
A.A. Kolosow

**Kreuz und quer durch die
Mathematik**

Übersetzung: Horst Götzke
1963 Verlag Volk und Wissen
MSB: Nr. 30
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Atomenergie - Automatisierung - Rechenautomaten sind Begriffe, die letztlich das Fundament unserer heutigen Epoche charakterisieren. Sollen diese Begriffe nicht nur Worte bleiben, sondern zu einer mit Leben erfüllten Vorstellung werden, muss man sich, um sie völlig verstehen zu können, der Mathematik und mathematischer Methoden bedienen. Diese zu erlernen, will das vorliegende Buch helfen.

Es wendet sich an alle Schüler, Jugendliche und auch Erwachsene, die erste eigene Schritte in der Mathematik tun wollen, wobei lediglich elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden. A. A. Kolosow versteht es meisterhaft, die Darlegungen durch Einblenden historischer Betrachtungen zu beleben.

Er schildert das teilweise jahrhundertelange Ringen der Mathematiker um Kenntnisse und Methoden, die uns heute seit unserer Schulzeit bekannt und vertraut sind. Damit lässt er uns tatsächlich einen Blick in die Werkstatt des Mathematikers tun und berichtet uns, wie mühsam die heute mit logischer Eleganz dargebotenen Sätze und Beweise erarbeitet werden mussten.

Er zeigt uns aber auch, dass die mathematischen Begriffe, Methoden und Mittel nicht aus höheren Sphären geholt werden, sondern aus praktischen Bedürfnissen heraus entstanden sind. Damit kommt eine Seite der Gesellschaftsbezogenheit der Mathematik zum Ausdruck, nämlich, dass Anregungen aus den gesellschaftlichen Bedürfnissen, allerdings im weitesten Sinne des Wortes, erwachsen.

Der Autor macht den Leser in einer geschickten Auswahl, wie es im Titel zum Ausdruck kommt, mit verschiedenen mathematischen Disziplinen bekannt, die sämtlich geeignet sind, auf Grund ihres Charakters und ihres logischen Aufbaus das Interesse an der Mathematik zu wecken.

Diese Vorzüge besagen aber nicht, dass bei der Durcharbeit keine Anforderungen an den Leser gestellt werden. In der Mathematik wird es noch augenscheinlicher als in anderen Wissenschaften, dass es keinen "Königsweg" oder "Nürnberger Trichter" gibt.

Gerade hier wollen neue Kenntnisse erarbeitet werden. Daher empfiehlt es sich, das Buch "mit dem Bleistift in der Hand" zu lesen. Es ist ratsam, die Herleitungen selber zu überprüfen und die eingestreuten Aufgaben durchzurechnen. Die angegebenen Lösungen sollen dabei lediglich als Kontrolle dienen.

Wenn erreicht wird, vielen Interessenten die ersten Schritte in den Teil der Mathematik, der über den Stoffplan der allgemeinbildenden Schulen hinausgeht, zu erleichtern, hat das Buch seine Aufgabe erfüllt. In diesem Sinne kann es vor allem die Arbeit in den Arbeitsgemeinschaften "Mathematik" beleben und die Vorbereitung auf mathematische Schülerolympiaden unterstützen. Sollte es darüber hinaus zum weiteren Studium mathematischer Probleme angeregt haben, so ist dies besonders zu begrüßen. Dafür wurde ein ausführlich gehaltenes Verzeichnis mathematischer Bücher und Schriften angefügt, die ohne große Schwierigkeiten gelesen werden können.

Unser Dank gilt dem Autor und dem staatlichen Lehrbuch- und pädagogischen Verlag des Ministeriums für Volksbildung der RSFSR, dessen erste Auflage aus dem Jahre 1960 der deutschen Übersetzung zugrunde liegt.

Wir wünschen dem Buch viele Anhänger und hoffen, dass es der Mathematik auch in der Deutschen Demokratischen Republik viele neue Freunde erwerben wird. Ob dies gelungen ist, würden wir gern von den Lesern erfahren.

Horst Götzke

Inhaltsverzeichnis

1	Die Methode der vollständigen Induktion	5
1.1	Von der Induktion, von der Kühnheit in der Physik und der Vorsicht in der Mathematik	5
1.2	Untersuchungen, die zum Misserfolg führen	8
1.3	Wie man in der Mathematik verfahren muss	10
1.4	Wir erwerben in der induktiven mathematischen Forschung Erfahrungen	13
1.5	Ein Blick zurück	22
1.6	Aufgaben	24
1.7	Einige historische Bemerkungen	26
2	Folgen und spezielle Reihen	28
2.1	Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertum	28
2.2	Worauf beruhen die Bezeichnungen arithmetische und geometrische Folge?	35
2.3	Über die Summen fallender unendlicher geometrischer Folgen	36
2.4	Ein geometrischer Beweis für eine arithmetische Formel	41
2.5	Wir lösen Aufgaben	42
2.6	Aus dem Leben der Kaninchen - Die Fihonaccischen Zahlen	44
2.7	Aufgaben	53
3	Wie die ersten Rechentafeln aufgestellt wurden	55
3.1	Die erste logarithmische Tabelle und die Geburt der Logarithmentafel .	55
3.2	Über die verschiedenen Logarithmensysteme	59
3.3	Die Suche nach der günstigsten Basis	59
3.4	Die gigantische Arbeit Bürgis und Nepers	60
3.5	Die Zahl e	63
3.6	Rechenmaschinen	68
4	Nomogramme von Fluchtlinientafeln mit parallelen Leitern	77
4.1	Was ist Nomographie?	77
4.2	Die Berechnung der Zeichnungen (Nomogramme)	78
4.3	Funktionsskalen	82
4.4	Übungen	83
4.5	Wichtige Formeln für das Aufstellen von Nomogrammen mit parallelen gleichmäßig geteilten Leitern	84
4.6	Übungen	87
4.7	Nomogramme mit parallelen Leitern und logarithmischen Skalen	89
4.8	Übungen	90
4.9	Aufgaben	97
4.10	Koordinatennetze schaffen „Wunder“	98
5	Über die Quadratur des Kreises und die Zahl π	101
5.1	Aus der Geschichte der Zahl π	101
5.2	Aus dem Leben des Archimedes	117
5.3	Aufgaben	120

6	Von der Lobatschewskischen Geometrie	122
6.1	Gefundene Manuskripte	123
6.2	Zwei Wege	125
6.3	Die Summe der Winkel eines Dreiecks ohne die Euklidschen Axiome . .	127
6.4	Der Fehler des Legendre	131
6.5	Wir treten in eine neue geometrische Welt	135
6.6	Das Neue, für unser Vorstellungsvermögen Ungewöhnliche	137
6.7	Geometrie auf gekrümmten Flächen	142
6.8	„Der Kopernikus der Geometrie“	145
6.9	Ein Trugschluss	148
7	Trigonometrie	150
7.1	Trigonometrie und Astronomie	150
7.2	Wie die ersten trigonometrischen Tafeln aufgestellt wurden	151
7.3	Die Beiträge der Inder und der Völker Mittelasiens und Transkaukasiens für die Entwicklung der Trigonometrie	157
7.4	Die Trigonometrie nimmt allmählich moderne Form und Gestalt an . .	159
7.5	Leonhard Euler	160
7.6	Der Eulersche Satz und seine Anwendung in der Theorie der regelmä- ßigen Polyeder	162
7.7	Tabelle der von Euler eingeführten mathematischen Symbole	166
8	Die Schwingungsbewegung und die Trigonometrie	168
8.1	Die Mathematik dringt in Gebiete der Optik, der Akustik und der elek- tromagnetischen Erscheinungen ein	168
8.2	Die grafische Darstellung einer Schwingungsbewegung	172
8.3	Grafische Lösung von Bestimmungsgleichungen	177
9	Lösungen	180
9.1	Die Methode der vollständigen Induktion	180
9.2	Folgen und spezielle Reihen	183
9.3	Ein geometrischer Beweis	184
9.4	Die Fibonaccischen Zahlen	187
9.5	Wie die ersten Rechentafeln aufgestellt wurden	188
9.6	Nomogramme von Fluchtlinientafeln mit parallelen Leitern	190
9.7	Über die Quadratur des Kreises und die Zahl π	192

1 Die Methode der vollständigen Induktion

"... Das Verständnis und die Fähigkeit, das Prinzip der vollständigen Induktion richtig anzuwenden, ist ein gutes Kriterium der logischen Reife, die für den Mathematiker unbedingt notwendig ist." A. N. Kolmogorow

1.1 Von der Induktion, von der Kühnheit in der Physik und der Vorsicht in der Mathematik

Will man ein Wissensgebiet kennenlernen, so beginnt man normalerweise mit der Untersuchung spezieller Fakten. Das gilt für alle Wissenschaften, sei es nun Mathematik oder Geschichte, Physik oder Medizin, Astronomie oder Ökonomie oder irgendeine andere Wissenschaft.

Dann versucht man, und das ist sehr wichtig, Gesetzmäßigkeiten zu ermitteln, denen die verschiedenen Einzelercheinungen unterliegen. Oftmals gelingt es, diese Gesetzmäßigkeiten durch Formeln darzustellen. Alle Menschen, die die Formelsprache beherrschen, können von der Formel auf jeden speziellen Fall schließen, wenn dieser Fall der durch die Formel ausgedrückten Gesetzmäßigkeit genügt.

Will man in ein Wissensgebiet tiefer eindringen, will man selbst Neues schaffen, so genügt es nicht, sich nur mit den Ergebnissen der Forschung vertraut zu machen. Vielmehr muss man in den Prozess der Forschungsarbeit selbst eindringen, muss die lange und intensive Arbeit kennenlernen, die zum Auffinden einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit erforderlich ist, kurz, man muss sich die Methoden aneignen, durch die brauchbare Ergebnisse erzielt wurden.

L. N. Tolstoi schrieb einmal: "Es ist nicht wichtig, zu wissen, dass die Erde rund ist; aber es ist wichtig, zu wissen, wie die Menschen zu dieser Erkenntnis kamen."

Das Herausfinden der richtigen Methode ist der erste Schritt beim Studium jeder Erscheinung. Oftmals hängt von der Wahl der Methode der Erfolg des gesamten Forschungsvorhabens ab. Die wichtigste Aufgabe für die Schüler heißt also: möglichst viele Forschungsmethoden kennenlernen und sich eine Reihe davon aneignen.

Auch in den verschiedenen Wissenschaften arbeitet man nach verschiedenen Methoden. Ja selbst in einzelnen Bereichen einer Wissenschaft, beispielsweise der Mathematik, gibt es viele unterschiedliche Forschungsmethoden. Mit einigen davon wollen wir uns in diesem Buch vertraut machen.

Erinnern wir uns einer Methode, die häufig in der Physik Anwendung findet, so zum Beispiel zur Aufstellung des Widerstandsgesetzes $R = \rho \cdot \frac{l}{F}$. Mit Hilfe dieser Formel kann man bekanntlich den elektrischen Widerstand eines stromdurchflossenen Leiters berechnen, wenn dessen Länge und Querschnitt sowie der spezifische Widerstand bekannt sind.

Zur Durchführung der Untersuchungen benötigen wir eine Stromquelle, ein Ampereme-

ter und mehrere Drähte verschiedener Materialien mit unterschiedlichen Querschnittsflächen. Nun werden nacheinander Drähte gleichen Materials und gleichen Querschnitts von einfacher, von doppelter, von vierfacher Länge in den Stromkreis geschaltet, wobei sich ein Widerstandsbrett bewährt (Abb. 1).

Mit dem Amperemeter misst man jedesmal die Stromstärke und stellt fest, dass sich die Stromstärke bei doppelter Leiterlänge auf die Hälfte, bei vierfacher Leiterlänge auf ein Viertel usw. verringert. Hieraus können wir folgern, dass sich der Widerstand eines Leiters im selben Verhältnis vergrößert wie die Länge desselben zunimmt. Wir ziehen den Schluss:

1. Der Widerstand eines Leiters ist seiner Länge direkt proportional.

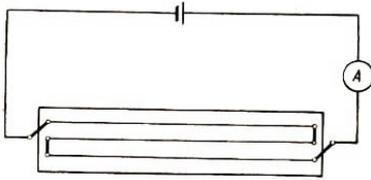


Abb. 1

In einer zweiten Versuchsreihe schalten wir in den Stromkreis nacheinander Drähte gleicher Länge und gleichen Materials mit verschiedenen Querschnitten (1 mm^2 , 2 mm^2 , 4 mm^2) und notieren jeweils die am Amperemeter angezeigte Stromstärke.

Wir können feststellen, dass die Stromstärke auf das Doppelte, Vierfache usw. steigt, dass also der Widerstand auf die Hälfte, ein Viertel usw. absinkt. Hieraus ziehen wir den Schluss:

2. Der Widerstand eines Leiters ist zum Flächeninhalt seines Querschnitts indirekt proportional.

Schließlich müssen wir noch klären, wie der Widerstand eines Leiters vom Material abhängt, aus dem der Leiter hergestellt ist. Dazu nehmen wir Leiter gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber verschiedenen Materials, z.B. Kupfer, Eisen, Nickel, und bestimmen in jedem Fall mit Hilfe des Amperemeters die Stromstärke.

Wir können so feststellen, dass der Widerstand des Eisendrahtes größer ist als der des Kupferdrahtes und dass der Widerstand des Nickeldrahtes wiederum größer ist als der des Eisendrahtes.

Folglich hängt der Widerstand eines Leiters auch vom Material ab, aus dem er hergestellt ist. Wir führen dafür den Begriff des spezifischen Widerstandes ein. Aus den beiden Proportionalitätsbeziehungen $R \sim l$ und $R \sim \frac{1}{F}$ und unter Berücksichtigung der Materialkonstante ρ lässt sich das eingangs erwähnte Gesetz

$$R = \rho \frac{l}{F}$$

formulieren, wobei l die Länge des Leiters in Metern, F der Querschnitt des Leiters in Quadratmillimetern und R der Widerstand in Ohm ist. Der Koeffizient ρ ist ein Proportionalitätsfaktor, der spezifische Widerstand, und entspricht zahlenmäßig dem Widerstand eines Leiters von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt.

Die am Beispiel des Widerstandsgesetzes dargelegte Forschungsmethode wird in der Physik häufig angewendet.¹

Worin zeigt sich nun das Typische dieser Methode?

Der Wissenschaftler sammelt Erfahrungen, indem er eine Vielzahl einzelner Erscheinungen untersucht. Dabei forscht er nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten, durch die die einzelnen von ihm untersuchten Erscheinungen verbunden werden.

Er überprüft die Gesetzmäßigkeiten, ob sie auch wirklich für alle von ihm untersuchten Fälle Gültigkeit haben, und kommt zu dem Schluss, dass sie auch für jene gleichartigen Fälle als gültig angesehen werden können, die bisher noch nicht durch messende Versuche erfasst wurden.

Der Grad der Sicherheit, mit der ein Wissenschaftler den Übergang von einer speziellen Behauptung zu ihrer Verallgemeinerung vollziehen kann, und somit auch der Grad der Sicherheit, mit der diese Gesetze richtig sind, hängt von der Anzahl der überprüften Einzelfälle ab. Oftmals kommt ein Wissenschaftler nur durch eine Kette von Überlegungen ähnlicher Art zu einer begründeten Überzeugung.

Wenn wir ähnliche Methoden benutzen, können auch wir bestimmte Beziehungen zwischen den Einzelheiten einer von uns untersuchten Erscheinung ermitteln, die für viele Spezialfälle richtig sind. Wir erweitern dies auf den Allgemeinfall, wodurch aus allgemeinen Thesen bestimmte Gesetze folgerichtig bewiesen werden können.

Ein derartiges Verfahren, bei dem man von einer Vielzahl spezieller Feststellungen zur Allgemeinheit übergeht, nennt man in der Logik Induktion. Die zur Lösung der Frage nach dem elektrischen Widerstand eines Leiters benutzte Methode sollte zweckmäßigerweise "Methode der empirischen Induktion" genannt werden.

Empirisch deshalb, weil sich die Möglichkeit der allgemeinen Schlussfolgerung aus der empirischen Beobachtung der Resultate bestimmter Experimente ergibt. Man bezeichnet diese Methode auch als Methode der unvollständigen Induktion. Die Bezeichnung "unvollständig" wird durch die nachfolgenden Ausführungen verständlich.

Die Methode der unvollständigen Induktion wird nicht nur in weiten Bereichen der Physik und in den Naturwissenschaften ganz allgemein angewendet, sondern auch in einigen Bereichen der Mathematik.

Viele Eigenschaften der Zahlen waren zunächst durch Probieren und durch die unvollständige Induktion ermittelt worden, und erst später konnten diese Eigenschaften durch exakte Beweise gesichert werden. Auch heute noch verwendet man in der Mathematik die unvollständige Induktion, die jedoch nicht als allgemeines Beweismittel angesehen werden darf. Hierin liegt ein Unterschied zur Physik.

Wenn dort Ergebnisse aus einer Reihe von Beobachtungen vorliegen und wenn es möglich ist, mit Hilfe der Methode der unvollständigen Induktion Gesetzmäßigkeiten in diesen Ergebnisreihen festzustellen, so können diese Gesetzmäßigkeiten in der weiteren Forschung meist wie allgemeine Gesetze, die alle Einzelercheinungen erfassen, benutzt

¹Man darf nicht annehmen, dass in der Physik nur die erwähnte Methode angewendet wird. Es gibt darüber hinaus noch viele andere Methoden, die es auf der Basis allgemeiner Thesen ermöglichen, bestimmte Gesetze folgerichtig zu beweisen.

werden.

In der Mathematik darf man aber nicht in ähnlicher Weise verfahren. Hier muss man mit weitaus präziseren Methoden vorgehen, die in ihrer Schlussfolgerung nur eine der zwei Möglichkeiten offen lassen: entweder die Aussage ist für alle möglichen Einzelfälle richtig, stellt also ein Gesetz dar, oder sie ist falsch.²

Leonhard Euler (1707-1783) hat in diesem Zusammenhang folgendes gesagt:

"Wir müssen größte Vorsicht üben, damit wir nicht solche Eigenschaften der Zahlen für wahr zulassen, die wir durch Experimentieren entdeckt haben und die allein durch Induktion bestätigt wurden.

In der Praxis benötigen wir solche Methoden, die uns bei der Erforschung der Eigenschaften die Möglichkeit geben, die gefundenen Eigenschaften präzise zu beweisen oder zu widerlegen; wobei wir auch im letzteren Fall viel Nützliches lernen können."

Die Richtigkeit dieses Eulerschen Wortes wird durch die folgenden Beispiele bestätigt, in denen die Unvollständigkeit der Induktion zu falschen Schlüssen führt.

1.2 Untersuchungen, die zum Misserfolg führen

Der französische Mathematiker Pierre de Fermat (1601-1665) untersuchte Zahlen folgender Form:

$$f(n) = 2^{2^n} + 1$$

Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ergeben sich für $f(n)$ Primzahlen.

$$n = 0 : \quad f(0) = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 : \quad f(1) = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 : \quad f(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 : \quad f(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

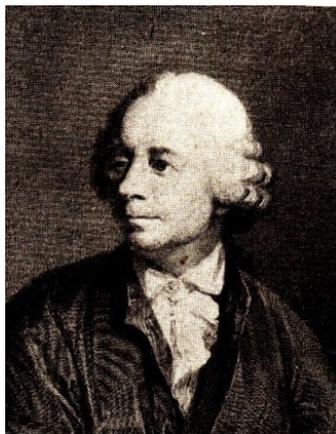
$$n = 4 : \quad f(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

Beim Einsetzen von $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in die Formel ergeben sich Primzahlen, und Fermat nahm an, dass für diese Formel stets Primzahlen entstehen. Er war zuerst von der Richtigkeit seiner Überlegung so überzeugt, dass er die Zahlenfolge einigen englischen Mathematikern vorlegte, und sie zum Beweis seiner Annahme aufforderte.

Aber bereits kurze Zeit später zeigte Euler, dass schon die nächstfolgende Zahl eine zusammengesetzte Zahl ist.

$$n = 5 : \quad f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294667297 = 641 \cdot 6700417$$

²Doch auch in der Physik, die vorrangig die Induktion anwendet, ergeben sich bisweilen Irrtümer. Denken wir beispielsweise an den folgenden Lehrsatz aus dem Altertum: Die Natur duldet keinen leeren Raum. Diese Vorstellung, die zum Gesetz erhoben wurde, hatte lange Zeit unumstritten Gültigkeit, und erst im Jahre 1640 gelang dem Italiener Torricelli die Widerlegung.



Leonhard Euler

Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Gesucht werden Funktionen für ganzzahlige Argumente, die nur Primzahlen ergeben. Euler untersuchte folgendes Polynom:

$$\phi(n) = n^2 + n + 41$$

Dieses Polynom liefert für alle ganzzahligen n von 0 bis 39 Primzahlen:

$$\phi(0) = 41, \quad \phi(1) = 43, \quad \phi(2) = 47, \quad \phi(3) = 53, \dots$$

Auf Grund dieser Tatsache könnte man zu der Annahme gelangen, dass die genannte Formel auch für jedes andere beliebige natürliche n eine Primzahl ergibt.

Hierin zeigt sich aber die Unvollkommenheit der Induktion. Während man in der Physik, selbst wenn auch nur relativ wenig Erfahrungswerte vorliegen, mit der Behauptung von der Gültigkeit des Spezialfalles gleichzeitig zur Behauptung der Gültigkeit des entsprechenden allgemeinen Falles übergeben würde, wäre dies in der Mathematik ein schwerwiegender Fehler. Im vorliegenden Fall liefert nämlich die angegebene Formel $\phi(n) = n^2 + n + 41$ für $n = 40$ eine zusammengesetzte Zahl, denn es ist:

$$\phi(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$$

Ein weiteres Beispiel soll dies mit noch stärkerer Überzeugungskraft zeigen als die zwei vorangegangenen.

Gegeben seien Zahlen der Form:

$$F(n) = 991n^2 + 1$$

wobei n eine natürliche Zahl sein soll. Wenn wir nun für n mit 1 beginnend nacheinander die Folge der natürlichen Zahlen einsetzen, so erhalten wir für $F(n)$ vorerst keine Zahl, die das Quadrat einer anderen ist.



Pierre de Fermat

Selbst wenn wir unser ganzes Leben damit verbrächten, eine Zahl nach der anderen daraufhin zu untersuchen, würden wir keine derartige Zahl finden.

Dennoch dürften wir in der Mathematik nunmehr keineswegs die Behauptung aufstellen, dass die Zahlen der genannten Form niemals Quadrat einer anderen Zahl sind. Diese Strenge ist vollauf gerechtfertigt, denn für

$$n = 12055735790331359447442538767$$

liefert der Ausdruck $F(n) = 991n^2 + 1$ ein Quadrat.

Auch in der Geometrie gibt es Beispiele, bei denen falsche Schlüsse gezogen werden,

wenn man nach der Methode der empirischen Induktion verfährt.

In wieviel Teile wird der Raum zerlegt, wenn n Ebenen derart durch einen Punkt gehen, dass niemals drei von ihnen eine gemeinsame Gerade besitzen?

Eine Ebene teilt den Raum in zwei Teile. Zwei Ebenen, die durch einen Punkt gehen, teilen den Raum in vier Teile. Drei Ebenen, die ebenfalls durch einen Punkt gehen, die aber keine gemeinsame Gerade haben, teilen den Raum in acht Teile (Abb. 4).

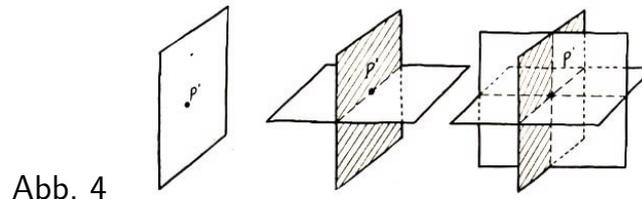


Abb. 4

Offensichtlich kann man jetzt die Behauptung aufstellen, dass für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ die Anzahl der Teile, in die der Raum durch die Ebenen zerlegt wird, gleich 2^n ist. Wir begehen aber einen Fehler, wenn wir nun entsprechend der Methode der unvollständigen Induktion schließen, dass n Ebenen unter den gegebenen Voraussetzungen den Raum in 2^n Teile zerlegen. Die richtige Lösung gibt

$$\Phi(n) = n(n - 1) + 2$$

Raumteile an, wobei n eine beliebige natürliche Zahl darstellt. Diese Aufgabe werden wir in den folgenden Abschnitten lösen.

Warum ergaben sich in den letzten vier Beispielen falsche Aussagen? Doch deshalb, weil wir allgemeine Behauptungen für jedes n aufstellten, obwohl diese Behauptungen nur für gewisse Werte von n als richtig nachgewiesen waren. Euler hatte also recht, als er sagte, dass die unvollständige Induktion zu Irrtümern führen kann.

1.3 Wie man in der Mathematik verfahren muss

Worin besteht nun aber das Wesen der nach Eulers Worten "präziseren" Forschung, die es erlaubt, mathematische Aussagen und Entdeckungen unter Zuhilfenahme der Induktion zu beweisen oder zu widerlegen? Die Antwort finden wir mit Hilfe einer Aufgabe.

Wir schreiben uns die Folge der ungeraden Zahlen in der natürlichen Reihenfolge auf

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \quad (1)$$

und fragen nach der Summe der ersten n Glieder dieser Folge.

Wir bilden die Summe des ersten (S_1), der ersten beiden (S_2), der ersten drei (S_3), ... Glieder der gegebenen Folge.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Nun untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den erhaltenen Summen und dem Index des Symbolen S . Dieser Index entspricht der Anzahl der Summanden, die wir aus der Folge (1) zur Ermittlung der Summe benutzen. Es fällt nicht schwer zu erkennen, dass die Summe gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden ist.

$$S_1 = 1 = 1^2, \quad S_2 = 4 = 2^2, \quad S_3 = 9 = 3^2, \quad S_4 = 16 = 4^2, \quad S_5 = 25 = 5^2$$

Dieses Ergebnis lässt uns vermuten, dass stets gilt:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2)$$

oder in Worten ausgedrückt:

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen (in der natürlichen Reihenfolge) ist gleich dem Quadrat von n .

Stimmt diese Vermutung, d.h., stimmt sie für beliebiges natürliches n ? Die Formel ist selbstverständlich für die Spezialfälle $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 richtig, denn für diese Werte wurde sie ja aufgestellt. Sie gilt auch noch für $n = 6$, wie folgende Rechnung zeigt;

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

Wir könnten nun dazu übergehen, durch Probieren nachzuweisen, dass die Formel auch für $n = 7, n = 8$ usw. richtig ist. Dadurch würden wir aber lediglich eine weitere Bestätigung ihrer Gültigkeit für Einzelfälle erhalten, ohne einen allgemeingültigen Beweis zu erlangen.

Andererseits ist es uns aber auf der Grundlage der unvollständigen Induktion gelungen, das allgemeine Gesetz zu vermuten:

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen in der natürlichen Reihenfolge ist gleich dem Quadrat dieser Zahl n .

Wir wollen aber vorsichtig sein und die Mahnung Eulers beachten: "Es gibt Fälle, in denen die unvollständige Induktion auf Fehler führt."

Wir erinnern uns fernerhin der vier Aufgaben, mit denen wir uns im vorhergehenden Abschnitt bekanntmachten. Diese Erfahrungen müssen wir berücksichtigen. Wenn wir es nicht tun, kann es uns wie den Zoologen ergehen, die bis zur Entdeckung Australiens behaupteten, dass alle Schwäne weiß seien.

Wir werden jetzt beim Beweis der aufgestellten Behauptung einen Weg beschreiten, der Sicherheit gewährleistet.

Wir nehmen an, dass die Formel (2) für $n = k$ gilt, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (3)$$

Nun beweisen wir die Richtigkeit dieser Formel auch für die unmittelbar auf k folgende natürliche Zahl, also für $n = k + 1$.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad (4)$$

Wir formen die linke Seite der Gleichung (4) um

$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

und ersetzen entsprechend der Gleichung (3) die Summe innerhalb der eckigen Klammer durch den als richtig angenommenen Wert k^2 .

$$k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Die linke Seite der Gleichung (4) ist also in der Tat gleich $(k + 1)^2$.

Hiermit gelangen wir zu der äußerst wichtigen Schlussfolgerung: Wenn die Vermutung für jede beliebige natürliche Zahl k richtig ist, so bleibt sie auch für die auf k folgende natürliche Zahl $k + 1$ richtig.

Da wir uns überzeugt haben, dass die aufgestellte Formel für die Werte $n = 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 gilt, muss sie also auch für den nachfolgenden Wert 7 richtig sein. Da die Formel nunmehr für den Wert 7 richtig ist, ist sie wegen derselben Schlussfolgerung auch für den Wert 8 richtig usw.

Die Vermutung ist somit für jede natürliche Zahl richtig, was wir nunmehr in völliger Allgemeinheit bewiesen haben.

Rückblickend auf das behandelte Beispiel können wir diese Methode durch folgende Schritte charakterisieren:

Wir untersuchten mehrere Einzelfälle, erkannten eine Gesetzmäßigkeit und konnten so die Formel (2) aufstellen.

Wir überzeugten uns von der Gültigkeit der Formel für den Fall $n = 1$. Wir bewiesen dann das Gesetz und konnten auf $n = 2$ schließen. Da die Formel für $n = 2$ richtig ist, gilt sie auch für $n = 3$ usw. Die Vermutung wurde somit als allgemein richtig erkannt, und es war möglich, sie als Gesetz ($S_n = n^2$) zu formulieren:

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen in der natürlichen Reihenfolge ist gleich n^2 .

Bei der Herleitung dieses Gesetzes sind wir mit einer sehr wichtigen Beweismethode bekannt geworden, die es ermöglicht, die allgemeine Gültigkeit einer Vermutung nachzuweisen. Die Vermutung ist das Ergebnis einer Reihe von Einzeluntersuchungen, und die allgemeine Gültigkeit beweisen wir mit Hilfe der am obigen Beispiel verwendeten Methode.

Diese Methode bezeichnet man im Gegensatz zur unvollständigen Induktion als vollständige Induktion oder als mathematische Induktion. Man sagt auch, es ist der Schluss von n auf $n + 1$.

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann folgendermaßen formuliert werden:

Wenn eine gewisse Gesetzmäßigkeit (in unserem Beispiel: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$) für eine Zahl α gültig ist, wobei α irgendeine natürliche Zahl sein soll, für die diese Gesetzmäßigkeit einen Sinn hat (in unserer Aufgabe konnten wir $\alpha = 1$ wählen), und wenn diese Gesetzmäßigkeit auch stets für eine Zahl $k + 1$ richtig bleibt, nachdem sie für die Zahl k als richtig erkannt wurde (in unserer Aufgabe bleibt die Gleichung $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ beim Übergang von einer beliebigen natürlichen Zahl

k zur Zahl $k + 1$ richtig), so gilt diese Gesetzmäßigkeit für jede natürliche Zahl, die größer als α ist.

Kürzer kann man das Prinzip der vollständigen Induktion³ wie folgt formulieren:

Eine Gesetzmäßigkeit ist für jede natürliche Zahl $n > \alpha$ richtig, wenn gilt:

1. Die Gesetzmäßigkeit ist richtig für $n = \alpha$.
2. Aus der Gültigkeit der Gesetzmäßigkeit für eine beliebige natürliche Zahl $n = k$ folgt die Gültigkeit für $n = k + 1$.

In dieser Formulierung besagt der Ausdruck $n > \alpha$, dass die Zahl α nicht notwendigerweise gleich 1 sein muss. Als Beispiel hierfür sei der bekannte Satz über die Summe der inneren Winkel eines Vielecks angeführt, der ebenfalls mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden kann.

Es gilt.

$$S_n = 180^\circ(n - 2) \quad (5)$$

wobei n die Anzahl der Seiten des Vielecks angibt. Der Mindestwert für n ist 3; denn für kleinere Werte von n hat die Formel (5) keinen Sinn. Hiervon können wir uns leicht überzeugen; denn in der ebenen endlichen Geometrie gibt es keine zweidimensionalen Gebilde (Flächen), die von einer oder zwei Geraden begrenzt werden.

Folglich muss α in diesem Fall 3 und nicht 1 sein. Wenn die Formel (5) für $n = 3$ richtig ist (und sie ist richtig), so beweist der Übergang von einer beliebigen Zahl k zur Zahl $k + 1$ (dieser Übergang kann nachgewiesen werden) die allgemeine Gültigkeit der Formel (5) für beliebiges natürliches n , das größer als 3 ist.

Zwischen der Methode der unvollständigen Induktion und der Methode der vollständigen Induktion besteht ein enger Zusammenhang. Man bezeichnet die Methode der vollständigen Induktion auch als mathematische Ergänzung zur Induktion, wodurch verständlich wird, dass man die vollständige Induktion gelegentlich auch als mathematische Induktion bezeichnet. Das besagt aber auch, dass die vollständige Induktion keine prinzipiell neue Methode gegenüber der unvollständigen Induktion darstellt. Sie ist gewissermaßen eine Erweiterung derselben.

In diesem Zusammenhang ist ein kleines Zitat aus einem Buch von D. Poia: Die Mathematik und die Glaubwürdigkeit ihrer Urteile von Interesse: "Die vollständige Induktion erscheint wie ein Schlussschritt, wie eine letzte Phase der induktiven Forschung. In dieser Phase ist sie eine richtungweisende Erkenntnis, die in den vorangehenden Phasen entstanden ist."

1.4 Wir erwerben in der induktiven mathematischen Forschung Erfahrungen

Am Beispiel der Summierung der ersten n ungeraden Zahlen in natürlicher Reihenfolge $[1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)]$ im vorigen Abschnitt konnten wir die einzelnen Schritte der

³Das Prinzip der vollständigen Induktion galt lange ohne Beweis wie ein Axiom. Eine solche Ansicht vertrat eine Reihe hervorragender Mathematiker, wie Courant, Klein, Poincaré.

Methode der vollständigen Induktion kennenlernen.

Im allgemeinen bildet man also entsprechend den Bedingungen der jeweiligen Aufgabe mehrere Ausdrücke, indem man für n spezielle, niedrige Werte setzt ($n = 1; n = 2$ u.a.). Dann gilt es, Gesetzmäßigkeiten, die die Zusammenhänge zwischen den Elementen der Ausdrücke charakterisieren, zu erkennen und zu formulieren. Oftmals gelingt es bereits, dadurch einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Behauptung zu erreichen. Derartige Behauptungen, die in ihrer Allgemeinheit noch nicht bewiesen sind, nennt man Hypothesen.

Manchmal ergeben sich als Hypothesen mathematische Ausdrücke, die Funktionen eines ganzzahligen Argumentes n sind. Derartige Funktionen sind sicher für diejenigen speziellen Werte von n richtig, die für das Aufstellen der Hypothese verwendet wurden. Durch weitere Versuche mit speziellen Werten kann man den Bereich des Argumentes n , für den die Funktion richtig bleibt, erweitern.

Das bedeutet jedoch nicht, dass die aufgestellte Hypothese für jedes beliebige natürliche n als gültig angesehen werden kann. Eine derartige Situation stellt dann den typischen Fall für die Anwendung der Methode der vollständigen Induktion dar. Durch den Schluss von n auf $n + 1$ gelingt es häufig, die allgemeine Gültigkeit der Hypothese zu beweisen oder die Hypothese als falsch zu verwerfen. Gelingt der Beweis, dann wird aus der Hypothese eine vollwertige Aussage.

Der Beweis mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion besteht aus folgenden Teilen oder Schritten:

1. Es ist die Gültigkeit der Hypothese für einen kleinsten Wert $n = \alpha$, für den sie noch einen Sinn hat, zu überprüfen.
2. Die Hypothese ist für einen beliebigen Wert $n = k$ zu formulieren. Anschließend muss der Nachweis erbracht werden, dass sie auch für den Wert $n = k + 1$ gilt.
3. Ist unter Gültigkeit von 1. der Nachweis von 2. erbracht, so folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die ausgesprochene Hypothese für jede beliebige natürliche Zahl n , die größer als α ist, gilt. Ferner folgt hieraus, dass das in der Hypothese formulierte Gesetz tatsächlich das Wesen der untersuchten Erscheinung aufdeckt.

Zum besseren Verständnis wollen wir die Methode der vollständigen Induktion zur Lösung einiger Aufgaben verwenden.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Folge

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{4n^2 - 1}, \dots$$

Es ist die Summe der ersten n Glieder dieser Zahlenfolge zu berechnen.

Damit wir eine Hypothese aufstellen können, deren Aussage anschließend mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion zu beweisen ist, bilden wir zunächst die Summen

für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ n = 2 & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \\ n = 3 & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7} \\ n = 4 & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9} \end{array}$$

Aus der Gegenüberstellung der jeweiligen Anzahl der Glieder und der entsprechenden Summe kann man auf die folgende Gesetzmäßigkeit schließen:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}$$

Auf diese Art haben wir nun eine Hypothese erhalten. Wir sehen, dass sie eine Funktion des Arguments n darstellt, wobei n die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft. Das legt uns nahe, zum Beweis der Richtigkeit der Hypothese die Methode der vollständigen Induktion heranzuziehen. Führen wir den Beweis durch:

1. Die Hypothese ist für $n = 1$ richtig (Induktionsvoraussetzung).
2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{k}{2k + 1}$$

Unter Verwendung dieser Vermutung werden wir die Gültigkeit der Hypothese beim Übergang von k auf $k + 1$ nachweisen. Wir addieren also zur Summe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4k^2 - 1}$ das nächstfolgende, $(k + 1)$ -te Glied der Folge, das heißt das Glied der Form $\frac{1}{4(k+1)^2 - 1}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4k^2 - 1} + \frac{1}{4(k+1)^2 - 1} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4k^2 - 1} \right] + \frac{1}{4(k+1)^2 - 1}$$

Die Summe in der eckigen Klammer ist nach der Induktionsvoraussetzung gleich $\frac{k}{2k+1}$, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2 - 1} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{[2(k+1) + 1][2(k+1) - 1]} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+3)(2k+1)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+3)(2k+1)} = \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1) + 1} \end{aligned}$$

Die Hypothese ist also auch richtig für $n = k + 1$, wenn sie für $n = k$ richtig ist (Induktionsschluss). Folglich können wir auf Grund der Methode der vollständigen Induktion

bestätigen, dass die Formel in unserer ursprünglichen Hypothese für jedes beliebige natürliche n gilt.

Aufgabe 2: Gegeben ist eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz d

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Gesucht wird das n -te Glied der Folge, wenn a_1 und d gegeben sind.

Wir ermitteln die Hypothese.

Jedes Glied der Folge ergibt sich nach der Definition als arithmetische Reihe:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \\a_2 &= a_1 + d \\a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\end{aligned}$$

Diese Gleichungen legen es nahe, folgende Hypothese aufzustellen:

Ein beliebiges Glied (a_n) der Folge ist gleich der Summe aus dem ersten Glied (a_1) und dem Produkt, das aus der konstanten Differenz (d) der Reihe und der um 1 verminderten Anzahl der Glieder gebildet wird.

Die Hypothese können wir auch durch folgende Formel darstellen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

1. Die Hypothese ist richtig für $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.
2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll. Es soll also gelten:

$$a_k = a_1 + (k - 1)d$$

Nun untersuchen wir, ob die Hypothese auch beim Übergang zu $n = k + 1$ richtig bleibt.

Zur Ermittlung des $(k + 1)$ -ten Gliedes der Folge können wir nach der Definition für die arithmetische Reihe zum vorangegangenen Glied die Differenz d addieren, also

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd = a_1 + [(k + 1) - 1]d$$

Tatsächlich ist das $(k + 1)$ -te Glied der Folge wiederum gleich der Summe aus dem ersten Glied und dem Produkt, das aus der Differenz d und der um 1 verminderten Anzahl der Glieder gebildet wird. Es ist also das $(k + 1)$ -te Glied richtig, wenn das k -te Glied richtig ist. Damit wird die Hypothese zu einem Satz; denn nach der Methode der vollständigen Induktion gilt der Ausdruck in der anfänglichen Hypothese nunmehr für jedes beliebige natürliche n .

Mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion können wir auch die Richtigkeit entsprechender Formeln für die geometrische Folge nachweisen. Für die geometrische Folge $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ gilt

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Folge von Zahlen, deren Glieder entsprechende Elemente einer geometrischen Folge sind.

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

Der konstante Quotient sei q ($q \neq 1$).

Die Folge lautet also:

$$b_1, b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, \dots, b_n = b_1q^{n-1}$$

Es ist mit Hilfe der vollständigen Induktion der Nachweis für die Summenformel der geometrischen Reihe zu führen.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = S_n \quad ; \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (1)$$

Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen wir keine Hypothese aufzustellen, denn sie ist uns bereits durch die Formel (1) gegeben. Wir müssen lediglich die Teile 1. und 2. des Beweises erfüllen.

1. Die Hypothese ist für $n = 1$ und $n = 2$ richtig, denn es gilt:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad | \quad S_1 = \frac{b_1(1 - q)}{1 - q} = b_1 \\ n = 2 & \quad | \quad S_2 = \frac{b_1(1 - q^2)}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = b_1(1 + q) = b_1 + b_1q = b_1 + b_2 \end{aligned}$$

2. Wir nehmen an, dass diese Hypothese für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll.

$$n = k \quad | \quad S_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k = \frac{b_1(1 - q^k)}{1 - q}$$

Nun müssen wir nachweisen, dass diese Annahme auch für $n = k + 1$ richtig bleibt.

$$\begin{aligned} n = k + 1 & \quad | \quad S_{k+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} = \frac{b_1(1 - q^k)}{1 - q} + b_1q^k \\ & \quad = \frac{b_1 - b_1q^k + b_1q^k - b_1q^{k+1}}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^{k+1})}{1 - q} \end{aligned}$$

Folglich können wir nach der Methode der vollständigen Induktion bestätigen, dass die Formel (1) für jedes beliebige natürliche n gilt.

Aufgabe 4: Es ist die Summe der ersten n Glieder der Folge

$$\left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\} \quad (2)$$

zu berechnen.

Zur Ermittlung einer Hypothese bilden wir die ersten Summen.

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \\S_2 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} \\S_3 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Hieraus können wir folgende Hypothese aufstellen:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

1. Die Hypothese ist für $n = 1$ richtig. Dies genügt, um zum zweiten Teil des Beweises überzugehen.
2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll.

$$S_k = \frac{k}{k+1}$$

Hierauf beweisen wir die Gültigkeit beim Übergang zu $n = k + 1$, indem wir zur Summe der ersten k Glieder unserer Folge (2) das $(n + 1)$ -te Glied, das gleich $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ ist, addieren.

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\&= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

An diesem Ergebnis sehen wir, dass die Summe der ersten $(k + 1)$ Glieder nach demselben Gesetz gebildet wird, wie die Summe der ersten k Glieder, nämlich durch einen Bruch, dessen Zähler jeweils mit der Anzahl der Glieder (n) übereinstimmt und dessen Nenner um 1 größer ist als der Zähler. Folglich ist nach der Methode der vollständigen Induktion die von uns zu Beginn aufgestellte Hypothese für beliebiges natürliches n richtig. Es gilt also allgemein:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 5. Es ist nachzuweisen, dass die Summe der Quadratzahlen in der natürlichen Folge von 1 beginnend gleich dem Ausdruck $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Die Hypothese ist damit gegeben.

1. Wir überprüfen die Hypothese für die Werte $n = 1$ und $n = 2$.

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad | \quad S_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \\ n = 2 & \quad | \quad S_2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = 5 = 1 + 4 \end{aligned}$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ hat also die Hypothese Gültigkeit.

2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für $n = k$ gilt, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist.

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (3)$$

Hiervon ausgehend, beweisen wir die Gültigkeit der Hypothese beim Übergang zu $n = k + 1$, indem wir zur Summe $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$ den neuen Summanden $(k + 1)^2$ hinzufügen.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des dreigliedrigen Ausdrucks $2k^2 + 7k + 6$ sind $k_1 = -2$ und $k_2 = -\frac{3}{2}$. Folglich ist

$$2k^2 + 7k + 6 = 2(k+2) \left(k + \frac{3}{2} \right) = (k+2)(2k+3)$$

und somit

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Diese Gleichung ergibt sich auch, wenn wir in der Gleichung (3) jeweils k durch $k + 1$ ersetzen. Das besagt, dass die aufgestellte Hypothese für $n = k + 1$ richtig ist, wenn sie für $n = k$ gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt hieraus wiederum, dass die aufgestellte Hypothese für jede natürliche Zahl richtig ist, dass also stets gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweise mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion können auch in der Geometrie angewendet werden.

Aufgabe 6: Es ist zu beweisen, dass n Ebenen, die so durch einen Punkt P' gehen, dass niemals drei von ihnen eine gemeinsame Gerade besitzen, den Raum in

$$\Phi(n) = n(n-1) + 2 \quad (4)$$

Teile zerlegen.

Die Hypothese ist damit gegeben.

1. Wir untersuchen die Gültigkeit der Hypothese für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$. Eine Nebeneinanderstellung der jeweiligen Resultate ergibt die Übereinstimmung mit der Formel (4).

$$\begin{array}{l|l} n = 1 & \Phi(1) = 1(1 - 1) + 2 = 2 \\ n = 2 & \Phi(2) = 2(2 - 1) + 2 = 4 \\ n = 3 & \Phi(3) = 3(3 - 1) + 2 = 8 \end{array}$$

2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll. Das heißt, k Ebenen zerlegen den Raum unter den genannten Voraussetzungen in $k(k - 1) + 2$ Teile.

Wir müssen nun zeigen, dass die Hypothese auch beim Übergang zu $n = k + 1$ Ebenen richtig bleibt. Die $(k + 1)$ -te Ebene wollen wir mit E bezeichnen.

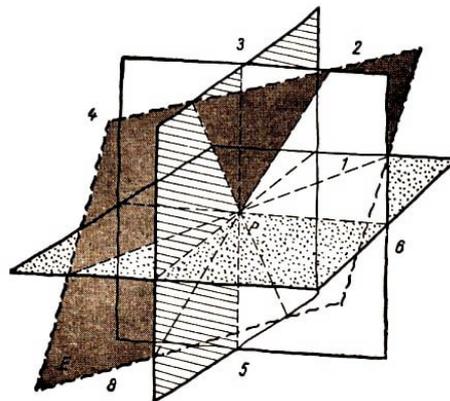


Abb. 5

Alle Ebenen haben den Punkt P' gemeinsam, folglich liegt dieser Punkt auch in der Ebene E . Die Ebene E wird von allen anderen k Ebenen in bestimmten Geraden geschnitten, wobei die k Schnittgeraden ebenfalls durch den gemeinsamen Punkt P' gehen (Abb. 5).

Zur weiteren Erläuterung muss an dieser Stelle vermerkt werden, dass eine Ebene, in der n verschiedene Geraden durch einen Punkt laufen, in $2n$ Teile zerlegt wird (Abb. 6).

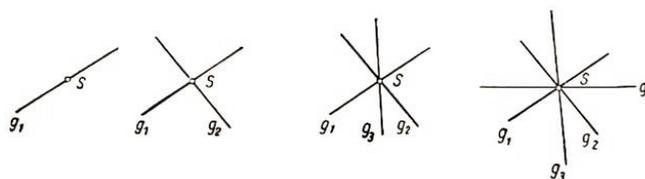


Abb. 6

(Diese Behauptung kann ebenfalls mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion bewiesen werden.)

Diese k Schnittgeraden zerlegen demnach die Ebene E in $2k$ Teile. Die Teile werden durch spitze und stumpfe Winkel dargestellt und haben den gemeinsamen Punkt aller Ebenen P' zum Scheitelpunkt.

Die ersten k einander schneidenden Ebenen ergeben räumliche Ecken. Einige dieser

räumlichen Ecken werden von der Ebene E in zwei Teile zerlegt (Abb. 5)⁴. So teilt beispielsweise die Ebene E in Abbildung 5 die dreikantigen räumlichen Ecken 1, 2, 4, 6, 7 und 8 in zwei Teile, aber nicht die Ecken 3 und 5. Allgemein gilt:

Jede räumliche Ecke, die von der Ebene E in zwei Teile zerlegt wird, enthält als Zerlegungsfläche eine der $2k$ Teilebenen von E , auf die im vorigen Absatz hingewiesen wurde. Folglich ist die Anzahl der räumlichen Ecken, die durch die Ebene E in zwei Teile zerlegt werden, gleich $2k$. Es ergibt sich also:

k Ebenen zerlegen den Raum in $k(k-1) + 2$ Teile; durch die $(k+1)$ -te Ebene E erhöht sich die Anzahl der Teile um $2k$.

$$[k(k-1) + 2] + 2k = k^2 - k + 2 + 2k = k^2 + k + 2 = (k+1)k + 2$$

Dieses Ergebnis erhalten wir aber auch, wenn wir in dem Ausdruck $k(k-1) + 2$ die Zahl k jeweils durch $k+1$ ersetzen. Die Hypothese bleibt demnach auch beim Übergang von k zu $k+1$ richtig. Folglich gilt sie nach der vollständigen Induktion allgemein.

Schließlich soll noch eine Aufgabe aus der Lehre von den Winkelfunktionen gelöst werden, in der die Methode der vollständigen Induktion ebenfalls mit viel Erfolg angewendet werden kann.

Aufgabe 7 : Das Produkt

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha$$

ist durch $\sin \alpha$ und $\sin 2^{n+1} \alpha$ auszudrücken ($\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots, k \cdot 180^\circ$).

Wir ermitteln die Hypothese:

$$\begin{array}{l|l} n = 0 & \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} \\ n = 1 & \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{2 \cdot 2 \sin \alpha} = \frac{\sin 2^2 \alpha}{2^2 \sin \alpha} \end{array}$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Ergebnisse ergibt sich folgende Hypothese:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \cdot \sin \alpha}$$

1. Die Hypothese ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$.
2. Wir nehmen an, dass die Hypothese für eine beliebige natürliche Zahl $n = k$ richtig ist, dass also gilt:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \cdot \sin \alpha}$$

und untersuchen, ob sie auch beim Übergang zu $n = k+1$ richtig bleibt. Hierfür muss zum Produkt $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha$ noch der Faktor $\cos 2^{k+1} \alpha$ hinzugefügt

⁴Die Nummerierung der Ecken erfolgte entgegen der Uhrzeigerdrehung.

werden, also

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^k \alpha \cdot \cos 2^{k+1} \alpha &= \frac{\sin 2^{k+1} \alpha}{2^{k+1} \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{2 \sin 2^{k+1} \alpha \cos 2^{k+1} \alpha}{2 \cdot \sin 2^{k+1} \alpha} \\ &= \frac{2 \cdot \sin 2^{k+1} \alpha \cdot \cos 2^{k+1} \alpha}{2 \cdot 2^{k+1} \sin \alpha} = \frac{\sin 2^{k+2} \alpha}{2^{k+2} \cdot \sin \alpha}\end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit der Hypothese für den Übergang von k zu $k+1$ bewiesen. Unter Anwendung der Methode der vollständigen Induktion ist somit aber auch bewiesen, dass allgemein gilt:

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \cdot \sin \alpha} \quad (\alpha \neq k \cdot 180^\circ)$$

1.5 Ein Blick zurück

Wir wollen versuchen, einige Schlussfolgerungen aus dem bisher dargestellten Stoff zu ziehen.

1. Wenn irgendeine Gesetzmäßigkeit bei einer endlichen Anzahl von Fällen nachgewiesen wird - und mag diese Zahl auch noch so groß sein -, darf man keineswegs annehmen, dass dies einem Beweis im mathematischen Sinn gleichkommt.

Eine für eine Anzahl von Fällen erkannte Gesetzmäßigkeit kann in der Mathematik lediglich als eine vernünftige Hypothese angesehen werden, die sich im Ergebnis der weiteren Prüfung als richtig oder als falsch erweisen kann.

Bevor nicht die festgestellte Gesetzmäßigkeit bewiesen worden ist, kann man ihre allgemeine Gültigkeit nur vermuten bzw. annehmen, dass die Vermutung zur Gewissheit wird, wenn man den Nachweis der Allgemeingültigkeit beispielsweise mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion erbringt.

Wenn der Beweis gelingt, ist die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes ermittelt worden. Gelingt der Beweis nicht, so bleibt die Frage weiterhin offen.

2. Bei einigen der angeführten Aufgaben (1, 2, 4 und 7) musste die Ausgangshypothese erst aufgestellt werden, bei anderen Aufgaben (3, 5 und 6) wurde die Hypothese bereits in fertiger Form gegeben. Das Aufstellen einer Hypothese ist nicht immer einfach. Insbesondere würde die Ermittlung der Hypothesen für die Aufgaben 3, 5 und 6 große Schwierigkeiten bereiten.

Die Methode der vollständigen Induktion selbst gibt für das Aufstellen der Hypothesen keinerlei Hinweise. Courant sagte einmal:

"Die Frage, wie die Hypothese aufzustellen ist, gehört zu den Gebieten, für die es keine allgemeine Regel gibt. Hier gilt es zu experimentieren, analog zur konstruktiven Induktion."

Zur Aufstellung ein und derselben Hypothese können wir auf verschiedenen Wegen gelangen. Oft ist der zu wählende Weg nicht einfach und verlangt viel Phantasie.

Überzeugend wird das von D. Poia in seinem Werk "Die Mathematik und die Glaubwürdigkeit ihrer Urteile" dargestellt. Der Autor beschreibt das Aufstellen der Hypothese

über die Summe der Quadratzahlen in der natürlichen Reihenfolge von 1 bis n folgendermaßen:

"Leicht ist es, die Summenformel für die ersten n ganzen Zahlen aufzustellen. Es ergibt sich die bekannte Formel

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

die man auf verschiedene Art erklären und beweisen kann. Dagegen ist es schwer, die Summenformel für die ersten n Quadratzahlen aufzustellen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe versucht man, ähnliche bekannte Reihen nebeneinander zu stellen und eventuelle Übereinstimmungen dieser Summen zu untersuchen:

n	1	2	3	4	5	6	...
$1 + 2 + 3 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	...
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	...

Welche Übereinstimmung oder Verbindung zeigt sich nun zwischen den letzten beiden Zeilen? Wir können auf die Idee kommen, einmal ihre Quotienten zu untersuchen.

n	1	2	3	4	5	6	...
$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$...

Hier wird eine Gesetzmäßigkeit ersichtlich. Wenn wir nämlich die Quotienten der zweiten Tabelle in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}$$

ist diese Gesetzmäßigkeit kaum zu übersehen.

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2n + 1}{3}$$

Nunmehr müssen wir noch die Summe im Nenner der linken Seite durch die eingangs erwähnte Summenformel der natürlichen Zahlen $\frac{n(n+1)}{2}$ ersetzen. Dann erhalten wir die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dies ist der Weg, den D. Poia zur Aufstellung der Hypothese eingeschlagen hat. Der Leser spürt, dass dieser Weg nicht einfach ist. Aber auch die anderen bekannten Wege sind nicht weniger verwickelt.

1.6 Aufgaben

1. Beweisen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion, dass die Summe der ersten n dritten Potenzen in der natürlichen Reihenfolge gleich dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist!

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

2. Wie groß ist die Summe der folgenden Zahlen?

$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1}$$

Hinweis: Berücksichtigen Sie zur Aufstellung der Hypothese die folgende Tabelle!

n	1	2	3	4	5	...
S_n	1	3	7	15	31	...

3. Es ist die Summe der Produkte zu ermitteln:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)$$

Hinweis: Berücksichtigen Sie zur Aufstellung der Hypothese die folgende Tabelle!

n	1	2	3	4	...
S_n	2	8	20	40	...

Versuchen Sie, die Zahlen der unteren Zeile in der Tabelle als spezielle Quotienten darzustellen, wobei drei in natürlicher Reihenfolge aufeinanderfolgende Zahlen durch die Zahl 3 dividiert werden!

4. Es ist die Summe der Produkte zu ermitteln:

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$$

Hinweis: Berücksichtigen Sie zur Aufstellung der Hypothese die folgende Tabelle!

n	1	2	3	...
S_n	6	30	90	...

Bilden Sie aus den Zahlen in der letzten Spalte der Tabelle spezielle Quotienten, wobei vier in natürlicher Reihenfolge aufeinanderfolgende Zahlen durch die Zahl 4 dividiert werden!

5. Beweisen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion, dass gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

6. Beweisen Sie, dass die Summen der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar sind!

7. Gegeben ist die Zahlenfolge von Fibonacci⁵

$$1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Es ist zu beweisen, dass gilt

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

wenn $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ und $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ist.

Lösung: Die gegebene Formel ist für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ richtig (Überprüfen!). Wir nehmen an, dass sie für $n = k$ richtig ist, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein soll, und untersuchen, ob sie dann auch für $n = k + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} u_{k+1} = u_k + u_{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] \end{aligned}$$

Da

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Die Formel ist also für $n = k + 1$ richtig, wenn sie bereits für $n = k$ Gültigkeit hat. Dann können wir aber gemäß der vollständigen Induktion sagen, dass

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

für jedes beliebige natürliche n gilt.

8. Beweisen Sie, dass n in einer Ebene liegende Geraden, von denen aber niemals zwei parallel sind und von denen niemals drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen, die Ebene in $N = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ Teile zerlegen!

Hinweis: Wenn man zu den k gegebenen Geraden eine neue $(k+1)$ -te Gerade hinzufügt, so schneidet sie unter den im Satz ausgesprochenen Nebenbedingungen stets die k gegebenen Geraden und zerlegt die Ebene in $k + 1$ Stücke.

9. In wieviel Dreiecke kann ein beliebiges Vieleck (n -Eck) durch seine einander nicht schneidenden Diagonalen zerlegt werden?

10. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x$$

⁵Fibonacci - ein italienischer Mathematiker zu Beginn des XIII. Jahrhunderts. Genaueres über Fibonacci und seine Zahlen erfährt der Leser im zweiten Kapitel dieses Buches.

Hinweis: Benutzen Sie zum Beweis die folgenden trigonometrischen Formeln!

$$\begin{aligned}\sin(k+1)x &= 2 \sin \frac{k+1}{2}x \cdot \cos \frac{k+1}{2}x \\ \sin \frac{k+1}{2}x - \sin \frac{k+1}{2}x &= 2 \cos \frac{2k+3}{4}x \cdot \sin \frac{x}{4}\end{aligned}$$

11. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$$

Hinweis: Stellen Sie zur Überprüfung der Hypothese für $n = 1$ den Ausdruck $\sin \frac{3}{2}x$ als $\sin \left(x + \frac{x}{2}\right)$ dar, und benutzen Sie die Formel für $\sin(x + y)$!

Ergänzen Sie dann das Produkt $2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos(k+1)x$ so, dass Sie einen Ausdruck erhalten, der einem Additionstheorem entspricht!

12. Bekanntlich gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Beweisen Sie, dass für beliebiges ganzes und positives n folgende Gleichung gilt (die binomische Formel von Newton).

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{k-1} + b^n\end{aligned}$$

1.7 Einige historische Bemerkungen

Die Wurzeln der induktiven Forschungsmethode gehen bis in uralte Zeiten zurück. Ohne die Induktion wäre eine schöpferische Arbeit weder in der Mathematik noch in der Physik oder in einem beliebigen anderen Gebiet der Wissenschaft denkbar. Speziell in der Mathematik ermöglicht es häufig die induktive Methode, Vermutungen aufzustellen, die später in ihrer ganzen Allgemeinheit durch irgendeine andere Methode bewiesen werden.

Für die Ermittlung der Allgemeingültigkeit ist die induktive Methode jedoch unzureichend. In diesem Zusammenhang ist eine Bemerkung W.I. Lenins aus seinen philosophischen Schriften von Interesse: "Die auf dem einfachsten induktiven Wege erhaltene einfachste Wahrheit ist immer unvollständig; denn die Erfahrung ist nie abgeschlossen."

Warum aber erhielt die Methode der vollständigen oder mathematischen Induktion in der Mathematik als letzte Stufe der induktiven Forschung eine so große Bedeutung? Wo entstand der Wunsch, diese Methode aufzustellen, und welcher Mathematiker oder welche mathematische Schule hat die Methode der vollständigen Induktion erstmals angewandt?

Ein Autor weist darauf hin, dass man dem Beweis der Methode der vollständigen Induktion bereits bei Euklid begegnen kann, und zwar eher als dem Analogieschluss. Es besteht Grund zu der Annahme, dass Jakob Bernoulli (1654-1705) die Methode der vollständigen Induktion gefunden hat.

Nahezu unbestritten ist es aber auch, dass diese Methode bei dem französischen Mathematiker, Physiker und Philosophen B. Pascal (1623-1662) bereits eine breite Anwendung fand. Ihn bezeichnet man gewöhnlich als den Erfinder der genannten Methode.



Blaise Pascal



René Descartes (Cartesius)

Zweifellos spielt René Descartes (1596-1650) bei der Einführung und Ausformung der Methode der vollständigen Induktion eine entscheidende Rolle. Er benutzte sie bei Untersuchungen der allgemeinen Eigenschaften algebraischer Kurven.

Dabei stieß er auf rechnerische Beziehungen, die nicht ohne Untersuchung einer großen Anzahl von Einzelfällen bewiesen werden konnten. Er studierte Eigenschaften an Objekten ersten Grades und verfolgte diese Eigenschaften beim Übergang zum nächsthöheren Grad. Die Untersuchungsergebnisse von Descartes stellen in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der vollständigen Induktion dar.

Literatur

H. Steinhaus: Kaleidoskop der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

I.S. Sominski: Die Methode der vollständigen Induktion. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

2 Folgen und spezielle Reihen

"Dieser Gegenstand der Mathematik ist derart wichtig, dass man es nicht versäumen darf, diese Teile ein wenig interessanter zu gestalten."

Pascal

2.1 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertum

Es hat einen eigentümlichen Reiz, Nachforschungen über die Anfänge der verschiedenen Gebiete der Mathematik und über die gesellschaftlichen Notwendigkeiten und Voraussetzungen zu ihrer Entwicklung zu betreiben.



Abb. 9: Teil aus dem altägyptischen Illahun-Papyrus (etwa 1900 v.u.Z.)

Stellen wir uns beispielsweise die Aufgabe, nach den Anfängen und dem Entstehungsort der Lehre von den Folgen und Reihen zu forschen, so müssen wir zur Beantwortung viele Seiten im Buch der Geschichte zurückschlagen, bis wir in die ältesten Epochen der Ägypter und Assyrer kommen.

Vor ungefähr siebzig Jahren fand der Engländer Rhind bei Ausgrabungen in Ägypten einen Papyrus, dessen Alter auf Grund der Form der Schriftzeichen auf etwa 4000 Jahre geschätzt wird. Die Entzifferung der altägyptischen Schriftzeichen, der Hieroglyphen, bereitete lange Zeit große Schwierigkeiten. Der Papyrus Rhind, wie dieses Schriftstück nun genannt wird, offenbarte sich bei seiner Entzifferung als das bisher älteste Rechenbuch der Welt. Es enthält eine Anzahl mathematischer Aufgaben, von denen einige auf die Kenntnis einzelner Folgen schließen lassen.

Sehen wir uns eine dieser Aufgaben näher an:

"Mag dir gesagt werden: Teile zehn Maß Gerste so unter zehn Menschen, dass der Unterschied zwischen jedem Menschen und seinem Nachbarn $\bar{8}$ (d.h. $\frac{1}{8}$) Maß Gerste beträgt."

Zum besseren Verständnis wollen wir den Text dieser Aufgabe in unsere Ausdrucksweise bringen: "10 Maß Gerste sind unter 10 Personen derart zu teilen, dass die Anteile jeder Person den Gliedern einer arithmetischen Folge mit der Differenz $\frac{1}{8}$ Maß entsprechen."

