4695 Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufen 1 bis 12 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

mit Lösungen von 54 Autoren

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/24

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Vorwort

1959 fand die I. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Als ein Ergebnis wurde Anfang der 1960er Jahre in der DDR ein mathematischer Schülerwettbewerb geplant, der zum einen das Interesse und die Freude an der Mathematik fördern sollte, zum anderen schon frühzeitig mathematische Begabungen erkennen sollte.

1960 und 1961 wurden Vorolympiaden in Leipzig und Berlin durchgeführt. Ab Herbst 1961 wurde landesweit eine Mathematik-Olympiade für Schülerrinnen und Schüler durchgeführt. 1990 ging die DDR-Mathematik-Olympiade in eine gesamtdeutsche Olympiade über.

Diese Olympiade war und ist in vier Runden gegliedert.

In der I. Runde (Schulolympiade), im Herbst des Olympiadejahres, lösen die Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 und 12 Aufgaben als Hausaufgabe. Diese Aufgaben werden danach i.A. in den Schulen und Arbeitsgemeinschaften besprochen und ausgewertet. Die besten Schüler können im November an der II. Runde (Kreisolympiade, Regionalrunde) teilnehmen.
In den vierstündigen Klausuren sollen die Schüler der Klassenstufe 5 bis 10, sowie 11/12 vier anspruchsvolle Aufgaben lösen. Die Besten werden mit einem 1. bis 3. Preis bzw. einer Anerkennung ausgezeichnet.

Die erfolgreichsten Schüler dürfen im Februar des darauffolgenden Jahres an der III. Runde (Bezirksolympiade, Landesrunde) teilnehmen. Die Klausuren werden an zwei aufeinanderfolgenden Tagen absolviert; jeden Tag sind drei Aufgaben zu lösen. Bis 1990 wurde die III. Runde für die Klassenstufen 7, 8, 9, 10 und 11/12 durchgeführt, danach auch für jüngere Schüler.

Der Abschluss des Olympiajahres ist die IV. Runde im Frühjahr (DDR-Olympiade, Bundesrunde). Dort starten für jedes Bundesland, früher jeden Bezirk, die Schüler, die in den III. Runden erfolgreich waren. Erneut werden zwei Klausuren mit jeweils 3 Aufgaben geschrieben. Bis 1989 wurde dies für die Klassenstufen 10 und 12, anschließend für 8 bis 12 durchgeführt.

Die Sieger der oberen Klassenstufen erhalten die Möglichkeit, sich für die Mannschaft zur Internationalen Mathematik-Olympiade zu qualifizieren.

Die Aufgaben wurden von einem ”Zentralen Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker” entwickelt. Diesem Ausschuss gehören Mathematiker, Lehrer und andere Interessierte an, denen die Förderung des mathematischen Nachwuchses wichtig ist.

Seit 1995 werden die Aufgaben vom Mathematik-Olympiaden e.V. entwickelt und den regionalen Organisatoren der deutschlandweit stattfindenden Schul-, Regional- und Landesrunden sowie der in wechselnden Bundesländern stattfindenden Bundesrunde zur Verfügung gestellt.

Die Aufgaben ab dem Jahr 1995 können über das Aufgabenarchiv `https://www.mathematik-olympiaden.de` von Mathematik-Olympiaden e.V. aufgerufen werden.
Die Organisation, Durchführung und Korrektur wird ehrenamtlich durch Freunde der Mathematik-Olympiade geleistet, darunter viele Lehrer und Mathematiker.

Der nachfolgende Text enthält alle von 1960 bis 1994 in den Runden I bis IV gestellten Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 12.

Für alle Aufgaben wird eine Lösung angegeben.

Diese sind zum einen die vom Aufgabenausschuss empfohlenen Musterlösungen, zum anderen wurden sie der mathematischen Schülerzeitschrift ”alpha”und weiteren Veröffentlichungen, aber vor allem der Internetseite `https://olympiade-mathematik.de` von Manuela Kugel entnommen.

