, das wir nun aber doch noch mathematisch etwas untermauern wollen, indem wir den Begriff des Grenzwerts präziser herausschälen.
Vorher aber bemerken wir noch, dass man durch Beachten der Rolle, welche die Zeit spielt, den Zeno leicht hätte widerlegen können - ohne allerdings seine eigentliche Schwierigkeit, den Begriff eines Grenzübergangs, aufzuklären. Während der Zeiten, in denen die aufgezählten Strecken zurückgelegt wurden, holt Achilles die Schildkröte wirklich nicht ein.
Um aber daraus schließen zu können, dass er sie überhaupt nicht einholt, müssten diese Zeiten beliebig lange dauern. Gerade das Gegenteil aber trifft zu, wie man sofort erkennt, wenn man daran denkt, wo der Achilles schon nach einigen Sekunden wäre und wo die Schildkröte!

Bezeichnen wir eine Zahlenfolge mit $a_1, a_2, a_3$, ..., so heißt die endliche Zahl $a$ ein Grenzwert der Folge, wenn von einer gewissen Stelle ab der Unterschied zwischen den einzelnen Gliedern $a_n$ und $a$ beliebig klein wird, in Zeichen $a_n \to a$ - gesprochen: "$a_n$ geht gegen $a$" oder kurz "$a_n$ gegen $a$" .
Ist speziell $a = 0$, so redet man von einer Nullfolge. Bilden die reziproken Werte einer Folge $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... eine Nullfolge, ist also $1 : b_n \to 0$, dann sagt man, dass die Folge $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... selbst gegen Unendlich strebt, $b_n \to \infty$, insbesondere gegen $+\infty$, wenn schließlich alle Glieder positiv ausfallen. Diese Erklärung deckt sich augenscheinlich mit der früher gegebenen für unendliche Grenzwerte.

Aus dem Gesagten folgt weiter: Schreibt man die Glieder unserer Folge in der Form $a_n = a+\alpha_n$, so besitzt man in $\alpha_n$ eine Nullfolge. Denn wenn $a_n \to a$ gelten soll, so muss offenbar $\alpha_n \to 0$ sein.
Betrachtet man gleichzeitig eine zweite Folge $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... mit dem Grenzwert $b$, und setzt $b_n = b + \beta_n$, dann bilden auch die $\beta_n$ eine Nullfolge. Daraus folgt, dass die Folge $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, ..., die entsteht, wenn man die beiden Folgen $a_n$ und $b_n$ gliedweise addiert, den Grenzwert $a + b$ besitzen muss.
Denn es ist

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$$

und es gilt $\alpha_n + \beta_n \to 0$ und damit $a_n + b_n \to a + b$. Ähnlich behandelt man Differenz, Produkt und Quotienten zweier Folgen und erhält für sie die Formeln

$$a_n - b_n \to a - b \quad ; \quad a_n b_n \to ab \quad ; \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

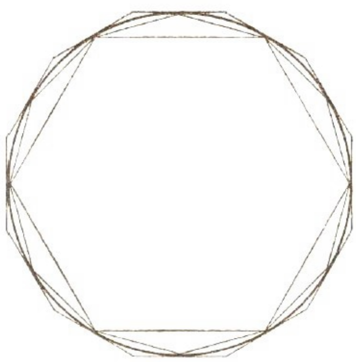
Gleich werden wir noch von dem Satz Gebrauch machen, dass eine Folge, deren Glieder ständig wachsen, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 ...$, und die darum monoton genannt wird, einen endlichen Grenzwert besitzt, wenn alle $a_n$ unter einer festen Zahl bleiben. Denn wenn man in der Gesamtheit aller Zahlen einen Schnitt bildet, indem die Zahlen in zwei Mengen geteilt werden, je nachdem sie größer ausfallen als sämtliche $a_n$ oder nicht, ist die durch diesen Schnitt bestimmte Zahl leicht ersichtlich der Grenzwert der monotonen Folge.

## 2.9 Vom Inhalt krummliniger Figuren

Schon in früheren Abschnitten haben wir zu unserem Leidwesen erfahren müssen, wie schwerfällig die Mathematiker mitunter zu denken scheinen. Auch die trivialste Behauptung gilt ihnen keineswegs als ausgemacht, sie müssen alles erst besonders und äußerst umständlich beweisen. So kann es nicht wundernehmen, wenn auch bei unserer nächsten Frage Bedenken auftauchen. Es handelt sich um das grundsätzliche Problem der Inhaltsbestimmung geometrischer Figuren. Aus den Anfangsgründen der Geometrie weiß man ja, was unter der Fläche eines Dreiecks oder eines Quadrats zu verstehen ist. Aber schon beim Kreis stellen sich Schwierigkeiten ein, die darauf hinweisen, dass der Inhaltsbegriff einer genaueren Untersuchung bedarf. Übrigens enthält bereits die bekannte Formel für den Inhalt eines Dreiecks - der Inhalt ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe - stillschweigend die Behauptung, dass es gar nicht darauf ankommt, welche Seite des Dreiecks als Grundlinie gewählt wird, sonst müsste nämlich die Formel je nach Wahl der Grundlinie verschiedene Werte für den Inhalt liefern. Die eben geforderte Unabhängigkeit des Inhalts von der Grundlinie lässt sich indessen mit einfachen Mitteln erweisen.

Vom Inhalt einer Figur, die sich aus zwei Dreiecken zusammenfügt, verlangt man weiter, dass er sich als Summe der Inhalte von den beiden Dreiecken ergibt, was wiederum zutrifft. Damit besteht die Möglichkeit, vom Inhalt des Vielecks zu reden; man teilt es in Dreiecke auf, deren Inhalte dann zusammengezählt werden und so den Inhalt des Vielecks ergeben.

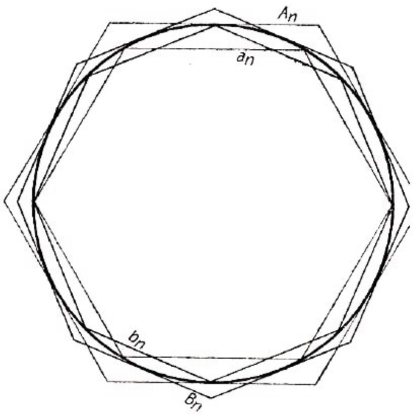
Bei krummlinig begrenzten Figuren wie dem Kreis versagt jedoch diese Erklärung, denn solche Figuren lassen sich nicht in eine endliche Anzahl von Dreiecken aufteilen. Man braucht also eine weiterreichende Definition als die ursprüngliche. Darum ist es beileibe keine Selbstverständlichkeit, dass ein Kreis einen bestimmten Inhalt besitzt, so geläufig uns das auch vorkommt, sondern das Ergebnis einer Betrachtung, mit der bereits die höhere Mathematik beginnt, denn es geht dabei um den Begriff des Grenzwertes.



Zunächst besitzt ein Vieleck, das dem Kreis umschrieben ist, dessen sämtliche Seiten mit anderen Worten den Kreis berühren, einen größeren Inhalt als ein Vieleck, das dem Kreise eingeschrieben und darum erst recht im umschriebenen Viereck enthalten ist.
Man schreibe dem Kreis ein Vieleck ein und füge dessen Rande nacheinander neue Dreiecke hinzu, so dass die Figur noch immer dem Kreis eingeschrieben bleibt, mit anderen Worten alle Eckpunkte auf dem Kreisrande liegen.

Die Inhalte der so entstehenden Vielecke nehmen stets zu, bleiben aber alle unter dem Inhalt eines Vielecks, das dem Kreis umschrieben ist. Darum hat man in den eingeschriebenen Vielecks-Inhalten eine monoton zunehmende Folge vor sich, die einem endlichen Grenzwert zustrebt, dem Inhalt des Kreises. Es bleibt aber zu zeigen, dass der Grenzwert stets derselbe ist, wie ich auch die Vielecksfolge im einzelnen wähle.

Um das einzusehen, muss man beachten, dass zum eingeschriebenen Vieleck vom Inhalt $a_n$ ein umschriebenes Vieleck vom Inhalt $A-n$ so angegeben werden kann, dass $A_n - a_n$ beliebig klein ausfällt, wenn nur beide Vielecke innerhalb eines beliebig schmalen Ringes um den Kreis herum verlaufen.




$B_n$ beziehe sich ähnlich auf eine zweite Folge eingeschriebener Vielecke $b_n$. Behält man von den beiden umschriebenen Vielecken $A_n$, $B_n$ nur die gemeinsam bedeckte Fläche, dann bildet diese ein Vieleck, das den Kreis noch immer im Inneren enthält.
Bezeichnet man den Inhalt des neuen Vielecks mit $C_n$, so gelten also die beiden Ungleichungen $a_n < C_n < A_n$ und $b_b < C_n < B_b$. Sowohl die $a_n$ wie die $b_n$ streben also demselben Grenzwert zu: Der Inhalt des Kreises fällt unabhängig von der Vielecksfolge aus, die. zur Annäherung herangezogen wurde.

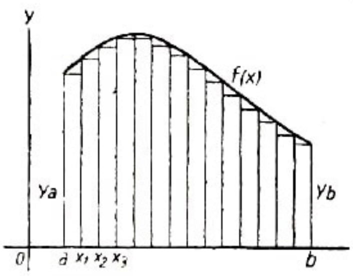
Eines ist hier bemerkenswert: Wir konnten beweisen, dass der Kreis einen ganz bestimmten Inhalt besitzt, ohne diesen Inhalt zu berechnen. In solchen Fällen redet der Mathematiker von Existenzbeweisen, weil er nur die Existenz nachweist, ohne sich darum zu kümmern, ob eine Berechnung ausführbar ist. In unserem Fall kann freilich die Berechnung mit jeder gewünschten Genauigkeit erfolgen, wenn man auf die frühere Erklärung zurückgreift und ein umgeschriebenes, ferner ein eingeschriebenes Vieleck betrachtet, deren Inhalte sich um beliebig wenig voneinander unterscheiden.

Der Inhalt des Kreises liegt dann offensichtlich zwischen diesen beiden Werten. Die Rechnung können wir uns schenken, denn ihr Ergebnis wird sich bald als Sonderfall in einer Disziplin herausstellen, in der bereits Archimedes Erstaunliches geleistet hat, die aber später in Vergessenheit geraten ist und erst im siebzehnten Jahrhundert wieder entdeckt werden musste. Wir meinen die Integralrechnung.

Es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, wie sich die Betrachtung, die zum Inhalt des Kreises führte, dem Begriff eines Schnittes im Sinne von Dedekind unterordnen lässt. Man betrachte die eingeschriebenen Vielecke als "untere" , die umschriebenen als "obere Menge" . Die Inhalte dieser Vielecke bilden eine Zahlenmenge, in der der Kreisinhalt augenscheinlich einen Schnitt herbeiführt.

## 2.10 Was ist ein Integral?

Man geht zur Herleitung des Integralbegriffs am besten von einer Kurve $f(x)$ aus, die im Intervall $< a, b >$ betrachtet werde, und fragt nun nach dem Inhalt der Fläche, die von der Kurve, den beiden Senkrechten in $a$ und in $b$ und der Abszissenachse eingeschlossen wird.




Dazu teilt man das Intervall auf und errichtet über jedem Teilintervall ein Rechteck, das eben noch unterhalb der Kurve bleibt. Die treppenförmige, aus diesen Rechtecken bestehende Fläche besitzt dann einen Inhalt, der kleiner ausfällt als der Inhalt der Figur, die oben von der Kurve begrenzt wird.

Es ist zu vermuten, dass durch Verfeinern der Unterteilung der obere Rand der aus Rechtecken bestehenden Figur sich immer besser an die Kurve schmiegt und darum die Inhalte beider Figuren sich schließlich beliebig wenig voneinander unterscheiden.
Dies trifft nicht nur für die bisher zugelassenen Rechtecke zu, die ganz unterhalb der Kurve bleiben, sondern auch für alle anderen Rechtecke, wenn sie nur die Kurve im jeweiligen Teilintervall nicht überragen.

Um diese Vermutung streng zu beweisen, ermittelt man zunächst den Inhalt einer solchen treppenförmigen, aus den Rechtecken bestehenden Figur, was ja, wenigstens begrifflich, keinerlei Schwierigkeiten macht.

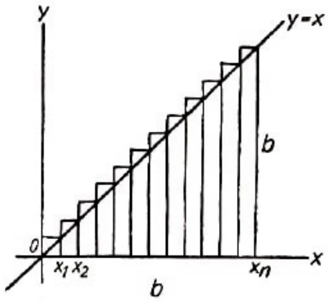
Nennen wir die einzelnen Teilpunkte $a$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, $b$, die zugehörigen Ordinaten $y_a$, $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$, $y_b$, so ergibt sich für die Rechtecksumme der Ausdruck

$$(x_1 - a)y_a + (x_2 - x_1)y_1 + ... + (b - x_n)y_n$$

dem die Werte $(x_1-a)$, $(x_2-x_1)$, ... sind ja die Grundseiten, die Ordinaten $y_a$, $y_1$, ... die Höhen dieser Rechtecke. Man hätte nun die Unterteilung immer weiter zu treiben, also $n$ immer mehr wachsen zu lassen, und sich zu fragen, ob die so entstehenden Ausdrücke mit wachsendem $n$ schließlich einem festen Grenzwert zustreben, so wie das früher bei der geometrischen Reihe geschah. Existiert dieser Grenzwert, so heißt er das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $< a, b >$ und wird mit

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

bezeichnet. Das Integralzeichen steht, wie wir es von früher her wissen, für $S$ und soll andeuten, dass es sich beim Integral um eine Summenbildung handelt.




Ein Beispiel soll uns dieses Verfahren näher erläutern. Wir wählen $y = x$ und bemerken, dass diese Funktion eine Gerade durch den Anfangspunkt $O$ darstellt. Wir teilen das Intervall $< 0, b >$ in gleiche Teile auf und bemerken, dass für $y$ diesmal $x$ gesetzt werden darf. In der Summe

$$(x_1 - 0)y_1 + (x_2 - x_1)y_2 + ... + (b - x_n)y_n$$

stellen die Klammerausdrücke den Wert $b : n$ und $y_i$ den Wert $i \cdot b : n$ dar. Hebt man den gemeinsamen Wert $b^2 : n^2$ heraus, dann bleibt die Summe der ersten $n$ Zahlen übrig. Für die ursprüngliche Summe ergibt sich damit der Wert

$$\frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + 2 + ... + n) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} b^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

der mit $n \to \infty$ offenbar $\frac{1}{2}b^2$ zustrebt, wie es sein muss, denn es handelt sich ja um den Inhalt eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks mit der Kathete $b$. Zum Glück können bestimmte Integrale sehr viel einfacher berechnet werden, nämlich mit Hilfe von Integrationen, wie wir es noch sehen werden!

Wir wollen nun zunächst einen "Stammsatz" aufstellen, der uns die weitere Arbeit sehr erleichtern wird. Der bisherige Funktionsbegriff muss dafür auf den Fall ausgedehnt werden, dass nicht Zahlen auf Zahlen abgebildet werden, wie das bis jetzt immer geschah, sondern Zahlen auf Intervalle: jedem Intervall $A$ wird eine Zahl $f(\Delta)$ zugeordnet. $f(\Delta)$ entspricht dem Inhalt eines der vorher betrachteten Teilrechtecke.

Stetige Funktionen nehmen diesmal eine Sonderstellung ein und werden wiederum mit der "Epsilontik" erklärt:
für $\Delta < \delta(\varepsilon)$ gilt $|f(\Delta)| < \varepsilon$. Wir betrachten nun solche stetige Funktionen, für die entweder stets

$$f(\Delta_1 + \Delta_2) \leq f(\Delta_1) + f(\Delta_2) \qquad \text{oder stets} \qquad f(\Delta_1 + \Delta_2) \geq f(\Delta_1) + f(\Delta_2)$$

gilt, wenn $\Delta_1$ und $\Delta_2$, zwei aneinander grenzende Intervalle sind. Dann behauptet unser Stammsatz, dass für diese Funktionen die Summen

$$f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + ... + f(\Delta_n)$$

mit verfeinerter Unterteilung gegen einen festen Wert streben.

Der Beweis verläuft einfach, trotzdem ist er aufschlussreich, denn er bleibt vorbildlich für eine größere Anzahl von Integralbildungen; er umfasst nicht nur das eben erklärte Integral, sondern auch verschiedene Weiterführungen des Integralbegriffs. Um zum Beispiel an das sogenannte Riemannsche Integral heranzukommen, lasse man auch unstetige Funktionen zu und wähle für die treppenförmige Figur in jedem Teilintervall die größtmöglichen Werte für die $y$.
Dann bilden die einzelnen Summanden Werte einer Funktion $f(\delta)$, die so ausfällt, dass man den Stammsatz auf sie anwenden kann. Damit ist zwar gezeigt, dass die Summen gegen einen Grenzwert streben, aber noch nicht alles, was wir behauptet haben, denn für eine andere Wahl der Werte $y$ bleibt die Frage offen, ob die mit diesen Werten hingeschriebenen Summen noch immer und zu demselben Grenzwert streben.

Sind die Werte $y$ aber die kleinstmöglichen, dann gilt der Stammsatz wiederum, ähnlich wir vorhin. Es fragt sich nur noch, wann dieser Grenzwert mit dem vorigen übereinstimmt. Das trifft sicherlich zu, wenn die Funktion $y = f(x)$ stetig ausfällt, und damit ist die Existenz eines festen Grenzwertes, das heißt des bestimmten Integrals für stetige Funktionen bewiesen.
Überraschenderweise aber braucht man sich nicht auf diesen Fall zu beschränken. Beispielsweise besitzt eine Funktion auch dann noch ein bestimmtes Integral, wenn sie in endlich viel Punkten unstetig ist. Denn um jeden dieser Punkte kann ein kleines Intervall gelegt werden, und augenscheinlich fällt die Gesamtlänge dieser Intervalle beliebig klein aus, so dass die betreffenden Summanden die Grenzwertbildung nicht beeinflussen.

Wenn also sogar unstetige Funktionen bestimmte Integrale besitzen können, dann bleibt zu untersuchen, was geometrisch darunter zu verstehen ist. Denn wir gingen vom Inhalt gewisser Figuren aus und wurden erst dadurch auf die Summen geführt, deren Grenzwert das bestimmte Integral darstellt. Bei einer stetigen Funktion hat man keine Bedenken, das bestimmte Integral als Inhalt der Fläche anzusprechen, die von der Funktion begrenzt wird. Bei unstetigen Funktionen muss man jedoch bedenken, dass die Kurven, die sie darstellen, wegen der unstetigen Stellen aus dem Rahmen üblicher geometrischer Betrachtungen fallen.

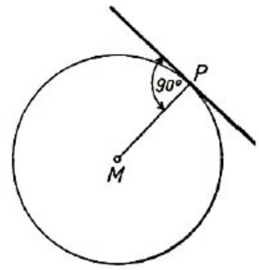
In diesem Fall kann aber die Mengenlehre weiterhelfen, die uns nahelegt, die Figuren als Punktmengen zu betrachten, bestehend aus den Punkten sämtlicher Ordinaten, welche die Funktion als Kurve bestimmen. Davon ausgehend kann man ganz allgemein die Frage stellen, welchen Punktmengen eine Zahl als Inhalt zugesprochen werden kann. Es ist üblich, diese Ausdehnung des Inhaltsbegriffs "Maß" zu nennen.
Naturgemäß wird man zunächst fordern, dass das Maß von zwei Figuren, die sich nicht überdecken, die Summe der Maße dieser Figuren ist. Es zeigte sich aber, dass diese Forderung sich sogar auf den Fall von abzählbar unendlich vielen Figuren ausdehnen ließ. Das ermöglicht eine Erweiterung des bisherigen Integrals, die von Lebesgue gegeben wurde und ein Geschöpf unseres Jahrhunderts ist. Er schuf damit eine neue Theorie der reellen Funktionen; einzelne ihrer Sätze sind für die Physik heute unentbehrlich.

Man erkennt, dass die verschiedenen Integrale so entstanden sind, dass zu enge geometrische Anschauungen allmählich erweitert wurden. Die notwendige Erweiterung wurde von der Mengenlehre eingeleitet, die in Punktmengen zu denken lehrte. Man hat sich mit diesen neuen Begriffsbildungen so lange zu beschäftigen, bis sie geläufig und damit im Sinne der von uns vertretenen Ansicht anschaulich werden.

## 2.11 Von krummen Linien und ihren Tangenten

Soll ein bestimmtes Integral wirklich berechnet werden, so schlägt man dazu einen Weg ein, der über den Differentialquotienten führt. Wiederum hat man es mit einem Grenzwert zu tun, auf den die Frage aus der Geometrie führt, Tangenten zu bestimmen, das heißt solche Geraden, die eine Kurve in einem Punkte berühren. Beim Kreis ist es leicht, die Tangenten zu konstruieren:

Man errichtet im Endpunkt eines beliebigen Kreisdurchmessers die Senkrechte, und diese hat dann tatsächlich mit dem Kreis einen einzigen Punkt gemeinsam, den Berührungspunkt. Freilich ist diese Konstruktion auf den Kreis allein beschränkt. Um beliebige Kurven einzubeziehen, müssen wir wieder eine Grenzbetrachtung durchführen.

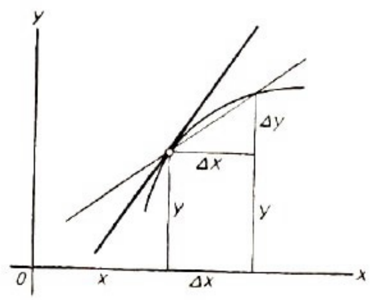



Man lege durch den Berührungspunkt irgendeine Gerade, welche die Kurve natürlich noch in einem zweiten Punkt schneiden wird. Nun lasse man diese Gerade sich um den Berührungspunkt so drehen, dass der zweite Punkt dabei immer näher an den Drehpunkt heranrückt, bis endlich beide Punkte zusammenfallen. Die so erreichte Grenzlage der Geraden bestimmt dann die Richtung der Berührenden im betrachteten Punkt.

Um diesen Gedanken jetzt auch rechnerisch zu erfassen, denken wir uns die Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben, also in der Form $y = f(x)$. Wir bezeichnen Abszisse und Ordinate des Berührungspunktes mit $x$ und $y$, die entsprechenden Werte des zweiten Schnittpunktes der Geraden und der Kurve mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Der Bruch

$$\frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x)x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bestimmt dann die Neigung der Geraden zur Abszissenachse, die sogenannte Steigung, wie man aus dem kleinen Dreieck der Abbildung sofort entnimmt.




Dreht sich die Gerade nun um den Punkte $x, y$, so rücken die beiden Schnittpunkte immer näher zusammen - sowohl $\Delta x$ als auch $\Delta y$ streben also gegen Null. In jeder Lage aber wird die Steigung der Geraden durch das Verhältnis $\Delta y : \Delta x$ gegeben. Es wird also darauf ankommen, den Grenzwert dieses Ausdrucks für $\Delta x \to 0$ zu betrachten; man muss untersuchen, ob er existiert, und wenn ja, welchen Wert er besitzt.

Diesen Wert nennt man dann die Ableitung oder auch den Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x$ und bezeichnet ihn mit

$$\frac{dy}{dx} \qquad \text{oder auch} \qquad \frac{df(x)}{dx}$$

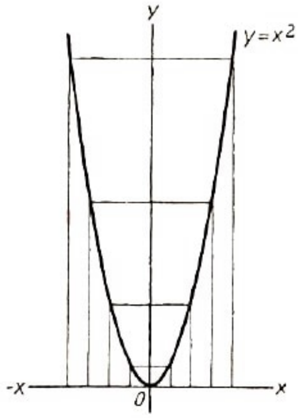
gesprochen $dy$ nach $dx$ oder $df$ von $x$ nach $dx$. Daneben benutzt man auch die kürzere Schreibweise $f'(x)$.

Die so bestimmte Ableitung gibt offenbar die Steigung der Tangente im Punkt $x, y$ an, das heißt die Richtung, welche die Kurve selbst in diesem Punkte besitzt - und damit ist die Grundaufgabe der Differentialrechnung gelöst.

Wir geben ein einfaches Beispiel: Es sei $y = f(x) = ax + b$. Dann ist also $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$, folglich $\Delta y = a\Delta x$, endlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a$$

Hier ist das Verhältnis $\Delta y$ zu $\Delta x$ unverändert gleich $a$, auch wenn wir zum Grenzwert übergehen. Die Steigung der Funktion $y = ax + b$ ist mithin in jedem Punkte $x, y$ immer gleich $a$ - was nicht weiter überraschen kann, denn die eben betrachtete Funktion ist ja das Abbild einer Geraden mit der Steigung $a$, und die Tangente an eine Gerade fällt mit der Geraden selbst zusammen.




Auf ganz ähnliche Weise berechnet man die Ableitung der einfachen Parabel, das heißt der Funktion $y = x^2$. Es ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Wie man sieht, ist hier der Zusammenhang zwischen der Kurve und ihrer Steigung schon etwas verwickelter. Je größer $x$ ausfällt, um so größer wird auch die Steigung $f'(x)$, um so steiler verläuft also die Kurve; ein Blick auf ihr Bild bestätigt dieses Ergebnis.

Wir haben damit gelernt, zwei einfachste Funktionen zu "differenzieren" , wie man sich ausdrückt. Und überraschenderweise beherrschen wir mit unseren beiden Ergebnissen, ja bereits mit dem ersten, eine ganze große Klasse von Funktionen. Für das Differenzieren bestehen nämlich einfache Rechenregeln. Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, so gilt zum Beispiel

$$\frac{d[f(x) + g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

das heißt die Summe zweier Funktionen wird differenziert, indem man die Summe der Differentialquotienten bildet, indem man also einfach gliedweise differenziert. Das ist leicht zu beweisen, sobald man sich an die Vorschriften erinnert, die wir für das Rechnen mit Grenzwerten ganz allgemein aufgestellt haben. Ausführlich geschrieben behauptet unsere Regel das Bestehen der Gleichung

$$\frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Vollzieht man hier überall den Grenzübergang, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung. Ganz ebenso gilt

$$\frac{d(f - g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Auf ähnliche Weise gewinnt man die Regel, nach der ein Produkt differenziert wird:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$$

Um die Ableitung eines Quotienten, also den Ausdruck

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx}$$

zu bilden, benutzt man einen kleinen Kunstgriff. Man bildet die triviale Gleichung $f = g \cdot \frac{f}{g}$ und wendet nun auf die rechte Seite die eben gewonnene Produktregel an. So ergibt sich

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Diese Rechenregeln setzen und tatsächlich instand, eine Unzahl von Funktionen ganz schematisch und ohne weiteres Nachdenken zu differenzieren. Um etwa die Ableitung von $y = x^4$ zu bilden, brauchen wir nur $y = x^2 \cdot x^2$ zu schreiben und unsere Produktregel anzuwenden, um sogleich das Ergebnis

$$\frac{dx^4}{dx} = 4x^3$$

zu erhalten. Ähnlich findet man

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Wir können weiter alle Funktionen differenzieren, die rational aus solchen Gliedern aufgebaut sind, das heißt sich als Summe, Differenz, Produkt oder Quotient einzelner Glieder von dieser Form darstellen, zum Beispiel $7x^4 + 2x^2 + x + 19$ oder

$$\frac{ax^n + bx^m + c}{dx^k + e}$$

Die Rechnung mag manchmal etwas mühsam sein, bietet aber begrifflich nicht die geringsten Schwierigkeiten: man sieht, wie groß der Nutzen dieses geschickt gewählten Kalküls ist, den wir, um es zu wiederholen, dem Genie von Leibniz verdanken.

Zuletzt wenden wir ihn auf $x : \log x$ an, wobei im Nenner der natürliche Logarithmus gemeint ist, und erhalten leicht $1 : \log x - 1 : \log^2 x$ als Ableitung, eine Größe, die positiv ausfällt, sobald $x$ größer als die Logarithmenbasis $e$ ist. Aus der Erklärung folgt aber sofort, dass eine stets positive Ableitung das Kennzeichen monoton wachsender Funktionen ist. Sind also $x_1$ und $x_2$ zwei natürliche Zahlen, für die $x_1 > x_2 > e$ gilt, dann ist $x_1 : \log x_1 > x_2 : \log x_2$ also auch

$$e^{x_1 \log x_2} > e^{x_2 \log x_1} \qquad \text{oder anders geschrieben} \qquad x_2^{x_1} > x_1^{x_2}$$

Bemerkenswert ist, dass sich das Ergebnis auf natürliche Zahlen bezieht und nichts mehr darin den Umweg über die Ableitung verrät. Wählt man $x_1 = 27$ und $x_2 = 3$, dann folgt, dass die Zahlen $3^{27}$ und $27^3$, für die man auch

$$3^{\left(3^3\right)} \qquad \text{und} \qquad \left(3^3\right)^3$$

schreiben kann, verschieden ausfallen. Zum Unterschied von Addition und Multiplikation ist das Potenzieren also weder kommutativ noch assoziativ.

Es ist naheliegend, die Operation des Differenzierens in zwei Richtungen noch weiter zu führen. Ein Differentialquotient $y' = f'(x)$ kann selbst erneut differenzierbar sein. Wir können also seine Ableitung bilden - genau so wie bei jeder anderen Funktion. Man bezeichnet diese neue Ableitung mit

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

und nennt sie die "zweite Ableitung" oder den "zweiten Differentialquotienten" der Ausgangsfunktion $y = f(x)$. Ganz analog fortschreitend bildet man die dritte Ableitung

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

und so fort. Man kann diese Schreibweise noch etwas vereinfachen, indem man folgendes vereinbart:
Das Zeichen $D$ bedeute einen "Operator" , diesmal die Vorschrift, dass die Operation den Differenzierens an einer Funktion vorgenommen werden soll. Der Operator $D$ liefert mir dann eine neue Funktion, nämlich die Ableitung: $Df(x) = f'(x)$. Ebenso würde $Df'(x) = f''(x)$ sein, und so weiter. Vorzüge dieser neuen Schreibweise ergeben sich in einem "Überkalkül" , den Sir Oliver Heaviside entwickelt hat und der Fragen aus der Differentialrechnung durch einfacher zu beantwortende Fragen aus der Algebra ersetzt.