Im erwähnten Papyrus werden neben dem Text der Aufgabe auch die Regeln zur Berechnung der Anteile für die erste und für die letzte Person angegeben. In die heute

gebräuchliche Formelsprache übertragen lautet diese Regel:

$$a_1 = \frac{s}{n} - \frac{d}{2}(n-1) \quad (1)$$

Wenn wir uns diese Formel näher ansehen, können wir feststellen, dass wir sie leicht durch einfache arithmetische Umformungen aus der bekannten Summenformel für die Glieder einer arithmetischen Folge erhalten.

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n, \quad S = a_1n + \frac{d}{2}(n-1)n, \quad a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$$

Haben wir aber erst den ersten der zehn Werte, so ist es mit Hilfe der Formel (1) leicht, auch die übrigen neun Werte a_2, a_3, \dots, a_{10} zu errechnen, denn dann ist:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d; \quad \dots; \quad a_{10} = a_9 + d \quad \text{mit } d = -\frac{1}{8}$$

Besonders müssen wir darüber erstaunt sein, wie die altägyptischen Mathematiker die Formel (1) ausdrückten. Sie kannten ja noch keine ausgearbeitete Theorie der Reihen, und auch der Umgang mit Formeln war ihnen fremd.

Über die Frage nach der Herleitung der Formel (1) geben die Werke zur Geschichte der Mathematik unterschiedliche Auskünfte. Offensichtlich scheint bei der ursprünglichen Lösung dieser Aufgabe die "Methode des systematischen Probierens" eine große Rolle gespielt zu haben. Zumindest wird diese Ansicht von den Wissenschaftlern W.W. Babinina und M.J. Bygodskow vertreten.

Es kann aber auch folgender Weg eingeschlagen worden sein, der mit seinen Überlegungen ebenfalls zur Lösung der aufgeworfenen Frage führt:

Wir gehen davon aus, dass erst einmal jede der zehn beteiligten Personen den gleichen Anteil a erhält:

$$a \quad a \quad a$$

Damit sich bei einem Vergleich der Anteile der ersten beiden Personen eine Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß Gerste ergibt, kann man vom Anteil der zweiten Person $\frac{1}{16}$ Maß Gerste wegnehmen und zum Anteil der ersten hinzufügen:

$$a + \frac{1}{16} \quad a - \frac{1}{16} \quad a \quad a$$

Da aber die zweite Person $\frac{1}{8}$ Maß mehr haben soll als die dritte, muss man der dritten $2 \cdot \frac{1}{16}$ Maß fortnehmen. Nun gibt man $\frac{1}{16}$ Maß der zweiten Person, die damit wirklich $\frac{1}{8}$ Maß mehr hat als die dritte, und $\frac{1}{16}$ Maß der ersten Person, damit auch hier die Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß zum Anteil der zweiten erhalten bleibt.

$$a + \frac{2}{16} \quad a \quad a - \frac{2}{16} \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a$$

Führt man nun diese Überlegungen analog weiter, so kommt man zu der Verteilungsregel, die bereits den ägyptischen Mathematikern bekannt war und die durch die Formel (1) ausgedrückt wird:

$a + \frac{3}{16}$	$a + \frac{1}{16}$	$a - \frac{1}{16}$	$a - \frac{3}{16}$	a	a	a	a	a	a
$a + \frac{4}{16}$	$a + \frac{2}{16}$	a	$a - \frac{2}{16}$	$a - \frac{4}{16}$	a	a	a	a	a
$a + \frac{5}{16}$	$a + \frac{3}{16}$	$a + \frac{1}{16}$	$a - \frac{1}{16}$	$a - \frac{3}{16}$	$a - \frac{5}{16}$	a	a	a	a
$a + \frac{6}{16}$	$a + \frac{4}{16}$	$a + \frac{2}{16}$	a	$a - \frac{2}{16}$	$a - \frac{4}{16}$	$a - \frac{6}{16}$	a	a	a
$a + \frac{7}{16}$	$a + \frac{5}{16}$	$a + \frac{3}{16}$	$a + \frac{1}{16}$	$a - \frac{1}{16}$	$a - \frac{3}{16}$	$a - \frac{5}{16}$	$a - \frac{7}{16}$	a	a
$a + \frac{8}{16}$	$a + \frac{6}{16}$	$a + \frac{4}{16}$	$a + \frac{2}{16}$	a	$a - \frac{2}{16}$	$a - \frac{4}{16}$	$a - \frac{6}{16}$	$a - \frac{8}{16}$	a
$a + \frac{9}{16}$	$a + \frac{7}{16}$	$a + \frac{5}{16}$	$a + \frac{3}{16}$	$a + \frac{1}{16}$	$a - \frac{1}{16}$	$a - \frac{3}{16}$	$a - \frac{5}{16}$	$a - \frac{7}{16}$	$a - \frac{9}{16}$

Dies lässt sich auch folgendermaßen darstellen. Man teilt 10 Maß Gerste erst einmal in 10 gleiche Teile. Jeder erhält damit 1 Maß. Danach nimmt man von allen mit Ausnahme des ersten die Hälfte der verlangten Differenz (d.h. je $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt dies dem ersten, der damit seinen Anteil erhalten hat.

Nun nimmt man von allen mit Ausnahme der ersten zwei wiederum die Hälfte der Differenz (also erneut $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt das dem zweiten, der damit ebenfalls seinen Anteil erhalten hat.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1 + \frac{9}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$	$1 - \frac{1}{16}$
$1 + \frac{9}{16}$	$1 - \frac{1}{16} + \frac{8}{16}$	$1 - \frac{2}{16}$							

Wir wollen uns davon überzeugen, ob zwischen den Anteilen der ersten beiden Personen auch wirklich die geforderte Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß besteht:

$$a_1 - a_2 = \left(1 + \frac{9}{16}\right) - \left(1 - \frac{1}{16} + \frac{8}{16}\right) = \frac{25 - 23}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Setzt man nun die Aufteilung in der angeführten Reihenfolge fort, so erhält man den Anteil des Dritten:

$$a_3 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = 1 + \frac{5}{16}$$

Die Differenz zwischen der zweiten und der dritten Person ist wiederum gleich $\frac{1}{8}$ Maß. Diesen Prozess kann man entsprechend der angeführten Verteilung fortsetzen und erhält dann die bereits in der vorigen Aufstellung angegebenen Ergebnisse.

Wir können annehmen, dass dieses praktische Lösungsverfahren den ägyptischen Mathematikern bekannt war. In verallgemeinerter Form ging es dann sinngemäß nach Formel (1) in den Papyrus Rhind ein.

Bei der Lösung derartiger Aufgaben wurde also zuerst ein Durchschnittsanteil berechnet ($\frac{S}{n} = 1$ Maß). Dann halbierte man die Differenz ($\frac{d}{2} = \frac{1}{16}$ Maß), multiplizierte diese mit $n - 1$ und erhielt mit dem Produkt den Betrag, der zum Durchschnittsanteil hinzuzufügen bzw. abzuziehen war ($\frac{d}{2}(n - 1)$).

Auf diese Weise erhielt man den ersten Anteil. Die weiteren Anteile errechnete man durch $a_1 + d = a_2$; $a_2 + d = a_3$ und so weiter ($d = -\frac{1}{8}$).

Im Papyrus Rhind finden wir auch Aufgaben über geometrische Folgen. Einer Aufgabe zum Beispiel liegt die Folge der Potenzen mit der Basis 7 zugrunde: $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 \dots$

Interessant ist die Darstellung dieser Potenzen durch Hieroglyphen. Sie entsprechen der Reihe nach den Darstellungen für Haus, Katze, Maus, Gerste, Maß. Hieraus können wir uns eine Entschlüsselung dieser Hieroglyphen wie folgt denken:

Jemand hat sieben Häuser. In jedem Haus gibt es sieben Katzen. Jede Katze verschlingt sieben Mäuse. Jede Maus frisst sieben Gerstenähren und jede Ähre ergibt, wenn man die Körner aussät, sieben Maß Gerste. Man ermittle die Summe aller Häuser, Katzen, Mäuse, Ähren und Maß Gerste.

In dem Papyrus werden zwei Lösungen für diese Aufgabe angegeben. Erstens eine Lösung mit Hilfe der direkten Multiplikation und anschließender Addition der Glieder ($7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$) und zweitens eine Lösung durch Multiplikation der Zahl 2801 mit 7. Die Zahl 2801 erhält man als Ergebnis der Summierung von $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$. Die allgemeine Summenformel für die Glieder einer geometrischen Folge haben die Ägypter anscheinend selbst für den einfachen Fall $b_1 = q$ noch nicht gekannt.

Diese Aufgabe über eine geometrische Reihe finden wir mit unwesentlichen textlichen Abänderungen in den alten Schriften verschiedener Völker, so auch in der altrussischen Literatur. Dort hat die Aufgabe etwa folgenden Wortlaut:

"Es gibt sieben Greise. Jeder Greis hat sieben Stöcke. An jedem Stock sind sieben Äste. An jedem Ast hängen sieben Beutel. In jedem Beutel stecken sieben Spatzen. Jeder Spatz hat sieben Mägen. Wieviel Dinge sind das zusammen?"

Auch die Erforschung der in babylonischer Keilschrift geschriebenen Texte aus der Hamurapischen Epoche (XVIII. Jahrhundert v.u.Z.) ergab, dass schon im alten Babylon einige ökonomische und wissenschaftliche Probleme mit Hilfe arithmetischer und geometrischer Reihen gelöst wurden. Sehen wir uns beispielsweise die folgende Aufgabe an:

"10 Brüder besitzen $1\frac{2}{3}$ Silberminen⁶. Bei der Teilung wird gleichmäßig abgestuft. Um welchen Betrag die Anteile geringer werden, das weiß man nicht. Der achte erhält jedoch 6 Schekel. Wieviel erhält jeder der Brüder?"

Analysieren wir den Lösungsweg der Babylonier, so fällt uns auf, dass über die Glieder einer arithmetischen Folge Eigenschaften bekannt waren, die heute meist unserer Aufmerksamkeit entgehen. Nehmen wir hierzu die folgende Summenformel einer arithmetischen Folge und formen nach $a_1 + a_n$ um:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \quad , \quad a_1 + a_n = 2\frac{S_n}{n}$$

Der Quotient $\frac{S_n}{n}$ der in dieser Form auftritt, wird auch Mittelwert genannt. Es soll hierzu noch bemerkt werden, dass die Summe der beiden äußeren Glieder durch die Summe zweier geeigneter anderer Glieder der Folge ersetzt werden kann, wenn nämlich die Summe der Indizes dieser Glieder genau $n+1$ beträgt. Wir können diese Eigenschaft folgendermaßen formulieren:

⁶1 Silbermine oder kurz Mine ist eine altbabylonische Münzeinheit. $1\frac{2}{3}$ -Minen entsprechen 100 Schekel.

Die Summe zweier Glieder einer arithmetischen Folge ist gleich dem Doppelten des Mittelwertes, wenn die Summe der Indizes dieser Glieder $n + 1$ ergibt:

$$a_i + a_k = 2 \frac{S_n}{n} \quad (i + k = n + 1)$$

Jetzt wollen wir untersuchen, wie die altbabylonischen Mathematiker die oben genannte Aufgabe mit Hilfe der angeführten Eigenschaft lösten. Der mittlere Anteil eines jeden der zehn Brüder beträgt 10 Schekel. Die Summe der Anteile des dritten und achten Bruders ist gleich dem Doppelten der mittleren Länge, also gleich 20 Schekel, denn es ist $3 + 8 = 11 = n + 1$.

Da der Anteil des achten Bruders mit 6 Schekel angegeben wurde, erhält der dritte Bruder 14 Schekel, und es besteht zwischen den Anteilen des dritten und des achten Bruders ein Unterschied von 8 Schekeln. Diese 8 Schekel verteilen sich nun auf 5 Stufen, die vom dritten bis zum achten Anteil zu berücksichtigen sind, so dass sich als Differenz von Stufe zu Stufe und damit als Differenz der Folge $8 : 5 = 1\frac{3}{5}$ ergibt.

Wie würden wir diese Aufgabe lösen?

In der Epoche des Hammurapi kannten die babylonischen Mathematiker auch schon geometrische Folgen. Man fand Tontafeln mit Keilschrifttext und übersetzte sie aus dem Assyrischen in das Englische. In einem Text wurde dargelegt, wieviel Teile der Mondscheibe an jedem der 15 Tage vom Neumond bis zum Vollmond von der Sonne beleuchtet werden.

Danach verläuft die Zunahme des beleuchteten Teiles der Mondscheibe in den ersten fünf Tagen gesetzmäßig nach einer geometrischen Folge mit dem Quotienten 2 und folgt dann in den darauffolgenden 10 Tagen den Gesetzen der arithmetischen Folge mit der Differenz 16. Hieraus können wir ersehen, mit welchem großem Interesse die Babylonier die Astronomie betrieben haben.

Aus einer Reihe historischer Aufgaben über Folgen und Reihen können wir das Erstaunen der damaligen Menschen über das starke Anwachsen der Glieder einer geometrischen Folge, deren Quotient größer als 1 ist, erkennen. Besonders fiel ihnen dieses Anwachsen auf, wenn zwei Folgen, eine arithmetische und eine geometrische, nebeneinander untersucht wurden.

Wenden wir uns in diesem Zusammenhang der bekannten indischen Aufgabe über das Schachbrett zu.

Nach einer Sage war der indische Prinz Siram über die Scharfsinnigkeit und über die Vielfalt der möglichen Stellungen des Schachspiels entzückt. Er rief den Erfinder, den Gelehrten Seta, zu sich und sagte zu ihm:

"Ich will Dich, Seta, für das wunderbare Spiel, das Du erdacht hast, würdig belohnen. Ich bin reich genug, jeden Deiner Wünsche zu erfüllen."

"O Gebieter", antwortete Seta, "befiel, mir für das erste Feld des Schachbrettes ein Weizenkorn zu übergeben; für das zweite Feld dann zwei Weizenkörner; für das dritte Feld vier Körner und für jedes weitere Feld doppelt soviel Körner wie für das vorangegangene."

"Du sollst Deine Körner erhalten", erwiderte der Prinz, "aber wisse, dass Du eine meiner Freigiebigkeit unwürdige Bitte getan hast. Mein Diener Stupai wird Dir Deine Säcke mit Weizen hinaustragen."

Am nächsten Tag erschien der Hofmathematiker beim Prinzen.

"Wir haben die Menge des Kornes, die Seta zu erhalten hat, gewissenhaft ausgerechnet", sagte er zum Prinzen. "Diese Zahl ist aber derart groß, dass das Korn aus Euren Speichern nicht ausreicht, auch nicht das aus allen Speichern Eures Kaiserreiches, ja nicht einmal das Korn, das auf der ganzen Erde geerntet wird."

Mit Erstaunen vernahm der Prinz die Worte des Gelehrten. "Nenne mir diese ungeheuerliche Zahl!" befahl er. "Sie lautet 18 446 744 073 709 551 615", entgegnete der Mathematiker.

Überprüfen Sie diese Zahl, indem Sie in die Formel

$$S = b \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

für $b = 1$, $q = 2$ und $n = 64$ einsetzen!

Im alten Griechenland zur Zeit des Euklid und des Archimedes (3. Jahrh. v.u.Z.) beschäftigte man sich mit den Eigenschaften der Reihen und Folgen nicht nur zum Zwecke der Lösung praktischer Aufgaben, sondern darüber hinaus im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen.

So finden wir in Euklids Buch Elemente eine Formel für die Summe dreier Glieder einer geometrischen Reihe. Hierbei ist es interessant, dass Euklid an die geometrische Reihe unter Ausnutzung der Eigenschaften einer Proportion herangeht.

Bekanntlich wird bei einer stetigen Proportion $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ das mittlere Glied b durch das geometrische Mittel der beiden Außenglieder a und c geliefert. Nun möge eine Reihe durch folgende Proportionen gegeben sein:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$$

Wir bilden hieraus eine neue Proportion, indem wir von jedem der Verhältnisse 1 subtrahieren (Korrespondierende Addition bzw. Subtraktion):

$$\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{b} = \frac{d-c}{c}$$

Verwenden wir nun die Eigenschaften der Glieder einer fortlaufenden Proportion, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{(b-a) + (c-b) + (d-c)}{a+b+c} &= \frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{b} = \frac{d-c}{c} \\ \frac{d-a}{a+b+c} &= \frac{b-a}{a} \\ a+b+c &= a \frac{d-a}{b-a} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Summe der ersten drei Glieder einer geometrischen Folge a, b, c, d . Damit haben wir aber die uns bekannte Summenformel für eine geometrische Reihe, wir brauchen sie nur auf n Summanden zu erweitern:

$$a + b + c + \dots + k = a \frac{l - a}{b - a}$$

Dabei ist l das Glied der Reihe, das auf k folgt. Vergleichen wir dieses Ergebnis mit

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^{n-1}$$

so erhalten wir

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Archimedes benutzte ebenfalls den Begriff der geometrischen Reihe und ihre Summenformel.

In seiner Arbeit Von der Quadratur der Parabel untersuchte er den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes. Er verwendete dazu das einbeschriebene Polygon und verdoppelte schrittweise die Anzahl der Seiten. Das führte zwangsläufig dazu, die Summe folgender unendlicher fallender Folge zu bestimmen:

$$1, \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots$$

Das Verfahren, das Archimedes hierbei benutzte, ist weniger bekannt. Es gilt auch nur für spezielle Fälle. Die allgemeine Lösung dieser Frage und die bekannte Summenformel für die Glieder einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe hat man erst viel später gefunden.

Im alten Russland treten Aufgaben über Reihen und Folgen erstmalig in einer der ältesten Schriften über Rechtsfragen auf. Die Schrift heißt Russisches Recht und wurde im XI. Jahrhundert von Jaroslaw Mudrom zusammengestellt.

In einem Paragraphen wird das Anwachsen einer Mutterschafherde von 22 Stück im Laufe von 12 Jahren behandelt. Dabei wird vorausgesetzt, dass jedes Mutterschaf jährlich ein Schaf und einen Bock wirft (Ergebnis: $22 \cdot 2^{13}$).

Weiterhin enthält die Schrift eine Reihe interessanter Berechnungen vorwiegend landwirtschaftlicher Aufgaben, beispielsweise über das Anwachsen des Viehbestandes in einer Reihe von Jahren, über die Zunahme der Bienen eines Dorfes, über den zu erwartenden Getreideertrag, wenn eine bestimmte Aussaatmenge zugrunde gelegt wird. Schließlich findet man auch Lohnberechnungen für landwirtschaftliche Saisonarbeit.

Russische Handschriften über Folgen und Reihen sind aus dem XV. bis XVII. Jahrhundert erhalten. Eine der Aufgaben hatte folgenden Wortlaut:

"Da gab es 40 Städte. Jede dieser Städte hatte 40 Straßen und in jeder Straße befanden sich 40 Häuser. Vor jedem Haus standen 40 Säulen. An jeder Säule hingen 40 Ringe und an jedem Ring waren 40 Pferde angeknüpft. Um jedes Pferd standen 40 Menschen, von denen jeder 40 Peitschen besaß. Wieviel Peitschen mögen das wohl sein?"

Eine große Anzahl Aufgaben über Reihen enthält ein hervorragendes Werk des beginnenden XVIII. Jahrhunderts, die Arithmetik von L.F. Magnizkii. Für die weitere Entwicklung ist dieses Buch, das Michael Wassiljewitsch Lomonossow das "Tor zur Gelehrsamkeit" nannte, der Grundstein der mathematischen Literatur in Russland. Machen wir uns mit zwei Aufgaben aus diesem Werk bekannt.

"Ein Kaufmann hat 14 silberne Wodkagläser. Die Gewichte dieser Gläser verhalten sich wie die Glieder einer arithmetischen Folge mit der konstanten Differenz 4. Das letzte der Gläser wiegt 59 Lot⁷. Bestimme, wieviel jedes Glas wiegt!"

"Ein Mann verkaufte ein Pferd für 156 Rubel. Der Käufer bereute den Kauf und wollte das Pferd gern zurückgeben. Deshalb kam er noch einmal auf den Kauf zurück und erklärte dem Verkäufer, dass das Pferd nicht soviel wert sei.

Da schlug der Verkäufer einen anderen Handel mit folgenden Worten vor:

'Wenn Dir der Preis für das Pferd zu hoch erscheint, so kaufe doch nur die Nägel, die das Pferd unter den Hufen hat. Das Pferd selber kannst Du dann als Geschenk mitnehmen. Es sind an jedem Huf 6 Nägel, die Du folgendermaßen bezahlst:

Für den ersten Nagel zahle eine viertel Kopeke, für den zweiten eine halbe Kopeke, für den dritten eine ganze Kopeke und so fort, bis Du alle Nägel bezahlt hast.'

Der Käufer glaubte nun, einen äußerst geringen Preis ausgehandelt zu haben und war allen Ernstes der Ansicht, dass er das Pferd nahezu geschenkt erhält. Er versprach, den vereinbarten Preis, den er auf etwa 10 Rubel schätzte, zu zahlen."

Um wieviel hat sich der Käufer verschätzt ?

Das bereits erwähnte Lehrbuch gibt als Preis $4178703\frac{3}{4}$ Kop. an.

Überprüfen Sie die Rechnung!

2.2 Worauf beruhen die Bezeichnungen arithmetische und geometrische Folge?

Wenden wir uns jetzt der Beantwortung der Frage zu, warum die eine Folge arithmetisch und die andere geometrisch genannt wird.

Schauen wir uns zunächst eine Eigenschaft der arithmetischen Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$$

an. Bekanntlich gilt

$$a_{k-1} = a_1 + d(k-2), \quad a_k = a_1 + d(k-1), \quad a_{k+1} = a_1 + dk$$

womit wir als arithmetisches Mittel für a_{k-1} und a_{k+1} erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} &= \frac{a_1 + d(k-2) + a_1 + dk}{2} = \frac{2a_1 + 2dk - 2d}{2} \\ &= \frac{2[a_1 + d(k-1)]}{2} = a_1 + d(k-1) \end{aligned}$$

⁷Lot - alte russische Gewichtseinheit zu 12,8 Gramm.

Dieses Ergebnis stimmt aber mit $a_k = a_1 + d(k - 1)$ überein. Deshalb gilt:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Jedes Glied einer arithmetischen Folge (mit Ausnahme des ersten und letzten) ist das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Glieder der Folge.

Überprüfen wir daraufhin eine geometrische Folge

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$$

Hier gilt:

$$b_{k-1} = b_1 q^{k-2}, \quad b_k = b_1 q^{k-1}, \quad b_{k+1} = b_1 q^k$$

Wir bilden das Produkt der Werte b_{k-1} und b_{k+1} und ziehen aus dem erhaltenen Produkt die Quadratwurzel.

$$b_{k-1} \cdot b_{k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^k = b_1^2 q^{2k-2}, \quad \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} = \sqrt{b_1^2 \cdot q^{2(k-1)}} = b_1 q^{k-1}$$

Das Ergebnis stimmt mit $b_k = b_1 q^{k-1}$ überein. Deshalb gilt:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$$

Jedes Glied einer geometrischen Folge (mit Ausnahme des ersten und letzten) ist gleich dem geometrischen Mittel der beiden benachbarten Glieder der Folge.

Hieraus wird uns verständlich, warum die Bezeichnungen arithmetische bzw. geometrische Folge und Reihe gewählt wurden.

2.3 Über die Summen fallender unendlicher geometrischer Folgen

In der Mathematik und ihren Anwendungen haben diejenigen unendlichen geometrischen Folgen eine große Bedeutung, deren Glieder ständig kleiner werden, deren Teilsummen jedoch immer größer werden.

In einer Folge, z.B. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ kann man bekanntlich beliebig viele Glieder zu Teilsummen zusammenfassen.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Als Summe aller Glieder der fallenden unendlichen geometrischen Reihe bezeichnen wir den Grenzwert, gegen den die Folge der Teilsummen $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ strebt, wenn n

über alle Grenzen wächst.

Bezeichnet man das erste Glied der fallenden unendlichen geometrischen Reihe mit a und den Quotienten mit q ($|q| < 1$), so gilt für die Summe

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

Wenn beispielsweise die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \quad (1)$$

gegeben ist, so erhalten wir nach der obigen Formel als Summe aller ihrer Glieder:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Wir dürfen aber nicht annehmen, dass diese Formel immer zum Ziel führt. An einem Beispiel soll gezeigt werden, dass die Summe einer Folge unendlich vieler fallender Summanden über alle Grenzen wachsen kann.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (2)$$

Obwohl wir hier eine fallende unendliche Folge vor uns haben, können wir die Summe

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (3)$$

nicht wie bei der Folge (1) ermitteln.

Diese Summe wächst nämlich über alle Grenzen, wenn n gegen unendlich strebt. Den Nachweis hierfür können wir nicht direkt an der sogenannten harmonischen Reihe (3) vornehmen. Wir haben aber die Möglichkeit, durch Vergleichen mit einer anderen Reihe zum Ziel zu kommen und geben dazu der Reihe (3) eine andere Form.

$$S_H = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \quad (3a)$$

$$S_V = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \quad (3b)$$

(S_H Summe der harmonischen Reihe; S_V Summe der Vergleichsreihe)

Wir vergleichen nun die durch Klammern zusammengefassten Glieder

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} &> \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die Summen der in der Reihe (3b) in Klammern zusammengefassten Glieder nie größer, sondern vom dritten Ausdruck an sogar kleiner sind als die entsprechenden in der harmonischen Reihe (3a). Folglich muss die Summe der harmonischen Reihe größer sein als die Summe der Vergleichsreihe.

$$S_H > S_V \quad (4)$$

Addieren wir nun die in den Klammern zusammengefassten Glieder unserer Vergleichsreihe (3b), so bemerken wir, dass die Summe jeweils $\frac{1}{2}$ ist. Wir können also die Vergleichsreihe (3b) auch wie folgt schreiben:

$$S_v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Daraus folgt aber unmittelbar, dass diese Summe über alle Grenzen wächst. Wegen der Ungleichung (4) muss dann aber die Summe der harmonischen Reihe erst recht über alle Grenzen wachsen, wenn n gegen unendlich strebt.

Es ist uns also nicht möglich, für die harmonische Folge (2) die Summe zu ermitteln, während für die Folge (1) die Summe der daraus gebildeten unendlichen Reihe durchaus ermittelt und durch die endliche Zahl 2 dargestellt werden kann, nämlich:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Wenn allgemein eine unendliche Folge

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_n, \dots$$

gegeben ist, so bezeichnet man die Summe dieser Glieder, wobei allerdings bei der Summation die Anordnung der Glieder erhalten bleiben muss, als unendliche Reihe.

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$$

Mit S_n bezeichnet man die Summe der ersten n Glieder dieser unendlichen Reihe und nennt sie Teilsumme

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$$

Bildet man nacheinander für $n = 1, 2, 3, \dots$ die Teilsummen, so erhält man eine neue Zahlenfolge, die Folge der Teilsummen

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Strebt nun die Folge der Teilsummen für wachsendes n gegen einen Grenzwert S , so sagt man, die unendliche Reihe sei konvergent und die Zahl S ihre Summe.

Wenn aber die Folge S_n für $n \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert besitzt, so nennt man die unendliche Reihe divergent. In diesem Fall existiert keine Summe.

Demnach ist bei den beiden von uns betrachteten unendlichen Reihen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

die erste Reihe konvergent und die zweite divergent. Offensichtlich liefert uns jede unendliche fallende geometrische Folge bei der Summation ihrer Glieder eine konvergente unendliche Reihe, denn es gilt:

$$S_n = b - bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} = \frac{b - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{b}{1 - q} - \frac{bq^n}{1 - q}$$

Da für unendliche fallende geometrische Folgen $|q| < 1$ ist, ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bq^n}{1 - q} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{1 - q} - \frac{bq^n}{1 - q} \right) = \frac{b}{1 - q}$$



J. d'Alembert

In der Mathematik ist es sehr wichtig, Kriterien für die Konvergenz einer unendlichen Reihe zu besitzen, d.h. Kriterien, die eine Aussage über die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe zulassen und so unnötige Versuche zur Berechnung einer Summe ersparen.

Wir wollen uns hier nur mit einem dieser Kriterien vertraut machen, das der französische Mathematiker J. d'Alembert (1717-1783) aufstellte.

Den Beweis wollen wir jedoch nicht führen.

Gegeben sei eine unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

Für den Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

ist die Reihe konvergent.

Für den Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

ist die Reihe divergent.

Für den Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$$

kann nach dem d'Alembertschen Kriterium nicht entschieden werden, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt.

Zur Übung wollen wir das Verhalten einiger unendlicher Reihen mit Hilfe des Kriteriums von d'Alembert untersuchen.

Aufgabe 1:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} : \frac{1}{2^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n-1}}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

Folglich ist diese Reihe nach dem d'Alembertschen Kriterium konvergent. Das stimmt mit unseren bisherigen Feststellungen überein, denn wir hatten ja die Summe dieser Reihe bereits berechnet. Sie war gleich 2.

Aufgabe 2:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n-1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0 < 1$$

Folglich ist auch diese Reihe konvergent, wie das d'Alembertsche Kriterium aussagt.

In den nachfolgenden Abschnitten werden wir auf die außerordentliche Bedeutung eingehen, die diese Reihe für die Mathematik hat. Hier gelang uns der Nachweis ihrer Konvergenz.

Später werden wir die Summe berechnen, die die sogenannte Nepersche Zahl e , die Basis der natürlichen Logarithmen, liefert. Wir wollen uns dabei noch einmal vergegenwärtigen, dass wir die Summe dieser Reihe selbst noch nicht berechnen können. Wir können lediglich aussagen, dass diese Summe existiert.

Weitere Aufgaben: Untersuchen Sie mit Hilfe des Kriterium von d'Alembert die Konvergenz oder Divergenz der folgenden unendlichen Reihen!

$$1. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$2. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$3. \frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3}$$

Manchmal kann die Frage nach der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe dadurch entschieden werden, dass man Glieder dieser Reihe mit den entsprechenden Gliedern der bekannten Reihen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

vergleicht, von denen die erste bekanntlich konvergiert, während die zweite divergiert. So ist beispielsweise die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

konvergent, weil alle Glieder dieser Reihe mit Ausnahme der ersten beiden kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

sind. Dagegen ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

divergent, weil ihre Glieder (mit Ausnahme des ersten) größer sind als die entsprechenden Glieder der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

2.4 Ein geometrischer Beweis für eine arithmetische Formel

Wir kommen nochmals auf die fallenden unendlichen geometrischen Reihen zurück. Uns ist die Formel zur Berechnung der Summe aller Glieder bekannt. Hier wollen wir uns mit einer geometrischen Deutung dieser Formel vertraut machen, deren Darstellung wir in Abbildung 11 sehen.

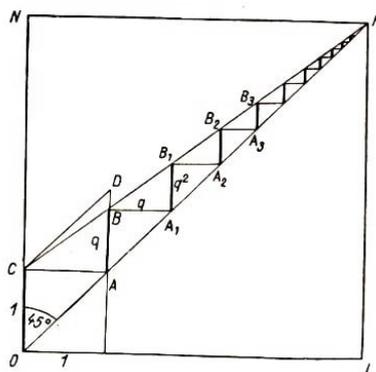


Abb. 11

Wir beweisen die Formel erst für die spezielle Folge der Form

$$1, q, q^2, q^3, \dots \quad (1)$$

mit $|q| < 1$. Die Glieder dieser Folge werden grafisch durch folgende Abschnitte veranschaulicht:

$$0C, AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$$

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CAB , BA_1B_1 , $B_1A_2B_2$, ..., wenn wir $0C = AC = 1$, $BA = q$ und $AD = 1$ wählen. Dann ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{A_1B_1}{AB} &= \frac{AB}{AC}; & \frac{A_1B_1}{q} &= \frac{q}{1}; & A_1B_1 &= q^2 \\ \frac{A_2B_2}{A_1B} &= \frac{A_2B_1}{A_1B}; & \frac{A_2B_2}{q^2} &= \frac{q^2}{q}; & A_2B_2 &= q^3 \quad \dots \end{aligned}$$

Die Summe aller Glieder dieser Folge wird grafisch durch die Seite ML des Quadrates $OLMN$ dargestellt. Zur Bestimmung von ML gehen wir folgendermaßen vor:
Die Dreiecke CBD und OCM sind ähnlich, denn sie stimmen in den Winkeln überein.

$$\triangle CBD \sim \triangle OCM$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} = \frac{AD}{ML} \quad , \quad ML = \frac{OC \cdot AD}{BD} = \frac{1 \cdot 1}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Da ML die Summe der behandelten Folge darstellt, gilt:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

Wenn die Folge nun in der Form

$$b, bq, bq^2, bq^3, \dots$$

mit $|q| < 1$ vorliegt, so gilt

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \frac{b}{1 - q}$$

2.5 Wir lösen Aufgaben

Wir werden die vorangegangenen Ausführungen besser verstehen, wenn wir selbst einige Aufgaben über Folgen und Reihen gelöst haben.

Aufgabe 1: Gegeben sind die Folgen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, \dots \quad (1)$$

und

$$S_1, S_2, S_3, \dots \quad (2)$$

Zwischen beiden Folgen sollen nachstehende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ S_2 &= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \\ S_3 &= a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots + a_{3n} \quad \dots \end{aligned}$$

Es ist nachzuweisen, dass die Folge S_1, S_2, S_3, \dots ebenfalls eine arithmetische Folge ist mit einer Differenz, die n^2 mal so groß ist wie die Differenz der gegebenen Folge (1).

Hinweis: Schreiben Sie die Folge (2) in der Form

$$\frac{(a_1 + a_n)^n}{2}, \quad \frac{(a_{n+1} + a_{n+2})^n}{2}, \quad \frac{(a_{2n+1} + a_{2n+2})^n}{2}, \dots$$

und prüfen Sie gemäß den Darlegungen, ob die Glieder die Eigenschaften einer arithmetischen Folge haben!

Aufgabe 2: Bei einer geometrischen Folge b_1, b_2, b_3, \dots sei $b_{m+n} = A$ und $b_{m-n} = B$. Bestimmen Sie b_m und b_n !

Aufgabe 3: Ermitteln Sie die Summe von n Gliedern der Form

$$1, 11, 111, 1111, \dots$$

Hinweis: Schreiben Sie die gegebenen Zahlen in der Form $\frac{10^n - 1}{9}$, wobei n die laufende Nummer der Zahlen ist!

Aufgabe 4: Es sind a^2, b^2 und c^2 Glieder einer arithmetischen Folge. Beweisen Sie, dass dann auch die Zahlen $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ Glieder einer arithmetischen Folge sind!

Aufgabe 5: Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \dots$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \rightarrow \infty$ zu? (Mit anderen Worten: Berechnen Sie die Summe der unendlichen Reihe aus den Gliedern der oben genannten Folge.)

Lösung:

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Wir führen eine sogenannte Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{AK + A + Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k + A}{k(k+1)}$$

Zur Bestimmung der Werte für A und B benutzen wir den Satz:

Zwei Brüche sind dann und nur dann gleich, wenn sowohl die Zähler als auch die Nenner in gleichem Sinne proportional sind.

Da im vorliegenden Fall die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler übereinstimmen.

$$1 = (A+B)k + A$$

Diese Forderung kann aber nur erfüllt werden, wenn die Gleichungen $A+B=0$ und $A=1$ gelten. Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir

$$A = 1 \quad \text{und} \quad B = -1$$

Damit wird

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

was man auch durch Addieren der Glieder der rechten Seite bestätigen kann. Wir können nun das Glied $\frac{1}{k(k+1)}$ in der Summe zerlegen.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Aufgabe 6: Es ist in ähnlicher Weise die Summe der folgenden unendlichen Reihe zu ermitteln.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2.6 Aus dem Leben der Kaninchen - Die Fihonaccischen Zahlen

Zu Beginn des XIII. Jahrhunderts erschien in Italien ein mathematisches Werk Liber abacci - "Buch über den Abakus". Dieses umfangreiche Buch, es umfasste 15 Abschnitte, war die erste europäische Originaldarstellung der Arithmetik und Algebra.

Alles, was zu Beginn des XIII. Jahrhunderts über diese Zweige der Mathematik bekannt war, wurde im Liber abacci zusammengefasst. Zudem hatte der Autor eine klare, eindeutige und von anderen Darstellungen unabhängige Form gewählt.

Das "Buch über den Abakus" machte die europäischen Leser mit dem Gebrauch der sogenannten arabischen Ziffern und mit dem Dezimalsystem bekannt. Es enthält aber auch Kapitel über die Grundrechenarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen sowie eine Reihe von Lösungsbeispielen.

Ferner gibt es Abschnitte, in der die Berechnung von Quadratwurzeln und kubischen Wurzeln wie auch die Grundrechenarten mit Wurzeln dargelegt werden. Die Ausführungen über irrationale Zahlen lehnen sich eng an die entsprechenden Darstellungen aus Euklids Buch Elemente an. Ferner werden Lösungen für verschiedenste Arten von Gleichungen aufgeführt und Aufgaben gestellt, die mit Hilfe von Gleichungssystemen gelöst werden können.

Das Buch Liber abacci ist eine Einführung in den Teil der Arithmetik und Algebra, den die Griechen, Inder und Araber entwickelt hatten. Es ist die Grundlage für die sich später entwickelnden getrennten Wege dieser mathematischen Disziplinen.

Der Verfasser dieses Buches wurde in der Stadt Pisa geboren. Man nannte ihn Leonardo, Sohn Bonaccis, oder gewöhnlich auch einfach - Leonardo Fibonacci. Er fasste

die Erfolge der italienischen Algebraiker der damaligen Zeit zusammen. Hierfür war er durch den folgenden Umstand besonders geeignet.

Im XII. und XIII. Jahrhundert führte die Stadt Pisa einen umfangreichen Seehandel mit allen damaligen Mittelmeerstaaten. Fibonacci wurde Handelsbevollmächtigter seiner Heimatstadt und musste so nach Algier übersiedeln.

Hier erhielt er seine mathematische Ausbildung und wurde vor allem mit der Algebra der Araber bekannt.

Als Handelsbevollmächtigter musste er aber auch umfangreiche Reisen unternehmen. So kam er im Laufe der Zeit nach Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und Frankreich. Bei diesen Reisen war er ständig bestrebt, seine mathematischen Kenntnisse zu erweitern.

Nachdem Leonardo etwa um das Jahr 1200 nach Pisa zurückkehrte, entstand sein Werk *Liber abacci*, an dem er bis 1202 arbeitete.

Dieses Werk fand eine überaus gute Aufnahme. So konnte bereits 1228 eine Überarbeitung dieses Buches herausgegeben werden. Im Vorwort dieser Ausgabe legt Leonardo Fibonacci auch die hohen Ziele dar, die er mit der Herausgabe seines Buches verfolgt.

"Ich entschied mich", so schrieb er, "bei der Zusammenstellung dieser Arbeit einiges von den indischen Methoden und einiges von der Feinheit der geometrischen Kunst Euklids aufzunehmen. Dies veröffentliche ich in fünfzehn Kapiteln, damit die jetzige Generation der Lateiner dieser Sache nicht mehr unkundig bleibe."

Die theoretischen Tatsachen wurden im *Liber abacci* in einer großen Anzahl Aufgaben dargelegt. Auch wir wollen von einer Aufgabe - der Aufgabe von den Kaninchen - ausgehen.

Es wird in dieser Aufgabe dargestellt, wie jemand für einen Zuchtversuch Kaninchenställe einrichtet. Die einzelnen Ställe sind für jeweils ein Pärchen bestimmt und ermöglichen die genaue Kontrolle des Zuwachses an neuen Kaninchenpärchen.

Dabei sei die Natur dieser Kaninchen so, dass bei einem Paar genau zwei junge Paare im Monat das Licht der Welt erblicken. Eines dieser jungen Paare erhält bereits im darauffolgenden Monat zwei Nachwuchspaare, während das andere Paar einen Monat aussetzen muss und erst im zweiten Monat nach der eigenen Geburt zwei junge Paare wirft. Im drittfolgenden Monat erhalten also ein Enkelpaar und das zweite Kinderpaar je zwei neue Paare, während das zweite Enkelpaar einen Monat warten muss und so fort.

Wieviele Nachwuchspaare erhält man nun von einem Elternpaar im Laufe eines Jahres?

Versuchen wir das allgemeine Gesetz, nach dem die Vermehrung der Kaninchen unter den gestellten Bedingungen vor sich geht, zu ermitteln. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Mit dem Zeichen \oplus werden Kaninchenpaare gekennzeichnet, die in dem jeweiligen Monat 2 Paar Junge zur Welt bringen.

Mit dem Zeichen \ominus werden Kaninchenpaare symbolisiert, die im betreffenden Monat keine Jungen zur Welt bringen. Nach den Feststellungen werden dann die nichtgebä-

renden Paare \square im nächstfolgenden Monat zu gebärenden Paaren \square .

Die Abbildung 12 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Aus der Übersicht können wir auch ersehen, dass in den ersten sechs Monaten eines Jahres die Anzahl der Kaninchenpaare in nachstehender Folge wächst (Abb. 12, rechte Seite): 1, 2, 3, 5, 8, 13 .

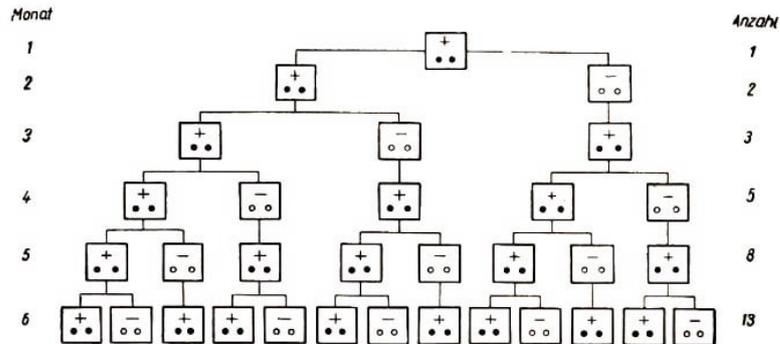


Abb. 12

Dabei stellen wir fest, dass sich die jeweils dritte Zahl der Folge als Summe der beiden vorangegangenen ergibt. So liefert beispielsweise die Summe aus der zweiten und der dritten Zahl die vierte Zahl. Desgleichen erhalten wir die sechste Zahl als Summe der vierten und der fünften usw.

Jedes neue Glied der Folge, mit Ausnahme des ersten und zweiten, erhalten wir also aus der Summe der beiden unmittelbar vorangegangenen Glieder. Demnach können wir auch das n -te Glied u_n aus der Summe der beiden davor liegenden Glieder u_{n-2} und u_{n-1} erhalten. Wir schreiben dies folgendermaßen:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

und haben damit eine sogenannte Rekursionsformel zur Bestimmung des Gliedes u_n erhalten. Hiermit berechnen wir, wenn wir $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$ setzen, die ersten 13 Glieder der Folge zu:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots \quad (1)$$

und haben somit auch die Antwort auf die von Fibonacci gestellte Frage. Wenn wir fernerhin vor das erste Glied der Folge (1) noch das Glied 1 setzen, so verändern wir das allgemeine Bildungsgesetz der Folge nicht. Wir erhalten dann

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Diese Folge wurde zu Ehren des Autors der "Aufgabe von den Kaninchen" Fibonacci Folge genannt. Die einzelnen Glieder bezeichnet man dementsprechend auch als Fibonacci Zahlen.

Später zeigte sich, dass diese Folge für die Wissenschaft außerordentlich wichtig ist. Sie spielt nicht nur in der Mathematik, sondern auch in den Naturwissenschaften eine Rolle. Beispielsweise verzweigen sich die Äste eines Baumes gewöhnlich nach dieser Folge. Im zweiten Jahr hat das Bäumchen 2 Äste. Im dritten Jahr erhöht sich die Anzahl der Äste normalerweise auf drei, im vierten Jahr auf 5, im fünften auf 8 und so in jedem weiteren Jahr entsprechend den Zahlen der Fibonacci Folge (Abb. 13).

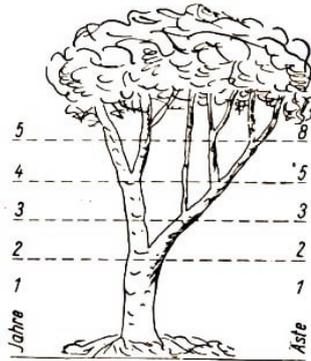


Abb. 13

Beschäftigen wir uns mit weiteren Eigenschaften der Fihonaccischen Zahlen.

- Wählen Sie drei beliebige Zahlen aus der Fihonaccischen Folge, und konstruieren Sie Dreiecke, in denen sich die Längen der Seiten wie die ausgewählten Zahlen verhalten!
- Prüfen Sie nach, dass zwei beliebige benachbarte Zahlen aus der Fihonaccischen Folge immer einer der folgenden Gleichungen genügen!

$$x^2 - xy - y^2 = 1 \quad ; \quad x^2 - xy - y^2 = -1$$

x sei die größere, y die kleinere der Zahlen).

Es zeichnen noch eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften die Fihonaccischen Zahlen aus, wir aber wollen uns nun anderen Untersuchungen zuwenden.

Es sei die Folge

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (2)$$

gegeben, bei der sich, ähnlich wie bei der Fihonaccischen Folge, das nächstfolgende Glied aus der Summe der beiden vorangegangenen Glieder der Folge ergibt. Es gilt also für $n > 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Um nun alle beliebigen speziellen Folgen dieser Art zu erhalten, ist offensichtlich notwendig und hinreichend, nur die ersten beiden Glieder der speziellen Folge zu bestimmen. So liefern beispielsweise:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ und } 3 & 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots \\ 2 \text{ und } 7 & 2, 7, 9, 16, 25, 41, \dots \\ -1 \text{ und } -3 & -1, -3, -4, -7, -11, -18, \dots \end{array}$$

Die Fihonaccische Folge erhalten wir damit Spezialfall, wenn wir $u_1 = u_2 = 1$ setzen

$$1 \text{ und } 1 \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Wir versuchen nun, für die ersten n Zahlen der Folge (2) eine Summenformel zu ermitteln. Aus dem allgemeinen Bildungsgesetz für die Glieder der Folge (2) erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} u_1 = u_3 - u_2 & , \quad u_2 = u_4 - u_3 \\ u_3 = u_5 - u_4 & , \quad \dots \\ u_{n-1} = u_{n+1} - u_n & , \quad u_n = u_{n+2} - u_{n+1} \end{array}$$

Nun werden die ersten n Glieder addiert:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n &= (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \dots + (u_{n+2} - u_{n+1}) \\ &= u_3 - u_2 + u_4 - u_3 + u_5 - u_4 + \dots + u_{n+1} - u_n + u_{n+2} - u_{n+1} \\ S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2 \end{aligned}$$

Bei der Fibonacci'schen Folge ist das zweite Glied gleich 1. Die Summenformel für die ersten n Glieder lautet deshalb:

$$S_n = u_{n+2} - 1$$

Nun wollen wir die Frage lösen, wie man das allgemeine Glied der Folge (2) und somit speziell auch der Fibonacci'schen Folge berechnen kann. Hierfür liegt uns zur Zeit nur die Rekursionsformel vor.

Eine Formel also, bei der wir ein gewünschtes Glied nur berechnen können, wenn wir zuvor alle davorliegenden Glieder ermittelt haben. Kennen wir aber, wie in unserem Fall, das $(n-1)$ -te und $(n-2)$ -te Glied nicht, so können wir auch das n -te Glied nicht bestimmen.

Offensichtlich ist dieses Verfahren sehr umständlich und vor allem zeitraubend. Günstiger wäre es, eine Formel zu besitzen, bei der das n -te Glied lediglich eine Funktion seines Index ist. Für die Fibonacci'sche Folge wurde uns eine solche Formel bereits durch

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

gegeben. Dort wurde sie allerdings lediglich als Hypothese aufgestellt, um an ihr die Methode der vollständigen Induktion zu üben. Wir hatten seinerzeit keinerlei Vorstellung, wie es zu ihrer Aufstellung gekommen sein konnte. Das wollen wir hier nachholen.

Zu diesem Zweck untersuchen wir erst drei Eigenschaften von Folgen der Art (2)

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

für die die Rekursionsformel

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

gilt.

1. Wenn wir alle Glieder der Folge (2) mit ein und derselben Zahl k multiplizieren, erhalten wir eine Folge derselben Art. Zum Beweis dieser Behauptung genügt es, die Gültigkeit der veränderten Rekursionsformel nachzuweisen:

$$ku_n = ku_{n-1} + ku_{n-2}$$

Beweis: $ku_{n-1} + ku_{n-2} = k(u_{n-1} + u_{n-2}) = ku_n$, weil $u_{n-1} + u_{n-2} = u_n$.

2. Liegen zwei Folgen von der Art (2) vor

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$	(2)		Rekursionsformel		$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$	(3)				$v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$

so kann man durch Addition aller Glieder mit gleichem Index eine neue Folge dieser Art bilden.

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \quad (4) \quad | \quad y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$$

Untersuchen wir vor dem allgemeinen Beweis dieser Aussage die Behauptung an einem speziellen Beispiel.

Gegeben sind die beiden Folgen;

$$1, 3, 4, 7, 11, \dots \quad \text{und} \quad 2, 4, 6, 10, 16, \dots$$

Durch Addition der entsprechenden Glieder mit gleichen Indizes erhalten wir die Folge 3, 7, 10, 17, 27, ... Die letzte Folge gehorcht aber demselben Gesetz, das auch für die beiden ersten Folgen gilt.

Nun beweisen wir die Behauptung für den allgemeinen Fall. Gegeben sind die beiden Folgen

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad \text{und} \quad v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

für die gilt:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{und} \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$$

Wir bilden nun eine neue Folge

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

indem wir jeweils die Glieder der ersten beiden Folgen, die gleiche Indizes haben, addieren. Dann erhalten wir:

$$y_n = u_n + v_n = (u_{n-1} + u_{n-2}) + (v_{n-1} + v_{n-2}) = (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2}) = y_{n-1} + y_{n-2}$$

Also $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$. Das heißt aber, die Folge $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ gehorcht demselben Gesetz, das auch für die Ausgangsfolgen (2) und (3) Gültigkeit hat. Damit ist auch diese Eigenschaft bewiesen.

3. Liegen drei Folgen von der Art (2) vor

Rekursionsformel

$$\begin{array}{l|l} u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots & (2) \quad | \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots & (3) \quad | \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2} \\ z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots & (3) \quad | \quad z_n = z_{n-1} + z_{n-2} \end{array}$$

(u_n und n_n seien voneinander unabhängig), so können wir mit Hilfe zweier Zahlen c_1 und c_2 zwischen den Gliedern mit gleichen Indizes folgende Beziehung aufstellen:

$$c_1 u_n + c_2 v_n = z_n$$

Das heißt: Multipliziert man irgend ein Glied der ersten Folge mit c_1 und das Glied der zweiten Folge, das den gleichen Index hat, mit c_2 und addiert diese Produkte, so erhält

man das Glied der dritten Folge mit diesem Index.

Beweis: Durch die Multiplikation der ersten Folge mit c_1 und der zweiten Folge mit c_2 erhalten wir wieder eine Folge derselben Art (vgl.: 1. Eigenschaft). Wenn wir zudem nacheinander diejenigen Glieder zweier Folgen gleicher Art addieren, die den gleichen Index haben, so erhalten wir wiederum eine Folge gleicher Art (vgl.: 2. Eigenschaft). Unsere Behauptung lautet nun, dass die Relation

$$c_1 u_n + c_2 v_n = z_n$$

für jedes beliebige natürliche n gilt. Dann gilt sie natürlich auch für $n = 1$ und $n = 2$.

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = z_1 \quad , \quad c_1 u_2 + c_2 v_2 = z_2$$

Wir erhalten so ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten c_1 und c_2 :

$$u_1 c_1 + v_1 c_2 = z_1 \quad ; \quad u_2 c_1 + v_2 c_2 = z_2$$

Lösen wir dieses System, so ergibt sich

$$c_1 = \frac{v_2 z_1 - v_1 z_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{u_1 z_2 - u_2 z_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$$

Dabei muss aber, wie weiter oben dargelegt, $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ sein. Das stimmt auch mit unserer Forderung überein, dass u_n und v_n voneinander unabhängig sein sollen, also, wenn wir speziell $n = 1$ und $n = 2$ setzen:

$$\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2}$$

Dann können wir unter der Bedingung $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ die Zahlen c_1 und c_2 stets eindeutig ermitteln. Damit ist auch die dritte Eigenschaft bewiesen.

Wir wollen sie jedoch zum besseren Verständnis noch auf einen speziellen Fall anwenden. Gegeben seien die Folgen

$$1, 3, 4, 7, 11, \dots \quad , \quad 2, 4, 6, 10, 16, \dots \quad , \quad 7, 10, 17, 27, 44, \dots$$

Wie können wir nun aus den ersten beiden Folgen die dritte ermitteln?

Wir multiplizieren die Glieder der ersten Folge mit c_1 und die der zweiten mit c_2

$$1c_1, 3c_1, 4c_1, 7c_1, 11c_1, \dots \quad , \quad 2c_2, 4c_2, 6c_2, 10c_2, 16c_2, \dots$$

Dann stellen wir mit $n = 1$ und $n = 2$ den Ansatz auf. (Wir könnten auch zwei beliebige andere Indizes nehmen. Das Ergebnis bliebe unbeeinflusst, die Rechnung wäre jedoch erschwert. Es empfiehlt sich, dies an einigen Beispielen zu probieren.)

$$c_1 + 2c_2 = 7 \quad , \quad 3c_1 + 4c_2 = 10$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten c_1 und c_2 . Zur Lösung verwenden wir die allgemeine Form.

$$u_1v_2 - u_2v_1 = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 (\neq 0)$$

$$v_2z_1 - v_1z_2 = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 28 - 20 = 8$$

$$u_1z_2 - u_2z_1 = 1 \cdot 10 - 3 \cdot 7 = 10 - 21 = -11$$

Daraus ersehen wir erst einmal, dass gilt

$$u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$$

Damit wissen wir, dass wir zwei eindeutig bestimmte Zahlen c_1 und c_2 erhalten. Diese ergeben sich zu:

$$c_1 = \frac{8}{-2} = -4 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2}$$

Zur Probe multiplizieren wir die Glieder der ersten Folge mit $c_1 = -4$ und die der zweiten Folge mit $c_2 = -\frac{11}{2}$, wodurch wir erhalten:

$$-4, -12, -16, -28, -44, \dots, \quad 11, 22, 33, 55, 88, \dots$$

Addieren wir in diesen Folgen die Glieder, die gleiche Indizes haben, so erhalten wir tatsächlich die dritte Folge 7, 10, 17, 27, 44, ...

Nunmehr können wir den Nachweis für die angegebene Formel zur Berechnung des n -ten Gliedes der Fibonacciischen Folge erbringen.

Wir nehmen hierzu an, dass die Glieder der Folge

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad \text{mit} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

durch die Glieder einer geometrischen Folge dargestellt werden.

$$1, q, q^2, \dots, q^n, \dots$$

Soll nun gelten

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

so muss dies auch für $n = 2$ Gültigkeit haben, also für

$$1 + q = q^2$$

Das liefert eine quadratische Bestimmungsgleichung für q ,

$$q^2 - q - 1 = 0$$

mit den Wurzeln

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Hieraus können wir folgern, dass mit beiden Wurzeln geometrische Folgen aufgebaut werden können:

$$1, q_1, q_1^2, \dots, q_1^n, \dots, \quad 1, q_2, q_2^2, \dots, q_2^n, \dots$$

für die gilt:

$$q_i^{n-2} + q_i^{n-1} = q_i^n$$

Tatsächlich gilt für die Folgen

$$1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n, \dots \quad (5)$$

und

$$1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \dots \quad (6)$$

die Beziehung

$$1 + q = q^2$$

was leicht durch folgende Rechnung bestätigt werden kann:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Die oben genannte Formel

$$q_i^{n-2} + q_i^{n-1} = q_i^n$$

ist richtig, denn es gilt

$$q_i^{n-2}(1 + q_i) = q_i^{n-2}q_i^2 \quad ; \quad 1 + q_i = q_i^2$$

Diese Beziehung stimmt aber mit der eben kontrollierten $1 + q = q^2$ überein.

Damit erfüllen die Folgen (5) und (6) die Bedingung

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Die Folge gehört also zum gleichen Typ wie die Fibonacci Folge. Dann können wir aber entsprechend der unter 3. dargelegten Eigenschaft zwei Zahlen c_1 und c_2 finden, die, ausgehend von den Folgen (5) und (6), auf die Fibonacci Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... führen.

Wir müssten hierzu die Folge (5) mit c_1 und die Folge (6) mit c_2 multiplizieren und beide Folgen anschließend addieren, was nach der ersten und zweiten dargelegten Eigenschaft möglich ist.

Dazu bilden wir, wie beim Beweis der dritten Eigenschaft hergeleitet, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 + 1 \cdot 2 &= 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_2 &= 1 \end{aligned}$$

und erhalten wiederum zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zur Berechnung der Zahlen c_1 und c_2 . Dieses System ist lösbar, denn es gilt:

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 1 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \neq 0$$

Die Zahlen c_1 und c_2 ergeben sich zu:

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_n &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\ u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis überrascht etwas. Da nämlich die Glieder der Fibonacci'schen Folge ganze Zahlen sind, war eine derart komplizierte Formel für das allgemeine Glied nicht zu erwarten.

2.7 Aufgaben

1. Ermitteln Sie ähnlich wie oben angeführt die Formel für das allgemeine Glied der Folge 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...!

2. Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate der ersten n Zahlen der Fibonacci'schen Folge (mit $u_1 = u_2 = 1$) gleich $u_n \cdot u_{n+1}$ ist!

Hinweis: $u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$

3. Beweisen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass die folgende Gleichung gilt!

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$$

Hinweis: Hierzu muss angenommen werden, dass die genannte Gesetzmäßigkeit für $m = k$ und $m = k + 1$ gilt. Dann muss man die Gültigkeit für den Übergang zu $m = k + 2$ nachweisen.

4. Lösen Sie die Aufgabe 3 für den Fall, dass $m = n$ ist, und weisen Sie nach, dass die folgende Gleichung gilt!

$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n}$$

Das bedeutet, dass die Differenz der Quadrate zweier Fibonacci'scher Zahlen, deren Indizes sich um 2 unterscheiden, wieder eine Fibonacci'sche Zahl ist.

Dieser Lehrsatz entstand anlässlich eines mathematischen Wettstreits, der 1225 in der Stadt Pisa ausgefochten wurde. Seinerzeit war der Ruf Fibonacci's als der eines großen Mathematikers bereits überall bekannt.

Der damalige Kaiser des Römischen Reiches, Friedrich II., wollte diesen Ruf öffentlich überprüfen und begab sich mit einer Gruppe bedeutender Mathematiker nach Pisa. Hier fand dann 1225 der Wettstreit in der damals üblichen Form statt, dass nämlich eine Reihe von Aufgaben gestellt wurden, die dann sofort gelöst werden mussten. Der Lehrsatz wurde in den folgenden Jahren auch "Satz des Fibonacci" genannt.

5. Auf diesem Mathematikerwettstreit wurde auch die folgende Aufgabe gestellt: "Es ist ein vollständiges Quadrat zu bestimmen, das auch ein vollständiges Quadrat bleibt, wenn man es um 5 vermehrt oder vermindert."

Fibonacci soll kurz nachgedacht und dann die Zahl $\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ genannt haben, die sich in der Tat als Lösung der gestellten Aufgabe ergibt. (Prüfen Sie das nach!)

6. Bestimmen Sie eine Quadratzahl, die eine Quadratzahl bleibt, wenn man sie um 6 vermehrt oder vermindert!

Literatur:

N. N. Worobjew: Die Fibonacci'schen Zahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

3 Wie die ersten Rechentafeln aufgestellt wurden

"Das Buch von den Erfolgen der Wissenschaft ... sollte nicht nur die Ergebnisse des menschlichen Geistes aufzeigen, sondern es sollte dem Leser auch in den Prozess der Forschungsarbeit selber einführen, indem es das allmähliche Bewältigen der Schwierigkeiten und die Suche nach der besten Methode zeigt"
Gorki

Wir wollen diesen Rat Maxim Gorkis befolgen, indem wir beim Studium der Mathematik nicht nur die fertigen Ergebnisse in uns aufnehmen, sondern auch zu erkennen versuchen, wie und auf welchem Wege der Mensch diese Ergebnisse erreichte. Besonders lehrreich und interessant ist die Berechnung und Aufstellung der ersten Logarithmentafeln.

Wenn wir daran denken, wie häufig Logarithmentafeln und logarithmische Rechenstäbe benutzt werden, wie viel Zeit und Arbeitskraft mit ihrer Hilfe eingespart werden, ist die Frage ganz natürlich, wie die Situation vor der Berechnung der ersten Logarithmentafel war.

Welcher Gelehrte hat wohl der Menschheit dieses außerordentlich wichtige Recheninstrument geschenkt, auf welchem Weg ist er bei der Aufstellung der Tafel vorgegangen und welche Schwierigkeiten hat er dabei zu überwinden gehabt?

3.1 Die erste logarithmische Tabelle und die Geburt der Logarithmentafel

Es ist uns bekannt, dass die Idee zur Aufstellung einer Logarithmentafel aus der vergleichenden Betrachtung zweier Folgen bestimmter Gestalt (einer geometrischen und einer arithmetischen) erwachsen ist.

Das Problem, zwei entsprechende Folgen zu vergleichen, ist sehr alt. Schon Archimedes (287-212 v.u.Z.) beschäftigte sich in seinem Werk *ψαμμιτης* (Sandrechnung) mit den beiden Folgen

$$1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, \dots \quad (1)$$

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \quad (2)$$

Die erste Folge wird aus den aufeinanderfolgenden ganzzahligen Potenzen der Zahl 10 gebildet, während die zweite aus den Indizes der Glieder der ersten Folge aufgebaut wird. (In der ersten Folge stimmen die Indizes der Glieder auch mit den Exponenten überein.)

Durch den Vergleich dieser beiden Folgen kam Archimedes zu interessanten Feststellungen. So ist in einer Folge, die wie (1) in fortlaufender Proportion mit 1 beginnend gegeben ist, das Produkt aus zwei beliebigen Gliedern wieder ein Glied der Folge. Dieses neue Glied hat in der Folge vom größeren Faktor denselben Abstand (in Schritten) wie der kleinere Faktor von der Einheit.

Wir wollen uns diese Feststellung des Archimedes veranschaulichen. Als Beispiel wählen wir aus der Folge (1) die Zahlen 10^3 und 10^5 aus.

Das Produkt dieser Zahlen soll in der Folge um soviel Schritte über 10^5 hinaus zu suchen sein, wie zwischen der Einheit und 10^3 Schritte liegen. Bis zum kleineren Faktor (10^3) sind es 3 Schritte in der Folge.

Gehen wir von 10^5 aus ebenfalls drei Schritte weiter, so erreichen wir das Glied 10^8 . Es ergibt sich also: $10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$. Zu diesem Ergebnis kann man auch auf folgendem Wege gelangen:

Wir addieren die Indizes beider Faktoren und subtrahieren von der Summe 1. Das Ergebnis liefert uns dann den Index des Produktes. Im vorliegenden Beispiel ist 10^3 das vierte Glied, hat also den Index 4. Der Faktor 10^5 ist das sechste Glied und hat somit den Index 6.