Über 1000 Lösungen wurden von 48 Autoren erstellt. Nur durch deren fleißige Arbeit wurde es möglich, erstmals für alle Aufgaben eine Lösung zu veröffentlichen.

Dieser Text soll Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, mittels älterer Aufgaben ihre mathematischen Fähigkeiten zu trainieren. Gleichzeitig wird Lehrern und Arbeitsgemeinschaftsleitern eine Sammlung interessanter Aufgaben für die Planung und Durchführung ihrer ehrenamtlichen Tätigkeit, der Förderung mathematischer Talente, zu geben. Außerdem sind die Aufgaben historisch interessant.

Dieser Text enthält alle 3775 Aufgaben der Mathematik-Olympiade der Klassenstufen 5 bis 12 der I. bis IV. Runden der Jahre 1961 bis 1994, sowie der zwei Vorolympiaden von 1960 und 1961, die in Leipzig und Berlin ausgetragen wurden. Für jede Aufgabe wird eine Lösung angegeben.

In einem zweiten Teil sind zusätzlich 920 Aufgaben und Lösungen der ABC-Mathematikolympiade der Klassenstufen 1 bis 4 von 1963 bis 1990 vorhanden.

Der Text enthält insgesamt 2313 Abbildungen, darunter 2272 mit tikz gezeichnete.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik sowie die mathematische Symbolik wurden der heutigen Form angepasst.
Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

Der einleitende Text jedes Aufgabenblattes:

> Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

wurde nicht übernommen.

Quellen:

1) Zeitschrift "alpha", Verlag Volk und Wissen 1967-1990

2) "Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR", W.Engel und U.Pirl, Verlag Volk und Wissen 1975 und Verlag Volk und Wissen 1990

3) Zeitschrift "Mathematik in der Schule", Verlag Volk und Wissen 1968

4) Leipziger Volkszeitung Sonderausgabe 1965 "Mathematik-olympiaden"

5) Offizielle Aufgabenkommission

6) "573 Mathematikaufgaben aus Olympiaden der DDR", J.Lehmann und W.Unze

7) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, J. Lehmann 1978

8) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, J. Lehmann 1973

9) "25 Jahre ABC-Mathematik-Olympiaden" Heft 77a und 77b, Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, J. Lehmann 1987

10) ABC-Zeitung, 6/1988, 5/1989, 10/1990 Verlag "Junge Welt"

11) Die Unterstufe, 2-3/80-84,87-89, Verlag "Volk und Wissen"

12) Die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade in Deutschland, A.Felgenhauer, H.-D. Gronau, R. Labahn, W. Ludwicki, W. Moldenhauer, J. Prestin, M. Rüsing, E. Wegert, M. Welk; Springer-Spektrum 2021

1.2 Autoren der Lösungen

Nachfolgend wird für die Autoren der Lösungen die gelöste Aufgabennummer genannt. Einige Autoren werden mit ihrem selbstgewählten Pseudonym genannt.

Die dem offiziellen Lösungsvorschlag der Aufgabenkomission entnommenen Lösungen werden im Text entsprechend gekennzeichnet und hier nicht explizit aufgeführt.

1.2.1 Klassenstufen 1 bis 7

Die Lösungen der Klassenstufen 1 und 2 (bis 1987) wurden aus "25 Jahre ABC-Mathematik-Olympiaden" (Heft 77a, Mathematischer Lesebogen, J. Lehmann 1987) entnommen und überarbeitet, die anderen Lösungen durch Steffen Polster erstellt.

Die Lösungen der Klassenstufen 3 und 4 wurden durch Steffen Polster erstellt.

Die Lösungen der Klassenstufe 5 wurden dem offiziellen Lösungsvorschlag entnommen, mit Ausnahme der Lösungen der Vorolympiade, der I. Runde 1961 bis 1977 und 1979, der II. Runde 1961 bis 1963 und 110521 (Steffen Polster).

Die Lösungen der Klassenstufe 6 wurden dem offiziellen Lösungsvorschlag entnommen, mit Ausnahme der Lösungen der Vorolympiade, der I. Runde 1961-63, 1966-69, 1973-74 und 1976, der II. Runde 1961-62 (Steffen Polster).