Bisher sprachen wir immer nur von Funktionen einer einzigen Veränderlichen $x$; sie entstanden dadurch, dass wir den Punkten einer Geraden - nämlich der Abszissenachse - jeweils eine Zahl $y = f(x)$ zuordneten.
Man kann diesen Funktionsbegriff nun leicht erweitern, indem man Punkte in einer ganzen Ebene oder gar im Raum betrachtet. Aus der analytischen Geometrie wissen wir, dass jeder Punkt einer Ebene durch zwei $x, y$ bestimmt ist; ordnen wir ihm wieder durch irgendeine Abbildung einen Zahlenwert zu, so ergibt sich eine Funktion von zwei Veränderlichen, $f(x, y)$.

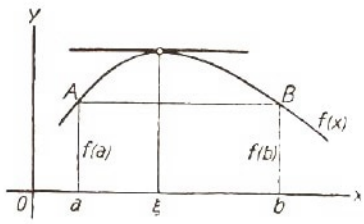
Ein Punkt im Raum war durch ein Wertetripel $x, y, z$ bestimmt; auch ihm können wir eine Zahl zuordnen und so eine Funktion $f(x, y, z)$ von drei unabhängigen Veränderlichen definieren, und rein rechnerisch kann man natürlich Funktionen von beliebig viel Veränderlichen betrachten.
Unsere früher gegebenen Erklärungen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit lassen sich leicht sinngemäß auf diese Fälle ausdehnen. Man geht dabei so vor, dass man zunächst nur eine Veränderliche variieren lässt und die anderen festhält. Um etwa die Ableitung von $f(x, y)$ nach $x$ zu betrachten, bildet man den Bruch

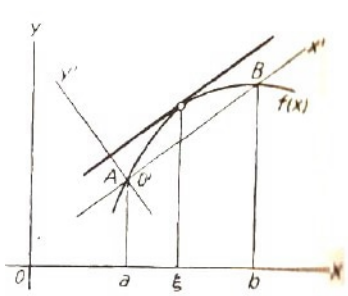
$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

und geht hier zum Grenzwert für $\Delta x \to 0 \to$ über. Ist er vorhanden, so nennt man ihn die "partielle Ableitung" von $f$ nach $x$ und bezeichnet ihn mit $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Ganz analog bildet man den Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Von größter Bedeutung ist nun ein Satz, den wir jetzt aufstellen wollen. Wenn für eine Kurve $f(x)$ die Ordinaten in zwei Punkten $a$ und $b$ gleich groß ausfallen und die Kurve innerhalb des Intervalls $< a, b >$ überall eine Berührende besitzt, dann leuchtet es geometrisch sofort ein, dass es innerhalb $< a, b >$ eine Stelle $\xi$ geben muss, wo die Berührende parallel ist zur Abszissenachse.




Arithmetisch ausgedrückt bedeutet dies, dass an jener Stelle die Steigung verschwindet, also $f'(\xi) = 0$ sein muss. Offenbar ist der Punkt, wo die Funktion ihr Maximum - oder ihr Minimum - annimmt, eine solche Stelle. Denn zunächst folgt nun der Differenzierbarkeit, dass die Kurve im Intervall $< a, b >$ stetig ist, sonst könnte nämlich die Steigung keinem endlichen Grenzwert zustreben, weil bei einer unstetigen Funktion für beliebig kleinen Nenner $\Delta x$ der Zähler $\Delta y$ über einer endlichen Größe bliebe.

Ist jedoch $f(x)$ stetig, dann besitzt sie innerhalb $< a, b >$ ein Maximum $f(\xi)$, so dass $f(\xi) \geq f(\xi + \Delta\xi)$ ist. Für positives $\Delta\xi$ würde dann die Steigung an der Stelle $\xi$ nicht positiv ausfallen, für negatives $\Delta\xi$ dagegen nicht negativ. Unter solchen Umständen ist nur die Null als Grenzwert möglich.

Der bewiesene Satz ist dem in der Mathematik berühmten "Mittelwertsatz" der Differentialrechnung gleichwertig, der für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ folgendes behauptet:
Ist $f(a)$ der Funktionswert im Punkt $a$, $f(b)$ der Wert im Punkt $b$, so gibt es innerhalb des Intervalls $< a, b >$ immer eine Stelle $\xi$, für welche die Beziehung $f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi)$ gilt, woraus sich

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ergibt. Die rechte Seite ist gleich der Steigung der Geraden, welche von $a$, $f(a)$, kurz $A$, nach $b$, $f(b)$, kurz $B$, führt, und der Mittelwertsatz behauptet also, dass die Ableitung immer mindestens an einer Stelle $\xi$ innerhalb des Intervalls $< a, b >$ dieser Steigung gleichkommt, das heißt, dass die Tangente in $\xi$ der Geraden $AB$ parallel läuft.

Aus dieser geometrischen Fassung geht die Gleichwertigkeit beider Sätze klar hervor. Legt man nämlich ein neues Koordinatensystem so, dass die Abszissenachse durch die beiden Punkte $A$ und $B$ geht, dann besitzt in diesem neuen Koordinatensystem $f(x)$ in den Endpunkten des Intervalls offenbar gleiche Werte - es wird $f(a) = f(b) = 0$.
Nun kann der vorhin bewiesene Satz angewandt werden. Es muss im Intervall $< a, b >$ eine Stelle geben, wo die Ableitung $f'$ verschwindet, wo also die Tangente parallel zur neuen Abszissenachse verläuft - das heißt parallel zur Geraden $AB$. Damit ist der Mittelwertsatz bewiesen. Er enthält eine wichtige Aussage über das Verhalten der Ableitung $f'$, auf deren Weiterverfolgung wir hier freilich verzichten müssen.

Wir wollen abschließend noch ein paar allgemeine Bemerkungen machen. Es erweist sich häufig als zweckmäßig, nicht die Ableitungen $f'(x)$ zu verwenden, sondern die "Differentiale" der Funktion $df(x)$.
Dazu betrachtet man die $dx$ als Größen, wie sie etwa in der abstrakten Algebra auftreten. Multipliziert man die Zahl $f'(x)$ mit $dx$, dann heißt das Produkt Differential der Funktion $f(x)$, in Zeichen $df(x)$.

Ähnlich sind die Differentiale von Funktionen $f(x, y)$ mehrerer Veränderlicher, diesmal $x$ und $y$, aufzufassen als Ausdrücke

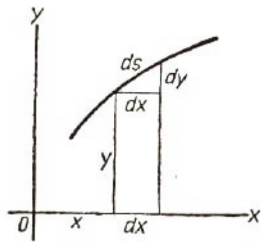
$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

in denen $dx$ und $dy$ Größen der vorhin genannten Art sind oder, was auf dasselbe hinauskommt, beliebige, aber stets endliche Werte.

Es hat Jahrhunderte gedauert, bis die Begriffe so weit geklärt waren, und es lohnt, sich darüber Gedanken zu machen, wie trotzdem die Mathematiker früherer Jahrhunderte zu grundlegenden richtigen Ergebnissen kamen. Die Erklärung liegt einfach im Funktionieren des Kalküls.
Freilich, das bedeutet noch nicht, dass ein Kalkül, rein formal angewandt, stets zu richtigen Ergebnissen führt! Solche Fehlschläge erlebte man damals wiederholt, insbesondere, wenn man Reihenentwicklungen betrachtete, die keinem Grenzwert zustrebten. Die Unzulänglichkeiten des Kalküls mussten dann durch ergänzende Überlegungen behoben werden. Trotzdem bleibt das Schaffen der Symbolik, die den Kalkül erst wirksam macht, eine wissenschaftliche Großtat von Leibniz: die geniale mathematische Eingebung traf instinktiv den Kern der Sache und

setzte sich mit gewaltiger Stoßkraft über Unklarheiten und Unzulänglichkeiten der Begründung hinweg.

Es sei noch einiges über unendlich kleine Größen gesagt, die Jahrhunderte hindurch zur Untermauerung des Kalküls dienten, an Stelle des heutigen Aufbaus, der auf dem Grenzwert als Grundlage ruht. Man redete über unendlich kleine Größen oft und ausführlich, ein Zeichen, dass die Begriffe noch nicht restlos geklärt waren. Beruhten aber die unendlich kleinen Größen nach unserer heutigen Auffassung auf einer Selbsttäuschung der Mathematiker, so gelangte man mit ihrer Hilfe doch vielfach zu richtigen Ergebnissen.




Diese paradoxe Erscheinung möge an einem Beispiel erläutert werden. Man betrachtete eine Kurve und sagte sich, dass sie in unendlich kleine Teile. sogenannte Bogenelemente $ds$, aufgeteilt werden darf, deren jedes als unendlich kleine Strecke gelten kann.
Setzt man hier den Pythagoras an (Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Kathetenquadrate), dann erhält man damit den richtigen Ausdruck für das Bogendifferential $ds^2 = dx^2 + dy^2$, um dem durch Integration die Länge des endlichen Bogens folgt.

Einwandfrei kann man die Bogenlänge zum Beispiel aus unserem Stammsatz gewinnen.

Einer jeden Betrachtung, die mit solchen unendlich kleinen Größen arbeitet, haftet immer etwas Unbefriedigendes an, wenn sie auch oft rascher zum Ziele führt als die einwandfreien Überlegungen, denn auf Grund einer nicht völlig einwandfreien Betrachtung kann nie mit Sicherheit behauptet werden, dass das Ergebnis richtig ausfällt.
Zudem gibt es streng genommen gar keine Punkte, die unendlich nahe beieinander liegen, wie sie hier herangezogen wurden, weil zwei Punkte voneinander stets einen endlichen Abstand haben müssen, will man mit gewöhnlichen Zahlen als Koordinaten wirklich auskommen. Hält man also die geschilderte Herleitung für anschaulich, dann gibt man damit zu, dass unsere Anschauung entwicklungsfähig ist, indem sie dann nicht mehr auf gewöhnliche Strecken beschränkt bleibt.

Wenn man Differentiale trotzdem durch Linienteile darstellt, dann wird man den wirklichen Verhältnissen nur zum Teil gerecht, ähnlich wie bei gezeichneten Linien, die unvermeidlich von endlicher Breite ausfallen. Die Berechtigung liegt in beiden Fällen darin, dass bereits so wenig an Zutreffendem genügen kann, um richtige Zusammenhänge aufzuspüren.

Erst genaue Betrachtungen setzen in den Stand, die Anwendbarkeit der Differentialrechnung zu überblicken. Noch vor einem Jahrhundert konnte ein namhafter Mathematiker behaupten, dass stetige Funktionen in jedem Fall differenzierbar seien.
Er gab dafür einen vermeintlichen Beweis, während wir heute in der Lage sind, Funktionen zu bilden, die in einem ganzen Intervall überall stetig ausfallen und trotzdem an keiner einzigen Stelle differenzierbar sind.

Die gute alte Zeit, in der es auf Genauigkeit weder zeitlich noch in Begründungen sehr ankam, ist damit vorbei, jedenfalls für die Mathematiker. In der Physik begegnet man freilich noch immer Betrachtungen der bequemen alten Art - beispielsweise wenn von einem Raumteil die Rede ist, der einerseits eine ganze Anzahl von Molekülen enthält, andererseits unendlich klein ausfällt.
Offensichtlich trifft man darin ähnliche Vorstellungen, wie wir sie anlässlich der Bogenlänge schilderten.

## 2.12 Probieren geht über Studieren

Aus jeder mathematischen Operation lässt sich auf die denkbar einfachste Weise ein mathematischer Fortschritt gewinnen: man braucht dazu nichts zu tun, als die Operation umzukehren. So gewinnt man zum Beispiel aus der einfachen Addition durch Umkehrung eine neue Operation, die Subtraktion. Sie erwächst aus folgender Aufgabe: Ich habe zwei Zahlen, $a$ und $b$, und ich Suche nun eine dritte Zahl $c$, welche, zu $a$ addiert, gerade $b$ ergibt. In Formeln: es soll $a + c = b$ sein, also $c = b - a$.

In ähnlichem Verhältnis wie die Subtraktion nur Addition steht die Operation des Differenzierens zu der des Integrierens: die eine ist die Umkehrung der anderen. Bei der Differentiation war uns eine Funktion $f(x)$ gegeben, und wir suchten nach ihrer Ableitung $f'(x)$. Die Aufgabenstellung der Integration lautet umgekehrt so : Gegeben ist eine Funktion $f(x)$; ich suche jetzt nach einer Funktion $F(x)$, deren Ableitung gerade mein $f(x)$ ist. Diese gesuchte Funktion heißt das unbestimmte Integral von $f(x)$, und man bezeichnet es mit $\int f(x)dx$. Es soll also sein

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Ist mir zum Beispiel die Funktion $f(x) = 2x$ gegeben, so kann ich das Integral ohne weiteres hinschreiben - vorausgesetzt, dass ich mich noch an die früheren Ausführungen erinnere. Es wird $\int 2xdx = x^2$, denn tatsächlich ist

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

So kann man also Integrale durch Probieren finden - leider nur durch Probieren! Denn unglücklicherweise besitzen wir hier keine Rechenvorschriften, die uns jederzeit leicht und sicher und ohne viel Nachdenken zum Ziele führen. Zwar gibt es auch in der Integralrechnung gewisse Regeln, welche es ermöglichen, kompliziertere Fälle auf einfachere zurückzuführen, doch liegen die Verhältnisse sehr viel weniger günstig als bei den Differentialen.

Hier heißt es auch in der Mathematik einmal: Probieren geht über Studieren. Gottlob haben fleißige Menschen wenigstens umfangreiche Tafelwerke angelegt, in denen eine große Zahl von Integralen aller möglichen Funktionen verzeichnet steht.

Die Umkehrung einer Operation kann vieldeutig ausfallen. Bei der Subtraktion ist das nicht der Fall, denn die Differenz: $b - a$ bedeutet eine einzige Zahl, aber schon die Umkehrung des Potenzierens, das Wurzelziehen, gibt mehrere Lösungen; so ist zum Beispiel sowohl $+2$ als auch -2 eine Quadratwurzel aus 4.
Das Integrieren führt nun gleich zu unendlich vielen Lösungen, die sich allerdings nur durch konstante Werte voneinander unterscheiden. Denn sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Integrale der Funktion $f(x)$, so gelten die Gleichungen

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{dG(x)}{dx} = f(x)$$

also $F' - G' = 0$; weiter $(F - G)' = 0$, die Ableitung der Differenz $F(x) - G(x)$ muss identisch verschwinden, was nur für eine Konstante zutrifft. Also ist $F = G + c$, wobei $c$ irgendeine feste Zahl darstellt.

Eines dieser unendlich vielen Integrale ist das bestimmt. Integral, das wir früher schon kennenlernten. Das folgt sowohl aus der arithmetischen Erklärung als auch aus der geometrischen Auslegung. Halten wir uns an letztere!

Diesmal geht es um die Steigung des Integrals, das ja ebenfalls eine Funktion darstellt; als Quotient des Ordinatenzuwachses durch den Abszissenzuwachs bedeutet jetzt die Steigung den Flächeninhalt des Streifens zwischen $b$ und $b + \Delta b$, geteilt durch die Länge $\Delta b$.

Dieser Streifen darf offensichtlich durch ein Rechteck ersetzt werden von einer Höhe, die mit verschwindendem $\Delta b$ gegen die Ordinate im Punkt $b$ strebt.

Damit überblicken wir die Infinitesimalrechnung in ihren Grundzügen. Schon frühzeitig differenzierte und integrierte man - wenn auch in anderer Einkleidung - erfolgreich, ohne jedoch erkannt zu haben, dass das eine die Umkehrung des anderen bildet; diese Erkenntnis ist aber der Kern des Ganzen.
So gleicht die Infinitesimalrechnung heute einem Zauberstab in der Hand des Mathematikers. Die scheinbar voneinander entferntesten Probleme fügen sich seinem Gebot. Sie erlaubt es, jede Funktion in eine übersichtliche Reihe zu entwickeln, sie vereinheitlichte die Ermittlung von Berührenden ebenso wie von Flächeninhalten, und das konnte sie, weil ihre Begriffe allgemein genug ausfielen, indem sie gerade das Gemeinsame dieser Betrachtungen herausschälten.

Wieder erleben wir dabei, dass das Schaffen von umfassenderen Begriffen, die man durch Abschwächen von Voraussetzungen gewinnt, einen ungeheuren Fortschritt erzielte. Spielend löst man heute Fragen, an denen noch vor wenigen Jahrhunderten bedeutende Fachgelehrte gescheitert sind, ja ohne Infinitesimalrechnung wäre unser technisches Zeitalter einfach undenkbar.

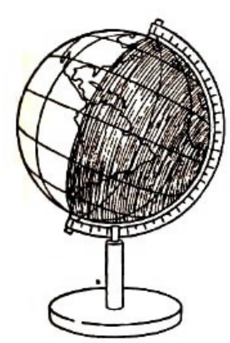
## 2.13 Los von Euklid!

Zunächst berichten wir noch einiges über Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie. Wir wissen, dass sich die Länge von Kurvenbögen als bestimmtes Integral schreiben lässt.
Verbiegungen der Kurve können als Umformungen dieses Integrals aufgefasst werden. Das gibt uns die Hoffnung, mit Hilfe der Infinitesimalrechnung eine wichtige Frage in Angriff nehmen zu können: Wie und wann lassen sich Flächen so verformen, dass die Maßverhältnisse in ihnen keine Veränderungen erleiden?

Darunter ist folgendes zu verstehen.
Man kann zum Beispiel einen Kegelmantel längs einer Geraden aufschneiden und ihn dann "abwickeln" , das heißt auf der Ebene ausbreiten. Von unserem normalen Standpunkt, aus dem dreidimensionalen Raum heraus betrachtet, bedeutet dieses Verfahren eine gewaltige Gestaltsänderung des Kegelmantels, der aus einer gekrümmten zu einer ebenen Fläche wird. Ein zweidimensionales Wesen aber, welches in der Fläche lebt und keine Ahnung davon hat, dass seine Heimat in einen dreidimensionalen Raum eingebettet ist, würde van alldem nichts merken. Denn alles, woran es sich orientieren kann, sind die Maßverhältnisse in der Fläche, also beispielsweise das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises - und diese ändern sich beim Abwickeln nicht.

Die systematische Untersuchung solcher Fragen wurde verhältnismäßig spät in Angriff genommen. Um den Kalkül anwenden zu können, bedarf es dabei augenscheinlich einer Einschränkung, an der die ganze Differentialgeometrie durchweg festhält: die untersuchten Figuren, die Kurven oder Flächen, müssen, auf ein Koordinatensystem bezogen, differenzierbare Funktionen ergeben. Diese Einschränkung scheint auf den ersten Blick durch die Methode bedingt und darum künstlich zu sein, doch wird dieses harte Urteil bei näherem Zusehen gemildert, denn es bleibt zu beachten, dass die untersuchten Kurven Bogenlängen besitzen sollen, was nur dann möglich ist, wenn sie fast überall differenzierbar sind.

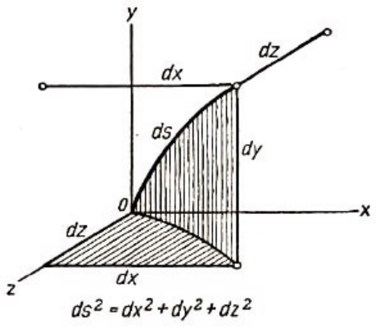
Es ergibt sich so, dass die geometrischen Verhältnisse auf Flächen im allgemeinen wesentlich von denjenigen abweichen, die wir aus der Ebene her kennen und heute als euklidische Geometrie bezeichnen.
In der geläufigen euklidischen Geometrie beträgt zum Beispiel die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad, das Verhältnis von Kreisumfang zu -durchmesser ist gleich $\pi$, durch einen Punkt gibt es stets eine einzige Parallele zu einer Geraden, und was derlei Sätze mehr sind.



Auf einer beliebigen Fläche werden diese Sätze im allgemeinen nicht mehr gelten: zum Beispiel gibt es auf der Kugel Dreiecke von 270 Grad Winkelsumme und Kreise, bei denen der Umfang das Doppelte des Durchmessers ist, statt $\pi$ also der Wert 2 erscheint.

Durch Ausmessen auf der Erdoberfläche könnte man also die Ansicht des Altertums, die Erde sei eine Scheibe, widerlegen. Diese auf einer Fläche geltende Geometrie beherrscht man nun vollkommen, sobald man den Ausdruck für die Bogenlänge kennt, wozu es genügt, das Bogendifferential zu kennen, weil daraus durch Integration die Bogenlänge hervorgeht.

Ähnlich wie bei ebenen Kurven bestimmen wir das Bogenelement $ds$ aus den Koordinatendifferentialen $dx$, $dy$, $dz$ mit Hilfe des Pythagoras:




$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Es bleibt zu bedenken, dass $x, y, z$ diesmal Flächenpunkte darstellen, also zweidimensionale Gebilde. Analytisch bedeutet dies, dass $x, y, z$ als Funktionen zweier Veränderlicher, die wir $u, v$ nennen wollen, angesetzt werden müssen. Dann aber lassen sich die Differentiale, die in der Formel für das Bogenelement rechts stehen, umformen. Zum Beispiel ist

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

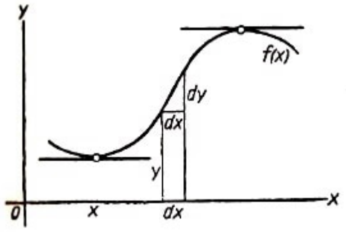
Diese Werte können in unsere Formel eingesetzt werden. Dann ergibt sich für das Quadrat des Bogenelements $ds^2$ ein quadratischer Ausdruck, der $ds^2$ in Abhängigkeit von $du$ und $dv$ darstellt. Als Koeffizienten treten Produkte der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial v}\ ,\ldots$$

auf. Dieser allgemeine Ausdruck für $ds^2$ enthält natürlich den einfachen Pythagoras als Sonderfall.

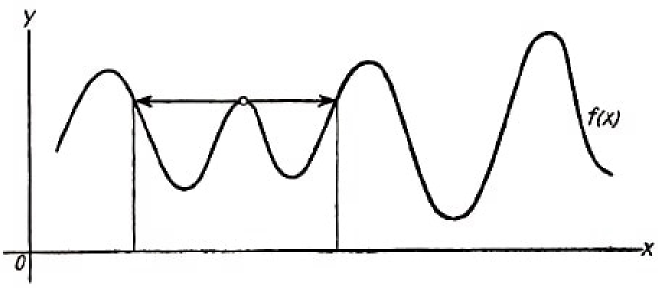
Damit besitzt man nun die Möglichkeit, die euklidische Geometrie zu erweitern, indem man die Voraussetzung abschwächt, dass das Bogenelement sich mit Hilfe des Pythagoras darstellt, und statt dessen den allgemeineren quadratischen Ausdruck zulässt. Weil er die Maßverhältnisse in der Fläche bestimmt, heißt er die metrische Grundform. Man kann sich noch von der Beschränkung auf zwei Dimensionen befreien, indem man statt der Wertepaare $u, v$ gleich $n$ Zahlen zusammenfasst und als Punkte betrachtet und damit $n$-dimensionale Riemannsche Geometrie treibt.

## 2.14 Sieger im Inhaltswettbewerb




Ein weiteres Feld für Anwendungen des Kalküls bildet die Frage nach den größten und kleinsten Werten, die eine Funktion annehmen kann. Bei der Ableitung des Mittelwertsatzes wurde gezeigt, dass dort, wo eine Kurve ein Maximum hat, die Ableitung verschwinden muss. Dasselbe gilt vom Minimum: an der Stelle, wo die Kurve einen kleinsten Wert aufweist, verschwindet ihre Ableitung.

Absichtlich wurde dabei von einem größten oder kleinsten Wert geredet; denn bei der angeführten Überlegung setzen wir nur voraus, dass die Kurve in einer kleinen Umgebung lauter kleinere Werte annimmt als im betrachteten Punkt selbst; es könnte also sehr wohl sein, dass es mehrere solcher maximaler Stellen gibt, wie das beispielsweise bei einer Wellenlinie wirklich der Fall ist.
Zu beachten bleibt, dass das Verschwinden der Ableitung zwar eine notwendige Bedingung dafür bildet, dass die Kurve ein Maximum oder ein Minimum aufweist, aber keineswegs hinreicht, um das mit Gewissheit behaupten zu können. Maximum und Minimum




fasst man unter der Sammelbezeichnung "Extremum" zusammen, und man kann dann sagen, dass für ein Extremum das Verschwinden der Ableitung notwendig, aber nicht hinreichend ist.

Die eben betrachteten Fälle gehören zu den einfachsten; es liegt eine bestimmte Kurve vor, und es wird nach den Stellen gefragt, wo sie ein Extremum besitzt. Die Verhältnisse werden wesentlich verwickelter, wenn nach Extremwerten gefragt wird, die von der Gestalt der Kurve abhängen, beispielsweise nach der größten Fläche, die ein Kurvenbogen mit seiner Sehne einschließt, wenn die Länge des Kurvenbogens und die Endpunkte der Sehne fest gegeben sind. Die analytische Formulierung dieser Aufgabe führt auf ein bestimmtes Integral, dessen Wert von der Gestalt der Kurve abhängt. Mit solchen Aufgaben beschäftigt sich ein neuer Zweig unseres Faches, die Variationsrechnung.

Für die Variationsrechnung entwickelte man einen eigenen Kalkül. Man bezeichnet ihre Grundoperation in Anlehnung an die Differentialrechnung mit dem Buchstaben $\delta$, der im griechischen Alphabet dem Differentiationszeichen $d$ entspricht.
Die Grundzüge dieses Variationskalküls wurden von dem neunzehnjährigen Lagrange in einem Brief vom 12. August 1755 an Euler entwickelt, freilich mehr durch Erfolge als strenge Begründung gerechtfertigt. Euler führte dann den Variationskalkül auf die Differentialrechnung zurück und zeigte damit, dass er zu keinen Widersprüchen führt, soweit das für die Differentialrechnung selber zutrifft.

Dass aber die Differentialrechnung richtig ist, stellte sich erst viel später heraus, als sie nämlich endlich einwandfrei begründet werden konnte, indem Cauchy den Begriff des Grenzwertes und des Grenzüberganges streng formulierte. Der Variationskalkül kann als Weiterbildung des Differentialkalküls betrachtet werden; er erlebte kurz vor unserer Jahrhundertwende noch allgemeinere Formulierungen, auf die wir später noch eingehen müssen.

Die Fragestellung der Variationsrechnung lässt sich so auffassen, dass man einen Inhaltswettbewerb unter verschiedenen möglichen Flächen veranstaltet und nach dem Sieger fragt, nach der größten Fläche. Die zugrunde liegenden bestimmten Integrale können nämlich, wie wir wissen, als Inhalte angesehen werden.


Allerdings begann die Theorie ursprünglich weniger formal. Sie ist einem Wettstreit der beiden feindlichen Mathematiker-Brüder Jakob und Johann Bernoulli zu verdanken.
Johann forderte den älteren Bruder öffentlich heraus, diejenige - auf der abgebildeten Titelvignette des Briefwechsels zwischen Leibniz und Johann Bernoulli sichtbare - Linie zu bestimmen, entlang welcher ein der Schwere unterworfener Körper von einem Punkt in kürzester Zeit - die Wurfparabel genügt dieser Bedingung nicht - zu einem zweiten Punkt gelangt, wenn er den ersten Punkt mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit verlässt und sich alles in einer vertikalen Ebene abspielt.

Jakob gelang die Lösung, und er entwickelte dabei gleich eine allgemeine Methode, ähnliche Aufgaben zu lösen, während die Lösung von Johann genialer, aber nur auf diesen Fall gemünzt war.

Damit begegnen uns zweierlei mathematische Fähigkeiten: die Begabung, systematisch vorzugehen, in der Person von Jakob, und die schöpferische Erfindungsgabe in der Person von Johann. Wären beide Fähigkeiten in ein und derselben Person vereint gewesen, wie das für die größten unter den Naturforschern zutrifft, dann hätten sie sich zwar ebenfalls bekämpft, doch wären diese Kämpfe für die Umwelt unsichtbar verlaufen, während sie sich im Fall der beiden Bernoullis sehr unerfreulich gestalteten. Johann setzte sich schwer ins Unrecht und hat das erst nach dem Tode seines Bruders zugegeben.

Der Variationskalkül führt Aufgaben wie die Frage nach der oben näher geschilderten größten Fläche auf gewisse "Differentialgleichungen" zurück, die nach ihrem Entdecker Euler benannt werden. Hierbei handelt es sich um Gleichungen, die zwischen Funktionen und ihren Ableitungen bestehen und aus denen die unbekannten Funktionen zu bestimmen sind. Man kann sich denken, dass diese Bestimmung oder Lösung im allgemeinen auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, die in der Tat noch nicht in jedem Fall behoben werden konnten.