Die Rechnung mit den Indizes der beiden Glieder, die multipliziert werden sollen, ergibt also: $(4 + 6) - 1 = 9$. Das neunte Glied der Folge (1) ist also das Produkt. Da dies 10^8 ist, ergibt sich wiederum $10^3 \cdot 10^5 = 10^8$.

Wir sehen hieraus, dass Archimedes die Grundbegriffe des Potenzierens kannte und anzuwenden wusste. Insbesondere kannte er die Zusammenhänge, die zwischen den Potenzen und ihren Exponenten im Rahmen der Rechenoperationen mit Potenzen bestehen.

Es ist sogar zu vermuten, dass er die Zusammenhänge zwischen den arithmetischen und geometrischen Folgen zur Vereinfachung des Rechnens benutzte. (Ersetzen der Multiplikation und der Division durch die Addition und Subtraktion.) Der letzte Schritt jedoch - das Aufstellen von Rechentafeln - gelang erst im 16. Jahrhundert.

Im Jahre 1544 erschien ein Buch des deutschen Mathematikers Michael Stifel (1487-1567) *Allgemeine Arithmetik*⁸. In diesem Werk stellt Stifel zwei Zahlenfolgen einander gegenüber, eine geometrische und eine arithmetische Folge. Die geometrische Folge wird von den steigenden Potenzen ein und derselben Basis gebildet.

Die arithmetische Folge besteht aus den entsprechenden Exponenten der Potenzen. Auch er entdeckte durch den Vergleich dieser beiden Folgen bemerkenswerte Eigenschaften.

Untersuchen wir einen Spezialfall, indem wir als erste Folge die Potenzen der Zahl 2 und als zweite Folge die entsprechenden Exponenten nehmen:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$$
$$- 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

Setzen wir voraus, dass die erste Folge nach beiden Seiten fortgesetzt werden kann, so haben wir die Möglichkeit, das Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren mit den Elementen der geometrischen Folge auf das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren mit den entsprechenden Elementen der arithmetischen Folge zurückzuführen.

⁸Originaltitel: *Arithmetica integra*. Die Arithmetik umfasste in der damaligen Bezeichnungsweise auch die Gebiete, die wir heute unter dem Begriff Algebra zusammenfassen.

Zum Beispiel:

$$\frac{1}{8} \cdot 128 = 2^{-3} \cdot 2^7 = 2^{-3+7} = 2^4 = 16$$

oder

$$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

Für die Praxis haben die in den Folgen angeführten Zahlen zu große Intervalle. Wir könnten die Zwischenräume dadurch verringern, dass wir zwischen die Glieder der geometrischen Folge das geometrische Mittel beider benachbarter Werte einschieben und zwischen die entsprechenden Elemente der arithmetischen Folge das arithmetische Mittel. Aber auch dieses Verfahren würde nicht befriedigen. Wir werden später andere Wege einschlagen.

Im Grunde genommen haben wir durch das Nebeneinanderschreiben der Zahlen der beiden Folgen den Kern einer Logarithmentafel erhalten. Wir brauchen lediglich die Zahlen der Folgen in einer solchen Form zu schreiben, dass sie eine Tabelle bilden. Für unseren Spezialfall erhielten wir dann die Logarithmentafel für die Basis 2.

Basis 2:

N	$\log_2 N$	N	$\log_2 N$	N	$\log_2 N$
$\frac{1}{8}$	-3	4	2	128	7
$\frac{1}{4}$	-2	8	3	256	8
$\frac{1}{2}$	-1	16	4	512	9
1	0	32	5	1024	10
2	1	64	6	2048	11

Stifel benutzte seine Entdeckung jedoch nicht, um die numerischen Rechnungen zu vereinfachen. Er ging bewusst an dieser großen Möglichkeit vorüber, obwohl er sich über deren Tragweite anscheinend völlig im klaren war; denn in seinem Buch *Arithmetica integra* bemerkte er bei der Gegenüberstellung dieser interessanten Folgen:

"Es könnte ein ganzes Buch über diese merkwürdigen Eigenschaften bestimmter Zahlenfolgen geschrieben werden, doch soll dies genügen. Wir gehen hieran mit geschlossenen Augen vorüber."

Die Forderungen des praktischen Lebens und vor allem die schnelle Entwicklung der Wissenschaften, wie Astronomie und Mechanik, führten zwangsläufig zur Weiterentwicklung, wenn auch auf anderen Bahnen. Es mussten Mittel und Wege gefunden werden, die zur Vereinfachung der komplizierten Rechenprozesse führten und so viel Zeit und Aufwand einsparen halfen.

Einige Jahre nach Erscheinen des Buches von Stifel gab der niederländische Ingenieur Simon Stevin (1548-1620) ein Werk heraus, in dem erstmalig in Europa Dezimalbrüche behandelt wurden. Es war eine Zinseszinstabelle, das heißt, eine Tabelle zur Berechnung von $(1 + r)^n$ für die verschiedensten Werte von r ; $r = 0,02; 0,03; 0,04; \dots$

Wenn Sie diese Zinseszinsformel herleiten wollen, können Sie von der Annahme ausgehen, dass sie bei der Sparkasse 1 DM für 1 Jahr eingezahlt haben. Die Sparkasse berechnet am Ende des Jahres den Zuwachs, der aus $p\%$ der Summe besteht, die Sie

ein Jahr zuvor eingezahlt haben. Damit ist dieser Betrag im 1-ten Jahr auf $(1 + \frac{p}{100})$ DM angewachsen.

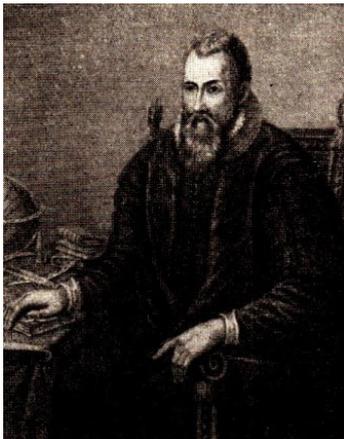
Bleibt dieser Betrag weiterhin auf der Kasse, so müssen die Zinsen am Ende des 2-ten Jahres für den auf $(1 + \frac{p}{100})$ DM angestiegenen Betrag berechnet werden. Da hiernach jede DM im Laufe eines Jahres auf $(1 + \frac{p}{100})$ DM anwächst, hat der Betrag von 1 DM am Ende des zweiten Jahres die Summe von $(1 + \frac{p}{100})^2$ DM erreicht.

Mit derselben Überlegung ermittelt man, dass am Ende des n -ten Jahres die Einlage auf insgesamt $(1 + \frac{p}{100})^n$ DM angewachsen ist. Setzt man $\frac{p}{100} = r$, so ergibt sich der Ausdruck $(1 + r)^n$.

Sicher ist es Ihnen bereits aufgefallen, dass hier eine geometrische Folge vorliegt:

$$1, (1 + r), (1 + r)^2, (1 + r)^3, \dots, (1 + r)^n \quad \text{mit } q = 1 + r$$

Es ist nun durchaus möglich, dass die Bekanntschaft mit dieser Tabelle den anderen bedeutenden Rechner jener Zeit, Jobst Bürgi (1552-1632), auf die Idee brachte, eine eigene Tabelle aufzustellen. Sie diene in der Hauptsache zur Erleichterung verschiedenartiger Berechnungen, aber nicht nur handels- und finanztechnischer Verfahren wie die Tabelle von Stevin.



John Neper

Jobst Bürgi, in der Schweiz gebürtig, war Uhrmachermeister und Kenner astronomischer Instrumente. Er erhielt nie eine wissenschaftliche Ausbildung, war aber sehr begabt und ausdauernd und in seiner Arbeit sehr fleißig und einfallsreich.

Gemeinsam mit dem bekannten Mathematiker und Astronomen Johannes Kepler (1571-1630) stellte er die Gesetze der Planetenbewegungen um die Sonne auf, die notwendigerweise umfangreiche praktische Berechnungen erforderlich machten. Die Schwierigkeiten, denen er dabei begegnete, zwangen ihn, Verfahren zu suchen, die eine schnelle Bewältigung umfangreicher Berechnungen ermöglichten.

Sie zwangen ihn auch, die von Stifel ausgesprochenen Ideen zu verfolgen und zu verwirklichen.

Gleichzeitig mit Bürgi, aber unabhängig von ihm, löste John Neper (1550-1617) in Schottland eine ähnliche Aufgabe. Neper stammte aus der schottischen Aristokratie und hatte eine gründliche und umfassende Bildung erhalten. Seine Beschäftigung mit der Astronomie und Mathematik trug mehr den Charakter einer Liebhaberei. Trotzdem trug er zur Aufstellung der Logarithmentafel durch eine Reihe wertvoller Ideen bei. Über seine Arbeit zur Aufstellung der Logarithmentafel sagte John Neper:

"Ich bemühe mich stets, Wege zu finden, durch die schwierige und langweilige Berechnungen, die gewöhnlich viele vom Studium der Mathematik abschrecken, umgangen werden."

Selber scheute er diese Schwierigkeiten jedoch keineswegs. Zwei Jahrzehnte arbeitete

er an der Aufstellung seiner Logarithmentafel und stellte sich dabei lediglich das Ziel, die Arbeit der zukünftigen Rechner zu erleichtern.

Jobst Bürgi und John Neper - diesen hervorragenden Menschen verdanken wir die Aufstellung der ersten Logarithmentafel. Die gigantische Rechenarbeit, die zur Berechnung ihrer Tafeln erforderlich war, kann uns nicht genug in Erstaunen setzen.

Einzelne Möglichkeiten zur Beschleunigung der Rechenarbeit für die Aufstellung dieser Tafeln ergaben sich erst nach Abschluss einer strengen Theorie der Reihen. Vorher mussten sich die Verfasser ausschließlich auf die Benutzung der Elementarmathematik beschränken.

3.2 Über die verschiedenen Logarithmensysteme

Für die Berechnung einer Logarithmentafel war folgende Erkenntnis von außerordentlicher Bedeutung:

Man kann von einem Logarithmus zur Basis a auf den Logarithmus des entsprechenden Numerus zu irgendeiner Basis b schließen. Die Logarithmentafel für eine bestimmte Basis a konnte also über die Berechnung einer Logarithmentafel zu irgendeiner Basis b gewonnen werden.

Wir wollen die Umrechnungsformel von einem Logarithmensystem in ein anderes herleiten.

$$\text{Es seien: } \log_a N = A \text{ und } \log_b N = B. \quad (1)$$

$$\text{Damit sind: } a^A = N \text{ und } b^B = N. \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhalten wir:

$$\log_a N = \log_a b^B \quad , \quad \log_a N = B \cdot \log_a b$$

Nun setzen wir für B nach (1) den Ausdruck $\log_b N$ ein.

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b \quad , \quad \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Man erhält den Logarithmus einer Zahl N für eine neue Basis b , indem man den Logarithmus dieser Zahl zur alten Basis a durch den Logarithmus der Zahl b zur Basis a dividiert.

Beispiel: Numerus 10, alte Basis 10, neue Basis 2

$$\log_2 10 = \frac{\log_1 10}{\log_2 10} = \frac{1}{0,3010} = 3,3223$$

3.3 Die Suche nach der günstigsten Basis

Wir hatten festgestellt, dass der Übergang aus einem Logarithmensystem in ein anderes stets möglich ist und schließlich darauf hinausläuft, dass wir die Logarithmen zur alten Basis mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{\log_a b}$ multiplizieren.⁹

⁹Den (konstanten) Faktor $\frac{1}{\log_a b}$ nennt man auch Transformationsmodul.

Demnach ist für die Berechnung einer Logarithmentafel, insbesondere aber der ersten Logarithmentafel, die Wahl der Basis von untergeordneter Bedeutung. Sie wird vorrangig dadurch bestimmt, dass die Aufstellung der Tafel möglichst einfach wird. Wir wollen nun überlegen, welche Basis für die Aufstellung am rationellsten ist.

Eine Logarithmentafel muss vor allem zwei Forderungen genügen. Erstens muss es leicht und schnell möglich sein, für eine Reihe gegebener Zahlen die exakten oder angenäherten Logarithmen zu ermitteln.

Zweitens muss es ebenso leicht und schnell möglich sein, für gegebene Logarithmen die exakten oder angenäherten Zahlenwerte (Numeri) zu ermitteln, die zu den Logarithmen gehören.

Eine Tafel kann diese Forderungen erfüllen, wenn die gegebenen Zahlen in steigenden und in genügend kleinen Intervallen angeordnet werden (0,01 oder 0,001 oder 0,0001). Auch die Logarithmen müssen eine steigende Folge bilden und möglichst kleine Intervalle haben. Wir werden sehen, dass beide Forderungen leicht erfüllt werden können, wenn eine geeignete Basis für das Logarithmensystem zugrunde gelegt wird.

Bürgi und Neper machten unabhängig voneinander verschiedene Ansätze und erhielten zwangsläufig als Basis für die erste Logarithmentafel eine bestimmte Zahl. Auf welche Zahl mögen beide gekommen sein?

3.4 Die gigantische Arbeit Bürgis und Nepers

Um das gewaltige Werk der Begründer der Logarithmentafeln verstehen und würdigen zu können, wollen wir uns die Situation, in der sich Jobst Bürgi und John Neper befanden, vor Augen führen. Wir stellen uns die Aufgabe, einen gangbaren Weg für das Aufstellen einer Logarithmentafel zu finden.

Zuerst wollen wir uns darüber einigen, wie wir die Logarithmentafel aufstellen wollen.

Es ist ratsam, wie folgt zu verfahren:

wir wählen uns eine Basis und erheben diese Basis in verschiedene Potenzen, wobei der Exponent allmählich, beispielsweise in Stufen von 0,0001, steigen soll.

Nun bleibt nur noch die Frage offen, welche Zahl wir als Basis a nehmen sollten. Es wird sich zeigen, dass für unser dezimales Zahlensystem zweckmäßigerweise die Zahl 10 als Basis a für ein Logarithmensystem zugrunde gelegt wird.

Diese Wahl bietet in der Tat große Vorteile (wir denken nur an die einfache Handhabung der Numeri und der Mantissen bei den Briggschen Logarithmen). Diese Zahl hat aber auch gewaltige Nachteile, besonders für das Aufstellen der Tafel. Versuchen wir nämlich, mit dieser Basis eine Tafel aufzustellen, so stoßen wir sofort auf unüberwindliche Schwierigkeiten.

Es macht sich dann nämlich erforderlich, die Wurzeln mit dem Wurzelexponenten 10000 aus den Zahlen 10, 100, 10000 usw. zu ziehen.

Basis $a = 10$	
$\lg N$	N
0,0000	$10^{0,0000} = 1$
0,0001	$10^{0,0001} = \sqrt[10000]{10}$
0,0002	$10^{0,0002} = \sqrt[10000]{100}$ usw.

Wir wollen jetzt versuchen, die Basis so zu verändern, dass dieses Wurzelziehen keine Schwierigkeiten mehr bereitet. Das erreichen wir, indem wir als Basis die Zahl 10^{10000} nehmen.

Basis $a = 10^{10000}$	
$\log_a N$	N
0,0000	$(10^{10000})^{0,0000} = 1$
0,0001	$(10^{10000})^{0,0001} = 10$
0,0002	$(10^{10000})^{0,0002} = 100$
0,0003	$(10^{10000})^{0,0003} = 1000$ usw.

Diese Tabelle kann uns aber auch nicht befriedigen. Die Logarithmen wachsen zwar in kleinen, die Zahlen aber in viel zu großen Schritten. Wir wollen es mit einer kleineren Basis versuchen. Wählen wir $a = 2^{10000}$, dann erhalten wir folgende Tafel:

Basis $a = 2^{10000}$	
$\log_a N$	N
0,0000	$(2^{10000})^{0,0000} = 1$
0,0001	$(2^{10000})^{0,0001} = 2$
0,0002	$(2^{10000})^{0,0002} = 4$
0,0003	$(2^{10000})^{0,0003} = 8$
0,0004	$(2^{10000})^{0,0004} = 16$ usw.

Mit dieser verkleinerten Basis haben wir tatsächlich erreicht, dass die Intervalle zwischen den Zahlen N kleiner werden. Dennoch sind die Zwischenräume viel zu groß, zumal sie ja mit steigenden Logarithmen geometrisch wachsen. Das heißt, auch für diese Basis wachsen die Zahlen N zu schnell und haben für steigende Logarithmen zu große Intervalle.

Vergleichen wir die beiden letzten Tabellen, so erkennen wir, dass die Intervalle zwischen den Zahlen N um so kleiner werden, je mehr wir uns mit der Basis des Logarithmensystems der Eins nähern. Daher wollen wir einen neuen Versuch mit einer Basis unternehmen, die nahe bei Eins liegt. Wählen wir $a = 1,0001^{10000}$, so erhalten wir die nachstehende Tabelle. (nächste Seite)

Diese Tabelle entspricht bereits den Anforderungen, die wir an eine Basis stellen: die Zahlen und ihre Logarithmen steigen in kleinen Intervallen.

Die Aufstellung der Tabelle wird erleichtert, weil die Logarithmen wie die Glieder einer arithmetischen Folge mit der Differenz $d = 0,0001$ steigen, während sich die Zahlen N wie die Glieder einer geometrischen Folge mit dem Quotienten $1,0001$ verändern. Demnach läuft die Ermittlung der Zahlen für die Spalte N darauf hinaus, die Zahl $N+1$

zu ermitteln, indem man die vorangegangene Zahl N mit dem Quotienten $q = 1,0001$ multipliziert. Praktisch wird zur Zahl N ihr zehntausendster Teil addiert, womit sich $N + 1$ ergibt.

Basis $a = 1,0001^{10000}$	
$\log_a N$	N
0,0000	1,000000
0,0001	1,000100
0,0002	1,000200
0,0003	1,000300
0,0004	1,000400
...	...
0,0009	1,000900
0,0010	1,001000
0,0011	1,001001
...	...
0,0050	1,005012
...	...
0,0060	1,005018
...	...

Beispielsweise ist nach der nebenstehenden Tabelle für $\log_a N = 0,0050$ der Numerus $N = 1,005012$. Dann wird $\log_a(N + 1) = 0,0051$, und hierzu gehört der Numerus

$$\begin{aligned} N + 1 &= 1,005012 \cdot 1,0001 \\ &= 1,005012 \cdot (1 + 0,0001) \\ &= 1,005012 + 0,000101 = 1,005113 \end{aligned}$$

Diese Basis hatte auch Bürgi für seine Berechnungen gewählt, und so erschien 1620 seine erste Logarithmentafel. Er nannte sie Tabelle arithmetischer und geometrischer Folgen.

Da der Gebrauch der Dezimalbrüche erst kurz vorher in die praktische, europäische Mathematik eingegangen war, erweiterte Bürgi, um Brüche zu umgehen, alle Zahlen der linken Spalte auf das 100000fache, wodurch die Zahlen der rechten Spalte auf das 100000000fache stiegen. Hierin unterscheidet sich die Bürgische Logarithmentafel von den unsrigen.

Jobst Bürgi arbeitete acht Jahre an der Aufstellung dieser Tafel, von 1603 bis 1611. Warum benötigte er eine derart lange Zeit?

Wir müssen bedenken, dass er für die Berechnung des Intervalles von 0 bis 1 der Spalte $\log_a N$ bei einer jeweiligen Differenz von 0,0001 insgesamt 10000 Zahlen der Spalte N ermitteln musste.

Die gesamte Tafel geht aber in der Spalte $\log_a N$ bis nahe an die Zahl 2,7182.

Je weiter wir uns hierbei der Zahl 2,7182 nähern, desto stärker wachsen die Zahlen in der Spalte N an. So musste Bürgi bei der Berechnung seiner Tafel mehr als 230 Millionen Multiplikationen mit der Zahl 1,0001 ausführen.

Welche Schlussfolgerungen können wir hieraus ziehen?

Um eine für die Praxis brauchbare Logarithmentafel aufzustellen, ist es erforderlich, eine Zahl der Form

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

als Basis zu wählen, wobei n eine sehr große natürliche Zahl sein sollte ($n = 1000, 10000, \dots$). Dabei ist die Tafel um so besser, je größer die Zahl n ist.

Die Tafel von Bürgi fand keine große Verbreitung, denn bereits vor 1620, im Jahre 1614, war in England eine wesentlich vollkommenere Tafel erschienen. Ihr Verfasser war John Neper.

Neper wählte zur Berechnung seiner Tafel $a = 10000000$, d.h., er wählte als Basis seiner Logarithmen

$$a = (1,0000001)^{10000000}$$

Er nannte seine Tafel, an der er über 20 Jahre gearbeitet hatte, Beschreibung der wunderbaren Tabellen des Logarithmus. Wie bereits angedeutet, war dies nicht der einzige Beitrag Nepers für die Mathematik. Nicht weniger bedeutend waren seine Gedanken zur Theorie der Reihen, die er beim Aufstellen seiner Tafel entwickelte.

Die Tafel der dekadischen Logarithmen erschien im Jahr 1620. Sie wurde von einem Freund Nepers, dem Cambridger Universitätsprofessor Henry Briggs aufgestellt. Diese Tafel war 14stellig und enthielt die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000.

Diese Arbeit, die Briggs begann, wurde von dem holländischen Mathematiker Andrian Wlakkom fortgesetzt und vollendet, der im Jahre 1628 eine 10stellige Tafel der dekadischen Logarithmen für die Numeri von 1 bis 100000 herausgab.

Auf der Grundlage dieser Tafel erschien 1703 die erste Logarithmentafel im alten Russland. Sie hatte die ausführliche Bezeichnung: Tafel der Logarithmen und der Werte des Sinus, Tangens und Sekans, zusammengestellt nach eingehender Prüfung durch die Lehrer der mathematischen und navigatorischen Schule Andrei Farchwardson, Stefan Gwin und Leonti Magnizki.

Bereits in den nachfolgenden Jahren wurden in verschiedenen Ländern Rechenhilfsmittel auf der Grundlage der Logarithmentafeln entwickelt. Die langjährige Arbeit, die man zum Aufstellen der ersten Tafeln benötigt hatte, war nicht umsonst gewesen.

Besonders die Mathematiker schätzten dieses Werk sehr hoch ein. Kepler benutzte die Logarithmentafeln häufig bei seinen astronomischen Berechnungen, und der bedeutende französische Mathematiker und Astronom Laplace sagte, dass die Entdeckung der Logarithmen das Leben der Menschen verlängere, wenn dieses Leben nicht nach der Zahl der gelebten Jahre, sondern nach der Fülle der in ihm vollbrachten Leistungen gewertet werde.

3.5 Die Zahl e

Durch die Arbeiten von Newton (1642-1727) und Leibniz (1646-1716) wurde der Grundstein der mathematischen Analysis gelegt. Euler (1707-1783), Abel (1802-1829), Cauchy (1789-1857), d'Alembert (1717-1783) und andere erweiterten und vertieften diese Grundlagen.

Insbesondere schufen sie die Lehre von den unendlichen Reihen. Die Arbeit, die Bürgi und Neper noch viele Jahre abverlangte, konnte man nun mit den modernen Hilfsmitteln in viel kürzerer Zeit erledigen.

So erkannte man vor allem, dass Zahlen der Form

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

bei unbegrenztem Anwachsen von n einem bestimmten Grenzwert zustreben. Diese Tatsache lässt sich leicht mit Hilfe des Satzes von Weierstrass (1815-1897) nachweisen. Der Satz von Weierstrass besagt, dass eine beschränkte, im eigentlichen Sinne monotone Folge einen Grenzwert besitzt.

Den Beweis dieses Satzes wollen wir uns ersparen. Dafür untersuchen wir die Zahlenfolge

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

Die nachstehende Wertetafel lässt vermuten, dass die genannte Folge monoton steigend ist.

Den Beweis für diese Vermutung liefert der Nachweis, dass die Ungleichung $a_{n-1} < a_n$ richtig ist. Hierzu setzen wir die entsprechenden Werte ein:

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00
2	2,25
3	2,37
4	2,44
5	2,47
...	...

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} &< \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ \frac{n-1}{n} &< \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^n \cdot n^n} \\ \frac{n-1}{n} &< \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ 1 - \frac{1}{n} &< \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

Wir erhalten die sogenannte Bernoullische Ungleichung, deren Gültigkeit aus dem Binomischen Satz folgt. Damit ist nachgewiesen, dass tatsächlich

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

also $a_{n-1} < a_n$ gilt.

Bereits das erste Kapitel enthält eine Aufgabe, in der mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion der Binomische Satz bewiesen werden soll. Wir wollen daher nochmals das Ergebnis anfügen.

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} a^{n-k}b^k + \dots + nab^{k-1} + b^n \end{aligned}$$

Wenden wir diesen Satz zur Auflösung des Binoms $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ an, so erhalten wir:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n}$$

oder ,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus lassen sich nun weitreichende Schlussfolgerungen ziehen.

Vorerst einmal wollen wir festhalten, dass die von uns untersuchte Folge der Zahlen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ im engeren Sinne monoton steigend ist.

Alsdann können wir, insbesondere auf Grund der letzten Darstellung, feststellen, dass die Folge auch beiderseits beschränkt ist. Hierzu führen wir zwei Untersuchungen durch.

1. Jede der in Klammern stehenden Differenzen der Gleichung (1) ist eine positive Zahl. Wenn wir alle Differenzen durch Null ersetzen, verkleinern wir die rechte Seite dieser Gleichung. Das heißt aber, es ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 \quad \text{oder} \quad 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Um auch eine obere Schranke angeben zu können, müssen wir nachweisen, dass es eine bestimmte Zahl M gibt, bei der für jeden Index n folgende Ungleichung gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < M$$

Zum Beweis dieser Ungleichung verwenden wir wiederum die Darstellung (1).

Wir hatten bereits festgestellt, dass jede der in (1) angeführten Differenzen positiv ist. Zudem sind alle kleiner als Eins. Wir ersetzen nun alle Differenzen durch Eins, womit wir die rechte Seite der Gleichung (1) vergrößern. Ferner wollen wir bei den Brüchen, die vor den Differenzen stehen, alle im Nenner stehenden Zahlen 2, 3, 4, ..., k durch 2 ersetzen, womit wir die rechte Seite der Gleichung (1) wiederum vergrößern.

Können wir nun eine Zahl M angeben, die selbst von der vergrößerten Summe der rechten Seite von (1) nicht erreicht wird, so wird diese natürlich schon gar nicht von der kleineren Summe erreicht.

Die Berechnung einer solchen Zahl M ist sehr einfach. Nehmen wir die genannten Veränderungen in der Gleichung (1) vor, so ergibt sich:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

Wenn jetzt die Zahl n über alle Grenzen wächst, können wir unmittelbar eine solche Zahl M angeben; denn dann geht die rechte Seite der Ungleichung (2) über in

$$1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right)$$

Die in der Klammer enthaltene Reihe ist uns bekannt. Es ist eine unendliche geometrische Reihe mit dem konstanten Quotienten $q = \frac{1}{2}$, deren Summe wir bereits zu $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ berechnet haben.

Damit können wir folgern, dass für beliebiges, ganzes, positives n die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

gilt und somit auch

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hieraus ergibt sich nun, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ im engeren Sinn monoton und beiderseits beschränkt ist, dass sie nach dem Satz von Weierstrass für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert strebt. Dieser Grenzwert wird durch eine irrationale Zahl dargestellt, die annähernd gleich

$$2,71828182845\dots$$

ist. Dieser irrationalen Zahl begegnen wir, wie auch der Zahl π häufig. Sie erhielt zu Ehren Eulers als Bezeichnung den Buchstaben e und wurde zu Ehren Neperts Nepersche Zahl genannt. Somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

In der heutigen Zeit werden im wesentlichen nur noch zwei Logarithmensysteme benutzt: die natürlichen Logarithmen mit der Zahl e als Basis und die dekadischen Logarithmen mit der Basis 10. Durch die Theorie der modernen Rechenautomaten erlangte allerdings auch das Logarithmensystem mit der Basis 2 wieder Bedeutung.

Für die natürlichen Logarithmen einer Zahl N schreibt man $\ln N$, für die dekadischen oder Briggschen Logarithmen $\lg N$ und für die Logarithmen der Basis 2 schließlich $\text{ld } N$.

Die besondere Rolle, die das dekadische Logarithmensystem bei unseren praktischen Berechnungen spielt, erklärt sich lediglich daraus, dass 10 auch die Basis unseres Zahlensystems ist.

Wir müssen uns jedoch darüber im klaren sein, dass es außer diesem Zahlensystem auch noch andere Systeme gibt. So haben sich bis in unsere Tage als Einteilung der Zeit die Stunde zu 60 Minuten und die Minute zu 60 Sekunden erhalten. Ähnlich ist es mit der Winkелеinteilung bei den Altgraden. Ein Altgrad hat bekanntlich 60 Winkelminuten und eine Minute 60 Winkelsekunden.

Hiermit haben sich Reste eines sogenannten Sexagesimalsystems erhalten, wie es bei den alten Babyloniern gebräuchlich war. In den Sprachen einiger Völker findet man bei den Zahlenbezeichnungen noch Überreste eines Zwanzigersystems. Schließlich verwendet man gerade in unseren Tagen bei den elektronischen Rechenautomaten das Dualsystem oder Binärsystem, ein Zahlensystem, bei dem die Basis 2 ist.

Hätten wir ein anderes, nicht dezimales Zahlensystem, dann würden auch die dekadischen Logarithmen bei weitem nicht so eine große Rolle spielen.

Anders ist es mit den natürlichen Logarithmen. Ihre Basis ist nicht von der Wahl eines speziellen Zahlensystems abhängig. Sie werden daher sehr häufig zur Lösung theoretischer Probleme in der Mathematik, Physik, Mechanik und in anderen Wissenschaften herangezogen. Der Übergang aus dem einen Logarithmensystem in das andere vollzieht sich bekanntlich sehr einfach nach der Regel:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Für den speziellen Fall des Übergangs von den natürlichen zu den dekadischen Logarithmen bedeutet das

$$\lg N = \frac{\ln N}{\ln 10}$$

Die höhere Mathematik liefert uns Formeln, nach denen die natürlichen Logarithmen der Zahlen berechnet werden können. Eine dieser Formeln lautet:

$$\ln(N + 1) = \ln N + 2 \left(\frac{1}{2N + 1} + \frac{1}{3(2N + 1)^3} + \frac{1}{5(2N + 1)^5} + \dots \right)$$

Wir wollen mit Hilfe dieser Formel einige natürliche Logarithmen bestimmen. (Zur Berechnung von $\ln 2$ setzen wir in der Formel $N = 1$.)

$$\ln 2 = 0 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots \right) \approx 0,693$$

$$\ln 4 \approx \ln 4 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} \right) \approx 1,6094$$

$$\ln 10 = \ln(2 \cdot 5) = \ln 2 + \ln 5 \approx 2,3026$$

Mit Hilfe der Formel, die den Übergang aus einem Logarithmensystem in ein anderes ermöglicht, können wir dann die dekadischen Logarithmen berechnen.

$$\lg N = \frac{\ln N}{\ln 10} \approx \frac{\ln N}{2,3026} \approx 0,4343 \cdot \ln N$$

Der Faktor 0,4343 (ebenfalls eine irrationale Zahl) wird auch Modul des Überganges von den natürlichen zu den dekadischen Logarithmen genannt und mit dem Buchstaben M bezeichnet. Demnach ist:

$$M = 0,4343$$

(mit einer Genauigkeit von 0,0001).

3.6 Rechenmaschinen



Gottfried Wilhelm Leibniz

Die Logarithmentafel und der Rechenstab, der etwas später erfunden wurde, erleichterten und verkürzten die anstrengende Arbeit der Rechner. Damit gab man sich jedoch nicht zufrieden, vielmehr begannen die Forscher Wege zu suchen, um die Menschen noch weiter von der monotonen und schwierigen Rechenarbeit zu befreien und Maschinen dafür einzusetzen.

Im Jahre 1642 schuf der französische Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623-1662) eine Rechenmaschine^a.

^aDie erste Rechenmaschine mit Zehnerübertragung soll nach neueren Forschungsergebnissen bereits vor 1623 auf Veranlassung Keplers von dem Tübinger Mechaniker Wilhelm Pfister erbaut worden sein. Sie geriet jedoch wieder in Vergessenheit.

Diese Maschine war noch sehr einfach. Sie bestand aus Zahnrädern und konnte nur für Additionen und Subtraktionen verwendet werden. Aber schon mit Hilfe dieser primitiven Maschine konnte man schneller und präziser rechnen.

Im Jahre 1677 lernte der berühmte deutsche Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) den Mechanismus der Pascalschen Rechenmaschine kennen.

Er begeisterte sich für die Idee, die Rechenarbeit zu mechanisieren. Bereits wenige Monate später hatte Leibniz eine eigene Rechenmaschine konstruiert, die alle vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) ausführen konnte. Im Laufe der Jahre wurden die Rechenmaschinen vervollkommnet. Aus der Vielzahl der Entwicklungen seien nur einige genannt.

So entwarf und konstruierte der englische Ingenieur und Mathematiker Charles Babbage (1792-1871) eine Rechenmaschine, die auf dem Differenzenprinzip beruhte. Diese Maschine sollte vor allem für die Herstellung und Überprüfung mathematischer Tabellen eingesetzt werden.



P.I. Tschebyschew



A.N. Krylow

Im Jahre 1847 baute der russische Ingenieur Odner den sogenannten Arithmetor, eine

Rechenmaschine für die Addition und Subtraktion mit Druckmechanismus. Besondere Verdienste erwarb sich der russische Gelehrte Tschebyschew. Er entwickelte den ersten automatischen Mechanismus für die Multiplikation und Division. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts erarbeitete der Mathematiker und Schiffsbauer A.N. Krylow die Theorie einer Maschine, die komplizierte Aufgaben der höheren Mathematik ausführen konnte.

Heute sind Rechenmaschinen sehr verbreitet. Wir begegnen ihnen beispielsweise in Banken, Lohnbüros und in den Selbstbedienungsläden in verschiedenen Ausführungen (Abb. 18 und 19).

Alle diese Rechenmaschinen können jedoch in keiner Weise mit den modernen Rechenautomaten verglichen werden. Es fehlt ihnen ein wesentliches Prinzip, das wir als Programmsteuerung bezeichnen.

Ein Rechenprozess gliedert sich in eine mehr oder weniger große Anzahl von Einzeloperationen der verschiedensten Art. Einmal sind dies die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Zum anderen gehören dazu aber noch eine Reihe logischer Operationen, wie Entscheidungen über den Grad einer erreichten Genauigkeit, Vorzeichenermittlungen, Zahlenvergleiche.

Aus allen diesen Operationen setzt sich die Gesamtrechnung zusammen. Man kann mit ihnen also ein Programm aufstellen, nach dem die Rechnung abläuft. Je besser und geschickter das Programm aufgebaut ist, desto schneller und genauer wird das Ergebnis berechnet. Diese Tatsache ist jedem beispielsweise vom Ablauf eines Sportfestes her bekannt; denn nur mit einem gut ausgewogenen Programm kann man in kürzester Zeit alle Wettkämpfe durchführen.

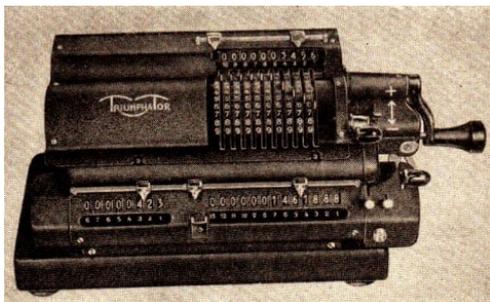


Abb. 18

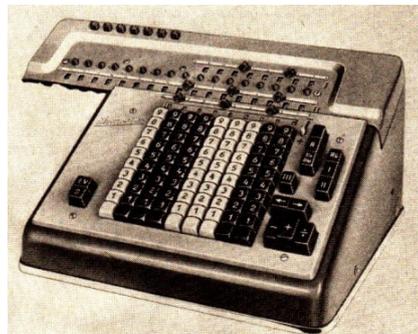


Abb. 19

Bei allen bisher genannten Rechenmaschinen muss der Mensch die Gesamtrechnung nach einem entsprechenden Programm ausführen. Die Maschinen können ihm lediglich die einzelnen Rechenoperationen erleichtern.

Der bereits erwähnte englische Mathematiker Charles Babbage kam, angeregt durch die Steuerung der automatischen Webstühle von Jacquard, auf die Idee, einen Rechenautomaten zu bauen, der nach einem vom Menschen festgelegten Programm den gesamten Rechenablauf selbständig durchführen kann.

Nahezu fünfzig Jahre arbeitete er an der Verwirklichung seines Vorhabens. Er musste jedoch scheitern, da ihm in der damaligen Zeit zur Verwirklichung seiner Ideen nur

mechanische Elemente zur Verfügung standen. Diese waren jedoch auf Grund ihrer physikalischen Eigenschaften (geringe Geschwindigkeit, Trägheit, großer Kraftaufwand und Störanfälligkeit) für diesen Zweck nicht geeignet. Erst Jahrzehnte später war man mit Hilfe elektronischer Elemente in der Lage, diese Ideen zu verwirklichen.

Als einer der ersten griff der deutsche Bauingenieur Konrad Zuse diese Ideen wieder auf und entwickelte in den Jahren 1935 bis 1945 den ersten programmgesteuerten Rechenautomaten. Kurz vor Ende des zweiten Weltkrieges, unter dessen Schatten die Arbeiten Konrad Zuses lagen, konnte er seinen vierten Entwurf, die Z 4, als ersten einwandfrei arbeitenden Rechenautomaten der Welt vorführen. Im Zusammenhang mit dem Kriegsgeschehen wurde er in seiner Arbeit um Jahre zurückgeworfen.

Inzwischen entwickelte in den USA Howard H. Aiken die beiden programmgesteuerten Rechenautomaten auf Relais-Basis, Mark I und Mark II, und ab 1946 arbeitete an der Pennsylvania-Universität der erste elektronische programmgesteuerte Rechenautomat ENIAC, dessen Arbeitselemente Elektronenröhren waren.

Drei Jahre später, 1949, wurde in der UdSSR unter Leitung des Mitgliedes der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Sergei A. Lebedew, ein elektronischer Rechenautomat vollendet. In den darauffolgenden Jahren entstand gleichfalls unter der Leitung von Lebedew der elektronische Hochgeschwindigkeits-Rechenautomat BESM 1, der durchschnittlich 7000 bis 8000 arithmetische Operationen je Sekunde ausführen kann.

Der Automat ersetzt damit eine Armee von Zehntausenden von Rechnern, deren Unterbringung sicher Arbeitsräume mit einer Fläche von insgesamt mehr als 100000 m² beanspruchen würde.

Mit diesem elektronischen Automaten wurden seit der Zeit seiner Inbetriebnahme eine große Anzahl von Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft und der Technik berechnet. Der ökonomische Nutzen, den dieser Rechenautomat erbrachte, wird auf über 100 Millionen Rubel geschätzt.

Hierfür seien einige Beispiele angeführt.

Der Automat wurde unter anderem bei folgenden Arbeiten eingesetzt:

Für den internationalen astronomischen Kalender waren in wenigen Tagen die Bahnen von etwa 700 kleineren Planeten des Sonnensystems mit ihren Einwirkungen auf die Planeten Jupiter, Saturn u.a. zu berechnen. Früher benötigten große Rechenbüros für derartige Berechnungen mehrere Monate.

Bei der Aufstellung von Karten nach angegebenen Geländevermessungen ergeben sich lineare Gleichungssysteme von sehr vielen Gleichungen mit entsprechend vielen Unbekannten. Aufgaben dieser Art mit Gleichungssystemen von 800 Gleichungen mit 800 Unbekannten, zu deren Lösung bis zu 250 Millionen arithmetische Operationen erforderlich waren, wurden mit dem Automaten in weniger als 20 Stunden berechnet.

Der Automat lässt zudem die Möglichkeit zu, eine große Anzahl von Varianten durchzurechnen, um die geeignetste Lösung auszuwählen. So ist es beispielsweise auf dieser Grundlage möglich, für eine geplante Brücke die günstigste Konstruktion zu ermitteln oder die Werte der günstigsten Form einer Flugzeugtragfläche zu errechnen. Ebenso

kann man die technisch günstigste Form einer Turbinenschaufel oder die maximalen Werte eines Düsenantriebes ermitteln.

Elektronische Universalautomaten sind für die Durchführung wissenschaftlicher Untersuchungen auf den verschiedensten Gebieten unentbehrlich. Aus der Vielzahl der Anwendungsgebiete seien außer der Mathematik nur einige genannt: Kernphysik, Chemie, Biologie, Ballistik (Untersuchung von Fluggeschossen und Raketen mit großen Geschwindigkeiten), Meteorologie (bei der Aufstellung von Wettervorhersagen).

Die nahezu unbegrenzte Genauigkeit der Berechnungen erlaubt es, mit Hilfe der elektronischen Rechenautomaten Tabellen für die verschiedensten Zwecke in Wissenschaft und Technik in kürzester Zeit aufzustellen.

Wenn es zu Nepers Zeiten bereits solche Automaten gegeben hätte, dann wäre die Aufstellung der Logarithmentafeln, für die er über 20 Jahre gebraucht hatte, in wenigen Stunden gelungen.

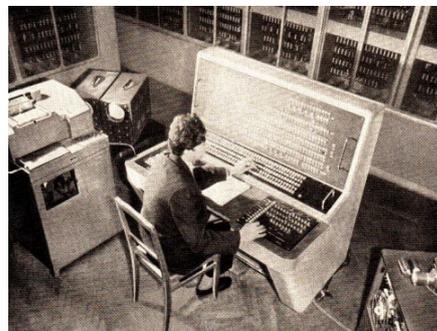


Abb. 20

Es würde zu weit führen, die Grundlagen und Prinzipien dieser bewundernswerten Maschinen in allen ihren Einzelheiten darzulegen. Zwei mathematische Erkenntnisse jedoch, ohne die eine Konstruktion derartiger Automaten unmöglich gewesen wäre, wollen wir näher betrachten.

Die erste dieser mathematischen Erkenntnisse wurde bereits erwähnt. Es handelt sich darum, dass die verschiedensten mathematischen Aufgaben, ganz gleich, ob sie dem Bereich der höheren oder der elementaren Mathematik angehören, auf die vier Grundrechenarten der Arithmetik zurückgeführt werden können. Ganz streng genommen genügt sogar eine Rechenoperation, die Addition.

Mit dieser Rückführung kompliziertester Aufgaben auf die Grundrechenarten beschäftigt sich ein spezieller Zweig der modernen Mathematik. Die komplizierte Rechnung wird in Einzeloperationen aufgelöst, die dann nach einem ausführlichen Programm ablaufen und schließlich wieder zusammengesetzt, die Lösung der Aufgabe ergeben. Automaten können hierfür weitgehend eingesetzt werden.

Die zweite mathematische Voraussetzung ist die, dass bei den modernen Rechenautomaten das Dezimalsystem durch ein Dualsystem ersetzt wird. Das Dualsystem hat nämlich hier gegenüber dem Dezimalsystem wesentliche Vorteile.

Bekanntlich besitzt das Dezimalsystem die Basis 10. Wir benötigen also zur Darstellung der Zahlen neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und dazu noch das Zeichen 0, also 10 verschiedene Zeichen. Im Dualsystem hingegen benötigen wir zur Fixierung der Zahlen nur die beiden Ziffern 0 und 1, beziehungsweise, wenn wir den internationalen Gepflogenheiten entsprechend die 1 umdrehen zu L, um sie von der 1 des Dezimalsystems

zu unterscheiden, die Ziffern 0 und L. Mit ihrer Hilfe können wir jede beliebige Zahl notieren. Stellen wir zum Beispiel die Zahl 13 im Dualsystem dar.

Zunächst untersuchen wir, wieviel Einheiten vom niedrigsten Stellenwert vorhanden sind. Hierzu dividieren wir die Zahl 13 durch 2 und erhalten 6 Rest 1. In der 1 liegt uns die Einheit des niedrigsten Stellenwertes vor. Wir notieren die Rechnung nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{r} 13 : 2 \\ - \quad = \\ \underline{12 \quad 6} \\ 1 \end{array}$$

Aus diesem Schema können wir ersehen, dass die Zahl, die ins Dualsystem umgeformt werden soll, aus einer Einheit des ersten Stellenwertes ($2^0 = 1$) und aus 6 Einheiten des zweiten Stellenwertes ($2^1 = 2$) besteht. Nun wollen wir die Anzahl der Einheiten des dritten Stellenwertes ($2^2 = 4$) ermitteln. Dazu dividieren wir die Anzahl der Einheiten des zweiten Stellenwertes wiederum durch 2 und benutzen dafür dasselbe Schema wie oben:

$$\begin{array}{r} 6 : 2 \\ - \quad = \\ \underline{6 \quad 3} \\ 0 \end{array}$$

Das besagt also, dass in der Ausgangszahl 13 keine Einheiten des zweiten Stellenwertes ($2^1 = 2$), aber 3 Einheiten des dritten Stellenwertes ($2^2 = 4$) enthalten sind. Durch erneute Division durch 2 erhalten wir die Anzahl der Einheiten des nächsthöheren Stellenwertes ($2^3 = 8$), nämlich:

$$\begin{array}{r} 3 : 2 \\ - \quad = \\ \underline{2 \quad 1} \\ 1 \end{array}$$

Daraus geht hervor, dass die Grundzahl 13 eine Einheit des dritten Stellenwertes und eine Einheit des vierten Stellenwertes besitzt. Die Zahl 13 des Dezimalsystems ergibt sich also zu LLOL im Dualsystem.

Nun soll auch der Vorteil des doch recht kompliziert erscheinenden Schemas dargelegt werden. Wir können nämlich die Einzelschemata unmittelbar hintereinanderschreiben

$$\begin{array}{r} 13 : 2 \\ - \quad = \\ \underline{12 \quad 6 : 2} \\ \quad = \\ \underline{\quad 1 \quad 6 \quad 3 : 2} \\ \quad \quad = \\ \quad \quad \underline{\quad \quad 0 \quad 2 \quad 1} \\ \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

und erhalten so unmittelbar die Dualdarstellung, allerdings in umgekehrter Reihenfolge. (Wir können uns merken, dass wir die 1 zur L umdrehen und dabei auch die Reihenfolge umkehren müssen.)

Jetzt ist es für uns leicht, die Dezimalzahlen der Reihe nach in Dualzahlen umzuwandeln. Für die ersten ergibt sich dann folgendes Bild:

$$\begin{array}{llll} 0 = 0 & 1 = L & 2 = LO & 3 = LL \\ 4 = LOO & 5 = LOL & 6 = LLO & 7 = LLL \\ 8 = LOOO & 9 = LOOL & 10 = LOLO & 11 = LOLL \\ 12 = LLOO & \text{usw.} & & \end{array}$$

Wir sehen also, dass sich in der Tat mit Hilfe der Ziffern 0 und L jede beliebige Dezimalzahl darstellen lässt. Wir können aber, und das ist vor allem wichtig, in gleicher Weise mit den Dualzahlen rechnen, wie wir es von den Dezimalzahlen her gewöhnt sind. Wenn wir uns erst einmal an die uns fremd erscheinende Schreibweise der Dualzahlen gewöhnt haben, werden wir sehen, dass hierbei die Rechnung sogar viel einfacher wird.

Einige Beispiele sollen uns dies zeigen:

$$\begin{array}{r} 5 + 6 = 11 \\ \text{LOL} \\ + \text{LLO} \\ \hline \text{LOLL} \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 + 7 = 5 \\ \text{LL00} \\ - \text{LLL} \\ \hline \text{LOL} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{L00} \cdot \text{LL} \\ \hline \text{L00} \\ \text{L00} \\ \hline \text{LL00} \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 : 4 = 3 \\ \text{LL00} : \text{L00L} = \text{LL} \\ - \text{L00} \\ \hline \text{L00} \\ - \text{L00} \\ \hline \end{array}$$

Mit Hilfe der Ziffern 0 und L können wir jeden beliebigen gemeinen Bruch darstellen. Auch hierfür einige Beispiele, wobei gleichzeitig die Umformung eines Bruches dargestellt werden soll:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{LL}{L00} = 0, LL \quad , \quad \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{L0L}{L000} = 0, L0L$$

Es ergibt sich nunmehr die Frage, welchen Vorteil das Dualsystem bei der Arbeit mit elektronischen Rechenautomaten gegenüber dem Dezimalsystem bietet.

Hier können gleich mehrere Vorteile aufgezählt werden. Zum ersten wurde bereits erwähnt, dass sich die arithmetischen Rechenoperationen bei Anwendung des Dualsystems wesentlich vereinfachen. Dementsprechend kann der Teil des Rechenwerkes im Automaten vereinfacht werden, der diese arithmetischen Rechenoperationen ausführen muss.

Zweitens lässt sich eine Dualzahl technisch sehr leicht darstellen. Es werden ja nur zwei stabile Zustände zur Darstellung von 0 und L benötigt. Das ist aber bereits dadurch gegeben, dass ein elektrisches Signal entweder vorhanden ist, dann entspricht dies der L, oder es bleibt eben aus, dann haben wir die 0.

Wollen wir also eine Dualzahl übertragen, so brauchen wir nur für jeden Stellenwert eine Leitung und senden zu bestimmten Zeitpunkten entsprechende elektrische Impulse durch die einzelnen Drähte. Und zwar immer durch die Leitung, deren Benennung mit dem Stellenwert übereinstimmt, für den in der Zahldarstellung ein L steht.

Alle anderen Leitungen bleiben in diesem Moment einfach "tot" ; denn dort soll ja keine Einheit des entsprechenden Stellenwertes durchgegeben werden.

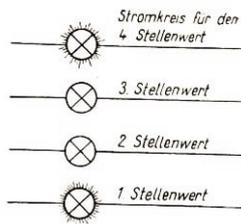


Abb. 21

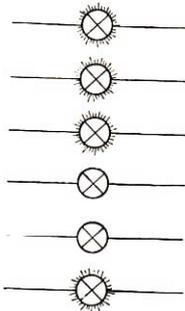


Abb. 22

Ein Beispiel, dargestellt in Abbildung 21, soll dies verständlich machen.

Es soll die Zahl 9 übertragen werden. In der Dualdarstellung hat sie die Form LOOL.

Wir benötigen somit vier Drähte, je einen für die verschiedenen Stellenwerte. Durch den ersten und vierten Draht, die ja dem ersten und vierten Stellenwert entsprechen, wird ein Impuls gegeben, während der zweite und dritte Draht ohne Impuls bleiben.

In der Abbildung 21 wird der Impuls durch das Zeichen veranschaulicht, während das Ausbleiben eines Impulses durch das Zeichen dargestellt wird.

In gleicher Weise wird in Abbildung 22 die Zahl 57 dargestellt. Ein solches System nennt man Paralleldarstellung, weil die Impulse gleichzeitig durch die verschiedenen parallel angeordneten Drähte gegeben werden.

Wir kennen aber noch eine sogenannte Seriendarstellung, bei der die Zahlen mit ihren Stellenwerten nacheinander durch ein und dieselbe Leitung gegeben werden.

Bei den elektronischen Rechenautomaten unterscheiden wir folgende Komplexe:

1. Das Rechenwerk, mit dem die arithmetischen Rechnungen durchgeführt werden.
2. Das Speicherwerk, das unserem Gedächtnis entspricht und zur Speicherung von Zwischen- und Endergebnissen bis zur weiteren Verwendung dient.
3. Das Eingabewerk, in das die Rechnung in Form eines Programms eingegeben wird. Es nimmt fernerhin die Ausgangswerte auf. Das Programm muss natürlich vorher durch den Menschen aufgestellt und für den Automaten vorbereitet worden sein. Das heißt, es wurde je nach Automatentyp in einen Filmstreifen oder auf eine Lochkarte gestanzt. Bei verschiedenen Automaten trägt man das Programm und die Ausgangswerte auch auf ein Magnetband auf.
4. Das Ausgabewerk, das dann die Ergebnisse in Form von Tabellen ausdruckt oder die Werte wiederum in Lochkarten, auf Lochstreifen oder Magnetbänder zur späteren Ausdrückung aufträgt.
5. Das Kommandowerk, von dem die Arbeit aller genannten Werke und ihr Zusammenspiel gesteuert und kontrolliert wird.

Der bereits erwähnte sowjetische Rechenautomat BESM ist natürlich ein sehr großer Automat, der von vielen Mitarbeitern der verschiedensten Berufe bedient wird. Daher hat man in den letzten Jahren eine Vielzahl anderer Typen entwickelt und gebaut, die

zwar nicht so leistungsfähig sind, deren Unterhaltungskosten dafür aber auch wesentlich niedriger liegen.

(Zum weiteren Studium dieses wichtigen Gebietes der modernen Mathematik seien die im Literaturverzeichnis angeführten Bücher empfohlen.)

Aufgaben 1. Es ist zu zeigen, dass $\log_x y \cdot \log_y x = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel für den Übergang aus einem Logarithmensystem in ein anderes!

2. Berechnen Sie $\log_{10} \sqrt[3]{25}$, wenn $\log_{10} 64 = a$ ist! Lösung: Bekanntlich schreibt man $\log_{10} x = \lg x$.

Damit ist:

Aus der gegebenen Beziehung ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} \lg 10 = 1 & \lg 64 = \lg 2^6 = a \\ \lg 2 + \lg 5 = 1 & 6 \cdot \lg 2 = a \\ \lg 5 = 1 - \lg 2 & \lg 2 = \frac{a}{6} \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$\lg 5 = 1 - \frac{a}{6} = \frac{6-a}{6}, \quad \lg \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3} \cdot \lg 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6-a}{6} = \frac{6-a}{9}$$

3. Gegeben ist $a^2 + b^2 = 7ab$.

Beweisen Sie, dass $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ gilt.

4. Die Werte $\log_k x$; $\log_m x$; $\log_n x$ bilden eine arithmetische Folge. Zeigen Sie, dass dann folgt:

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}$$

Hinweis: Nach der Aufgabe gilt:

$$\frac{\log_m x}{\log_m k}, \quad \log_m x, \quad \frac{\log mx}{\log_m n}$$

Nun braucht man nur die Eigenschaften einer arithmetischen Folge zu berücksichtigen.

5. Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!". Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Wir logarithmieren und erhalten

$$2 \lg \left(\frac{1}{2}\right) > 4 \lg \left(\frac{1}{2}\right)$$

Dividieren wir nun durch $\lg \left(\frac{1}{2}\right)$, so ergibt sich in der Tat

$$2 > 4$$

Wo steckt der Fehler?

Literatur

W. Lietzmann: *Wo steckt der Fehler?* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

K. Krinitzki: *Wie arbeitet eine elektronische Rechenmaschine?* VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1960.

M. S. Tukatschinski: *Maschinen als Mathematiker.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

Seifert/Höppner: *Können Maschinen denken?* VEB Verlag der Technik, Berlin 1961.

B. A. Trachtenbrot: *Wieso können Automaten rechnen?* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

N. A. Archangelski/B. I. Saizew: *Automatische Ziffernrechenmaschinen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

G. Klaus: *Elektronengehirn contra Menschengehirn.* Urania-Verlag, Schriftenreihe der Gesellschaft zur Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse.

N. Kobrinski/W. Pekelis: *Schneller als ein Gedanke.* Verlag Neues Leben, Berlin 1961.

4 Nomogramme von Fluchtlinientafeln mit parallelen Leitern

"Früher oder später findet jede richtige mathematische Idee in der einen oder anderen Form ihre Anwendung,"

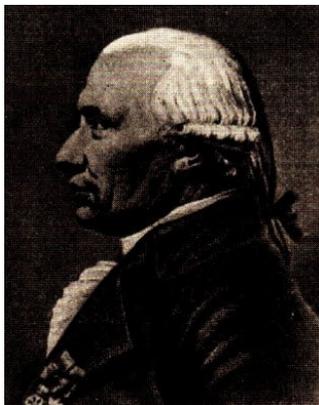
A.N. Krylow

4.1 Was ist Nomographie?

Ingenieure, Wissenschaftler, Ökonomen, Techniker und Facharbeiter verwenden häufig für eine große Anzahl bestimmter Berechnungen ein und dieselbe Formel. Derartige Formeln bestehen aus gegebenen Konstanten sowie aus Variablen und Parametern, die für den jeweiligen Spezialfall entsprechend verändert werden. Wenn diese Formeln nun etwas kompliziert sind, erfordert die Berechnung meist viel Zeit und anstrengende Arbeit.

Die Nomographie erleichtert derartige Arbeiten durch die Anwendung von grafischen Darstellungen - sogenannten Nomogrammen -, mit deren Hilfe sich wiederholende Berechnungen schnell und mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit ausgeführt werden können.

Das Wort Nomographie hat in freier Übersetzung die Bedeutung: Zeichnerische Darstellung eines Gesetzes. Meist definiert man die Nomographie als die Lehre von den zeichnerischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen.



Gaspard Monge

Die Anwendung grafischer Verfahren zur Lösung von Problemen der angewandten Mathematik geht bis in die Zeit Descartes (1596-1650) zurück. Seine Arbeiten zur Anwendung von Koordinaten ermöglichten es erst, die Funktion veränderlicher Größen grafisch darzustellen. Die Kurven, die Descartes entwickelte, sind im eigentlichen Sinne die ersten Nomogramme.

Später wurden grafische Verfahren zur Lösung praktischer Aufgaben mit Erfolg von dem berühmten französischen Mathematiker und Ingenieur Gaspard Monge (1746-1818) angewendet.

Monge war bekanntlich einer der Schöpfer der darstellenden Geometrie. Er ist zudem als Kämpfer der französischen Revolution bekannt.

Seinem Einfluss ist es fernerhin zuzuschreiben, dass die Ausbildung in technischen Disziplinen eingeführt und dass die ersten polytechnischen Schulen - die Vorbilder der technischen Lehranstalten des 19. Jahrhunderts - eingerichtet wurden.

Das Werk Monges bildete den Grundstein für die eigentliche Arbeit auf dem Gebiet der Nomographie, wenn auch zu jener Zeit die Nomographie noch nicht als selbständige Disziplin in der Mathematik bestand. In seinem Werk Graphische Algebra, das im Jahre 1795 erschien und noch heute Beachtung findet, zeigte Monge erstmalig Wege der

grafischen Darstellung von Funktionen mit drei Variablen.

Im Verlauf der folgenden drei bis vier Jahrzehnte wurde die grafische Methode in den Werken von Gauß, Möbius und anderen Mathematikern weiter gefestigt, verallgemeinert und vereinfacht. So war es in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts beim Aufbau der ersten Eisenbahnen in Frankreich möglich, Berechnungen über Erdarbeiten mit Hilfe der Nomographie durchzuführen. Es wurden die ersten Aufgaben dieser Art von französischen Ingenieuren gestellt und auch gelöst.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress 1890 in Paris wurde die Problematik dieser neuen Disziplin der Mathematik erörtert, und sie erhielt die Bezeichnung Nomographie.

In den folgenden Jahren fand die Nomographie in vielen praktischen Wissenschaften eine weite Verbreitung (Metallbearbeitung, Elektrotechnik, angewandte Mechanik, Ökonomie u. a.). Heute ist es für viele Berufe unerlässlich, sich mit der Nomographie zu beschäftigen.

4.2 Die Berechnung der Zeichnungen (Nomogramme)

Um die Vorzüge der Arbeit mit Nomogrammen gegenüber anderen Rechenverfahren zu erkennen, wollen wir einige Nomogramme untersuchen.

Die Formel $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ wird vielfach für Berechnungen in der Optik benötigt (Linsenformel: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$). Wollten wir hiermit beispielsweise den Wert von z für $x = 6$ und $y = 4$ berechnen, so würden wir folgendermaßen verfahren:

$$\frac{1}{z} = \frac{x+y}{x \cdot y} \quad , \quad z = \frac{x \cdot y}{x+y} = \frac{6 \cdot 4}{10} = 2,4$$

Mit Hilfe eines Nomogramms für diese Formel vereinfacht sich die Ermittlung von z erheblich (Abb. 24).

Wir verbinden lediglich die Punkte $x_1 = 6$ und $y_1 = 4$ durch eine Gerade und lesen im Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Strahl Z das Ergebnis $z_1 = 2,4$ ab.

Der Vorteil beim Gebrauch von Nomogrammen liegt vor allem in der leichten Handhabung, selbst wenn x und y gebrochene Zahlen sein sollten, wie beispielsweise $x = 3,5$ und $y = 2,75$.

Ermitteln Sie den Wert von z für $x = 3,5$ und $y = 2,75$ rechnerisch mit Hilfe der Formel $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ und grafisch mit Hilfe des Nomogramms in Abbildung 24!

Wie erfolgt nun die Aufstellung eines Nomogrammes und welches sind die theoretischen Grundlagen hierfür?

Für das Nomogramm in Abbildung 24 legt man zunächst die Z -Achse und darauf eine Skale fest. In Abbildung 24 entsprechen einer Einheit 10 mm. Der Maßstab soll im folgenden als $m_z = 10$ dargestellt werden. (Der Zusatz "mm je 1 Einheit" wurde weggelassen.)

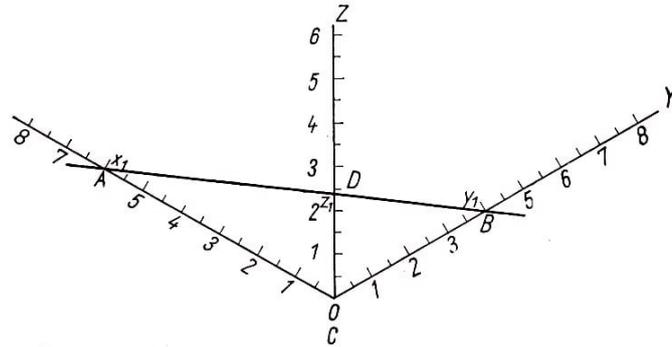


Abb. 24

Dann zeichnet man die X - und die Y -Achse, die vom Nullpunkt der Z -Achse ausgehen und mit ihr jeweils einen Winkel von 60° bilden. Auf diesen Achsen legt man ebenfalls Skalen fest, die denselben Maßstab haben wie die Skale auf der Z -Achse:

$$m_x = m_y = m_z = 10$$

Die theoretischen Grundlagen für diese Aufstellung sind folgende:

Auf der X - und der Y -Achse wählen wir zwei beliebige Punkte A und B mit den Bezeichnungen x_1 und y_1 . Wir verbinden diese Punkte durch die Gerade AB und erhalten das Dreieck ABC . Nun brauchen wir nur noch zu zeigen, dass der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Z -Achse den Wert z_1 hat, der mit den Größen x_1 und y_1 durch die Formel

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1}$$

verbunden ist.

Die Fläche des Dreiecks ABC setzt sich aus den Flächen zweier Teildreiecke zusammen.

$$\triangle ACB = \triangle ACD + \triangle CBD$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formel für die Fläche eines Dreiecks ergibt sich:

$$\frac{AC \cdot CB}{2} \sin 120^\circ = \frac{AC \cdot CD}{2} \sin 60^\circ + \frac{CB \cdot CD}{2} \sin 60^\circ$$

und da $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$ ist, folgt

$$AC \cdot CB = AC \cdot CD + CB \cdot CD$$

Die Abschnittslänge AC ist gleich dem Produkt aus der Zahl x_1 und dem auf der X -Achse festgelegten Maßstab m_x , also $AC = m_x \cdot x_1$. In gleicher Weise erhalten wir $BC = m_y y_1$ sowie $CD = m_z z_1$ und setzen nun ein:

$$m_x x_1 \cdot m_y y_1 = m_x x_1 \cdot m_z z_1 + m_y y_1 \cdot m_z z_1$$

Da aber im gegebenen Fall $m_x = m_y = m_z$ gilt, können wir vereinfachen zu

$$x_1 y_1 = x_1 z_1 + y_1 z_1$$

Dividieren wir durch $x_1 y_1 z_1$, so erhalten wir in der Tat

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1}$$

4.2 Die Berechnung der Zeichnungen (Nomogramme)

wobei vorausgesetzt wird, dass x_1, y_1 und z_1 ungleich Null sind.