Die Lösungen der Klassenstufe 7 wurden dem offiziellen Lösungsvorschlag entnommen, mit Ausnahme der Lösungen der Vorolympiade (Steffen Polster).

1.2.2 Klassenstufe 8

- Carsten Balleier: 010821 ... 010835, 020821 ... 020836, 030833
- Korinna Grabski: 030831, 030834
- Eckart Keller: 050831 ... 050836
- Manuela Kugel: 030825, 040831 ... 040836, 050821 ... 050824, 060811 ... 060814, 070811 ... 070814
- Steffen Polster: Vorolympiade, 030821 ... 030823

1.2.3 Klassenstufe 9

- Carsten Balleier: 010915, 010916, 010925, 010934, 030913, 030916
- Christiane Behns: 010921 ... 010924, 010931, 010933, 010935
- Sebastian Boesler: 030911, 030912
- Conny42: 120921, 120922
- cyrix: 070922, 070936, 080934, 090921 ... 090924, 090933 ... 090936, 100921 ... 100936, 110935, 110936, 120921, 120932, 120935, 130923 ... 130936, 140921, 140932 ... 140936, 150922 ... 150934, 150936, 160931 ... 160936, 170922 ... 170936, 180931 ... 180936, 190921 ... 190936, 200921 ... 200935, 210921 ... 210936, 220921 ... 220935, 230931 ... 230936, 240931 ... 240936, 250931 ... 250936, 260921 ... 260936, 270922, 270924 ... 270936, 280931 ... 280935, 290921 ... 290935, 300921 ... 300936, 310921 ... 310936, 320921 ... 320934, 320936, 330923, 330924, 330933 ... 330946, 340921, 340923, 340931 ... 340946
- Christiane Czech: 010911 ... 010914
- Julia Erhard: 090914
- Korinna Grabski: 010915, 030933
- Annika Heckel: 070913
- Felix Kaschura: 060921
- Kitaktus: 050931, 070934
- Stefan Knott: 020915, 070923, 070924
- Manuela Kugel: 030931, 030935, 030936, 040912, 040913, 050911 ... 050922, 050924, 060911 ... 060913, 070911, 070914, 080912, 080914, I. Runde 1970-1974
- Andre Lanka: 020911 ... 020935
- J.Lehmann, W.Unze [6]: V10921 ... V10925
- Matthias Lösche: 050923
- MontyPythagoras: V00914, V10932
- Nuramon: 070933, 070934, 080922 ... 080924, 090922, 140922, 221031, 280936, 320935, 330932

- Steffen Polster: V00901 ... V00913, V00916, V00917, V10911 ... V10915, V10934, 040911, 060924, 090911, 090912, 140923, 140924, 310923, 330921, 330922, 330931
- Rainer Sattler: 070912, 090913
- Marcel Seifert: 320936
- Eckard Specht: 010932
- Kristin Steinberg: 040915
- StrgAltEntf: V10931, 060934, 090931, 120923, 120934, 140921
- svrc: V00915, V10933,
- Burkhard Thiele: 030914
- Vercassivelaunos: 060931
- weird: 070922
- Philipp Weiß: 040914, 060932
- ZePhoCa: 060936, 080921, 080931, 080933, 080935, 110924, 110931, 120931, 120936