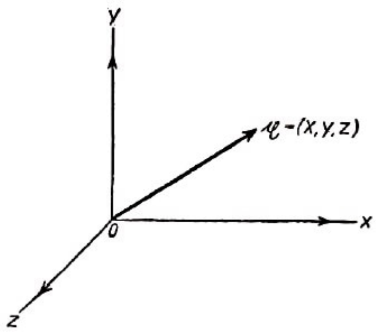
In der Form des unbestimmten Integrals begegnete uns schon eine Differentialgleichung, die denkbar einfach ist; hier wird nach einer Funktion gefragt, deren Ableitung gegeben ist. Durch Integration erhält man die Lösung, und darum liegt es nahe, zu versuchen, die Lösungen in jedem Fall durch Integration zu gewinnen; doch gelingt das nur für eine enge Auswahl von Differentialgleichungen.

Die Verhältnisse erinnern an algebraische Gleichungen, von denen auch nur verhältnismäßig wenige durch Wurzelausziehen - welches dem Integrieren entspricht - auflösbar sind. Hier wie dort führt die Gruppentheorie zu dieser Einsicht, und sie stellt damit wieder einmal ihre beherrschende Stellung unter Beweis.

## 2.15 Pfeile zum Rechnen

Eine weitere Anwendung der höheren Mathematik findet in derjenigen Geometrie statt, der wir uns jetzt zuwenden wollen. Es erscheint aber empfehlenswert, sich zunächst an einfacheren Fällen zu orientieren.
Mit der Bezeichnung "einfach" möchten wir zugleich ein Urteil bilden, das ganz im Sinn unserer Ausführungen liegt, dass nämlich verwickelte Gedankengänge mit fortschreitender Schulung immer durchsichtiger erscheinen, bis sie zuletzt für anschaulich gelten.

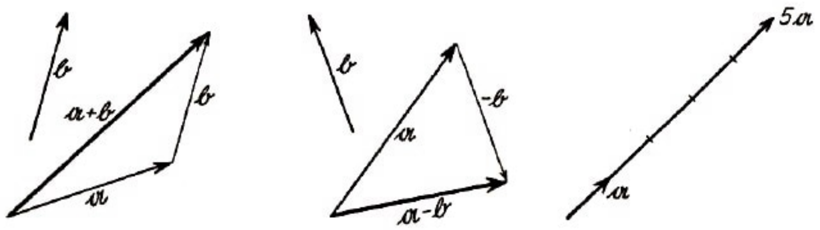
Wie weit sich das im Alltag bewährt, kann man am Verhältnis des Schülers zum Lehrer erkennen. Der Lehrer braucht nur einige Anhaltspunkte, um einen Gedankengang zu rekonstruieren, auf den er sich nicht mehr besinnen kann, im Gegensatz zu seinem Zögling, der am besten tut, wenn er sich den ganzen Wortlaut einprägt. Man ist versucht, darin die Erklärung für die so weit auseinandergehenden Auffassungen darüber zu erblicken, was wesentlich ist: Das Wesentliche fällt recht unterschiedlich aus, indem es stets auf den Beschauer bezogen bleibt.



Bei drei Dimensionen schreibt man oft $x$, $y$, $z$ für $x_1$, $x_2$, $x_3$

Man gehe von $n$ Zahlen $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ aus, die, ähnlich wie das in der analytischen Geometrie mit zwei oder drei Zahlen geschieht, zu einem "Punkt" mit den Koordinaten $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ zusammengefasst werden.
Dieser Punkt bestimmt mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammen eine Strecke, auf der weiterhin eine Richtung dadurch festgelegt wird, dass man fordert, sie soll vom Koordinatenanfangspunkt wegführen. Solch eine gerichtete Strecke nennt man einen Vektor; wir sprechen von einem Vektor $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ mit den Komponenten $x_1, x_2$, ..., $x_n$.

Die Zahlen $x_1 ... x_n$ können auch komplexe Größen sein, also Ausdrücke der Form $a + bi$, wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit darstellt.
In der Menge dieser Vektoren erklärt man dann gewisse Verknüpfungen, die gruppentheoretischer Natur sind und aus einer Gesamtheit von Vektoren einen linearen Raum machen.




Das geschieht, indem man eine Addition von Vektoren einführt und eine Multiplikation von Vektoren mit Zahlen. Die Summe der beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnet man mit $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und meint damit den Vektor mit den Komponenten $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, ..., $x_n + y_n$.
Die Multiplikation des Vektors $\mathfrak{x}$ mit der Zahl $a$ ergibt den Vektor $a\mathfrak{x} = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$.

Es handelt sich hierbei um mehr als nur eine abgekürzte Schreibweise. Dieses Zusammenfassen von $n$ Zahlen zu Größen schafft wirklich neue Begriffe - so wie eine Uhr auch mehr darstellt als bloß die Vereinigung von Zahnrädern. Es gilt jetzt, die Gesetzmäßigkeiten in diesem neuen Reich von Größen zu erforschen. Zunächst gibt es, genau wie in der analytischen Geometrie des üblichen Raumes von drei Dimensionen, auch im linearen Raum Koordinatensysteme.

Beispielsweise bilden die Vektoren

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0, ..., 0) \quad ; \quad \mathfrak{e}_2 = (0, 1, ..., 0) \quad ... \quad \mathfrak{e}_n = (0, 0, ..., 1)$$

ein Koordinatensystem. Ein beliebiger Vektor lässt sich dann als Summe aus diesen "Einheitsvektoren" zusammensetzen: es wird

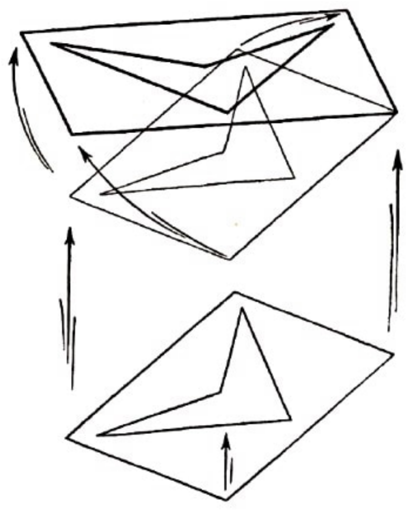
$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + ... + x_n\mathfrak{e}_n$$

Als nächstes sind diejenigen eindeutigen Abbildungen des linearen Raumes auf sich selbst zu untersuchen, die Summe und Produkt wieder in Summe und Produkt überführen. Der rechnerische Ausdruck dieser einfachen Forderung ist, wie so oft, ziemlich umständlich, woran man sich weniger stören wird, wenn man bedenkt, dass der Gedanke die Bäume zu einem Wald zusammenfasst.
Sei der Vektor $\mathfrak{x}'$ das Bild des Vektors $\mathfrak{x}$, so berechnen sich die Komponenten von $\mathfrak{x}'$ aus den Komponenten von $\mathfrak{x}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &... \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Das Koeffizientenschema, das heißt die Gesamtheit der Zahlen $a_{11}$, ..., $a_{nn}$ in diesen Formeln wird mit $A$ bezeichnet und heißt "Matrix" . Wiederum geht es um das Zusammenfassen von Zahlen, diesmal sogar von $n^2$ Zahlen, wodurch neue Größen definiert werden, eben die Matrizen.

Man kann nun mit diesen Matrizen ähnlich rechnen wie mit gewöhnlichen Zahlen, nur muss man natürlich festlegen, was unter Addition und Multiplikation solcher Zahlengebilde verstanden werden soll. Beispielsweise geschieht die Multiplikation so, dass man den linearen Raum zweimal hintereinander auf sich selbst abbildet und das Endergebnis als Produkt der beiden Matrizen bezeichnet, welche den Einzelabbildungen entsprechen.



Von vornherein ist es dann klar, dass sich die Elemente der neuen Matrix aus den Elementen der beiden Matrizen bestimmen, nur fällt der rechnerische Ausdruck etwas verwickelt aus, trotz des einfachen Gedankens, der unserer Erklärung zugrunde liegt. Da es sich dabei um durchweg elementare Überlegungen handelt, sind diese geeignet, nach einiger Übung die Angst vor noch so verwickelten Formeln zu nehmen, weil man in die Lage versetzt wird, hinter umständlichen Ausdrücken den einfachen Sinn zu erkennen. Darin besteht das Geheimnis des Mathematikers.

Aus der Matrix entsteht ein neues Gebilde, eine "Determinante" , wenn ihre Elemente wie folgt verarbeitet werden.
Man bilde alle möglichen Produkte von je $n$ Elementen, indem man der Reihe nach den Zeilen der Matrix je ein Element entnimmt, jedoch so, dass keine Spalte leer ausgeht. Diese Produkte versieht man abwechselnd mit positivem oder negativem Vorzeichen und zählt sie dann alle zusammen. So ergibt die Matrix

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

die Determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Damit sind wir in der Lage, Matrizen zu kennzeichnen, die eine Verallgemeinerung von Drehungen des Koordinatenkreuzes in der Ebene und im Raum bilden. Solche Drehungen besitzen nämlich eine Determinante vom Absolutwert 1 und heißen "orthogonale Transformationen" .

Im gedrehten Koordinatensystem haben dann die Komponenten eines Vektors oder die Elemente einer Matrix neue Werte, die aus den ursprünglichen mittels der Drehungsmatrix berechnet werden müssen. In den neuen Elementen müssen sich geometrische Eigenschaften auf dieselbe Weise ausdrücken wie in den ursprünglichen, denn geometrische Eigenschaften sind unabhängig vom Koordinatensystem.
Diese Bemerkung gestattet es, geometrische Verhältnisse durch das Verhalten der Vektoren algebraischen Transformationen gegenüber zu kennzeichnen. Uns interessiert davon nur so viel, dass orthogonale Transformationen eine bestimmte Klasse von Matrizen derart umformen, dass nur die von links nach rechts unten verlaufende Diagonale noch Elemente enthält, die nichtverschwindende Werte aufweisen, alle anderen Elemente der Matrix dagegen Null werden.

Solche Matrizen nennen wir kurzweg "Operatoren" ; die bei der Transformation übrigbleibenden Elemente in der Diagonale heißen die "Eigenwerte" des Operators. Zwischen den einzelnen Elementen eines Operators bestehen bestimmte Beziehungen.
Man erinnert sich, dass die Zahlen $a_{kl}$ auch komplexe Größen sein dürfen, also von der Form $b_{kl} + ic_{kl}$. Unter $\overline{a_{kl}}$ versteht man die "konjugiert komplexe Zahl" $b_{kl} - ic_{kl}$.
Dann gilt für jeden Operator die Forderung $a_{kl} = \overline{a_{kl}}$, das heißt: Elemente, die symmetrisch zur Diagonale liegen, sind konjugiert komplex.

Diese besondere Beschaffenheit von Matrixelementen tritt weiterhin bei einer wichtigen Erweiterung des Begriffs der Länge von Vektoren in Erscheinung, die sich für die Übertragung der Metrik auf den uns interessierenden Raum als ausschlaggebend erweisen wird. Unter der Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ versteht man den positiven Wert von

$$\sqrt{x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + ... + x_n\overline{x_n}}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen veranlasst uns, das "skalare" oder "innere Produkt" $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ einzuführen:

$$x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n}$$

Offenbar schreibt sich dann die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ als $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}$.
Entsteht nun $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{x}$ mittels der Matrix $A$ eines Operators, in Zeichen $\mathfrak{y} = A\mathfrak{x}$, dann gilt $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{y}, A\mathfrak{x})$.

Im Laufe dieser Betrachtungen lernten wir in den Matrizen Größen kennen, für die Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation erklärt werden konnten, so dass die Bezeichnung Größe damit gerechtfertigt ist. Man nennt die hier behandelten Größen "Tensoren" , genauer spricht man bei der Matrix von einem Tensor zweiter Stufe. Vektoren heißen Tensoren erster Stufe, während die Tensoren höherer Stufen und die noch allgemeineren "Spinoren" nach ähnlichen Gesichtspunkten erklärt werden.

Wir brauchen nicht mehr näher darauf einzugehen, sondern kehren zu den Matrizen zurück

und stellen fest, dass für sie die Regeln für die übliche Addition und Multiplikation nur teilweise erhalten bleiben, weil es nicht von vornherein gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Faktoren in einem Produkt genommen werden.
Denn das Produkt von zwei Matrizen erklärten wir damit, dass die beiden Abbildungen, die sie verkörpern, hintereinander auszuführen sind; das Endergebnis hängt aber im allgemeinen von der Reihenfolge ab. Nur wenn das zufällig nicht zutrifft, wie in Abb. S. 122, darf man die Faktoren vertauschen und nennt dann die beiden Matrizen vertauschbar miteinander.

Im allgemeinen Fall muss demnach eine Regel geopfert werden, die für gewöhnliche Zahlen stets gilt, und man hat damit einen konkreten Anlass, Voraussetzungen abzuschwächen. Da uns diese Fragestellung in der modernen Algebra bereits begegnet ist, braucht sie uns hier nicht weiter zu beschäftigen.

## 2.16 Ein Raum von unendlich viel Dimensionen

Diese Entwicklungen sollten zur Orientierung beim Entwurf einer neuen Geometrie dienen, auf die Hilbert als erster stieß und die darum nach ihm benannt wurde. Hilbert betrachtete abzählbar unendliche Folgen von Zahlen als Punkte, wenn die Absolutwerte der einzelnen Glieder, ins Quadrat erhoben, eine Reihe mit endlicher Summe bildeten. Ähnlich wie vorhin lassen sich für diese Punkte Addition, Multiplikation usw. erklären, doch wollen wir davon hier absehen und an Stelle dieses konkreten Falles gleich eine abstrakte Formulierung geben, die dann weitere wichtige Verwirklichungen gestatten wird.

Das auffallendste ist, dass der neue Raum unendlich viel Dimensionen besitzt, entsprechend den unendlich viel Komponenten des einzelnen Punktes. Trotzdem gibt es darin richtiggehende Koordinatenkreuze, in denen sich die einzelnen Punkte ähnlich darstellen wie in der analytischen Geometrie die Punkte des gewöhnlichen Raumes oder vorhin die Punkte des n-dimensionalen Raumes, nur dass diese Koordinatenkreuze nicht mehr aus endlich vielen, sondern aus unendlich vielen Achsen bestehen.

Was Punkte sind, lassen wir offen, verlangen aber, dass man sie zueinander addieren und mit einer Zahl multiplizieren darf nach denselben Regeln, wie sie für n-dimensionale Vektoren gelten.
Weiter gehöre zu jedem Punktepaar $f, g$ eine Zahl $(f, g)$, die sich ähnlich verhält wie das skalare Produkt und geeignet ist, eine Metrik im Hilbert-Raum zu stiften. Man hat dazu den positiven Wert von $(f, f)^{\frac{1}{2}}$ als Länge des Vektors $f$ zu erklären, mit $|f|$ zu bezeichnen und $|f - g|$ als Entfernung der beiden Punkte $f, g$ voneinander zu betrachten.

Der Umstand, dass die Beschaffenheit der Punkte nicht näher angegeben wurde, erfordert die zusätzlichen Annahmen, dass die Häufungspunkte (in deren beliebiger Nähe es Punkte des Hilbert-Raums gibt) selber zum Raum gehören und es abzählbar viele Punkte gibt, die im Raum so dicht liegen, dass einer unter ihnen in jedem noch so kleinen Raumteil anzutreffen ist.
Alles das trifft für die bisher betrachteten Räume ebenfalls zu, nicht mehr aber die abschließende Forderung, die darauf hinausläuft, dass es unendlich viele aufeinander senkrechte Richtungen gibt. Das kann noch wie folgt ausgedrückt werden. Man sagt, die Punkte $f, g$, ... sind linear unabhängig voneinander, wenn die Summe $af + bg + ...$ - worin $a, b$, ... Zahlen bedeuten - nur dann verschwindet, wenn alle Koeffizienten $a, b$, ... zugleich verschwinden.

Diese Erklärung erlaubt dann die Formulierung, dass es im Hilbert-Raum beliebig viele linear voneinander unabhängige Punkte geben soll, im Gegensatz zum $n$-dimensionalen Raum, in dem es genau $n$ voneinander linear unabhängige Punkte gibt.

Im Raum, der durch diese Forderungen bestimmt ist, lassen sich Abbildungen einführen, die den Matrizen und insbesondere den Operatoren des $n$-dimensionalen Raumes entsprechen.
Und zwar überträgt man den Begriff einer Matrix, indem man lineare Abbildungen $A$ fordert, die $A(af + bg)$ durch $aAf + bAg$ zu ersetzen gestatten. Gilt außerdem noch die Beziehung $(Af, g) = (f, Ag)$, dann heißt die lineare Abbildung Operator.

In Analogie zu den Operatoren des $n$-dimensionalen Raumes lassen sich jetzt ebenfalls Eigenwerte erklären, die sämtlich reell ausfallen; weiter kann man den einzelnen Eigenwerten positive Zahlen zuordnen, die als Wahrscheinlichkeit dafür anzusprechen sind, dass der betreffende Eigenwert auftritt. Wir müssen uns mit diesen Angaben begnügen, denn die Durchführung würde Entwicklungen erfordern, die selbst ein ganzes Buch füllten.

Damit haben wir eine Geometrie abstrakt aufgebaut, in der mit anderen Worten noch nicht entschieden ist, was Punkte bedeuten. Man kann sie einmal als Zahlenfolgen auslegen, wie sie in den Untersuchungen von Hilbert zunächst auftraten, dann aber auch als integrierbare Funktionen.
Die zweite Auslegung ist von größter Bedeutung, und darum sei dazu einiges noch gesagt. Das bestimmte Integral führten wir zunächst als Inhalt von Figuren ein, berichteten aber später von einer Erweiterung des Inhaltsbegriffes. Das legt es nahe, den erweiterten Inhaltsbegriff zur Erklärung von bestimmten Integralen heranzuziehen, wie es als erster Lebesgue getan hat.

Solche Funktionen nun, deren Quadrat im Sinne von Lebesgue integrierbar ist und die ein bestimmtes Integral besitzen, erstreckt über die ganze Abszissenachse, können als Punkte eines Hilbert-Raumes betrachtet werden. Man erklärt für sie Summe und Produkt, indem man die entsprechenden Operationen an den Funktionen selber vornimmt, das skalare Produkt der Funktionen $f$ und $g$ aber als Integral von $f\overline{g}$. Es lässt sich dann nachweisen, dass diese Erklärungen allen eingangs gestellten Forderungen genügen, so dass man es tatsächlich mit einer Verwirklichung des Hilbert-Raumes zu tun hat.

Der Nutzen eines abstrakten Aufbaues äußert sich jetzt darin, dass die gewonnenen Sätze unmittelbare Verwirklichung gestatten oder, anders ausgedrückt, sich in die Sprache von Funktionen und ihrer Integrale übersetzen lassen.
Dabei gewinnt man mitunter Einsichten, die sonst nur mühselig oder auf Umwegen zu erlangen wären und damit das abstrakte Vorgehen vollauf rechtfertigen.

## 2.17 Vorschriften für den Zufall

Gibt es so etwas wie Vorschriften für den Zufall? Liegt es nicht vielmehr in seinem Wesen, jeder Vorschrift zu spotten? Es hat zwar den Schein, doch dieser trägt auch diesmal, und es gibt heute eine Theorie, welche die Vorschriften entwickelt, nach denen sich der Zufall zu verhalten hat und auch verhält. Wir wissen, wie viel sie - der Spielleidenschaft verdankt!

Der Wunsch nach einem Spielsystem, das, in die Praxis umgesetzt, zu sicherem Gewinn führt, lässt sich nun nur in den einfachsten Fällen erfüllen und dann - ohne jegliche Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Man spiele mit einer Münze das bekannte Zahl-oder-Wappen-Spiel, und es sei ausgemacht, dass der Gewinner den doppelten Einsatz herausbekommt. Angenommen nun, einer setzt auf Wappen eine Mark. Gewinnt er, dann bekommt er zwei Mark ausbezahlt, so dass sein Gewinn eine Mark beträgt. Fällt dagegen die Münze zu seinem Schaden, dann verdopple er den Einsatz und setze zwei Mark. Fällt jetzt Wappen, dann bekommt er vier Mark ausbezahlt, gegen drei Mark, die er insgesamt bisher gesetzt hat. Der Gewinn beträgt also wieder eine Mark. Verliert er aber auch das zweite Mal, dann verdopple er abermals den Einsatz und setze das so lange fort, bis Wappen fällt.
Am Ende einer solchen Spielfolge gewinnt er immer genau eine Mark, vorausgesetzt, dass er durchhält.

Daran könnte es eben hapern, denn angenommen, dass zwanzigmal hintereinander Zahl fällt, dann beträgt der folgende Einsatz bereits 1 048 576 Mark. Ganz abgesehen davon, dass sich eine solche Summe anderweitig viel vernünftiger anlegen lässt, wäre es möglich, dass 100-, ja 1000 mal oder noch öfter hintereinander Zahl fällt. Freilich wird das in der Praxis wohl niemals vorkommen - und insofern darf man bei unserem Vorschlag von einem sicheren Spielsystem reden.

Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine ganz andere. Sie geht von einfachen Wahrscheinlichkeiten aus, um daraus verwickeltere Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen. Damit sind wir beim Grundbegriff der ganzen Theorie angelangt und müssen fragen: Was ist Wahrscheinlichkeit?
Im Besitze der Begriffe Folge und Grenzwert fällt die Antwort leicht. Man würfle und zeichne die Augenzahlen der einzelnen Würfe auf, dann gewinnt man eine Reihe von Zahlen, die beliebig weit fortgesetzt werden kann. Es treten darin die Werte 1 bis 6 auf, deren jeder ein Merkmal heißen möge, während die einzelnen Würfe Ereignisse genannt seien.

Wir betrachten nun unendliche Folgen von Ereignissen mit verschiedenen Merkmalen. Man kann dann abzählen, wie oft unter den $n$ ersten Ereignissen oder, anders ausgedrückt, den $n$ ersten Gliedern der Folge ein bestimmtes Merkmal vorkommt. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $H_n$ - dem Anfangsbuchstaben des Wortes Häufigkeit - und bilden den Bruch $H_n : n$.

Nähert er sich für unendlich werdendes $n$ einem Grenzwert, dann liegt dieser offensichtlich zwischen 0 und 1 und heißt die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Merkmals. Wird als Merkmal irgendeine der 6 Augenzahlen des Würfels gewählt, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl zu werfen, 1/6. Darin erschöpft sich der Spielwürfel für den Mathematiker.

Früher erklärte man die Wahrscheinlichkeit anders. Man unterschied mögliche und günstige Fälle, beim Würfel den verschiedenen Augenzahlen entsprechend 6 mögliche Fälle im Gegensatz zu je einem günstigen Fall für jede der Augenzahlen. Damit erhält man für die Wahrscheinlichkeiten dieselben Werte. Man machte gegen diese Überlegung geltend, dass bei den meisten

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine exakten Vorschriften bestehen, um die möglichen und günstigen Fälle im voraus immer angeben zu können. Dies ist zuzugeben, aber dem entspricht bei der neuen Erklärung die Unzulänglichkeit, Folgen annehmen zu müssen. In beiden Fällen ist man darauf angewiesen, ein mathematisches Problem zu formulieren, das von der Praxis angeregt, aber nicht vorgezeichnet ist.
Nur die Nichtbeachtung dieser Tatsache konnte dazu führen, gegen die ältere Erklärung den Vorwurf zu erheben, sie begehe beim Einführen von günstigen Fällen einen Zirkelschluss.

Die Formulierungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind vielmehr als Schemata aufzufassen, die von Fall zu Fall an Hand der Praxis auszufüllen sind und so die Anwendungen erst ermöglichen. Aus der Erklärung für die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert folgt sofort, dass die Wahrscheinlichkeit 1 noch keine Gewissheit im alltäglichen Sinne und die Wahrscheinlichkeit 0 noch nicht die Gewähr bietet, dass ein Ereignis nicht eintreffen kann.
Um die erste Behauptung einzusehen, wähle man eine Ereignisfolge von lauter zusagenden Ereignissen mit Ausnahme derjenigen, die an zweiter, vierter, achter ... Stelle stehen. Der Grenzwert und damit die Wahrscheinlichkeit fällt dann zu 1 aus, obgleich die Folge zusagender Ereignisse immer wieder unterbrochen wird. Ähnlich lässt sich die zweite Behauptung einsehen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt also kein unbedingtes Ja und kein unbedingtes Nein, im Gegensatz zur schulmäßigen Logik. Sollte sich mit ihr eine Logik des Lebens anbahnen?
Eine weit schwerwiegendere Folge der Tatsache, dass wir die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert erklärt haben, bildet die Einsicht, dass die Anwendungen auf die Praxis erst auf Grund einer neuen Annahme erfolgen können: Man muss sich damit zufrieden geben, sich an einer größeren Zahl von Ereignissen zu orientieren. Einige Würfe dürften wohl genügen, um zu entscheiden, ob ein Würfel gezinkt ist oder nicht, aber streng genommen bildet das eine Annahme, freilich eine, welche die Praxis uns nahelegt und die sie stets bestätigt.

Darüber kann kein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinweghelfen, auch nicht das sogenannte "Gesetz der großen Zahlen" , dem man in der früheren Lehre eine große Bedeutung beigelegt hat und das auf ein ehrwürdiges Alter von über zwei Jahrhunderten zurückblicken kann; es wurde von Jakob Bernoulli in dem Werk "Ars conjectandi" , das nach seinem Tod, im Jahre 1713 erschien, begründet und wird gelegentlich nach ihm benannt.

Wie bestimmt man nun die Wahrscheinlichkeit dafür, eine gerade Augenzahl mit einem Würfel zu werfen? Man greift auf die Erklärung zurück und bemerkt, dass diesmal die Würfe 2 und 4 und 6 zusammen die Anzahl $H_n$ ausmachen, der Grenzwert von $H_n : n$ folglich zu $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ ausfällt. Weil die Einzelwerte sich addieren, redet man hier vom "Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeiten" . Damit haben wir ein einfaches Beispiel für das Vorgehen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wollen es dabei bewenden lassen.

Nur noch zwei Erklärungen sollen nachgeholt werden, weil sie für die Physik von der größten Bedeutung sind. Es handelt sich um den Mittelwert und um die Streuung von Messergebnissen, die mit $x_1$ bis $x_n$ bezeichnet seien und auf Grund der Häufigkeiten ihres Vorkommens gewisse Wahrscheinlichkeiten $w_1$ bis $w_n$ besitzen. Dann erklärt man den Mittelwert $\mu$ als die Summe

$$x_1w_1 + ... + x_nw_n$$

und die zugehörige Streuung als

$$(x_1-\mu)^2w_1 + ... + (x_n-\mu)^2w_n$$

Alle diese Ergebnisse finden in der Physik von heute Anwendung, ja ohne sie käme man nicht aus! Damit widerlegen sie die Ansicht eindringlich, dass die Mathematik wirklichkeitsfremd ist. Weiter aber macht die geschilderte Entwicklung verständlich, warum man mit dem Anschauungsvermögen des Mathematikers nicht mitkommt, und man begreift, dass ein Mathematiker ebenso denkt wie wir - freilich mit einer Gewandtheit, die ihm erst die Jahre verleihen.

# 3 Wir müssen umdenken!

Die Natur ist für den Forscher ein offenes Buch - nur leider für die verschiedenen Forscher an verschiedenen Stellen offen

## 3.1 Von Raum und Zeit

Eine Physik im Werden unterscheidet sich erheblich von der Lehre, zu der sie später wird. Unsere "Entdeckungsfahrt" trug dem Werden Rechnung, während jetzt mehr die Lehre berücksichtigt werden soll, um eine vertiefte und vollständigere Einsicht zu gewinnen. Auf der "Entdeckungsfahrt" wurden physikalische Gedankengänge von dem Gesichtspunkt aus, wie man einen naturgemäßen Zugang zu ihnen finden könnte, behandelt. Damals lag uns daran, an einzelne Erfahrungen anknüpfend, Begriffe einzuführen und ihren Umfang allmählich zu erweitern, jetzt dagegen führen wir die Begriffe von vornherein möglichst allgemein ein. Es kann dabei nicht ausbleiben, dass der Zusammenhang mit der Wirklichkeit nur nachträglich herzustellen ist. Dieser Zusammenhang stützt dann aber die Theorien, die entwickelt wurden, und verleiht ihnen rückwirkend eine Berechtigung. Kurz, wir behandeln jetzt die Physik planmäßig, im Gegensatz zum Anfang, wo wir mehr induktiv vorgingen.

Fraglos beschritt die geschichtliche Entwicklung stets den induktiven Weg. Unsere Betrachtungen wichen allerdings mitunter erheblich von denen ab, die seinerzeit zu den fraglichen Ergebnissen führten. Das mit gutem Recht. Denn im Laufe der geschichtlichen Entwicklung waren Irrwege und Umwege unvermeidlich - nicht anders als bei einer Stadt, die in vielen Jahrhunderten erbaut wurde.
Die aufeinanderfolgenden Baumeister hatten Pläne, die miteinander nicht im Einklang standen und darum kein klares Stadtbild erkennen lassen. Mag das Ergebnis auch malerisch wirken, dort wohnen möchte man trotzdem nicht. Und es bleibt die Frage, ob "malerisch" immer gleichbedeutend mit "schön" ist! Wollte man nun die Stadt neu errichten, dann würde man sicher vieles vom Alten opfern. Das Alte ist nicht schon deshalb ehrwürdig, weil es alt ist, sondern nur insofern, als es sich bewährt hat. Diese Einsicht verpflichtet zu einer Auswahl, zu einer kritischen Sichtung.