Die folgenden drei Nomogramme, deren Aufbau hier nicht theoretisch begründet wird, sollen zusammen mit dem ersten Nomogramm zeigen, wie breit das Feld der Anwendung von Nomogrammen ist und wie verschiedenartig Nomogramme gestaltet sein können. Das Nomogramm in Abbildung 25 dient der Bestimmung des Volumens von Zylindern und Kegeln. Dem Nomogramm liegen also die Formeln

$$V_Z = \frac{\pi d^2 h}{4} \quad , \quad V_K = \frac{\pi d^2 h}{12}$$

(d :Zylinder- bzw. Kegeldurchmesser, h :Körperhöhe) zugrunde.

Das Nomogramm in Abbildung 26 gibt die Möglichkeit, die folgende Gleichung aus dem Brückenbau zu lösen:

$$r = \frac{ax}{100 - x}$$

Lösen wir diese Gleichung nach x auf, so erhalten wir

$$x = \frac{100r}{a + r}$$

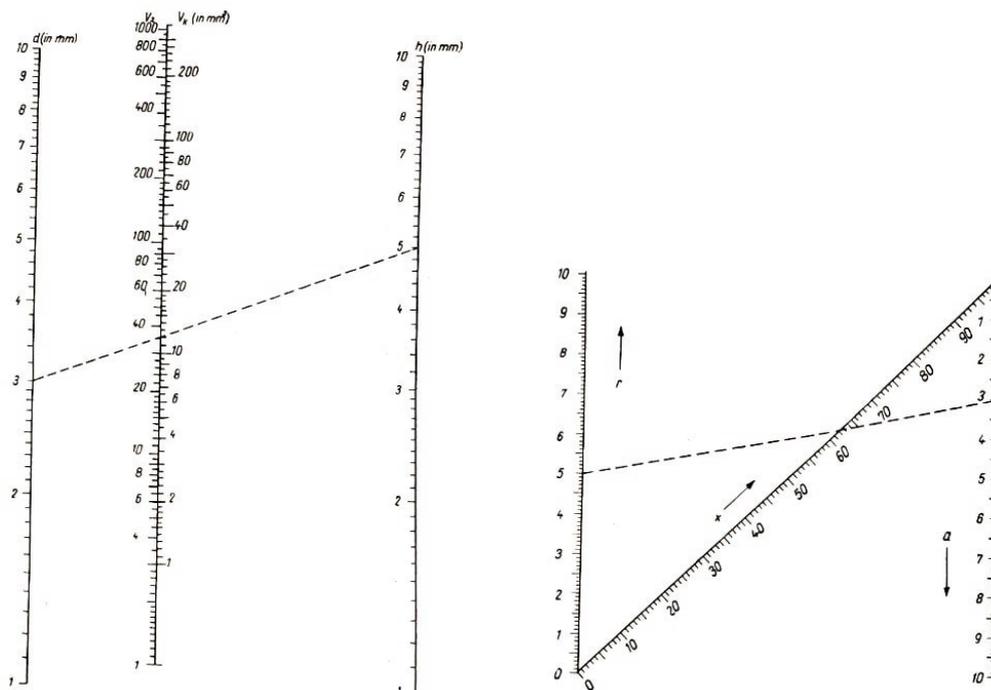


Abb. 25 und 26

Das Nomogramm in Abbildung 27 ermöglicht die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

für die Fälle, in denen die Wurzeln positiv sind.

Das Ermitteln der Unbekannten geschieht in allen drei Nomogrammen auf die gleiche Weise und entspricht dem Verfahren, das im ersten Beispiel (Abb. 24) erläutert wurde. Wir verbinden Punkte der ersten Skale (auch Leiter genannt) mit den entsprechenden

Punkten der zweiten Skale durch Geraden und erhalten im Schnittpunkt dieser Geraden mit der dritten Skale das Ergebnis.

In Abbildung 25 deutet die gestrichelte Gerade die Bestimmung des Zylinder- bzw. Kegelvolumens für $d = 3$ mm (cm) und $h = 5$ mm (cm) an. Wir sehen daraus, dass die Größen zunächst aufeinander abgestimmt werden müssen. Das Volumen ist dann entsprechend den gegebenen Größen mit der Maßeinheit Kubikmillimeter bzw. Kubikzentimeter zu schreiben.

Mit Hilfe desselben Nomogrammes können wir aber auch d ermitteln, wenn V und h gegeben sind, beziehungsweise h , wenn V und d vorliegen.

In dem Nomogramm für die Gleichung

$$r = \frac{ax}{100 - x}$$

wollen wir x für die Werte $r = 5$ und $a = 3$ bestimmen. Wir ermitteln x zu 62,5, indem wir wiederum die Punkte 5 und 3 auf den Skalen für r und a durch eine Gerade verbinden und den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Skale für x suchen.

Das Beispiel im Nomogramm für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ baut auf dem Spezialfall $x^2 - 4x + 2 = 0$ auf und ergibt die Wurzeln $x_1 \approx 3,4$ und $x_2 \approx 0,6$. Auch hier verbinden wir den Wert -4 auf der p -Skale mit dem Wert 2 auf der q -Skale.

Die Werte der Wurzeln können wir dann an den Schnittpunkten dieser Geraden mit der krummlinigen Skale für x ablesen. Wenn die Gleichung nur eine positive Wurzel hat, so schneidet die Gerade die x -Skale nur in einem Punkt, in dem wir dann den Wert dieser einen Doppelwurzel ablesen können.

Auch wenn zwei negative Wurzeln vorliegen, können wir sie mit Hilfe der im Nomogramm gefundenen positiven Wurzeln ermitteln; denn bekanntlich gilt: $x_1 + x_2 = -p$.

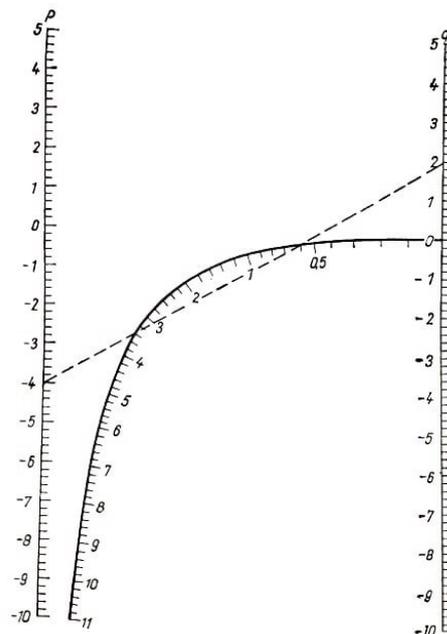


Abb. 27

Aus den Beispielen geht hervor, dass das Arbeiten mit Nomogrammen recht einfach ist.

Wir wollen uns nun etwas näher mit dem Aufstellen von Nomogrammen befassen. Es liegt klar auf der Hand, dass das Aufstellen eines Nomogramms Zeitgewinn bringt, wenn eine genügend große Anzahl von gleichartigen Aufgaben gelöst werden soll. Besonders häufig treten in der Praxis Fluchtlinien- oder Leitertafeln mit parallelen Leitern auf.

Ein Beispiel für derartige Nomogramme, sogar ein typisches Nomogramm dieser Art, wurde bereits in der Abbildung 25 dargestellt. Die Bezeichnung Fluchtlinie rührt daher, dass die Lösungspunkte der Darstellungsgleichung auf einer Geraden liegen, die alle Skalen schneidet.

Beim Aufbau der Nomogramme mit parallelen Leitern ist die Funktionsskala von Bedeutung. Dieser Begriff spielt nicht nur in der Nomographie, sondern u.a. auch bei der Erläuterung des Aufbaus des Rechenstabes eine Rolle.

4.3 Funktionsskalen

Es sei eine Funktion $f(x)$ der Variablen x und dazu die Wertetafel dieser Funktion für gegebene Werte des Argumentes gegeben.

x	x_1	x_2	x_3	\dots
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	\dots

Auf einer Geraden als Achse legen wir einen Punkt A mit der Bezeichnung „ O “ fest (Abb. 28). Dann wählen wir einen bestimmten Maßstab m und messen, beim festgelegten Punkt A beginnend, den Abschnitt auf der Geraden ab, der dem numerischen Wert von $f(x_i)$ entspricht.

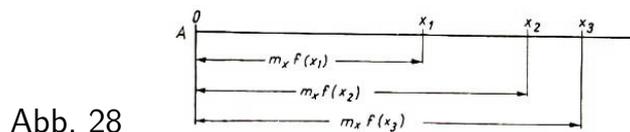


Abb. 28

Die Länge dieses Abschnittes erhalten wir durch Multiplikation des Funktionswertes für x an der Stelle x_i mit dem Maßstab m , also durch die Operation $l_1 = m \cdot f(x_1)$.

An das Ende des so ermittelten Abschnittes setzen wir in Übereinstimmung mit der Benennung des Argumente die Bezeichnung " x_1 ".

Entsprechend ermitteln wir die Abschnitte der Längen $l_2 = m \cdot f(x_2)$; $l_3 = m \cdot f(x_3)$ usw. und tragen an den Endpunkten auf der Geraden, wiederum in Übereinstimmung mit der Benennung des Argumentes, die oben angedeuteten Bezeichnungen " x_2 "; " x_3 " usw. ab.

Auf diese Weise erhalten wir eine Skale, die auch Funktionsskale genannt wird und deren grundlegende Eigenschaften wie folgt charakterisiert werden können:

Jeder beliebige Abschnitt der Funktionsskale, vom Anfangspunkt $A = O$ beginnend, stellt grafisch den numerischen Funktionswert für ein bestimmtes Argument dar. Hierbei wird das Ende des Abschnittes mit dem Argumentwert bezeichnet. Die Länge l_k desjenigen Abschnittes der Funktionsskale, dessen Ende also die Bezeichnung x_k erhält, ergibt sich zu:

$$l_k = m \cdot f(x_k)$$

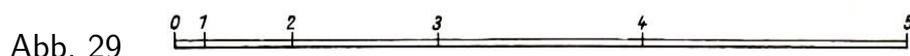
Die Länge eines beliebigen Abschnittes d der Funktionsskala, der durch die beiden Punkte mit der Bezeichnung x_i und x_k eingeschlossen werden möge, ist dann offensichtlich gleich

$$d = m \cdot [f(x_k) - f(x_i)]$$

4.4 Übungen

1. Es ist die Funktionsskala für die Funktion $f(x) = x^2$ zu konstruieren.

Hinweis: Vor der Aufstellung der Funktionsskala legen wir erst den Maßstab fest. Dieser ist von äußeren Faktoren, wie der Größe des zur Verfügung stehenden Papiers, der gewünschten Genauigkeit und anderem, abhängig. Wir wählen $m = 5$ und erhalten dann die Funktionsskala der Funktion $f(x) = x^2$ in der Form, wie sie in der Abbildung 29 dargestellt ist.



2. Es ist die Funktionsskala für die Funktion $f(x) = \frac{24}{x}$ zu ermitteln.

Hinweis: Wir stellen die Wertetafel auf:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	100
$f(x)$	24	12	8	6	4,8	4	3,4	3	2,7	2,4	...	0,24

Wählen wir nunmehr noch den Maßstab zu $m = 5$, so erhalten wir eine Funktionsskala, wie sie in der Abbildung 30 dargestellt wird.



3. Es ist die Funktionsskala für die Funktion $f(x) = \log_{10} x = \lg x$; zu ermitteln.

Hinweis: Zur Konstruktion der Skale benutzen wir nachfolgende Tabelle.

Wenn wir jetzt den Maßstab $m = 100$ wählen, so erhalten wir eine Funktionsskala der Form, wie sie in Abbildung 31 angegeben ist.



x	$\lg x$	x	$\lg x$	x	$\lg x$
1,0	0	2,0	0,30	5,5	0,74
1,1	0,04	2,2	0,34	6,0	0,78
1,2	0,08	2,4	0,38	6,5	0,813
1,3	0,11	2,6	0,42	7,0	0,845
1,4	0,15	2,8	0,45	7,5	0,875
1,5	0,18	3,0	0,48	8,0	0,903
1,6	0,20	3,5	0,54	8,5	0,929
1,7	0,23	4,0	0,50	9,0	0,954
1,8	0,26	4,5	0,65	9,5	0,978
1,9	0,28	5,0	0,70	10,0	1,000

4.5 Wichtige Formeln für das Aufstellen von Nomogrammen mit parallelen gleichmäßig geteilten Leitern

Hierbei wollen wir uns daran erinnern, dass ein beliebiger Abschnitt einer logarithmischen Skale, die bekanntlich mit der Bezeichnung "1" beginnt, durch den Numerus der jeweiligen Zahl und nicht durch ihren Logarithmus bezeichnet wird.

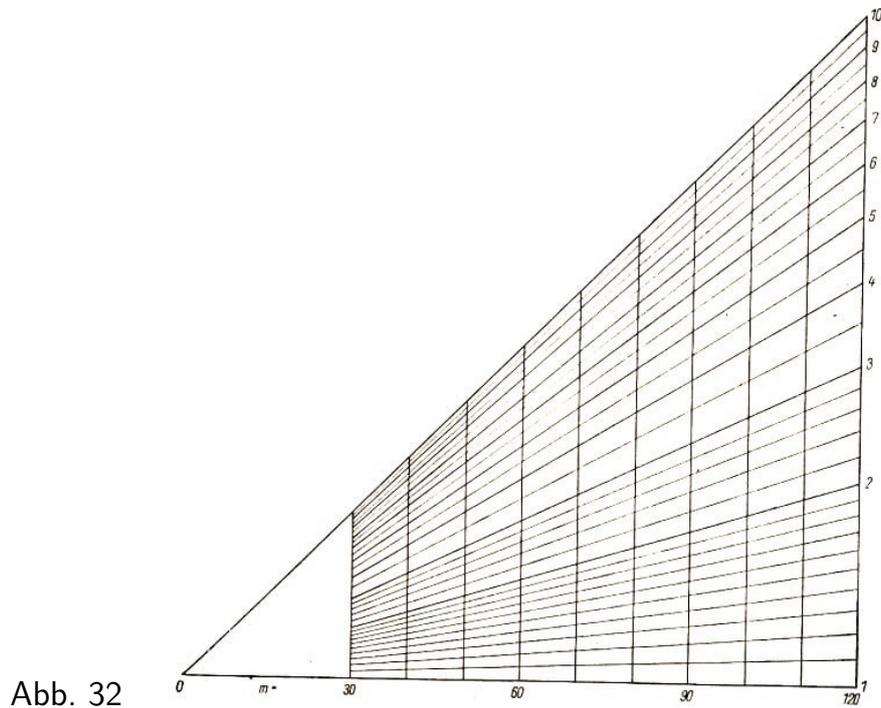


Abb. 32

Die Abbildung 32 stellt die logarithmische Skale in verschiedenen Maßstäben dar. Hierfür kommt das sogenannte Fluchtliniensystem zur Anwendung. Das Nomogramm kann nach rechts beliebig erweitert werden.

4.5 Wichtige Formeln für das Aufstellen von Nomogrammen mit parallelen gleichmäßig geteilten Leitern

Für die Aufstellung von Nomogrammen mit parallelen Leitern sind zwei Sätze von besonderer Bedeutung. Der eine behandelt die gegenseitige Lage der parallelen Leitern mit den auf ihnen abgetragenen Funktionsskalen, und der andere sagt etwas über die verschiedenen Maßstäbe auf den einzelnen Skalen aus.

Wir wollen diese Sätze herleiten.

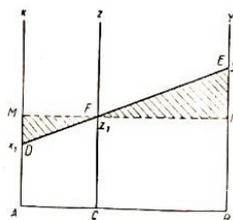


Abb. 33

Es seien drei parallele Achsen X , Y und Z gegeben, wie es in Abbildung 33 dargestellt ist. Auf jeder der Achsen werde die Funktionsskala ein und derselben Funktion (die Funktionsskala für die Funktion $f(x) = x$) aufgetragen. Die Maßstäbe auf den einzelnen Skalen seien m_x , m_y und m_z .

4.5 Wichtige Formeln für das Aufstellen von Nomogrammen mit parallelen gleichmäßig geteilten Leitern

Die Z -Achse sei nun so zwischen die beiden anderen Achsen X und Y gelegt, dass sie deren Abstand im Verhältnis $\frac{AC}{CB} = k$ teilt.

Wir verbinden nun einen Punkt D auf der X -Achse mit einem Punkt E auf der Y -Achse. Dabei habe der Punkt D auf der X -Skale die Bezeichnung " x_1 " und E entsprechend auf der Y -Skale " y_1 ". Die Gerade DE schneide die Z -Achse im Punkt F , der auf der Z -Skale die Bezeichnung " z_1 " haben möge. Wir wollen nun untersuchen, welcher formelmäßige Zusammenhang zwischen den Zahlen x_1, y_1 und z_1 besteht.

Auf der X -Achse hatten wir die Skale im Maßstab m_x angelegt. Ferner sei A der Anfangspunkt dieser Skale. Damit hat der Abschnitt AD die Länge $AD = m_x x_1$. Der Maßstab auf der Y -Achse war m_y . Ist B der Nullpunkt dieser Skale, so ergibt sich die Länge für BE zu $BE = m_y y_1$. Schließlich sei analog $CF = m_z z_1$. Nun ziehen wir durch F noch eine Parallele zu AB . Dadurch erhalten wir die beiden ähnlichen Dreiecke DFM und EFN . Für diese Dreiecke gilt:

$$\frac{DM}{EN} = \frac{MF}{NF} = \frac{AC}{CB} = k$$

also ist

$$\frac{m_z z_1 - m_x x_1}{m_y y_1 - m_z z_1} = k$$

Aus dieser Gleichung bestimmen wir z_1 wie folgt:

$$m_z z_1 - m_x x_1 = k m_y y_1 - k m_z z_1 \quad , \quad z_1 = \frac{m_x}{m_z} \frac{1}{1+k} x_1 - \frac{m_y}{m_z} \frac{k}{1+k} y_1 \quad (1)$$

Da m_x, m_y und m_z , wie auch k gegeben waren, können wir setzen:

$$\frac{m_x}{m_z} \frac{1}{1+k} = a \quad \text{und} \quad \frac{m_y}{m_z} \frac{k}{1+k} = b \quad (2,3)$$

Damit erhält die Gleichung (1) die folgende Form:

$$z_1 = a x_1 + b y_1 \quad (4)$$

Mit dieser Formel erhalten wir eine Relation, die uns eine Beziehung zwischen den Größen x_1, y_1 und z_1 , entsprechend der Stellung der Achsen X, Y und Z und der schneidenden Geraden DE , angibt.

Nomogramme mit parallelen, gleichförmig geteilten Leitern ermöglichen Berechnungen nach der Formel

$$z = ax + by$$

Wir wollen uns dies noch an einem Spezialfall veranschaulichen.

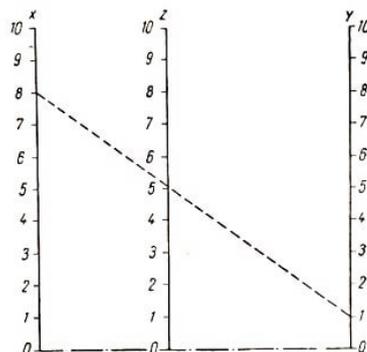


Abb. 34

Entsprechend der Abbildung 34 sei der Maßstab auf den Leitern $m_x = m_y = m_z = 5$ und das Verhältnis $\frac{AC}{CB} = k = \frac{5}{7}$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Formeln (2) und (3) für $a = \frac{7}{12}$ und $b = \frac{5}{12}$ und nach dem Einsetzen in (4) die Gleichung

$$z = \frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y$$

Das Nomogramm in Abbildung 34 gilt also für die Gleichung, wenn die Nullpunkte der Achsen X , Y und Z auf einer Geraden liegen, und ermöglicht es, zu einem gegebenen Wertepaar x und y den zugehörigen Wert z zu ermitteln.

Hierzu verbinden wir lediglich die Punkte auf der X - und der Y -Achse, die mit " x " beziehungsweise " y " bezeichnet sind, durch eine Gerade.

Diese Gerade schneidet die Z -Achse in einem Punkt, der die Bezeichnung " z " haben möge. Es ist dann z der zum Wertepaar $(x; y)$ auf Grund der Formel $z = \frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y$ gehörige Wert.

In der Abbildung 34 wird als Beispiel der Wert für z ermittelt, wenn $x = 8$ und $y = 1$ gegeben sind. Als Ergebnis erhalten wir einen Wert, der etwas größer als 5 ist. (Die Lage des Schnittpunktes kann mit ausreichender Genauigkeit geschätzt werden, wenn der Abstand zwischen den Punkten 5 und 6 auf der Achse Z in 10 gleiche Teile unterteilt ist.) Die Berechnung mit Hilfe der Formel

$$z = \frac{7}{12}x + \frac{5}{12}y$$

liefert zwar den genauen Wert für z , ist aber mit einem größeren Zeitaufwand verbunden:

$$z = \frac{7 \cdot 8}{12} + \frac{5 \cdot 1}{12} = \frac{61}{12} = 5 \frac{1}{12}$$

Rückblickend wollen wir die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, formulieren:

Gegeben sei ein Nomogramm mit den drei parallelen Leitern X , Y und Z , auf die gleichförmige Skalen aufgetragen sind. Es ist die Formel aufzustellen, die die Zuordnungsvorschrift für die Variablen x , y und z darstellt.

Wir hatten gezeigt, dass diese Zuordnungsvorschrift durch eine Relation der Form

$$z = ax + by$$

zum Ausdruck kommt, wobei a und b aus folgenden Formeln zu ermitteln sind:

$$a = \frac{m_x}{m_z} \frac{1}{1+k} \quad \text{und} \quad b = \frac{m_y}{m_z} \frac{k}{1+k} \quad (2,3)$$

Für die Aufstellung eines Nomogramms müssen wir jedoch die umgekehrte Aufgabe lösen, wie im folgenden gezeigt wird.

Gegeben ist die Formel

$$z = ax + by$$

Es ist ein Nomogramm für Berechnungen nach dieser Formel aufzustellen. Das bedeutet, es sind m_x, m_y, m_z und k zu bestimmen.

Zwei der vier Unbekannten m_x, m_y, m_z und k können wir dabei willkürlich festlegen. Die anderen beiden lassen sich dann aus den Gleichungen (2) und (3) ermitteln. Gewöhnlich legt man die Maßstäbe für die X - und die Y -Leiter, das heißt also m_x und m_y , fest und berechnet dann m_z und k . Hierzu müssen wir die Gleichungen (2) und (3) nach m_z und k umformen:¹⁰

$$k = \frac{m_x b}{m_y a} \quad , \quad m_z = \frac{m_x m_y}{m_x b + m_y a} \quad (\text{I,II})$$

Wenn wir zudem den Fall annehmen, dass $m_x = m_y$ gilt, so vereinfachen sich die Formeln (I) und (II) wie folgt:

$$k = \frac{b}{a} \quad , \quad m_z = \frac{m_x}{a + b} \quad (\text{I',II'})$$

Das ist die theoretische Grundlage für die Aufstellung von Nomogrammen mit drei parallelen gleichartig geteilten Leitern.

4.6 Übungen

1. Zeichnen Sie ein Nomogramm zur Berechnung der Geschwindigkeit, die ein gleichmäßig beschleunigter Massenpunkt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Zeit t annimmt!

$$v_t = v_0 + at \quad ; \quad a = 3m \cdot s^{-2}$$

In dieser Formel ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in $m \cdot s^{-1}$, t die Zeit in s , a der Beschleunigungskoeffizient in $m \cdot s^{-2}$ und v , die Geschwindigkeit nach der Zeit t in $m \cdot s^{-1}$.

Hinweis: Wir wählen den Maßstab auf den Achsen für v_0 und t gleich 20, das heißt $m_{v_0} = m_t = 20$. Dann ergibt sich nach den Formeln (I') und (II'):

$$k = \frac{3}{1} \quad \text{und} \quad m_z = \frac{20}{1 + 3} = 5$$

Ausführung:

a) Wir zeichnen zwei parallele Geraden, die wir als v_0 - und t -Achse verwenden. Auf ihnen legen wir Skalen im Maßstab $m_{v_0} = m_t = 20$ fest (Abb. 35). Die Nullpunkte der Skalen müssen dabei auf einer senkrecht zu den Achsen verlaufenden Geraden liegen.

b) Nun zeichnen wir parallel zu den v_0 - und t -Achsen die v_t -Achse so, dass sie den Abstand zwischen der v_0 - und der t -Achse im Verhältnis 3 : 1 teilt.

c) Für die Teilung der v_t -Leiter, die im Maßstab $m_{v_t} = 5$ zu erfolgen hat, muss nun der Einheitspunkt gefunden werden. Hierzu rechnen wir mit Hilfe der Formel $v_t = v_0 + at$ eine Aufgabe durch und erhalten so einen dritten zugehörigen Punkt.

Beispielsweise sei $v_0 = 2 \frac{m}{s}$ und $t = 1s$, dann folgt für

$$v_t = 2 \frac{m}{s} + 3 \frac{m}{s} = 5 \frac{m}{s}$$

¹⁰Zur Ermittlung von k empfiehlt es sich, die Gleichung (3) durch die Gleichung (2) zu dividieren.

Wir ziehen nun die Gerade vom Wert 2 auf der v_0 -Leiter zum Wert 1 auf der t -Leiter und erhalten im Schnittpunkt mit der v_t -Achse den Wert 5.

Von diesem Punkt aus kann die Teilung der v_t -Achse im berechneten Maßstab $m_{v_t} = 5$ vorgenommen werden.

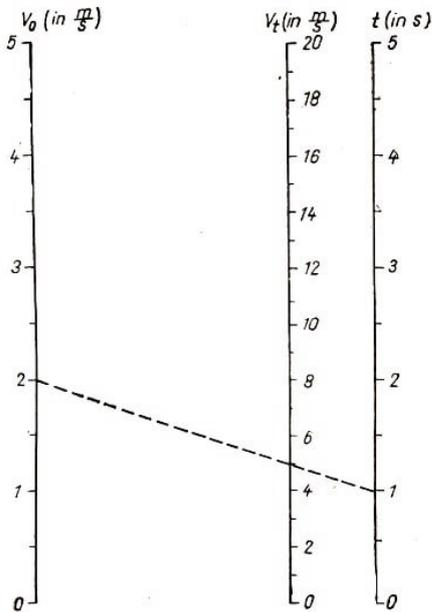


Abb. 35

d) Nach der Aufstellung des Nomogramms gilt es noch, seine Richtigkeit zu überprüfen. Hierzu vergleichen wir eine Anzahl von v_t -Werten, die wir für willkürliche Wertepaare v_0 und t aus dem Nomogramm erhalten haben, mit den entsprechenden v_t -Werten, die wir rechnerisch mit Hilfe der Formel $v_t = v_0 + 3t$ ermitteln, stimmen entsprechende v_t -Werte überein, so haben wir das Nomogramm richtig aufgestellt.

Anmerkung: Um die Festlegung der z -Skale möglichst genau durchführen zu können, empfiehlt es sich, solche Werte der variablen x und y zu wählen, die nach der Formel $z = ax + by$ ganzzahlige Werte für z liefern.

Berechnen Sie die fehlenden Größen in der folgenden Wertetafel, und überprüfen Sie Ihr Nomogramm!

v_0 (in m/s)	4		2,5		3,5
t (in s)	2	4	4,75	4	1,25
v_t (in m/s)		17		12	

2. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Addition zweier Zahlen!

$$z = x + y$$

Hinweis: Wenn in der Formel $z = ax + by$ gilt $a = b = 1$, so erhalten wir ein Nomogramm für die Addition (Abb. 36). In diesem Fall ist:

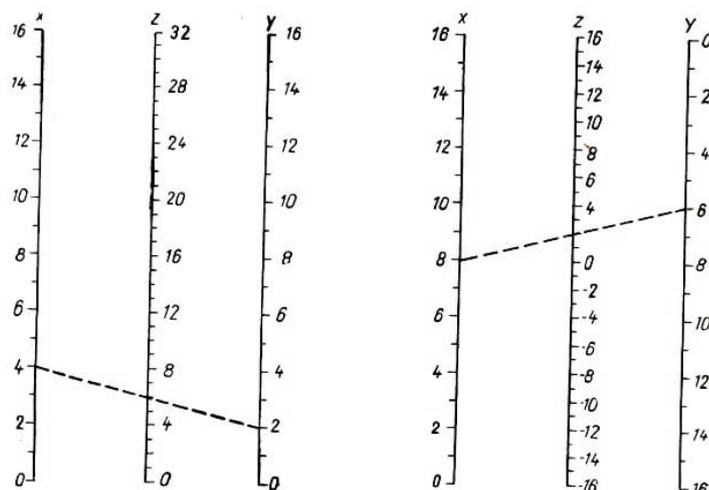


Abb. 36 und 37

$$k = \frac{b}{a} = 1 \quad \text{und} \quad m_z = \frac{m_x}{1+1} = \frac{m_x}{2}$$

d.h., die Skale Z hat von der X - und der Y -Skale den gleichen Abstand, und der Maßstab dieser Skale ist halb so groß wie der auf der X - oder Y -Skale.

Das Nomogramm der Addition kann auch für die Subtraktion von Zahlen verwendet werden. Hierzu suchen wir den Minuenden (beispielsweise 6) auf der Z -Skale und den Subtrahenden (beispielsweise 2) auf der X -Skale. Die Differenz ist dann auf der Y -Skale in dem Punkt abzulesen, in dem die Gerade durch die Punkte 6 und 2 auf der Z - beziehungsweise X -Skale die Y -Skale schneidet.

Wir können aber auch ein spezielles Nomogramm für die Formel $z = x - y$ aufstellen (Abb. 37). Dazu formen wir die obige Formel in

$$z = x + (-y)$$

um und erhalten das Nomogramm für die Subtraktion, indem wir im Prinzip ein Nomogramm für die Addition verwenden. Das negative Vorzeichen wird dadurch berücksichtigt, dass die Y -Skale die entgegengesetzte Richtung erhält. Mit Hilfe eines Beispiels bestimmt man einen Punkt der Z -Skale.

4.7 Nomogramme mit parallelen Leitern und logarithmischen Skalen

Wir wollen nun untersuchen, welche Beziehung zwischen den Variablen x , y und z bestehen, wenn in den Nomogrammen, so zum Beispiel im Nomogramm der Abbildung 37, die gleichförmig geteilten Skalen durch logarithmisch geteilte ersetzt werden (Abb. 38).

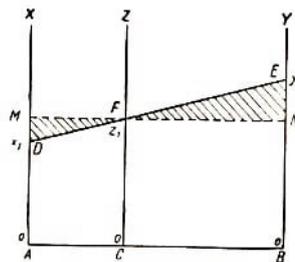


Abb. 38

Wenn wir die gleichförmig geteilten Skalen durch logarithmisch geteilte ersetzen, müssen wir die Nullwerte auf den Achsen X , Y und Z in den Punkten A , B und C mit der Bezeichnung „1“ versehen, da bekanntlich gilt: $\lg 1 = 0$.

Die Maßstäbe der logarithmischen Skalen auf den Achsen X , Y und Z sollen wiederum durch m_x , m_y und m_z bezeichnet werden, und es gilt auch wieder das Verhältnis $\frac{AC}{CB} = k$. Da

$$AD = m_x \lg x_1, \quad BE = m_y \lg y_1 \quad \text{und} \quad GF = m_z \lg z_1$$

ist, ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken DFM und EFN :

$$\frac{DM}{EN} = \frac{MF}{FN} = \frac{AC}{CB} = k \quad \text{oder} \quad \frac{m_z \cdot \lg z_1 - m_x \cdot \lg x_1}{m_y \cdot \lg y_1 - m_z \cdot \lg z_1} = k$$

Aus der letzten Gleichung können wir $\lg z_1$ bestimmen:

$$m_z \cdot \lg z_1 - m_x \cdot \lg x_1 = k \cdot m_y \cdot \lg y_1 - k \cdot m_z \cdot \lg z_1$$

$$\lg z_1 = \frac{m_x}{m_z} \cdot \frac{1}{1+k} \lg x_1 + \frac{m_y}{m_z} \cdot \frac{k}{1+k} \lg y_1 \quad (1)$$

Entsprechend der Herleitung setzen wir hier

$$\frac{m_x}{m_z} \cdot \frac{1}{1+k} = a \quad \text{und} \quad \frac{m_y}{m_z} \cdot \frac{k}{1+k} = b$$

Wir setzen nun a und b in (1) ein und wenden das Logarithmengesetz für das Potenzieren an.

$$\lg z_1 = a \cdot \lg x_1 + b \cdot \lg y_1 \quad , \quad z_1 = x_1^a \cdot y_1^b$$

Entsprechend der Herleitung dieser Formel vollzieht sich die Wertermittlung wiederum durch Verbinden der Punkte für die Werte x_1, y_1 und z_1 durch eine Gerade DE . Jetzt sind jedoch die Achsen mit logarithmischen Skalen versehen. Für die Bestimmung von k und m_z ergibt sich analog:

$$k = \frac{m_x b}{m_y a} \quad (I) \quad m_z = \frac{m_x \cdot m_y}{m_x b + m_y a} \quad (II)$$

und für

$$m_x = m_y \quad , \quad k = \frac{b}{a} \quad (I') \quad m_z = \frac{m_x}{a+b} \quad (II')$$

Somit kann man sagen:

Nomogramme mit parallelen logarithmisch geteilten Leitern ermöglichen Berechnungen nach der Formel:

$$z = x^a \cdot y^b$$

4.8 Übungen

1. Zeichnen Sie ein Nomogramm, für die Multiplikation zweier Zahlen!

$$z = x \cdot y$$

Hinweis: Wir legen die Formel $z = x^a \cdot y^b$ zugrunde und lassen gelten $a = b = 1$. Wählen wir als Maßstab für die X - und die Y -Skale $m_x = m_y = 100$, so erhalten wir für $k = \frac{b}{a} = 1$. Ferner ist $m - z = \frac{m_x}{2} = 50$. Bekanntlich liegt für $k = 1$ die Z -Achse als Mittelparallele zwischen der X - und der Y -Achse.

Zur Festlegung der Werte auf der Z -Achse wählen wir $x = y = 1$. Hierfür ist auch $z = 1$. Folglich müssen die Werte „1“ bei allen drei Achsen X, Y und Z auf einer Geraden liegen (Abb. 39).

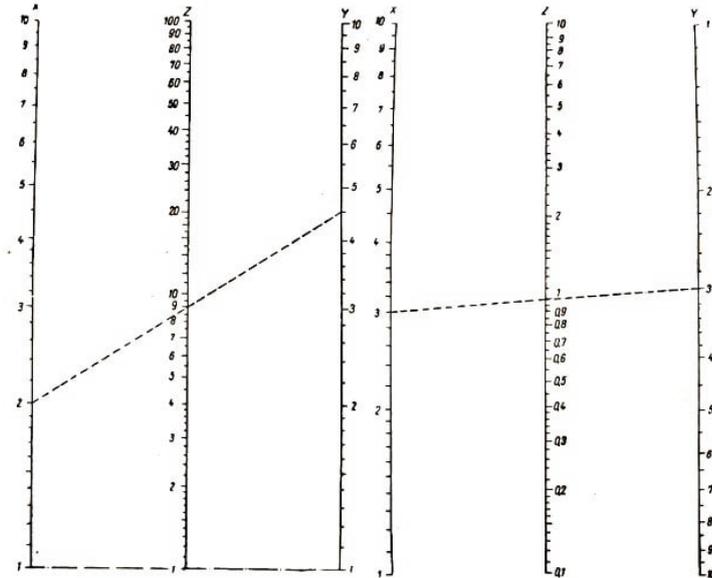


Abb. 39 und 40

Die logarithmischen Skalen im Maßstab $m = 100$ beziehungsweise $m = 50$ entnehmen wir der Abbildung 32.

2. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Division zweier Zahlen!

$$z = \frac{x}{y}$$

Hinweis: Auch hier gilt $|a| = |b| = 1$, da die Exponenten a und b der Ausgangsformel $z = \frac{x^a}{y^b}$ in diesem Falle 1 bzw. -1 sein müssen.

Ausführung:

a) Wir logarithmieren die gegebene Formel:

$$\lg z = \lg x - \lg y = \lg x + (-\lg y)$$

b) Wir legen den Maßstab für die Skalen auf der X - und der Y -Achse fest. Dieser sei $m_x = m_y = 100$.

c) Wir bestimmen k und m_z . Da $|a| = 1$ und $|b| = 1$, folgt

$$k = \frac{|b|}{|a|} = 1$$

Das besagt wiederum, dass die Z -Achse als Mittelparallele zwischen der X - und der Y -Achse liegt. Schließlich ist

$$m_z = \frac{m_x}{2} = 50$$

d) Nunmehr bauen wir die Skalen X und Y auf, wobei wir berücksichtigen müssen, dass die Y -Skale in entgegengesetzter Richtung zur X -Skale laufen muss (Abb. 40).

e) Wir konstruieren die Z -Achse.

f) Darauf folgt das Fixieren eines beliebigen Punktes der Z -Leiter. Es möge $x = y = 3$ sein. Dann ist $z = 1$. Wir verbinden also die Punkte mit der Bezeichnung „3“ auf der X - und der Y -Leiter durch eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Z -Achse erhält die Bezeichnung „1“.

- g) Jetzt können wir, mit „1“ beginnend, auf der Z -Achse die Z -Skale im Maßstab $m_z = 50$ auftragen.
 h) Schließlich kontrollieren wir das fertige Nomogramm.

3. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks!

$$F = \frac{1}{2}g \cdot h$$

Ausführung:

a) Wir logarithmieren die Formel:

$$\lg F = \lg g + \lg h - \lg 2$$

b) Wir legen einen Maßstab für die Skalen g und h fest:

$$m_g = m_h = 100$$

c) Wir bestimmen k und m_F :

$$k = \frac{b}{a} = 1 \quad ; \quad m_F = \frac{m_g}{2} = 50$$

d) Wir bauen die Skalen g und h auf.

e) Wir zeichnen die F -Leiter mit $k = 1$.

f) Wir fixieren den Punkt mit der Bezeichnung „1“ auf der F -Leiter. Für $g = 1,0$ cm und $h = 2,0$ cm folgt $F = 1,0$ cm².

g) Wir tragen die Skale F im Maßstab $m_F = 50$ auf.

h) Wir überprüfen das fertige Nomogramm (Abb. 41).

4. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Berechnung des Weges, den ein gleichmäßig beschleunigter Massenpunkt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ m · s⁻¹ in der Zeit t zurücklegt!

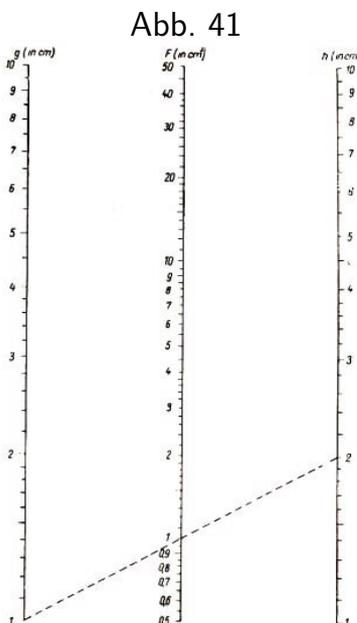
$$s = \frac{1}{2}at^2$$

In dieser Formel ist a die Beschleunigung in m · s⁻², t die Zeit in s und s der Weg in m.

Ausführung:

a) Wir logarithmieren die Formel und ermitteln dabei die Richtung der einzelnen Skalen:

$$\lg s = \lg a + 2 - \lg t - \lg 2$$



b) Wir legen die Maßstäbe für die Skalen a und t fest. Es möge gelten:

$$m_a = m_t = 150$$

c) Wir bestimmen k und m_s . Da die Exponenten von a und t 1 beziehungsweise 2 sind, ergibt sich $k = \frac{2}{1}$. Folglich teilt die s -Leiter den Abstand zwischen der a - und der t -Leiter im Verhältnis 2 : 1. Schließlich ergibt sich nach der Formel (II') der Maßstab der s -Skale zu

$$m_s = \frac{m_a}{1 + 2} = 50$$

d) Wir tragen die Skalen a und t auf (Abb. 42).

e) Nun zeichnen wir die s -Leiter ein ($k = \frac{2}{1}$).

f) Zur Festsetzung eines Punktes auf der s -Leiter wählen wir $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $t = 2$ s. Hierfür ergibt sich nach der Formel $s = \frac{1}{2}at^2$:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

g) Von diesem Punkt der s -Leiter mit der Bezeichnung „4“ tragen wir die s -Skale mit dem Maßstab $m_s = 50$ ab.

h) Wir überprüfen das Nomogramm.

Hierzu wählen wir beispielsweise $a = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^2$ und $t = 4$ s und erhalten $s = 32$ m. Wenn wir nun beide Punkte mit den Bezeichnungen „4“ auf der a - und t -Skale durch eine Gerade verbinden, so schneidet diese Gerade die s -Skale in einem Punkt, der dem Ergebnis „32“ entspricht (Abb. 42).

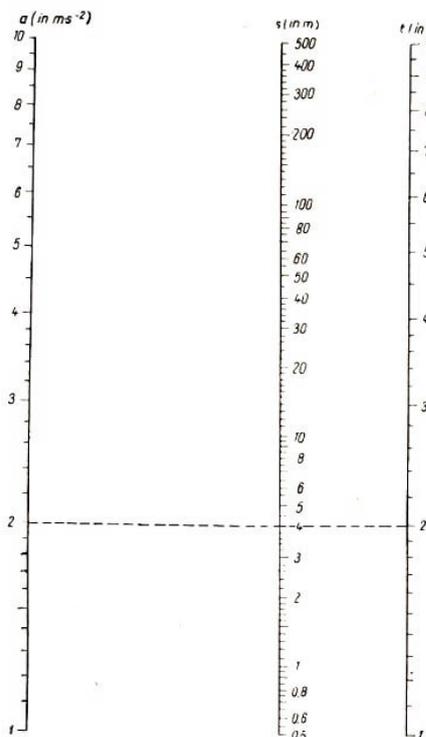


Abb. 42

5. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Berechnung der Schnittgeschwindigkeit nach der Formel

$$v = \frac{30}{a^{0,45} \cdot s^{0,52}}$$

In dieser Formel ist v die Schnittgeschwindigkeit in m/min, a die Schnitttiefe des Drehstahles in mm und s der Vorschub in mm je Umdrehung (Abb. 43).

Es soll gelten: $0,5 \leq a \leq 10$; $0,2 \leq s \leq 5$

Ausführung:

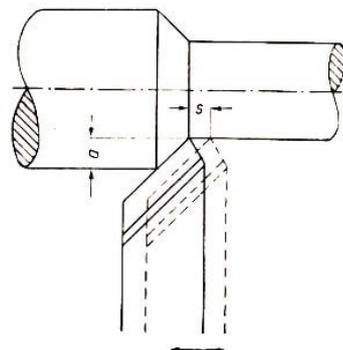


Abb. 43

a) Wir logarithmieren die Formel:

$$\lg v = -0,45 \cdot \lg a - 0,52 \cdot \lg s + \lg 30$$

b) Wir legen den Maßstab für die a - und die s -Skale fest. Es sei: $m_a = m_s = 100$.

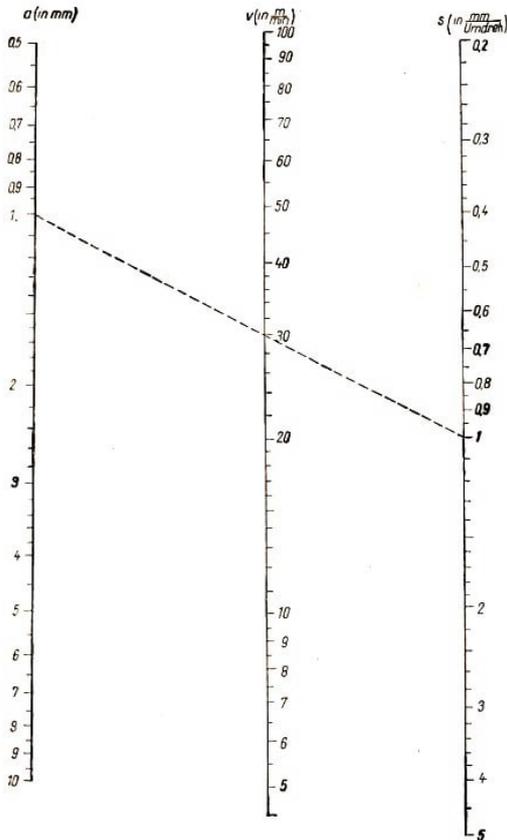


Abb. 44

c) Wir berechnen k und m_v : $k = \frac{52}{45}$

$$m_v = \frac{m_a}{0,45 + 0,52} = \frac{100}{0,97} = 103,1$$

d) Wir tragen die Skalen a und s auf (Abb. 44).

e) Wir zeichnen die v -Leiter ($k = 52 : 45$).

f) Wir legen einen Punkt der v -Skale fest, indem wir $a = 1$ mm und $s = 1$ mm/U wählen. Das liefert uns

$$v = \frac{30}{10,45 \cdot 10,52} \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} = 30 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$$

g) Wir tragen auf der v -Leiter, mit dem Punkt „30“ beginnend, die v -Skale im Maßstab $m_v = 103,1$ auf.

h) Zur Kontrolle wählen wir $a = 2$ m und $s = 4$ mm/U. Wir berechnen das Ergebnis logarithmisch und überprüfen dann das Nomogramm.

$$v = \frac{30}{20,45 \cdot 40,52} \text{ m} \cdot \text{min}^{-1} = 10,5 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$$

6. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Berechnung des Durchmessers einer gußeisernen Welle!

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

In dieser Formel ist d der Durchmesser der Welle in cm, N die Anzahl der Pferdestärken, die durch die Welle übertragen werden sollen, und n die Anzahl der Umdrehungen in der Sekunde. Das Nomogramm ist für den Bereich $1 \leq N \leq 200$ und $40 \leq n \leq 1000$ aufzustellen.

Ausführung:

a) Wir logarithmieren die Formel: $\lg d = \frac{1}{4} \lg N - \frac{1}{4} \lg n + \lg 12$.

b) Wir legen die Maßstäbe für die Skalen N und n fest. Es sei $m_N = 60$ und $m_n = 100$.

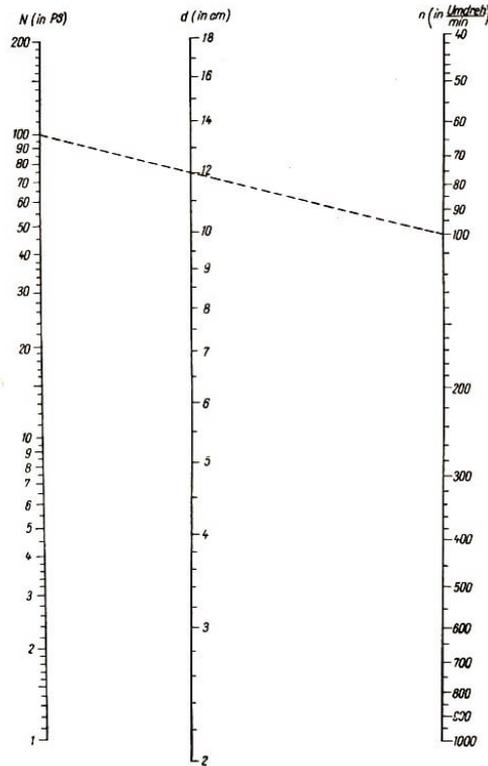


Abb. 45

c) Wir berechnen k und m_a . Da hier die Maßstäbe von m_N und m_n nicht übereinstimmen, müssen wir zur Berechnung die Formeln (I) und (II) heranziehen. Danach ist

$$k = \frac{m_x b}{m_y a} = \frac{m_N \cdot \frac{1}{4}}{m_n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

und

$$m_d = \frac{m_x \cdot m_y}{m_x b + m_y a} = \frac{m_N \cdot m_n}{\frac{1}{4}(m_N + m_n)} = \frac{60 \cdot 100 \cdot 4}{160} = 150$$

d) Wir tragen die Skalen N und n auf (Abb. 45).

e) Wir konstruieren die d -Leiter mit $k = 3 : 5$.

f) Wir bestimmen einen Punkt der d -Skale. Für $N = n = 100$ erhalten wir $d = 12$ cm.

g) Die d -Skale tragen wir im Maßstab $m_d = 150$ vom Punkt „12“ an auf.

h) Wir überprüfen das Nomogramm, indem wir wiederum für N und n beliebige Werte setzen, d berechnen und diese berechneten Werte mit den entsprechenden Ergebnissen aus dem Nomogramm vergleichen. (Zur Berechnung benutzen wir die Logarithmentafel.)

7. Zeichnen Sie ein Nomogramm für die Formel

$$N = \frac{1}{36} v \cdot a^{\frac{14}{15}} \cdot s^{\frac{3}{4}}$$

Diese Formel dient zur Berechnung der Leistung einer Werkzeugmaschine, wobei N die Leistung in Stück, v die Schnittgeschwindigkeit in $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$, s der Vorschub in mm je Umdrehung und a die Schnitttiefe in mm ist ($0,5 \leq a \leq 5$; $0,2 \leq s \leq 2$). In dieser Formel treten vier Variable auf. Im Nomogramm müssen dementsprechend vier Leitern

gezeichnet werden.

Ausführung:

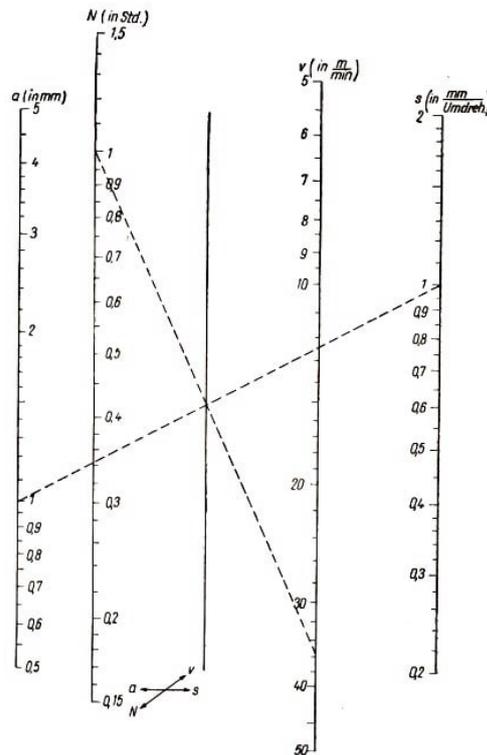


Abb. 46

a) Wir verändern die Formel

$$N = \frac{1}{36} v \cdot a^{\frac{14}{15}} \cdot s^{\frac{3}{4}}$$

so, dass auf jeder Seite des Gleichheitszeichens zwei Variable stehen:

$$\frac{36 \cdot N}{v} = a^{\frac{14}{15}} \cdot s^{\frac{3}{4}}$$

b) Wir führen eine neue Veränderliche z wie folgt ein:

$$z = a^{\frac{14}{15}} \cdot s^{\frac{3}{4}} = \frac{36 \cdot N}{v} \quad (1,2)$$

c) Wir konstruieren das Nomogramm für die Formel (1):

Wir logarithmieren: $\lg z = \frac{14}{15} \lg a + \frac{3}{4} \lg s$.

Wir legen die Maßstäbe der Skalen für a und s fest. Es sei $m_a = m_s = 100$. Wir bestimmen k und m_z

$$k = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} : \frac{14}{15} = \frac{45}{56} \quad , \quad m_z = \frac{100}{\frac{14}{15} + \frac{3}{4}} = \frac{100 \cdot 60}{101} \approx 60$$

Wir zeichnen das Nomogramm, ohne die Teilung auf der z -Achse aufzutragen (Abb. 46).

s) Nun stellen wir das Nomogramm für die Formel (2) auf. Dabei gehen wir so vor, dass sich die neue z -Skale mit der z -Skale des ersten Nomogramms deckt.

Wir logarithmieren:

$$\lg z = \lg N - \lg v + \lg 36$$

Wir legen die Maßstäbe für die Skalen N und v fest. Hierbei berücksichtigen wir, dass gelten muss: $m_z = 60$.

Somit folgt:

$$60 = \frac{m_N}{1+1} = \frac{m_N}{2}, \quad m_N = m_v = 120$$

Wir bestimmen die Lage der Leitern N und v in Bezug auf die bereits vorhandene z -Leiter mit $k = 1$. Hierbei müssen wir die entgegengesetzte Richtung der beiden Skalen berücksichtigen.

Wir legen nun die N -Skale fest. Hierzu müssen wir zuerst einen speziellen Punkt auf der N -Leiter fixieren. Wählen wir beispielsweise $a = 1$ mm, $s = 1$ m je Umdrehung und $v = 36$ m·min⁻¹, so ergibt sich $N = 1$. Wir verbinden also die Punkte „1“ und „1“ der s - und a -Skale und erhalten so den Punkt „1“ der z -Skale.

Verbinden wir nun den Punkt „36“ der v -Skale mit dem Punkt „1“ der z -Leiter, so ergibt sich der Punkt „1“ der N -Leiter. Von diesem Punkt aus tragen wir die N -Skale im Maßstab $m_N = 120$ auf.

e) Wir fügen nun noch den Schlüssel für den Gebrauch des Nomogramms bei.

Es sei $a = 2$ mm; $s = 0,8$ mm je Umdrehung und $v = 9$ m·min⁻¹. Zur Bestimmung von N verbinden wir die Punkte 2 der a -Skale und 0,8 der s -Skale durch eine Gerade. Den Schnittpunkt auf der z -Skale verbinden wir mit dem Punkt 9 der v -Skale und erhalten in der Verlängerung einen Schnitt mit der N -Skale im Punkt 0,4. Daraus resultiert: $N = 0,4$ St.

4.9 Aufgaben

Stellen Sie für die folgenden Formeln Nomogramme auf!

$$1. a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

r : Radius in cm; T : Zeit des Kreislaufes in s; a : Zentripetalbeschleunigung in cm·s⁻².

$$2. n = \frac{100}{s \cdot t}$$

s : Vorschub in mm je Umdrehung; t : Bearbeitungszeit je mm des Einzelteiles in Sekunden; n : Drehzahl

$$3. V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

V : Volumen eines Kegels in cm³; h : seine Höhe in cm; r : Radius des Grundkreises in cm

$$4. K = M \frac{6}{bh^2}$$

M : Biegemoment in kp·cm; b : Breite des rechteckigen Querschnittes einer Stange in cm; h : ihre Höhe in cm; K : Spannung in kp·cm⁻²

$$5. r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

r : Zylinderradius in cm; V : Volumen des Zylinders in cm³; h : seine Höhe in cm

4.10 Koordinatennetze schaffen „Wunder“

In der Technik kommen sehr oft analytische Ausdrücke von Funktionen der Form

$$y = cx^n$$

vor, wobei c und n Parameter sind. Wir können diese und ähnliche Funktionen in der Form von krummlinigen Kurven in den bekannten Koordinatensystemen mit gleichmäßig geteilten Skalen darstellen. Wir erhalten dann für das angegebene Beispiel eine Parabel in der einen oder anderen Form, je nach Größe der Parameter c und n .

Die Konstruktion derartiger Kurven ist aber bei etwas komplizierten Werten von c und n (beispielsweise $P = 88 \cdot F^{0,842}$) äußerst schwierig und liefert nicht die erforderliche Ablesegenauigkeit.

Im Jahre 1843 schlug Lallan vor, die krummlinige Kurve so zu transformieren, dass sie eine Gerade wird. Hierdurch kann man sie mit größerer Genauigkeit konstruieren, und auch beim Ablesen erhält man eine größere Genauigkeit.

Wir wollen uns nun nicht mit der theoretischen Begründung derartiger Transformationen aufhalten, sondern die praktische Durchführung kennenlernen.

Es sei die Gleichung

$$y = cx^n \tag{1}$$

gegeben.

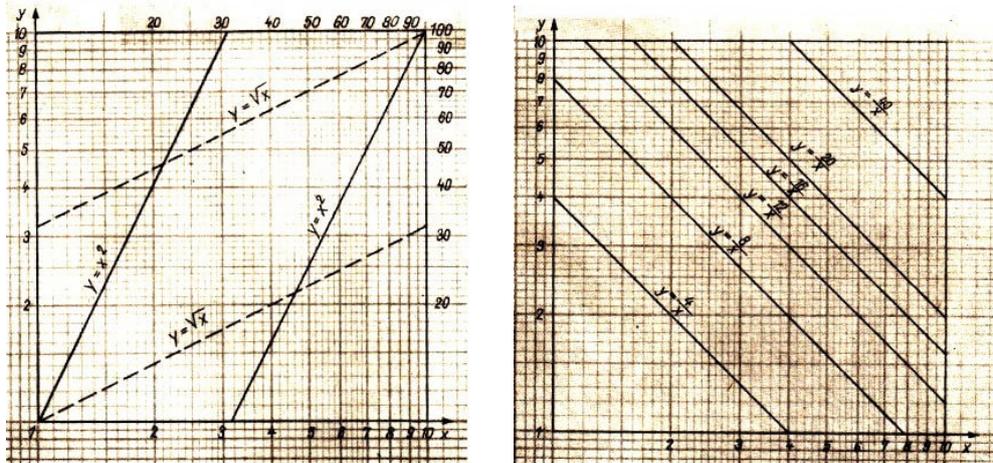


Abb. 47,48

Wir logarithmieren sie nach der Basis 10:

$$\lg y = n - \lg x + \lg c \tag{2}$$

Wenn wir nun in der Gleichung (2) als Argument nicht mehr x , sondern $\lg x$ nehmen, dann erhalten wir als Funktionswert auch nicht mehr y , sondern $\lg y$.

Hierdurch haben wir mit den neuen Variablen die Gleichung (2) in erster Potenz. Nun bilden wir ein neues Koordinatensystem und setzen an Stelle der gleichmäßigen Teilung auf den Koordinatenachsen Skalen mit logarithmischer Teilung. Hierbei sollen die Skalen der Logarithmen $\lg x$ und $\lg y$ gleichen Maßstab haben.

Darauf zeichnen wir ein entsprechendes Koordinatennetz, wie es die Abbildung 47 darstellt. Derartige Koordinatennetze sind im Handel erhältlich (Logarithmisches Papier). Bei Verwendung derartigen Papiers wird die grafische Darstellung der Gleichung (2) eine Gerade, für die n den Steigungskoeffizienten und $\lg c$ den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Achse $\lg y$ angeben, wenn wir vom Koordinatenursprung, hier der Punkt (1; 1), an rechnen. Diesen Prozess der Transformation einer krummlinigen Kurve in eine Gerade nannte Lallan einen Anamorphismus.

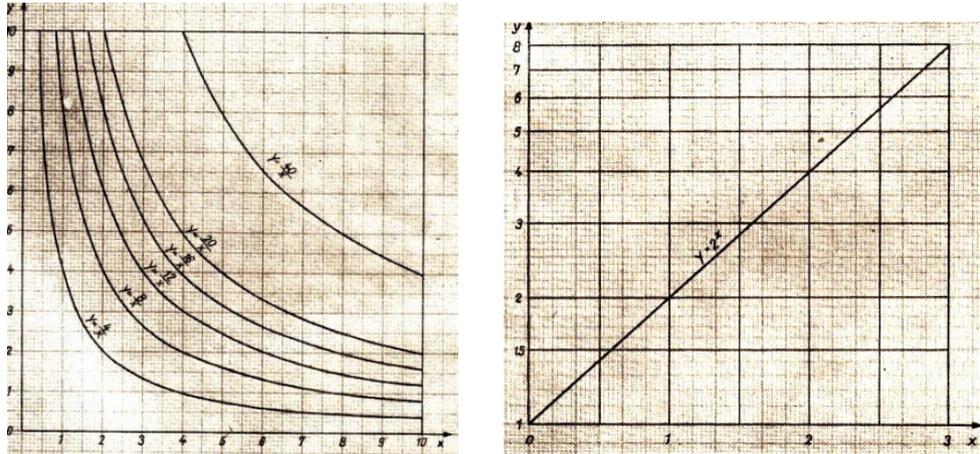


Abb. 49,50

Wir wollen unter Verwendung von logarithmischen Netzen noch für die folgenden Funktionen

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = \sqrt{x} \quad (3,4)$$

die Geraden konstruieren.

Ausführung:

a) Wir logarithmieren die Formeln $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$:

$$\lg y = 2 \cdot \lg x \quad \text{und} \quad \lg y = \frac{1}{2} \lg x \quad (3',4')$$

b) Der Steigungskoeffizient ergibt sich für die erste Kurve zu $m = 2$ und für die zweite zu $m = \frac{1}{2}$.

Das Fehlen eines absoluten Gliedes in den Formeln (3') und (4') besagt, dass die Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems gehen (Abb. 47).

Bei der Gegenüberstellung einer krummlinigen Kurve mit der entsprechenden Geraden für ein und dieselbe Funktion $y = \frac{k}{x}$ mit den Parameterwerten $k = 4; 8; 12; 16; 20; 40$ für $x > 1$ sehen wir, dass die Konstruktion der gekrümmten Kurve weitaus schwieriger ist als die der entsprechenden Geraden (Abb. 48 und 49).

Schließlich wollen wir uns noch die folgende Aufgabe stellen:

Es ist die Kurve der Exponentialfunktion $y = a^x$, die häufig in der Technik gebraucht wird, durch eine Gerade darzustellen.

Wir versuchen dies für den Spezialfall, dass $a = 2$ ist, das heißt für die Funktion $y = 2^x$. Wir logarithmieren die letzte Formel und erhalten

$$\lg y = x \cdot \lg 2$$

Wenn wir nun in der Gleichung (5) x als Argument nehmen und als Funktionswert $\lg y$ wählen, so erscheinen die Variablen in der Gleichung (5) ebenfalls in der ersten Potenz. Für die Skalen auf den Koordinatenachsen wählen wir jetzt jedoch folgende Teilung: auf der x -Achse eine gleichmäßige und auf der y -Achse eine logarithmische. Auf diese Weise erhalten wir ein sogenanntes halblogarithmisches Netz.

In diesem Netz ist das Bild der Exponentialfunktion eine Gerade (Abb. 50). Zum Vergleich wurde die Funktion auch im gleichmäßig geteilten Netz, hier im Maßstab 1 : 2, dargestellt (Abb. 51).

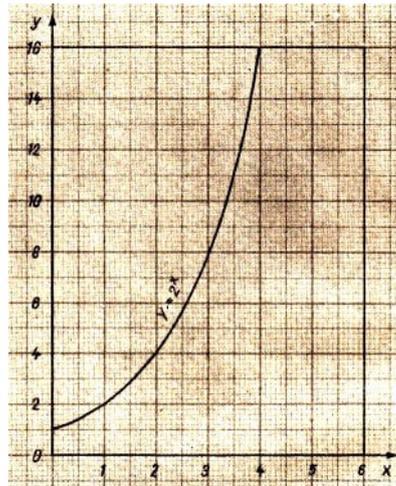


Abb. 51

Außer den im Kapitel IV behandelten Nomogrammen mit parallelen Leitern gibt es viele andere Typen von Nomogrammen, mit denen Sie sich in den nachfolgend aufgeführten Büchern bekannt machen können.