1.2.4 Klassenstufe 10

- Carsten Balleier: 010934, 021031, 031012, 031015
- cyrix: 031034, 041042, 051032, 051042, 051043, 051046, 061036, 061042, 061045, 071031 ... 071034, 071044, 071046, 081031, 081034, 081036, 081042 ... 081046, 091031, 091033, 091035, 091046, 101021 ... 101041, 101043A ... 101045, 111034 ... 111042, 111043B, 111044, 111046, 121032, 121033, 121035, 121036, 121041, 121043B ... 121046, 131024, 131032, 131036, 131043, 131044, 211031 ... 211034, 211043A, 221032, 221034, 221036, 221043B, 221045, 231034, 231041, 231043A, 231045, 241034, 241044, 251041, 251043A ... 251046, 261036, 261041, 261042, 261043B, 271032, 271042, 301021 ... 301032, 301034, 301035, 301045, 311024, 311031, 311041, 321022 ... 321032, 321034, 321035, 321041, 321043B ... 321045, 331021 ... 331031, 331033 ... 331035, 331041, 331043, 331045, 341031 ... 341035, 341041, 341042, 341045
- Christiane Czech: 011011 ... 011014, 011021, 011022, 011025, 011031 ... 011033, 011035
- Korinna Grabski: 031011
- Daniel Gutekunst: 041015
- Stephan Hauschild: 131033
- Annika Heckel: 041016
- Kitaktus: 051023, 051024
- Kornkreis: 101011, 131044, 151046, 171035, 221041, 301044, 311043A, 311045, 331036
- Manuela Kugel: 011016, 021041 ... 021043, 031041, 041012, 041014, 091011
- Andre Lanka: 021011 ... 021016, 021021 ... 021025, 021032, 021033, 021035, 021036, 021044
- J.Lehmann, W.Unze [6]: V01005, V01016, V01017, V11012, V11021
- Matthias Lösche: 061046
- Manuel Naumann: 031031 ... 031036
- MontyPythagoras: V01010, V01012, V11031, V11032, V11034, 121042, 141023, 151033, 151043A, 151043B, 161046, 201032 ... 201034, 211043B, 221033, 221035, 221042, 221043A, 241031, 241032, 241036, 241043A, 241044, 311033
- Nuramon: V01006, 031034, 091041, 141033, 141034, 141043B, 141045, 151035, 151044, 161044, 201021, 201023, 211035, 211041, 211042, 211045, 221031, 231033, 281031, 291031, 291032, 311042, 321042, 321046, 341024
- ochen: V01006, 151036, 311023, 311036, 321036, 321042, 331032, 341021, 341044
- OlgaBarati: 161043A, 221046, 271045, 311022, 331046
- Steffen Polster: V01002, V01007 ... V01009, V11015, V11022 ... V11024, 111045, 121021 ... 121031, 121034, 131031, 131033, 131035, 131041 ... 131043A, 141023, 141024, 151021 ... 151024, 151031, 161043B, 201022, 201024, 201031, 201035, 241023, 261021, 261023, 261031, 261034, 271021 ... 271023, 281031, 281032, 281034, 281036, 291034, 311021, 311032, 321021, 331044, 341023, 341024
- Frank Rehm: 301044
- Rainer Sattler: 031013
- Eckard Specht: 011023, 011024, 011034, 011041 ... 011045, 021034, 021045, 031042, 031046
- StrgAltEntf: V01006, V01013, V01014, V11033, 081021, 091036

- svrc: V01001, V01003, V01004, V01011, V11011, V11013, V11014, V11025, V11035
- Steffen Weber: 011015, 031043
- weird: 011035, 131021, 141021, 141022, 141031, 141035, 141044, 201035
- Manfred Worel: 021046
- ZePhoCa: 051044

1.2.5 Klassenstufe 11

- Carsten Balleier: 021121, 021123, 021134
- Engel/Pirl [2]: 011132, 021132, 031115, 041111 ... 041114
- Korinna Grabski: 011111, 011112, 011115, 011121, 011122, 011133, 021116, 031112
- Manuela Kugel: 021125
- MontyPythagoras: V11124, V11132, V11134
- Rainer Müller: 041115, 041116
- Manuel Naumann: 031113
- ochen: V11133
- OlgaBarati: V11121, V11132
- Steffen Polster: V01101 ... V01120, V11135
- Rainer Sattler: 031111
- Eckard Specht: 011113, 011114, 011123, 011124, 011134, 021111, 021112, 021115, 021122 ... 021124, 021131, 021135
- StrgAltEntf: V11125
- svrc: V11122 ... V11123, V11131
- Henning Thielemann: 031121 ... 031125
- Steffen Weber: 011131, 011135, 021114, 021133, 031114, 031116
- Manfred Worel: 021136
- ZePhoCa: 031121