Man kann dabei nicht stehenbleiben. Denn es genügt nicht, überflüssiges Beiwerk abzuschaffen, sondern es müssen neue Wendungen gefunden werden. Jede tiefere Kritik ist fruchtbar. Das lassen die Widerstände erkennen, auf die sie stößt. Denkgewohnheiten werden bedroht, und eine Umschulung wird erfordert, die zunächst zur Unsicherheit führt.
Das Unterbewusstsein der Zeitgenossen sträubt sich dagegen, und das Sträuben kann sich zum Hohn steigern, der sich immer dann einstellt, wenn keine sachlichen Gründe zu Gebote stehen. Hören wir, was Ernst Mach aus eigener Erfahrung darüber zu berichten hat, nachdem er vergeblich versuchte, sich mit einer Kritik durchzusetzen:

"Nun hat kürzlich C. Neumann dieses Thema zur Sprache gebracht und genau dieselben Unbestimmtheiten, Schwierigkeiten und Paradoxa in dem Gesetz gefunden. So sehr es mir nun einerseits leid getan hat, in dieser wichtigen Sache die Priorität verloren zu haben, so hat mich doch dies haarscharfe Zusammentreffen mit einem so namhaften Mathematiker sehr gefreut und hat mich für den Hohn und die Begriffsstutzigkeit, welche mit die Physiker bei mündlicher Besprechung dieses Gegenstandes fast ohne alle Ausnahme entgegenbrachten, reichlich entschädigt."

Die Kritik aber, um die es ging, bezieht sich auf das Trägheitsgesetz und will die Schwierigkeiten aufklären, die im Begriff des absoluten Raumes liegen. Mach nahm Abstand davon, seine Gedanken darüber zu veröffentlichen, weil er vorher schon mit einfacheren Ansichten gescheitert war. Vernehmen wir von ihm selbst den Verlauf der Dinge:

"Ich darf vielleicht bei dieser Gelegenheit erwähnen, dass ich versucht habe, mich mit Hilfe des Prinzips vom ausgeschlossenen Perpetuum mobile über den Begriff der Masse zu orientieren. Meine darauf bezügliche Notiz wurde mir von Herrn Poggendorff, nachdem sie etwa ein Jahr bei ihm gelegen hatte, als unbrauchbar zurückgesendet und erschien später in Carls Repertorium im 4. Band.
Diese Zurückweisung ist auch der Grund, warum ich meine Untersuchungen über das Trägheitsgesetz nicht publiziert habe. Wenn ich mit einer so einfachen und klaren Sache schon anstieß, was hatte ich erst in einer schwierigeren Frage zu erwarten. Die Annalen enthalten oft bogenlange Fehlschlussreihen über das Torricellische Theorem und die Morgenröte, freilich in der 'Sprache der Physik' geschrieben. Es würde aber die Annalen offenbar sehr in der Achtung des Publikums herabsetzen, wenn sie einmal eine kurze Notiz enthielten, die nur etwas vom Jargon abweicht."

Als Mach von dem Herausgeber der Zeitschrift "Annalen der Physik" , dem Berliner Professor Poggendorff, abgelehnt wurde, war er bereits ein angesehener Physiker. Wenn die Zurückweisung trotzdem geschehen konnte, so lag es daran, dass Poggendorff den Gedankengängen eines Mach nicht gewachsen war.
Hätte er sie begreifen wollen, so hätte er vieles vom ehedem Gelernten aufgeben müssen. Es ist begreiflich, wenn jemand das ach so mühsam Erlernte nur widerstrebend gegen Neues eintauscht, das er ja ebenfalls recht mühselig erlernen muss, wenn Altes und Neues für ihn nur Studium bedeuten und nicht innere Bereicherung.
Reift dann eine neue Generation heran, so braucht sie das überholte Alte nicht mehr zu erlernen und ist folglich für das Neue aufnahmefähig. Und sie wundert sich über ihre Vorgänger, weil diese das Neue nicht sofort angenommen haben!

Sie wundert sich um so mehr, als das Neue oft sogar dann abgelehnt wurde, wenn die Ergebnisse handgreiflich zutage lagen, wie das bei den Untersuchungen Hittorfs der Fall war. Hittorf entdeckte die Kathodenstrahlen und wurde damit zum Bahnbrecher unserer Kenntnisse vom Aufbau der Atome. Zu dieser Entdeckung gelangte er beim Studium der Vorgänge, die sich bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen abspielen. Die farbenprächtigen und durch ihren Formenreichtum auffallenden Erscheinungen waren bekannt, aber nicht erforscht.
Hittorf isolierte aus dieser verwirrenden Mannigfaltigkeit ein bestimmtes Erscheinungsgebiet, dessen Erforschung ihn zu Erkenntnissen führte, die man heute unter dem Begriff Kathodenstrahlen, das heißt frei durch den Raum eilende Elektronen, zusammenfasst.

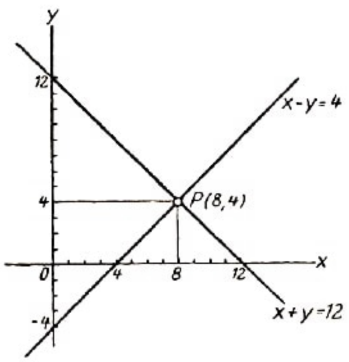
Man sollte meinen, dass so hohe Verdienste bei Fachgelehrten sofort begeisterten Widerhall fanden. Weit gefehlt! Ein führen- der Gelehrter, der im Jahre 1925 verstorbene Göttinger Professor Felix Klein, sagt darüber in einem seiner meistbeachteten Werke:
"Beiläufig gedenke ich der Ablehnung, welche Hittorf noch später, als er seine großartigen Entdeckungen, betreffend die Kathodenstrahlen, den Berliner Physikern Magnus, Poggendorff und anderen vorführte, in Berlin erfuhr." Immerhin erlebte Hittorf noch eine späte Anerkennung, weil er neunzig Jahre alt wurde - ein neuer Beweis für den Ausspruch: "Survivre, c'est tout!"

Die angeführten Fälle zeigen, wie schwer es den meisten fällt, neue Gedanken zu erfassen; auch die Physiker machen hier leider keine Ausnahme. Darum ist es begreiflich, wenn die ersten Versuche, eine neue Lehre aufzubauen, nie vollkommen ausfallen, auch wenn sie von den

bedeutendsten Geistern unternommen wurden. So ist die Leistung eines Euklid erstaunlich, aber ergängungsbedürftig.
Der Abschluss kann mitunter Jahrhunderte, ja sogar Jahrtausende ausstehen. In der Tat, erst Hilbert schuf in seinen "Grundlagen der Geometrie" einen Aufbau, der als abgeschlossen gelten darf. Er gelingt mit Hilfe der sogenannten axiomatischen Methode, die für die Mechanik ebenfalls vorbildlich ist.

Man geht davon aus, dass es nicht weiter zu erklärende Grundbegriffe gibt, auf die sich die übrigen zurückführen lassen. Wie soll man aber die Grundbegriffe selbst einführen? Nun, man zählt sie einfach auf, stellt sie an die Spitze des Gedankengebäudes und gewinnt so eine Reihe von Grundwahrheiten, die Axiome. Es fragt sich dann, wie weit diese Axiome notwendig, wie weit sie abänderungsfähig sind.

In der Geometrie des Euklid gilt die Behauptung als grundlegend, dass man aus einem Punkt zu einer Geraden in einer Ebene nur eine Parallele ziehen kann. Nach zwei Jahrtausenden entdeckten J. v. Bolyai, Gauß und Lobatschefskij unabhängig voneinander, dass dies Euklidische Axiom abänderungsfähig ist.
Es kann eine folgerichtige Geometrie aufgebaut werden, in der es aus einem Punkt zu einer Geraden unendlich viel Parallelen gibt, also Geraden, die keinen Punkt mit ihr gemeinsam haben: führt man diese Annahme als neues Axiom an Stelle des Euklidischen Parallelenaxioms ein, so erhält man eine neue, die nichteuklidische Geometrie.
"Beweisen" lässt sich weder das eine noch das andere Axiom. Euklids Geometrie ist nicht "richtiger" als die neue - beide sind logisch folgerichtige, mathematisch gleichberechtigte Lehren der Geometrie.




Um die Frage nach der Abänderungsfähigkeit von Grundbegriffen planmäßig in Angriff zu nehmen, bedenke man, dass Begriffe vom Gegenständlichen absehen, dass sie Abstrakta sind.

Es kann folglich sein, dass sie verschiedene Auslegungen gestatten. Und es ist weiter möglich, dass man bei einer zweiten Auslegung eine bessere Übersicht erlangt.

So gelang es Hilbert, für die geometrischen Sätze eine bestimmte Auslegung im Reich der Zahlen zu finden, die ihm wichtige Aufschlüsse über die Abänderungsfähigkeit geometrischer Grundbegriffe geben konnte.
Ein weiteres Beispiel zum Gesagten bildet die analytische Geometrie. Mit ihrer Hilfe kann eine Gerade als lineare Gleichung aufgefasst werden, der Schnittpunkt von zwei Geraden als gemeinsame Lösung von zwei linearen Gleichungen und so weiter.

Die Möglichkeit, Begriffe verschiedenartig auslegen zu können, führt zu einer Wirtschaftlichkeit des Denkens. Denn sie besagt, dass die grundsätzlichen Überlegungen nur einmal vorgenommen zu werden brauchen. Man führt sie mit umfassenden Begriffen durch, um die Ergebnisse hinterher auf diese oder jene Weise auszulegen.
Hinzu kommt, dass konkrete Ergebnisse mitunter weniger naheliegend ausfallen als die mit umfassenden Begriffen gewonnenen. Der Grund dafür kann einmal formal sein, dann aber eine Folge unserer Denkgewohnheiten darstellen. Formal: wenn geschickt gewählte Bezeichnungen wie in der Infinitesimalrechnung zu Gebote stehen, die dem Gegenstand angemessen sind, so dass schwierige Schlussreihen mit ihrer Hilfe fast ohne Mühe bewältigt werden.

Und zum anderen: Erfahrungsgemäß schließt man leichter, wenn man im Rahmen seiner Denkgewohnheiten bleibt. Beide Male geht man - entgegen dem bekannten Ausspruch von Euklid - einen königlichen Weg. Wenn man will, dann lässt sich der formale Fall den Denkgewohnheiten unterordnen, weil übersichtliche Bezeichnungen einleuchten und damit geläufig werden; er ist jedoch wichtig genug, um als Sonderfall beachtet zu werden. Wesentlich aber bleibt bei den vorstehenden Betrachtungen die Einstellung, zu der sie führen.

Man wird - um wieder zur Physik und ihrem axiomatischen Aufbau zurückzukehren - zunächst erwarten müssen, dass Begriffe wie Zeit, Inertialsysteme, Kräfte und ihr gegenseitiges Verhältnis an die Spitze gestellt werden, um dann einerseits die Mechanik auf ihnen zu errichten, andererseits den Zusammenhang mit der Welt unserer Sinneswahrnehmungen herzustellen.
Es bedarf aber einer besonderen Betrachtung, festzustellen, wieweit die angeführten Begriffe, die zweifellos die nächstliegenden sind, wirkliche Grundbegriffe sind; und es stellt sich heraus, dass die zwei erstgenannten, die Zeit und die Inertialsysteme, tatsächlich einer näheren Erklärung fähig sind.

Um die Zeit zu erklären, hat man eineindeutige Abbildungen heranzuziehen. Sie bilden, wie wir uns erinnern, zwei Mengen so aufeinander ab, dass, wechselseitig gemeint, jedem Element aus der einen Menge ein und nur ein Element aus der anderen Menge entspricht.
Die eineindeutige Abbildung stiftet also Tanzstundenpaare, ohne Mauerblümchen zu dulden, wenn die eine Menge aus Herren, die andere aus Damen besteht. Insbesondere betrachte man für unseren Fall eineindeutige Abbildungen zwischen zwei Kurvenbögen.

Während der Sekundenzeiger einen vollen Kreis beschreibt, eilt der Fahrstuhl vom ersten zum dritten Stock. Jeder Stellung des Sekundenzeigers entspricht eine Lage des Fahrstuhls zwischen erstem und drittem Stock. So werden ein Kreis auf der Uhr und die Strecke zwischen den genannten beiden Stockwerken ein- eindeutig und stetig aufeinander abgebildet. Und der Rentner Kügelchen, dem der Arzt Bewegung verordnet hat, steigt währenddessen zu Fuß ein Stockwerk höher. Auch zwischen dem von ihm schnaufend zurückgelegten Weg und dem Kreis auf der Uhr besteht eine eindeutige und stetige Abbildung. Den Inbegriff alle: solcher Abbildungen nennen wir Zeit, genauer eine Zeit.


Entscheidend ist, welche Punkte durch die Abbildung einander zugeordnet werden. Diese Zuordnung geht aber auf den Beobachter zurück. Er ist es, der die Abbildung als Zeit erlebt, und zunächst bleibt es offen, ob verschiedene Beobachter dieselbe Abbildung angeben, dieselbe Zeit erleben.

Die klassische Mechanik sagt ja dazu, die Relativitätstheorie nein, und beide sind folgerichtige Lehren.
Allerdings stellt die klassische Mechanik nur eine, wenn auch vortreffliche Näherung dar; sie ist, im Gegensatz zur Relativitätstheorie, nur auf geringe Geschwindigkeiten anwendbar - wobei das Wort "gering"cum grano salis zu nehmen ist: die klassische Mechanik gilt auch noch bei der Geschwindigkeit des raschesten Flugzeugs oder der schnellsten Granate.

Die Zeit eines Beobachters besteht nach unserer Erklärung aus Abbildungen, die solche Punkte einander zuordnen, welche nach dem landläufigen Sprachgebrauch "gleichzeitig" eingenommen werden. Wenn ich von meiner Uhr die Zeit ablese, dann nenne ich Stunde, Minute und Sekunde. Das ist etwas umständlich und kommt daher, dass es auf der Uhr drei Zeiger gibt. Hätten wir nur einen Zeiger, so müsste man aber das Zifferblatt in sehr viel kleinere Abschnitte teilen. Die gangbare Anordnung ist ein Ersatz dafür, so dass eine Zeitangabe letzten Endes darauf hinausläuft, auf einem Kreis einen Punkt anzugeben. Und wenn ich dann sage, in diesem Augenblick biegt der Rentner Kügelchen um die Ecke, so besagt dies, dass dem fraglichen Ort auf dem Zeitkreis die Straßenecke auf dem Wege Kügelchens entspricht - soweit ein Kügelchen sich's gefallen lässt, als Punkt zu gelten. So sieht unsere Zeiterklärung in der Praxis aus.

Die klassische Mechanik bekennt sich dazu, dass alle Beobachter dieselbe Abbildung angeben: für sie alle gilt ein und dieselbe Zeit. Man könnte sagen, eine absolute Zeit. Zunächst wollen wir daran festhalten.

## 3.2 Von Kräften und Zwang

Wenn auch die Zeit für einen jeden Beobachter die gleiche ist, erleben die verschiedenen Beobachter alles andere recht unterschiedlich, denn es bleibt augenscheinlich nicht gleichgültig, ob ich mir die Welt von einem Hügel oder von einem Karussell aus betrachte.
Es gibt jedoch eine ganze Schar von Beobachtern, die einen jeden Bewegungsverlauf auf genau die gleiche Art wahrnehmen, und es gilt jetzt, sie zu kennzeichnen.

Newton war der Ansicht, dass dies allein mit Hilfe des absoluten Raumes geschehen könne. Später empfand man das als unbefriedigend, aus Gründen, die wir auf unserer "Entdeckungsfahrt" schon kennengelernt haben, gelangte aber nicht zur Klarheit. Diese erlangt man erst, wenn das Anziehungsgesetz berücksichtigt wird. Man wende nicht ein, dass es nicht zu den Grundlagen gehört. Nichts auf dieser Welt geschieht ohne seine Mitwirkung, und das rechtfertigt sein Erscheinen an so früher Stelle.
Um das Anziehungsgesetz auszusprechen, bedarf man des Begriffs der Masse. Sie bildet ein Merkmal jedes Körpers und bleibt in der klassischen Mechanik unberührt von seinem Bewegungszustand. Das Anziehungsgesetz nimmt dann für die Massen $m$ und $M$, die den Abstand $r$ voneinander haben, in den Inertialsystemen die Gestalt

$$\frac{m \cdot M}{r^2}$$

an. Dieser Ausdruck kennzeichnet also die Inertialsysteme.
Zunächst bleibt es offen, ob sich alle Beobachter in Inertialsystemen befinden oder ob es Standorte gibt, die keine Inertialsysteme sind. Die Entscheidung kann erst auf Grund des Bewegungsgesetzes fallen, das unter den Axiomen von Newton die zweite Stelle einnimmt. Diese Axiome lauten:

1. Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

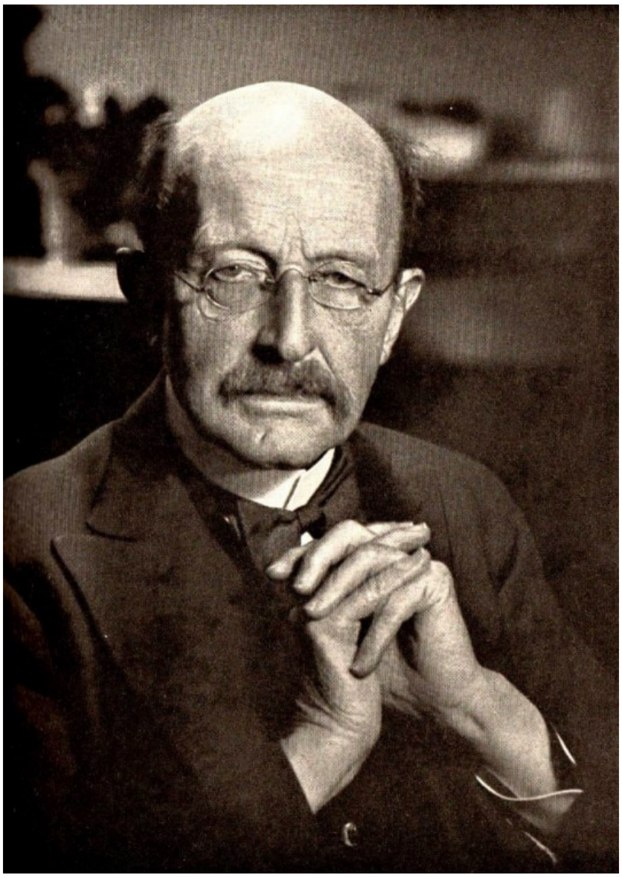
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Dazu sind Erläuterungen erforderlich.
Die Kraft zählt zu den Grundbegriffen, und das zweite Axiom, auch Bewegungsgesetz genannt, stellt einen Zusammenhang her zwischen der Kraft $\mathfrak{K}$, der Beschleunigung $\mathfrak{b}$ und der Masse $m$: es ist

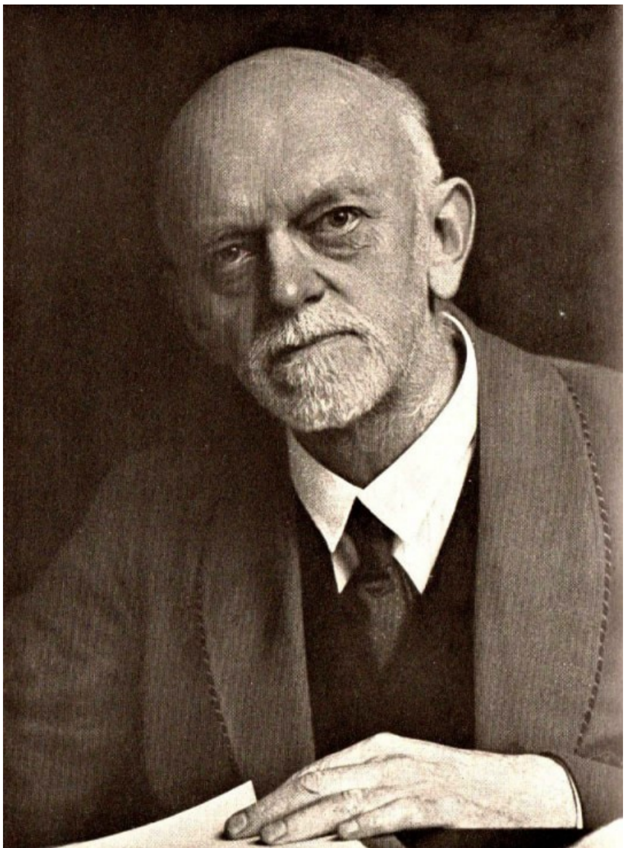
$$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{b}$$

Diese Gleichung ist als ein Schema aufzufassen, welches die Mechanik aufstellt und die Physik durch Angabe der Kräfte ausfüllt. Es geht folglich bei der Gleichung nicht um die Erklärung der Kraft, sondern nur darum, dass sie dem Produkt aus Masse und Beschleunigung gleichzusetzen ist. Viel Tinte ist unnütz geflossen, weil man das miteinander verwechselt hat.

Das Bewegungsgesetz enthält das erste Axiom von Newton, das dem Inhalt nach von Galilei stammt und gewöhnlich Trägheitssatz heißt, als Sonderfall für verschwindende Beschleunigung.



Max Planck. Phot. Tita Binz. Berlin



David Hilbert. Phot. Heno (Mauritius). Berlin

Das dritte Axiom dagegen fällt für den Aufbau der Mechanik weg. Es entstand aus Erfahrungen, die stets eine Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergaben. Nach den Ausführungen zum Bewegungsgesetz bildet das nicht so sehr eine mechanische als vielmehr eine physikalische Aussage, und in der Tat lassen sich die allgemeinen Gleichungen der Mechanik ohne sie gewinnen. Diese Gleichungen enthalten aber alles, was die Mechanik aussagen kann.

Bei der dargestellten Bewegung ist die Geschwindigkeit tangential, die Beschleunigung radial gerichtet

Die in den Axiomen auftretenden Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung können mit Hilfe der Differentialrechnung näher angegeben werden. Bewegt sich ein materieller Punkt, dann sind seine Koordinaten in einem Beobachtungssystem Funktionen der Zeit. Die ersten Differentialquotienten dieser Funktionen nach der Zeit bestimmen die Geschwindigkeit, ihre zweiten Differentialquotienten die Beschleunigung. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind also abgeleitete Größen.
Berechnet man die Beschleunigungen desselben materiellen Punktes in zwei gegeneinander bewegten Beobachtungssystemen, dann findet man, dass sie nur dann gleich ausfallen, wenn sich die beiden Systeme gleichförmig gegeneinander bewegen, wie es aus den Galileischen Transformationen unmittelbar hervorgeht, die wir auf unserer "Entdeckungsfahrt" bereits kennengelernt haben.
Darum gibt es Beobachter, die sich bestimmt nicht in Inertialsystemen befinden. Denn wenn einer Karussell fährt, dann findet er andere Beschleunigungen als ich und deshalb nach dem Bewegungsgesetz auch andere Kräfte, folglich kann die Anziehung nur für einen von uns beiden den Wert annehmen, der sich aus der angegebenen Formel bestimmt. Diesen Sachverhalt drückt man so aus, dass ein Beobachter, der sich nicht in einem Inertialsystem befindet, Scheinkräfte erlebt, die sich aus der Relativbewegung seines Systems zu den Inertialsystemen berechnen. Die Formeln dafür wurden von Coriolis entwickelt, nach dem die Scheinkräfte auch Corioliskräfte heißen.

Gäbe es einen absoluten Raum im Sinne Newtons, dann dürften auf seine Einwohner keine Scheinkräfte einwirken, wenn sich der Sternhimmel plötzlich zu drehen anfinge.
Dieser Schluss wurde schon frühzeitig angezweifelt und im Jahre 1896 einem kritischen Experiment unterworfen. Den Sternhimmel ersetzte man durch ein großes Schwungrad und untersuchte, ob bei der Rotation in der Nähe des Rades Kräfte auftraten. Zwar fiel der Versuch negativ aus und schien insofern Newton recht zu geben. Doch kann das negative Ergebnis auch einfach daher rühren, dass die entstehende Wirkung zu klein war und sich der Messung entzog.

Im Lichte der hier vertretenen Auffassung ist es klar, dass gravitierende Massen die Inertialsysteme bestimmen, mithin der ruhende Beobachter bei der einsetzenden Rotation sich nicht mehr in einem Inertialsystem befindet, folglich Scheinkräfte erlebt. Mit dieser Folgerung verlässt man die klassische Mechanik und begibt sich auf ein Gebiet, das der allgemeinen Relativitätstheorie angehört, auf die wir noch zu sprechen kommen.

Die Scheinkräfte sind durchaus nicht so unwirklich, wie ihr Name vermuten lässt, und sie sind auch keineswegs geheimnisvoll.

Auf uns Erdbewohner wirken unablässig Scheinkräfte ein, die eine Folge der Erddrehung bilden und aus rechnerischen Gründen in zwei Teilkräfte zerlegt werden. Die erste ist nichts als die gewöhnliche Fliehkraft. So wie ein Auto und seine Insassen in der Kurve nach außen gedrängt werden, so wirkt auch auf jeden Punkt der Erde, der ja tagein, tagaus eine Karussellfahrt um die Erdachse vollführt, eine nach außen ziehende Fliehkraft.
Ihre Größe und Richtung hängen vom Ort auf der Erdoberfläche ab. An den Polen ist die Fliehkraft offenbar gleich Null, am Äquator erreicht sie den höchsten Wert, weil ja die Äquatorpunkte den größten Abstand von der Erdachse haben, sich mithin am schnellsten bewegen müssen.

Wie jede Kraft ist auch die Fliehkraft eine gerichtete Größe, ein Vektor, der den Regeln der Vektorrechnung gehorcht. Nun lässt sich jeder Vektor in zwei Komponenten aufspalten, die in vorgeschriebene Richtungen fallen. Für unseren Fall ist folgende Zerlegung zweckmäßig:


Die eine Komponente soll in Richtung der Schwerkraft, das heißt des Erdradius, verlaufen - nur zeigt sie natürlich, weil es sich ja um eine Fliehkraft handelt, gerade vom Erdmittelpunkt fort, strebt also die Schwerkraft am betreffenden Ort etwas zu vermindern. Die Verminderung ist zwar klein, aber leicht messbar.
Die zweite Komponente verläuft dann in der Nord-Süd-Richtung, längs der Berührenden an den Meridian durch den betrachteten Ort.

Sie zeigt immer vom Pol fort und würde beispielsweise einen schwimmenden Eisberg vom Pol in Äquatornähe treiben, wenn ihre Macht nicht durch die kräftigeren Einflüsse der Wind- und Meeresströmungen überdeckt würde.
Möglicherweise wirkt sie sich aber in viel gewaltigerem Maßstab aus: nach den neueren Ansichten der Geologen bestehen die Kontinente aus mächtigen Gesteinsschollen, die auf einem zähflüssigen Untergrund gemächlich driften können; und die von uns eben betrachtete Fliehkraft-Komponente würde dann zu einer Polflucht der Kontinente führen. Sie mag fast unmerklich langsam vor sich gehen, aber in der Geologie kommt es ja auf ein paar Jahrmillionen nicht an!

Die andere, neben der Fliehkraft auftretende Scheinkraft, eine Corioliskraft, die im Gegensatz zur Fliehkraft sich nur bei bewegten Körpern geltend macht, ist eine Folge der Tatsache, dass die von Westen nach Osten gerichtete Drehgeschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche um so höher ausfällt, je größer sein Abstand von der Erdachse ist.
Die Spitze eines Turmes muss bei der Erddrehung einen größeren Kreis beschreiben als die Basis, bewegt sich also etwas rascher. Lässt man einen Stein von der Turmspitze fallen, so behält er, wie wir bereits auf S. 30 sahen, die höhere Drehgeschwindigkeit dank der Trägheit bei, er "überholt" also die Erde und landet einige Millimeter ostwärts der genauen Lotrichtung.

Derselbe Effekt tritt ein, wenn ein Körper sich auf der Erde nordsüdlich bewegt: entfernt er sich vom Pol, so kommt er in Gebiete immer höherer Drehgeschwindigkeit, bleibt also westwärts zurück; umgekehrt drängt er nach Osten, wenn er auf den Pol zusteuert.

Aus diesem Grunde werden die Eisenbahngleise ungleichmäßig abgenutzt. Auf der nördlichen Halbkugel hat die rechte Schiene stets unter der Wirkung der Corioliskraft zu leiden. So erklärt sich auch das Baersche Gesetz: Flüsse, die auf der nördlichen Halbkugel von Süden nach Norden fließen - wie die großen Ströme Sibiriens -, suchen nach Osten auszuweichen, sie unterspülen

also das östliche Ufer oder verlegen gar ihr Bett, bis sie durch eine Bodenerhebung, ein Steilufer zum Halt gezwungen werden.
Freilich kann diese Erscheinung durch andere Einflüsse überlagert werden. Wenn der Strom zwar nach Süden fließt, aber ein so starkes Gefälle besitzt, dass er sich dennoch der Erdachse nähert, so muss die Richtung der Corioliskraft sich gerade umkehren.

Eine großartige, mit eindrucksvoller Regelmäßigkeit zu beobachtende Folge der Corioliskraft ist weiter die westliche Abweichung der Passatwinde: die von Norden nach dem Äquator abfließenden Luftmassen werden langsam, aber sicher nach Westen gedreht, bleiben hinter der sich von West nach Ost drehenden Erde immer weiter zurück und blasen als frischer Nordost. Man sieht, die "Scheinkräfte" sind gewaltiger Wirkungen fähig; man erkennt aber auch gerade an den von uns gegebenen Beispielen die Berechtigung des gewählten Namens. Wüsste man nichts von der Erdumdrehung, hielte man die Erde für unbeweglich, so wäre die beobachtete Ost-West-Abweichung oder die Polflucht nur durch die Annahme einer zusätzlichen, ziemlich geheimnisvollen Kraft zu erklären, die sich als "Schein" erweist, sobald wir ein festes, nicht mit der Erde rotierendes Bezugssystem zugrunde legen.