Literatur

P. Luckey: Nomographie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1953.

A. Müller: Nomographie für die technische Praxis. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1952.

M. W. Pentkowski: Nomographie. Akademie-Verlag, Berlin 1953.

Dipl. Ing. Dr. Phil. H. Körwin: Graphisches Rechnen. Fachbuchverlag, Leipzig 1949.

5 Über die Quadratur des Kreises und die Zahl π

Viele meiner Zeitgenossen und Anhänger, die sich mit dieser Methode vertraut machen, werden in der Lage sein, neue Theoreme zu schaffen, die mir noch nicht eingefallen sind.
Archimedes

5.1 Aus der Geschichte der Zahl π

Die Aufgabe, das Verhältnis des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser zu finden, ist eng mit einer der sogenannten klassischen Aufgaben der Geometrie verbunden - der Quadratur des Kreises.

In dieser Aufgabe wird gefordert, zu einem gegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Möglicherweise entstand das Problem der Quadratur sogar eher als die Frage nach dem Verhältnis; denn es erscheint doch unwahrscheinlich, dass die alten Ägypter und Babylonier bereits bewusst nach dem Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser suchten.

Andererseits finden wir die Frage nach den Beziehungen zwischen der Kreisfläche und ihrem Durchmesser in den Aufgaben eines altägyptischen Papyrus (Rechenbuch des Ahmes etwa 2000 v.u.Z.).

Gegeben sei ein Kreis mit einem Durchmesser von 9 Maßeinheiten. Wie groß ist sein Flächeninhalt ?

Für die Aufgabe wird folgende Lösung angegeben:

Man nehme $\frac{1}{9}$ des Durchmessers fort. Die anderen acht Neuntel des Durchmessers multipliziere man mit sich selber, womit man den Flächeninhalt ermittelt hat.

Nach dieser Regel ergeben sich 64 Quadratmaßeinheiten für die Fläche des angegebenen Kreises mit dem Durchmesser von 9 Maßeinheiten. Wir nehmen an, dass diese Lösung der historisch erste Versuch ist, das Problem der Quadratur des Kreises zu bewältigen. Zur Verallgemeinerung wollen wir den Durchmesser eines Kreises wie üblich mit d bezeichnen. Wir erhalten dann, wenn wir der altägyptischen Mathematik folgen, für den Kreisinhalt die Formel

$$F = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$$

Hieraus lässt sich leicht der Näherungswert bestimmen, den die altägyptischen Mathematiker für π wählten und der also vor rund 4000 Jahren gebräuchlich war. Setzen wir nämlich

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{64}{81}d^2$$

so erhalten wir

$$\pi = \frac{256}{81} = 3,1605$$

Auf diese Weise hatten die alten Ägypter bereits einen Näherungswert der Zahl π ermittelt, der sich von unserer üblichen Näherung (3,14...) lediglich in der zweiten Dezimale nach dem Komma unterscheidet. Das ist um so erstaunlicher, weil die Ägypter nicht bewusst nach einer Verhältniszahl zwischen der Länge des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser suchten.

Es steht außer Zweifel, dass die Untersuchungen zur Quadratur des Kreises in der altägyptischen Mathematik rein empirisch betrieben wurden. Interessant sind in diesem Zusammenhang übereinstimmende Überlieferungen, wonach die Ägypter Kreise und Quadrate, die jeweils in der Länge des Durchmessers und der Quadratseite übereinstimmten, mit einer geschlossenen Schicht von Getreidekörnern überdeckten.

Ein Auszählen der Körner ergab dann, dass auf den Quadraten jeweils mehr Körner lagen als auf den Kreisflächen. Aus diesem Grunde verkleinerten die Ägypter die Quadratseite wiederholt um ein Stückchen und zählten wieder aus, bis schließlich Übereinstimmung in der Anzahl der Körner erreicht war.

Auf diese Weise kamen sie zu dem Schluss, dass die Anzahl der Körner auf der Fläche des Quadrates mit der auf der Kreisfläche übereinstimmt, wenn die Seite des Quadrates gleich $\frac{8}{9}$ der Länge des Kreisdurchmessers ist (Abb. 52).

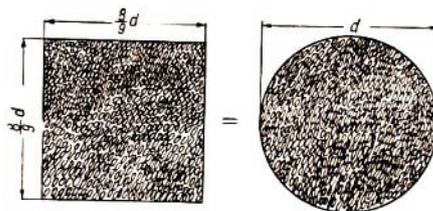


Abb. 52

Folglich, so meinten sie, stimmen in diesem Fall auch die Flächen beider Figuren überein.

Die Quadratur des Kreises und die Rektifikation des Kreisumfanges (Bestimmen der Länge des Kreisumfanges) interessierte wegen der zunehmenden Bedeutung des Kreises (Rad, Töpferscheibe u.a.) für die gesellschaftliche Praxis die altgriechischen Mathematiker, ja die Mathematiker der ganzen damaligen Welt, und man kann diese Aufgaben streng genommen als den Ausgangspunkt der Geometrie ansehen.

Viele griechische Mathematiker, wie Anaxagoras (5. Jahrh. v.u.Z.), Antiphon (5. Jahrh. v.u.Z.), Dinostratus (4. Jahrh. v.u.Z.), Hippokrates (5. Jahrh. v.u.Z.) und Bryson (5. Jahrh. v.u.Z.), bemühten sich um die Lösung dieser Aufgabe. Einige von ihnen verwendeten außer Zirkel und Lineal noch andere Geräte und konnten damit den Kreisumfang und auch die Länge einiger anderer krummliniger Kurven ermitteln.

Ihre Lösungen wurden von der Platonischen Schule jedoch zurückgewiesen, wie übrigens auch die sogenannten "mechanischen" Lösungen. Platon und seine Schüler erlaubten für die Ausführung von geometrischen Konstruktionen lediglich den Gebrauch zweier Instrumente: Zirkel und Lineal.

Die Verwendung weiterer Instrumente lehnten sie strikt ab.

Durch die Einführung derart strenger Forderungen gab es eine Klasse von Aufgaben in

der Geometrie, die als "unlösbare Probleme" bezeichnet werden mussten.

Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, dass diese Aufgaben nur mit Hilfe der genannten Geräte nicht gelöst werden können. Musterbeispiele für derartige Probleme sind Aufgaben wie: Trisektion des Winkels (Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile, wie es für den Spezialfall eines Winkels von 90° möglich ist), Quadratur des Kreises, Verdopplung des Volumens eines Würfels.

Heute erscheint uns die von der Platonischen Schule festgelegte Einschränkung in der Verwendung mathematischer Hilfsmittel zur Ausführung geometrischer Konstruktionen unbegründet. Wir lassen jetzt die Lösung derartiger Aufgaben mit beliebigen Hilfsmitteln zu, vorausgesetzt, dass die Lösung richtig ist.

Hätte allerdings Platon seinerzeit der Geometrie diese Einschränkung nicht auferlegt, so wären sicherlich viele Versuche und Forschungen zur Lösung und Untersuchung derartiger "unmöglicher Aufgaben" unterblieben, was der Mathematik zum Nachteil gereicht hätte. Bei diesen Untersuchungen ergab sich nämlich oftmals die Notwendigkeit, völlig neue mathematische Methoden zu entwickeln, die vielfach weitaus größere Bedeutung erlangten als die Lösung der ursprünglichen Probleme. Insbesondere wurde das Problem der Quadratur des Kreises für die Entwicklung der mathematischen Beweisverfahren außerordentlich bedeutsam.

Wenden wir uns nun einem dieser Lösungsversuche zu, der uns von Dinostratus überliefert worden ist. Über das Leben und das Wirken dieses griechischen Gelehrten wissen wir sehr wenig. Uns ist nur bekannt, dass er ein Schüler Platons war und dass er sich damit beschäftigte, zu einem gegebenen Kreis ein gleich großes Quadrat zu konstruieren. Wir werden dabei ganz allgemein mit denjenigen Problemen bekannt, die in der Mathematik die Bezeichnung "Quadraturen" haben.

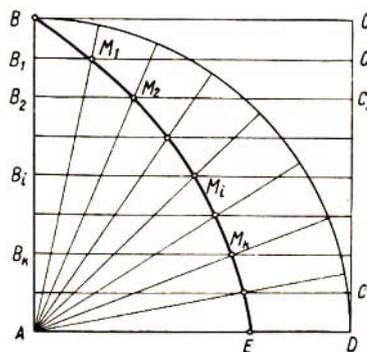


Abb. 53

Es soll das Quadrat $ABCD$ gegeben sein (Abb. 53). Wir stellen uns nun vor, dass sich die Seite AB gleichförmig um den Punkt A dreht. Dann beschreibt der andere Endpunkt der Seite, der Punkt B , den Kreisbogen BD .

Gleichzeitig mit der Drehung des Radius AB möge sich die Seite BC des Quadrates gleichförmig parallel zu sich selbst nach unten verschieben. Diese beiden Bewegungen sollen zeitlich so vor sich gehen, dass sie zum gleichen Zeitpunkt beginnen und auch zur gleichen Zeit beendet sind. Die Strecken AB und BC kommen also schließlich über der Strecke AD zur Deckung.

Nun stellen wir uns noch vor, dass bei dieser Überlagerung der beiden gleichzeitigen

Bewegungen der Schnittpunkt der sich verschiebenden Geraden mit dem sich drehenden Radius in konstanten Zeitintervallen fixiert wird.

Der geometrische Ort dieser Schnittpunkte ist dann die Kurve BE .

Wie es die Zeichnung zeigt, konstruieren wir nacheinander die Punkte M_1, M_2, \dots dieser Kurve. Hierzu teilen wir den rechten Winkel BAD in acht gleiche Teile und zerlegen die Seiten AB und CD des Quadrates in ebensoviel gleiche Abschnitte.

Verbinden wir nun entsprechende Punkte der beiden Seiten AB und CD , so erhalten wir die zu BC parallelen Geraden B_1C_1, B_2C_2, \dots

Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den ihnen entsprechenden Radien, die wir aus der Teilung des Winkels BAD in acht gleiche Teile erhalten hatten, bezeichnen wir mit M_1, M_2, \dots

Nun ist es für uns leicht, diese Punkte durch eine gekrümmte Linie zu verbinden, wodurch wir die Kurve BE erhalten. Ihre wesentlichste Eigenschaft ist nach der Konstruktion offensichtlich folgende:

$$\frac{\angle BAM_i}{\angle BAM_k} = \frac{BB_i}{BB_k} \quad \text{oder} \quad \frac{\angle DAM_i}{\angle DAM_k} = \frac{AB_i}{AB_k}$$

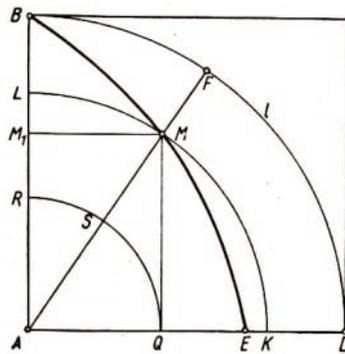


Abb. 54

Mit Hilfe dieser Kurve, die noch einmal in Abbildung 54 ohne die Hilfslinien dargestellt wird, kann die Rektifikation des Kreisbogens $\widehat{BFD} = l$ vorgenommen werden.

Wir stellen hierzu die Beziehung

$$\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

auf und beweisen diese mit der Methode des "indirekten Beweises". Wir folgen damit dem griechischen Mathematiker Pappus, der im dritten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung in Alexandrien lebte. In seinem Werk Mathematische Sammlung trug er viele bemerkenswerte Probleme auf dem Gebiet der Geometrie, die bis dahin untersucht wurden, zusammen.

Er schilderte uns besonders die Geschichte der drei berühmten Aufgaben des Altertums: die Trisektion des Winkels, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises.

Wir wollen uns also diesen Beweis näher ansehen.

In der Abbildung 54 ist \widehat{BFD} der Kreisbogen, für den der Mittelpunkt des Kreises im Punkt A des Quadrates $ABCD$ liegt. Darin ist BE wieder die nach der oben beschriebenen Anweisung konstruierte Kurve. Wir wollen nun zeigen, dass das Verhältnis $\frac{l}{AD}$

nicht kleiner und nicht größer sein kann als das Verhältnis $\frac{AD}{AE}$.

Wir nehmen an, dass

$$\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AK} \quad (1)$$

gilt, wobei $AE < AK$ sein soll. (Der Punkt K soll beliebig auf der Strecke ED liegen.) Um den Punkt A schlagen wir mit dem Radius AK einen Kreisbogen, der die Kurve BE im Punkt M schneidet. Dann gilt:

$$l : \widehat{KML} = AD : AK \quad (2)$$

(Mit \widehat{KML} soll der Bogen KML ausgedrückt werden.)

Aus dem Vergleich der Relationen (1) und (2) geht hervor:

$$\widehat{KML} = AD = AB \quad (3)$$

Durch den Schnittpunkt M des Kreisbogens \widehat{KL} mit der Kurve bestimmen wir den Radius AF des Kreisbogens $\widehat{BFD} = l$:

$$\frac{l}{\widehat{DF}} = \frac{AB}{AM_1} \quad (4)$$

Aus der Abbildung ersehen wir ferner die Relation:

$$l : \widehat{DF} = \widehat{KML} : \widehat{KM} \quad (5)$$

Ersetzen wir nun in dieser Gleichung mit Hilfe von (3) \widehat{KML} durch AB , so erhält (5) die folgende Form:

$$\frac{l}{\widehat{DF}} = \frac{AB}{\widehat{KM}} \quad (6)$$

Schließlich erhalten wir durch einen Vergleich der Relationen (4) und (6) die Gleichung

$$AM_1 = \widehat{KM}$$

Wenn wir nun vom Punkt M ein Lot auf die Gerade AD fällen, hat dieses Lot die Länge MQ . Wie sofort ersichtlich ist, gilt $AM_1 = MQ$ und damit auch

$$MQ = \widehat{KM}$$

Die letzte Gleichung ist aber offensichtlich unmöglich. Deshalb kann unsere Annahme, dass $\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AK}$ mit $AE < AK$ gilt, nicht richtig sein.

Damit haben wir bewiesen, dass das Verhältnis $\frac{l}{AD}$ nicht kleiner sein kann als das Verhältnis $\frac{AD}{AE}$.

Wir brauchen nun nur noch nachzuweisen, dass das Verhältnis $\frac{l}{AD}$ auch nicht größer sein kann als das Verhältnis $\frac{AD}{AE}$. Hierzu nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass gilt

$$\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AQ} \quad (1')$$

mit $AQ < AE$. Wir schlagen wiederum um den Punkt A einen Kreisbogen QR , der den schon zuvor erhaltenen Radius AF im Punkt S schneidet. Dann gilt:

$$\frac{l}{\widehat{QSR}} = \frac{AD}{AQ} \quad (2')$$

Vergleichen wir die Relationen (1') und (2'), so folgt

$$\widehat{QSR} = AD = AB \quad (3')$$

Aus der Eigenschaft unserer Kurve folgt dann

$$\frac{l}{DF} = \frac{AB}{MQ} \quad (4')$$

oder mit anderen Stücken

$$\frac{l}{DF} = \frac{\widehat{QSR}}{\widehat{QS}} \quad (5')$$

Ersetzen wir hier nach der Relation (3') \widehat{QSR} durch AB , so ergibt sich:

$$\frac{l}{DF} = \frac{AB}{\widehat{QS}} \quad (6')$$

Der Vergleich von (6') und (4') liefert:

$$MQ = \widehat{QS}$$

Diese Gleichung ist ebenfalls unmöglich. Daher kann auch in der Gleichung (1') das Verhältnis $\frac{l}{AD}$ nicht größer sein als das Verhältnis $\frac{AD}{AE}$.

Damit ist das Theorem $\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AE}$ bewiesen.

Auf diese Weise ist die Aufgabe der Rektifikation des Bogens l eines Kreises auf die Bestimmung des Punktes E zurückgeführt. Finden wir diesen Punkt, können wir auch die Länge des Bogens $BFD = l$ mit Hilfe der Proportion $\frac{l}{AD} = \frac{AD}{AE}$ ermitteln. In der Abbildung 55 wird eine derartige Rektifikation des Bogens l dargestellt.

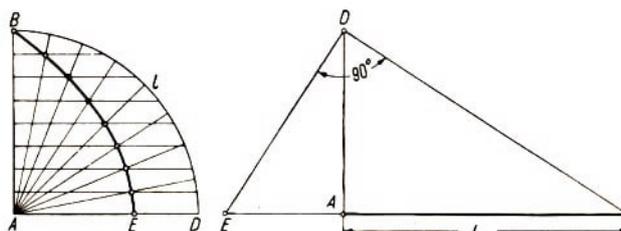


Abb. 55

Zwei der griechischen Mathematiker, die sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigten, müssen wir noch besonders erwähnen: Hippokrates und Antiphon.

Hippokrates fachte den Eifer beider Suche eines Lösungsweges durch seinen Lehrsatz von den Mündchen an. In dieser Arbeit werden kreisförmige Mündchen mit Quadraten verglichen, und man vermutete, dass dieses Verfahren auch auf den gesamten Kreis übertragen werden kann.

Antiphon verdient erwähnt zu werden, weil durch seinen Lösungsversuch die grundlegenden Ideen entstanden, die dann Archimedes zu weiteren Erkenntnissen anregten.

"Hippokrates und Antiphon glaubten, dass sie tatsächlich die Quadratur des Kreises ausgeführt hätten - und beide irrten sich", schrieb Eudemus (4. Jahrh. v.u.Z.) in seiner Geschichte der Mathematik.¹¹

Wir wollen den Text des Satzes von Hippokrates über die Mündchen anführen:

Die Summe der Flächen zweier Mündchen, die über den Seiten eines Quadrates konstruiert werden, ist gleich der halben Fläche des Quadrates (Abb. 56)

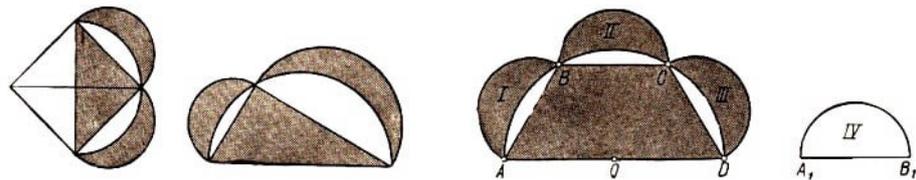


Abb. 56-58

Dieser Satz lässt sich leicht für Mündchen über einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck verallgemeinern (Abb. 57). Hippokrates wendete den Satz auch auf Mündchen an, die über den Seiten eines regelmäßigen Sechsecks konstruiert waren (Abb. 58). Das ist aber unzulässig, da die oben für ein Quadrat formulierte Aussage für ein Sechseck nicht gilt.

Hippokrates bemerkte diesen Fehler nicht und machte den Versuch, auf der falschen Verallgemeinerung fußend, die Quadratur des Kreises zu finden.

Wir wollen uns mit den Überlegungen des Hippokrates vertraut machen. Die Abbildung 58 stellt die Mündchenkonstruktion an einer Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks und einem kleinen Halbkreis mit dem Durchmesser $A_1B_1 = AB$ dar.

Jedes Mündchen kann man sich als einen solchen Halbkreis vermindert um ein Segment (AMB) denken.

Nun ist die Fläche des großen Halbkreises mit dem Durchmesser AD gleich der Summe der vier kleinen Halbkreise mit den gleich langen Durchmessern AB , BC , CD und A_1B_1 . Zur Begründung dieser Feststellung berechnen wir die Fläche des großen Halbkreises

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}(AD)^2 = \frac{\pi}{8}(AD)^2$$

und setzen $AD = 2AB$. Dann erhalten wir $\frac{\pi}{8}(2AB)^2 = \frac{\pi}{2}(AB)^2$. Dieses Ergebnis erhalten wir aber auch, wenn wir die Flächen der vier kleinen Halbkreise addieren

¹¹Eudemus - griechischer Mathematiker, Schüler des Aristoteles.

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} (AB)^2 = \frac{\pi}{2} (AB)^2.$$

Hippokrates stellte nun fest, dass die Fläche des Trapezes übereinstimmt mit der Fläche des großen Halbkreises ($d = AD$), vermindert um die drei Segmente.

Da nun, wie wir bereits ermittelten, die Fläche des großen Halbkreises gleich der Summe der vier kleinen Halbkreisflächen ist, können wir auch sagen: Die Fläche des Trapezes $ABCD$ stimmt mit der Summe der vier kleinen Halbkreisflächen ($d = AB$), vermindert um die drei Segmente, überein.

Wir wollen zur Vereinfachung die folgenden Symbole verwenden:

F = Trapezfläche $ABCD$

S_{IV} = Fläche eines kleinen Halbkreises mit $d = AB$

S_M = Fläche eines Mändchens

S = Fläche eines Segmentes.

Die Trapezfläche hat also demnach den Inhalt

$$F = 4 \cdot S_{IV} - 3S$$

Wir drücken nun S durch $S_{IV} - S_M$ aus und erhalten

$$F = 4 \cdot S_{IV} - 3(S_{IV} - S_M) = S_{IV} + 3S_M \quad , \quad S_{IV} = F - 3S_M$$

Wenn wir nun annehmen, dass sich die drei Mändchen quadrieren lassen, dann muss auch der Halbkreis über dem Durchmesser A_1B_1 eine Quadratur besitzen.

Eudemos wertete den Lösungsweg des Hippokrates für die Quadratur des Kreises mit den Worten:

"Die Art der Behandlung dieser Aufgabe ist in der Tat genial. Der Fehlschluss ergab sich dadurch, dass sich Hippokrates auf eine Behauptung stützte, die in der erforderlichen Allgemeinheit nicht bewiesen werden kann.

Es existiert nämlich nicht für alle beliebigen Mändchen eine Quadratur. Sie gilt lediglich für Mändchen, die über einem Quadrat konstruiert werden."

Über den Weg zur Quadratur des Kreises, der von Antiphon angegeben wurde, schrieb Eudemos folgendes:

"Antiphon ging davon aus, dass in einen Kreis ein solches regelmäßiges Vieleck einzuzeichnen sei, das bekannt ist und in seiner Vermessung beherrscht wird. Er wählte dafür das Quadrat (Abb. 59).

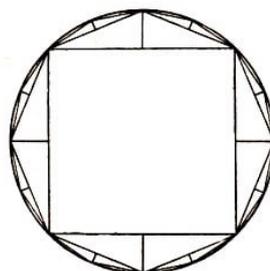


Abb. 59

Dann errichtete er über dem Mittelpunkt jeder Quadratseite eine Senkrechte, die sich mit der Kreislinie schneidet. Offensichtlich zerlegt diese Senkrechte jeden Kreisabschnitt in zwei gleiche Teile.

Nun verband er die Schnittpunkte mit den Eckpunkten des Quadrates. Die vier so gebildeten kongruenten Dreiecke summierte er mit dem ursprünglichen Quadrat und erhielt so die Fläche eines regelmäßigen einbeschriebenen Achtecks."

Diese Methode setzte er fort und erhielt ein einbeschriebenes regelmäßiges Sechzehneck usw. So entwickelte er eine Folge von regulären Vielecken, deren nächstfolgendes jeweils die doppelte Seitenzahl des vorangegangenen hatte.

Er glaubte, auf diese Weise dem Kreisumfang schon recht nahe gekommen zu sein, und nahm an, dass diese Methode geeignet sei, um schließlich gänzlich den Kreisumfang zu erfassen. Dann, so meinte Antiphon, könne man den Flächeninhalt exakt bestimmen.

Es gab aber bereits damals unter den Griechen viele Kritiker dieser Auffassung und einer bemerkte hierzu: "Durch die ständige Teilung kann man die Fläche eines Kreises niemals 'ausschöpfen'. Es wird auch niemals die Linie des Kreisumfangs erreicht, selbst wenn man die Teilung bis in die Ewigkeit fortsetzen würde."

Ein Zeitgenosse Antiphons, Bryson, der sich ebenfalls mit der Quadratur des Kreises beschäftigte, schlug eine andere Methode vor. Er ging von der völlig richtigen Vorstellung aus, dass die Fläche eines Kreises A_O immer größer sein wird als die Fläche jedes einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks A_n und immer kleiner als die Fläche jedes umbeschriebenen regelmäßigen Vielecks A'_n .

$$A_n < A_O < A'_n$$

Hieraus folgerte er, dass dann gilt

$$A_O = \frac{A_n + A'_n}{2}$$

Dieser Schluss ist jedoch falsch.

Obwohl Antiphon und Bryson mit ihren Versuchen zur Quadratur des Kreises bei der Mehrzahl der griechischen Mathematiker keine Anerkennung fanden, haben sie sich unbestritten um die Lösung dieser Aufgabe große Verdienste erworben.

Antiphon kam auf den Gedanken, den Kreis durch ein einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck anzunähern. Bryson erkannte sogar die Notwendigkeit, die Lösung dieser Aufgabe durch eine "Einschachtelung" zu erreichen.

Er nahm noch das umbeschriebene Vieleck hinzu und kam so auf die Idee, einen größeren und einen kleineren Wert für die Länge des Kreisumfangs, respektive für die Kreisfläche zu ermitteln.

Mit diesem Verfahren konnte man später mit Hilfe der Methode des Grenzübergangs das Problem allgemein lösen. Man nahm beide Näherungsvielecke, verdoppelte jeweils die Anzahl der Seiten, führte die Grenzübergänge durch und, wenn beide Grenzwerte übereinstimmten, war das Problem gelöst. Wir finden diese Verfahrensweise im Prinzip bereits bei Euklid und Archimedes.

Das Werk, in dem Archimedes (287-212 v.u.Z.) die Frage nach dem Verhältnis zwischen der Länge des Kreisumfanges zum Durchmesser stellte und löste, heißt "Die Kreismessung". Die Ergebnisse, die Archimedes bei der Lösung der erwähnten Aufgabe gewann, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete gleich der Länge des Kreisumfanges und dessen andere gleich dem Radius des Kreises ist (Abb. 60)

Abb. 60 und 61



2. Der Flächeninhalt eines Kreises verhält sich zum Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Quadratseite gleich dem Durchmesser ist, wie 11 : 14 (Abb. 61).

3. Der Umfang eines Kreises ist kleiner als drei Durchmesser, vermehrt um $\frac{1}{7}$ dieses Durchmessers, und größer als drei Durchmesser, vermehrt um $\frac{10}{71}$ dieses Durchmessers, also:

$$3\frac{10}{71}d < u < 3\frac{1}{7}d$$

Die Methode, mit deren Hilfe Archimedes die angegebenen Resultate erhalten hat, ist folgende: Er bestimmte nacheinander den Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen 6-Ecks, 12-Ecks, 24-Ecks, 48-Ecks und 96-Ecks.

Darauf machte er dasselbe für die umbeschriebenen Vielecke mit derselben Anzahl von Seiten. Er stellte dann die Umfänge der entsprechenden einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecke gegenüber und fand so eine obere und eine untere Schranke für das Verhältnis Kreisumfang zu Kreisdurchmesser und näherte sich darüber hinaus einer Grenze.

Man könnte hier einwerfen, dass diese Methode sich nicht von der des Antiphon unterscheidet. Das ist aber nicht der Fall; denn Antiphon glaubte, mit Hilfe aufeinanderfolgender Verdoppelungen der Seitenzahlen eines dem Kreis einbeschriebenen Vielecks im Endfall zu einer exakten Bestimmung der Länge des Kreisumfanges zu kommen, während Archimedes mit seinem mathematischen Spürsinn lediglich für das Verhältnis der Länge des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser Näherungswerte gab.

Es ist aber leicht verständlich, dass ein "Ausschöpfen" des Kreises unmöglich ist. Stets wird sich die Fläche des Kreises um einen gewissen endlichen Wert von der Fläche jedes einbeschriebenen oder umbeschriebenen Vielecks unterscheiden. Die Größe dieses Wertes ist verständlicherweise von der Seitenzahl eines solchen Vielecke abhängig.

Die Methode des Archimedes unterscheidet sich auch grundsätzlich von der des Bryson, der, wie erwähnt, die Länge des Kreisumfanges dem arithmetischen Mittel aus den Umfängen eines einbeschriebenen und des in der Seitenzahl entsprechenden umbeschriebenen Vielecks gleichsetzte.

Archimedes hingegen verglich nur die Umfänge der entsprechenden regelmäßigen um- und eingeschriebenen Vielecke, um den noch unbekanntem tatsächlichen Wert des Kreisumfangs durch bekannte Werte in Schranken einzuschließen.

Archimedes ist der erste Mathematiker, der den Versuch unternahm, den Umfang und die Fläche eines Kreises auf streng wissenschaftlicher Grundlage zu ermitteln. Archimedes gebührt aber noch in anderer Hinsicht höchste Anerkennung, und zwar wegen seiner außerordentlichen Rechenfertigkeit, die er im Verlauf seiner Untersuchungen bewies.

Der sowjetische Wissenschaftler S.J. Lurje schrieb in seinem Buch Archimedes hierüber: "Wir Menschen von heute, die wir eine erprobte Formelsprache zur Verfügung haben, die wir Logarithmen, Zahlentafeln und moderne Rechenmaschinen verwenden, sind nicht in der Lage, der umfangreichen Rechenarbeit, die Archimedes ausführen musste, die gebührende Achtung entgegenzubringen."

Die von Archimedes entwickelte Methode für die Berechnung der Länge des Kreisumfangs gab den nachfolgenden Mathematikern die Möglichkeit, das Verhältnis zwischen der Länge des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, das heißt aber praktisch, die Zahl π exakter zu ermitteln.

Einer der ersten Mathematiker, der für die Zahl π einen genaueren Wert als den des Archimedes benutzte, war der griechische Mathematiker und Astronom Ptolemäus (2. Jahrh. v.u.Z.). Er verwendete den Wert

$$\pi = \frac{377}{120} = 3\frac{17}{120}$$

Die indischen Mathematiker des 6. und 7. Jahrhunderts strebten ebenfalls danach, exaktere Werte für die Zahl π zu ermitteln. So benutzte Aryabhata (6. Jahrh.) die Formel

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$$

und erhielt den Wert $\pi = 3,1416$, wozu er die Umfänge regelmäßiger ein- und umbeschriebener Vielecke von 384 Seiten verwandte.

Ein anderer indischer Mathematiker, Brahmagupta (7. Jahrh.) gab einen Wert für die Zahl π an, der zwar eine geringere Genauigkeit als der von Aryabhata hat, der aber durch die Form seiner Darstellung besonders interessant ist. Er wählte

$$\pi = \sqrt{10}$$

Wir können annehmen, dass Brahmagupta diesen Wert durch die Untersuchung einer Folge von Näherungswerten für diese Zahl erhielt. Wenn wir nämlich einen Kreis mit einem Durchmesser von 10 Einheiten zugrunde legen und wiederum die Verhältnisse aus den Umfängen der ein- und umbeschriebenen 12-, 24-, 48- und 96-Ecke bilden, so ergibt sich die Folge

$$\sqrt{965}, \sqrt{981}, \sqrt{986}, \sqrt{989}$$

Nehmen wir nun an, dass sich der Radikand unter der Wurzel allmählich vergrößert und sich der Zahl 1000 nähert, so erhalten wir in der Tat mit $d = 10$:

$$\pi = \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{1000}}{10} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

Es blieb aber nicht bei diesem Wert. Auch zentralasiatische Gelehrte bemühten sich um die Verbesserung des Wertes für π . So berechnete der samarkandische Gelehrte Djemschid ibn Marud Al-Kaschi (erste Hälfte des 15. Jahrh.) die Zahl π bis auf 17 Dezimalen.

Wenn wir nun nach Europa zurückgehen, muss als erster der niederländische Mathematiker und Ingenieur Adrian Metius (17. Jahrh.) erwähnt werden, der noch die Methode des Archimedes benutzte. Er veröffentlichte einen Wert für die Zahl π , der die Genauigkeit aller zuvor bekannten Werte übertraf. Er setzte:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929$$

Der große französische Mathematiker Francois Vieta (1540-1603) ging in einer grundlegenden Arbeit ausführlich auf das mathematische Vermächtnis des Archimedes ein. Dabei untersuchte er auch den Näherungswert für die Zahl π und erreichte neben einer größeren Genauigkeit auch erstmalig eine Darstellung in Form eines unendlichen Produktes.

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \cdot \dots}$$

Wie kann man diese Formel ermitteln?

In Abbildung 62 ist $AM = r$ der Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt M , $AB = a_n$ die Seite eines einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, $MD = h_n$ die Höhe der Bestimmungsdreiecke des n -Ecks, $AC = a_{2n}$ die Seite des Vielecks mit $2n$ Ecken.

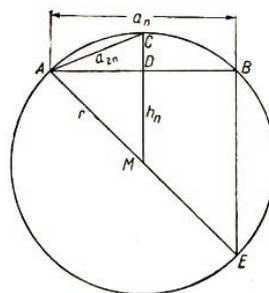


Abb. 62

Ferner wollen wir die Fläche eines Bestimmungsdreiecks mit F_{Δ} , die Gesamtfläche des n -Ecks mit F_n und die Gesamtfläche des $2n$ -Ecks mit F_{2n} bezeichnen. Dann gilt:

$$F_{\Delta AMC} = \frac{F_{2n}}{2n} \quad \text{und} \quad F_{\Delta AMD} = \frac{F_n}{2n}$$

Nun können wir bilden:

$$F_{\Delta AMD} : F_{\Delta AMC} = F_n : F_{2n}$$

und da die Dreiecke AMD und AMC eine gleiche Höhe, nämlich AD , haben:

$$F_{\Delta AMD} : F_{\Delta AMC} = MD : MC$$

Hieraus folgt dann:

$$F_n : F_{2n} = MD : MC$$

Setzen wir noch $MD = h_n$ und $MC = r$, so ergibt sich

$$F_n : F_{2n} = h_n : r \quad (1)$$

Analog zur Herleitung der Formel (1) erhalten wir:

$$\frac{F_n}{F_{2n}} = \frac{h_n}{r}; \quad \frac{F_{2n}}{F_{4n}} = \frac{h_{2n}}{r}; \quad \frac{F_{4n}}{F_{8n}} = \frac{h_{4n}}{r}; \quad \dots, \quad \frac{F_i}{F_{2i}} = \frac{h_i}{r}$$

Es sei nun $n = 4$; dann erhalten wir:

$$\frac{F_4}{F_8} = \frac{h_4}{r}; \quad \frac{F_8}{F_{16}} = \frac{h_8}{r}; \quad \frac{F_{16}}{F_{32}} = \frac{h_{16}}{r}; \quad \dots, \quad \frac{F_i}{F_{2i}} = \frac{h_i}{r}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen miteinander, so folgt:

$$\frac{F_4}{F_{2i}} = \frac{h_4 \cdot h_8 \cdot \dots \cdot h_i}{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}$$

Da nun $F_4 = 2r^2$ gilt und da für genügend großes i schließlich $F_{2i} \approx \pi r^2$ ist, wird

$$\frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{h_4}{r} \cdot \frac{h_8}{r} \cdot \frac{h_{16}}{r} \cdot \dots \cdot \frac{h_i}{r}$$

woraus wir nach Kürzung erhalten:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{h_4}{r} \cdot \frac{h_8}{r} \cdot \frac{h_{16}}{r} \cdot \dots \cdot \frac{h_i}{r} \quad (2)$$

Da wir wissen, dass gilt

$$h_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad h_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

erhalten wir durch Verdoppelung

$$a_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

und nach der Formel $h_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$ für h_{16} den Wert:

$$h_{16} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Setzen wir a_{32} ein, erhalten wir für h_{32} :

$$h_{32} = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

und so weiter. Indem wir diese Werte für $h_4, h_8, h_{16}, h_{32}, \dots$ in die Gleichung (2) eintragen, erhalten wir die Formel:

$$\frac{2}{\pi} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2} \cdot \dots$$

Diese Relation können wir nochmals umformen, wenn wir berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}; \\ \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} &= \sqrt{\frac{2}{4} + \sqrt{\frac{2}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit schließlich die Vietasche Formel¹² für die Zahl π in der Form:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \cdot \dots}$$

Die Geometer späterer Jahrzehnte, die sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigten, bemühten sich, die Zahl π noch präziser zu bestimmen.

So gab der niederländische Mathematiker Adriaen van Roomen (1540-1610), ein Zeitgenosse von Vieta, die Zahl π auf fünfzehn Stellen genau an. Der Hildesheimer Ludolph van Ceulen (1540.1610) erreichte eine noch bessere Näherung. Er kannte die Zahl π auf 35 Dezimalen genau.

Schließlich gelang es dem Niederländer Huygens (1629-1695), der zur Ermittlung von π dem Weg von Archimedes folgte, eine Reihe von Theoremen zu beweisen, mit deren Hilfe man bei weitaus geringerem Arbeitsaufwand einen guten Näherungswert erhielt. Huygens war seinerzeit der letzte Mathematiker, der für die exakte Berechnung der Zahl π die Archimedische Methode benutzte. Nach ihm wurden an Stelle der einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecke zur Lösung der Aufgabe analoge Ausdrücke für das Verhältnis der Länge des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser gefunden. Hierdurch wurde die nun veraltete Methode von Archimedes überwunden.

¹²Bei der Herleitung dieser Formel ist Ihnen sicher aufgefallen, dass wir ohne Beweis annahmen, es gelte:

$$h_{2n} = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

Einen Beweis hierfür können Sie leicht mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion nachholen.

Die Entwicklung der mathematischen Analysis, insbesondere der Theorie der Reihen, gab den Mathematikern viel vollkommenere Methoden zur Ermittlung eines Näherungswertes für π in die Hand. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen. Hierzu wählen wir die Darstellung der Zahl π durch die Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \dots \right), \quad \text{da}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

ist.

In beiden Klammern haben wir sogenannte unendliche alternierende¹³ Reihen, deren allgemeines Bildungsgesetz wir leicht erkennen können. Wenn wir uns in der ersten Klammer auf vier Glieder und in der zweiten lediglich auf das erste Glied beschränken, wenn wir ferner die Berechnungen mit einer Genauigkeit von 0,000001 durchführen, so erhalten wir für die Zahl π bereits fünf richtige Ziffern.

Die Berechnung lässt sich dabei zweckmäßigerweise nach folgendem Schema durchführen:

$\frac{1}{5} = 0,200000$	$\frac{1}{3 \cdot 5^3} = 0,002667$	$\frac{1}{239} = 0,004184$
$\frac{1}{5 \cdot 5^5} = 0,000064$	$\frac{1}{7 \cdot 5^7} = 0,000002$	$\frac{1}{3 \cdot 239^3} = 0,000001$
$+0,200064$	$-0,002669$	$-0,004184$
		<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>
		$0,197395 \quad \cdot 4$
		$0,789589$
		<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>
		$0,785396 \quad \cdot 4$
		<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>
		$3,141584$
		<hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/>
		$\pi \approx 3,1416$

Ähnliche Methoden ermöglichten es, bei der Festlegung der Zahl π eine Genauigkeit zu erreichen, die nicht nur strengste Forderungen befriedigte, sondern auch allen früheren Methoden überlegen war. So berechnete beispielsweise der Engländer Shanks die Zahl π bis zur 707ten Dezimalen.

Selbstverständlich liegen derartigen Rekordberechnungen nur theoretische Interessen zugrunde, da für die praktischen Anwendungen keinerlei Notwendigkeit besteht, π mit einer solchen Genauigkeit zu verwenden.

Für praktische Berechnungen genügt der Wert $\pi = 3,14159$. Aber auch von dieser Stellenzahl nach dem Komma sollte man nur soviel nehmen, wie für die jeweils erforderliche Genauigkeit des Ergebnisses notwendig ist.

Die Anwendung moderner Rechenautomaten gibt uns die Möglichkeit, den Näherungswert für π mit unbegrenzter Genauigkeit zu berechnen. So wurde in letzter Zeit die Zahl π auf mehr als 1000 Dezimalen ermittelt.

Im 18. Jahrhundert wiesen der deutsche Mathematiker Lambert und der französische Mathematiker Legendre nach, dass π eine irrationale Zahl ist. Im Jahre 1882 schließlich gelang dem deutschen Mathematiker Lindemann der Nachweis, dass sie transzendent ist.

Das heißt, π kann nicht Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein. Mit diesem Nachweis von Lindemann ist auch die Frage nach

¹³alternieren: die Vorzeichen + und - treten abwechselnd auf.

der Lösung der Aufgabe von der Quadratur des Kreises lediglich mit Zirkel und Lineal negativ entschieden.

Wir wollen noch etwas bei dieser Frage verweilen.

Es sei r der Radius eines gegebenen Kreises. Wir wollen ein Quadrat konstruieren, das dem gegebenen Kreis flächengleich ist. Bezeichnen wir die Seite dieses Quadrates mit x , dann muss x folgende Gleichung befriedigen

$$x^2 = \pi r^2 \quad \text{oder hieraus} \quad x = r\sqrt{\pi}$$

Auf diese Weise wird die Quadratur des Kreises darauf zurückgeführt, mit Zirkel und Lineal den gegebenen Abschnitt r mit dem Abschnitt, der $\sqrt{\pi}$ darstellt, zu multiplizieren.

Diese Aufgabe scheint nicht schwer zu sein, zumal es uns in verschiedenen Fällen gelingt, Abschnitte mit einer Zahl zu vervielfachen. Die Aufgabe wäre auch ganz einfach, wenn der Faktor bei r eine rationale Zahl wäre.

So lässt sich beispielsweise leicht ein Abschnitt $3r, 2\frac{3}{11}r, 1, 3r$ konstruieren, wenn der Abschnitt r gegeben ist. Auch für einige irrationale Multiplikatoren ist die Aufgabe durchführbar.

So ließe sich beispielsweise $r\sqrt{2}$ leicht konstruieren. Wir brauchen nur daran zu denken, dass $r\sqrt{2}$ die Diagonale des Quadrates mit der Seite r ist.

Auch so kompliziert erscheinende Ausdrücke wie $r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ und $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ lassen sich konstruieren, wenn wiederum r gegeben ist.

Wir brauchen uns nur daran zu erinnern, dass $r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ beziehungsweise $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ die Seite eines Acht- bzw. Zwölfeckes ist, das einem Kreis mit dem Radius r einbeschrieben ist.

Bekanntlich ist $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ bzw. $\frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ Höhe eines regelmäßigen einbeschriebenen Sechs- bzw. Achteckes. Dann können wir auch diese Werte konstruieren, da wir die Konstruktion des Sechs- bzw. Achtecks durchführen können. Alle angeführten Konstruktionen erfordern keine weiteren Instrumente als Zirkel und Lineal.

Die grafische Multiplikation ist jedoch nicht immer nur mit Zirkel und Lineal ausführbar. Die Konstruktionsmöglichkeit ist daran geknüpft, dass die Faktoren - in unserem speziellen Fall also diejenige Größe, mit der r multipliziert werden soll - rationale Zahlen oder solche Wurzeln algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten sein müssen, die in quadratischen Radikalen lösbar sind.

Bei der transzendenten Zahl π ist das jedoch nicht der Fall, also auch nicht bei $\sqrt{\pi}$.

Damit ist aber auch erwiesen, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist. Für die Lösung dieser Aufgabe muss eine Erweiterung der Hilfsmittel erlaubt werden. Die älteste Lösung dieser Art wurde, wie bereits erwähnt; von Dinostratus in Form der speziell dafür konstruierten Kurve gegeben.

5.2 Aus dem Leben des Archimedes

Archimedes - einer der bedeutendsten Mathematiker und Physiker - wurde in der Stadt Syrakus geboren, die an der Ostküste der Insel Sizilien liegt. Er studierte an der berühmten alexandrinischen Akademie, kehrte aber, nachdem er einige Jahre in Alexandrien gelebt hatte, in seine Heimatstadt zurück und schrieb hier seine sämtlichen Werke über Mathematik und Mechanik.

Wir wollen uns vor allem dafür interessieren, was Archimedes auf dem Gebiet der Mathematik leistete. Doch selbst hier müssen wir uns einschränken, da sein Werk zu umfangreich ist, um es hier umfassend zu würdigen.



Archimedes

Wir haben bereits erfahren, dass sich Archimedes mit der Quadratur des Kreises beschäftigte. Er entwickelte für die näherungsweise Berechnung der Zahl π eine Methode, die von vielen Mathematikern im Laufe der folgenden Jahrhunderte mit Erfolg angewendet wurde.

Er beschäftigte sich auch mit den Kegelschnitten und löste hierbei das Problem der Quadratur einer Parabel. Er kam damit der Integralrechnung nahe, wenn seine Methode auch für heutige Begriffe schwerfällig erscheint und nicht verallgemeinert werden konnte.

Von großer Bedeutung ist sein Werk über die Konstruktion regulärer Siebenecke. Ein weiteres Arbeitsgebiet war die Theorie der Rotationskörper.

Derartige Körper erhält man beispielsweise, indem man einen Kegelschnitt um eine Achse rotieren lässt. Archimedes gab Sätze über die Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern an und löste eine Reihe komplizierter Aufgaben über derartige zusammengesetzte Körper.

In der Planimetrie wird durch Archimedes erstmalig ein Theorem bewiesen, das die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks unter ausschließlicher Verwendung der Dreieckseiten ermöglicht. Es handelt sich um die Formel:¹⁴

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Von besonderem Interesse sind auch die Methoden, deren sich Archimedes zur Lösung vieler mathematischer und mechanischer Aufgaben bediente. Hier wollen wir besonders die sogenannte "Methode des Ausschöpfens" (Exhaustionsmethode), die wir bereits im vorhergehenden Abschnitt kennenlernten, und die atomistische Methode, die er zur Berechnung des Flächeninhaltes und des Umfanges von Figuren verwendete, erwähnen. Er war sich des Wertes der letzteren Methode bewusst; denn in einem Brief an seinen Freund Eratosthenes schrieb er:

"Ich denke mir, dass sich viele Mathematiker unserer und der kommenden Zeit mit

¹⁴Diese Formel wird auch Heronische Formel genannt. Herons Verdienst besteht jedoch nur darin, dass er sie vielfach in der Praxis anwandte. In der Formel bedeutet s den halben Umfang des Dreiecks, also $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

dieser Methode vertraut machen werden. Sie werden dann imstande sein, neue und abermals neue Theoreme zu finden."

Er behielt recht. 2000 Jahre später beschäftigten sich Kepler und teilweise auch Cavalieri und Leibniz mit der atomistischen Methode und verwendeten sie mit großem Erfolg. Im Zusammenhang mit der Anwendung dieser Methode fand Archimedes wahrscheinlich auch ein Verfahren zur Summierung unendlicher geometrischer Reihen, wie

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

und der Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$$

Obwohl das von ihm hierbei angewandte Verfahren äußerst interessant ist, können wir es hier nicht behandeln.

Wir wollen aber noch erwähnen, dass Archimedes zu den griechischen Mathematikern gehörte, die die Rechenoperationen ausgezeichnet beherrschten und sich nicht davor fürchteten, ihr theoretisches Wissen zur Lösung mechanischer und allgemeiner praktischer Aufgaben anzuwenden. Das muss deswegen besonders hervorgehoben werden, weil es nach der offiziellen Auffassung der damaligen Zeit "unter der Würde eines Freien war, sich mit praktischen Dingen (außer den Kriegsgeräten) zu beschäftigen". Dies wurde den Sklaven überlassen.

Wenn wir nun noch Archimedes Leistungen auf dem Gebiet der Mechanik aufzählen würden, dann wäre es uns erst recht verständlich, dass seine Zeitgenossen und alle die, die heute eine enge Verbindung zur Mathematik, zur Mechanik und zu den Anwendungen dieser Wissenschaften haben, in Erstaunen versetzt wurden und werden und voller Ehrfurcht zu ihm aufblicken.

Uns beeindruckt auch die große moralische Haltung von Archimedes. Er war ein echter Patriot seiner Zeit. Für Syrakus brachen schwere Zeiten an. Römische Heere, unter Führung eines der größten römischen Heerführer, Marcus Claudius Marcellus, belagerten die Stadt von zwei Seiten, und keiner der Eingeschlossenen wagte mehr auf Rettung zu hoffen. Da setzte Archimedes seine Maschinen in Gang, die er schon vorher hatte aufstellen lassen.

Der römische Historiker Plutarch (46-126) schreibt hierzu:

"Auf die feindlichen Landtruppen wurden verschiedene Arten von Pfeilen und unglaublich große Steine mit viel Lärm und großer Geschwindigkeit geschleudert. Durch nichts konnte die Wucht dieser Schläge aufgehalten werden. Sie warfen diejenigen, die sie trafen, um und brachten die Reihen der Belagerer in Verwirrung.

Auf dem Meer wurde ein Wall von Holzstämmen auf die Schiffe geschleudert. Diese Stämme hatten die Form von Kranichschnäbeln, und einige von ihnen stießen direkt in die Schiffe und versenkten sie mit ungeheurer Wucht. Andere hoben sie mit ihren kranichschnabelförmigen Haken wie mit eisernen Händen in die Luft und ließen sie dann

mit dem Heck voran ins Wasser fallen oder schleuderten sie gegen die Felsen ...

Oft wurden Schiffe hoch über die Oberfläche des Meeres gehoben, so dass sie zum Entsetzen der Belagerer in der Luft schwebten und von einer Seite auf die andere schwankten. War die Besatzung auf diese Weise herausgeschleudert, wurden die Schiffe versenkt oder gegen die Stadtmauer geschleudert ...

Marcellus ließ nun seinerseits Maschinen auf seinen Schiffen aufbauen, um sie gegen die Mauern der Stadt zu richten. Doch vergebens, ehe sie in ausreichender Nähe der Stadtmauer waren, um wirksam werden zu können, wurden auf die Schiffe 10 Talente schwere Steine (260 kg) geschleudert, die mit fürchterlichem Lärm und großer Gewalt auf die Maschinen und die Schiffe trafen. Sie zerrissen die Bolzen der Maschinen und vernichteten ihre Konstruktionen. Die meisten der Schiffe wurden versenkt.

Marcellus war ratlos und zog sich in größter Eile mit dem Rest seiner Flotte zurück. Auch dem Landheer befahl er, sich zurückzuziehen ... Aber die Pfeile holten die zurückweichenden Römer ein und fügten den Truppen große Verluste zu ...

Dennoch konnte Marcellus rechtzeitig vor einer entscheidenden Niederlage den Rückzug befehlen. Er berief einen Kriegsrat ein und verspottete seine Techniker und Mechaniker: 'Sollten wir nicht lieber aufhören, uns mit dem Mathematiker zu schlagen. Er sitzt ruhig hinter den Mauern und versenkt sich zum SpaÙe, uns aber zur Schande eines unserer Schiffe nach dem anderen. Er übertrifft dabei sogar den sagenhaften hundertarmigen Riesen, indem er gleichzeitig eine solche Unmenge von Geschossen auf uns herabwirft.' "

Die Maschinen des Archimedes konnten die Stadt zwar vor den feindlichen Angriffen schützen, sie vermochten sie aber nicht vor einer langwierigen Belagerung zu retten. So gelang es Marcellus schließlich durch eine List, in die Stadt einzudringen.

Die Eroberungen der Römer waren von großen Grausamkeiten, von Mord und Plünderung begleitet. So war es auch in Syrakus.

Zu den Ermordeten gehörte Archimedes.

Plutarch schrieb hierüber:

"Er war allein in seiner Wohnung, in geometrische Betrachtungen vertieft. Ganz in Gedanken versunken entging es seiner Aufmerksamkeit, dass die Römer mit großem Lärm und Geschrei die Stadt einnahmen. Plötzlich tauchten Römer vor ihm auf, und mit dem Aufschrei: 'Störet meine Kreise nicht !' wurde er von dem tödlichen Stahl eines römischen Legionärs getroffen."¹⁵

Zum Schluss soll noch eine Äußerung Plutarchs über die Tiefe der geometrischen Gedankengänge des Archimedes angeführt werden:

"In der gesamten Geometrie sind keine Theoreme tiefer und schwieriger als die des Archimedes. Mir selber schien es, als ich mich zum ersten Mal mit seinen mathematischen Sätzen bekannt machte, dass sie zu schwer seien, um jemals bewiesen zu werden. Wenn Du aber siehst, wie Archimedes sie bewies, dann erscheint es Dir, als wenn Du selber

¹⁵Diese Darstellung ist nicht historisch verbürgt.

den Beweis gefunden hättest, so einfach und selbstverständlich ist er."

5.3 Aufgaben

1. Gegeben sei ein Kreis, dessen Radius wir als 1 annehmen. Es gilt, eine Reihe konzentrischer Kreise so zu konstruieren, dass die erhaltenen Kreisringe alle eine gleich große Fläche erhalten und dass ihre Flächen der des gegebenen Kreises gleich sind (Abb. 64).

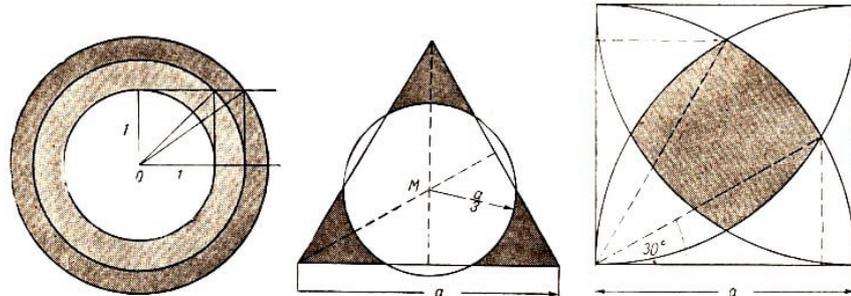


Abb. 64, 65, 66

2. Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a . Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen. Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, der außerhalb des Kreises liegt (Abb. 65) ?

3. Die Mittelpunkte von vier Kreisen liegen in den Ecken eines Quadrates mit der Kantenlänge a . Die Radien der vier Kreise seien ebenfalls gleich a . Wie groß ist der Teil der Quadratfläche, der in allen vier Kreisen liegt (Abb. 66)?

4. Berechnen Sie die Fläche der in Abbildung 67 dargestellten Figur, wenn $M_1A = a$ ist!

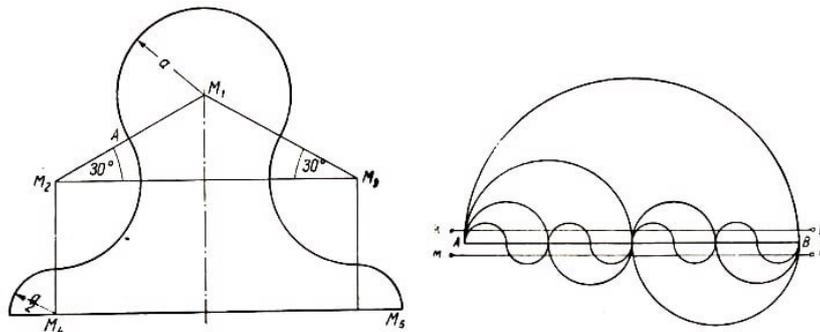


Abb. 67, 68

5. Ein Trugschluss

Die Zahl π ist gleich 2!

Über der Strecke AB als Durchmesser schlagen wir einen Halbkreis (Abb. 68). Die Länge dieses Halbkreises ist $\frac{\pi \cdot AB}{2}$. Wir halbieren die Strecke AB und schlagen über jedem Teil wiederum einen Halbkreis mit dem Durchmesser $\frac{AB}{2}$, aber nach verschiedenen Seiten der Strecke AB .

Diese zwei Halbkreise bilden also eine wellenförmige Linie, die von A bis B geht, und deren Länge der des Halbkreises gleich ist, nämlich $\frac{\pi \cdot AB}{2}$.

Jetzt teilen wir die Strecke AB in 4 gleiche Teile und konstruieren wiederum eine

wellenförmige Linie aus vier Halbkreisen, die von A bis B geht. Die Länge dieser Linie ist wiederum $\frac{\pi \cdot AB}{2}$, wie sich leicht durch Nachrechnen zeigen lässt.

Diesen Prozess werden wir fortsetzen, indem wir den Abschnitt 15 nacheinander in 8, 16, 32, ... gleiche Teile teilen und für jede Teilung wellenförmige Linien von A nach B aus Halbkreisen konstruieren, die wir über die jeweiligen Teilabschnitte schlagen. Hierbei müssen wir den Seitenwechsel bezogen auf die Strecke AB berücksichtigen.

Alle diese wellenförmigen Linien haben die gleiche Länge $\frac{\pi \cdot AB}{2}$. Andererseits schmiegen sich die wellenförmigen Linien immer mehr an die Strecke AB . Ja, sie haben bei unbegrenzter Fortsetzung des Verfahrens die Strecke AB als Grenzwert.

Wenn wir nämlich mit Hilfe der Geraden KL und MN , die parallel zu AB liegen, einen Streifen um den Abschnitt AB bilden, so können wir diesen Streifen noch so schmal machen (indem wir mit den Geraden KL und MN näher an AB heranrücken), stets werden von einer bestimmten wellenförmigen Linie an alle nachfolgenden unendlich vielen Linien innerhalb des Streifens liegen.

Es ist uns aber unbenommen, den Streifen beliebig schmal zu machen. Immer gilt das zuvor Gesagte. Dann muss aber die Länge des Grenzwertes aller dieser wellenförmigen Linien gleich der Länge des Abschnittes AB sein. Hieraus folgt:

$$\frac{\pi}{2}AB = AB$$

und so schließlich

$$\pi = 2$$

Wo steckt hier der Fehler?

Literatur

W. F. Kagan: Archimedes, sein Leben und sein Werk. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1955.

W. Breidenbach: Die Dreiteilung des Winkels. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

W. Lietzmann: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

W. Lietzmann: Wo steckt der Fehler? B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

W. Lietzmann: Altes und Neues vom Kreis. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

E. Beutel: Die Quadratur des Kreises. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951.

J. Száva: Der Gigant von Syrakus. Prisma-Verlag, Leipzig 1962.

6 Von der Lobatschewskischen Geometrie

"Viele Ideen haben ihre Epoche. Sie ersprießen zum gleichen Zeitpunkt in den verschiedensten Ländern, gleich den Veilchen, die überall dort wachsen, wo die Sonne scheint."

Janos Bolyai

Bei Studien der Geschichte der Mathematik können wir häufig folgende interessante Feststellung machen:

Gerade diejenigen neuen Ideen, die einen wesentlichen Fortschritt in der Entwicklung der Wissenschaft darstellen, werden vielfach gleichzeitig und voneinander unabhängig in verschiedenen Ländern erarbeitet. Diese Tatsache ist eine Bestätigung dafür, dass wissenschaftliche Ideen nicht losgelöst vom gesellschaftlichen Leben entstehen, sondern dass sie dieses vielmehr gerade zur Voraussetzung haben. Oft diktiert es gleichermaßen in verschiedenen Ländern die Notwendigkeit der weiteren Entwicklung einer Wissenschaft und bereitet so die Grundlage für das Entstehen neuer Ideen vor.

Erinnern wir uns daran, dass zu Beginn des 18. Jahrhunderts die Idee der Schaffung von Logarithmentafeln gleichzeitig in zwei verschiedenen Ländern auftauchte, in der Schweiz und in Schottland, und dass diese Idee dann von Bürgi und Neper realisiert wurde.

Ein weiteres Beispiel ist die Entdeckung der Infinitesimalrechnung. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts stellte die Entwicklung der Naturwissenschaften die Mathematik vor die Aufgabe, neue Methoden für die mathematische Untersuchung naturwissenschaftlicher und technischer Prozesse zu erarbeiten. Diese neuen Methoden, die wir aus der Analysis kennen, wurden dann auch tatsächlich zur gleichen Zeit und unabhängig voneinander von zwei Gelehrten verschiedener Länder gefunden: von Newton in England und von Leibniz in Deutschland.

Ähnlich war es auch bei der Schaffung der analytischen Geometrie. Mit den grundlegenden Ideen dieses Gebietes beschäftigten sich Descartes, Fermat und andere Gelehrte.



Abb. 69 Carl Friedrich Gauß

Die Ideen, aus denen die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie entwickelt wurden, waren ebenfalls nahezu zur gleichen Zeit in verschiedenen Ländern entstanden: in Russland (Lobatschewski), in Ungarn (Bolyai) und in Deutschland (Gauß).

Alle drei Wissenschaftler arbeiteten an einer neuen Geometrie, obwohl der Grad ihrer Mitarbeit unterschiedlich war. Sie unterschieden sich auch in der Beharrlichkeit, mit der sie dieses neue Gebiet der Mathematik bearbeiteten und vor allem im Grad des Mutes, mit dem sie die Gültigkeit ihrer Behauptungen verteidigten.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855) kam auf den Gedanken, ob nicht neben der bekannten euklidischen Geometrie andere, nichteuklidische Systeme bestehen könnten.

Er entwickelte ein solches System, befürchtete aber, dass seine Ideen von seinen Zeitgenossen nicht verstanden würden.

Er behielt daher seine Ergebnisse für sich und verzichtete auf eine Veröffentlichung. Nur aus gelegentlichen Briefen und aus seinem Nachlass haben wir Kenntnis von diesen Arbeiten.

Janos Bolyai (1802-1860), ein hervorragender ungarischer Mathematiker, ging weiter als Gauß. Er veröffentlichte seine Ergebnisse 1832 als Anhang zum ersten Band eines zweibändigen Lehrbuches der Mathematik seines Vaters Wolfgang Bolyai.

Trotz des geringen Umfangs dieser Abhandlung (sie hat lediglich 30 Seiten) gehört sie zu den vollständigsten Werken der mathematischen Literatur. Bolyai litt sehr unter dem Unverständnis der Mathematiker seiner Zeit, zu denen auch sein Vater gehörte.

Auch die ablehnende Haltung von Gauß, der sich in einem Schreiben an den Vater Janos Bolyais sehr zurückhaltend äußerte, weil er selber die Ergebnisse schon gefunden hatte, ohne sie zu veröffentlichen, deprimierte ihn stark.



Abb. 70 Janos Bolyai

Bolyais schlechter Gesundheitszustand tat ein weiteres, so dass er sich schließlich von diesen Untersuchungen abwandte. Jedenfalls veröffentlichte er nach 1832 keine weitere Arbeit über die nichteuklidische Geometrie.



Abb. 71 Nikolai W. Lobatschewski

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856), weit kühner als Gauß und weit beharrlicher als Bolyai, fand bis zum Ende seines Lebens die Kraft, um die Anerkennung seiner Ideen zu kämpfen. Ihn schreckten weder das völlige Unverständnis seitens der zeitgenössischen Mathematiker noch der Hohn einiger von ihnen zurück.

Schon in seiner ersten Arbeit verstand es Lobatschewski, die nichteuklidische Geometrie weiter und tiefer zu entwickeln als das bei Gauß und Bolyai der Fall war. In den nachfolgenden Arbeiten auf diesem Gebiet erreichte er eine Klarheit, der volle Anerkennung gebührt.

6.1 Gefundene Manuskripte

Im Jahre 1898, als die Geschichte der Kasaner Universität zusammengestellt wurde, fand man im Archiv ein Manuskript von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski.

Dieses Manuskript war von ihm im Jahre 1823 geschrieben worden und trug die Bezeichnung Geometrie. Es war der Konspekt einer Vorlesung, die Lobatschewski vor den ersten Studiensemestern gehalten hatte. Diese Arbeit hatte bis dahin noch keine Würdigung durch die Akademie gefunden, da sie zu Lebzeiten des Autors nicht gedruckt worden war.

Als aber die Würdigung des Manuskriptes erfolgte, stellte es sich heraus, dass es im Grunde genommen nur elementares geometrisches Material enthielt. Der Rezensent konnte also über den Inhalt des Manuskriptes nichts Neues berichten.