1.2.6 Klassenstufe 12

- Carsten Balleier: 011231, 011244, 021212, 021213, 021222, 021224, 021234, 031234, 031236
- Caban: 041226, 051221, 051225
- cyrix: V01218, V01220, V01221, 041221, 051231, 061222, 061225, 061226, 061231, 061233, 061235, 061236, 061243, 061245, 071225, 071226, 071231, 071234 ... 071236, 071241, 071243, 071244, 081223, 081225, 081226, 081231 ... 081234, 081242 ... 081244, 091221, 091222, 091231 ... 091234, 091236, 091243, 091244, 101222, 101223, 101231 ... 101234, 101246B, 111231, 111232, 111236A, 111243, 121234, 121236A, 121236B, 131221, 131232 ... 131235, 131244, 131246A, 131246B, 141234, 141236A, 151234, 151241, 161222, 171223, 171235, 171236B, 181223, 181235, 181246A, 191222, 191234, 201231, 201233B, 211221, 211235, 211236A, 221245, 231245, 241231, 241233A ... 241234, 241246B, 251221 ... 251224, 251231, 251233A, 251233B, 251235, 251241, 251243, 251245 ... 251246B, 261221, 261233A, 291233B, 301233B, 301234, 301244, 301245, 311231, 311235, 321222, 321224, 331236, 341222, 341236
- Engel/Pirl [2]: 011211, 011222, 021221, 021236, 021242, 021244, 021246, 031221 ... 031223, 031231, 041215
- Korinna Grabski: 011221, 011241, 021231, 031232
- Sonnhard Graubner: 091246
- Daniel Gutekunst: 041246, 071212, 071213, 171233
- Annika Heckel: 081211, 171231, 171232
- Peter Hieber: 041214
- Arnd Hübsch: 151231
- Felix Kaschura: 051211, 071214, 151233
- Kitaktus: 041231, 041232, 111234, 121232, 151223, 161224, 171222, 221214, 221243, 231241, 301242, 311233B
- Kornkreis: 041235, 051242, 051246, 051223, 061241, 061242, 071222, 101243, 111245, 121242, 121245, 131243, 151236A, 151241, 161233, 161235, 171242, 191223, 191233A, 211236B, 211241, 231242, 231246A, 241246A, 251242, 261235, 271241, 271245, 281241, 301246B, 311242, 321224, 321241, 321242, 331245, 341231, 341241