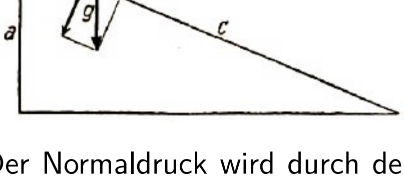
## 3.3 Auch eine Bewegungslehre besitzt Prinzipien

Ein fahrender Zug bewegt sich nicht in gerader Linie, sondern folgt getreulich den Gleisen, die sich der gekrümmten Erdoberfläche anschmiegen und vielleicht noch Kurven, Steigungen oder Gefälle aufweisen.
In die Sprache der Mechanik übersetzt: wir haben hier einen Körper vor uns, der sich nicht frei bewegt, sondern dessen Beweglichkeit eingeschränkt ist, der gewissen Bindungen unterliegt. Lässt sich auch dieser Fall dem Bewegungsgesetz unterordnen, das wir an die Spitze der Mechanik stellten? Wie kann man den veränderten Verhältnissen gerecht werden?

Die Antwort auf diese Fragen fällt nicht leicht, ja die Ansichten der bedeutendsten Gelehrten gingen in diesem Punkt weit auseinander, ob die notwendige Ausdehnung des Bewegungsgesetzes begründet werden könne oder aber als neue, nur durch die Erfahrungen und nicht durch Überlegungen zu stützende Forderung aufzufassen sei. Wir wollen es unternehmen, die fragliche Ausdehnung zu begründen.

Den Verlauf der freien Bewegung bestimmt das Bewegungsgesetz in seiner ursprünglichen Gestalt. Beim Vorhandensein von Bindungen sind die Beschleunigungen aus rein mathematischen Gründen noch immer bewegungbestimmend. Ihre Produkte mit den entsprechenden Massen bilden Vektoren, mir denen die Bewegungsgleichungen für die zwangsläufig geführte Bewegung augenscheinlich ebenso anzusetzen sind wie für die freie Bewegung.
Darum sind diese Vektoren als Kräfte anzusprechen, die man im Gegensatz zu den bisher allein betrachteten "eingeprägten" Kräften - wie die Gravitation eine ist - als Führungskräfte bezeichnet. Sie überlagern sich den eingeprägten Kräften und erzeugen die geführte Bewegung. Die Kraft also, mit der das Bewegungsgesetz für die geführte Bewegung anzusetzen ist, besteht aus der Summe der eingeprägten Kräfte und der Führungskräfte, die auch Zwangskräfte heißen. Ein Beispiel: Durchfährt ein Eisenbahnzug eine Kurve, so tritt an der Schiene eine Zwangskraft auf, ein Gegendruck, der die Wagen stets in die gekrümmte Bahn zwingt.

Nach Einführen der Zwangskräfte liegt die Mechanik abgeschlossen vor, denn im Prinzip lässt sich damit jede Bewegung verfolgen. Es erwies sich als vorteilhaft, Formeln zu entwickeln, die sich auf wichtige Fälle unmittelbar anwenden lassen. Damit beginnt das Werk des Mathematikers. Weil es eben vorwiegend von Physikern ausgeführt wurde, für welche die Mathematik einer Sprache vergleichbar ist, deren sie sich bedienen, ohne selbst Sprachforscher zu sein, gibt es Mängel in ihren mathematischen Entwicklungen. Insbesondere fassen die Physiker unendlich kleine Größen heute meist noch buchstäblich auf und rechnen mit ihnen ausgiebig, aber nicht immer richtig. Es ist aufschlussreich, näher darauf einzugehen.
Am besten geht man von glatten Flächen aus, die denkbar einfache Bindungen bilden. Man denkt sich zum Beispiel eine Kugel, die auf einer Ebene rollt.




Spaltet man die eingeprägte Kraft - zum Beispiel die Schwere - in eine Komponente, die in Richtung der Tangente, und eine zweite, die in Richtung der Normalen zur Fläche weist, dann wird eine glatte Fläche durch die Forderung erklärt, auf ihr werde die zweitgenannte Komponente von der Führungskraft gerade aufgehoben.

Der Normaldruck wird durch den Widerstand der Fläche kompensiert; es bleibt also nur die tangentiale Komponente der eingeprägten Kraft übrig. Für die schiefe Ebene besagt das so viel, dass für die Schwere als eingeprägte Kraft das Bewegungsgesetz statt mit $g$ mit $g \cdot f$ anzusetzen ist, übereinstimmend mit unserem früheren Ergebnis.

Mathematisch wird eine Fläche durch eine Funktion $F(x,y,z)$ dargestellt. Setzt man $F(x,y,z) = 0$, dann lässt sich $z$ als Funktion von $x$ und $y$ bestimmen, so dass man es mit einer zweidimensionalen Punktmenge zu tun hat, einer Fläche.
Die Normalenrichtung in einem Punkt ist durch die ersten Ableitungen von $F$ nach den Koordinaten dieses Punktes bestimmt. Die Führungskraft wirkt in dieser Richtung, und man erhält ihre Komponenten, wenn man die drei Ableitungen mit einem geeigneten Zahlenwert $\lambda$ multipliziert. Mit der Summe dieser Führungskraft und der eingeprägten Kraft ist das erweiterte Bewegungsgesetz anzusetzen; es heißt in dieser Gestalt die "Lagrangesche Gleichung erster Art" . Sie lässt sich weiter auf ein ganzes System von materiellen Punkten ausdehnen. Endlich können diese Gleichungen unmittelbar auf den Fall erweitert werden, wo mehrere Bindungen vorliegen.

Die Gleichungen von Lagrange lassen sich in eine einzige Gleichung zusammenfassen, aus der sie andererseits wiedergewonnen werden können. Es geht also um eine abgekürzte Schreibweise, und wie stets bedeutet sie einen neuen Kalkül, diesmal den Kalkül mit virtuellen Verschiebungen, die uns aus dem ersten Abschnitt vertraut sind und jetzt planmäßig behandelt werden sollen. Es würde zu weit führen, zunächst die entscheidenden Gesichtspunkte aufzuzeigen, die zum Entstehen des Kalküls führen. Vielmehr geben wir Erklärungen, aus denen er gewonnen werden kann, und geben diese so allgemein, dass sie gleich zu einer abschließenden Erweiterung der Mechanik führen.
Ähnlich wie der Operator $d$ den Schlüssel zur Differentialrechnung bildet, fällt diese Rolle im neuen Kalkül einem Operator $\Delta$ zu. Noch kurz vor der Jahrhundertwende kannte man nur einen Sonderfall dieses Operators, für den das Zeichen $\delta$ gewählt wurde. Es bleibt auffallend, dass man diesen Operator mit einem griechischen Buchstaben bezeichnet hat, der dem lateinischen $d$ entspricht.

Man muss ein Entsprechen erschaut haben, das darin bestand, dass man es beim neuen Operator ebenfalls mit unendlich kleinen Größen zu tun hatte. Erschöpfend kann man diese Einsicht nicht gerade nennen, denn es fehlt eine genaue Erklärung des neuen Operators. Sie lässt sich mit Hilfe von Differentiationen erbringen, was dann die gewählte Bezeichnungsweise vollauf rechtfertigt. Für einen Sonderfall, über den wir im Kapitel "Sieger im Inhaltswettbewerb"des vorhergehenden Abschnitts berichteten, hat das bereits Euler erkannt, während man sich für den allgemeinen Operator mit Angabe der Rechenregeln begnügte. An Stelle von Erklärungen wurden - freilich ohne das recht zu merken - nur Anweisungen gegeben, aus denen die Regeln folgen sollten, so dass es kein Wunder ist, wenn sich manche Irrtümer einschlichen.
Man muss sich eher darüber wundern, dass man sich so täuschen konnte, Anweisungen für Erläuterungen zu halten, und kann es nur damit erklären, dass viele Physiker noch immer meinen, strenge Grenzübergänge seien ein Luxus, dem sie standhaft widerstehen müssen.

Einen Operator auf eine Funktion anzuwenden, heißt, mit seiner Hilfe eine neue Funktion herzustellen. So erzeugt $d$ die Ableitung der ursprünglichen Funktion. Um den Operator $\Delta$ zu erklären, werden die Veränderlichen in der Funktion $f$, auf die er angewandt werden soll, erst "eingebettet" , indem sie um eine weitere Veränderliche $\varepsilon$, einen "Parameter" , bereichert werden.

Setzt man $\varepsilon = 0$, so sollen dann die ursprünglichen Verhältnisse wiederhergestellt sein. Man kann folglich $f$ als Funktion von $\varepsilon$ nebst den ursprünglichen Veränderlichen auffassen und die Ableitung nach $\varepsilon$ bilden. Wird diese an der Stelle $\varepsilon = 0$ genommen und mit $\varepsilon$ multipliziert, so erhält man eine Funktion, die mit $\Delta f$ bezeichnet wird.

Philipp Lenard. Phot. R. Herbst. Heidelberg

Prinz Louis Victor de Broglie. Phot. Edda Reinhardt. Berlin

Damit ist der Operator $\Delta$ erklärt.
In der Mechanik wendet man ihn auf Funktionen an, die von der Zeit abhängen, dann von den Koordinaten materieller Punkte, endlich von deren Ableitungen nach der Zeit. Bleibt die Zeit unberührt von $\varepsilon$, dann schreibt man $\delta$ für $\Delta$ und findet, dass $\delta$ mit $d$ vertauschbar ist, während das für den allgemeinen Operator $\Delta$ nicht mehr zutrifft.

Wendet man das Gesagte auf bestimmte Integrale an, dann gelangt man zum Ausgangspunkt der Variationsrechnung. Der neunzehnjährige Lagrange hat für sie den $\delta$-Kalkül erfunden, den Euler nachträglich durch Einführen des Parameters $\varepsilon$ sicherte. Im Jahre 1896 wurde der Kalkül auf den Operator $\Delta$ ausgedehnt, aber nicht mit der erforderlichen Sorgfalt.
Darum fehlt in der Literatur durchweg ein drittes Glied in der Summe, auf die das Anwenden des Operators $\Delta$ auf ein bestimmtes Integral führt. Dabei bleiben von Fall zu Fall weitere Einschränkungen für das "Einbetten" zu berücksichtigen, über die an späterer Stelle noch einiges gesagt werden soll.

Infolge der Rolle, die das Anwenden der Operatoren $\delta$ oder $\Delta$ auf bestimmte Integrale in der Variationsrechnung spielt, redet man von der Variation dieser Integrale. Ihr Verschwinden ist dem Bestehen von Differentialgleichungen gleichbedeutend, die nach Euler benannt werden und umfassend genug ausfallen, um sehr allgemeine Fälle in der Mechanik zu beschreiben. Es ist üblich, diese verschwindenden Variationen als Prinzipien der Mechanik zu bezeichnen, insbesondere als Integralprinzipien.

Als Beispiel diene das Prinzip von Hamilton, das sich auf die $\delta$-Variation eines Integranden bezieht, der die Gesamtenergie darstellt, die sich aus kinetischer Bewegungsenergie und potentieller oder Energie der Lage zusammensetzt.
Beide Energiearten bilden abgeleitete Begriffe, und wenn sie auch schon an einer früheren Stelle eingeflochten wurden, kommt ihre Bedeutung erst jetzt zur Geltung. Ihre Erklärung ist leicht gegeben. Die Bewegungsenergie ist das halbe Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat, während die potentielle Energie eine Funktion darstellt, deren Ableitung am jeweiligen Ort die dort herrschende Kraft mit verkehrtem Vorzeichen anzeigt. Hieran lässt sich ein Spiel mit Namen knüpfen: Die Eulerschen Gleichungen des Hamiltonschen Prinzips sind die Lagrangeschen Gleichungen erster Art.

Ein anderes Prinzip bezieht sich auf die Variation der Bewegungsenergie als Integranden; es wurde zunächst von Maupertuis, dem Präsidenten der Preußischen Akademie, unzulänglich ausgesprochen, dann von Euler richtiggestellt.
Maupertuis beschränkte sich freilich nicht auf das physikalische Prinzip, sondern erging sich in theologisch-teleologischen, zweckdienlich-gottgewollten Erwägungen und musste den Hohn von Voltaire über sich ergeben lassen, der damals am Hofe Friedrichs des Großen lebte.

Die Schrift von Voltaire "Histoire du docteur Akakia" , mit der Maupertuis gemeint war, trug dann wesentlich dazu bei, dass ihr Verfasser bei Friedrich dem Großen in Ungnade fiel.

Außer den beiden angeführten gibt es noch eine ganze Anzahl weiterer Prinzipien in der Mechanik. Ein jedes unter ihnen ist mit Einschränkungen für des "Einbetten" verknüpft, die sich zum Teil mit Rücksicht auf den jeweiligen Integranden als nötig erweisen, zum Teil aber unabhängig davon sind und bei allen Prinzipien gleich ausfallen. Sie hängen dann allein von den Bindungen ab.

Im einfachsten Fall einer Fläche $F$ erhält man sie, wenn in $dF$ die Differentiale $dx_i$ der Koordinaten materieller Punkte durch $\delta x_i$ ersetzt werden und der so entstehende Ausdruck Null gleichgesetzt wird. Handelt es sich um Bindungen $\Phi$, in denen auch die Ableitungen $\dot{x}_i$ der $x_i$ nach der Zeit zu den Veränderlichen zählen, dann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0$$

zu setzen, wobei die linke Seite als Summe aufzufassen ist, die man erhält, wenn $i$ alle Werte durchläuft und die so erhaltenen Produkte addiert werden. Bindungen wie $F$ heißen holonome, Bindungen wie $\Phi$ nichtholonome Bindungen, und es spielt keine Rolle, ob $\Phi$ in den $\dot{x}_i$ linear ausfällt oder nicht, eine Fallunterscheidung, über die nur deshalb so viel, geschrieben werden konnte, weil man sich an Sonderfällen glaubte orientieren zu können, um den Kalkül auszudehnen.

Man könnte noch weiter gehen und Bindungen berücksichtigen, die höhere Ableitungen enthalten. Die Prinzipien umfassen damit die ganze Mechanik. Aus ihnen lassen sich noch andere Schreibweisen für denselben Gehalt gewinnen, so die nach dem Mathematiker d'Alembert - der zusammen mit Diderot die große französische Enzyklopädie ins Leben gerufen hat - benannte Gleichung

$$\left( m(i) \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} - \mathfrak{K}_i \right) \delta \mathfrak{r}_i = 0$$

Sie ist auch wieder als Summe über alle $i$ zu deuten wie die vorhergehende Gleichung. $\mathfrak{K}_i$ bezeichnet die eingeprägte Kraft, die auf den $i$ten materiellen Punkt $m(i)$ wirkt. Die Klammerausdrücke sind augenscheinlich den Führungskräften gleich, die also hier mit den virtuellen Verschiebungen multipliziert auftreten. Darum lässt sich die Gleichung so lesen, dass die virtuelle Arbeit der Führungskräfte verschwinden muss.

Die Integralprinzipien sowohl als auch die Gleichung von d'Alembert bilden verschiedene Ausdrucksformen eines einfachen mechanischen Sachverhaltes, mit dem wir unsere Betrachtungen begonnen haben. Es zeigt sich deutlich, wie wenig sich die Natur aus unseren mathematischen Schwierigkeiten macht, denn es bedurfte scharfsinniger Überlegungen, bis man das Erforderliche an Mathematik so weit entwickelte, und die Weiterbildung der Mechanik scheitert an noch ungelösten mathematischen Problemen.

Zu diesem Gedankenkreis gehört es weiter, den Grundgleichungen der Mechanik eine Gestalt zu geben, die auf Hamilton zurückgeht. Man geht davon aus, dass die bestehenden Bindungen Forderungen bedeuten, denen die Koordinaten $x_i$ zu genügen haben. Die $x_i$ sind folglich nicht unabhängig voneinander, sondern aus jeder Bindung kann eine unter ihnen als Funktion der übrigen bestimmt werden.
Damit erniedrigt jede Bindung die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um eins. Führt man das durch und bezeichnet die übrigbleibenden Veränderlichen mit $q_k$, dann sind diese nunmehr unabhängig voneinander. Die Bewegungsenergie $T$ ist eine Funktion der $q_k$ und ihrer Ableitungen nach der Zeit $\dot{q}_k$.
Die $\dot{q}_k$ lassen sich durch neue Veränderliche $p_k$ ersetzen, wenn man sie als Funktionen von $q_k$

und $p_k$ ansetzt, die aus der Gleichung

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

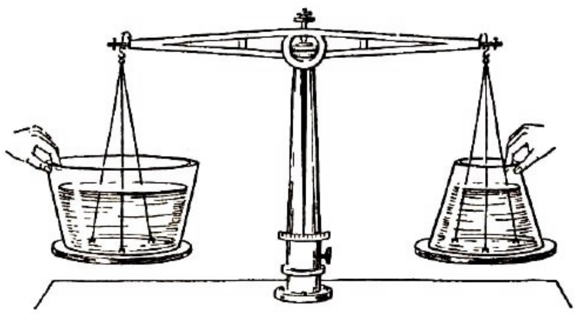
zu gewinnen sind. Geht man damit in den Ausdruck der Gesamtenergie $H$ ein, dann ergeben sich die kanonischen Gleichungen von Hamilton

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad ; \qquad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

Soweit sie bis jetzt entwickelt wurde, befasst sich die Mechanik mit ein oder mehr materiellen Punkten. Um sie auch für das Verhalten von Flüssigkeiten dienstbar zu machen, hat man die materiellen Punkte durch ausgedehnte Körper zu ersetzen.
Mathematisch bedeutet das soviel, dass man für Masse und Kraft die entsprechenden "Dichten" einführt und über diese integriert. Die Kraftdichte bezeichnet man auch als "Volumkraft" und kann diese rechnerisch in den sogenannten Spannungstensor umformen, einen Tensor zweiter Stufe, der die Betrachtungen in der "Kontinuumsmechanik" , die sich mit dem mechanischen Verhalten von ausgedehnten Körpern beschäftigt. Das Berechnen eines Schwerpunktes gehört ebenso dazu wie das Bestimmen der Spannungen in einer Brücke oder das Strömungsbild in einem Windkanal.

Im Prinzip beherrscht man damit alles und in der Praxis nur wenig. Das liegt an den mathematischen Schwierigkeiten.
Schreibt man die Bewegungsgleichung für Flüssigkeiten hin, dann versagt angesichts dieser die heutige Mathematik. Man muss sich damit begnügen, die Gleichung zu vereinfachen, und kann sich daraufhin nicht wundern, wenn die Flüssigkeitsbewegung, die nach der Vereinfachung zu erwarten bleibt, in der Natur ganz anders verläuft. Darum gibt es auf diesem Gebiet vorläufig nur Teilergebnisse, wenn diese mitunter auch von erheblicher Tragweite sind. So hilft zum Beispiel die "Grenzschichttheorie" , die aus der Kontinuumsmechanik abgeleitet wurde, dem Flugzeugbauer über das reine Probieren überhaupt erst hinaus und gibt ihm Mittel in die Hand, den Auftrieb eines Tragflügels zu berechnen.

Immer wieder geht es darum, den Spannungstensor zu spezialisieren. Den einfachsten Sonderfall bildet die Annahme, dass von den neun Größen seiner Matrix nur drei nicht verschwinden, die sich in der Hauptdiagonalen befinden, diese aber einander gleich sind.
Damit lässt sich die Statik der Flüssigkeiten behandeln. Es ist üblich, in diesem Fall von hydrostatischem Druck zu reden, einem Begriff, den man ursprünglich auf ganz anderem Wege gewonnen hat. In paradoxer Form erlebt man den Flüssigkeitsdruck in einem leicht abgeänderten Versuch des Philosophen und Mathematikers Pascal.



Sind die beweglichen Böden in zwei konischen Gefäßen an die Arme einer Waage aufgehängt, dann herrscht Gleichgewicht, wenn die Flüssigkeit in beiden Gefäßen gleich hoch steht, obwohl ihr Gewicht augenscheinlich sehr verschieden ausfällt: der hydrostatische Druck hängt nämlich allein von der Höhe der Flüssigkeit im Gefäß ab, ist folglich der gleiche und äußert sich als Bodendruck. Man redet vom hydrostatischen Paradoxon des Pascal.

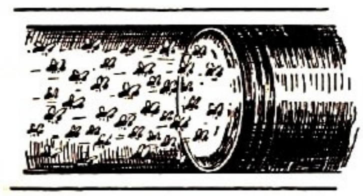
Um den Bodendruck zu erkennen, genügt es, eine einfache Betrachtung anzustellen, was den Reiz der Entdeckung nur noch erhöht. Die Sensation fällt sofort weg, wenn man vom Spannungstensor ausgeht und den Bodendruck als Sonderfall erklärt.

Mag es noch so befremdend klingen, dies bedeutet einen Fortschritt! Denn das Empfinden einer Sensation wird dadurch hervorgerufen, dass man, geläufige Tatsachen aneinanderreihend, zu einer überraschenden Einsicht gelangt. Überraschtsein bedeutet aber, dass man vor einem Fall steht, auf den man nicht vorbereitet war. Man konnte ihn nicht erwarten, weil die Kenntnisse nicht umfassend genug waren, das Ergebnis voraussehen zu lassen. Im Gegensatz dazu besitzt man im Spannungstensor einen Begriff, der den Bodendruck mit umfasst und darum ein fortgeschrittenes Wissen darstellt.

Überblickt man den zurückgelegten Weg, dann erkennt man, dass man durch allmähliches Erweitern des Bewegungsgesetzes die ganze Mechanik gewinnt. Von den drei Axiomen Newtons erwiesen sich das erste und dritte als überflüssig.
Das erste, weil es im zweiten enthalten ist, das dritte aber, weil wir von ihm keinen Gebrauch machen mussten, um das Bewegungsgesetz zu erweitern. Ohne Zuhilfenahme des dritten Axioms stellten wir auch die Prinzipien auf. Man bedarf seiner erst, wenn man zu Anwendungen schreitet. Dies sei besonders hervorgehoben, um den Aufbau der klassischen Mechanik abschließend zu sichern.

## 3.4 Eine neue Bewegungslehre

Es erhebt sich jetzt naturgemäß die Frage, wie weit die Mechanik reicht. Sie konnte erstaunliche Erfolge buchen, und darum ist es zu begreifen, wenn man eine Zeitlang sogar glaubte, die ganze Physik mechanisch erklären, auf die Mechanik zurückführen zu können. Den prägnantesten Ausdruck fand diese Überzeugung in dem bekannten Wort vom bestens unterrichteten Dämon des Laplace, den wir auf unserer "Entdeckungsfahrt" schon kennengelernt haben.
Nun, das ist keineswegs der Fall, wie beispielsweise die missglückten Versuche zeigen, welche die elektrischen Erscheinungen als mechanisches Geschehen verständlich machen wollten. Noch Maxwell selbst versuchte sich an diesem Problem, ebenfalls ohne Erfolg. Wohl aber gelingt eine mechanische Deutung für die Wärmelehre.



Als Vorbild können die Gase dienen. Man weiß, dass sie als eine Ansammlung von rasch bewegten Molekülen, ähnlich einem durcheinander schwirrenden Mückenschwarm, aufzufassen sind.

Dieses Bild lässt sich auf alle Körper ausdehnen. Man kann aus ihm unmittelbar Folgerungen ziehen, die sich mit der Wirklichkeit vergleichen lassen, so das Zustandekommen des Gasdrucks: er entsteht aus dem ununterbrochenen Anprallen der Gasmoleküle an die Wand. Berechnet man den Druck, dann erhält man eine Gleichung zwischen dem Druck und Inhalt des Gefäßes einerseits, der mit $\frac{2}{3}$ multiplizierten Bewegungsenergie sämtlicher Gasmoleküle andererseits.
Diese Gleichung war bereits Daniel Bernoulli bekannt; ihre linke Seite ist insofern bemerkenswert, als sie an das bekannte Boyle-Mariottesche Grundgesetz für ideale Gase erinnert.

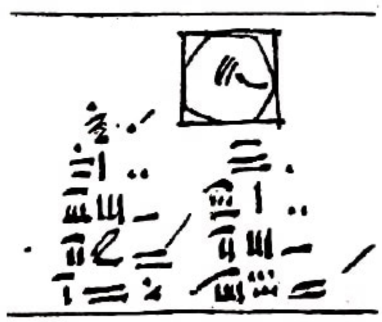
Sehr weit kommt man aber mit einer solchen unmittelbaren Auffassung nicht. Daher bildet es das unvergängliche Verdienst von Boltzmann, hier eine Abhilfe geschafft zu haben, indem er den Wahrscheinlichkeitsbegriff zur Deutung heranzog. Wenn hier mitten in der strengen Mechanik auf einmal die etwas "laxen" Wahrscheinlichkeiten Bürgerrecht erhalten, so soll das nicht heißen, dass das mechanische Geschehen nicht mehr streng vorauszusagen wäre, sondern nur, dass unsere Vorkenntnisse Zu mangelhaft ausfallen, um diese Voraussage machen zu können, und wir uns darum mit weniger begnügen müssen, eben mit Wahrscheinlichkeiten.

Mit einem der Philosophie entlehnten Sprachgebrauch pflegt man das so auszudrücken, dass das mechanische Geschehen kausal verläuft, ohne dass wir uns in der Lage befinden, es genau zu verfolgen. Dazu wäre nur der berühmte Dämon von Laplace imstande, der eigens zu diesem Zweck erfunden wurde und gegen den Argus mit seinen hundert Augen nicht aufkommen könnte; denn um jedes Einzelmolekül beobachten zu können, wäre der Laplacesche Dämon billigerweise mit Trillionen von Augen auszustatten.

Reicht die neue Auffassung weiter als die alte, dann wurde das damit erkauft, dass sie abstrakter ausfällt. Diesen Vorgang beobachtet man immer wieder.

Das fast vier Jahrtausende alte ägyptische Rechenbuch des Schreibers Ahmes, der nicht weniger als eine "Vorschrift" verspricht, um "zur Kenntnis aller dunklen Dinge" zu gelangen und "aller Geheimnisse, die in den Gegenständen enthalten sind" , zählt mühsam Dutzende von Regeln nebeneinander auf, die heute ein Schüler mit einem Blick als verschiedene Sonderfälle einer allgemeinen Regel erkennt.

Der Schüler ist gewiss nicht klüger als der gelehrte Schreiber - aber er besitzt die inzwischen erarbeiteten, umfassenden Begriffe. Umfassende oder allgemeine Begriffe gewinnt man durch Abstraktion.
Für die Anschauung entsteht daraus die Aufgabe, mit der fortschreitenden Abstraktion Schritt zu halten, und das gelingt tatsächlich, wie wir es in unseren Betrachtungen über Mathematik schon gesehen haben.



Angenäherte Berechnung der Kreisfläche. 48. Aufgabe aus dem Rechenbuch des Ahmes. Papyrus Rhind, um 1650 v. Ztw.

Freilich wurden gegen die Auffassung von Boltzmann nicht aus dieser Überlegung heraus keine Einwände erhoben, sondern nur deshalb, weil man sie nicht gut missen konnte.

Mit Hilfe der neuen wahrscheinlichkeitstheoretischen oder statistischen Auffassung gelingt es tatsächlich, das Verhalten der Gase zu beschreiben, die Wärmelehre endgültig der Mechanik einzugliedern.

Damit sind die Anwendungsmöglichkeiten der klassischen Mechanik erschöpft, ja bereits überschritten! Denn sie gilt nur dann, wenn die Bewegung nicht zu rasch erfolgt.
Große Geschwindigkeiten führen dagegen zu einschneidenden Änderungen.

Es gibt soviel Beobachter, soviel Zeiten an Stelle einer für alle gleichen absoluten Zeit, und der Glaubenssatz von der Unveränderlichkeit der Masse wird hinfällig. Formeln, die das genau festlegen, lernten wir bereits auf der "Entdeckungsfahrt" kennen, und es geht uns jetzt darum, die Ansätze zu gewinnen, aus denen sie gefolgert werden können.

Im wesentlichen sind es zwei Annahmen, die zu der neuen Mechanik führen und die selber deutlich ihren eigenen nichtmechanischen Ursprung verraten. Die erste schreibt jeder Art von Energie Masse zu. In der klassischen Mechanik führt man die Energie als Rechengröße ein, die freilich eine grundlegende Rolle spielt. Trotzdem besteht im Rahmen der klassischen Mechanik kein Anlass dafür, die Energie durch die neue Annahme sozusagen zu vergegenständlichen, vielmehr kamen die Anregungen dazu von der Elektrizitätslehre her.

Gleich die einfachste Annahme bewährt sich, welche die Energie $E$ der Masse $m$ proportional setzt, $E = c_1 m$.
Jeder Energiemenge $E$ kommt also eine bestimmte Masse $m$ zu; umgekehrt entspricht jeder Masse $m$ eine bestimmte Energie: beide sind nun gleichgeschaltet, sie erweisen sich als verschiedene Erscheinungsformen ein und derselben Grundqualität. Den Proportionalitätsfaktor bezeichnen wir vorläufig mit $c_1$ und finden für ihn später einen Wert, dem eine Naturkonstante, nämlich die ungehinderte Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts, zugrunde liegt.

Wird Arbeit geleistet, so verändert sich die Energie. Betrachten wir insbesondere die differentielle Änderung $dE$, so ergibt sich die Gleichung $dE = c_1 dm$; die Energieänderung ist der Massenveränderung proportional. Früher hatten wir die Arbeit anders erklärt, nämlich als inneres Produkt von Kraft und Wegdifferential $\mathfrak{v}dt$; die Kraft können wir wiederum als Änderung des Impulses betrachten $\mathfrak{K} = d(m\mathfrak{v})/dt$. Mithin wird die Arbeit, also die Energieänderung

$$dE = \frac{d(m\mathfrak{v})}{dt} \cdot \mathfrak{v}dt$$

Das Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke für $dE$ führt auf eine Differentialgleichung für $m$, deren Lösung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_1}}}$$

lautet. Die Masse $m$ ist hier als Funktion der Geschwindigkeit $v$ dargestellt. $m_0$ bedeutet einen Mindestwert, den $m$ offenbar für $v = 0$ annimmt und der darum Ruhmasse heißt.