Er wies aber darauf hin, dass das bekannte Material in völlig neuer Reihenfolge dargelegt worden war. Die ersten fünf Kapitel des Werkes Geometrie umfassen die elementaren geometrischen Aussagen, die nicht vom euklidischen Parallelenaxiom abhängig sind.

Wir wollen uns dieses Axiom in zwei verschiedenen Formulierungen ansehen:

1. Die Formulierung Euklids:

Gefordert sein soll, dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die zwei Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.¹⁶

2. Eine etwas geläufigere und verständlichere Formulierung:

Wenn eine Gerade zwei andere Geraden schneidet und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sollen jene beiden Geraden, unbegrenzt verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Im ersten Teil der Arbeit Lobatschewskis war also alles zusammengefasst, was des obigen Axioms nicht bedurfte, und zwar in folgender Reihenfolge:

Das erste Kapitel widmete Lobatschewski der Messung von Linien und Kreisbögen. Bei der Messung des Kreisumfanges wird auf den uns bekannten Grenzübergang vom Umfang eines Näherungspolynoms zum Kreisumfang hingewiesen.

Das zweite Kapitel umfasst die Winkelmessung. Dabei wird auch das Winkelmaß einer Geraden und die Vermessung der zweikantigen und der mehrkantigen Ecke angegeben.

Das dritte Kapitel behandelt die Orthogonale (Senkrechte). Auch hier wird wie im zweiten Kapitel eine Belehrung über die Messung orthogonaler Flächen und orthogonaler Geraden, bezogen auf eine Fläche, beigefügt.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den räumlichen Ecken. Hier wird bereits auf die Eigenschaften regelmäßiger Vielecke und regelmäßiger Polyeder eingegangen.

In diesem Kapitel zeigt Lobatschewski eine Reihe eigenartiger Beweise, die teilweise komplizierter als die üblichen sind, die aber für die weiteren Untersuchungen über die Theorie der Parallelen große Bedeutung haben.

Erst im fünften Kapitel untersucht Lobatschewski Sätze über die Gleichheit von Dreiecken und solche Theoreme, die hieraus unmittelbar folgen.

Die Theorie über die parallelen Linien wird in der Arbeit von Lobatschewski erst im sechsten Kapitel dargestellt. Es heißt dort: "Über die Vermessung des Flächeninhaltes ebener Figuren."

¹⁶Die Formulierung wurde dem Buch "Höhere Geometrie" von N. W. Efimow, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960, S. 3, entnommen (siehe auch Literaturverzeichnis).

Charakteristisch für Lobatschewski sind die Worte, mit denen dieses Kapitel beginnt:

"Die Messung des Flächeninhalts basiert darauf, dass zwei Linien zusammenstoßen, wenn sie auf einer dritten nach ein und derselben Seite stehen, und zwar so, dass die eine der Linien senkrecht auf der dritten steht und dass die andere mit der dritten einen spitzen Winkel bildet, in Richtung auf die erste der Linien ... Der exakte Beweis dieser Tatsache konnte bisher noch nicht erbracht werden. Es wurden viele Versuche für diesen Beweis unternommen. Alle sind mehr oder weniger gute Erläuterungen, die aber in keiner Weise im Sinne eines mathematischen Beweises angesehen werden dürfen."

Lobatschewski war sich also bereits zu der Zeit, als er die Geometrie schrieb, darüber klar, dass keiner der bisher vorgelegten Beweise des fünften Euklidischen Postulates über die Parallelen einer kritischen Untersuchung standhalten würde. Bereits die Aufteilung des Materials in seiner Arbeit zeigt, dass er die Notwendigkeit der Trennung der geometrischen Fakten, die nicht an das fünfte Postulat gebunden sind, vom ganzen übrigen Inhalt der Geometrie erkannte.

Eine solche Trennung wurde von ihm zum ersten Mal vorgenommen.

Es vergingen nach der Vollendung des Manuskriptes Geometrie weitere drei Jahre, bis Lobatschewski am 11. 2. 1826 auf einer Sitzung der physikalisch-mathematischen Fakultät einen Vortrag mit dem Titel 'Kurze Darlegung der Grundlagen der Geometrie' mit genauem Beweis des Theorems über die parallelen Linien hielt. Aber auch dieser Vortrag wurde, obwohl er schriftlich vorlag, nicht gedruckt und ging später verloren.

Erst in den Jahren 1829 bis 1830 gelang es Lobatschewski, umfangreiche Arbeiten zu veröffentlichen, insbesondere über die Grundlagen der Geometrie. Hierin wurde auch das Manuskript des Jahres 1826 aufgenommen.

Wie wir sahen, kommt bereits in der Geometrie vom Jahre 1823 zum Ausdruck, dass das Interesse Lobatschewskis auf die Fragen, die mit der Theorie der parallelen Linien verbunden sind, konzentriert war. Dieser Eindruck wird in seiner Arbeit 'Über die Grundlagen der Geometrie' wesentlich verstärkt. Hier gab er seine grundlegenden Erkenntnisse über den Charakter dieser Probleme wieder.

Diesen Tag, den 11. Februar 1826, an dem von dem Lehrstuhl der Kasaner Universität zum ersten Mal die neuen Ideen Lobatschewskis verkündet wurden, kann man als den Tag der Geburt einer nichteuklidischen Geometrie bezeichnen. Zur selben Zeit wurde es Lobatschewski aber auch klar, dass die Ablehnung seiner Geometrie aus dem Jahre 1823 ein notwendiger Schritt war, um ihn zu befähigen, Schöpfer einer neuen Geometrie zu werden.

6.2 Zwei Wege

Eine Ebene soll durch eine Gerade und durch einen Punkt außerhalb der Geraden festgelegt sein. Durch den gegebenen Punkt in der festgelegten Ebene kann man nun genau eine Gerade konstruieren, die nicht die gegebene Gerade schneidet. Diese Tatsache ist leicht zu beweisen und außerdem unabhängig vom Parallelenaxiom.

Im allgemeinen wird der Beweis folgendermaßen geführt. Die gegebene Gerade sei g_1 (Abb. 72).

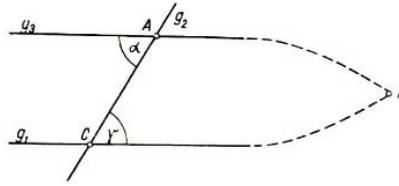


Abb. 72

Durch den Punkt A außerhalb der gegebenen Geraden ziehen wir eine Gerade g_2 , die g_1 im Punkt C schneiden soll. Dann konstruieren wir eine neue Gerade g_3 so, dass sie durch den Punkt A geht und einen Winkel α bildet, der gleich dem Winkel γ ist. Dann ist g_3 eine Gerade, die die Gerade g_1 nicht schneidet. Setzen wir nämlich umgekehrt voraus, dass sich g_1 und g_3 schneiden, dann kämen wir zu dem Schluss, dass der Außenwinkel α des Dreiecks ACP gleich einem der nichtanliegenden Innenwinkel, nämlich γ , wäre, was nicht möglich ist.

Aus diesem Theorem erhält man als speziellen Fall die Bestätigung dafür, dass zwei zu ein und derselben Geraden orthogonale Geraden keinen gemeinsamen Punkt haben können.

Folglich kann man auch feststellen, dass durch jeden Punkt A , der außerhalb einer Geraden g_1 in der Ebene liegt, die durch ihn und die Gerade g_1 aufgespannt wird, eine Gerade g_3 so gezogen werden kann, dass sie die Gerade g_1 nicht schneidet.

Nun ergibt sich logischerweise die Frage: Geht durch den Punkt A nur eine solche Gerade oder gibt es deren mehrere?

Diese Frage kann man stellen - und beantworten.

Gibt es aber auch Gewissheit darüber, dass die Ebene, in der die Gerade g_3 konstruiert werden soll, unbedingt die Eigenschaft haben muss, dass in ihr nur eine solche Gerade konstruiert werden kann?

Als Euklid seine Elemente schuf (3. Jahrh. v.u.Z.), gab es diese Gewissheit nicht, und sie konnte auch nicht in den nachfolgenden Jahrhunderten gewonnen werden. Um diese Gewissheit zu erlangen, empfiehlt es sich, Versuche zum Beweis der Behauptung durchzuführen, dass es in einer Ebene zu einer Geraden nur eine Parallele gibt, die durch einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt dieser Ebene geht und die Gerade nicht schneidet.

Versuche dieser Art hat es anscheinend schon zu Euklids Zeiten gegeben. Obwohl sie stets misslangen, wurden sie über mehr als 2000 Jahre nicht aufgegeben. Auch die von Lobatschewski veröffentlichten Arbeiten gingen anfangs auf eine Anzahl solcher Versuche zurück. Sie wurden aber später von ihm nicht zu Ende geführt.

Wir haben also keine eindeutige Antwort auf unsere Frage erhalten können. Dann gibt es aber zwei Möglichkeiten, die völlig gleichberechtigt sind: Die erste Möglichkeit besteht für uns in der Annahme, dass durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden in einer durch sie und den Punkt festgelegten Ebene nur eine Gerade konstruiert werden kann, die die gegebene Gerade nicht schneidet.

Als zweite Möglichkeit können wir annehmen, dass es mehrere Geraden mit dieser Eigenschaft gibt. Euklid ging bei der Niederschrift seiner Elemente den ersten Weg, der als Parallelenaxiom in die Axiome mit einbezogen wurde.

Uns ist dieser Weg ebenfalls geläufig; den vom zwölften Lebensjahr an werden wir dazu angehalten, den Vorstellungen Euklids über die Parallelen zu folgen. Deshalb fällt es uns auch so schwer, von diesem gewohnten Weg abzukommen.

Es geht uns hier ähnlich wie seinerzeit den Menschen, die an das von Ptolemeios aufgestellte Weltsystem geglaubt hatten und sich nun in eine andere Welt, in die Welt des Kopernikus, hineindenken mussten. Hierbei konnte man allerdings falsche Ansichten, die sich durch Gewohnheit eingebürgert hatten, durch andere, vollkommeneren - aber auch den damals gebräuchlichen entgegengesetzte Ansichten über die Welt ersetzen.

In der Geometrie liegen die Dinge anders. Hier ist man keinen prinzipiell falschen Weg gegangen. Man hat nur jahrhundertlang nicht gefunden, dass es auch einen anderen als den von Euklid in Bezug auf die Parallelen eingeschlagenen Weg gibt.

6.3 Die Summe der Winkel eines Dreiecks ohne die Euklidschen Axiome

Bevor wir in eine neue geometrische Welt eindringen, in der das fünfte Axiom Euklids nicht gilt, wollen wir uns mit einem der vielen Versuche, die zum "Beweis" dieses Axioms unternommen wurden, beschäftigen. Nehmen wir den Versuch des hervorragenden französischen Mathematikers Legendre (1752-1833).

In den Vorarbeiten zu diesem Versuch hatte Legendre zunächst einige Theoreme über die Winkelsumme im Dreieck aufgestellt, die auch in Lobatschewskis Werk 'Geometrische Untersuchungen über die Theorie der parallelen Linien' ihren Niederschlag fanden. Lobatschewski bewies nämlich in dieser Abhandlung den Satz über die Winkelsumme im Dreieck in vielem anders als sonst üblich, und so ist es interessant, die Schlussfolgerungen der beiden Mathematiker Legendre und Lobatschewski zu verfolgen und gegenüberzustellen. Wir müssen uns dabei im klaren sein, dass der Beweis von der Theorie der Parallelen unabhängig ist, dass der Satz also zu denjenigen gehört, die nicht auf dem fünften Axiom des EUKLID basieren.

Erstes Theorem von Legendre

Die Summe der Winkel eines Dreiecks kann nicht größer sein als $2 R$.

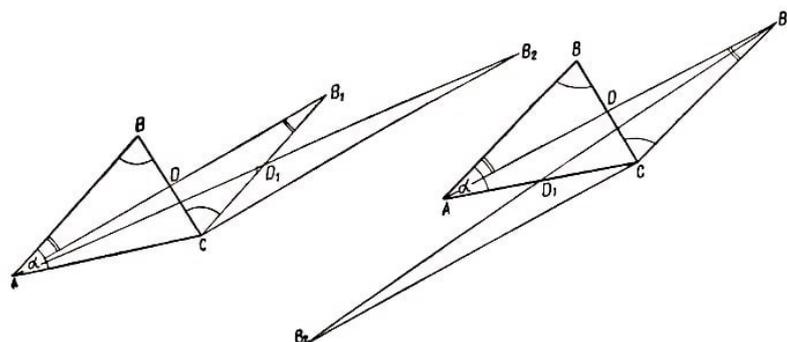


Abb. 73

Beweis: Gegeben sei ein Dreieck ABC . Der Winkel BAC soll der kleinste Winkel des Dreiecks sein, und es soll gelten: $\angle BAC = \alpha$ (Abb. 73a und b).

Wir führen den Beweis indirekt, d.h., wir versuchen nachzuweisen, dass die Behauptung, die Summe der Winkel eines Dreiecks sei größer als $2R$, nicht richtig sein kann. Wir nehmen also an, die Winkelsumme im Dreieck ABC sei größer als $2R$, beispielsweise $2R + \varphi$.

Wir ermitteln den Punkt D als Halbierungspunkt der Strecke BC und verbinden diesen Punkt mit A , wodurch wir die Seitenhalbierende AD erhalten. Die Strecke AD verlängern wir über D hinaus und legen den Punkt B_1 so fest, dass gilt: $AD = DB_1$. Wir verbinden B_1 mit C und erhalten ein Dreieck DB_1C , das dem Dreieck ADB kongruent ist, denn es gilt außer der obigen Relation $AD = DB_1$:

$DB = DC$, da D als Mittelpunkt von BC ermittelt wurde, und $\angle BDA = \angle CDB_1$ als Scheitelwinkel.

Aus der Kongruenz dieser Dreiecke ergibt sich auch:

$$\angle DB_1C = \angle DAB \quad \text{und} \quad \angle DGB_1 = \angle DBA$$

Auf Grund dieser Winkelgleichheiten können wir schließen, dass die Winkelsumme im Dreieck AB_1C ebenso groß ist wie die Winkelsumme im Dreieck ABC , nämlich $2R + \varphi$. Außerdem stellen wir fest, dass im Dreieck AB_1C die Summe der beiden der Seite AB_1 anliegenden Winkel gleich α ist. Folglich ist jetzt die Größe des kleinsten Winkels $\leq \frac{\alpha}{2}$ (das Gleichheitszeichen gilt hier nur, wenn $AB = AC$ ist).

Der kleinste Winkel kann jetzt aber $\angle B_1AC$ oder auch $\angle AB_1C$ sein. Das hängt davon ab, welche der beiden Seiten B_1C oder AC kleiner ist. Die beiden Winkel können allerdings auch gleich sein, dann nämlich, wenn gilt $B_1C = AC$.

Vom Scheitelpunkt des kleineren Winkels des Dreiecks AB_1C ziehen wir die Seitenhalbierende der gegenüberliegenden Seite und führen eine entsprechende Konstruktion durch, wie eben beschrieben. (In Abbildung 73a ist der Winkel B_1AC , in Abbildung 73b der Winkel AB_1C der kleinere Winkel.)

Hierdurch erhalten wir ein neues Dreieck, in dem die Winkelsumme wiederum gleich der des Ausgangsdreiecks ist, nämlich gleich $2R + \varphi$. Die Summe der beiden Winkel des neuen Dreiecks, die an der verlängerten Seitenhalbierenden liegen, ist ebenfalls $\leq \frac{\alpha}{2}$, der kleinste Winkel also $\leq \frac{\alpha}{2^2}$.

Die entsprechende Konstruktion führen wir erneut, und zwar n -mal durch. Dann können wir folgern, dass die Winkelsumme des n -ten Dreiecks ebenfalls gleich der des Ausgangsdreiecks ist, nämlich gleich $2R + \varphi$. Die Summe der beiden Winkel des letzten Dreiecks, die an der verdoppelten Seitenhalbierenden des $(n - 1)$ -ten Dreiecks liegen, ist $\leq \frac{\alpha}{2^{n-1}}$ und der kleinste Winkel des n -ten Dreiecks ist $\leq \frac{\alpha}{2^n}$.

Wenn wir jetzt n genügend groß wählen, so dass $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ kleiner wird als φ , so erhalten wir die Ungleichung $\varphi - \frac{\alpha}{2^{n-1}} > 0$.

Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man zeigen, dass auch die Winkelsumme des n -ten Dreiecks für diesen Fall größer als $2R$ ist. Man subtrahiert von der angenommenen

Winkelsumme im Dreieck $(2R + \varphi)$ die Summe der beiden an der verdoppelten Seitenhalbierenden liegenden Innenwinkel $\left(\frac{2\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)$. und erhält damit für den dritten Innenwinkel:

$$(2R + \varphi) - \frac{\alpha}{2^{n-1}} = 2R + \left(\varphi - \frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) > 2R$$

Dieses Ergebnis ist aber unmöglich. Folglich kann unsere Annahme, dass, die Winkelsumme des Dreiecks ABC größer als $2R$ sei, nicht richtig sein. Damit ist das Theorem bewiesen.

Zweites Theorem von Legendre:

Wenn in einem beliebigen Dreieck die Summe der Innenwinkel gleich $2R$ ist, so gilt dies auch für jedes beliebige andere Dreieck.

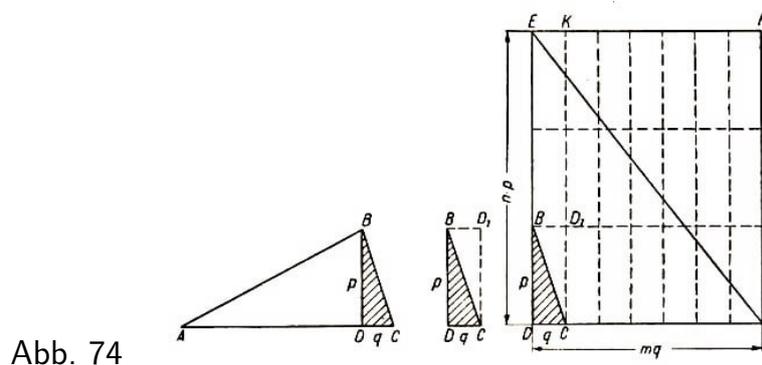


Abb. 74

Beweis: Wir setzen den Fall, dass im Dreieck ABC die Summe der Innenwinkel gleich $2R$ ist (Abb. 74a). Von der Spitze des größten Winkels (mit dem Scheitelpunkt B) fällen wir das Lot BD auf die gegenüberliegende Seite. Die Länge des Lotes soll gleich p sein.

Damit wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke ADB und BDC zerlegt. Die Winkelsumme in jedem der Teildreiecke muss dann ebenfalls gleich $2R$ sein.

Wenn wir nämlich zur Winkelsumme des Dreiecks, die laut Voraussetzung $2R$ beträgt, die beiden Winkel am Fußpunkt des Lotes D , die zusammen ebenfalls $2R$ betragen, addieren, so erhalten wir für alle Innenwinkel der beiden Teildreiecke die Winkelsumme $4R$.

Nehmen wir nun an, dass einer der beiden Winkel, die am Fußpunkt D des Lotes entstehen, größer als der andere sei, dann müsste in diesem Teildreieck die Summe der Innenwinkel ebenfalls größer als $2R$ sein, was dem ersten Legendreschen Theorem widerspräche.

Wir können also voraussetzen, dass die Winkelsumme im Dreieck ABC sowie in den rechtwinkligen Teildreiecken ADB und BDC jeweils gleich $2R$ ist. Es muss nun nachgewiesen werden, dass auch die Winkelsumme in jedem anderen rechtwinkligen und darüber hinaus in jedem beliebigen Dreieck gleich $2R$ ist.

Nehmen wir für diese Untersuchung das Dreieck BDC mit den Katheten $BD = p$ und $DC = q$ (Abb. 74b).

Wir ergänzen das Dreieck BDC zum Rechteck $BDCD_1$ und erhalten als Winkelsum-

me in diesem Viereck $4R$. Wenn wir zu diesem Viereck vorerst in einer Richtung n -mal ein kongruentes Viereck hinzufügen, so erhalten wir schließlich das Viereck $DCKE$ mit den Seiten $DE = np$ und $DC = q$ (Abb. 74c).

Die Summe der Winkel dieses Vierecks ist wiederum gleich $4R$. Jetzt fügen wir dem Viereck $DCKE$ in der anderen Richtung m -mal ein dazu kongruentes Viereck hinzu. Wir erhalten dadurch das Viereck $DGF E$ mit den Seiten $DE = GF = np$ und $DG = EF = mq$, wobei m und n beliebige natürliche Zahlen sind. Die Summe der Winkel dieses Vierecks $DGF E$ ist, wie aus seinem Aufbau ersichtlich, wiederum gleich $4R$.

Solche Vierecke kann man durch eine Diagonale, z.B. durch EG , in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegen, z.B. in die Dreiecke DGE und EGF . In jedem der Teildreiecke ist die Winkelsumme gleich $2R$; denn eine kleinere Winkelsumme in einem der beiden Dreiecke hätte eine größere im anderen Dreieck zur Folge, was wiederum dem ersten Legendreschen Theorem widerspräche.

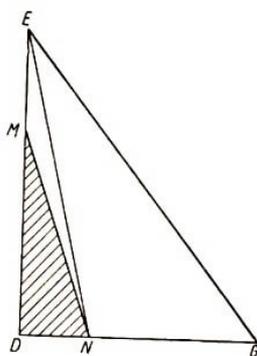


Abb. 75

Nun sei uns ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck DNM gegeben (Abb. 75). Bei geeigneter Wahl der Zahlen m und n gelingt es stets, aus dem gegebenen Dreieck DNM ein Dreieck der Gestalt DGE (Abb. 74) aufzubauen, dessen Winkelsumme $2R$ beträgt und dessen rechter Winkel mit dem des gegebenen Dreiecks die gleiche Lage hat.

Wir verbinden nun die Punkte E und N und erhalten ein neues rechtwinkliges Dreieck DNE , das mit dem Dreieck DGE und dem ursprünglichen Dreieck DNM die Lage der Schenkel des rechten Winkels gemeinsam hat.

Insbesondere haben die beiden Dreiecke BGE und DNE die gemeinsame Kathete ED und entsprechend die beiden Dreiecke DNE und DNM die gemeinsame Kathete DN . Das Dreieck DGE erhalten wir schließlich, indem wir die Dreiecke NGE , und DNE zusammenfügen. Die Summe der Innenwinkel jedes Teildreiecks muss gleich $2R$ sein. Dann ergibt sich die Summe der beiden Teildreiecke zu $4R$:

$$(\angle DEG + \angle EGD + \angle GDE) + (\angle GNE + \angle END) = 2R + 2R = 4r$$

Nehmen wir an, dass die Winkelsumme in einem der Teildreiecke kleiner als $2R$ sei, so kommen wir wiederum in Widerspruch zum ersten Legendreschen Theorem, weil dann die Winkelsumme in dem anderen Teildreieck größer als $2R$ sein müsste. Auf gleiche Weise folgt, dass das Dreieck DNE aus zwei Teildreiecken EMN und DNM besteht, von denen jedes die Winkelsumme $2R$ hat. Denn in diesem Fall ist die Summe aller Winkel ebenfalls gleich $4R$:

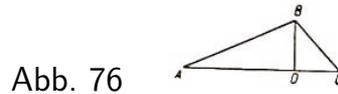
$$(\angle DEN + \angle END + \angle NDE) + (\angle DMN + \angle NME) = 2R + 2R = 4R$$

Wir können auch hier nicht annehmen, dass eines der Teildreiecke eine Winkelsumme hat, die kleiner als $2R$ ist, weil dann die Winkelsumme des anderen Teildreiecke größer als $2R$ sein müsste, was bekanntlich nicht möglich sein kann.

Hieraus folgt aber, dass die Winkelsumme auch im Dreieck DNM , also in einem jeden beliebigen rechtwinkligen Dreieck unter der gestellten Voraussetzung $2R$ sein muss.

Bis jetzt konnten wir also feststellen: Wenn in einem Dreieck (ABC) die Winkelsumme gleich $2R$ ist, dann ist in jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck (DNM) die Winkelsumme ebenfalls gleich $2R$.

Wir gehen jetzt zu einem beliebigen (nicht rechtwinkligen) Dreieck über (Abb. 76).



Wir zerlegen es durch eine Höhe, die im Innern des Dreiecks liegt, in zwei rechtwinklige Teildreiecke. Von diesen wissen wir, dass in jedem die Winkelsumme gleich $2R$ ist. Folglich ist die Winkelsumme in beiden zusammen gleich $4R$.

Wir können nun einen ähnlichen Schluss ziehen, wie wir es bereits mehrere Male durchgeführt haben. Damit können wir dann unter Zuhilfenahme des ersten Legendreschen Theorems nachweisen, dass die Winkelsumme unter der gestellten Voraussetzung in jedem beliebigen Dreieck ebenfalls $2R$ beträgt.

Damit ist auch das zweite Legendresche Theorem in völliger Allgemeinheit bewiesen.

Drittes Theorem des Legendre:

Wenn die Winkelsumme in irgendeinem Dreieck kleiner als $2R$ ist, so ist sie auch in jedem beliebigen anderen Dreieck kleiner als $2R$.

Beweis: Dieses Theorem lässt sich leicht indirekt beweisen.

In dem Dreieck ABC sei die Summe der Innenwinkel kleiner als $2R$. Wir nehmen an, dass in irgendeinem anderen Dreieck die Summe der Winkel gleich $2R$ sein könnte. Dann müsste dies aber nach dem zweiten Legendreschen Theorem auch im Dreieck ABC der Fall sein, was aber unserer Annahme widerspricht. Nach dem ersten Legendreschen Theorem kann die Winkelsumme aber in keinem Dreieck größer als $2R$ sein. Damit ist auch dieses Theorem bewiesen.

Bevor wir die Ergebnisse nochmals zusammenfassen, soll hervorgehoben werden, dass zwar der Beweis der drei Theoreme ohne Anwendung des Parallelenaxioms gelungen ist, dass aber nicht bewiesen werden konnte, dass die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks $2R$ ist.

Wir sind nur sicher, dass diese Summe nicht größer als $2R$ sein kann. Wir wissen ferner, dass für den Fall, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck gleich $2R$ ist, dies auch für jedes beliebige andere Dreieck gilt. Andererseits gilt, wenn die Winkelsumme in einem Dreieck kleiner als $2R$ ist, dies auch für jedes beliebige andere Dreieck.

das sind die Fakten, die wir über die Winkelsumme eines Dreiecks aussagen können, wobei das fünfte euklidische Postulat, dessen Gültigkeit wir ja anzweifeln, nicht herangezogen wird. Bis hierhin waren auch Legendres Überlegungen richtig. Jetzt machte er in seinen weiteren Überlegungen jedoch einen entscheidenden Fehler.

6.4 Der Fehler des Legendre

Wir wollen versuchen, die beiden folgenden Theoreme zu beweisen:

1. Wenn die Winkelsumme eines Dreiecks gleich $2R$ ist, so kann durch einen Punkt, der außerhalb einer Geraden liegt, nur eine zweite Gerade konstruiert werden, die zur gegebenen parallel ist.

2. Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks kann nicht kleiner sein als $2R$.

Der Vergleich dieser beiden Postulate führt zum "Beweis" des fünften euklidischen Postulates - jenes Postulates, das die eindeutige Lösung der Frage nach den Parallelen behauptet.

Wenn nämlich nachgewiesen werden kann, dass die Winkelsumme eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als $2R$, dann muss sie gleich $2R$ sein, da sie nach dem ersten Legendreschen Theorem auch nicht größer als $2R$ sein kann.

Dieser Schluss zieht dann einen weiteren nach sich, nämlich, dass durch einen Punkt, der außerhalb einer Geraden liegt, nur eine einzige Gerade gezogen werden kann, welche die gegebene Gerade nicht schneidet. (Erstes Theorem dieses Abschnittes.)

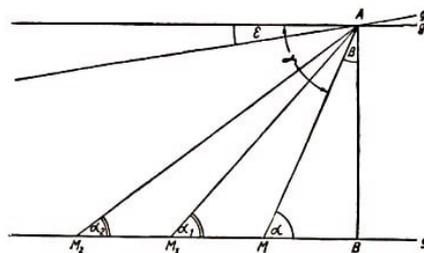


Abb. 77

Auf diesem Wege wollte Legendre das fünfte Axiom des Euklid beweisen.

Führen wir den Beweis für das erste Theorem durch (Abb. 77):

Gegeben sei die Gerade g_1 und der Punkt A , der außerhalb der Geraden g_1 liegen soll. Wir fällen vom Punkt A das Lot AB auf die Gerade g_1 und konstruieren die Gerade g_2 orthogonal zu AB durch den Punkt A . Die Geraden g_1 und g_2 sollen einander also nicht schneiden.

Wir zeigen hierzu, dass jede andere Gerade g_3 , die durch den Punkt A geht, und zur Geraden g_2 eine kleine Winkeldifferenz ε aufzuweisen hat, die Gerade g_1 schneidet, wenn die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks gleich $2R$ ist (Abb. 77).

Wir legen auf der Geraden g_1 den Punkt M fest und verbinden ihn mit dem Punkt A . Da unter der Bedingung, dass die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks gleich $2R$ sein soll, nach dem zweiten Legendreschen Theorem die Winkelsumme des Dreiecks MBA ebenfalls gleich $2R$ ist, gilt $\alpha + \beta = R$ und laut Konstruktion ebenfalls $\gamma + \beta = R$, woraus folgt:

$$\alpha = \gamma$$

Wir stellen uns nun vor, dass der Punkt M auf der Geraden g_1 nach links verschoben wird und der Reihe nach die Lage der Punkte M_1, M_2, \dots einnimmt. Bei dieser Verschiebung verkleinert sich der Winkel α und folglich auch in gleicher Weise der Winkel γ .

Beide Winkel können auf diese Weise beliebig klein gemacht werden, kleiner als jeder vorgegebene Winkel, also auch kleiner als ε .¹⁷

¹⁷Der Beweis für diese Behauptung wird nicht angegeben, um die Abhandlung nicht zu überladen.

Wird der Winkel kleiner als ε , so muss die Gerade g_3 innerhalb des Dreiecks ABM_n verlaufen. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass die Gerade g_3 mit der Geraden g_1 einen Schnittpunkt haben muss, dessen Abstand von B kleiner ist als BM_n . Damit ist das erste Theorem bewiesen.

Führen wir nun den Beweis für das zweite Theorem durch (Abb. 78):

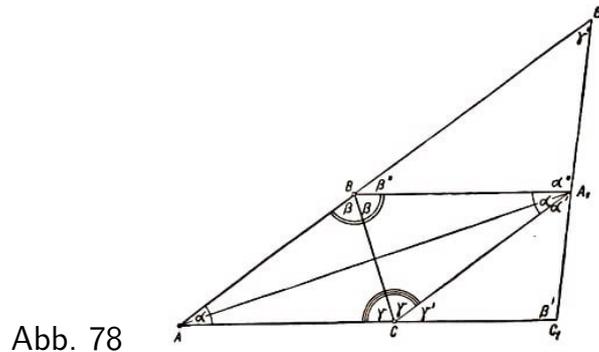


Abb. 78

Wir nehmen an, dass die Winkelsumme des Dreiecks ABC kleiner als $2R$ sein möge und bezeichnen sie mit der Differenz $2R - \delta$, wobei $\delta > 0$ sein muss.

Wir konstruieren das Dreieck A_1BC bezüglich der Symmetrieachse BC axialsymmetrisch zum Dreieck ACB . Das Dreieck A_1BC hat dann dieselbe Winkelsumme wie das Dreieck ACB , also ebenfalls gleich $2R - \delta$.

Durch den Punkt A_1 legen wir eine Gerade, welche die Verlängerungen der Seiten AC und AB des Dreiecks ACB in den Punkten C_1 und B_1 schneiden möge.

Wenn wir nun annehmen, dass die Winkelsumme des Dreiecks ACB kleiner als $2R$ sein soll, so können wir dasselbe von den beiden neuen Dreiecken A_1B_1B und CC_1A_1 sagen, nämlich, dass auch in diesen Dreiecken nach dem dritten Legendreschen Theorem die Winkelsumme kleiner als $2R$ sein muss.

Es möge die Winkelsumme des Dreiecks A_1B_1B gleich $2R - \varepsilon$ und die des Dreiecks CC_1A_1 gleich $2R - \xi$ sein. Dann ist die Summe der Winkel in allen vier Dreiecken gleich $8R - 2\delta - \varepsilon - \xi$.

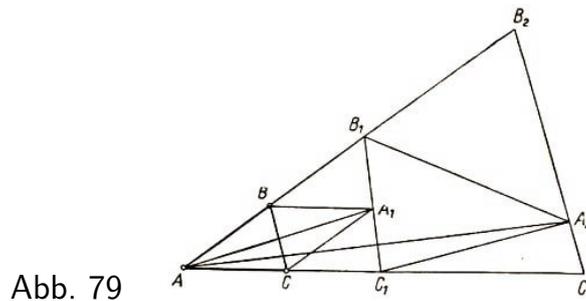
Wollen wir hieraus die Winkelsumme des Dreiecks AC_1B_1 ermitteln, müssen wir von dieser Winkelsumme die Winkel mit den Scheitelpunkten B , A_1 und C subtrahieren. Diese Summe ist gleich $6R$. Somit ergibt sich als Winkelsumme des Dreiecks AC_1B_1

$$2R - 2\delta - \varepsilon - \xi$$

Da aber $\varepsilon > 0$ und $\xi > 0$, erhalten wir die Ungleichung

$$2R - 2\delta - \varepsilon - \xi < 2R - 2\delta$$

Folglich können wir, wenn ein Dreieck existiert, in dem die Summe der Innenwinkel gleich $2R - \delta$, ein neues Dreieck konstruieren, in dem die Summe kleiner ist als $2R - 2\delta$. Dieses Verfahren können wir fortsetzen, indem wir unter Benutzung des bereits erhaltenen Dreiecks AC_1B_1 in gleicher Weise ein neues Dreieck AC_2B_2 konstruieren (Abb. 79).



In diesem Dreieck ist dann die Summe der Innenwinkel kleiner als $2R - 4\delta$. Hieraus ermitteln wir dann ein neues Dreieck mit einer Winkelsumme, die kleiner ist als $2R - 8\delta$ usw.

Wenn wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir schließlich ein n -tes Dreieck, in dem die Summe der Innenwinkel kleiner als $2R - 2^n\delta$ sein muss.

Nehmen wir nun n genügend groß, so können wir schließlich erreichen, dass die Ungleichung $2R < 2^n\delta$ gilt. Das würde aber besagen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks negativ sein müsste, was jeglichen Sinnes entbehrt.

Folglich kann die zu Beginn unseres Beweises angenommene Vermutung, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks kleiner als $2R$ sein kann, nicht richtig sein. Da fernerhin die Winkelsumme eines Dreiecks auch nicht größer sein kann als $2R$ (erstes Legendresches Theorem), muss sie gleich $2R$ sein. Hieraus folgt dann unter Berücksichtigung des von uns bereits bewiesenen ersten Theorems dieses Abschnittes die Gültigkeit des Parallelenaxioms.

Dies war im wesentlichen der Verlauf des "Beweises" von Legendre. Er scheint völlig richtig zu sein und enthält dennoch einen entscheidenden Fehler. Dieser liegt allerdings so tief, dass es schwierig ist, ihn aufzufinden.

Erinnern wir uns der Konstruktion des Dreiecks AC_1B_1 (Abb. 78). Nach Ermittlung des Punktes A_1 im Innern des Winkels B_1AC_1 zeichneten wir die Gerade B_1C_1 und nahmen ohne Beweis an, dass sie die beiden Geraden schneidet, die durch Verlängerung der Schenkel des genannten Winkels entstehen. Dadurch nahmen wir ohne Beweis die Gültigkeit folgenden Satzes an:

Durch einen beliebigen Punkt A_1 im Innern eines beliebigen Winkels BAC kann man stets eine Gerade so legen, dass sie die beiden Schenkel des Winkels schneidet.

Wenn wir diesen Satz zu den anderen Axiomen hinzufügen, so können wir mit seiner Hilfe nachweisen, wie wir es bereits gesehen haben, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich $2R$ ist. Hieraus können wir dann folgern, dass das fünfte Euklidische Postulat - das Parallelenaxiom - Gültigkeit hat.

Wir benutzten also zum Beweis des euklidischen Postulats ein neues Postulat. Derartige Überlegungen bezeichnet man als "Trugschluss". In einen solchen Trugschluss sind wir hineingeraten. Dies würde uns der Beweis des folgenden Theorems zeigen.

Theorem: Wenn durch einen beliebigen Punkt A in einem Winkel stets eine Gerade so gelegt werden kann, dass sie beide Schenkel des Winkels schneidet, so kann die Win-

Winkelsumme eines Dreiecks nicht kleiner sein als $2R$.

Der Nachweis der Gültigkeit dieses Theorems müsste ebenfalls mit der Methode des indirekten Beweises geführt werden. Er verläuft fast genauso wie die Legendreschen Überlegungen. Auch dort würden wir zum Schluss die unsinnige Folgerung erhalten, dass die Winkelsumme in einem Dreieck negativ sein soll, woraus wir dann auf die Richtigkeit der aufgeführten Behauptung schließen könnten.

Dieser Beweis, der hier nicht angeführt werden soll, führte zur Auffindung des Fehlers in den ursprünglichen Annahmen Legendres. Später hat sich Legendre selber von seinem Beweis distanziert.

Indem wir im Zusammenhang mit der Winkelsumme im Dreieck Beweise untersuchten, die sich nicht auf das Parallelenaxiom stützen, haben wir uns gleichzeitig mit den elementaren Grundlagen der Lobatschewskischen Geometrie vertraut gemacht.

6.5 Wir treten in eine neue geometrische Welt

"In der Geometrie stört mich eine gewisse Unvollkommenheit, die ich auch als Ursache dafür ansehe, dass diese Wissenschaft bis zur heutigen Zeit kaum einen Schritt über die Grenzen jenes Zustandes getan hat, der bereits bei Euklid erreicht worden war", schrieb Lobatschewski 1840 in seinem Buch 'Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien'.

Diese Unvollkommenheit betraf vor allen Dingen das fünfte euklidische Postulat über die Parallelen, und so übernahm Lobatschewski, als er seine Geometrie schuf, alle euklidischen Postulate mit Ausnahme des Parallelenaxioms. Aus diesem Grunde übernahm er auch unverändert alle Lehrsätze der euklidischen Geometrie, die nicht auf dem fünften Axiom basieren.

Alle anderen Sätze musste er aber verändern.

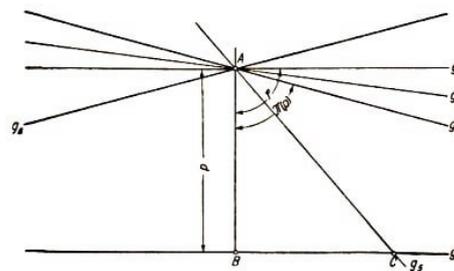


Abb. 80

Wir wollen nun den Gedanken Lobatschewskis folgen, mit deren Hilfe er seine Hörer in sein Postulat über die Parallelen einführte (Abb. 80).

Gegeben sei eine Gerade g_1 und ein Punkt A außerhalb dieser Geraden.

Wir fällen nun vom Punkt A das Lot AB auf die Gerade g_1 und errichten in A eine Senkrechte g_2 zu AB . Innerhalb des rechten Winkels φ gibt es Geraden durch den Punkt A , die entweder die Gerade g_1 schneiden (z.B. die Gerade g_5) oder die Gerade g_1 nicht schneiden (z.B. die Gerade g_2).

Wir wissen nicht, ob die Senkrechte g_2 die einzige Gerade ist, welche die Gerade g_1

nicht schneidet. Es wäre doch denkbar, dass auch andere Linien existieren, die g_1 nicht schneiden (beispielsweise g_3). Beim Übergang von den schneidenden Geraden zu den nicht schneidenden müssen wir auf eine Gerade g_4 treffen, die insofern eine "Grenzlinie" ist, als auf der einen Seite von ihr alle diejenigen Geraden liegen, die g_1 nicht schneiden, und auf der anderen Seite alle jene Linien, die g_1 schneiden.

Dieselben Überlegungen können wir auch bezüglich der Geraden durch A durchführen, die sich nicht innerhalb des Winkels φ befinden. Wir wollen damit die "Grenzgerade" g_6 einführen.

Diese Grenzgeraden g_4 und g_6 nannte Lobatschewski parallele Geraden zu g_1 durch den Punkt A . Auf diese Weise gehen durch jeden Punkt der Ebene zwei Geraden, die zu einer gegebenen parallel sind. Dabei ist die Gerade g_4 zu g_1 in Richtung BC parallel, die Gerade g_3 aber ist zu derselben Geraden g_1 in der entgegengesetzten Richtung CB parallel. Beide Geraden liegen symmetrisch bezüglich des Lotes AB .

Nunmehr können wir das Parallelenaxiom von Lobatschewski formulieren:

Es mögen in einer Ebene eine Gerade und ein außerhalb derselben gelegener Punkt gegeben sein. Dann kann man durch diesen Punkt zwei unterschiedliche Geraden konstruieren, die zur gegebenen Geraden in entgegengesetzter Richtung parallel sind.

Lobatschewski teilte nun alle Geraden einer Ebene, die durch einen Punkt A dieser Ebene gehen, in drei Klassen ein:

- a) Schneidende zur Geraden g_1 ,
- b) zwei Parallelen zur Geraden g_1 ,
- e) Nichtschneidende zur Geraden g_1

Diese Definition der Parallelität war deswegen von besonderer Bedeutung, weil auf diese Weise ein eindeutiger Winkel, der Parallelwinkel $\pi(p)$, festgelegt wird, wobei p die Länge des Lotes AB sein soll. Schon aus der Wahl des Symbols sehen wir, dass der Parallelwinkel eine Funktion von p ist. Das besagt aber, dass die Größe dieses Winkels davon abhängt, wie groß der Abstand des Punktes A von der Geraden g_1 ist.

Wenn sich die Funktion $\pi(p)$ bei Veränderung von p selber nicht verändern würde, sondern stets gleich $1R$ bliebe, so wäre der Winkel, den die Geraden g_2 und g_4 bilden, gleich Null, d.h., es würde außer g_2 keine andere Gerade existieren, die g_1 nicht schneidet.

Dann gelten aber auch das fünfte euklidische Axiom und alle Sätze, die darauf aufbauen. Ist aber $\pi(p) < 1R$, so müssen wir zwei Parallelen zulassen, eine auf der einen Seite des Lotes und eine auf der anderen Seite. Dann befinden wir uns in einer neuen Geometrie, in der Geometrie Lobatschewskis.

Durch das Ersetzen des fünften Postulates von Euklid durch sein Parallelenaxiom schuf Lobatschewski eine neue Geometrie. Er nannte sie Imaginäre Geometrie.

Im Laufe der Zeit entwickelte Lobatschewski diese Geometrie bis zu der Grenze, die von der euklidischen Geometrie erreicht worden war. Wichtig ist hierbei, dass Lobatschewski bei dieser Entwicklung auf keinen Widerspruch stieß, der dann den Nachweis erbracht hätte, dass sein Parallelenaxiom unmöglich wäre. Lobatschewski ging aber weiter.

Er verknüpfte seine Geometrie mit bestimmten anderen Teilgebieten der höheren Mathematik, und auch hierbei ergaben sich keine Widersprüche. Die Euklidische Geometrie und die Lobatschewskische Geometrie sind also beide gleichermaßen vollkommen.

Als jedoch Euklid seine Elemente schuf, entwickelte er erstmals ein System, das er aus dem Studium der geometrischen Entwicklung von zwei bis drei Jahrtausenden herleitete. Dagegen entwickelte Lobatschewski seine Geometrie teils völlig unabhängig von den Euklidischen Postulaten im Verlaufe weniger Jahre.

Das war eine gigantische Arbeit. Das Ergebnis dieser Arbeit überflügelte jedoch gewissermaßen die fortgeschrittensten mathematischen Ideen jener Zeit. Hieraus wird es verständlich, dass die zeitgenössischen Mathematiker mit wenigen Ausnahmen den Ideen Lobatschewskis von der "Imaginären Geometrie" kein Verständnis entgegenbrachten.

Wir wollen uns im folgenden mit einigen Ergebnissen in Form von Lehrsätzen der nicht-euklidischen Geometrie Lobatschewskis beschäftigen. Dabei wollen wir uns die Lobatschewskischen Postulate (insbesondere das Parallelenaxiom) fest vor Augen halten; denn wir werden zu Schlüssen kommen, die uns auf den ersten Blick zumindest als seltsam erscheinen. Lobatschewski sagte selbst:

"Auf den ersten Blick kann der Eindruck entstehen, dass die Lehrsätze der imaginären Geometrie sehr widersprüchlich sind. Hierzu muss ich bemerken, dass diese Widersprüchlichkeit nur gegenüber unseren Vorstellungen und Gewohnheiten besteht, während die Sätze in logischer Hinsicht vollkommen einwandfrei sind."

6.6 Das Neue, für unser Vorstellungsvermögen Ungewöhnliche

Satz 1: Die Winkelsumme eines Dreiecks ist kleiner als $2R$ und verändert sich von Dreieck zu Dreieck.

Beweis : Die Winkelsumme eines Dreiecks kann nicht gleich $2R$ angenommen werden, weil daraus das Parallelenaxiom Euklids folgen würde, was in der Lobatschewskischen Geometrie unzulässig ist. Nach dem ersten Legendreschen Theorem kann diese Summe aber auch nicht größer sein als $2R$. Folglich ist die Winkelsumme eines Dreiecks kleiner als $2R$.

Die Winkelsumme eines Dreiecks kann nicht für alle Dreiecke gleich sein, weil hieraus die Notwendigkeit der Einführung des fünften Postulates Euklids folgen würde. Wir wollen diese Aussage beweisen (Abb. 81).

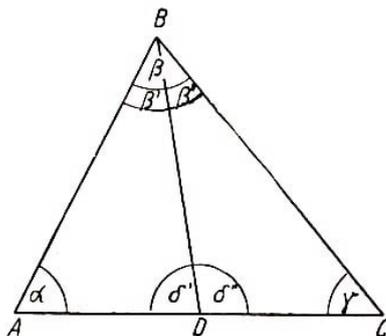


Abb. 81

Wir nehmen an, dass die Winkelsumme Σ im Dreieck für alle Dreiecke gleich bleibe.

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \quad \alpha + \beta + \gamma &= \Sigma, & \triangle ADB : \quad \alpha + \beta' + \delta' &= \Sigma \\ \triangle DCB : \quad \alpha + \beta'' + \delta'' &= \Sigma & & (1,2,3) \end{aligned}$$

Dann folgt aus (2) und (3):

$$\alpha + \beta' + \delta' + \gamma + \beta'' + \delta'' = 2\Sigma \quad , \quad (\alpha + \beta' + \beta'' + \gamma) + (\delta' + \delta'') = 2\Sigma$$

Da $\beta' + \beta'' = \beta$, gilt nach (1) und (2):

$$\Sigma + 2R = 2\Sigma \quad , \quad \Sigma = 2R$$

Auf diese Weise zeigt sich - unter der Voraussetzung, dass die Winkelsumme in allen Dreiecken gleich ist -, dass die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich $2R$ ist. Hieraus müssen wir aber das euklidische Parallelenaxiom folgern, was mit der Lobatschewskischen Geometrie unvereinbar ist.

Satz 2: Die Winkelsumme eines konvexen Vierecks ist kleiner als $4R$, und deshalb gibt es keine Rechtecke.

Satz 3: In der Lobatschewskischen Geometrie gibt es keine ähnlichen Dreiecke.

Beweis: Wir nehmen an, dass zwei ungleiche Dreiecke existieren, die paarweise gleiche Winkel haben (Abb. 82).

Es sei

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1; \quad \angle ABC = \angle A_1B_1C_1; \quad \angle ACB = \angle A_1C_1B_1$$

und $A_1B_1 < AB$.

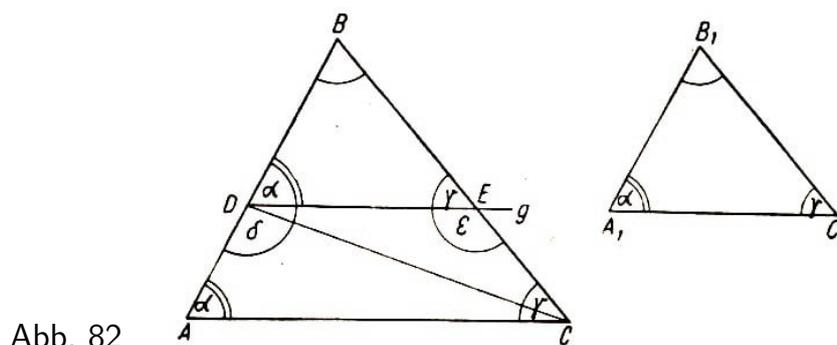


Abb. 82

Auf der Seite AB des Dreiecks ABC tragen wir von B aus den Abschnitt BD gleich A_1B_1 ab. Durch den Punkt D legen wir die Gerade g , die BC in E so schneidet, dass gilt: $\angle BDE = \angle B_1A_1C_1$.

Die Gerade g kann aber bei Gleichheit der Winkel BDE und BAC die Strecke AC nicht schneiden. Daraus folgt dann, dass die Gerade g die Seite BC des Dreiecks in irgendeinem Punkt E schneiden muss.¹⁸

¹⁸Sowohl in der euklidischen als auch in der nichteuklidischen Geometrie kann man die Gültigkeit des Postulates von Paschen annehmen: Wenn eine Gerade, die nicht durch eine Ecke eines Dreiecks geht, eine Seite des Dreiecks schneidet, so muss sie notwendigerweise eine der beiden anderen Seiten des Dreiecks schneiden. und zwar ebenfalls zwischen den Ecken.

Da nun gilt $\triangle DBE \cong \triangle A_1B_1C_1$ und somit auch $\angle BED = \angle B_1C_1A_1$, muss die Winkelsumme im Viereck $ADEC$ gleich $4R$ sein. In unserem Fall ist

$$\alpha + \delta = 2R \quad \text{und} \quad \gamma + \varepsilon = 2R$$

Nun zerlegen wir das Viereck mit Hilfe der Diagonalen CD in zwei Dreiecke, in denen jeweils die Winkelsumme gleich $2R$ sein muss. Denn nehmen wir an, dass die Winkelsumme eines der beiden Dreiecke kleiner als $2R$ ist, dann müsste sie im anderen größer als $2R$ sein, was aber dem ersten Legendreschen Theorem widerspricht.

Wenn aber die Winkelsumme in diesen Dreiecken gleich $2R$ ist, so müsste hier das fünfte euklidische Postulat gelten, was wiederum mit der Lobatschewskischen Geometrie nicht zu vereinbaren ist.

Folglich kann es keinesfalls zwei ungleiche Dreiecke geben, die paarweise gleiche Winkel haben. Hieraus folgt unmittelbar, dass ähnliche Dreiecke in der Lobatschewskischen Geometrie unmöglich sind.

Satz 4: Zu jedem beliebigen Winkel α kann man einen solchen Abschnitt p ermitteln, dass gilt $\pi(p) = \alpha$.

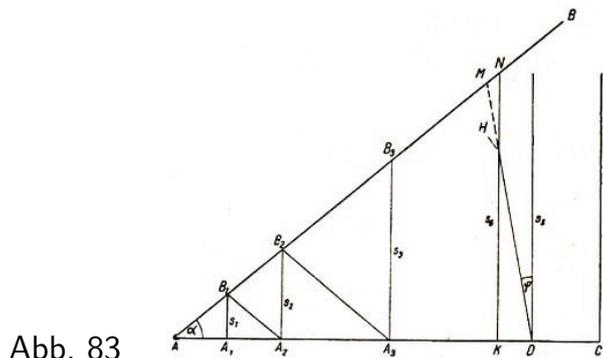


Abb. 83

Beweis (Abb. 83): Es möge der Winkel BAC gleich α sein. Auf AB wählen wir einen beliebigen Punkt B_1 , von dem wir das Lot $B_1A_1 = s_1$ auf AC fällen. Wir verschieben den Punkt A_1 um den Abschnitt A_1A_2 , der gleich dem Abschnitt AA_1 sein soll, nach rechts und errichten über A_2 zu AC die Senkrechte $A_2B_2 = s_2$.

Auf diese Weise fahren wir solange fort, bis wir eine Senkrechte s_4 erhalten, die AB nicht mehr schneidet.

Wir müssen jetzt erst zeigen, dass es eine derartige Senkrechte gibt.

Es möge die Winkelsumme des Dreiecks AB_1A_1 gleich $2R - \varepsilon$ sein.

Dann wird diese Summe im Dreieck AB_1B_2 gleich $2R - 2\varepsilon$. ($\triangle AB_1A_1 \cong \triangle B_1A_1A_2$. Folglich ist die Winkelsumme beider Dreiecke gleich $4R - 2\varepsilon$. Subtrahieren wir hiervon die Winkel am Punkt A_1 , so erhalten wir $4R - 2\varepsilon - 2R = 2R - 2\varepsilon$).

Im Dreieck AB_2A_2 ist die Winkelsumme noch kleiner als $2R - 2\varepsilon$. (Diese Summe soll gleich $2R - x$ sein, und die Winkelsumme des Dreiecks $B_1B_2A_2$ sei gleich $2R - \eta$, wobei gelten muss $x > 0$ und $\eta > 0$.) Dann folgt:

$$2R - x = (2R - 2\varepsilon) + (2R - \eta) - 2R = 2R - 2\varepsilon + 2R - \eta - 2R = 2R - 2\varepsilon - \eta$$

Durch Vergleich der beiden Seiten erhalten wir: $2R - x = 2R - 2\varepsilon - \eta$ und hieraus $x = 2\varepsilon + \eta$, was gleichbedeutend damit ist, dass gilt $2\varepsilon < x$.

Damit fahren wir solange fort, wie die Winkelsumme eines n -ten Dreiecks nicht negativ wird. Darin zeigt sich dann beim nächsten Schritt die Unmöglichkeit, ein solches Dreieck zu konstruieren.

Es möge nun eine solche Senkrechte geben, die AB nicht schneidet. Hierfür wäre beispielsweise schon die Senkrechte s_4 geeignet. Nun ist von Interesse, ob sie die erste der Senkrechten ist, die den Abschnitt AB nicht schneiden. Sollte dies für s_4 nicht der Fall sein, so muss in jedem Fall beim Übergang von den Senkrechten, die AB schneiden, zu den Senkrechten, die AB nicht schneiden, eine erste Senkrechte existieren, die AB nicht schneidet.

Diese sei s_5 . Dann ist der Abschnitt AD gleich p ; denn s_5 ist die Parallele zu AB . Um dies zu zeigen, zeichnen wir vom Punkt D aus die Gerade g , indem wir einen spitzen Winkel φ antragen.

Von irgendeinem Punkt H der Geraden g fällen wir auf AC das Lot $s_6 = HK$, dessen Verlängerung AB in irgendeinem Punkt N schneidet; denn die erste nichtschneidende Senkrechte war unter den gegebenen Bedingungen s_5 .

Damit erhalten wir das Dreieck ANK , in das die Gerade g bei H hineinführt. Sie trifft daher die Hypotenuse AN in irgendeinem Punkt M . Der Winkel φ kann beliebig klein gewählt werden.

Aber alle Geraden, die durch den Punkt D gehen und mit s_5 einen Winkel φ bilden, schneiden AB . Damit wird s_5 zu einer Grenzgeraden, die wir nach dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom Parallele zu AB nennen. Sie hat den Parallelwinkel $\alpha = \pi(AD)$. Auf diese Weise wird in unserem Fall $p = AD$, womit der Satz bewiesen ist.

Diesem Satz können wir eine zweite, sehr interessante Formulierung geben: Wie groß muss der gegebene spitze Winkel sein, dass eine solche Senkrechte möglich ist?

Folgerung: Jeder spitze Winkel wird für eine bestimmte Strecke p zum Parallelwinkel.

Hierauf basiert die Umkehrung des Satzes:

Jede positive Zahl p (bei vorgegebener Maßeinheit, in der die entsprechenden Abschnitte ausgedrückt werden) entspricht einem spitzen Winkel α , der mit p durch die Wechselbeziehung $\pi(p) = \alpha$ verbunden ist.

Auf diese Weise haben wir einen Zusammenhang zwischen Strecken und Winkeln hergestellt. Jede Strecke definiert in der Lobatschewskischen Geometrie eindeutig einen Winkel. Einen solchen Zusammenhang gibt es in der euklidischen Geometrie nicht.

Satz 5: Die Funktion $\pi(p)$ ist monoton fallend und nimmt alle Werte von $1R$ bis 0 an.

Diese knappe Formulierung ist so zu verstehen: Wenn p allmählich von 0 bis ∞ steigt, so fällt der Parallelwinkel $\pi(p)$ entsprechend und nähert sich für $p \rightarrow \infty$ immer mehr der Null (Abb. 84).

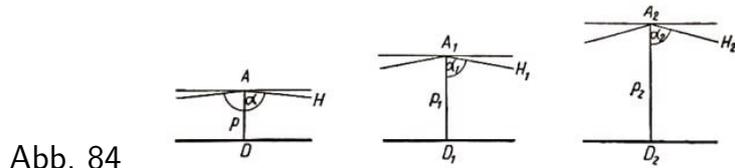


Abb. 84

Beweis: (Abb. 85) Es möge g_2 eine Parallele zu g_1 und AD die Senkrechte zu g_1 mit der Länge p sein. Dann ist $\alpha = \pi(p)$.

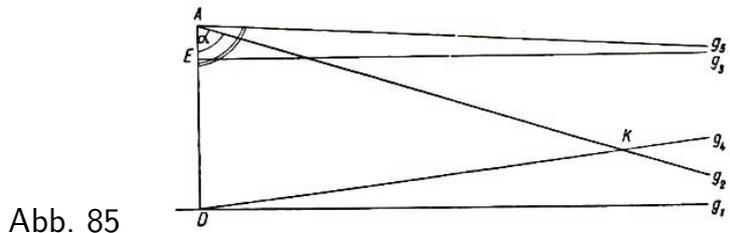


Abb. 85

Wir verkleinern das Argument p auf den Abschnitt $AE < AD$. Wir konstruieren durch E die Senkrechte g_3 zu AD , die g_2 schneidet. In diesem Fall können wir zeigen, dass die zu g_3 parallele Gerade g_4 auch g_2 in K schneidet, wodurch wir das Dreieck ADK erhalten. Die Gerade g_3 kann die Parallele g_4 nicht schneiden, folglich muss sie nach dem Postulat von Pasch die Seite AK des Dreieckes ADK schneiden. Damit wir nun die Gerade g_5 als Parallele zu g_3 erhalten, müssen wir den Winkel α vergrößern. Somit folgt:

$$\pi(AD) < \pi(AE)$$

Satz 6: Je weiter parallele Linien in Richtung ihrer Parallelität verlängert werden, desto stärker nähert sich die eine der anderen.

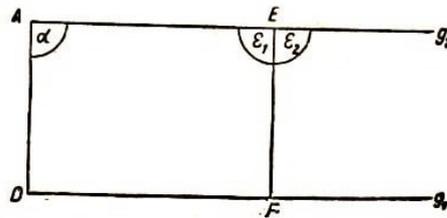


Abb. 86

Beweis (Abb. 86): Es sei g_2 parallel zu g_1 vom Punkt E , der von A aus in Richtung der Parallelität auf g_2 liegt, fallen wir das Lot EF auf g_1 .

Da $\angle \epsilon_1 + \angle \epsilon_2 = 2R$ und $\alpha + \angle \epsilon_1 < 2R$ ist (die Summe der Winkel eines Vierecks ist kleiner als $4R$), folgt: $\alpha < \epsilon_2$, das heißt, $\pi(AD) < \pi(EF)$. Hieraus erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass die Funktion $\pi(p)$ monoton fallend ist, die Relation $EF < AD$.

Die hier zusammengestellten Sätze sind nur ein kleiner Teil der Theoreme, die N.I. Lobatschewski auf dem Gebiet der Geometrie aufgestellt hat. Darüber hinaus hat er auch auf anderen Gebieten der Mathematik, der Trigonometrie, der analytischen Geometrie, der Differentialgeometrie u.a. gearbeitet.

Die aus seiner Geometrie angeführten Fakten, mit denen wir uns bekannt machten, genügen vollkommen, um zu der Erkenntnis zu gelangen, dass die Begriffe Ebene und Raum bei Lobatschewski anders gefasst sind als bei Euklid.

6.7 Geometrie auf gekrümmten Flächen

Neben der ebenen euklidischen Geometrie gibt es andere Bereiche der Geometrie, in denen Eigenschaften von Figuren untersucht werden, die nicht in einer Ebene, sondern auf einer anderen, gesetzmäßig aufgebauten Fläche liegen, beispielsweise auf der Oberfläche der Kugel. Kann man hier von einer Kugelgeometrie sprechen?

Man kann es, und eine derartige Geometrie wurde auch schon frühzeitig aufgestellt. Die wesentliche Frage für uns ist: Sind die Eigenschaften der Figuren, die auf der Kugeloberfläche liegen, anders als die Eigenschaften von Figuren, die auf einer Ebene liegen?

Damit wir auf diese Frage eine Antwort erhalten, wollen wir uns mit einigen Eigenschaften sphärischer Figuren, das sind Figuren auf der Kugeloberfläche, bekannt machen. Vorher müssen wir vereinbaren, was auf dieser Fläche den Geraden, Winkeln, Dreiecken und Vielecken entspricht. In allen Fällen (also nicht nur bei der Kugel), wo es uns auf der vorgegebenen Fläche nicht möglich ist, Geraden, die zwei Punkte verbinden, im üblichen Sinne zu konstruieren, werden wir diejenigen Linien wählen, die eine kürzeste Entfernung zwischen diesen Punkten festlegen.

Derartige Linien bezeichnet man als geodätische Linien. So sind beispielsweise die geodätischen Linien auf der Kugeloberfläche die Großkreise.

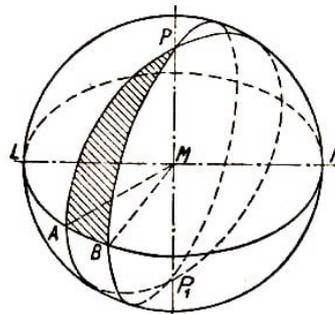


Abb. 87

Die Abbildung 87 stellt eine Kugel dar, auf deren Oberfläche unter Verwendung von Großkreisen ein sphärisches Dreieck gebildet wurde. Der Kreis durch $LABN$ soll der Äquator sein, die Kreise PAP_1 und PBP_1 Meridiane.

Hierbei stehen die Seiten AP und BP des Dreiecks auf der Seite AB senkrecht. Folglich wurden von den Punkten P und P_1 zwei Lote auf LN (als geodätische Linie) gefällt.

Wenn $\angle PAB = \angle PBA = 90^\circ$ ist, so ist die Summe aller Innenwinkel im Dreieck ABP größer als $2R$.

Vergleichen wir ferner die Winkelsumme des Dreiecks ABP mit der des Dreiecks BNP , so müssen wir feststellen, dass die Winkelsumme des Dreiecks BNP größer ist als die des Dreiecks ABP . Folglich verändert sich diese Summe von Dreieck zu Dreieck.

Warum erscheint uns diese Tatsache nicht als unsinnig?

Wahrscheinlich deshalb, weil wir Kugeln häufig sehen; wir leben ja selber auf der Oberfläche eines Körpers, der eine kugelhähnliche Gestalt hat. Wäre nun aber die euklidische Geometrie auf der Oberfläche der Kugel richtig, wenn wir große Dreiecke oder Vielecke konstruieren wollen, deren Seiten aus Großkreisen (geodätischen Linien) bestehen?