Aus der Formel geht hervor, dass die Masse mit wachsender Geschwindigkeit immer größer wird, und dass es eine endliche Geschwindigkeit gibt, die nicht überschritten, ja nicht einmal erreicht werden kann, denn sonst fiele die Masse unendlich groß aus, und die Natur besitzt zwar keinen horror vacui, wohl aber einen horror infiniti.
Darum heiße diese endliche Geschwindigkeit, die man mit $c$ bezeichnet, Grenzgeschwindigkeit. Ihr Wert ist durch die Beziehung $c^2 = c_1$ gegeben.

Die zweite Grundannahme der neuen Mechanik verlangt nun, dass irgend zwei Inertialbeobachter denselben Wert für die Grenzgeschwindigkeit $c$ finden.
In mathematischer Einkleidung bedeutet das folgendes: Bezeichnet man die Raum- und Zeitkoordinaten des ersten Beobachten mit $x$, $y$, $z$, $t$, die des zweiten Beobachters entsprechend mit $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, so müssen die beiden Gleichungen bestehen: $x : t = c$ und ebenso $x' : t' = c$.

Die beiden Inertialsysteme mögen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v$ gegeneinander bewegen; es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass die beiden Koordinatensysteme sich parallel zueinander verschieben, dass also die beiden x-Achsen ineinander mit der Geschwindigkeit $v$ gleiten. Wir fordern weiter, dass beide Beobachter für die Relativgeschwindigkeit $v$ denselben Wert messen, sonst wären die beiden Systeme offenbar nicht gleichberechtigt.

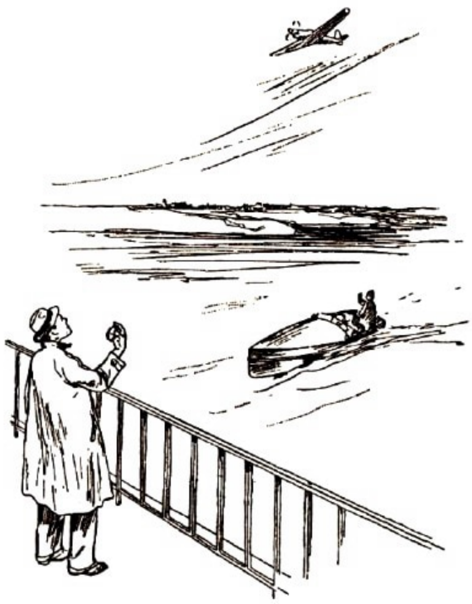
Suchen wir nun nach den Transformationen, welche uns gestatten, die Koordinaten $x$, $y$, $z$, $t$ des einen Systems durch die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ des anderen auszudrücken. Diese Transformationsformeln vermitteln den Übergang von einem System zum anderen, sie gestatten es, die Ergebnisse des einen Beobachters mit den Beobachtungen des anderen zu vergleichen. Hält man an der Forderung fest, dass sie linear ausfallen, so hat man zu setzen $x = c_2(x' + vt')$ und $x' = c_2(x - vt)$. Nimmt man die beiden Gleichungen $x = ct$, $x' = ct'$ hinzu, die aus der zweiten Grundannahme folgten, so lässt sich der Proportionalitätsfaktor $c_2$ berechnen. Man findet den Wert

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

und erkennt, dass die beiden mit $c_2$ angesetzten Gleichungen die Lorentztransformationen darstellen, die wir von unserer "Entdeckungsfahrt" her schon kennen.

Der Wert von $c$ ist im Sinne dieser Auffassung aus rein mechanischen Versuchen zu gewinnen. Er erweist sich als übereinstimmend mit dem Wert für die ungehinderte Ausbreitung von Licht, was ja in der Bezeichnung schon vorweggenommen wurde. Licht bedeutet aber Energie; und diese Energie stellt eine Masse dar - die sich andererseits nie mit der Grenzgeschwindigkeit bewegen kann! Sich aus diesem Widerspruch zu retten, gelingt nur durch ein Opfer, das in dem Eingeständnis besteht, die Elektrodynamik erheische eine neue Fassung. Leider steht diese noch aus!

Aus den Transformationsformeln lässt sich sofort berechnen, in welchem Verhältnis zueinander die Geschwindigkeiten stehen, die zwei Beobachter für denselben Vorgang messen. Ähnliches gilt für die Beschleunigungen. Aus diesen Formeln folgt erneut, dass $c$ eine Grenzgeschwindigkeit ist. Würde man nämlich eine Überlichtgeschwindigkeit so gewinnen wollen, dass man aus einem Flugzeug, das beinahe mit Lichtgeschwindigkeit dahinfliegt, in der Flugrichtung eine Kugel abschießt, die das Gewehr mit nahezu Lichtgeschwindigkeit verlässt, dann würde nach der klassischen Mechanik die Geschwindigkeit der Kugel über Grund nahezu doppelt so groß wie die Lichtgeschwindigkeit ausfallen.
In der neuen Mechanik aber setzen sich die beiden Bewegungen an Hand der Formeln wider Erwarten so zusammen, dass die Bodenmannschaft findet, die Kugel bewege steh langsamer als das Licht.



Um die Transformationsformeln für die Kraft zu gewinnen, gehe man von einer Fassung des auch hier als gültig angesehenen Bewegungsgesetzes aus, die wir schon benutzt haben. Wir setzen die Kraft der zeitlichen Ableitung des Impulses gleich. Weil die Masse diesmal selbst veränderlich ist, fällt die Beschleunigung nicht in die Richtung der Kraft. Dies sollte mahnen, mit dem Satz des zureichenden Grundes vorsichtig umzugehen. Sind auch Gründe wie hier nicht leicht auffindbar, so darf das keineswegs als Freibrief für Spekulationen gelten.

Aus unseren Überlegungen lassen sich nun sämtliche Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie gewinnen.

Sie erhalten eine besonders elegante Darstellung, wenn ein vierdimensionaler Raum herangezogen wird.
Man fasst $x, y, z, t$ als Punkte in einer neuen "Welt"auf und entwickelt deren Geometrie aus dem Bogendifferential

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2$$

Dies sieht gefährlicher aus, als es ist, denn führt man $x : i$, $y : i$, $z : i$, $ct$ als neue Veränderliche ein, dann nimmt diese Gleichung die Form des Pythagoras an. Es ist aber üblich $x, y, z, cit$ als neue Veränderliche $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ zu wählen und auf der dann durchweg negativen rechten Seite die Vorzeichen umzukehren, also den Ausdruck

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

als charakteristische Größe der neuen Welt zu betrachten. Dieser Ausdruck ändert sich beim Wechsel von einem zum anderen Inertialsystem nicht; er behält für alle Beobachter den gleichen Wert und wird darum eine Invariante genannt.

Solcher Invarianten, die Einschränkungen bedeuten, gibt es in der neuen vierdimensionalen Welt mehrere - es geht also hier durchaus nicht so bunt zu, wie man das sonst von der Welt behauptet. Erst wenn man aus dieser Welt scheidet und, um auf gewohnte Vorstellungen zurückzukommen, die räumlichen Koordinaten $x, y, z$ von der Zeit $t$ trennt, die vierdimensionale

Welt in Raum und Zeit "spaltet" , ändern sich Entfernungen und Dauer mit dem Beobachter. Diese Verhältnisse besprachen wir schon auf der "Entdeckungsfahrt".

Es handelt sich bei der neuen Formulierung um mehr als eine nur übersichtliche Schreibweise, denn sie bietet die Möglichkeit, durch Verallgemeinern des Ausdrucks für das Bogenelement eine allgemeine Maßbestimmung in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt einzuführen. Damit können wir dann beliebige Bezugssysteme, nicht allein Inertialsysteme, zulassen.
Das schwebte dem Mathematiker Riemann schon im Jahre 1854 vor, als er die Ansicht vertrat, die Geometrie des uns umgebenden Raumes sei erst durch die Physik bestimmt. Wir haben schon gehört, dass auch Gauß die Frage, welche Geometrie auf der Erde herrsche, experimentell zu entscheiden suchte.

Nächstliegend ist es, die Materie für den Einfluss auf die Geometrie verantwortlich zu machen. Dies geschieht in der neuen Mechanik durch die sogenannten Feldgleichungen, die Materie und Weltgeometrie miteinander verknüpfen. Damit verausgabt sich die Materie physikalisch; folglich ist jene Wirkung, die wir früher als Anziehung kennengelernt haben, nun in der durch die Feldgleichungen bestimmten Geometrie mit enthalten: die Schwerkraft wurde geometrisiert. Sie büßte damit ihre selbständige Existenz ein, was einen gewaltigen Fortschritt in der Richtung auf ein einheitliches Weltbild bedeutet. Jedoch liegt solch ein Weltbild noch nicht abgeschlossen vor. Denn abgesehen davon, dass sich die eben geschilderte allgemeine Relativitätstheorie nach neuen Erfahrungen nur dafür eignet, Vorgänge zu beschreiben, die nicht der Welt der Atome angehören, gelang es bisher noch nicht, die Elektrizität zu geometrisieren und sie damit der Forderung nach einheitlicher Naturbeschreibung zu unterwerfen, wobei für das Wort einheitlich ebensogut geometrisch stehen könnte.

Der Aufwand an Mathematik ist dabei erheblich. Es hieße aber das Wesen jedes Fortschrittes verkennen, wenn man sich dadurch irremachen ließe, dass er größere Anforderungen an uns stellt.
Vielmehr hat man sich zu sagen, dass der Fortschritt verpflichtet. Zudem verschiebt sich im Laufe der Zeit das Urteil darüber, was als schwer zu gelten hat. Sicher haben die Zeitgenossen von Leibniz und Newton nicht damit gerechnet, dass der Differentialkalkül später Sechzehnjährigen gelehrt würde; aber gerade diese Entwicklung berechtigt zu der Erwartung, dass er in Zukunft noch Jüngeren beigebracht wird, und dass man dann die etwas Älteren so viel an Mathematik wird lehren können, wie sich in der allgemeinen Relativitätstheorie als unumgänglich notwendig erweist.
Und sollte diese bis dahin überholt sein, dann belehrt uns die Geschichte der Physik, dass die neue Lehre nur noch mehr an Mathematik beanspruchen wird.

Die Nichtbeachtung dieser Tatsachen führte zu erbitterten Gegnerschaften gegen die neue Lehre. Eine vielleicht noch größere Gefahr bedeuten aber Schriften, die zwar für die Relativitätstheorie eintreten, ihr also durchaus freundlich gesinnt sind, ohne dass aber ihre Verfasser sie begriffen hätten. Von ihnen gilt das Sprichwort: "Gott schütze mich vor meinen Freunden, dann werde ich mit meinen Feinden selber fertig."

Diese Verfasser sind lauter Schulmeisterlein Wuz, von dem Jean Paul erzählt:

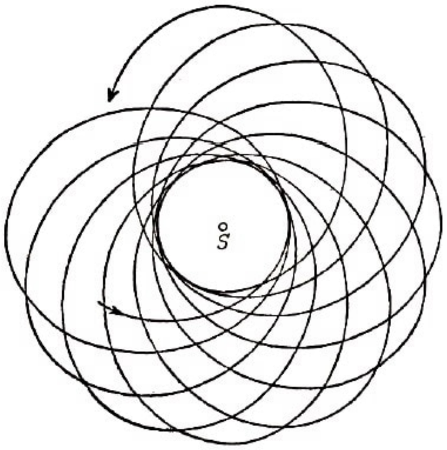
"Er war kein verdammter Nachdrucker, der das Original hinlegt und oft das meiste daraus abdruckt, sondern er nahm gar keines zur Hand. Daraus sind zwei Tatsachen vortrefflich zu erklären: erstlich die dass es manchmal mit ihm haperte und dass er zum Beispiel im ganzen Federschen Traktat über Raum und Zeit von nichts handelte als vom Schiffsraum und der Zeit, die man bei Weibern Menses nennt."
Offen bleibt, wie weit die Fortsetzung zutrifft:

"Die zweite Tatsache ist seine Glaubenssache: da er einige Jahre sein Bücherbrett auf diese Art vollgeschrieben und durchstudiert hatte, so nahm er die Meinung an, seine Schreibbücher wären eigentlich die kanonischen Urkunden, und die gedruckten wären bloß Nachstiche seiner geschriebenen; nur das, klagt' er, könn' er - und böten die Leute ihm Balleien dafür an - nicht herauskriegen, wienach und warum der Buchführer das Gedruckte allzeit so sehr verfälsche und umsetze, dass man wahrhaftig schwören sollte, das Gedruckte und das Geschriebene hätten doppelte Verfasser, wüsste man es nicht sonst."

Von einem Fortschritt kann nur dann die Rede sein, wenn aus einer Lehre neue Ergebnisse folgen, die über die frühere Theorie hinausgehen und von der Erfahrung bestätigt werden.

Die allgemeine Relativitätstheorie wartet mit mehreren solchen Ergebnissen auf. Um sie zu begreifen, gehe man von den kräftefreien Bewegungen aus. In der euklidischen Geometrie - das heißt im Fall der klassischen Mechanik - vollzog sich die kräftefreie Bewegung in geraden Linien: die Gerade ist hier die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten. Bewegt man sich in einer anderen Geometrie, so gibt es im allgemeinen keine Geraden mehr, aber immer noch "kürzeste" Verbindungslinien zwischen zwei Punkten.
Auf der Kugel sind das zum Beispiel die größten Kreise, die Schnitte der Kugeloberfläche mit Ebenen durch den Kugelmittelpunkt. Man spricht auch von "geradesten" oder geodätischen Linien. Sie bilden Extremfälle und können folglich mit gleichem Recht die kürzesten sowohl wie die längsten Verbindungen darstellen.

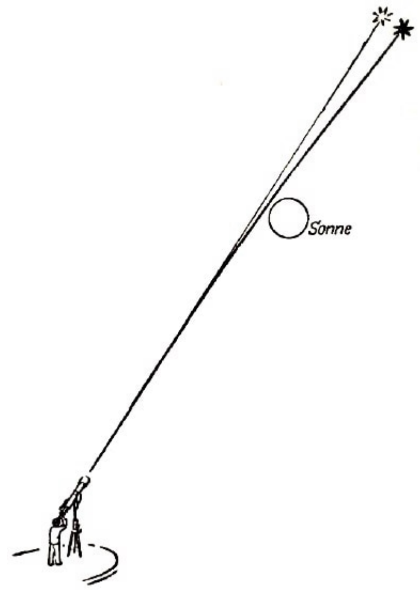
In solchen geodätischen Linien bewegen sich nun auch nach der neuen Lehre materielle Punkte, auf die keine Kraft einwirkt. Dieses neue Trägheitsgesetz fällt aber mit dem alten keineswegs zusammen, denn in der euklidischen Geometrie sind Geraden zwar die kürzesten Linien, doch ist die Anziehung in der klassischen Mechanik im Gegensatz zur Relativitätstheorie als Kraft zu betrachten, die den Bewegungsverlauf der Hoheit des Trägheitsgesetzes entreißt.
Das neue Trägheitsgesetz enthält hingegen die Scheinkräfte schon in sich und gilt ganz allgemein auch für das Licht.



Zunächst wenden wir das Gesagte auf das Sonnensystem an. Die Möglichkeit dafür bietet der Umstand, dass die Sonnenmasse überwältigend groß ausfällt. Damm dürfen die Planeten als Punkte betrachtet werden, deren Massen zu vernachlässigen sind - sogenannte Probekörper. Die Weltgeometrie wird bei uns allein von der Sonne bestimmt, und die Planeten gehorchen dem Trägheitsgesetz.

Nach Kepler beschreibt nun ein Planet eine Ellipse, nach der Relativitätstheorie aber nicht mehr genau: der Planet kehrt nicht zu seinem Ausgangsort zurück, seine Bahn schließt sich

nicht, sondern er beschreibt eine Rosette, die ungefähr durch langsames Drehen einer Ellipse erzeugt wird.
Rechnungen, die auf Grund von Merkurbeobachtungen schon lange vor Auftauchen der Relativitätstheorie angestellt wurden, ergaben tatsächlich eine Rosettenbahn, die Drehung erfolgt aber so langsam, dass man noch nicht mit Sicherheit behaupten kann, ob die neue Lehre auch zahlenmäßig das Richtige trifft.




Ähnliches gilt von der Lichtablenkung in der unmittelbaren Nähe großer Massen wie unserer Sonne. Sie verändern die Weltgeometrie stark, so dass die kürzesten Linien in Sonnennähe anders ausfallen als in Sonnenferne. Darum verändert sich auch der Winkel, unter dem man zwei Sterne sieht, einmal, wenn sich die Sonne in einer entfernten Himmelsgegend aufhält, das andere Mal, wenn man die Sterne nahe ihrem Rande erblickt. Dieser Winkel wird nämlich von Lichtstrahlen gebildet, die kürzeste Linien sind und im zweiten Fall stärker gekrümmt werden. Der Betrag aber, um den sich dieser Winkel verändert, fällt so gering aus, dass er an der Messbarkeitsgrenze liegt.

Einem Chamäleon ähnlich nimmt das Licht eine Farbe an, die sich nach dem Ort richtet, von dem es stammt. Kommt es von der Sonnenoberfläche, dann hat es eine rötlichere Farbe als die, welche es unter sonst gleichen Bedingungen auf der Erde angenommen haben würde. Seine Farbe behält es jedoch auf der Wanderschaft bei, und darin unterscheidet es sich vom Chamäleon, das immer neue Farben annehmen würde, die dem jeweiligen Ort entsprächen.

Damit bekennt das Licht Farbe, denn es verrät uns ja, woher es stammt und wie dort die Weltgeometrie aussieht. Nun lässt sich - das lehrt uns die Mathematik - in jedem Punkt $x, y, z, t$ ein Koordinatensystem einführen, in dem die spezielle Relativitätstheorie gilt, und ein Probekörper ruht, wie er sich auch im ursprünglichen System bewegen möge.
Man redet von dem Eigensystem dieses Probekörpers, insbesondere von der Eigenzeit $s$. Das Licht gibt vom Verhältnis $dt/ds$ Kunde. Denkt man sich die Sonne als einzige Masse im Weltall, dann gilt für dieses Verhältnis im Abstand $r$ vom Sonnenmittelpunkt in guter Näherung $1 + m : r$, wobei $m$ die Sonnenmasse bezeichnet.

Die Rotverschiebung fällt also recht gering aus, auf der Sonnenoberfläche beträgt das Verhältnis $2,12 \cdot 10^{-6}$, konnte aber trotzdem von Adams und von St. John beobachtet werden.

Es gibt eine Weltgeometrie oder, anders ausgedrückt, eine Lösung der Feldgleichungen, welche die Flucht der Spiralnebel zwanglos erklärt. Auf unserer "Entdeckungsfahrt" sprachen wir ausführlich davon. So kommt es, dass wir das Wachsen des Weltalls verfolgen können, während Boscovich im Jahre 1759 - und nach ihm v. Helmholtz, Lord Kelvin, Poincaré - die Ansicht vertraten, dass man es nicht feststellen könnte, wenn über Nacht die Ausmaße aller Dinge sich verdoppeln würden.

Hat aber diese Aussage überhaupt einen Sinn? Kaum, dem vom Verdoppeln kann man nur so lange mit, Recht reden, als noch nicht alles davon betroffen ist! Im übrigen müssten dann die Pendeluhren nachgehen, denn mit zunehmender Entfernung nimmt die Anziehung ab, alles verliert an Gewicht, und das Pendel schwingt langsamer. Die Erde würde sich dann auch langsamer um die eigene Achse drehen, und zwar halb so schnell, während das Pendel $\sqrt{8}$-mal so lange schwingt.

Es bleibt nach hinzuzufügen, dass sich für den Durchmesser unserer Welt der Wert von einigen hundertmillionen Lichtjahren ergibt. Das ist erstaunlich wenig; mit dem derzeit größten Fernrohr der Welt, das sich auf dem Mount Wilson in USA befindet, sieht man bereits schätzungsweise 500 Millionen Lichtjahre weit!
Es scheint also denkbar, dass wir hier bereits das Ende des Weltraums erblicken - eine etwas unbehagliche Vorstellung! Vielleicht bringt das neueste, doppelt so große Riesenfernrohr, das jetzt seiner Vollendung entgegengeht, eine Entscheidung.

In einer solchen endlichen Welt kehrt das Licht zu seinem Ausgangsort zurück. Es dauert freilich eine Weile, und man findet Zeit genug, sich umzudrehen, um sein zurückeilendes Ebenbild artig zu grüßen.

Zwei früher aufgestellte kosmologische Modelle der Welt ergeben zwar einen viel größeren Durchmesser, das eine davon enthält aber nur Materie und keine Bewegung, das zweite sogar Bewegung ohne Materie, so dass sie beide nicht als geglückt bezeichnet werden können.

## 3.5 Wie verhalten sich kleinste Teilchen?

Es hat den Anschein, als wäre es das Schicksal neugeprägter mathematischer Begriffe, früher oder später ein Eigenleben in der Physik zu führen.
In der Mechanik und in der Relativitätstheorie erlebten wir das wiederholt. In noch höherem Maße begegnet uns das in der Quantenmechanik, die gerade diesem Umstand ihre Erfolge zu verdanken hat. Nur so gelingt es ihr, die Vorgänge in der Atomhülle zu beschreiben - ein Unterfangen, an dem Mechanik und Relativitätstheorie scheitern.

Das Kernstück der heutigen Lehre bildet eine Gleichung; um diese zu gewinnen, muss man sich auf die körnige Struktur des Lichts besinnen. Das Licht besteht nach der Anschauung der Quantentheorie aus Photonen von der Energie $h\nu$ und dem Impuls $hk$, wobei $\nu$ die Schwingungszahl bezeichnet und $k$ die reziproke Wellenlänge $1 : \lambda$, die Wellenzahl, endlich $h$ die Konstante von Planck, deren Wert wir auf der "Entdeckungsfahrt" schon kennengelernt haben.

Damit ist einem Photon, das man sich zunächst als einen punktartigen Energiebrocken vorzustellen hatte, ein Schwingungsvorgang, eine Welle zugeordnet.
Wir wagen nun den Versuch, auch Elementarteilchen wie Elektronen vorerst rein formal eine Welle zuzuordnen. Die im klassischen Sinn definierte Energie $E$ der Teilchen setzen wir gleich $h\nu$ und ihren Impuls $mv$ gleich $hk$. Sollen $\nu$ bzw. $k$ wirklich Schwingungszahl und Wellenzahl bedeuten, dann muss die ihnen entsprechende Welle $\psi$ der Wellengleichung genügen.
Sie lässt sich für Wellen von einheitlicher Schwingungszahl leicht auf die Gestalt bringen

$$\Delta\psi + \frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{8\pi^2 m}{h^2}U\psi = 0$$

$\Delta$ ist diesmal der Laplaceoperator und steht für die Summe der zweiten partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten, $U$ bezeichnet die potentielle Energie. Das Ergebnis heißt die zeitabhängige Schrödingergleichung, zu Ehren ihres Entdeckers Erwin Schrödinger.

Aus der angenommenen Beziehung für den Impuls $m\nu = hk = h : \lambda$ ergibt sich für die Wellenlänge sofort der Wert $\lambda = h : m\nu$. Nach Louis de Broglie nennt man diesen Ausdruck heute die Broglie-Wellenlänge des Elementarteilchens. Aus der Wellenlänge kann man also unmittelbar auf die Geschwindigkeit der Elementarteilchen schließen.

Das legt es nahe, den Versuch zu wagen, von den Wellen auszugehen und nunmehr die Elementarteilchen aus ihnen heraus zu verstehen. Daraus ergeben sich Folgerungen, die zunächst paradox scheinen. Bei Wellen können ja immer Beugungserscheinungen auftreten, die sich dann auf Elementarteilchen übertragen müssten. Überraschenderweise konnten die Beugungserscheinungen der Materiewellen, das heißt an Elementarteilchen, von Davisson und Germer im Jahre 1927 einwandfrei beobachtet werden, ein schönes Zeichen für die Richtigkeit unseres Unterfangens.

Geht man von den Wellen aus, dann heißt es, Vorschriften anzugeben, wie aus ihnen alle Eigentümlichkeiten des Teilchenbildes zurückzugewinnen sind. Man fand nicht gleich die richtigen Vorschriften, heute besitzt man sie jedoch.
Den Schlüssel bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die den Ort weist, wo sich das Teilchen befindet. Freilich kommt man mit dieser Anweisung allein nicht viel weiter als mit Angaben, wo Piratenschätze verborgen sein sollen. Die Amplitude der Welle in das Quadrat erhoben soll ein Maß für die Wahrscheinlichkeit darstellen, das Teilchen gerade an Ort und Stelle anzutreffen.

Wie man erkennt, ließ man sich dabei von der Analogie zum Licht leiten. Diese Wahrscheinlichkeit, genauer Wahrscheinlichkeitsdichte, ändert sich mit der Zeit, so dass man es mit einer Strömungserscheinung zu tun hat, auf welche die Begriffsbildungen der Flüssigkeitslehre angewendet werden können. Auf diese Weise gelingt es, im Rahmen eines Wellenbildes darauf zu schließen, dass die Gesamtzahl der Teilchen durch die Zeit hindurch erhalten bleibt.

Diese neue Auffassung von der Materie führt zu umwälzenden Folgerungen. Wenn nur Wahrscheinlichkeiten dafür angegeben werden können, wo sich die Teilchen befinden, dann, so scheint es, muss das geheiligte Dogma vom kausalen Geschehen aufgegeben werden, denn wie sollten eindeutige Vorhersagen getroffen werden können, wenn nicht einmal eindeutige Gegenwartsaussagen möglich sind?

Zahlreiche Physiker kamen zu dieser Überzeugung, die sie gleich zu einem Bekenntnis erhoben haben, dem neuen Dogma des akausalen Geschehens. Sie bekämpfen noch heute die Anhänger der älteren Auffassung heftig, doch scheint uns der ganze Streit - gegenstandslos. Es bleibt zu bedenken, dass die Schrödingergleichung sich zwar für große Teilchenmengen bewährt hat, aber niemals an Einzelteilchen geprüft wurde, jedenfalls nicht ohne vorgefasste Überlegungen, die einer vermeintlichen Prüfung jede Überzeugungskraft rauben.
Folglich ist die neue Auffassung so anzusehen, als ob sie für Einzelteilchen in Ansammlungen gelten und damit eine Massenpsychologie der Elementarteilchen darstellen würde. Das wirkliche Verhalten des Einzelteilchens ist uns dagegen unbekannt.

Freilich versuchen die Akausalisten geltend zu machen, dass wir nie mehr als dieses "als ob" erfahren würden - wenn man die neue Lehre als endgültig ansieht. Betrachtet man sie aber als Vorstoß, wie es im Sinne des "als ob" eigentlich sein sollte, dann erscheint sie als nur vorläufig, und man muss hoffen, dass sie von tieferen Einsichten abgelöst wird - vielleicht einer Kernphysik.

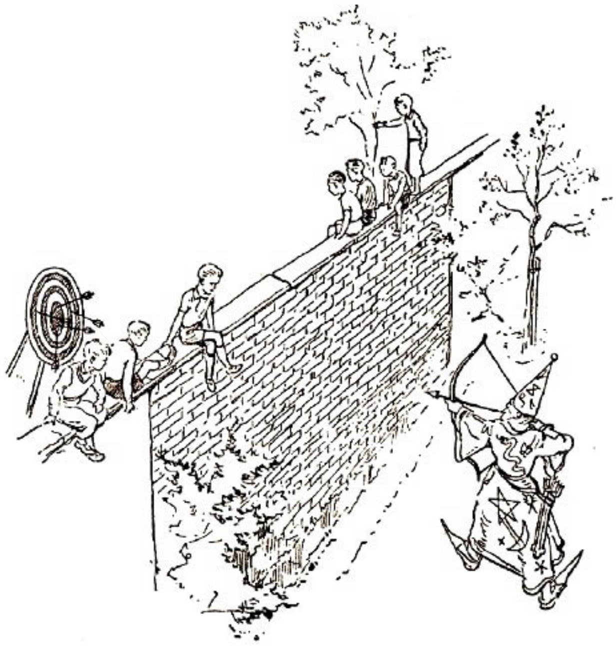
Es ist aber keineswegs abgemacht, dass sich die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung behaupten wird, denn auch in der kinetischen Theorie der Materie erklärt sie vieles, ohne für das Verhalten der Einzelteilchen maßgeblich zu sein.

Beide Parteien, Kausalisten sowohl als Akausalisten, begehen den Fehler, mehr zu behaupten, als sie verantworten können. Um im Recht zu bleiben, müssen die Akausalisten darauf bestehen, dass die Quantenmechanik in ihrer heutigen Form bereits das Richtige trifft. Dann freilich wäre es sinnlos, nach einem genauen Ort des Elementarteilchens zu fragen.
Man versuchte das mit der witzigen Frage des Göttinger Professors Lichtenberg, der im achtzehnten Jahrhundert wirkte, zu illustrieren: "Können Mädchen im Dunkeln erröten?" und führte an, dass wir das nicht feststellen und es füglich nicht erröten heißen könnten.
Man übersah aber die Infrarotphotographie, mit der sich das heute leicht feststellen lässt - neue Hilfsmittel führen zu neuen Ansichten!

Bildet es den Fehler der Akausalisten, zu behaupten, die vorliegende Lehre wäre in ihren Grundgedanken endgültig, dann begehen die Kausalisten den Fehler, zu behaupten, in Wirklichkeit verliefe alles kausal.
Woher wollen sie das wissen? Es ist zwar bitter, einzugestehen, wenn man etwas nicht weiß; aber diese Ehrlichkeit ist im Interesse eines klaren Bildes und als Ansporn für weitere Forschung unerlässlich, und so müssen wir zur Einsicht, dass der ganze Streit gegenstandslos ist, ein "ignoramus" hinzufügen!

Immerhin kann die neue Lehre mit aufsehenerregenden Erfolgen aufwarten, mit neuen Ein-

sichten, entdeckt von Physikern und erläutert von Philosophen. Sie macht es verständlich, wie Elementarteilchen Potentialwälle, das heißt räumlich lokalisierte Abstoßungskräfte, überwinden können, die höher ausfallen als ihre Energie.
In der klassischen Mechanik wäre das ausgeschlossen, weil es dort nur ein Entweder-Oder gibt: Entweder ist die Bewegungsenergie des Teilchens geringer als die Höhe des Walles, und dann kann es nicht hinübergelangen, oder sie ist größer, und dann gelangt es hinüber. Die Quantenmechanik führt dagegen zu einem anderen Ergebnis. Setzt man die Schrödingergleichung an, dann ergibt sich, dass eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass das Teilchen hinübergelangt, und eine von Null ebenfalls verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, dass es vom Wall zurückprallt, eine moderne Auslegung der listigen Pfeile Amors!



Die beiden Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich zu 1, wie es sein muss, weil ja einer dieser beiden Fälle unbedingt eintrifft. Man redet hier vom "Tunneleffekt" und kann mit seiner Hilfe den bisher rätselhaften radioaktiven Zerfall erklären. Bezeichnend dafür, wie folgerichtig dies im Rahmen der Quantenmechanik erscheint, ist die Tatsache, dass der Tunneleffekt von verschiedenen Forschern gleichzeitig entdeckt wurde.

Eine radikale Schlussfolgerung liegt nahe: Feiert die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung solche Erfolge, dann ist sie in vollem Umfang durchzuführen, und es sind nicht allein für Ortsangaben, sondern für jegliche physikalische Größen nur Wahrscheinlichkeiten für mehrere mögliche Werte vorzusehen.
Danach erscheint es sinnlos, davon zu reden, dass eine Länge einen ganz bestimmten Wert besitzt. Sie besitzt deren mehrere und jeden mit einer ganz bestimmten Wahrscheinlichkeit. So befremdend das auch im ersten Augenblick erscheinen mag, lässt sich diese Auffassung folgerichtig durchführen und erklärt Erscheinungen, die zu deuten sonst nicht gelang.

In diesen wenigen Sätzen ist eine jahrzehntelange stürmische Entwicklung zusammengefasst, die, mit Lenard, dem wir grundlegend neue Vorstellungen verdanken, und mit Planck beginnend, über Lord Rutherford, Niels Bohr, Louis de Broglie, Heisenberg und Schrödinger führt.

Es war ein langer Weg mit zahlreichen Windungen und Schleifen, mit Irrtümern und Missverständnissen, der zu den heutigen Ansichten führte. Um diese neue Lehre auszugestalten,

muss man eine geeignete mathematische Formulierung finden. Sie gelingt in dem uns schon bekannten Hilbert-Raum. Es lässt sich nämlich zeigen, dass eine Wellenfunktion als ein Punkt im Hilbert-Raum gedeutet werden kann und den physikalischen Größen bestimmte Operatoren entsprechen.
Man finde sich damit ab, dass man dabei eine Art von Kunstsprache erlernen muss, um in ihr denken zu können. Befreundet man sich einmal mit ihr, dann besitzt man eine übersichtliche Formulierung der Quantenmechanik, die jetzt in ihren Grundzügen aufgezeigt werden soll.

Sich am Photon orientierend, fällt es leicht, einen kleinen Grundstock von Operatoren anzulegen. Man findet auf diese Weise, dass - von gleich noch näher anzugebenden Zahlenfaktoren abgesehen - der Energie die Ableitung nach der Zeit, den Impulskomponenten aber die partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten entsprechen. Die Zahlenfaktoren lauten $-h : 2\pi i$ für den Energieoperator und $h : 2\pi i$ für die Impulsoperatoren.
Man sieht ferner leicht ein, dass die Multiplikation der Wellenfunktion mit der entsprechenden Koordinate den Operator für Ortsangaben ergibt.

Den Operator einer physikalischen Größe aber, die aus anderen formelmäßig aufgebaut ist, gewinnt man durch Einsetzen der Operatoren dieser Größen in die Formel. Es bleibt jedoch zu berücksichtigen, dass die Algebra für Operatoren nicht mit der gewöhnlichen Algebra übereinstimmt, weil es jetzt auf die Reihenfolge der Faktoren im Produkt ankommt: wir wissen ja, dass die Operatoren nicht vertauschbar auszufallen brauchen.
Damit besitzt man ein Wörterbuch, das es erlaubt, die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik in die Operatorensprache zu übersetzen. Das Ergebnis bildet die zeitabhängige Schrödingergleichung, die damit auf eine neue Weise gewonnen wurde.

Um die möglichen Messwerte und ihre Wahrscheinlichkeiten angeben zu können, gehe man davon aus, dass der einzelne Operator ein Koordinatensystem bestimmt. Die Beträge der Komponenten der Wellenfunktion ergeben dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, während die Messwerte als sogenannte Eigenlösungen auftreten, womit folgendes gemeint ist:
Bezeichnet $A$ den Operator, $a$ einen möglichen Wert, dann gilt die Gleichung $A\psi = a\psi$; die linke Seite bedeutet einen Punkt im Hilbert-Raum, die rechte Seite ebenfalls, und die Gleichung behauptet, dass diese beiden Punkte zusammenfallen.

An Einfachheit lassen diese Erklärungen, die freilich noch nicht erschöpfend sind, nichts zu wünschen übrig, wenn man sich einmal der Mühe unterzogen hat, die Operatorensprache zu erlernen. Man versuchte ursprünglich, das alles in die Matrizensprache zu übersetzen, v. Neumann konnte aber zeigen, dass sie sich dafür wenig eignet. Ihm verdankt man auch in erster Linie den Ausbau der Operatorensprache, soweit dies für quantenmechanische Anwendungen noch nötig war.

Überzeugend erlebt man die Macht der Operatorensprache, wenn man von zwei Größen ausgeht, zum Beispiel von Ort und Impuls. Eine elementare Rechnung führt sofort zu einer Beziehung zwischen ihren Streuungen, die als Maße für die Unschärfe in den Angaben gedeutet werden.
Für Ort und Impuls besagt sie, dass das Produkt ihrer Streuungen nie kleiner ausfallen kann als $h : 4\pi$. Je genauer also der Ort bekannt ist, um so weniger lässt sich über die Größe des Impulses aussagen. Es gelingt niemals, für beide Größen gleichzeitig exakte, scharfe Werte zu erhalten.
Ursprünglich wurde diese Beziehung von Heisenberg induktiv gefunden; sie führt den Namen Unschärfebeziehung. Zunächst wirkte sie überraschend und sensationell, doch schwindet die

Sensation, wenn die Mathematik in ihre Rechte tritt; übrigens ist die Unschärfebeziehung inhaltlich schon viele Jahre vorher als nicht unterschreitbare endliche Zellengröße in die quantenstatistischen Betrachtungen eingeführt worden, freilich ohne in ihrer Bedeutung erkannt zu sein.

An die Unschärfebeziehung knüpfen sich die Erörterungen der Akausalisten. Stimmt man dem bei, dass die Quantenmechanik in ihren heutigen Grundlagen endgültig ist, dann freilich wäre es sinnlos, von Kausalität reden zu wollen, denn nach der eben erörterten Unschärfebeziehung sind Ort und Geschwindigkeit von Elementarteilchen nie gleichzeitig genau bestimmt, ohne diese Voraussetzung kann aber von kausalem Geschehen nicht die Rede sein.

Warum jedoch die Kausalität nur mit dieser rechnerischen Folgerung bekämpfen? Es kann viel unmittelbarer geschehen, indem man von der Grundannahme ausgeht, derzufolge die möglichen Werte zum Beispiel für den Ort nicht mit Sicherheit angenommen werden, sondern nur mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten. Lässt es sich auch so einrichten, dass diese Wahrscheinlichkeiten mit Ausnahme einer einzigen alle verschwinden, so bedeutet das im Sinne der Wahrscheinlichkeitslehre noch keineswegs, dass mit einer Ausnahme alle anderen Werte ausgeschlossen sind. Darum kann auch nie eine solche Gegenwartsaussage über den Zustand eines Systems getroffen werden, wie sie die Kausalität verlangt, denn man kann ja nicht behaupten, dass eine Größe bestimmt diesen oder jenen Wert besitzt.

Von unserem Standpunkt aus entscheiden diese Ausführungen freilich keineswegs, ob das Naturgeschehen kausal verläuft oder nicht. Denn wir halten daran fest, dass die Quantenmechanik nur einen ersten, freilich sehr erfolgreichen Vorstoß in die Welt der Atome bedeutet und eine endgültige Lehre nicht nur aussteht, sondern wesentlich anders ausfallen muss.

Das enthebt uns natürlich nicht der Pflicht, die heutige Lehre einwandfrei zu entwickeln. Dazu gehört es, auf eine Schwierigkeit einzugehen, die als so ernsthaft empfunden wurde, dass sie von einem führenden Gelehrten als "eine wesentliche Schwäche, ja die Hauptschwäche der Quantenmechanik" bezeichnet wurde.
Die Schwierigkeit besteht darin, dass man der Zeit eine Sonderstellung einräumen musste, um von einer Mindestdauer der Messungen absehen zu dürfen. Berücksichtigt man den besonderen Charakter der Zeit nicht, dann muss man sie als Operator betrachten, der mit dem Energieoperator ähnlich durch die Unschärfebeziehung verknüpft ist wie der Ort mit der Geschwindigkeit. Auf Grund unserer Einführung der Zeit als Abbildung leuchtet es aber ein, dass sie ganz anderer Art ist als etwa eine Ortsangabe, die durchaus gegenständlich ausfällt, während die Aussage: Es ist acht Uhr! nur noch als Abstraktion einen Sinn hat.

Darum ist man berechtigt, für die Zeit eine Ausnahme zu machen und keinen Operator zu fordern, sondern sie als das zu behandeln, was sie darstellt, nämlich als Zahlenangabe oder, anders ausgedrückt, als Parameter. Durch die Erfahrung geleitet, behandelte man die Zeit notgedrungen von Anfang an als Parameter, ohne den vermeintlichen Widerspruch aufklären zu können. Er schwindet von selbst, sobald die Zeit als Abbildung erkannt wird.

Damit liegt die Quantenmechanik more geometrico dargestellt vor. Ist auch ihr Aufbau auf diese Weise einwandfrei, so kann nicht bezweifelt werden, dass sie nur ein Durchgangsstadium bedeutet. Es war nicht anders zu erwarten, wenn man bedenkt, dass wir sie auf Grund eine: Parallele zwischen Photon und Teilchen entwickeln konnten, das Photon aber kein vollwertiger Vertreter atomaren Geschehens ist. Darum bleibt es wichtig, den Versuch zu unternehmen, die Grenzen abzustecken, ein Versuch, der in verschiedenen Richtungen gewagt wurde.

## 3.6 Ringen um Neues

So ertragreich auch der geschilderte Vorstoß in die Welt der Atome ausfiel, es bleibt von vornherein klar, dass er nur einen Teilerfolg bedeutet. Denn die zeitabhängige Schrödingergleichung bildet zwar die gelungene Übersetzung der klassischen Mechanik mit Hilfe unseres "Wörterbuches" , wir wissen aber noch nicht, wie man die Relativitätstheorie übersetzen soll. Man könnte von Eigensystemen ausgehen, in denen die Elementarteilchen ruhen und darum einfachen Formeln gehorchen. Dann würde jedoch der Übergang zu einem gemeinsamen Bezugssystem infolge der Lorentz-Transformationen so viel verschiedene Zeiten liefern, wie es Teilchen gibt - eine Schwierigkeit, die noch nicht überwunden ist.

Deshalb beschränkt man sich bei den bisher gemachten Erweiterungsversuchen zunächst auf ein einziges Teilchen, dessen Weltreise durch $ds^2$ beschrieben sei. Man drückt dann das Bogendifferential $ds$ einmal mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie aus, dann aber durch eine lineare Kombination der Koordinatendifferentiale $dx_i$, worin die Koeffizienten nun freilich keine gewöhnlichen Zahlen, sondern Matrizen sind.
Setzt man beide Ausdrücke für $ds$ einander gleich, so ergibt sich eine Gleichung, die nun mit Hilfe unseres "Wörterbuches" in die Sprache der Wellenmechanik übersetzt werden kann und dann nach ihrem Entdecker die Diracgleichung heißt.

Sie wurde von Dirac 1928 auf einem anderen Wege gewonnen. Auch sie stellt eine Wellengleichung dar, doch bildet die Diracwelle keine Funktion im gewöhnlichen Zahlenbereich mehr, weil sie die obenerwähnten Matrizen enthält. Es gelingt aber, sie für die Anwendungen durch vier Wellenfunktionen zu ersetzen, wie sie in der gewöhnlichen Theorie von Schrödinger üblich sind. Dann heißt die Diracwelle vektoriell, im Gegensatz zur skalaren Schrödingerwelle.

Wir wollen versuchen, den Gang der Rechnung kurz anzudeuten. Man stellt das Bogendifferential $ds$ als lineare Verbindung der $dx_k$ dar, setzt also $ds = i_k dx_k$. Andererseits war

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Koeffizienten $i - k$ bestimmen; man findet die Bestimmungsgleichungen $i_k^2 = 1$, $i_k i_l = -i_l i_k$, aus denen hervorgeht, dass die $i$ keine gewöhnlichen Zahlen sind. Sie wurden bereits im Jahre 1878 von Clifford untersucht und heißen hyperkomplexe Einheiten. Es fällt nicht schwer, Matrizen anzugeben, welche diesen Forderungen genügen.

Aus der speziellen Relativitätstheorie folgt noch $ds = ic\beta dt$. Setzt man beide Ausdrücke für $ds$ gleich, dann ergibt sich $i_k \dot{x}_k = tc\beta$.
Aus dieser Gleichung gewinnt man dann durch die "Übersetzung" die Diracgleichung. Befindet sich das betrachtete Teilchen, ein Elektron von der Ladung $e$ und der in Energie umgerechneten Ruhmasse $E_0$ in einem elektromagnetischen Feld, das wie üblich durch ein vierdimensionales Potential $\Phi_k$ beschrieben sei, so nimmt die Diracgleichung die Form an

$$\left[ i_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{2\pi i e}{hc} \Phi_k \right) \pm \frac{2\pi}{hc} E_0 \right] \Psi = 0$$

Das doppelte Vorzeichen tritt auf, wenn man bei $\beta$ von beiden Vorzeichen Gebrauch macht.

Nach der hier gegebenen Herleitung kann es nicht überraschen, wenn diese Gleichung Lorentz-Transformationen gegenüber invariant ist und damit den Forderungen der Relativitätstheorie genügt, mithin wirklich einen Schritt auf dem gewünschten Wege darstellt. Sie bedeutet aber noch in anderer Hinsicht einen Fortschritt, weil sie es ermöglicht, bestimmte spektroskopische Beobachtungen zu erklären.

Schon auf der "Entdeckungsfahrt" hatten wir gesehen, dass ein Atom Energie nur brockenweise schlucken und abgeben kann; diese Energiebrocken waren ja die Photonen, und aus den gemessenen Wellenlängen kann man Rückschlüsse auf die möglichen Energiewerte ziehen, welche das Atom besitzen kann - auf seine Energieniveaus, wie man sich ausdrückt.
Nun hatte sich herausgestellt, dass die alte Quantentheorie die Beobachtungen der Spektroskopiker nur in groben Zügen richtig wiedergab. Um die beobachteten Abweichungen zu erklären, nahmen Goudsmit und Uhlenbeck 1925 an, die Elektronen besäßen einen gewissen "Spin" , das heißt sie kreiselten ständig um ihre eigene Achse, so wie die Erde zwar um die Sonne läuft, sich aber überdies um ihre eigene Achse dreht.
Dank ihres Spins besitzen die Elektronen also eine zusätzliche Rotationsenergie und überdies gewisse magnetische Eigenschaften. Die Uhlenbeck-Goudsmitsche Annahme erwies sich als überaus erfolgreich. Freilich war sie nur eine für diesen besonderen Zweck eingeführte Arbeitshypothese; erst Dirac konnte sie durch seine Gleichung in einer Theorie verankern und dem Spin damit wahrhaftes Bürgerrecht in der Physik verschaffen.

Freilich hat diese Theorie eine sehr überraschende, beinahe unangenehme, ja gespenstische Folgerung. Sie ergab sich schon in der allerersten Vorläuferin der Diracgleichung, die Kudar und Schrödinger im Jahre 1926 entdeckt haben, und besagt, dass es freie Elektronen von negativer Gesamtenergie gibt, ja noch mehr, dass Übergänge zwischen den gewöhnlichen positiven Energieniveaus und diesen negativen möglich sind.

Was sollen aber Elektronen mit negativer Gesamtenergie physikalisch bedeuten? Dirac bemerkte dazu, dass sie sich, mathematisch betrachtet, ähnlich verhalten wie Teilchen von positiver Ladung und positiver Gesamtenergie. Er hätte daraufhin geradezu eine neue Art von Elementarteilchen fordern müssen mit der Masse des Elektrons und einer positiven Ladungseinheit, die heute Positronen heißen, wagte es aber zunächst nicht, sondern legte sie als Wasserstoffkerne aus, trotz deren rund 1850 mal zu großer Masse.
Wenige Jahre später entdeckte dann Anderson experimentell die Positronen. Der Fall aber, dass aus mathematischen Formeln neue Elementarteilchen vorhergesagt wurden, blieb nicht vereinzelt und berechtigt, von einer Magie der Formel zu reden.

Allerdings sah sich Dirac, um der Stabilität des Wasserstoffatoms Rechnung zu tragen, gezwungen, eine Annahme zu machen, die recht befremdend wirkt. Er nahm an, dass alle negativen

Energieniveaus von Elektronen besetzt sind und nur ausnahmsweise verlassen werden. Entrinnt ein Elektron den negativen Niveaus, so tritt es als gewöhnliches Elektron in Erscheinung; die Diracwelle soll aber der Lücke zugeordnet sein, welche das ausgerissene Elektron hinterlässt.

Diese Lücke zeigt sich als Positron. Danach bilden die Elektronen negativer Gesamtenergie ein Geisterreich, das sich physikalisch in keiner Weise offenbart, im Gegensatz zu den spukenden Geistern, den ausgerissenen Elektronen. Stimmt diese Ansicht, so müssen Elektron und Positron, das ausgerissene Elektron und die von ihm hinterlassene Lücke, gleichzeitig auftreten, eine Folgerung, die experimentell beobachtet und damit bestätigt werden konnte.

Wenn man will, kann man in der Diracschen Theorie den Anfang einer Quantenelektrodynamik erblicken, die jedoch nie über Ansätze hinauskam, obwohl sehr namhafte Physiker bemüht waren, sie zu entwickeln. Es verhält sich damit wie mit der Kernphysik, die trotz bedeutender Teilerfolge ebenfalls noch aussteht und auf die jetzt näher eingegangen sei.

Um die Vergänglichkeit erster Ansätze richtig beurteilen zu können, empfiehlt es sich, den Weg zu überblicken, auf dem man zu den heute herrschenden Ansichten gelangte.
Man dachte sich die Welt schon im Altertum aus einfachsten Teilchen aufgebaut, die man als unteilbar annahm und Atome nannte, was auf deutsch "unteilbar" bedeutet. Zwei Jahrtausende lang war dann mehr die Spekulation am Werk als die exakte Forschung.
Erst mit Prout dämmerte im Jahre 1815 die Ansicht auf, dass die Atome aus Wasserstoff aufgebaut sind und dass man darum mit Recht von einer "Anatomie des Atoms" reden darf. Das Bestreben der Alchimisten, chemische Elemente ineinander umzuwandeln, wäre danach nicht ganz so aussichtslos gewesen, wie es ihre Nachfolger, die Chemiker, lange Zeit hindurch gelehrt haben, aber erst durch die Entdeckung der Radioaktivität wurde es zur unumstößlichen Gewissheit, dass es solche Umwandlungen wirklich gibt.

Diese Entdeckung verlief ebenso spannend wie ein Kriminalroman. Den Auftakt bildete ein Gespräch zwischen zwei Unsterblichen, den Mitgliedern der Französischen Akademie Henri Poincaré und Henri Becquerel, nach der Sitzung am 20. Januar 1896, in der Poincaré über die eben abgeschlossenen Versuche von Röntgen berichtet hatte. Röntgen war es gelungen, unsichtbare Strahlen von bedeutend kürzerer Wellenlänge zu erzeugen, als sie gewöhnliches Licht besitzt. Dazu wurde durch eine beinahe luftleere Glasröhre elektrischer Strom gesandt, wobei vom negativen Pol Elektronen mit großer Geschwindigkeit gegen die Wandung fliegen. Dort wird ihre Geschwindigkeit vernichtet, nicht aber ihre Energie, weil diese ja nie verlorengeht, sondern nur die Erscheinungsform ändert, und gerade diese neue Energieform entdeckte Röntgen in den nach ihm benannten Strahlen.

Die beiden Henris wurden sich sofort einig, dass man planmäßig untersuchen müsste, bei welchen Fluoreszenzerscheinungen, das heißt bei welcher Umwandlung von Strahlung, noch ähnlich kurzwellige Strahlen auftreten. In seinem recht bescheidenen Laboratorium im Cuvier-Haus stellte Becquerel daraufhin Versuche mit Uransalzen an.
Er setzte sie den Sonnenstrahlen aus und erreichte so tatsächlich die Schwärzung von photographischen Platten, die gegen gewöhnliches Licht geschützt waren. Es schien also, als ob die Uransalze tatsächlich beim Fluoreszieren kurzwellige Strahlen erzeugten.

Bald sollte es sich aber zeigen, dass die Schwärzung eine ganz andere Ursache hatte. Heute hätten wir das voraussagen können, denn wir wissen, dass einerseits die Lufthülle sehr kurzwellige Strahlen nicht durchlässt, dass andererseits bei der Fluoreszenz niemals Strahlen von geringerer Wellenlänge als das erregende Licht besitzt, entstehen können. Das zur Erde gelangende Sonnenlicht kann sich also nicht in Röntgenstrahlen verwandeln, um die Platten zu schwärzen.

Als Becquerel seine Versuche fortsetzen wollte, musste er sie abbrechen, denn es zogen Wolken auf, und so blieb das Wetter mehrere Tage lang. Am 1. März entwickelte er eine zu den Versuchen vorbereitete und in einem Schrank in der Nähe von Uransalzen die Tage hindurch aufbewahrte Platte, auf der sich dann zwei schwarze Flecken vorfanden.
Diese historische Platte wird heute noch im gleichen Laboratorium aufbewahrt. Damit war die Radioaktivität der Uransalze entdeckt; die schwärzenden Strahlen mussten aus den Salzen selber kommen, und bald darauf konnte Becquerel feststellen, dass sie dem chemischen Element Uran entstammten. Uns läge es heute nahe, die Strahlungsquelle in den Atomen des Elements zu suchen, aber damals tappte man ja noch völlig im Dunkel - man schickte sich zögernd an, ein unbekanntes neues Reich zu betreten.

Es dauerte volle zwei Jahre, bis Frau Sklodowska-Curie, ehemalige Mitarbeiterin von Becquerel, im Rahmen einer der Französischen Akademie am 12. April 1898 vorgelegten Arbeit für das Element Thorium zu dieser Vermutung gelangte.

Wie ist die Radioaktivität zu erklären?
Lord Rutherford gab die erste Antwort durch seine Konzeption eines neuen Atommodells. Danach stellt jedes Atom ein Miniatursonnensystem dar, worin die Elektronen als Planeten um den Atomkern als Sonne kreisen. Heute halten wir dies Modell für zu grobanschaulich; es leistet als Bild aber immer noch seine Dienste, und der Grundzug seines Aufbaus aus einem kleinen, schweren Atomkern und einer leichten Atomhülle aus Elektronen darf als gesichert gelten.

Der Atomkern ist der Träger der chemischen Eigenschaften des Atoms. Er ist selber zusammengesetzt aus Elementarteilchen, die durch gewaltige Energien zusammengehalten werden. Bei den radioaktiven Elementen wie Uran oder Radium, die ja am Ende des periodischen Systems der Elemente stehen, ist der Kern besonders schwer, er enthält besonders viele Elementarteilchen - beim Uran sind es mindestens 236 Stück -, und offenbar sind diese verwickelten Gebilde auf die Dauer nicht lebensfähig.
Früher oder später "zerfällt" der Kern, wie man früher sagte - er wandelt sich um, wie es besser heißt, indem er ein Elementarteilchen aus dem Verband entlässt. Damit ändern sich natürlich auch seine chemischen Eigenschaften: aus einem Element wird also durch den radioaktiven Zerfall ein anderes. Die gewaltigen Energien, die dabei frei werden, äußern sich in der unerhörten Wucht, mit welcher das Teilchen fortgeschleudert wird; sie messen nach Millionen von Elektronenvolt.

Das Elektronenvolt, abgekürzt eV, ist eine der Atomphysik gut angepasste Energieeinheit. 1 eV entspricht der Energie. welche ein Elektron gewinnt, wenn man es mit Hilfe eines Spannungsgefälles von 1 Volt beschleunigt. Um die Größenordnung der radioaktiven Energien zu erreichen, muss man also Spannungen von Millionen Volt verwenden.

Man konnte zunächst drei Strahlenarten unterscheiden: Bei den Alpha-Strahlen wird ein schweres Teilchen, ein Helium-Atomkern, fortgeschleudert. Bei den Beta-Strahlen handelt es sich um gewöhnliche negative Elektronen; und endlich werden mitunter noch Photonen frei, Gamma-Strahlen, die ihrer großen Energie entsprechend sehr kurzwellig sind, kurzwelliger als die härtesten Röntgenstrahlen, die wir heute herstellen.

Die Umwandlung der natürlich radioaktiven Elemente geschieht spontan, ohne unser Zutun, mit stets gleichbleibender Geschwindigkeit, die sich weder erhöhen noch verringern lässt. Seit einiger Zeit sind wir aber in der Lage, auch die normalerweise inaktiven, beständigen Elemente, zum Beispiel durch Beschießen mit Wasserstoff- oder Heliumkernen, zur Umwandlung zu zwingen und sie künstlich radioaktiv zu machen. Bei dieser künstlichen Radioaktivität treten bemerkenswerterweise auch andere Zerfallsprodukte auf, zum Beispiel Positronen oder auch ungeladene Elementarteilchen von der Masse des Protons, die 1932 entdeckten Neutronen.

Gerade mit Hilfe der künstlichen Radioaktivität sind wir schon ziemlich weit in die "Kernchemie" eingedrungen - das heißt, wir können die Elemente in fast erstaunlicher Weise ineinander umwandeln, und es hat sich auch schon eine Reihe von empirischen Gesetzen herausgeschält, welche diese Umwandlungen beherrschen. Mit der Kernphysik steht es leider weniger günstig.

Noch immer wissen wir nicht mit Gewissheit, aus welchen Elementarteilchen und vor allem wie der Atomkern aufgebaut ist. Die heute meist verwendete, von Heisenberg befürwortete Arbeitshypothese lautet: "Als selbständige Teilchen existieren im Kern nur Protonen und Neutronen. Elektronen und Positronen sind im Kern nicht fertig vorgebildet, sie entstehen vielmehr erst im Augenblick der Emission durch einen mit der bisherigen Theorie nicht beschreibbaren Prozess, bei dem gleichzeitig nach dem Erhaltungssatz der Ladung ein Neutron in ein Proton umgewandelt wird oder umgekehrt."

Die Neutronen sind, wie gesagt, ungeladene Elementarteilchen von der Masse des Protons. Die ganze elektrische Ladung des Atomkerns, die für die chemischen Eigenschaften bestimmend ist, würde danach allein von den Protonen herrühren. Damit wird der Gedanke von Prout weitergeführt, ohne freilich denselben Grad der Sicherheit beanspruchen zu können wie die Ansichten über den Aufbau der Atomhülle.

Ein Aufbau des Kerns aus lauter schweren Teilchen weist den Vorzug auf, dass man nach einer weiteren Annahme die nichtrelativistische Quantenmechanik anwenden darf. Diese Annahme überträgt die Gleichheit potentieller und kinetischer Energie von der Atomhülle, wo sie sich gut bewährte, auf den Atomkern.
Die potentielle Energie hält die Protonen und Neutronen zusammen, bindet sie aneinander und heißt deshalb Bindungsenergie. Man bestimmt sie aus dem Fehlbetrag der Kernmasse. Aus der Anzahl der aufbauenden Protonen und Neutronen kann man nämlich zunächst berechnen, wie groß die Kernmasse sein müsste, um dann festzustellen, dass sie in Wirklichkeit etwas geringer ausfällt. Schuld daran trägt die Bindungsenergie, die negativ ist und der folglich eine negative Masse entspricht.

Auf Grund dieser Annahme ergeben sich für schwere Teilchen im Kern Geschwindigkeiten, die nicht allzu groß ausfallen, während sie für Elektronen so groß wären, dass man unbedingt relativistisch rechnen müsste. Leider scheint sich jedoch das Bild eines Kerns, der aus lauter schweren Teilchen aufgebaut ist, nicht durchführen zu lassen, wenn man auf die Kräfte eingeht, die zwischen Proton und Neutron wirken, weil sie nach heutigen Vorstellungen von einem ständigen Austausch von Elektronen herrühren, die man vergeblich für nur "virtuell" anwesend zu erklären versuchte.