Diese Frage müssen wir verneinen. In der Lobatschewkischen Geometrie jedoch werden die angeführten Tatsachen keineswegs unsinnig, wenn wir sie nicht mit der Euklidischen Vorstellung von Ebene und Raum verbinden. Die Ablehnung des fünften euklidischen Postulats und dessen Ersetzung durch das Lobatschewkischen Parallelenaxiom erfordert zwangsläufig die Abwandlung des Euklidischen Ebene- und Raumbegriffs und den Übergang zu "Ebenen" und "Räumen" nach Lobatschewski.

Es darf uns hierbei nicht verwundern, dass Lobatschewski zur Erklärung von Eigenschaften der Figuren in seiner Geometrie keine besonderen Namen für die "Ebene" und den "Raum" eingeführt hat.

Es lässt sich nämlich zeigen, dass die euklidische Geometrie ein Spezialfall der neuen, umfassenderen Geometrie ist. Demzufolge sind auch die Begriffe "Ebene" und "Raum" nach Lobatschewski Verallgemeinerungen des Euklidischen Ebene- und Raumbegriffes.

Warum aber blieb Lobatschewski in seinem Kampf um die Anerkennung der neuen Geometrie allein? Warum hat ihn kaum einer der zeitgenössischen Mathematiker in diesem Kampf unterstützt?

Die Mathematiker lehnten in der damaligen Zeit das Studium der einwandfreien Arbeit Lobatschewskis ab. Diese Arbeit erregte bei ihnen Zweifel, ja selbst Spott. Zweifel und Spott rief allerdings noch etwas anderes hervor.

Lobatschewski war nicht davon überzeugt, dass wir in einem Euklidischen Raum leben, in dem das fünfte Postulat tatsächlich Gültigkeit hat. Eine solche Fragestellung wurde aber von den Mathematikern, die zu Lobatschewskis Zeiten lebten, abgelehnt.

Wir können somit verstehen, dass Lobatschewski mit Hilfe einiger Versuche experimentell seine Annahmen prüfen wollte. Diese Versuche erbrachten jedoch keine eindeutigen Ergebnisse. Es wird uns nun auch verständlich, dass er, ausschließlich auf den Annahmen seiner Geometrie basierend, versuchte, im Euklidischen Raum eine Fläche zu konstruieren, auf der alle Schlussfolgerungen seiner Geometrie uneingeschränkte Gültigkeit haben. Auch dies gelang ihm nicht.

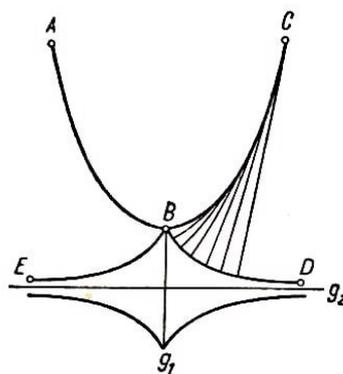


Abb. 88

Der italienische Mathematiker Beltrami entdeckte etwa zehn Jahre nach dem Tode Lobatschewskis eine solche Fläche und wies damit nach, dass die Überlegungen Lobatschewskis tatsächlich ein reales geometrisches System darstellen und nicht nur ein Phantasiegebilde waren.

Wir wollen nun versuchen, uns diese Fläche vorzustellen. In der Abbildung 88 ist die sogenannte Kettenlinie ABC aufgetragen.

Eine solche Linie nimmt eine Kette ein, die an zwei Punkten A und C befestigt und sonst nur den Einwirkungen der Schwerkraft überlassen wird.

Wir nehmen nun einen Faden, befestigen ihn im Punkt C und legen ihn dicht neben die Kettenlinie, von C bis B . Jetzt lassen wir den Endpunkt B unseres Fadens nach rechts ausweichen, wobei wir darauf achten müssen, dass der Faden jederzeit gespannt bleibt, und dass der noch nicht abgewickelte Teil stets die Kettenlinie berührt (Abb. 88).

Bei dieser Bewegung des Fadens beschreibt der Endpunkt B des Fadens eine Kurve, die Traktrix genannt wird. Diese Kurve spiegeln wir an der Geraden g_1 zur Kurve BE . Dann lassen wir den Kurvenzug EBD um die Achse g_2 rotieren und erhalten so mit großer Näherung als Oberfläche des Rotationskörpers die sogenannte Pseudosphäre (Abb. 88 und 89).

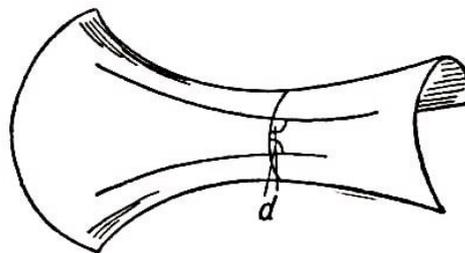


Abb. 89

Auf dieser Pseudosphäre können viele, wenn auch nicht alle, Sätze aus der Lobatschewskischen Geometrie veranschaulicht werden, wenn wir noch voraussetzen, dass Geraden durch die geodätischen Linien der Pseudosphäre zu ersetzen sind.

Hier gilt beispielsweise das Lobatschewskische Postulat über Parallelen (Abb.90), das Theorem über die Winkelsumme eines Dreiecks und viele andere seiner Sätze.

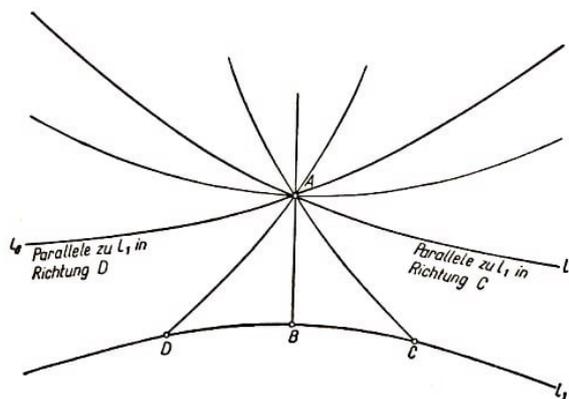


Abb. 90

Die Tatsache, dass die Lobatschewskische Geometrie auf der Pseudosphäre realisierbar ist, hat nicht nur erstrangige mathematische, sondern auch philosophische Bedeutung. Die Geometrie Lobatschewskis ist nicht nur irgendein spekulatives, irreales Gebilde, sondern ihre Gesetze haben Gültigkeit auf einer Fläche, die in unserem realen dreidimensionalen Raum eingebettet ist.

Nach dem geglückten Versuch Beltramis folgten andere Deutungen der Sätze Lobatschewskis, z.B. durch Klein und Poincaré, die wesentlich dazu beitrugen, das Interesse der Mathematiker für die nichteuklidische Geometrie zu wecken.

Auch in neuerer Zeit haben sich bekannte Mathematiker in ihren Veröffentlichungen mit der nichteuklidischen Geometrie beschäftigt. Die Studien über den Raum verschieben sich mehr und mehr zu den Untersuchungen "im Großen" und führen zur Aufstellung der verschiedenartigsten nur denkbaren Geometrien.

Neuerdings durchdringt die nichteuklidische Geometrie die Physik und speziell die Mechanik. Die nichteuklidische Geometrie wird zur Voraussetzung einer modernen physikalischen Theorie, deren Schlüsse bereits jetzt andeuten, dass der Raum der physikalischen Welt eigenartigerweise ein nichteuklidischer Raum sein muss.

Lobatschewski stand noch am Anfang dieses Weges, auf dem in unseren Tagen die Mathematik und die Physik aufsteigen.

6.8 „Der Kopernikus der Geometrie“

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, einer der genialsten Mathematiker seiner Epoche, war ein Mensch mit außerordentlichem Edelmut und großer Ehrenhaftigkeit, ein Mensch, der von patriotischem Pflichtgefühl und großer Heimatliebe erfüllt war. In einer seiner Reden sagte er einmal:

"Ein Mensch muss sich selbst und auch anderen die Pflicht auferlegen, stets bestrebt zu sein, alle seine Fähigkeiten und sein Können zu vervollkommen. Er muss darin seine Ehre - sein Selbstbewusstsein - seinen Ruhm sehen. Dies verlangt seine patriotische Pflicht."

Doch er sagte dies nicht nur, sondern bewies in seinem ganzen Leben durch seine Arbeit und durch seine gesellschaftliche Tätigkeit, dass er ein derart vollkommener Mensch war.

Lobatschewski war nicht nur ein großer Mathematiker, sondern auch ein gewandter und energischer Erzieher der jungen Generation. Mit unerbittlicher Härte brandmarkte er die Unwissenheit und den "Rost der Zeit", der im Laufe der Jahre in der Seele des Menschen auftreten kann.

"Zu leben - das bedeutet ... ununterbrochen neu zu empfinden, dass wir leben. Nichts zwingt so den Strom des Lebens ein wie die Unwissenheit, die als tote Gerade den Weg des Lebens von der Wiege bis zum Grabe begleitet", sagte Lobatschewski. Wenn nach den Worten Uschinskis ein Lehrer das Vorbild für seine Schüler sein muss, so erfüllte Lobatschewski diese Forderung in höchstem Maße.

Im Jahre 1792 wurde Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski als Sohn eines kleinen Beamten in Nishni-Nowgorod (dem heutigen Gorki) geboren. Fünf Jahre nach seiner Geburt starb sein Vater, und die Mutter siedelte mit ihren drei Söhnen nach Kasan über. Die Mutter, eine Frau mit ungewöhnlicher Energie, setzte es durch, dass ihre Kinder auf Staatskosten das Kasaner Gymnasium besuchen konnten.

Lobatschewski konnte bereits nach fünfjährigem Besuch des Gymnasiums, im Alter von fünfzehn Jahren, seine Abschlussprüfung ablegen, worauf er Student an der Kasaner Universität wurde. Hier war er nach kurzer Zeit der beste unter allen Studenten der Mathematik.

Im Jahre 1811 wurde er bereits zum Magister ernannt, und schon im Jahre 1816 war Lobatschewski Professor der Mathematik in Kasan.

Vom Jahre 1818 an hielt Lobatschewski neben seiner Tätigkeit an der Universität mehrere Jahrzehnte hindurch vor einem umfangreichen Kasaner Kreis wissenschaftliche Vorträge. Er machte sich auch gründlich mit dem Unterricht an den allgemeinbildenden Schulen bekannt und setzte sich hier für eine grundlegende Verbesserung des Unterrichts im allgemeinen und des Mathematikunterrichts im besonderen ein.

Im Jahre 1820 wurde Lobatschewski Dekan der Mathematisch-Physikalischen Fakultät und bewährte sich in dieser Funktion als ein ungewöhnlich guter Organisator.

Welche Arbeit Lobatschewski auch übernahm, immer brachte er ihr viel Liebe und große Energie entgegen und sparte nicht an Fleiß. Er bemühte sich, stets gründlich in alle Einzelheiten einzudringen. So arbeitete er im Aufbau-Komitee der Universität mit und war später, als Präsident, für alle Bauvorhaben der Kasaner Universität verantwortlich. Um seiner Funktion voll gerecht werden zu können, war es für ihn selbstverständlich, Studien in Architektur zu betreiben.

Im Jahre 1827 wurde er schließlich zum Rektor der Kasaner Universität gewählt und bekleidete diese Stellung nahezu zwanzig Jahre.

Trotz der umfangreichen und vielseitigen Arbeit als Rektor und trotz seiner komplizierten mathematischen Untersuchungen scheute Lobatschewski auch in jenen Jahren keine Zeit und Mühe für die Erziehung der studentischen Jugend. Einen besonders wertvollen Beitrag in diesen Bemühungen stellte seine bekannte Rede 'Über wichtige Fragen der Erziehung' dar, die von ihm im Jahre 1828 vor den in die Universität neu immatrikulierten Studenten gehalten wurde.

Diese Rede war erfüllt von der großen Hochachtung vor der menschlichen Persönlichkeit, vor der Kultur und vor der Wissenschaft. Sie war aber auch voller Zorn über die "ungerechten Fälle" - über die Privilegien der einen und das "schwere Schicksal" der anderen.

Diese Rede Lobatschewskis war aber auch noch in anderer Hinsicht von Interesse.

In ihr wurden merklich die aufsteigenden materialistischen Ideen zur fortschrittlichen Philosophie des XVIII. Jahrhunderts, zu denen sich auch Lobatschewski bekannte, sichtbar. In der Rede konnte man ferner seine außerordentliche Leidenschaftlichkeit in Fragen der Wissenschaft, seine hohen Vorstellungen über gesellschaftliche Pflichten und sein Ehrgefühl erkennen.

Die Kenntnis dieser Umstände ist für das Verständnis des wissenschaftlichen Wirkens von Lobatschewski außerordentlich wichtig.

Sein materialistisches Herangehen an die wesentlichsten Begriffe der Wissenschaft war eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie. Seine Hingabe galt der Wahrheit und sein Suchen den neuen Methoden im Dienste seines Volkes und der Menschheit.

Er musste sich im Kampf gegen den Spott und die Teilnahmslosigkeit, die seinen neuen Ideen von den zeitgenössischen Mathematikern und Philosophen entgegengebracht wurde, durchsetzen, und dies wurde ihm keineswegs leicht gemacht.

Über seine Arbeit als Rektor der Kasaner Universität berichtet P.S. Alexandrow, dass sich Lobatschewski, selbst wenn er nicht eine einzige Zeile selbständiger wissenschaftlicher Arbeit zurückgelassen hätte, durch seine Leistungen in diesem Amt als einer der bedeutendsten Universitätsfunktionäre verdient gemacht habe. Er empfing wiederholt große Ehrungen.

Während seiner Tätigkeit als Rektor machte auch die wissenschaftliche Arbeit Lobatschewskis große Fortschritte.

Im Jahre 1845 wurde Lobatschewski zum sechsten Mal auf vier Jahre zum Rektor der Universität gewählt. Aber im August des folgenden Jahres feierte man zuerst das dreißigjährige Jubiläum seines Wirkens als Professor. Dann hätte man ihn, den Vorschriften folgend, in den Ruhestand versetzen müssen. Der Rat der Universität regte jedoch ein Gesuch an den Minister für Volksbildung an, in dem die Aufschiebung der Emeritierung Lobatschewskis um weitere fünf Jahre erbeten wurde. Dann hätte er auch in seinem Amt als Rektor bleiben können.

"Der Rat erachtet es", so meldet das Protokoll, "als eine besondere Ehre für die Universität, unter ihren Professoren einen solch hervorragenden Gelehrten und erfahrenen Pädagogen zu besitzen."

Das Ministerium entschied jedoch anders. Es konnte sich zwar der Bitte des Rates nicht ganz verschließen, ernannte aber Lobatschewski entgegen den Vorschlägen zum Gehilfen des Kurators für den Kasaner Bezirk. Dies war ein nebensächliches Amt, und Lobatschewski war nicht bereit, dem Wunsch der Obrigkeit entsprechend, die Stellung eines Gehilfen des Kurators anzunehmen.

Lobatschewski litt sehr darunter, dass er die ihm lieb gewordene Arbeit aufgeben musste. Seine Gesundheit verschlechterte sich schnell, und seine Sehkraft begann nachzulassen. Im letzten Lebensjahr diktierte er, bereits völlig erblindet, zweien seiner Schüler seine letzte Arbeit, die 'Pangeometrie'. Am 12. Februar 1856 starb er.

Lobatschewski schlug eine neue Seite im Buch der Geometrie auf.

Einer der englischen Mathematiker nannte ihn den "Kopernikus der Geometrie". Und in der Tat, das Schaffen Lobatschewskis erzielte keinen kleineren revolutionierenden Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie als seinerzeit das des Kopernikus über das Weltsystem auf die Entwicklung der Astronomie.

Auch der große Mathematiker Gauß hatte Ideen entwickelt, die der Lobatschewskischen Geometrie nahe kamen. Trotz des großen Ansehens, das er bei seinen Zeitgenossen besaß, wagte er es nicht, seine Ergebnisse zu veröffentlichen. In einem Brief an seinen Freund schrieb er einmal:

"Es kann durchaus sein, dass ich mich mein ganzes Leben lang nicht zur Veröffentlichung meiner wahren Meinung über diese Arbeiten entschließen kann, da ich das Geschrei der Bötier¹⁹ fürchte."

Und Gauß handelte tatsächlich entsprechend. Inwieweit Gauß die neuen Ideen Lobat-

¹⁹Bötier - Bewohner der mittellgriechischen Landschaft Bötien, die der Sage nach als denkfaul, schwerfällig und unkultiviert galten.

schewskis schätzte, wird daraus erkenntlich, dass er, nur um die Werke Lobatschewskis im Originaltext lesen zu können, die russische Sprache erlernte. Gauß führte zudem Lobatschewski als korrespondierendes Mitglied in die 'Göttinger gelehrte Gesellschaft' ein, die damals den Charakter einer Akademie hatte, und benachrichtigte ihn persönlich davon.

Lobatschewski fürchtete im Gegensatz zu Gauß das Geschrei der Bötier nicht. Er blieb mit seinen Ideen jedoch völlig allein.

Beharrlich verteidigte er seine Arbeiten gegenüber den Zweiflern. Aber er muss die ganze Tragik empfunden haben, die darin lag, dass er die ganze Zeit, umgeben von Unverständnis und zuweilen Spott, seine Kraft in die Verteidigung seiner Meinung legen musste, selbst dann noch, als er schon völlig erblindet war.

Der Sieg kam spät; bedauerlicherweise erst kurz nach dem Tode Lobatschewskis. Die Publizierung des Gaußschen Briefwechsels, in dem die Lobatschewskischen Ideen sehr hoch bewertet werden, und die Arbeit Beltramis lenkten die Aufmerksamkeit auf diese Problematik. Man begann die Werke Lobatschewskis zu studieren und in andere Sprachen zu übersetzen. Im Jahre 1867 erschien die italienische Ausgabe der 'Pangeometrie', und von diesem Zeitpunkt an begann die Entwicklung der modernen Geometrie.

Sie wurde in die mathematische Literatur und in die Ausbildung als wichtiger Bestandteil aufgenommen. Besondere Verdienste erwarben sich die Mathematiker Riemann, Klein, Poincaré, Hilbert und andere. Wir wollen uns aber stets vor Augen halten, dass der erste Gelehrte, der den Kampf für die neuen Ideen in der Geometrie aufnahm, der erste Mathematiker, der das Fundament für die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie legte, der russische Professor Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski war.

6.9 Ein Trugschluss

Es ist das Parallelenaxiom zu beweisen.

Gegeben sei die Gerade g_1 und der Punkt M außerhalb derselben. Wir beweisen, dass man durch den Punkt M nur eine einzige Gerade legen kann, die zu g_1 parallel ist (Abb. 91).

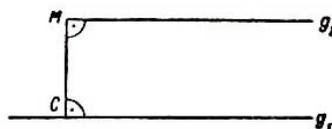


Abb. 91

Vom Punkt M fällen wir auf die Gerade g_1 das Lot MC und errichten im Punkt M eine Senkrechte g_2 zu MC . Diese Senkrechte g_2 wird zu der Geraden, die auf Grund des bekannten Theorems über zwei Senkrechte zu einer Geraden zu g_1 parallel ist.

Unter Hinweis auf dieses Theorem kann das Parallelenaxiom bewiesen werden. Zudem kann man vom Punkt M nur ein einziges Lot auf die Gerade g_1 fällen und auf dem Lot MC kann man durch den Punkt M nur eine einzige Senkrechte errichten.

Folglich gibt es eine zu g_1 parallele Gerade g_2 , und dies ist auch die einzige Parallele, die existiert.

Wo steckt der Fehler?

Damit wir den Fehler in diesem Trugschluss finden, müssen wir uns daran erinnern, dass die oben eingeführte Art der Konstruktion einer Geraden, die zu einer gegebenen parallel sein soll, nicht eindeutig ist. Wenn die zu konstruierende Gerade, die parallel zu g_1 und durch den Punkt M gehen soll, nun unter den anderen Bedingungen gezogen wird, können wir dann behaupten, dass die neue Gerade g_3 mit der Geraden g_2 übereinstimmt ?

Literatur

J. S. Dubnow: Fehler in geometrischen Beweisen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

Crantz/Hauptmann: Sphärische Geometrie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1956.

A.P. Norden: Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

N. W. Efimow: Höhere Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

7 Trigonometrie

"Die Annäherung von Theorie und Praxis gibt so wunderbare Resultate, von denen nicht nur die Praxis profitiert, sondern durch die auch die Entwicklung der Wissenschaft beeinflusst wird."

P.L. Tschebyschew

7.1 Trigonometrie und Astronomie

Die Entwicklung der Trigonometrie hängt eng mit der Entwicklung der wohl ältesten Wissenschaft - der Astronomie - zusammen. Schon in ältesten Zeiten waren einerseits die Bedürfnisse des Handels, andererseits aber auch Abenteuerlust und Wissbegierde Anlass für lange, mühevollere Reisen.

Die Reisewege führten über Karawanenpfade durch unübersehbare Wüsten und Steppe Asiens und Afrikas oder zu Wasser durch das Mittelmeer, dann um die arabische Halbinsel und weiter bis zu den fernen Küsten Indiens und Chinas. Auf monatelangen Reisen benötigten die Reisenden dringend Orientierungsmöglichkeiten, um nicht vom richtigen Wege abzukommen.

Man suchte und fand Orientierungsmerkmale in der Sonne bzw. in den Sternen. Sie wiesen den Karawanen auf ihren endlosen Märschen durch wenig bevölkerte Gegenden der Erde wie auch den Seefahrern auf ihren weiten Fahrten entlang fremder Küsten den richtigen Weg.

Wir werden daher verständlicherweise die ersten astronomischen Beobachtungen und, in engem Zusammenhang hiermit, die ersten primitiven trigonometrischen Kenntnisse bei den alten Handel treibenden Völkern in Asien und Afrika suchen müssen, so in China, Indien, Babylonien und Ägypten.

Die Trigonometrie bildete damals noch nicht einen selbständigen Zweig der Mathematik. Sie führte nicht den heutigen Namen und hatte auch einen anderen Charakter.

Trigonometrische Berechnungen beschränkten sich in der damaligen Zeit mehr oder weniger auf Hilfsverfahren zur rechnerischen Auswertung astronomischer Beobachtungen. Derartige Berechnungen wurden bereits vor mehr als dreitausend Jahren ausgeführt, wie aus einer der ältesten mathematischen Handschriften aus China hervorgeht.

In Babylon, wo die Astronomie in hoher Blüte stand, wo man die erste Sternkarte aufgestellt hatte und in der Lage war, Sonnen- und Mondfinsternisse vorauszusagen, bediente man sich ebenfalls elementarer trigonometrischer Methoden; ja man muss bereits in der Lage gewesen sein, sie auf die verschiedensten astronomischen Berechnungen anzuwenden.

Auch im alten Ägypten wurden astronomische Forschungen betrieben, was unter anderem zur Festlegung eines Kalenders führte, der die Grundlage für das ganze staatliche Leben bildete. So konnten mit Hilfe des Kalenders die Arbeiten in der Landwirtschaft, insbesondere unter Berücksichtigung der regelmäßigen Nilüberschwemmungen, planmäßig durchgeführt werden.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass die Trigonometrie in den alten Ländern

des Orients entstand und dass sie dort eng mit der Astronomie verknüpft war.

In den darauffolgenden Zeiten, als Griechenland in seine historische Epoche trat, als die Mathematik bereits ein hohes Niveau erlangt hatte und die Elemente Euklids geschrieben waren, bedurfte das gesammelte Material über astronomische Beobachtungen einer exakteren mathematischen Bearbeitung.

Hierbei mussten Methoden angewendet werden, die aus der "reinsten" Geometrie kamen. Diese neuen Methoden führten letzten Endes zur Entwicklung derjenigen selbständigen Disziplin in der Mathematik, die wir heute Trigonometrie nennen.

Um die Entwicklung der Trigonometrie haben sich im alten Griechenland besonders Hipparch von Nicäa (190-125 v.u.Z.) und Ptolemeios (90-160) verdient gemacht. Sie schufen die ersten trigonometrischen Tabellen.

Im Verlauf der nächsten zehn Jahrhunderte wurde dann weiteres trigonometrisches Material gesammelt, wiederum vorwiegend in den Ländern des fernen und nahen Ostens. Damit konnte dann später die Aufstellung der Tabellen vervollkommen werden. Den Abschluss dieser Periode bildet die Trennung der Trigonometrie von der Astronomie und die Schaffung einer selbständigen Disziplin.

Diese Trennung wird gewöhnlich mit dem Namen des aserbaischanischen Mathematikers Nasir Eddin Tusi (1201-1274) verknüpft. Schließlich bedurfte es aber noch weiterer fünfhundert Jahre, um die Trigonometrie nach Form und Inhalt auf den Stand zu bringen, den sie heute erreicht hat.

7.2 Wie die ersten trigonometrischen Tafeln aufgestellt wurden

Im alten Griechenland wurde bereits eine trigonometrische Abhängigkeit zwischen den einzelnen Stücken eines Dreiecks erkannt und untersucht sowie zur Lösung praktischer Probleme herangezogen. Das heißt, man konnte mit Hilfe der Trigonometrie alle Winkel und Seiten bestimmen, wenn einige Stücke gegeben waren und der Zusammenhang zwischen diesen linear war.

Das ist keineswegs immer der Fall. Die ersten trigonometrischen Aufgaben dieser Art hatten selbstverständlich rechtwinklige Dreiecke zum Gegenstand.

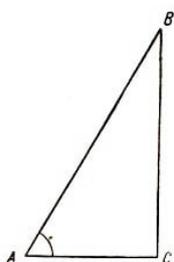


Abb. 92

Am Beginn der Entwicklung der ebenen Trigonometrie steht die Aufstellung einer Tabelle für die Sehnen spitzer Winkel. Immer ist es empirisch möglich, den Sinus eines spitzen Winkels mit Hilfe eines entsprechenden rechtwinkligen Dreiecks angenähert zu ermitteln (Abb. 92).

Wenn wir mit ein und derselben Maßeinheit die Kathete BC , die dem spitzen Winkel gegenüber liegt, und die Hypotenuse AB messen und das Verhältnis $BC : AB$ bilden, so haben wir damit einen Näherungswert für den Sinus des Winkels α . Aber schon damals begnügte man sich nicht mit dieser primitiven Methode.

So wissen wir aus der euklidischen Geometrie, dass über die Bestimmung des Verhältnisses zwischen der Seitenlänge eines regelmäßigen Vielecks und dem Radius des umbeschriebenen Kreises der Sinus auf rechnerischem Wege ermittelt wurde. Dieser

Weg ist zwar mühsamer, aber er ermöglicht es, die Ergebnisse mit einer vorher festgelegten Genauigkeit zu bestimmen.

Erinnern wir uns in diesem Zusammenhang der Bestimmung des Verhältnisses aus der Länge aller Seiten eines regelmäßigen Vielecks zum Radius des umschriebenen Kreises, die wir im Kapitel V kennengelernt haben. Diesmal wollen wir mit Hilfe verschiedener einbeschriebener Vielecke den Sinus einiger Winkel berechnen. Wir bilden zu diesem Zweck jeweils das Verhältnis der halben Vielecksseite zum Radius:

a) Abbildung 93a $a_3 = r\sqrt{3}$ $\sin 60^\circ = \frac{BC}{MB} = \frac{r\sqrt{3}}{2} : r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Abbildung 93b $a_6 = r$ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

c) Abbildung 93c $a_4 = r\sqrt{2}$ $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Abbildung 93d $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

e) Abbildung 93e $a_{10} = r\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

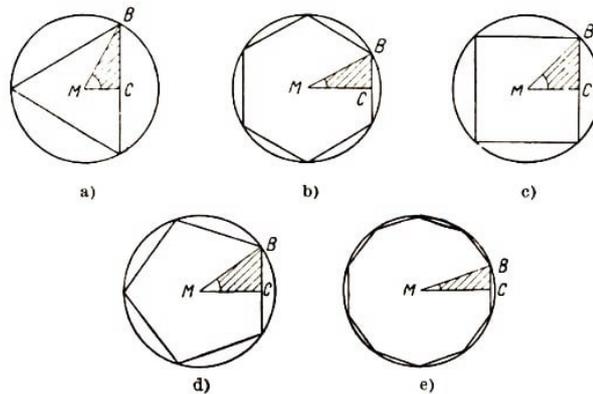


Abb. 93

Auf diese Weise können wir die Werte für $\sin 18^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 45^\circ$ und $\sin 60^\circ$ berechnen, da uns aus der Geometrie die Länge der Sehnen für Zentriwinkel von 36° , 60° , 72° , 90° und 120° bekannt ist.



Claudius Ptolemeios

Wie können wir nun die Länge der Sehnen berechnen, die anderen Winkeln entsprechen? Gelingt es, hierfür einen Weg zu finden, so lässt sich eine Tafel für die Sinuswerte aufstellen.

Hipparch vollbrachte diese Arbeit als erster. Wie er seine Tabellen der Sehnen berechnete, ist uns leider unbekannt. Wir können uns lediglich auf einen Bericht über Hipparch berufen, der in dem Buch 'Almagest' von Ptolemeios zu finden ist.

Der Astronom und Mathematiker Claudius Ptolemeios lebte bedeutend später als Hipparch, nämlich im 2. Jahrhundert. Er ist uns als Begründer einer Theorie der Bewegung aller Himmelskörper bekannt, die über viele Jahrhunderte bis zur Zeit des Kopernikus

als die einzig richtige galt.

Es ist verständlich, dass bei der Aufstellung dieser Theorie und bei deren häufiger Verbesserung viele astronomische Beobachtungen herangezogen werden mussten. Hierbei traten Berechnungen in vielfältigster Form auf, denen trigonometrische Rechenmethoden zugrunde lagen.

Der Almagest von Ptolemeios enthielt die Tabellen des Hipparch in weit besserer Form, als jener sie auf seine Art aufgestellt haben konnte. Aber auf diesem Wege erhielten wir davon Kenntnis, wie Hipparch und Ptolemeios die Tabellen der Sehnen zusammengestellt haben.

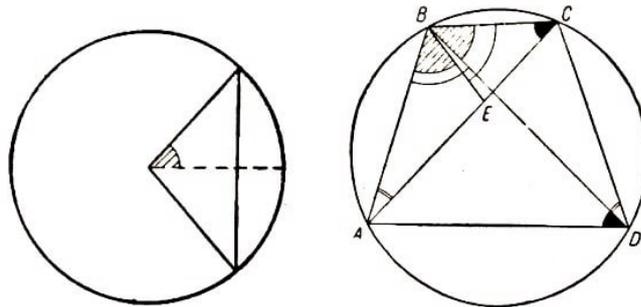


Abb. 95 und 96

Die Tabelle der Sehnen von Ptolemeios gibt das Verhältnis zwischen der Länge der Sehne, die bestimmte Kreisbögen aufspannen, zum Radius dieses Kreises an. Folglich müssen wir, um von der Tabelle des Ptolemeios zu unserer Sinustafel übergehen zu können, die Zahlen aus der Ptolemeischen Tabelle halbieren (Abb. 95).

Die Aufstellung dieser Tabelle der Sehnen von Ptolemeios basiert auf dem Satz des Ptolemeios (Abb. 96):

Wenn wir einem Viereck $ABCD$ einen Kreis umbeschreiben können, so ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den gegenüberliegenden Seiten:

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Für den Beweis dieses Satzes ziehen wir den Winkel ABE , der durch Konstruktion gleich dem Winkel CBD ist, hinzu. Es ist dann:

$$\triangle ABE \sim \triangle BCD$$

Folglich gilt auch:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \quad \text{und} \quad AB \cdot CD = BD \cdot AE \quad (1)$$

Entsprechend folgt aus $\triangle EBC \sim \triangle ABD$:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{AD} \quad \text{und} \quad BC \cdot AD = EC \cdot BD \quad (2)$$

Addieren wir die Gleichungen (1) und (2), so erhalten wir:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD(AE + EC) \quad \text{oder} \quad AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$$

Dieser Satz ermöglichte es Ptolemeios, zur Sehne zweier Bögen die Sehne ihrer Summe und ihrer Differenz zu ermitteln. Ferner konnte er damit zur Sehne eines Bogens die Sehne des halben Bogens ermitteln.

Wir wollen verfolgen, wie mit Hilfe des Satzes von Ptolemeios die Sehne zum Bogen BC ermittelt wird, indem man die Differenz der Bögen AB und AC darstellt, wobei die Sehnen, die die Bögen AB und AC verbinden, gegeben sein müssen (Abb. 97).

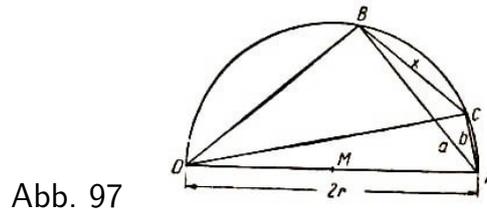


Abb. 97

Gegeben sei $AB = a$; $AC = b$ und $AD = 2r$. Gesucht wird $BC = x$. Nach dem Satz von Ptolemeios gilt dann:

$$a \cdot DC = x \cdot 2r + b \cdot BD$$

und hieraus erhalten wir, wenn wir nach x auflösen:

$$x = \frac{a \cdot DC - b \cdot BD}{2r}$$

Wir bestimmen DC und BD aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und ABD :

$$DC = \sqrt{4r^2 - b^2} \quad \text{und} \quad BD = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$x = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r} \quad (3)$$

Einige Werte werden zusammengesetzt, indem aus den Sehnen zweier gegebener Bögen die Sehne der Summe dieser Bögen bestimmt wird (Abb. 98)

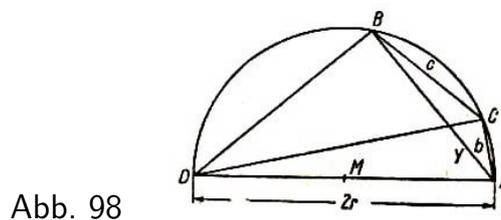


Abb. 98

Es sei $AC = b$; $BC = c$ und $AD = 2r$. Gesucht wird $AB = y$. Nach dem Satz von Ptolemeios gilt:

$$y \cdot DC = b \cdot BD + c \cdot 2r$$

Aus den Dreiecken ADC und ABD bestimmen wir DC und BD :

$$DC = \sqrt{4r^2 - b^2} \quad \text{und} \quad BD = \sqrt{4r^2 - y^2}$$

Damit erhalten wir für die Bestimmung von y folgende Relation:

$$y\sqrt{4r^2 - b^2} = b\sqrt{4r^2 - y^2} + 2cr$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} b\sqrt{4r^2 - y^2} &= y\sqrt{4r^2 - b^2} - 2cr \\ 4b^2r^2 - b^2y^2 &= 4r^2y^2 - b^2y^2 + 4cry\sqrt{4r^2 - b^2} + 4c^2r^2 \\ ry^2 - c\sqrt{4r^2 - b^2} \cdot y + r(c^2 - b^2) &= 0 \\ y &= \frac{c\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - c^2}}{2r} \end{aligned} \quad (4)$$

Schließlich können wir noch die Sehne des halben Bogens aus der Sehne des ganzen Bogens berechnen (Abb. 99).

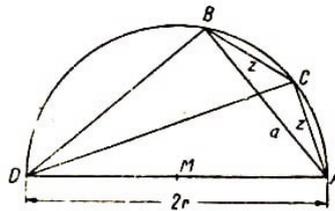


Abb. 99

Gegeben sei: $AB = a$; $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ und $AD = 2r$. Gesucht wird $AC = BC = z$. Nach dem Satz von Ptolemeios ist

$$a \cdot DC = z \cdot BD + z \cdot 2r$$

Aus den Dreiecken ACD und ABD erhalten wir

$$DC = \sqrt{4r^2 - z^2} \quad \text{und} \quad BD = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

und somit

$$a \cdot \sqrt{4r^2 - z^2} = z(\sqrt{4r^2 - a^2} + 2r)$$

Diese Gleichung lösen wir nach z auf:

$$\begin{aligned} 4a^2r^2 - a^2z^2 &= z^2(4r^2 - a^2 + 4r\sqrt{4r^2 - a^2} + 4r^2) \\ z^2(8r^2 + 4r\sqrt{4r^2 - a^2}) &= 4a^2r^2 \\ 4rz^2(2r + \sqrt{4r^2 - a^2}) &= 4a^2r^2 \\ z &= \frac{a\sqrt{r}}{\sqrt{2r + \sqrt{4r^2 - a^2}}} \end{aligned} \quad (5)$$

Auf diese Weise geben die Formeln (3), (4) und (5) die Möglichkeit, aus der Sehne zweier Bögen unmittelbar die Sehne der Summe und der Differenz dieser Bögen zu bestimmen, und aus der Sehne eines gegebenen Bogens die Sehne des halben Bogens

zu ermitteln.²⁰

Ptolemeios konnte beispielsweise die Sehnen der Bögen von 72° und 60° und ermittelte hieraus die Sehne des Bogens von 12° . Mehrmaliges Halbieren dieses Bogens erlaubte es ihm, die Sehnen der Bögen von 6° , 3° , $1\frac{1}{2}^\circ$, $\frac{3}{4}^\circ$ zu berechnen.

Ptolemeios stellte sich aber das Ziel, eine Tabelle der Sehnen für Bögen aufzustellen, die um $\frac{1}{2}^\circ$ ansteigt. Dafür war es notwendig, dass er die Sehne des Bogens von 1° kannte. Er löste auch diese Aufgabe, und zwar durch folgendes Verfahren.

Zuerst wies Ptolemeios nach, dass das Verhältnis zwischen den Längen der Sehnen und den Längen ihrer Bögen bei wachsendem Bogen kleiner wird (Abb. 100):

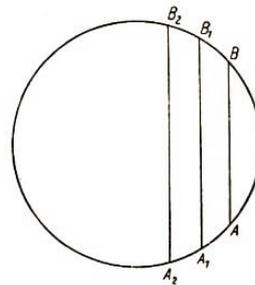


Abb. 100

$$\frac{AB}{\widehat{AB}} > \frac{A_1B_1}{\widehat{A_1B_1}} > \frac{A_2B_2}{\widehat{A_2B_2}}$$

Dann zeigte er die Richtigkeit folgender Ungleichung:

$$\frac{\text{Sehne } \frac{3}{4}^\circ}{\text{Bogen } \frac{3}{4}^\circ} > \frac{\text{Sehne } 1^\circ}{\text{Bogen } 1^\circ} > \frac{\text{Sehne } \frac{3}{2}^\circ}{\text{Bogen } \frac{3}{2}^\circ}$$

Aus dieser Ungleichung folgt erstens:

$$\frac{\text{Sehne } 1^\circ}{\text{Sehne } \frac{3}{4}^\circ} < \frac{\text{Bogen } 1^\circ}{\text{Bogen } \frac{3}{4}^\circ} = \frac{4}{3}$$

und zweitens:

$$\frac{\text{Sehne } 1^\circ}{\text{Sehne } \frac{3}{2}^\circ} > \frac{\text{Bogen } 1^\circ}{\text{Bogen } \frac{3}{2}^\circ} = \frac{2}{3}$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt schließlich:

$$\frac{2}{3}\text{Sehne } \frac{3}{2}^\circ < \text{Sehne } 1^\circ < \frac{4}{3}\text{Sehne } \frac{3}{4}^\circ$$

Die Längen für die Sehnen von $\frac{3}{2}^\circ$ und $\frac{3}{4}^\circ$ waren Ptolemeios bekannt, so dass er die Möglichkeit hatte, $\frac{2}{3}$ Sehne $\frac{3}{2}^\circ$ und $\frac{4}{3}$ Sehne $\frac{3}{4}^\circ$ zu berechnen. Die nach diesem Verfahren ermittelten Ergebnisse zeigen, dass die beiden Resultate sehr nahe beieinander liegen.

Die hieraus für 60 verschiedene Radien berechneten Werte waren richtig. Folglich hatten

²⁰Bei der Messung dieser Sehnen ist vorausgesetzt, dass dafür dieselbe Einheit genommen wird wie für den Radius des Kreises.

auch die auf der Länge der Sehne für einen Zentriwinkel von 1° basierenden weiteren Werte ein für die praktischen Bedürfnisse jener Zeit genügende Genauigkeit.

Aus der Kenntnis der Sehne für die Zentriwinkel von $\frac{3}{2}^\circ$ und 1° ermittelte Ptolemeios die Sehne bezüglich $\frac{1}{2}^\circ$ und erhielt unter Anwendung der Formel (4) auf dieselbe Weise die Größen der Sehnen für die Zentriwinkel 1° ; $1,5^\circ$; 2° ; $2,5^\circ$ und so weiter bis einschließlich 180° .

So erfolgte also die Aufstellung der ersten uns überlieferten trigonometrischen Tafel. Wieviel Mühe die Berechnung dieser Tafel erforderte, können wir uns vorstellen, wenn wir uns nochmals die Formeln (3), (4) und (5) ansehen und berücksichtigen, dass es in der damaligen Zeit noch keinerlei Vereinfachungen in der Schreibweise und Ausführung des numerischen Rechnens gab.

7.3 Die Beiträge der Inder und der Völker Mittelasiens und Transkaukasiens für die Entwicklung der Trigonometrie

Die Inder trugen besonders in der Periode vom 5. bis zum 12. Jahrhundert bedeutend zur Entwicklung der Geometrie bei. Aber auch sie trennten nicht die Trigonometrie von der Astronomie.

Obgleich ihnen keine besseren Rechenhilfsmittel zur Verfügung standen als den Griechen, berechneten sie genauere trigonometrische Tafeln als die des Ptolemeios. Bei der Aufstellung ihrer Tabellen teilten sie den Durchmesser des Kreises nicht in 120 gleiche Teile, wie Ptolemeios es tat, sondern in 6876 Teile.

Wie kamen wohl die Inder gerade auf diese Zahl?

Zur Beantwortung dieser Frage erinnern wir uns der Tatsache, dass die Inder zur Kreisberechnung den Wert $\pi = 3,1416$ verwendeten. Wenn wir nun den Kreisumfang in $360 \cdot 60$ gleiche Teile zerlegen und ein derartiges Teilchen mit b bezeichnen, so erhalten wir die folgende Proportion:

$$\frac{d}{b} = \frac{360 \cdot 60}{3,1416}$$

Führen wir die Division auf der rechten Seite der Proportion aus, so erhalten wir eine Zahl, die annähernd gleich 6876 ist. Allein dieser Umstand vergrößert schon die Genauigkeit der von den Indem aufgestellten Tabellen.

Die Inder stellten als erste diese Tabellen nicht für die Sehnen, sondern für die Halbsehnen auf. Sie führten damit den Sinus eines spitzen Winkels in die Trigonometrie ein. Außer den Werten des Sinus wurden von ihnen auch die Werte des Kosinus und die der Differenz $1 - \cos \alpha$ für Berechnungen benutzt.

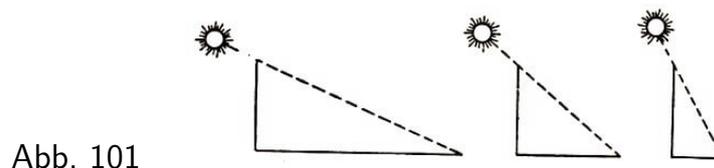
Den Indern waren auch bereits einige trigonometrische Relationen bekannt. Es waren dies die Gleichungen:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad , \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad , \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Mit Hilfe der ersten drei dieser Relationen konnte das Aufstellen der Tabellen beschleunigt und präzisiert werden. Die letzteren gaben Bhaskara (12. Jahrh.) die Möglichkeit, bei der Berechnung der Werte seiner Tafel anders als Ptolemeios vorzugehen.

Im 13. Jahrhundert eigneten sich die Araber die wichtigsten trigonometrischen Erkenntnisse der Inder an, nachdem bereits im 9. Jahrhundert der usbekische Mathematiker Muhammed ibn Alchwarizmi die indischen und die griechischen trigonometrischen Wertetabellen verglichen und überarbeitet hatte.



Ebenfalls im 9. Jahrhundert führte der Astronom Al Battani neue Quotienten ein, die er als "Schatten" bezeichnete. Er untersuchte jeweils das Verhältnis der Höhe zur Länge ihres Schattens für verschiedene Objekte bei verschiedenem Stand der Sonne (Abb. 101).

Heute ist uns klar, dass Al Battani damit den Begriff des Tangens in die Trigonometrie einführte.

Im darauffolgenden 10. Jahrhundert zeigte der arabische Geometer Abul Wafa eine Methode zur Berechnung der Sinustabelle für von $10'$ zu $10'$ fortschreitende Winkel. Er selber stellte die erste Tabelle für den Tangens auf und führte darüber hinaus den Sekans und Kosekans ein.



Nasir Eddin Tusi

Schließlich fasste Nasir Eddin Tusi im 13. Jahrhundert in seinem Werk 'Abhandlungen über vollständige Vierecke' alles bis dahin über die Trigonometrie Bekannte zusammen und betrachtete die Trigonometrie als selbständige Disziplin der Mathematik.

Wir finden in seinem Werk nicht nur geometrische Konstruktionen, sondern auch algebraische Relationen aus der Trigonometrie. Er bewies hier als erster Sätze über den Sinus und den Tangens und ging auch zur Lösung von Aufgaben im schiefwinkligen Dreieck über.

Auf diese Weise entwickelte sich die praktische Trigonometrie weiter, indem sie half, Aufgaben aus der Astronomie und der Geographie zu lösen.

Wir sind den Völkern des nahen Ostens insbesondere für die Einführung der Gleichungen, die wir heute unter dem Begriff "Zusammenhänge zwischen den einzelnen Winkelfunktionen" zusammenfassen, zu Dank verpflichtet. Sie entwickelten zwar nicht die Trigonometrie im heutigen Sinne des Wortes, das heißt, sie untersuchten nicht wie wir trigonometrische Funktionen. Ihr Beitrag für die Weiterentwicklung dieses Zweiges der Mathematik steht jedoch außer Zweifel.

7.4 Die Trigonometrie nimmt allmählich moderne Form und Gestalt an

Die erste wissenschaftliche Darlegung der ebenen Trigonometrie erfolgte in einem Werk von Johann Müller 'Über Dreiecke verschiedener Art'. Müller ist in der Mathematik mehr unter dem Namen Regiomontanus (1436-1476) bekannt.

Er war ein großer Kenner der griechischen und orientalischen Autoren.

In seinem Werk betrachtete Müller, wie auch schon Nasir Eddin Tusi, die Trigonometrie als spezielles Gebiet der Mathematik, unabhängig von der Astronomie. Er teilte einige Methoden für die Lösung von Aufgaben im rechtwinkligen und im spitzwinkligen Dreieck mit und gab eine Tabelle des Sinus an, die eine Genauigkeit von 0,0000001 hatte.²¹ Dafür musste Müller den Radius des Kreises gleich 10000000 nehmen.

Die Trigonometrie erlangte ihren modernen Charakter erst im 18. Jahrhundert durch die Arbeiten des hervorragenden Mitgliedes der Petersburger Akademie Leonhard Euler (1707-1783), eines Zeitgenossen von Lomonossow.

Bis zu Euler waren Sinus, Kosinus und Tangens nichts anderes als Abschnitte von gegebenen Kreisen, die mit anderen Kreisbögen in Verbindung gebracht wurden. Euler betrachtete als erster das Verhältnis dieser Abschnitte zum Radius. Dieses Verhältnis führte er als trigonometrische Funktion in die Mathematik ein, gleichberechtigt zu anderen bekannten Funktionen.

"Soviel ich weiß, habe ich zum ersten Mal den Sinus und den Kosinus eines Winkels so in die Algebra eingeführt, dass man mit ihnen verfahren kann wie mit anderen Größen und dass man mit ihnen ungehindert jede beliebige Art von Operation durchführen kann", schrieb Euler.

Wenigen wird bekannt sein, dass Euler durch Verbindung bestimmter trigonometrischer Funktionen neue charakteristische Funktionen (die sogenannten Hyperbelfunktionen) fand, die uns von den ursprünglichen weit entfernt zu sein scheinen. Er gab uns die trigonometrischen Funktionen in der berühmten Form:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

wobei e die nach Euler benannte irrationale reelle Zahl

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182$$

und i die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ sind.

Euler verdanken wir die analytische Behandlung der Trigonometrie, durch die die Sätze der Trigonometrie von der speziellen zeichnerischen Darstellung gelöst und durch Worte oder in Form von Proportionen angegeben werden konnten. Er zeigte, wie man alle komplizierten Formeln der Trigonometrie mit Hilfe kühner und eleganter Umformungen

²¹Obwohl zu jener Zeit die Dezimalbrüche in Europa noch nicht bekannt waren, hat sie Müller praktisch gebraucht, indem er den Radius zu 10^7 nahm.

aus wenigen Ausgangsrelationen aufbauen kann. Dies bedeutete eine wesentliche Bereicherung des Vorrates an bekannten Relationen.

Euler entschied auch endgültig die Frage nach der Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen in allen Quadranten, woraus sich die Formeln zur Angabe des allgemeinen Falles ergaben.

Die Einführung der neuen trigonometrischen Funktionen in die Mathematik warf die Frage auf, ob man auch diese Funktionen zweckmäßigerweise durch eine unendliche Reihe darstellen kann. Im Laufe der Entwicklung zeigte sich, dass folgende Darstellungen möglich sind:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad \text{und}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Diese unendlichen Reihen ermöglichen eine bedeutende Erleichterung bei der Berechnung von Tafeln trigonometrischer Werte und lassen jeden gewünschten Grad an Genauigkeit zu.

Wenn wir mit Hilfe dieser unendlichen Reihen den Sinus oder den Kosinus irgendeines Bogens berechnen wollen, so müssen wir daran denken, dass x in diesen Formeln eine Bogenlänge ist, die im Bogenmaß ausgedrückt werden muss.

Wollen wir beispielsweise den Sinus des Bogens mit der Länge 1 nach der ersten Reihe mit einer Genauigkeit von 0,0001 berechnen, so ersetzen wir x durch 1. Beschränken wir uns auf die ersten vier Glieder, so erhalten wir:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \approx 0,84147$$

Der analytische Aufbau einer Theorie der trigonometrischen Funktionen, der von Euler begonnen werden war, fand seinen Abschluss in den Arbeiten von Lobatschewski, Gauß, Cauchy, Fourier und anderen.

"Geometrische Betrachtungen waren", so schrieb Lobatschewski, "von Beginn der Trigonometrie an so lange notwendig, wie die Trigonometrie nicht die später entdeckten speziellen Eigenschaften trigonometrischer Funktionen enthielt. Von hier an wurde die Trigonometrie völlig selbständig von der Geometrie und hat seither die Analysis bereichert."

7.5 Leonhard Euler

Leonhard Euler wurde am 4. April 1707 in der Nähe von Basel (Schweiz) geboren. Sein Vater war Landpfarrer, der die Mathematik kannte und liebte. In seinem Vater hatte Leonhard auch seinen ersten Lehrer für Mathematik. Damit er seine Mittelschulbildung abschließen konnte, schickte ihn sein Vater nach Basel, wo er auch die oberen Klassen des Gymnasiums besuchte.

Bereits als Schüler des Gymnasiums nahm Leonhard regelmäßig an mathematischen Vorlesungen der Universität teil, wo der berühmte Professor Johann Bernoulli las.

Dieser wurde bald auf das Talent seines jungen Schülers aufmerksam und beschäftigte ihn mit besonderen Arbeiten. So schlug er ihm vor, selbständig die Werke berühmter Autoren zu studieren. Auftretende Schwierigkeiten besprach der Professor regelmäßig mit ihm und erreichte nach Eulers Worten auf diese Weise, dass mit der Behebung eines Hindernisses gleichzeitig auch zehn andere verschwanden.

Euler bezeichnete diese Form der Unterweisung als die allerbeste Methode, um in den mathematischen Wissenschaften zu guten Fortschritten zu kommen.

Im Jahre 1725 legte der sechzehnjährige EULER seine Prüfung ab und erhielt den Grad des Magisters der Künste. Nun begann er in Übereinstimmung mit seinem Vater, Theologie und alte Sprachen zu studieren. Bald aber ging er wieder zu der interessanten Beschäftigung mit der Mathematik unter Anleitung von J. Bernoulli über. In dieser Zeit schloss Euler mit den Söhnen Bernoullis, Nikolaus und Daniel, Freundschaft.

Im Jahre 1725 wurde in Petersburg die Akademie der Wissenschaften gegründet. Die jungen Brüder Nikolaus und Daniel waren dazu eingeladen worden und erhielten dort ihre Berufung zu Professoren. Sie bewegten dann Euler, sobald sich Gelegenheit bieten würde, ihrem Beispiel zu folgen.

Er war der erste Anwärter auf den Lehrstuhl für Physik in Basel. Als er durch einen unvorhergesehenen Umstand diesen Lehrstuhl nicht erhielt, nahm er die Einladung der Brüder Bernoulli nach Petersburg an und bekam dort das Amt eines Adjunkten der Mathematik (Gehilfe des Professors) mit einem Einkommen von 300 Rubel im Jahr. Euler war zu dieser Zeit erst zwanzig Jahre alt und fuhr nur mit großen Bedenken aus seinem Heimatland, der Schweiz, nach Russland.

Schon bald nach seiner Ankunft in Petersburg wurde in den Berichten der Akademie ein Artikel von ihm veröffentlicht. Euler nahm unter den bedeutendsten Mathematikern seiner Zeit einen ehrenvollen Platz ein. Gerade seine Zeit fiel zusammen mit der großen Entwicklungsperiode der Mathematik, die durch die Erfindung der Infinitesimalrechnung eingeleitet wurde.

Die Akademie war zu jener Zeit nicht nur Stätte wissenschaftlicher Arbeit, von ihr mussten auch feierliche Oden anlässlich der Siege und der Namenstage des Zaren verfasst werden. So musste man sich dort nicht nur mit der Prophezeiung astronomischer Erscheinungen und mit der Wettervorhersage beschäftigen, sondern auch mit dem Stellen von Horoskopen und mit allen "Regeln" der Astrologie auseinandersetzen.

Eine der wichtigsten Aufgaben war auch die Vorbereitung und Durchführung von "Leuchtfeuern", Illuminationen und anderen Belustigungen.

Das Verhältnis zwischen ernsthafter Arbeit und höfischen Verpflichtungen war nicht immer zufriedenstellend. So gab es nicht nur Reibereien mit den Professoren, sondern auch mit dem Minister, dem Euler es in keiner Weise recht machen konnte. Es ist daher nicht verwunderlich, dass Euler eine Einladung des preußischen Königs Friedrich II. nach Berlin annahm und im Jahre 1741 nach Berlin fuhr, nachdem er sechzehn Jahre in Russland gelebt hatte.

Auch während des Aufenthaltes in Berlin blieb Euler weiterhin Mitglied der Peters-

burger Akademie. Er war dies nicht nur passiv, sondern er blieb für diese Akademie wirksam, indem er fortlaufend kleinere und größere Arbeiten einreichte, beispielsweise seine Meerwissenschaft, Differentialrechnung und viele andere.

Es vergingen 25 Jahre. In dieser Zeit schrieb Euler Hunderte von Artikeln über Gebiete der reinen und der angewandten Mathematik und verfasste auch andere bedeutende Arbeiten. Es seien nur einige genannt: Einführung in die Analysis, Variationsrechnung, Theorie des Mondes.

Im Jahre 1766 lud Katharina II. Euler ein, "auf beliebige Zeit" nach Petersburg zurückzukommen. Friedrich II. gab dem Drängen Katharinas nach und entließ ihn und seine Söhne nach Russland.

Euler war der größte Mathematiker seiner Zeit. Nachdem er im Jahre 1736 durch Überanstrengung bei seinen Berechnungen das Augenlicht auf einem Auge verloren hatte, erblindete er im Jahre 1766 vollständig. Dennoch stellte er seine wissenschaftliche Arbeit nicht ein, sondern setzte sie mit unverminderter Stärke bis zu seinem Tode fort. Von 1766 bis 1783 diktierte er Hunderte von Artikeln und zehn gewaltige Bände über die verschiedensten Fragen der reinen und angewandten Mathematik.

Am 18. September 1783 scherzte er in einer Arbeitspause mit seinem fünfjährigen Enkel, als ihm plötzlich übel wurde und er, wie es Kondor ausdrückte "aufhörte zu rechnen und zu leben".

Wie wir sehen, machten nicht Äußerlichkeiten das Leben Eulers reich, sondern sein unvergleichbares und wundervolles Schaffen. Aus der Feder Eulers stammen 865 Arbeiten, in denen gleichermaßen praktische Fragen als auch Fragen der reinen Mathematik behandelt werden. Besonders in der Behandlung von Fragen der praktischen Anwendung war er äußerst vielseitig.

Dies übertrug sich auch auf die Mathematik, wo er mit großem Erfolg auf dem Gebiet der Differential- und Integralrechnung, der Differentialgleichungen und der analytischen Geometrie arbeitete. Desgleichen hat er viel zur weiteren Entwicklung der Algebra, der Differentialgeometrie und der sphärischen Trigonometrie beigetragen. Darüber hinaus schuf er einige neue Disziplinen in der Mathematik.

Gauß, der wohl bedeutendste Mathematiker des 19. Jahrhunderts, wies darauf hin, dass das Studium der Eulerschen Arbeiten immer der beste Weg sein wird, um Kenntnisse in der Mathematik zu erwerben.

Über Euler sagte auch der französische Mathematiker und Astronom Laplace: "Er ist unser größter Lehrer". Tatsächlich, durch die Arbeiten Eulers wurde eine Generation tüchtiger junger Mathematiker erzogen. Auch heute hat er uns noch viel zu lehren.

7.6 Der Eulersche Satz und seine Anwendung in der Theorie der regelmäßigen Polyeder

Wir wollen uns hier mit einem Satz bekannt machen, der in der Stereometrie große Bedeutung hat. Er ist in der Mathematik unter der Bezeichnung Eulerscher Satz bekannt.

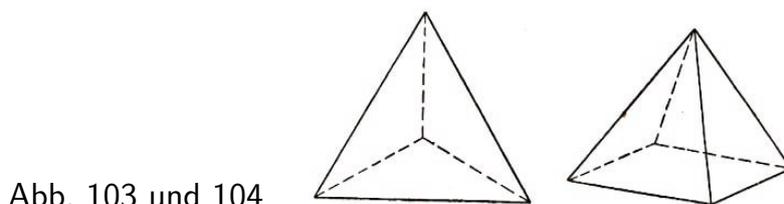
In einem beliebigen regelmäßigen konvexen Polyeder gilt die Wechselbeziehung:

$$E + F - K = 2 \quad (1)$$

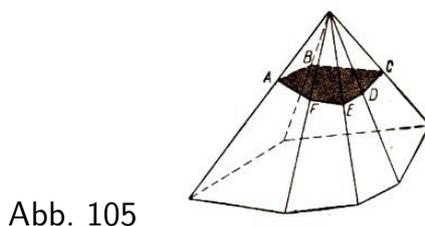
In dieser Gleichung bedeuten: E die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten des Polyeders.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion.

1. Wir nehmen die Behauptung des Satzes als Hypothese und prüfen ihre Gültigkeit für das Vierfläch (Abb. 103) und das Fünfläch (Abb. 104). Die Hypothese erweist sich hier als richtig.



2. Wir nehmen an, dass die Beziehung (1) für ein Polyeder mit n Flächen richtig ist, und untersuchen ihre Gültigkeit für den Übergang zu einem Vielfläch mit $n+1$ Flächen. Damit wir aus einem Vielfläch mit n Flächen ein solches mit $n+1$ Flächen erhalten, schneiden wir vom ersteren einen Teil durch eine Ebene ab. Dabei legen wir die Ebene so, dass sie alle Kanten, aus denen die Ecke gebildet wird, schneidet (Abb. 105).



Damit vergrößern wir die Zahl F um eine weitere Fläche ($ABCDEF$). Es mögen in der Ecke M insgesamt k Kanten aufeinanderstoßen. Durch die Fläche $ABCDEF$ erhalten wir k neue Ecken und verlieren eine (die Ecke M). Dadurch wird die Anzahl aller Ecken des neuen Vielflachs gleich

$$E + k - 1$$

Die Anzahl der Kanten vermehrt sich um k und wird so gleich

$$K + k$$

Wir bilden die Differenz zwischen der Summe der Anzahl aller Ecken und Flächen des neuen Vielflachs mit $n+1$ Flächen und der Anzahl der Kanten:

$$(E + k - 1) + (F + 1) - (K + k) = E + k - 1 + F + 1 - K - k = E + F - K = 2$$

Wir sehen also, dass die Relation zwischen den Ecken, Flächen und Kanten, die für ein Vielfläch mit n Flächen Gültigkeit hatte, auch richtig bleibt, wenn wir zu einem Vielfläch mit $n+1$ Flächen übergehen.

3. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion können wir nun bestätigen, dass die Relation

$$E + F - K = 2$$

für jedes beliebige konvexe Vielflach Gültigkeit hat.

Der Eulersche Satz ermöglicht es, die Anzahl der Flächen eines regelmäßigen konvexen Polyeders in Abhängigkeit von der Gestalt der Flächen zu bestimmen.

Aus der Geometrie ist uns bekannt, dass es nur fünf Formen regelmäßiger konvexer Polyeder gibt. Die Flächen derselben können entweder gleichseitige Dreiecke oder Quadrate oder regelmäßige Fünfecke sein.

a) Es mögen an der Ecke eines Polyeders gleichseitige Dreiecke aufeinandertreffen, die eine k -flächige räumliche Ecke bilden mögen. Es kann k in diesem Fall folgende Werte annehmen: 3, 4 oder 5, andere sind nicht möglich.²² Wir wollen die Anzahl der Flächen dieser Polyeder ermitteln. .

Dazu nehmen wir an, dass das Polyeder n Flächen besitzt, d.h., es sei $F = n$. Dann ist die Anzahl der Ecken $E = \frac{3n}{k}$ und die der Kanten $K = \frac{3n}{2}$. Setzen wir nun in die Gleichung des Eulerschen Satzes ein, so erhalten wir:

$$n + \frac{3n}{k} = \frac{3n}{2} + 2$$

Lösen wir diese Gleichung nach n auf, so ergibt sich:

$$n = \frac{4k}{6 - k}$$

Wenn nun $k = 3$ ist, das heißt, wenn in einer Ecke des Polyeders drei Dreiecke aufeinanderstoßen, so gilt:

$$n = \frac{4 \cdot 3}{6 - 3} = 4$$

Das Vielflach ist also ein Vierflach. Wenn $k = 4$ ist, so folgt:

$$n = \frac{4 \cdot 4}{6 - 4} = 8$$

und wenn $k = 5$ ist, so folgt:

$$n = \frac{4 \cdot 5}{6 - 5} = 20$$

Folglich können regelmäßige Polyeder, deren Flächen die Form eines regelmäßigen gleichseitigen Dreiecks haben, entweder Vierflache (Tetraeder) oder Achtfache (Oktaeder) oder Zwanzigflache (Ikosaeder) sein (Abb. 106, 107 und 108).

²²Dies ergibt sich aus folgendem Satz: Die Summe aller Flächenwinkel an einer räumlichen Ecke muss kleiner als vier Rechte sein.