Man gelangt so zu der Überzeugung, dass es sich um einen provisorischen Vorschlag handelt, dem freilich großartige Erfolge nichtabzustreiten sind. Indessen sind sie auch auf dem Boden älterer Vorstellungen, die den Kern aus Protonen und Elektronen aufgebaut dachten, gut gediehen. So glückte es schon frühzeitig, die Radioaktivität in ihren Hauptzügen befriedigend zu erklären. Wenn aber diese Erklärung mit Hilfe eines Gedankengutes, das aus der Atomhülle herrührt, gelingt, dann beweist das überzeugend, wie wenig man in die spezifische Kernphysik eingedrungen ist.

Die Zukunft wird es lehren - vielleicht schon die nahe Zukunft.
Es handelt sich hier wirklich um das Kernproblem der heutigen Physik, um das zäh und erbittert gerungen wird und zu dem man sich ständig neues Versuchsmaterial zu beschaffen müht. Überall werden große und größte Institute errichtet, die sich ausschließlich dieser Aufgabe widmen. Es gibt darin Apparate, die phantastischen Ungeheuern gleichen, während gerade die leistungsfähigsten, die Zyklotronen, fast unscheinbar aussehen.

Nach so verschiedenen Prinzipien sie auch arbeiten, sie alle dienen dazu, Teilchen so weit zu beschleunigen, dass sie in die widerspenstigsten Atomkerne eindringen und sie zur Umwandlung zwingen. Damit treten diese Apparate in einen erfolgreichen Wettbewerb mit dem Radium, und die zahlreichen neuen Kernreaktionen sind geeignet, uns immer tiefere Einblicke in den Bau des Atomkerns zu gewähren.
Sie lassen die Hoffnung aufkommen, dass es einst gelingen wird, die in den Atomkernen schlummernden Riesenenergien aus ihrem Dornröschenschlaf zu befreien und technisch nutzbar zu machen, wenn auch dieses goldene Zeitalter der Technik noch in erheblicher Ferne zu sein scheint. Es geht nicht nur um theoretische Einsichten sondern um das Schaffen ganz gewaltiger neuer Werte, die das Aussehen der Welt völlig umzugestalten versprechen.

## 3.7 Jede Dezimale - ein neues Weltbild!

Wir sind am Ende. Auf unserer "Entdeckungsfahrt"haben wir die Entwicklung der Physik während der letzten drei Jahrhunderte verfolgt: drei Jahrhunderte unablässiger Bemühung, das Wesen der materiellen Welt zu erforschen. Und als Summe dieser höchsten Anstrengung menschlichen Scharfsinns ergibt sich heute - eine offene Frage!

Es wäre verwunderlich, wenn es anders wäre. Eine Zauberformel, welche uns die gesamte Wirklichkeit erschließt, eine "Entschleierung aller Welträtsel" , wie sie uns Spekulanten und Phantasten großzügig anbieten, gibt es nicht und wird es niemals geben. Selbst der Laplacesche Dämon, falls er existierte, könnte sie nicht liefern - einfach, weil er zu wenig Quantenmechanik gelernt hat: sein Reich ist nicht von dieser Welt, es ist das Reich der klassischen Mechanik, deren Gültigkeitsgebiet heute stark eingeschränkt erscheint.
Wann immer die Wissenschaft sich der endgültigen Lösung nahe glaubte, stets wurde sie durch die Macht der Tatsachen, der neuen Entdeckungen dazu gezwungen, ihre Ansprüche zurückzuschrauben und nach neuen Wegen zu suchen. Ja gerade die Zeiten, in denen das alte Wissen scheinbar am bedrohlichsten wankt, sind die wahrhaft großen Zeiten der Physik - die Geburtsepochen neuer Erkenntnisse.

Also ein hemmungsloser Wechsel in unserer Wissenschaft, ein Treiben ohne Halt und Pol? Nein. In doppelter Hinsicht rechtfertigt sich der eingeschlagene Weg. Einmal wächst die Summe unserer tatsächlichen Erkenntnisse immer weiter, ja heute in fast unglaubwürdig beschleunigter Geschwindigkeit.
Wir wissen unvergleichlich viel mehr als unsere Vorgänger, und diese experimentell festgestellten Einzeltatsachen bleiben unberührt vom Wandel in der Physik; ein sichtbares äußeres Zeichen dafür ist die ständig wachsende, ebenfalls ins Unglaubwürdige gesteigerte technische Beherrschung der: Natur - und Technik ist ja nichts als angewandte Wissenschaft. Die beiden stehen im Verhältnis von Mutter und Kind zueinander, wenn auch dieses Kind schon längst mündig ist.

Was sich ändert, sind lediglich die Deutungen der Einzeltatsachen, die Theorien, mit deren Hilfe wir die Einzeltatsachen verknüpfen - kurz, das physikalische Weltbild. Man macht der heutigen Zeit mitunter den Vorwurf, sie habe das gute, alte, fest gefügte Weltbild der klassischen Physik mutwillig zerstört.
Unserer Meinung nach aber zeigt die Entwicklung der Wissenschaft - und hierin liegt die zweite Rechtfertigung - über die Jahrhunderte hinweg eine durchaus folgerichtige Linie, um es kurz zu sagen: sie führt vom anthropomorphen Standpunkt fort und zum Wesen der Dinge hin. Das ist eine etwas kühne Behauptung, gegen die vor allem die Philosophen protestieren werden. Indessen beschränken wir uns hier allein auf physikalische Erwägungen und können philosophische Einwände, die auf einer anderen Ebene liegen, füglich außer acht lassen.

Die Physik ging vom anschaulich Gegebenen aus - von Kräften wie Zug und Druck, vom Stoß, vom freien Fall der Körper, von einfachen Maschinen wie Hebel und schiefe Ebene. Schon Galilei, der Begründer unserer Wissenschaft, wies die Richtung, in der ein Fortschritt sich vollziehen sollte. Er schälte aus dem anschaulich vorliegenden Tatbestand die wesentlichen Begriffe heraus, die zur angemessenen Beschreibung notwendig waren, und befreite sie von den zufälligen, die "reine" Erscheinung überdeckenden Nebeneinflüssen, so wie ein Restaurator die Urgestalt eines alten Bildes aus dem Wust der nachträglichen, zufälligen Hinzutaten befreit und in ihrer klaren, wesentlichen Form hervortreten lässt.

Newton gelang die großartige Konzeption der allgemeinen Massenanziehung und die Auffindung

des Bewegungsgesetzes. Damit war der Kraftbegriff auf das wesentliche zurückgeführt; es war nicht mehr notwendig, Planetengeister anzunehmen, welche die Wandelsterne in ihren Bahnen herumführten, sondern das leistete die nach einfachen Gesetzen in die Ferne wirkende Gravitation.
Zwar ist der Begriff einer Fernkraft dem Denken des Menschen unheimlich geblieben und wurde später erfolgreich durch die Feldvorstellung abgelöst, die elektromagnetische Kräfte als Zustandsänderungen auffasste, die sich in Feldern fortpflanzen, also als Nahewirkungskräfte. Aber was haben diese neuen Vorstellungen noch mit den anthropomorphen Ausgangsbegriffen zu tun, mit den uns allen vom Alltag, von unserer Muskelarbeit her vertrauten Kräften?
Nein, sie entfernen sich nur noch weiter von diesem Ausgangspunkt - sie sind zunächst noch unanschaulicher und werden erst durch lange Gewöhnung vertraut.

Einen weiteren Schritt in dieser Richtung bedeutet die Auflösung der Gravitation in der "Weltgeometrie" - also ebenfalls in einem Feld. Über die Natur der quantenmechanischen Kräfte, etwa im Inneren des Atomkerns, können wir uns heute noch gar keine Vorstellung machen.
Hand in Hand damit gingen Veränderungen im mathematischen Rüstzeug des Physikers. Die klassische Mechanik bedarf der Infinitesimalrechnung und der euklidischen Geometrie. Später bezweifelte man, ob die einfache, "anschauliche" euklidische Geometrie wirklich auf unsere Welt zutrifft. Gauß stellte sein berühmtes Experiment an, Riemann fragte nach dem Zusammenhang von Geometrie und physikalischer Welt, und die Verfeinerung der alten Mechanik, die Relativitätstheorie, welche diesen Zusammenhang wirklich herstellt, benutzt die Tensorrechnung und Begriffe aus der Riemannschen Geometrie. Die Quantenmechanik geht gar von vierdimensionalen Räumen zu solchen mit unendlich viel Dimensionen, zum Hilbert-Raum über und verwendet die Operatorenrechnung in größter Allgemeinheit.
Die mathematischen Mittel werden, so scheint es, immer abstrakter.

Wir haben jedoch wiederholt die Auffassung vertreten, dass auch die verwickeltsten Begriffsbildungen Anschaulichkeit gewinnen, sobald sie uns geläufig geworden sind. Was zunächst abschreckt, sind ja die "Formeln" , die neuartige, häufig umständliche Bezeichnungsweise; die Grundgedanken aber sind meist einfach und übersichtlich - und man lernt eben, wie schon gesagt, allmählich trotz der vielen Bäume den Wald sehen! Wenn Gauß die Pflege der räumlichen Anschauung empfohlen hat, dann war er dabei sicher nicht der Ansicht, sie sei uns in bestimmter Form angeboren - er meinte vielmehr, dass sie sich durch Übung entwickeln lasse, und das liegt ganz im Sinne unserer Ausführungen.

Man erkennt, dass auch hier die Entwicklung in der vorhin angedeuteten Richtung verläuft. Die Mathematik ist und bleibt die der Physik angemessene Sprache, und die zunehmende Mathematisierung unserer Wissenschaft bedeutet nichts anderes, als dass man sich von den zufälligen Gegebenheiten des Ausgangspunktes befreit - von der Bindung an einfachste, "anschauliche" Begriffe - und die Sprache den neuen Begriffsbildungen immer besser anpasst.
Es kann nicht bestritten werden, dass die Wissenschaft damit zunächst schwieriger erscheint; aber es kann auch nicht bestritten werden, dass der Wissensstoff der obersten Schulklasse umfangreicher ist und einen anderen Formalismus verlangt als der der untersten - woran sich noch niemand gestoßen hat.

Wenn jemand forderte, die leitenden Gedanken einer Theorie müssten sich ohne Mathematik, ohne Formeln darstellen lassen, so geben wir ihm auch heute noch durchaus recht. Zum fachlich exakten, bis ins einzelne zahlenmäßig durchgeführten Aufbau ihrer Theorien kann die Physik freilich der Formeln nicht entraten und konnte es niemals. Was sich allgemeinverständlich mitteilen lässt, sind allein die Grundgedanken. Unter einer Voraussetzung freilich: diese

Grundgedanken müssen auch dem Physiker vollkommen klar sein.

Es ist vielleicht aufschlussreich, hier noch abschließend einen kurzen Rückblick auf die geschichtliche Entwicklung zu werfen.
Man kann die Physik nach den Bausteinen ausrichten, aus denen sie sich jeweils die Welt aufgebaut dachte. In der klassischen Mechanik sprach man von materiellen Punkten - was offensichtlich eine Modellverstellung bedeutet, wie denn überhaupt schon die klassische Mechanik ein sehr abstraktes Gebäude darstellt, dessen Übertragung auf die Wirklichkeit durchaus nicht immer gelingt. Dieses Gebäude ist, wie wir heute wissen, eine unerlaubte Extrapolation, denn es fordert absolut genaue Angaben, während diesen doch von vornherein Grenzen gesetzt sind. Ja jede neue Dezimale stellt einen Triumph der Messkunde dar - und verlangt ihrerseits ein neues Weltbild!

Die Atomphysik hat dann aus den materiellen Punkten Elementarteilchen gemacht. In der frühesten Fassung hatten diese viel Ähnlichkeit mit ihren Vorgängern. Man sollte sie sich als winzigste Materiebrocken vorstellen, die sich zu einem bestimmten Augenblick an einem ganz bestimmten Ort aufhielten. Die neueste Entwicklung brach mit dieser Vorstellung.
Nach de Broglie und seinen Nachfolgern haben wir uns die Elementarteilchen als Materiewellen vorzustellen, die einer bestimmten Gleichung, der Schrödingergleichung, gehorchen. Und statt der früheren Gewissheit liefert uns die Schrödingergleichung nur noch eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, das durch die Materiewelle repräsentierte Teilchen irgendwo anzutreffen.
Damit hat unser Denken jahrtausendealte Fesseln gesprengt. Wir haben erkannt, dass der Begriff eines Elementarteilchens nach Art der alten Atome offenbar zu eng für die physikalische Wirklichkeit ist. Immer wieder stoßen wir auf einen merkwürdigen, tiefgreifenden Dualismus von Welle und Korpuskel; nur eine Art Zwitter aus beiden Begriffen kann heute die Beobachtungstatsachen einwandfrei erklären, muss demnach der Theorie zugrunde gelegt werden.

Soll man sich dabei beruhigen? Die meisten Physiker werden heute zugeben, dass der Umdenkungsprozess noch keineswegs abgeschlossen ist, ja vielleicht erst in den allerersten Anfängen steckt. Schon diese sind aber in ihrer Kühnheit überwältigend.
Der frühere Satz von der Erhaltung der Energie gilt in der Physik noch für eine höhere Einheit, in der Stoff und Energie zusammenzufassen sind, während der Techniker noch mit der alten Fassung des Satzes auskommt. Zu dieser neuen Fassung zwingt uns die Vorstellung des Positrons, das sich ja auf Kosten von Energie "materialisiert" . Beim Verschwinden eines spukenden Geistes lernten wir auch den umgekehrten Prozess kennen, bei dem Stoff, ein Elektron, verschwindet, Und an Stelle dessen Strahlung, also Energie entsteht. Den Wert $c^2$ kann man geradezu als Schlüssel für die Umrechnung von Stoff in Energie betrachten, als Stoffäquivalent.

Wir erleben heute eine Physik im Werden. die zwar schon erstaunliche Erfolge brachte, aber doch durchaus noch im Fluss ist. Gerade die Schwierigkeiten, denen die Kernphysik sich gegenüber sieht, legen die Vermutung nahe, dass noch ein weiteres Umdenken des grundlegenden Begriffs "Elementarteilchen" notwendig sein wird.
Es kann deshalb nicht wundernehmen, wenn man bei dem Versuch, die neue Physik anschaulich zu beschreiben, oft genug alte, unzulängliche Begriffsbildungen verwenden muss, wenn man auf Paradoxien, ungelöste Fragen und fremdartige Vorstellungen stößt und sich kein so einfaches Weltbild entwerfen lässt wie früher.
Aber wir halten das eher für einen Vorteil als für einen Nachteil: es beweist, dass die Physik heute lebendiger ist denn je. Und wir alle sind Zeugen ihrer Neugeburt - wir erleben in dieser heiß umkämpften Wandlung eines der großartigsten Schauspiele, die die Geschichte der Wissenschaften kennt!

# 4 Zeittafel

Am Anfang war die Mathematik, mit Ahmes beginnend, zu der sich dann sehr viel später die Physik gesellte. Der erste, der es verdient, Physiker genannt zu werden, war Galilei. Mitte des vorigen Jahrhunderts entstand eine neue Gattung von Physikern, der Theoretiker.

| | |
|---|---|
| Ahmes | um 1650 v. Ztw. |
| Euklid | um das 3.Jahrh. v. Ztw. |
| Archimedes | 287-212 v. Ztw. |
| Leonardo da Vinci | 1452-1519 |
| Geronimo Cardano | 1501-1576 |
| Nicolo Tartaglia | 1506-1559 |
| Galileo Galilei | 1564-1642 |
| Johannes Kepler | 1571-1630 |
| Bonaventura Cavalieri | 1591-1647 |
| René Descartes | 1596-1650 |
| Piere de Fermat | 1601-1665 |
| Blaise Pascal | 1623-1662 |
| Christian Huygens | 1629-1695 |
| Sir Isaac Newton | 1643-1727 |
| Gottfried Wilhelm Leibniz | 1646-1716 |
| Jakob Bernoulli | 1654-1705 |
| Johann Bernoulli | 1667-1748 |
| Pierre Louis Moreau de Maupertuis | 1698-1759 |
| Daniel Bernoulli | 1700-1782 |
| Leonhard Euler | 1707-1783 |
| Jean le Rond d'Alembert | 1717-1783 |
| Joseph Louis Lagrange | 1736-1813 |
| Piere Simon Laplace | 1749-1827 |
| Karl Friedrich Gauß | 1777-1855 |
| Hans Christian Oersted | 1777-1851 |
| Augustin Jean Fresnel | 1788-1827 |
| Augustin Louis Cauchy | 1789-1857 |
| Michael Faraday | 1791-1867 |
| Gaspard Gustave Coriolis | 1792-1843 |
| Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij | 1793-1856 |
| Niels Henrik Abel | 1802-1829 |
| Johann von Bolyai | 1802-1860 |
| Sir William Rowan Hamilton | 1805-1865 |
| Robert Bunsen | 1811-1899 |
| Évariste Galois | 1811-1832 |
| Julius Robert Mayer | 1814-1878 |
| Hermann von Helmholtz | 1821-1894 |
| Lord William Kelvin | 1824-1907 |
| Bernhard Riemann | 1826-1866 |
| Richard Dedekind | 1831-1916 |
| James Clerk Maxwell | 1831-1879 |
| Ernst Mach | 1838-1916 |

| | |
|---|---|
| Ludwig Boltzmann | 1844-1906 |
| Wilhelm Konrad Röntgen | 1845-1923 |
| Felix Klein | 1849-1925 |
| Hendrik Antoon Lorentz | 1853-1928 |
| Henri Poincaré | 1854-1912 |
| Heinrich Hertz | 1857-1894 |
| Max Planck | * 1858 |
| David Hilbert | 1862-1943 |
| Philip Lenard | * 1862 |
| Marie Sklodowska-Curie | 1867-1934 |
| Lord Ernest Rutherford | 1871-1937 |
| Henri Lebesgue | * 1875 |
| Niels Bohr | * 1885 |
| Erwin Schrödinger | * 1887 |
| Prinz Louis Victor de Broglie | * 1893 |
| Werner Heisenberg | * 1901 |
| Paul Adrien Maurice Dirac | * 1902 |

# 5 Quellennachweis

Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Seiten im Text.

[4] Gustav Kirchhoff erklärt in seinem Lehrbuch der Mechanik, 1874, Aufgabe der Wissenschaft sei, "die Naturerscheinungen nicht zu erklären, sondern vollständig und in der einfachsten Weise zu beschreiben" , Ernst Mach erblickt seit 1872 die Natur der Wissenschaft in einer Wirtschaftlichkeit des Denkens, beide begnügen sich also mit einfachen Feststellungen. Meine Erklärung, Wissenschaft sei einsatzbereites Wissen, geht mit ihrer Zielsetzung darüber hinaus.

[4] Johannes Kepler veröffentlichte seine beiden ersten Gesetze in der Astronomia nova de motibus stellae Martis, 1609, das dritte Gesetz in Harmonices mundi, 1619.

[6] Die Aufgabe geht auf Claude Caspar Bacher de Méziriac in Problémes plaisans et délectables, qui se font par les nombres, 1624, zurück.

[7] Um das Hebelgesetz herzuleiten, vervollständigte ich eine Betrachtung von Joseph Louis Lagrange aus der Mécanique analytique, 1788, die sich im Keim schon bei Galilei findet.

[13] Die Bedeutung von virtuellen Verschiebungen hob Johann Bernoulli in einem Brief vom 26. Januar 1717 hervor.

[14] Die angeführte Stelle befindet sich im Supplementband der Werke von Karl Gustav Jakob Jacobi.

[23] Nicola Tartaglia in Nova scientia, 1537.

[23] Die Ergebnisse des Galileo Galilei findet man in seinem Werk Discorsi e dimostrazioni matematiche, 1638, zusammengefasst.

[31] Ohne den erlösenden Gedanken, das Anziehungsgesetz zur Kennzeichnung der Inertialsysteme heranzuziehen, würde man sich aussichtslos mit dem Begriffsungeheuer eines absoluten Raumes herumschlagen. Es ist nicht ohne Gewinn, solche verfahrenen Situationen zu studieren, darum sei auf das Werk von Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, verwiesen, namentlich auf die Seiten 216 bis 287 der 7. Auflage, 1912. Sie lieferten wertvolle Anregungen für die moderne Physik.

[40] Fritz Kliem übertrug 1914 die von Sir Thomas Little Heath mit modernen Bezeichnungen herausgegebenen Werke des Archimedes ins Deutsche.

[41] Das Wort "indivisibile" prägte Bredwardin oder in anderer Schreibweise Thomas de Bradwardinus in einer Handschrift Tractatus de continuo, die Max Curtze im Supplementheft zum 13. Band der Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgab.

[41] Das angeführte Werk von Bonaventura Cavalieri führt den Titel Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, 1653.

[42] Das für die Infinitesimalrechnung bedeutsame Werk von Kepler heißt Stereometria doliorum, 1615.

[43] Leibniz schilderte im April des Jahres 1703 in einem Brief an Jakob Bernoulli ausführlich Blaise Pascals und seinen eigenen Anteil an der Entdeckung des charakteristischen Dreiecks. Später machte man geltend, dass dieser Brief zu einer Zeit geschrieben wurde, die keine Kontrolle mehr für die Richtigkeit gewisser darin enthaltener Behauptungen erlaubte, die für den Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton wichtig seien.

[45] Augustin Louis Cauchy gab in seinem Lehrbuch Cours d'Analyse, 1821, die erste einwandfreie Grenzwerttheorie.

[63] Mitteilung von Planck.

[76] Leonhard Euler verallgemeinerte die im Text behandelte Frage und legte seine Ergebnisse 1736 der Petersburger Akademie vor.

[80] Ernst Zermelo gab im Jahre 1932 die Gesammelten Abhandlungen Georg Cantors, der die Mengenlehre systematisch entwickelt hat, heraus. Außerdem gewährt der Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind, der im 618. Heft der Sammlung Actualités scientifiques et industrielles, 1937, erschien, einen guten Einblick in die allmählichen Fortschritte von Cantor, den die reife Kritik Dedekinds entscheidend gefördert hat. Als Einführung eignet sich die Mengenlehre von Erich Kamke, die als Band 999 der Sammlung Göschen 1928 herauskam.

[87] Eine lehrbuchmäßige Darstellung bilden die beiden Bände Moderne Algebra von Bartel Leendert van der Waerden.

[87] Worte von Hieronymus Cardanus aus seinem Werk Artis magnae seu de Regulis Algebraicis über unus, qui est operis de Arithmetica, quod opus Perfectum inseripsit, decirnus, 1545.

[87] Gottfried Wilhelm Leibniz in der von Otto Menke 1682 ins Leben gerufenen Zeitschrift Acta Eruditorum.

87] Das genannte Prinzip stellte Hermann Hankel 1867 in seiner Theorie der complexen Zahlensysteme auf.

[87] Caspar Wessel, Om Directionens analytiske Betegning, 1797, in französischer Übersetzung Essai sur la représentation de la direction, 1897.

[89] Der Begriff eines Normalteilers spielt in der Galoisschen Theorie eine ausschlaggebende Rolle, wie aus dem Brief, den Galois am Vorabend seines Todes an seinen Freund Auguste Chevalier schrieb, klar hervorgeht. Dieser Brief erschien im Septemberheft der Revue encyclopédique, 1832.

[89] Bei seinen Untersuchungen, ob die Fermatsche Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen lösbar ist, führte Ernst Eduard Kummer 1847 im 35. Band von Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik "ideale Zahlen" ein, mit deren Hilfe sich die linke Seite als Produkt schreiben lässt. Richard Dedekind hat dann 1871 in der zweiten Auflage der von ihm herausgegebenen Zahlentheorie von Gustav Lejeune Dirichlet diesen Gedanken aufgegriffen und durch Einführen von gewissen Idealen weiter ausgebildet. Diese entsprechen den ganzen Zahlen noch besser als die im Text betrachteten allgemeineren Ideale, indem sie sich eindeutig als Produkt von "Primidealen" darstellen.

[91] Emile Picard gab 1897 die Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois heraus. Deutsch erschienen sie 1889 in den Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen von Niels Henrik Abel und Évariste Galois.

[92] René Descartes entwickelte die analytische Geometrie in dem einen der drei Zusätze zu seinem Werk Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, 1637.

[97] Richard Dedekind berichtet darüber im Vorwort zu seiner Schrift Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872.

[106] Den Stammsatz und seinen Beweis veröffentlichte ich auf den Seiten 49-50 meiner Monographie Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik, 1936.

[107] Henri Lebesgue führte das später nach ihm benannte Integral in seiner Doktorarbeit im 7. Band der 3. Folge der Zeitschrift Annali di Matematica, 1902, ein.

[113] Die Behauptung, es gäbe keine Punkte, die unendlich nahe beieinander liegen, ist auf den Gebrauch gewöhnlicher Zahlen als Koordinaten beschränkt, fällt aber, wenn man nach dem Vorgehen von Veronese und Hilbert "aktual" unendlich kleine Größen einführt. Näheres in David Hilberts Grundlagen der Geometrie, 1930.

[118] Als Lehrbuch sei Constantin Carathéodorys Variationsrechnung, 1935, genannt. Die beiden von Robert Courant verfassten Bände Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, 1981-37, lassen, darüber hinausgehend, Zusammenhänge zwischen Hilbert-Raum und Variationsproblemen erkennen.

[125] Den Hilbert-Raum und die Theorie der selbstadjungierten Operatoren findet der Leser in meiner Monographie Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik, 1986, behandelt, in der auch das Schrifttum angeführt ist.

[127] Eine moderne Darstellung findet sich in der Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, 1932, von Erich Kamke.

[131] Worte von Ernst Mach aus den Noten zu seinem Vortrag vom 15. November 1871 über Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, in dem er bestrebt war, "Assignaten nicht mit Besitz zu verwechseln" , und zum Schluss gelangte: "Die Theorien sind wie dürre Blätter, welche abfallen, wenn sie den Organismus der Wissenschaft eine Zeit lang in Atem gehalten haben."

[132] Die angeführte Stelle steht im ersten Band der Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 1926, von Felix Klein.

[138] Die im Text mitgeteilte Ergänzung zum Baerschen Gesetz dürfte neu sein.

[141] Eine einwandfreie Erklärung des Variationsoperators $\Delta$ gab ich im 74. Band der Zeitschrift Acta mathematica, 1941, an und konnte damit verschiedene Formeln in der Mechanik berichtigen. In dieser Veröffentlichung führte ich noch die im Text angegebene Ausdehnung der Bewegungsgleichungen ein, die ich vorher schon in einer Note im 48. Band des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1988, angekündigt hatte.

[145] Wie man den Begriff des Spannungstensors zu entwickeln hat, steht in meiner Arbeit im 24. Band der 5. Folge der Annalen der Physik, 1935.

[148] Wie Otto Neugebauer im ersten Band seiner Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, 1934, ausführt, fehlte den Ägyptern der allgemeine Bruchbegriff, der übrigens heute noch kein Allgemeingut zu sein scheint, denn "so absurde 'Definitionen' von Brüchen, wie man sie in Schulbüchern finden kann, ... sind das Produkt des fruchtlosen Nachdenkens von Menschen, die das fertige Rechnen mit Rationalzahlen zwar erlernt, aber nie verstanden haben."

[148] Das ausgedehnte Schrifttum der "Gründerjahre" der Relativitätstheorie findet man auf den Seiten 539-775 des fünften Bandes der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften zusammengestellt.

[148] Der im Text geschilderte Aufbau der Relativitätstheorie verläuft grundverschieden von der Begründung Albert Einsteins.

[150] Eine lehrbuchmäßige Darstellung gibt das Buch Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 1934, von Richard Clarence Tolman.

[155] Diese durch Kürze und Durchsichtigkeit einprägsame Herleitung der Schrödingergleichung teilte ich im 93. Band der Zeitschrift für Physik, 1934, mit.

[156] Die neue Wendung in der Quantentheorie verdankt man der Doktorarbeit von Louis Victor de Broglie, 1924. Erwin Schrödinger hat daran anknüpfend 1926 in den Annalen der Physik die nach ihm benannte Gleichung aufstellen können.

[158] Einige Physiker entwickelten einen eigenen Kalkül, den sie "Transformationstheorie" tauften, worüber man sich im Buch The Principles of quantum mechanics, 1935, von Paul Adrien Maurice Dirac unterrichten kann. Dieser Kalkül enthält nachweisbar falsche Vorstellungen. Wie weit die Ergebnisse, zu denen er führt, trotzdem richtig ausfallen, müsste also genauer untersucht werden, erübrigt sich aber, weil wir in der Operatorenrechnung des Hilbert- Raumes einen einwandfreien Kalkül besitzen.

[160] Dirac hat 1928 in den Proceedings of the Royal Society die nach ihm benannte Gleichung auf eine völlig andere Weise gewonnen. Eine ausführliche Darstellung seiner Ergebnisse findet sich im zweiten Band von Arnold Sommerfelds Atombau und Spektrallinien, 1939.

[161] Die erste Lorentz-Transformationen gestattende Wellengleichung stellten Johann Kudar im 37. Band der Zeitschrift für Physik, 1926, und Erwin Schrödinger im selben Jahr in den Annalen der Physik auf.

[163] Die Ansichten Werner Heisenbergs über den Kernaufbau finden in Karl Friedrich v. Weizsäckers Schrift Die Atomkerne, 1937, eine zusammenfassende Darstellung. Außer den Bedenken, die im Text geltend gemacht wurden, gab ich weitere an in einer Besprechung dieser Schrift im 49. Band des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1939.