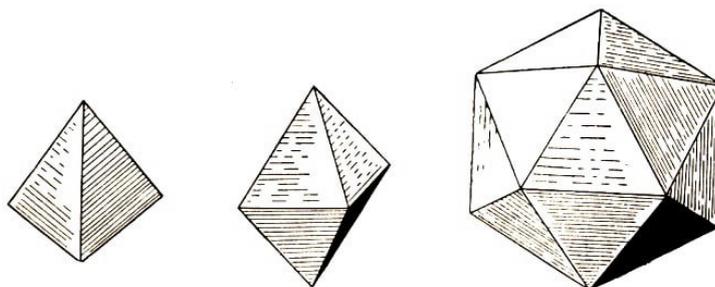


Abb. 106-108

b) Es mögen nun an der Ecke des Vielflachs Quadrate aufeinanderstoßen. Die Anzahl derselben kann nach dem angeführten Satz nur 3 sein. Wir ermitteln die Anzahl der Flächen.

Dazu nehmen wir wiederum an, dass sie gleich n sei. Dann ist

$$F = n; \quad E = \frac{4n}{3}; \quad K = \frac{4n}{2} = 2n$$

Nach dem Eulersche Satz ist dann

$$n + \frac{4n}{3} = 2n + 2$$

und somit $n = 6$.

Folglich kann ein regelmäßiges Vielflach, dessen Flächen die Form eines Quadrats haben, nur 6 Flächen besitzen. Das ist aber das Hexaeder oder der Würfel (Abb. 109).

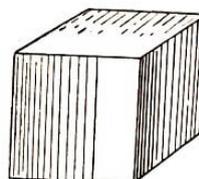


Abb. 109

c) Es mögen jetzt in der Ecke eines Vielflachs regelmäßige Fünfecke aufeinandertreffen. Dann kann die Anzahl derselben nach dem bereits mehrfach erwähnten Satz nur 3 sein. Ermitteln wir auch hier die Anzahl der Flächen.

Wir nehmen wiederum an, dass sie gleich n sei. Dann ist

$$F = n; \quad E = \frac{5n}{3}; \quad K = \frac{5n}{2}$$

Nach dem Eulerschen Satz Satz ist dann

$$n + \frac{5n}{3} = \frac{5n}{2} + 2$$

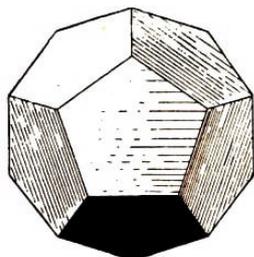


Abb. 110

und somit $n = 12$. Folglich ist das regelmäßige Vielflach, dessen Flächen die Form regelmäßiger Fünfecke haben, das Zwölfflach (Dodekaeder), das in Abbildung 110 dargestellt wird.

Ein Trugschluss

Behauptung: $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

Beweis: Es ist richtig, dass gilt:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} &= \sin \frac{\pi}{6} \\ \lg \sin \frac{\pi}{6} &= \lg \sin \frac{\pi}{6} \\ 2 \lg \sin \frac{\pi}{6} &> \lg \sin \frac{\pi}{6} \\ \lg \sin^2 \frac{\pi}{6} &> \lg \sin \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Wir gehen nun von den Logarithmen zu den Zahlen über

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} > \sin \frac{\pi}{6}$$

Nun ist aber $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, folglich

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

Wo steckt der Fehler?

7.7 Tabelle der von Euler eingeführten mathematischen Symbole

An viele mathematische Symbole sind wir so sehr gewöhnt, dass wir gar nicht mehr die Frage danach aufwerfen, wer sie in die Mathematik eingeführt hat und wer als ihr Erfinder bezeichnet werden kann.

Weil Euler viele Verdienste für die Aufstellung und Einführung der heutigen mathematischen Symbole gebühren, so wollen wir hier nicht vergessen, auch seiner Arbeit auf diesem Gebiet zu gedenken. In der folgenden Tabelle werden Symbole aufgeführt, die Euler in die Mathematik eingeführt hat:

Symbol	Bedeutung des Symbols	Jahr
π	Verhältnis der Länge des Kreisumfangs zum Durchmesser	1736
e	Basis der natürlichen Logarithmen	1736
i	Quadratwurzel aus -1	1777
\sin	Sinus des Bogens	1748
\cos	Kosinus des Bogens	1748
\tan	Tangens des Bogens	1753
Σ	Summenzeichen	1755
Δx	Differenz $x_2 - x_1$ oder Zuwachs der Variablen x	1755
$f(x)$	Funktion des Argumentes x	1734
a, b, c	Seiten des Dreiecks	
α, β, γ	Winkel des Dreiecks, die den entsprechenden Seiten a, b, c gegenüberliegen	

Literatur

Crantz/Hauptmann: Ebene Trigonometrie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

Crantz/Hauptmann: Sphärische Trigonometrie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1956.

M. Miller: Stereometrie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

W. Heymann: Trigonometrie der Ebene. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1959.

8 Die Schwingungsbewegung und die Trigonometrie

"Die Physik und die Mathematik halfen sich einander und entwickelten sich häufig miteinander."
S.I. Wawilow

8.1 Die Mathematik dringt in Gebiete der Optik, der Akustik und der elektromagnetischen Erscheinungen ein

Dem Leser ist es sicher bekannt, welche große Bedeutung die Trigonometrie für die Lösung vieler praktischer Probleme hat. Unter diesen Problemen finden wir solche, wie die Bestimmung der Oberfläche und des Volumens eines Körpers in der Geometrie, die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Mechanik, die Ermittlung der Entfernungen unzugänglicher Punkte in der Topographie, das Berechnen großer Abstände von Punkten auf der Erdoberfläche mittels der Methode der Triangulation, astronomische Berechnungen.

In diesem Kapitel wollen wir einige Anwendungen der Trigonometrie auf bedeutende Gebiete der Physik kennenlernen. Diese Anwendungen werden aus dem Schulunterricht in Mathematik wenig bekannt sein. Es handelt sich um die Beziehungen der Trigonometrie zu Fragen der Schwingungsbewegung.

Wenn sich ein Punkt einem beliebigen Raumpunkt periodisch nähert und sich wieder entfernt, so sagen wir, der Punkt schwingt. Es gibt verschiedenartige Schwingungen. Wir wollen uns vorerst nur folgenden Spezialfall ansehen.

Es möge sich auf einer Kreislinie mit dem Radius r , deren Zentrum im Ursprung eines Koordinatensystems liegt, ein Punkt P gleichmäßig bewegen. Dieser Punkt möge den vollen Kreis in der Zeit T (in Sekunden) durchlaufen (Abb. 111).

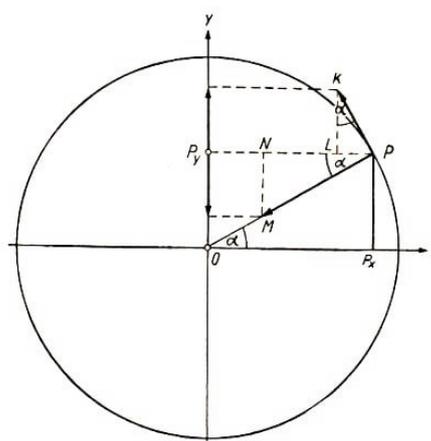


Abb. 111

Die Lage des Punktes auf der Kreislinie können wir mit Hilfe des Winkels α beschreiben, den der Radius $r = OP$ mit einer von uns festgelegten Ausgangsgeraden bildet. Der Einfachheit halber möge die Ausgangsgerade mit dem positiven Teil der x -Achse übereinstimmen. Den Winkel α müssen wir allerdings im Bogenmaß annehmen.

Die Winkelgeschwindigkeit ω des Punktes P , der in der Zeit T den Winkel 2π beschreibt, wird dann offensichtlich:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Diese Größe ω ist aber auch gleich dem Winkel, den der Radius r in einer Sekunde überstreicht. Entsprechend gilt, wenn der Radius r in t Sekunden den Winkel α beschreibt:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega t$$

Die Bahngeschwindigkeit v des Punktes P auf dem Kreisumfang wird bestimmt, indem die Länge des Kreisumfanges $2\pi r$ durch die Zeit, in der ein voller Umlauf erfolgt, dividiert wird, also:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = r \cdot \frac{2\pi}{T} = \omega \cdot r$$

Damit der Punkt P auf der Kreisbahn eine gleichmäßige Bewegung ausführt, ist es notwendig, dass auf ihn eine Zentripetalkraft einwirkt, die ihm eine Zentripetalbeschleunigung verleiht. Diese Zentripetalbeschleunigung ist bekanntlich:

$$a = \frac{v^2}{r} = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \omega^2 r$$

Wir werden aber nicht nur die Bewegung des Punktes P auf der Kreisbahn beobachten, sondern gleichzeitig auch die Translation der Projektion des Punktes auf die y -Achse, die wir mit P_y bezeichnen. Jede volle Kreisbewegung des Punktes P auf der Kreisbahn bedeutet für die Projektion P_y eine Schwingung auf der Ordinatenachse.

Wir wollen nun diese Schwingung eingehender untersuchen.

Die Verschiebung y der Projektion P_y erhalten wir aus dem Dreieck OPP_y zu

$$y = r \sin \alpha = r \sin \omega t \tag{1}$$

Diese Relation wird Schwingungsgleichung genannt.

Bei der gleichmäßigen Bewegung des Punktes P auf der Kreisbahn bleibt die Geschwindigkeit der Projektion P_y des Punktes P nicht konstant. Wir wollen die Geschwindigkeit nach einer beliebigen Zeit t bestimmen. Aus dem Dreieck PKL erhalten wir:

$$v_y = v \cos \alpha = \omega r \cos \omega t$$

Für die Leser, die mit dem Begriff der Ableitung einer Funktion vertraut sind, soll hier das Resultat der Differentiation angegeben werden. Bilden wir die erste Ableitung der Funktion $y = r \sin \omega t$ nach t , so erhalten wir wiederum

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cdot \cos \omega t \tag{2}$$

Die Beschleunigung der Schwingung des Punktes P_y können wir ebenfalls durch Projektion der Beschleunigung a des Punktes P auf die Ordinatenachse ermitteln. Aus dem Dreieck PNM erhalten wir

$$a_y = -a \sin \alpha = -\omega^2 r \sin \omega t \tag{3}$$

Das Minuszeichen muss hier deswegen gesetzt werden, weil die Richtung der Projektion im gegebenen Fall entgegengesetzt zur positiven Richtung der y -Achse ist. (Das Ergebnis können wir auch durch Bilden der zweiten Ableitung $\frac{d^2y}{dt^2}$ der Funktion $y = r \sin \omega t$ erhalten.)

Eine Schwingung der Art, wie sie der Punkt P auf der Ordinatenachse ausführt, ist eine einfache harmonische Schwingung. Diese bildet den wichtigsten Typ aller Arten von Schwingungen.

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass wir dieselbe einfache harmonische Schwingung erhalten würden, wenn wir den sich auf der Kreisbahn gleichmäßig bewegendem Punkt P nicht auf die vertikale, sondern auf die horizontale Achse projizieren.

Der Abstand des Schwingungspunktes vom Ursprung ist:

$$x = r \cos \omega t \quad (1')$$

Seine Geschwindigkeit ist

$$v_x = -\omega r \sin \omega t \quad (2')$$

Seine Beschleunigung ist

$$a_x = -\omega^2 r \cdot \cos \omega t \quad (3')$$

Die Arbeiten auf dem Gebiet der Wellenlehre haben eine große Bedeutung, da viele Erscheinungen in unserer Umwelt auf Wellen beruhen. Bereits einfache Versuche können uns davon überzeugen, dass alle Schallerreger (beispielsweise Saiten und Stimmgabeln) schwingende Bewegungen ausführen, wenn sie Schall aussenden.

Die Schallquelle bewirkt eine wechselnde Verdichtung und Verdünnung der Luft. Die verdichtete Luftschicht drückt auf die benachbarte Luftschicht und diese wiederum auf die nächstfolgende und so weiter. Derartige Verdichtungen gehen, von der Schallquelle beginnend, nach allen Richtungen. Schallwellen sind Längswellen. Das heißt, die einzelnen Partikelchen werden längs der Ausbreitungsrichtung der Schallwelle bewegt (Longitudinalschwingungen).

Es gibt auch Wellen, bei denen die Teilchen quer zur Ausbreitungsrichtung der Wellen schwingen (Transversalschwingungen).

Hochfrequente Wechselströme, durch Leitungen auf einen Antennenkreis übertragen, bilden dort elektrische und magnetische Felder, deren Feldstärke sich in jedem Punkt zeitlich verändert. Die zeitliche Änderung der Felder bleibt nicht auf den Raum um die Sendeantenne beschränkt, sondern breitet sich mit der gewaltigen Geschwindigkeit von $300000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ über den gesamten Raum aus. Man nennt derartige fortschreitende Änderungen elektromagnetische Wellen.

Elektromagnetische Wellen erfüllen das ganze Weltall. Radiowellen, Lichtwellen, sog. Wärmestrahlen, Röntgenstrahlen u.a. sind elektromagnetische Wellen. Ihre jeweilige Frequenz ist unterschiedlich, aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit haben sie gemeinsam.

Wenn wir diese wenigen Beispiele über Schwingungen und daraus resultierende Wellen

noch durch die Überlegung ergänzen, dass auch große Bauwerke, Brücken, schnellarbeitende Maschinen und viele andere Objekte beachtliche Schwingungen ausführen, so wird uns die Bedeutung der Wellenlehre für die Technik klar. In diesem Kapitel wollen wir grafische Darstellungen einfacher harmonischer Schwingungen untersuchen und wenden uns den folgenden Formeln zu.

$$y = r \sin \omega t \quad (1)$$

$$v_y = \omega r \cdot \cos \omega t \quad (2)$$

$$a_y = -\omega^2 r \sin \omega t \quad (3)$$

$$x = r \cos \omega t \quad (1')$$

$$v_x = -\omega r \sin \omega t \quad (2')$$

$$a_x = -\omega^2 r \cdot \cos \omega t \quad (3')$$

Die Formel (1) stellt den Abstand des schwingenden Punktes P_y vom Koordinatenursprung nach einer beliebigen Zeit t dar. Die Formel (2) bringt zum Ausdruck, dass sich die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes P_y mit der Zeit verändert. Sie erreicht den größten Wert in dem Moment, wenn ωt oder, was dasselbe ist, der Winkel α die Werte $k\pi$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$ annimmt. In diesem Moment geht der Punkt P_y durch den Koordinatenursprung.

Die Geschwindigkeit des Punktes P_y wird gleich 0, wenn $\omega t = \alpha = k\frac{\pi}{2}$ ist. In diesem Moment erreicht der Schwingungspunkt mit r den größten Abstand vom Koordinatenursprung. Schließlich sagt die Formel (3) aus, dass die Beschleunigung a des schwingenden Punktes P_y seiner Amplitude proportional ist.

Den größten Abstand des Punktes P_y vom Koordinatenursprung, d.h. die Größe des Radius r , nennt man Amplitude der Schwingung.

Die Zeit T , in der der Punkt P den ganzen Kreis und seine Projektion P_y den Durchmesser zweimal durchläuft, nennt man Periode der Schwingung. Analog liegen die Verhältnisse für x , v_x und a_x .

Den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ nennt man Phase der Schwingung.

Wenn wir zwei harmonische Schwingungen haben, so können wir sie nach Amplitude, Periode und Phase unterscheiden.

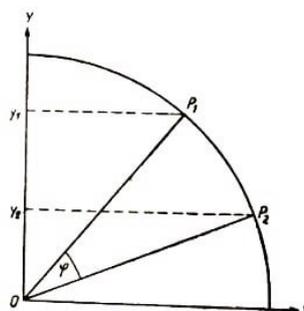


Abb. 112

Beim Schall und Licht bestimmt die Amplitude die Schallstärke bzw. die Helligkeit, während die Periode die Tonhöhe beziehungsweise die Farbe des Lichts bewirkt.

Wir nehmen an, dass uns die Schwingungen zweier Punkte P_1 und P_2 gegeben seien,

die zwar die gleiche Periode haben, bei denen aber der Punkt P_2 seine Schwingung zu einem anderen Zeitpunkt t_1 beginnt als der Punkt P_1 (Abb. 112). Zu dieser Zeit hat der Punkt P_1 schon die Phase

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t_1$$

durchlaufen.

Weil die Periode T der beiden Punkte gleich ist, so werden sich die Radien OP_1 und OP_2 mit gleicher Winkelgeschwindigkeit bewegen, und der Winkel φ zwischen ihnen bleibt konstant. Infolge dieser Tatsache wird die Phase des Punktes P_1 stets um den Wert φ größer sein als die Phase des Punktes P_2 , und unsere Schwingung kann dargestellt werden durch:

$$y_1 = r \sin \omega t \quad , \quad y_2 = r \sin(\omega t - \varphi)$$

Den Winkel φ nennt man Phasendifferenz der beiden Schwingungen.

Auf diese Weise kann das Gesetz der einfachen harmonischen Schwingung in seiner allgemeinsten Form wie folgt dargestellt werden:

$$y = r \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

8.2 Die grafische Darstellung einer Schwingungsbewegung

Die Eigenschaften der Schwingungsbewegung eines Punktes, die wir im vorhergehenden Abschnitt untersucht haben, können wir mit Hilfe der grafischen Darstellung durch entsprechende Kurven weitaus anschaulicher angeben.

Die grafische Untersuchung der Funktion

$$y = r \sin(\omega t + \varphi)$$

führen wir erst für den Spezialfall durch, dass die Amplitude der Schwingung $r = 1$ ist. Ferner sollen sein $\varphi = 0$ und $\omega = 1$. Dann nimmt die Gleichung der Schwingung des Punktes folgende Form an:

$$y = \sin t$$

Ersetzen wir fernerhin das Argument t durch x , so kommen wir zur Formel der einfachsten harmonischen Schwingung:

$$y = \sin x$$

Wenn wir das grafische Bild dieser Bewegung zeichnen, erhalten wir die bekannte Sinuskurve (Abb. 113).

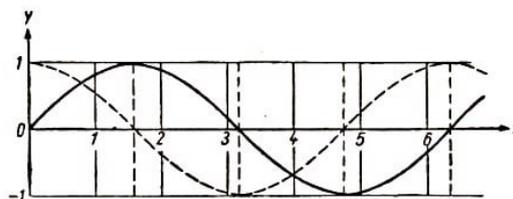


Abb. 113

Bei der Konstruktion der Sinuskurve wollen wir, wie auch bei allen weiteren Zeichnungen, auf beiden Koordinatenachsen den gleichen Maßstab wählen. (In Abbildung 113 beträgt die Einheit 1 cm.)

Die Konstruktion selber beginnen wir am bequemsten mit der Abwicklung eines Kreises, dessen Radius gleich 1 ist, wobei wir auf der x -Achse im Koordinatenursprung beginnen. So erhalten wir auf der Abszissenachse einen Abschnitt, dessen Länge gleich der Länge des abgewickelten Kreisumfangs ist ($2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 = 6,28$).

Nun teilen wir diesen Abschnitt in vier gleiche Teile und danach jeden der erhaltenen Teile nochmals in drei gleiche Teile. Auf diese Weise wird der Kreisumfang in zwölf gleiche Teile zerlegt, und die Länge jedes einzelnen Teiles ist dann gleich $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Die Darstellung der Funktion $y = \sin x$ ermöglicht es nun, für jeden beliebigen Zeitpunkt den Abstand des schwingenden Punktes P_y vom Ausgangspunkt (Koordinatenursprung) zu ermitteln. Man braucht nur auf der x -Achse die entsprechende Zeit t aufzusuchen und die Ordinate für die entsprechende Abszisse $t = x$ zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes P_y nach einer beliebigen Zeit t wird durch die Formeln

$$v_y = \cos t \quad \text{oder} \quad v_y = \cos x$$

gegeben. Sie wird also durch die Kosinuslinie dargestellt. Die Abbildung 113 enthält diese Kurve als gestrichelte Linie. Diese Darstellung veranschaulicht gut die bereits dargelegte Folgerung, dass die größte Geschwindigkeit des Punktes P_y im Moment des Durchganges durch den Koordinatenursprung erreicht wird.

Die kleinste Geschwindigkeit hingegen haben wir in dem Moment der größten Entfernung des schwingenden Punktes vom Ursprung. In diesem Moment wechselt die Geschwindigkeit zudem auch jedesmal das Vorzeichen.

Weitere Untersuchungen an grafisch dargestellten Schwingungen sollen in Form von Aufgaben geführt werden.

Aufgabe 1: Stellen Sie die Funktionen

$$a) \quad y = \sin x, \quad b) \quad y = \sin 2x, \quad c) \quad y = \sin \frac{x}{2}$$

in einem Koordinatensystem grafisch dar!

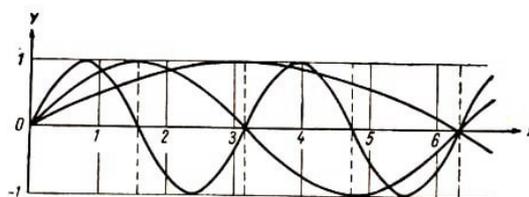


Abb. 114

Die Konstruktion wird in Abbildung 114 wiedergegeben. Bei der Auswertung dieser Aufgabe empfiehlt es sich, die Kurven der beiden letztgenannten Schwingungen mit der Darstellung der Schwingung $y = \sin x$ zu vergleichen.

Man erkennt dann die Auswirkung des veränderten Parameters $\omega = \frac{2\pi}{T}$ auf die Kurven. (Für die erste Schwingung ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$, für die zweite $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ und für die dritte $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$.)

Bei aufmerksamem Studium der Kurven und der ihnen entsprechenden Funktionsgleichungen kommen wir zweifellos zu folgendem Schluss:

Bei anwachsendem $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zieht sich die Kurve der Funktion $y = \sin x$ in horizontaler Richtung zusammen und gibt damit die Abnahme der Schwingungsperiode T wieder.

Aufgabe 2: Stellen Sie die Funktionen

$$a) \quad y = \sin x \quad , \quad b) \quad y = \sin \pi x$$

in einem Koordinatensystem grafisch dar (Abb. 115)!

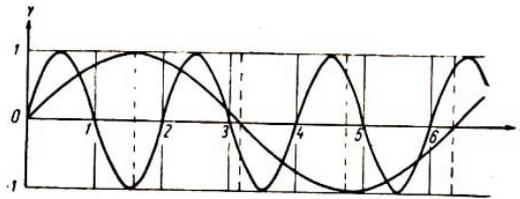


Abb. 115

Aufgabe 3 Stellen Sie die Funktionen

$$a) \quad y = \sin x, \quad b) \quad y = 1,5 \sin x, \quad c) \quad y = 2 \sin x$$

in einem Koordinatensystem grafisch dar!

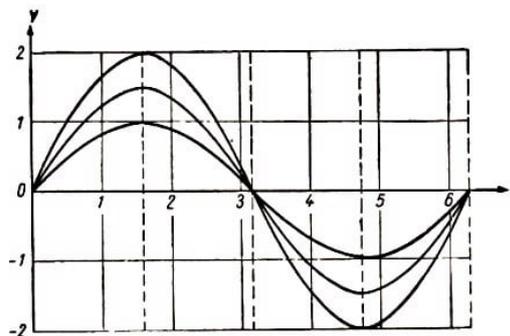


Abb. 116

Der Vergleich der Kurven (Abb. 116) mit den entsprechenden Funktionsgleichungen führt uns zu folgendem Schluss:

Bei Anwachsen der Amplitude einer Schwingung wird die Kurve $y = \sin x$ in vertikaler Richtung gedehnt. Die Periode der Schwingung wird dadurch nicht beeinflusst.

Ist uns das Bild der Funktion $y = \sin x$ gegeben und wollen rein geometrisch das Bild der Funktion $y = r \sin x$ ermitteln, so brauchen wir nur jede Ordinate $y = \sin x$ mit r zu multiplizieren.

Aufgabe 4: Stellen Sie in einem Koordinatensystem die Schwingung mit dem analytischen Ausdruck $y = \sin 2x$ und die Geschwindigkeit dieser Bewegung $v_y = 2 \cos 2x$ grafisch dar (Abb. 117)!

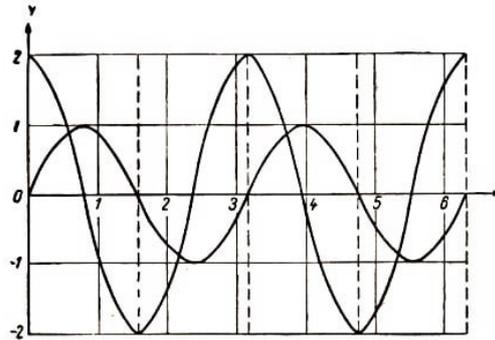


Abb. 117

Aufgabe 5: Konstruieren Sie in einem Koordinatensystem die Bilder der Schwingungen

$$a) \quad y = \sin x, \quad b) \quad y = \sin(x - 1), \quad c) \quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Abbildung 118 gibt anschaulich wieder, dass der Schwingungspunkt in Aufgabe 5b in seiner Phase um 1 verschoben ist und dass in Aufgabe 5c eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Schwingung in Aufgabe 5a auftritt.

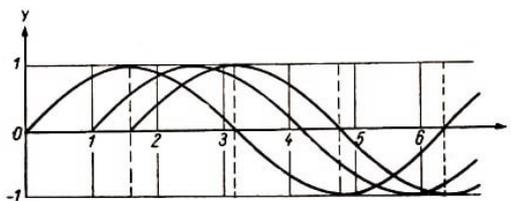


Abb. 118

Aufgabe 6: Stellen Sie in einem Koordinatensystem die Schwingungen mit den analytischen Ausdrücken

$$a) \quad y = \sin x, \quad b) \quad y = 1,5 \sin(x + 1)$$

grafisch dar (Abb. 119)!

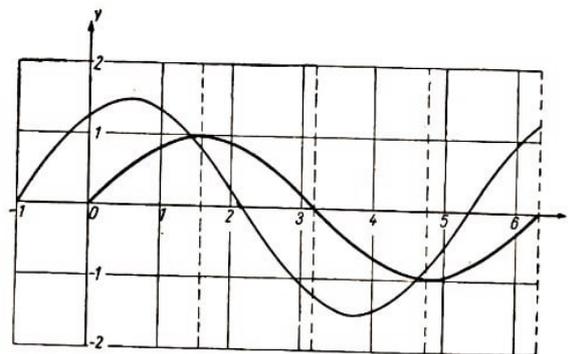


Abb. 119

Bis jetzt betrachteten wir nur die Schwingungen mit konstanter Amplitude. In der Natur aber kommen sehr häufig Schwingungen vor, deren Amplitude im Laufe der Zeit abklingt. Sehen wir uns eine solche sogenannte gedämpfte Schwingung an.

Die allgemeine Ursache für eine Dämpfung der Schwingung ist ein Verlust an Energie. Dieser Verlust an Energie kann entweder als Wirkung einer Reibung auftreten oder auch

dadurch, dass ein Punkt seine Schwingungen an andere Punkte weitergibt. Es entstehen so fortschreitende Wellen. Die Gleichung der gedämpften Schwingung lautet:

$$y = r e^{-kt} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

Für die Konstruktion der Kurve einer gedämpften Schwingung führen wir einige Vereinfachungen ein. Wir ersetzen die Zahl e durch die Zahl 2 und konstruieren die Kurve für diese abgeänderte Funktion.

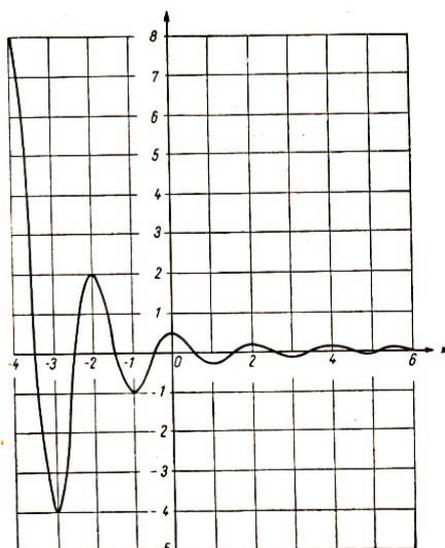


Abb. 120

Aufgabe 7: $y = 0,5 \cdot 2^{-x} \cos \pi x$ (Abb. 120).

Um die Konstruktion der Kurve dieser gedämpften Schwingung zu erleichtern, soll nachstehend die Wertetabelle der Argumente x und der zugehörigen Funktionswerte y gegeben werden:

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5
y	8	0	-4	0	2	0	-1	0
x	0	1	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5
y	0,5	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{32}$	0

In der Aufgabe 8 soll kurz auf die Addition harmonischer Schwingungen eingegangen werden.

Aufgabe 8: Konstruieren Sie die Kurve der Schwingung

$$y = \sin x + \cos x$$

die das Ergebnis einer Addition der beiden einfachen harmonischen Schwingungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ darstellt!

Hinweis: Die Ordinate eines Punktes der gesuchten Kurve für einen gegebenen Wert x wird mit Hilfe einer Addition der Ordinaten von $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für denselben Argumentwert gewonnen (Abb. 121).

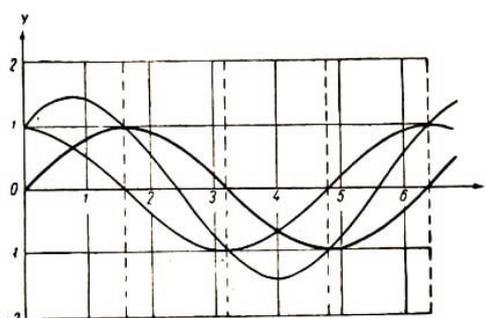


Abb. 121

Aufgabe 9: Gesucht wird die Kurve der Schwingung

$$y = \sin x + \sin 2x$$

als Ergebnis der Addition der beiden Schwingungen $y = \sin x$ und $y = \sin 2x$ (Abb. 122).

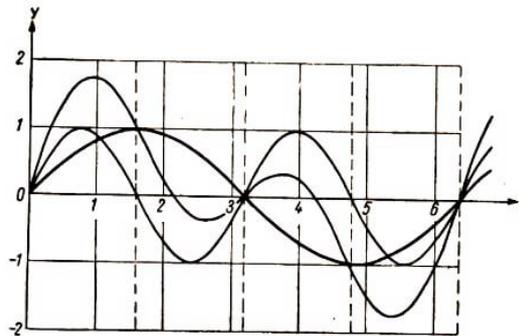


Abb. 122

Folgerung: Die Summe zweier einfacher harmonischer Schwingungen mit ein und derselben Periode ist wieder eine einfache harmonische Schwingung mit derselben Periode. Die Summe zweier einfacher Schwingungen mit verschiedener Periode ist eine zusammengesetzte harmonische Schwingung, für die es charakteristisch ist, dass ihre Amplitude als eine periodisch veränderliche Funktion erscheint.

Die erste Folgerung können wir auch analytisch gewinnen. Wir brauchen lediglich die Summe $\sin x + \cos x$ durch folgendes Produkt zu ersetzen:

$$\sin x + \sin(90^\circ - x) = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos(x - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(x - 45^\circ)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass in der resultierenden Schwingung die Periode so bleibt, wie bei den Summanden dieser Schwingung. Es verändern sich jedoch die Phase und die Amplitude, die in diesem speziellen Fall gleich $\sqrt{2}$ wird (Abb. 122).

8.3 Grafische Lösung von Bestimmungsgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir außer den Zusammenhängen bei den Schwingungsbewegungen auch Fragen der grafischen Lösung einiger Bestimmungsgleichungen.

Aufgabe 10: Lösen Sie grafisch die Bestimmungsgleichung $\sin x = \frac{x}{2}$.

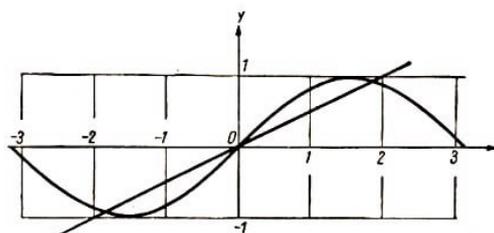


Abb. 123

Lösung: Wir setzen die linke und rechte Seite der Bestimmungsgleichung gleich y und erhalten so zwei Funktionsgleichungen

$$y = \sin x \quad \text{und} \quad y = \frac{x}{2}$$

Nun konstruieren wir die Kurven beider Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem (Abb. 123). Die Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Kurven sind dann die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Im vorliegenden Fall sind dies $x_1 = 0$; $x_2 \approx 1,9$ und $x_3 \approx -1,9$.

Aufgabe 11: Wieviel Lösungen hat die Bestimmungsgleichung $\lg x = \sin x$?
Die grafische Lösung dieser Aufgabe wird in Abbildung 124 dargestellt.

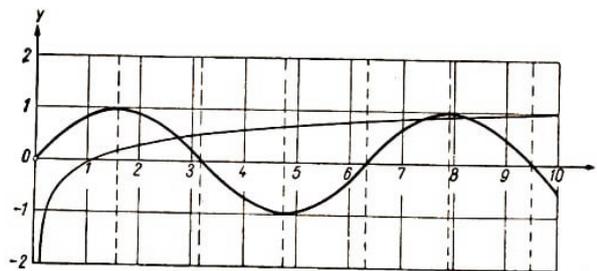


Abb. 124

Aufgabe 12: Lösen Sie grafisch die Bestimmungsgleichung $x \cdot \arctan x = 1$.

Lösung: Wir formen die gegebene Bestimmungsgleichung wie folgt um:

$$\arctan x = \frac{1}{x}$$

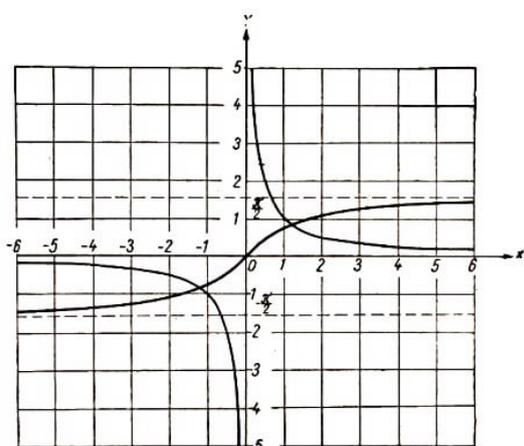


Abb. 125

und setzen jede Seite der umgeformten Bestimmungsgleichung gleich y . So erhalten wir zwei Funktionsgleichungen $y = \arctan x$ und $y = \frac{1}{x}$. Nun konstruieren wir in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kurven dieser Funktionen (Abb. 125) und erhalten mit den Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven die Wurzeln der gegebenen Bestimmungsgleichung.

Literatur

I. S. Dubnow: Fehler in geometrischen Beweisen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

P. S. Alexandroff: Einführung in die Gruppentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Teil I; 1953), (Teil II und III; 1956).

A. O. Gelfond: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

B. W. Gnedenko und A. J. Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

A. G. Kurosch: Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

I. P. Natanson: Einfache Maxima- und Minima-Aufgaben. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

L. A. Lusternik: Kürzeste Linien. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

A. S. Parchomenko: Was ist eine Kurve? VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

W. G. Schematow: Hyperbelfunktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

A. Leman und B. Schoeneberg: Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

W. Breidenbach: Das Delische Problem. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

E. Lampe: Mathematik und Sport. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1956.

Sammlung Crantz. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1956.

W. G. Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

P. Rozsa: Das Spiel mit dem Unendlichen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

D. J. Struik: Abriss der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

J. v. Krbek: Eingefangenes Unendlich. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

Mathematisch Naturwissenschaftliche Bibliothek. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.

9 Lösungen

9.1 Die Methode der vollständigen Induktion

1.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Die Summe der natürlichen Zahlen $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ergibt $\frac{n(n+1)}{2}$.

Für $n = k$:

$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$$

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^2(k+1)}{2^2} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{2^2} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}$$

$$S_{k+1} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man in

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

2. $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Für $n = k$:

$$S_k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

$$S_{k+1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1$$

$$S_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man in $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

3. $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Für $n = k$:

$$S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Die gleiche Form ergibt sich, wenn man in $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

4. $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
 Für $n = k$:

$$S_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man in $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

5. $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
 Für $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

$$S_{k+1} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man in $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

6. Es wird behauptet, $S_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ sei durch 9 teilbar.
 Für $n = 1$ bestätigt sich diese Behauptung. Die Summe S_{n+1} ist ebenfalls durch 9 teilbar.

$$S_{n+1} = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27$$

$$= [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3] + 9n^2 + 27n + 27$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist teilbar durch 9 laut Induktionsvoraussetzung. Die übrigen Summanden sind wegen des Faktors 9 durch 9 teilbar. Somit gilt die Behauptung allgemein.

8. $N_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ (Anzahl der Teile: N ; Anzahl der Geraden: n)

$$N_{n+1} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man in $N_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

9. $D_n = n - 2$ (Anzahl der Dreiecke: D ; Anzahl der Ecken: n)
 Jede hinzukommende Ecke ermöglicht das Ziehen einer weiteren Diagonalen. Die Anzahl der Dreiecke erhöht sich dabei um 1.

$$D_{n+1} = (n-2) + 1 = n-1 = (n+1) - 2$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man in $D_n = n - 2$ die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

10.

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x$$

$$S_{n+1} = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x + \sin(n+1)x$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x + 2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \cos \frac{n+1}{2}x$$

$$S_{n+1} = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sin \frac{n}{2}x + \left(\sin \frac{n+2}{2}x - \sin \frac{n}{2}x \right) \right]$$

$$S_{n+1} = \frac{\sin \frac{n+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n+1}{2}x$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man in

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x$$

die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

11.

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \cos(n+1)x = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \cos(n+1)x$$

$$= \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x + \left(\sin \frac{2n+3}{2}x - \sin \frac{2n+1}{2}x \right)}{2}$$

$$= \frac{\sin \frac{2n+3}{2}x}{2}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man in

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{n}{2}x$$

die Zahl n durch $n + 1$ ersetzt; somit gilt die Formel allgemein.

12.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left[a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \right] (a+b) \\
 &= \left[a^{n+1} + (a^n b + na^n b) + \left(na^{n-1}b^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-1}b^2 \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^{k+1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)}a^{n-k}b^{k+1} + \dots + (nab^n + ab^n) + b^{n+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + (1+n)a^n b + \left(n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \right) a^{n-1} b^2 \\
 &\quad + \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) a^{n-2} b^3 \\
 &\quad + \left(\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)} \right) a^{n-k} b^{k+1} \\
 &\quad + \dots + (n+1)ab^n + b^{n+1}
 \end{aligned}$$

Für die Zusammenfassen der in den Klammern stehenden Koeffizienten der Produkte $a^{n-k}b^{k+1}$ gilt die Regel:

$$\begin{aligned}
 &\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)} \\
 &= \frac{[n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)][k+1+n-k]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)} = \frac{(n+1) \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+1)}
 \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + (1+n)a^n b + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}a^{n-1}b^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-2}b^3 \\
 &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1)}a^{n-k}b^{k+1} + \dots + (n+1)ab^n + b^{n+1}
 \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man in (1) die Zahl n durch $n+1$ ersetzt.

9.2 Folgen und spezielle Reihen

1.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} \\
 q = \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} = \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+3)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+3)} = 0 < 1$$

Die vorgelegte Reihe ist konvergent.

2.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}, \quad q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2(n+1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Nach dem d'Alembertschen Kriterium lässt sich nicht entscheiden, ob die Reihe divergent oder konvergent ist. Ein Vergleich mit der divergenten Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

lässt aber auf anderem Wege erkennen, dass die vorgelegte Reihe divergent ist.

3.

$$\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)}{10^n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{10^{n+1}}$$

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} \cdot \frac{10^n}{10^{n+1}} = \frac{n+2}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{10} \rightarrow \infty$$

Die vorgelegte Reihe ist divergent.

9.3 Ein geometrischer Beweis ...

1. Wenn $\{a_k\}$ eine arithmetische Folge mit der Differenz d ist, so gilt:

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot d, \quad a_2 = a_1 + 1 \cdot d, \quad \dots \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{n+1} = a_1 + (n+0) \cdot d, \quad a_{n+2} = a_1 + (n+1) \cdot d, \quad \dots \quad a_{2n} = a_1 + [n + (n-1)]d$$

$$a_{2n+1} = a_1 + (2n+0) \cdot d, \quad a_{2n+2} = a_1 + (2n+1) \cdot d, \quad \dots \quad a_{3n} = a_1 + [2n + (n-1)]d$$

Für $\{S_k\}$ folgt daraus:

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = \frac{(a_{n+1} + a_{2n})n}{2} = \frac{n}{2}[2(a_1 + nd) + (n-1)d]$$

$$S_3 = a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots + a_{3n} = \frac{(a_{2n+1} + a_{3n})n}{2} = \frac{n}{2}[2(a_1 + 2nd) + (n-1)d] \quad \dots$$

also

$$S_1 = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = A_1$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[2(a_1 + nd) + (n-1)d] = A_1 + n^2 \cdot d$$

$$S_3 = \frac{n}{2}[2(a_1 + 2nd) + (n-1)d] = A_1 + n^2 \cdot 2d \quad \dots$$

Das allgemeine Glied der Folge $\{S_k\}$ lautet somit

$$S_k = A_1 + n^2(k-1)d$$

mit $A_1 = S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Die Folge $\{S_k\}$ ist also wiederum eine arithmetische Folge, und zwar mit der Differenz n^2d .

2. Für die geometrische Folge $\{b_k\}$ gelten:

$$b_{m+n} = A = b_1 q^{m+n-1} \quad \text{und} \quad b_{m-n} = B = b_1 q^{m-n-1}$$

Das Glied b_m ergibt sich hieraus, indem man A mit B multipliziert:

$$A \cdot B = b_1^2 q^{2(m-1)} = b_m^2, \quad b_m = \sqrt{A \cdot B}$$

Für die Bestimmung des Gliedes b_n wird zuerst der Quotient q mit Hilfe von A und B ausgedrückt:

$$A : B = q^{2n}, \quad q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$$

Nun ist $b_n = b_1 q^{n-1} = b_1 q^{m+n-1-m} = b_1 q^{m+n-1} : q^m$, also

$$b_n = A : \sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^m} = \sqrt[2n]{A^{2n-m} \cdot B^m}$$

Wenn $n < m$ angenommen wird, so lässt sich von b_n aus die Folge auf folgende Art angeben:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt[2n]{A^{2n-m} \cdot B^m}, & b_n &= \sqrt[2n]{A^{2n-m} \cdot B^m} \\ b_{n+1} &= \sqrt[2n]{A^{2n-m+1} \cdot B^{m-1}}, & b_{n-1} &= \sqrt[2n]{A^{2n-m-1} \cdot B^{m+1}} \\ &\dots & &\dots \\ b_{n+k} &= \sqrt[2n]{A^{2n-m+k} \cdot B^{m-k}}, & b_{n-l} &= \sqrt[2n]{A^{2n-m-l} \cdot B^{m+l}} \end{aligned}$$

Aus den allgemeinen Gliedern b_{n+k} bzw. b_{n-l} ergeben sich mit $l = n - (m - n) = 2n - m$:

$$b_{m-n} = \sqrt[2n]{A^{2n-m-(2n-m)} \cdot B^{m+(2n-m)}} = \sqrt[2n]{A^0 \cdot B^{2n}} = B$$

mit $k = m - n$:

$$b_m = \sqrt[2n]{A^{2n-m-(m-n)} \cdot B^{m-(m-n)}} = \sqrt[2n]{A^n \cdot B^n} = \sqrt{A \cdot B}$$

mit $k = m$:

$$b_{m+n} = \sqrt[2n]{A^{2n-m+m} \cdot B^{m-m}} = \sqrt[2n]{A^{2n} \cdot B^0} = A$$

3.

$$S_1 = 1 = \frac{10^1 - 1}{9} = \frac{1}{9}(10^1 - 1)$$

$$S_2 = 1 + 11 = \frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} = \frac{1}{9}(10^1 + 10^2 - 2)$$

...

$$S_n = \frac{1}{9}(10^1 + 10^2 + \dots + 10^n - b) = \frac{1}{9} \left[\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right] = 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9^2} - \frac{n}{9}$$

4. Eine Zahlenfolge heißt arithmetische Folge, wenn

$$a) \quad a_{n+1} - a_n = d \quad , \quad b) \quad aN = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

für jedes Glied der Folge - mit Ausnahme des ersten und des letzten - gelten.
Wenn a^2, b^2, c^2 drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge sind, so gilt nach a)

$$\begin{aligned} b - 2 - a^2 = d \quad , \quad c^2 - b^2 = d \quad , \quad c^2 - a^2 = 2d \\ (b + a)(b - a) = d \quad , \quad (c + b)(c - b) = d \quad , \quad (c + a)(c - a) = 2d \\ \frac{1}{a + b} = \frac{b - a}{d} \quad , \quad \frac{1}{b + c} = \frac{c - b}{d} \quad , \quad \frac{1}{c + a} = \frac{c - a}{2d} \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel von $\frac{1}{b+c}$ und $\frac{1}{a+b}$ ist:

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}}{2} = \frac{\frac{c-b}{d} + \frac{b-a}{d}}{2} = \frac{c-a}{2d} = \frac{1}{c+a}$$

Da $\frac{1}{c+a}$ arithmetisches Mittel zwischen $\frac{1}{b+c}$ und $\frac{1}{a+b}$ ist, sind nach b) auch $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ drei aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge.

6. Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\frac{1}{K(K+1)(K+2)} = \frac{A}{K} + \frac{B}{K+1} + \frac{C}{K+2} = \frac{K^2(A+B+C) + K(3A+2B+C) + 2A}{K \cdot (K+1) \cdot (K+2)}$$

Der Koeffizientenvergleich führt zum Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} K^2 : \quad 0 &= A + B + C \\ K^1 : \quad 0 &= 3A + 2B + C \\ K^0 : \quad 1 &= 2A \end{aligned}$$

mit $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{K=1}^n \frac{1}{K(K+1)(K+2)} = \sum_{K=1}^n \left(\frac{\frac{1}{2}}{K} - \frac{1}{K+1} + \frac{\frac{1}{2}}{K+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4}$$

9.4 Die Fibonacci'schen Zahlen

1. Für die Folge $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4, u_4 = 7, u_5 = 11, \dots$ gilt die rekursive Darstellung $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ mit $u_1 = 1$ und $u_2 = 3$.

Werden die Glieder der Folge $\{u_i\}$ durch Elemente einer geometrischen Folge dargestellt, so führt die Bedingung $q^n = q^{n-2} + q^{n-1}$ für $n = 2$ auf die quadratische Bestimmungsgleichung $q^2 - q - 1 = 0$ mit den Wurzeln $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Die Folgen

$$1, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \dots, \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad \dots \quad (1)$$

$$1, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \dots, \quad \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \quad \dots \quad (2)$$

können mit zwei Zahlen c_1 und c_2 so multipliziert werden, dass sich die Folge $u - 1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4, \dots$ aus den Summen entsprechender Glieder der multiplizierten Folgen (1) und (2) ergibt. Das Gleichungssystem für c_1 und c_2 , lautet:

$$1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 1 \quad (I)$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot c_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_2 = 3 \quad (II)$$

$$\hline c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Damit ergibt sich

$$u_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2. Aus $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ folgt durch Multiplikation mit u_k

$$u_k \cdot u_{k+1} = u_k^2 + u_k \cdot u_{k-1}, \quad u_k^2 = u_k(u_{k+1} - u_{k-1})$$

Somit gilt für

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 &= u_1^2 + u_2(u_3 - u_1) + u_3(u_4 - u_2) + \dots + u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \\ &= u_1^2 - u_1 u_2 + u_n u_{n+1} \end{aligned}$$

da stets das positive Glied einer Klammer und das negative Glied der folgenden gleich sind und somit zusammen Null ergeben.

3. Für $m = 1$ stimmt die Behauptung

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$$

da $u_{n+1} = u_{n-1} \cdot u_1 + u_n \cdot u_2$ für die Folge der Fibonacci'schen Zahlen mit $u_1 = u_2 = 1$ auf die definierende Rekursionsformel $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ führt.

Für $m = 2$ folgt ebenfalls die Rekursionsformel:

$$u_{n+2} = u_{n-1} \cdot u_n + u_n \cdot u_3 = u_{n-1} \cdot 1 + u_n \cdot 2 = (u_{n-1} + u_n) + u_n = u_{n+1} + u_n$$

Damit ist die Induktionsvoraussetzung für $m = k$ und $m = k + 1$ mit $k = 1$ geschaffen. Es ist zu zeigen, dass die Behauptung für $m = k + 2$ richtig bleibt.

Es seien also $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1}$ und $u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_nu_{k+2}$. Durch gliedweise Addition folgt

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1} + u_{n-1}u_{k+1} + u_nu_{k+2}$$

und somit nach der Rekursionsformel .

$$u_{n+k+2} = u_{n+1}u_{k-2} + u_nu_{k+3}$$

was es nachzuweisen galt; also gilt die Behauptung allgemein.

4. Aus der in Aufgabe 3 bewiesenen Beziehung

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}$$

folgt für $m = n$:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= u_{n-1}u_n + u_nu_{n+1} = u_{n-1}(u_{n+1} - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_{n-1})u_{n+1} \\ &= u_{n-1}u_{n+1} - u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2 - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 \end{aligned}$$

was es zu zeigen galt.

$$5. \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2; \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

$$6. \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6; \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6;$$

9.5 Wie die ersten Rechentafeln aufgestellt wurden

1. Aus der Umrechnungsformel $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ folgt für $a = x$ und $N = y$:

$$\log_x y = \frac{\log_b y}{\log_b x} \quad \text{oder} \quad \log_x y \cdot \log_b x = \log_b y$$

Ersetzt man die Grundzahl b durch y , so ergibt sich:

$$\log_x y \cdot \log_y x = \log_y y$$

Der Ausdruck $\log_y y$ bedeutet $y^1 = y$, ist also gleich 1, was es zu zeigen galt.

3. Man findet das vollständige Quadrat, indem man $2ab$ addiert:

$$a^2 + b^2 = 7ab \quad , \quad a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$$

Man formt um und erhält:

$$\frac{(a+b)^2}{9} = ab \quad , \quad \frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$$

Diese Identität wird logarithmiert und ergibt:

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$$

was zu beweisen war.

4. Es gelten die Umwandlungsformeln:

$$\log_k x = \frac{\log_m x}{\log_m k} \quad ; \quad \log_n x = \frac{\log_m x}{\log_m n}$$

Wenn die Logarithmen $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge sind, so ist die Differenz d bestimmt durch:

$$d = \log_m x - \log_k x = \log_m x - \frac{\log_m x}{\log_m k}$$

und

$$d = \log_n x - \log_m x = \frac{\log_m x}{\log_m n} - \log_m x$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log_m x - \frac{\log_m x}{\log_m k} &= \frac{\log_m x}{\log_m n} - \log_m x \\ 2 \log_m x &= \log_m x \left(\frac{1}{\log_m n} + \frac{1}{\log_m k} \right) \\ 2 &= \frac{\log_m(n \cdot k)}{\log_m n \cdot \log_m k} \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1 gilt: $\log_m k \cdot \log_k m = 1$.

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{\log_m(n \cdot k)}{\log_m n \cdot \frac{1}{\log_k m}} \\ 2 \log_m n &= \log_k m \cdot \log_m(n \cdot k) \\ \log_m(n^2) &= \log_m(n \cdot k) \log_k m \\ n^2 &= (n \cdot k)^{\log_k m} \end{aligned}$$

5. Die Ungleichung $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$ ist richtig. Der Logarithmus des echten Bruches $\frac{1}{2}$ ist negativ.

Das 2fache einer negativen Zahl und das 4fache der gleichen negativen Zahl, $\lg \frac{1}{2}$, stehen in der gleichen Beziehung: $2 \lg \frac{1}{2} > 4 \lg \frac{1}{2}$. Bei der Division durch die negative Zahl kehren sich jedoch die Vorzeichen um:

$$\frac{2 \lg \frac{1}{2}}{\lg \frac{1}{2}} < \frac{4 \lg \frac{1}{2}}{\lg \frac{1}{2}}$$

Diese Umkehr der Größer-Kleiner-Beziehung, die vom Rechnen mit Ungleichungen als bekannt vorausgesetzt wird, ist im Text nicht beachtet werden.

9.6 Nomogramme von Fluchtlinientafeln mit parallelen Leitern

1. Aus der logarithmierten Formel

$$\lg a = \lg r - 2 \lg T + (\lg 4 + 2 \lg \pi)$$

kann entnommen werden: $a = 1$; $b = 2$.

Die Skalen für a und b verlaufen parallel, aber gegenläufig. Als Maßstab der Skalen für r und T empfiehlt sich eine durch 3 teilbare Zahl, da die Summe $a + b = 3$ in der Formel $m_Z = \frac{m_a}{a+b}$ im Nenner steht.

$$m_r = m_T = 150, k = \frac{2}{1}, m_a = \frac{150}{3} = 50.$$

Einen Festpunkt auf der a -Skale gewinnt man durch $r = 1$ cm und $T = 1$ s:

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T}; a \approx 39,5 \text{ cm/s}^2.$$

Der Schnitt der Geraden durch $r_1 = 1$ cm und $T_1 = 1$ s markiert auf der Geraden für die a -Skale den Punkt $a_1 = 39,5 \text{ cm/s}^2$.

In der Abbildung 126 wurden als Kontrollpunkte vermerkt:

$$r = 1 \text{ cm}; T = 10 \text{ s}; a = 0,395 \text{ cm/s}^2;$$

$$r = 10 \text{ cm}; T = 1 \text{ s}; a = 395 \text{ cm/s}^2;$$

$$r = 2 \text{ cm}; T = 2 \text{ s}; a = 19,7 \text{ cm/s}^2$$

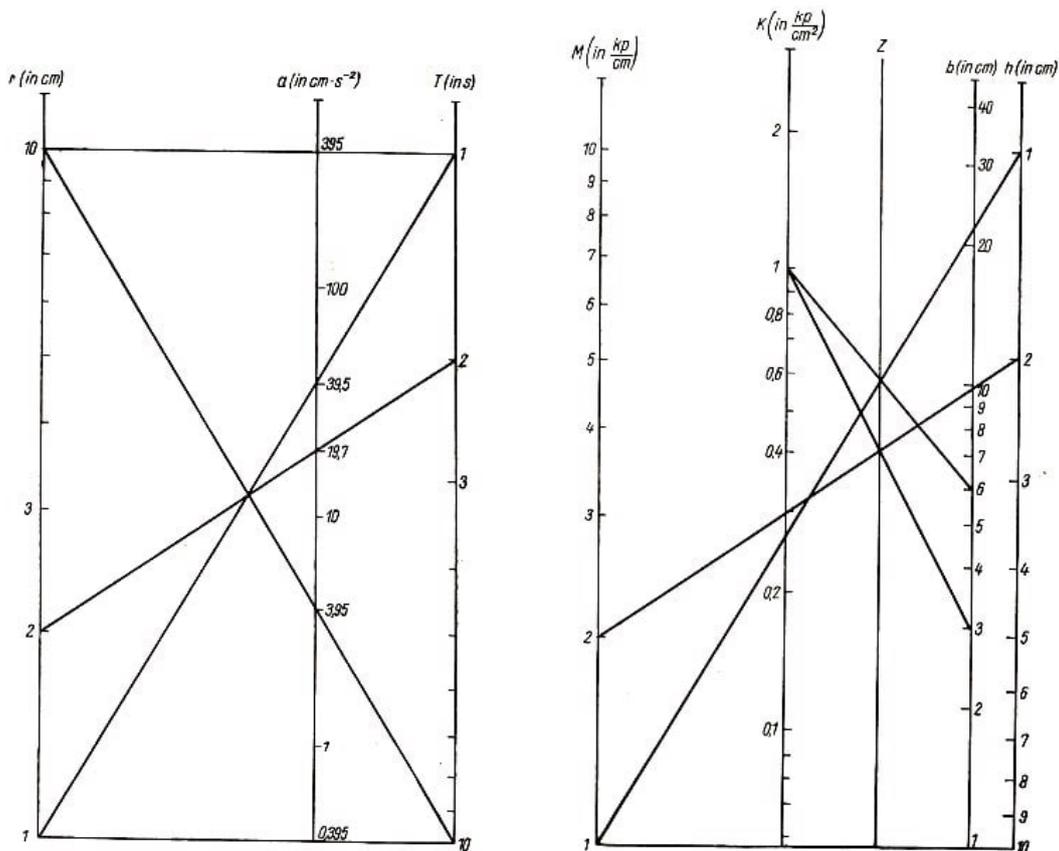


Abb. 126, 127

2. Aus der logarithmierten Formel

$$\lg n = \lg 100 - \lg s - \lg t$$

kann entnommen werden: $a = 1; b = 1. m_s = m_t = 100; k = \frac{1}{1}; m_n = \frac{100}{2} = 50.$

Die Skalen für s und t verlaufen parallel, die Skale für n in der Mitte zwischen ihnen, aber gegenläufig. Einen Festpunkt auf der n -Skale gewinnt man durch $s = 10$ mm je Umdrehung und $t = 10$ s je mm:

$$n = \frac{100}{s \cdot t}; n = 1 \text{ Umdrehung je Sekunde}$$

Kontrollpunkte:

$s = 1$ mm je Umdrehung; $t = 1$ s je mm; $n = 100$ Umdrehungen je Sekunde

$s = 2$ mm je Umdrehung; $t = 5$ s je mm; $n = 10$ Umdrehungen je Sekunde

3. Aus der logarithmierten Formel

$$\lg V = 2 \lg r + \lg h + \lg \frac{\pi}{3}$$

kann entnommen werden: $a = 2; b = 1. m_r = m_h = 150; k = 2; m_V = 50.$

Die Skalen für r , h und V verlaufen gleichsinnig parallel. Einen Festpunkt auf der V -Skale gewinnt man durch $r = 1$ cm und $h = 3$ cm: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}, V = \pi \text{ cm}^3.$

Kontrollpunkte: $r = 1$ cm; $h = 1$ cm; $V \approx 1,05 \text{ cm}^3$

$r = 10$ cm; $h = 10$ cm; $V \approx 1047 \text{ cm}^3$

$r = 3$ cm; $h = 1$ cm; $V \approx 9,42 \text{ cm}^3$

Die Abbildung 25 stellt ein Nomogramm für das Kegelvolumen dar.

4. Die Formel wird so umgeformt, dass auf beiden Seiten der Gleichung je zwei Variable stehen:

$$K \cdot b = \frac{6M}{h^2}$$

Eine Hilfsunbekannte z wird durch die folgenden Gleichungen eingeführt:

$$z = K \cdot b \quad , \quad z = \frac{6M}{h^2} \quad (1,2)$$

Aus der logarithmierten Gleichung (2)

$$\lg z = \lg M - 2 \lg h + \lg 6$$

kann entnommen werden: $a = 1; b = 2. m_M = m_h = 150; k = 2; m_z = 50$

Die Skalen für r und h sind gegenläufig parallel. Im Nomogramm für $z = Kb$ (1) muss sich die z -Skale mit der von (2) decken. Aus $z = K \cdot b$ folgt $\lg z = \lg K + \lg b$ ($k = 1$).

Die Skalen verlaufen gleichsinnig parallel. Beim Ermitteln des Maßstabs muss beachtet werden, dass $m_z = 50$ bereits festgelegt ist.

$$m_z = \frac{m_K}{a+b}, 50 = \frac{m_K}{2}, m_K = 100, m_b = 100$$

Einen Festpunkt bestimmen wir durch $M = 1$ kp/cm; $h = 1$ cm; $b = 6$ cm; $K = M \cdot \frac{6}{bh^2} = 1 \text{ kp/cm}^2.$

Zur Kontrolle ist in der Abbildung 127 der Einheitspunkt der K -Skale nochmals bestimmt durch $M = 2$ kp/cm; $h = 2$ cm; $b = 3$ cm.

5. Die Formel wird nach V umgestellt $V = \pi r^2 h$ und logarithmiert

$$\lg V = 2 \cdot \lg r + \lg h + \lg \pi$$

$$a = 2; b = 1, m_r = 150; m_h = 150; k = \frac{1}{2}; m_V = 50$$

Die Skalen für r , h und V verlaufen gleichsinnig parallel. Einen Festpunkt auf der V -Skale gewinnt man durch $r = 1 \text{ cm}$ und $h = 1 \text{ cm}$: $V = \pi \text{ cm}^3$.

9.7 Über die Quadratur des Kreises und die Zahl π

1.

$$\begin{aligned} F_1 &: \pi r_1^2 \\ F_2 &: \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi r_1^2 \\ & \quad r_2 = r_1 \sqrt{2} \\ f_3 &: \pi r_3^2 - 2\pi r_1^2 = \pi r_1^2 \\ & \quad r_3 = r_1 \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Radien können unter Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras konstruiert werden.

$$1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2, \quad 1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2, \quad 1^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{4})^2$$

2. Die Restfläche APQ ergibt sich als Differenz aus dem Viereck $APMQ$ und dem Sektor MQP (Abb. 128).

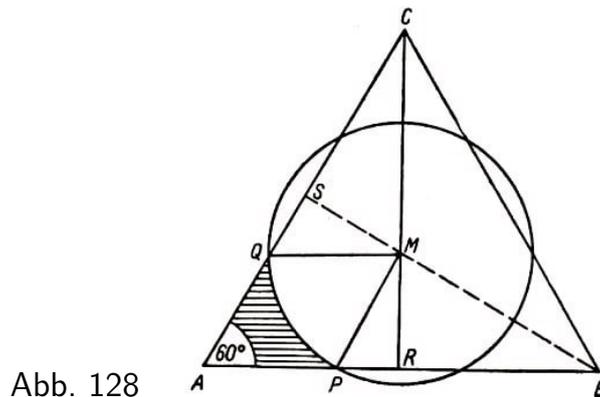


Abb. 128

Die Höhe des gegebenen Dreiecks beträgt $CR = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Die Seitenhalbierenden (hierbei gleichzeitig die Höhen) teilen einander im Verhältnis 2 : 1. Folglich ist

$$MR = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und nach dem Satz des Pythagoras $PR = \frac{a}{6}$, $AP = \frac{a}{3}$. Auf gleichem Wege gelangt man zu $QS = \frac{a}{6}$, $AQ = \frac{a}{3}$. Da außerdem $\angle PAQ = 60^\circ$, ergibt sich $QP = \frac{a}{3}$ und $\angle QMP = 60^\circ$. Das Viereck $APMQ$ ist demnach ein Rhombus mit der Fläche

$$F_1 = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{a^2}{18}\sqrt{3}$$

Der Kreissektor MQP hat den Flächeninhalt

$$F_2 = \frac{a^2}{54}\pi$$

Die Sektoren um M_2 und M_3 besitzen Zentriwinkel von je 120° , stellen also zusammen ebenfalls zwei Drittel des Kreises dar. Da der erstgenannte Sektor außerhalb der Figur $M_1M_2M_3M_4M_5$ liegt und die beiden anderen Sektoren innerhalb der Figur liegen, gewinnt man die gesuchte Fläche aus der Summe der Teilflächen Dreieck $M_1M_2M_3$, Rechteck $M_2M_4M_5M_6$, zwei Viertelkreisflächen mit dem Radius $\frac{a}{2}$.

$$F = a^2\sqrt{3} + 3a^2\sqrt{3} + \frac{\pi}{8}a^2 = a^2 \left(4\sqrt{3} + \frac{\pi}{8} \right)$$

Ein Trugschluss

Der Fehler beruht auf einer falschen Art der Ermittlung des Grenzwertes. Es wird unbegründet angenommen, dass AB der Grenzwert der Summe aller Halbkreisbögen über den 2^n Teilen von AB sei.

Wie klein auch der Durchmesser eines Kreises gewählt wird, stets ist der Halbkreis über dem Durchmesser größer als die Strecke zwischen den Endpunkten des Durchmessers. Also muss gesetzt werden

$$\frac{\pi}{2}AB > AB$$

und somit $\pi = 2$.