- Manuela Kugel: 021232, 021245, 031243, 051212, 051224, 061221, 091221
- MontyPythagoras: V01203, V01212, V11221, V11224, V11232, V11234, 081222, 111243, 121235, 141233, 141246B, 161234, 161236A, 181223, 181231, 181235, 191233A, 191233B, 191235, 191236, 201222, 221246A, 221246B, 231234, 231244, 241222, 241232, 271232, 271242, 281231, 281232, 281235, 291222, 291233A ... 291234, 311223, 311232, 311233A, 311234, 311236, 311241, 311244 ... 311246A, 321221, 321233A, 321234, 321236, 321244, 321245, 331222, 331231, 331232, 331233B, 331234, 331242 ... 331244, 331246A, 341221, 341223, 341233A, 341233B, 341235, 341236, 341242, 341244, 341246B
- L.J. Mordell: 301246A
- Rainer Müller: 041211 ... 041213, 041233, 041234, 041236, 041243 ... 041245
- Bernd Noack: 281241
- Monika Noack: 291243, 291246A
- moudi: 181236
- Nuramon: V01210, 021223, 051233, 061246, 071223, 081245, 081246, 101242, 131236A, 131245, 151232, 191224, 221236, 231244, 241232, 251244, 271243, 271246B, 291223, 291224, 291231, 301232, 311243, 321223, 321233A, 321235, 321243 ... 321246B, 331246A, 341224
- ochen: V01222, V11221, V11233, 131242, 141236B, 151221, 151235, 151236B, 171224, 171236A, 181221, 221214, 251242, 251244
- OlgaBarati: V01202, V01205, V01207, V01208, V11231, V11235, 131231, 161223, 171221, 201222, 221243, 231246B
- Steffen Polster: V01201, V01209 ... V01211, V01202, V01214 ... V01217, V01219, 141235, 161221, 171223, 311221
- Eckard Specht: 011212 ... 011215, 011223, 011224, 011232, 011233, 011235, 011242, 011243, 011245, 021211, 021214, 021215, 021225, 021243, 031224, 031232, 031241
- StrgAltEntf: V11225, 051223, 051242, 071221, 081224, 081241, 091241, 101241, 101244, 101246A, 111223, 111236B, 111241, 121224, 171246B, 201236
- svrc: V01204, V01213, V11222, V11223, 131241, 161236B, 181236A, 191235
- Burkhard Thiele: 021233, 021241
- Henning Thielemann: 031211 ... 031216, 031225, 031242, 031244 ... 031246, 331233A, 331235
- Gerd Wachsmuth: 061211
- Steffen Weber: 011234, 021216, 031213, 031235
- weird: V01206, 011222, 021125, 041234, 051231, 051242, 071225, 081236, 091245, 101221, 111222, 111232, 111233, 111235, 111236A, 121222, 121231, 121233, 121242, 131222, 131224, 131236A, 131236B, 141221, 141222, 141224, 141231, 141232, 151224, 161231, 171035, 171234, 181222, 181224, 181233, 181234, 191221, 191224, 191231, 191243, 191246B, 211222, 211224, 221221 ... 221224, 221231, 221232, 221235, 221236, 221241, 221242, 231224, 231235, 231241, 241235, 241236, 251242, 261231, 271221, 271231, 281234, 291221, 291236, 301221 ... 301223, 301231, 301233A, 301235, 301236, 301241, 301243, 311224, 321232, 321233B, 321244, 331221, 331223, 331236, 331241, 331246B, 341233A, 341234, 341243, 341245, 341246A
- Manfred Worel: 021235
- ZePhoCa: 051234, 081221
- Zeitschrift ”alpha” [1]: 281242 ... 281246B, 291241 ... 291246B
- Zeitschrift ”Mathematik in der Schule” [3]: 111246B, 121243, 121244, 121246A, 121246B, 141246A, 151242 ... 151246B, 171241, 171243 ... 171246A, 181241 ... 181246A, 191241, 191242, 191244 ... 191246A, 201241 ... 201243, 201245 ... 201246B, 211242 ... 211246B

2 Klassenstufe 5

2.1 Vorolympiade 1960/61

2.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 5

Aufgabe 1 - V00501
Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet.
Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

Der Umfang u des Quadrates bei Seitenlänge a ist $u = 4a$. Da $\frac{992}{4} = 248$ m Zaun verbaut wurden, ist $a = 62$ m.
Für den Flächeninhalt wird $A = a^2 = 62^2 = 3844$ m^2, d. h. rund 0,38 ha.

Aufgabe 2 - V00502
Nimm eine dreistellige Zahl; allerdings mit der Einschränkung, dass die erste und letzte Ziffer nicht übereinstimmen; setze die Ziffer in umgekehrter Reihenfolge darunter und stelle die Differenz fest! Schreibe die Umkehrung dieser Zahl nochmals darunter! Addiere dann Umkehrung und Differenz! Führe die Aufgabe an zwei Beispielen durch! Was stellst du fest?

Die nachfolgenden Beispiele ergeben am Ende als Ergebnis 1089:

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 9 & 8 \\ + & 8 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 9 & 1 \\ - & 1 & 9 & 6 \\ \hline & 4 & 9 & 5 \\ + & 5 & 9 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

Aufgabe 3 - V00503 = V00607
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält dann 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

x sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x + 16) \cdot 7 - 8) : 9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

$$((x + 16) \cdot 7 - 8) = 9 \cdot 22 + 4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} ((x + 16) \cdot 7 - 8) &= 9 \cdot 22 + 4 \\ (x + 16) \cdot 7 - 8 &= 198 + 4 \\ (x + 16) \cdot 7 &= 202 + 8 \\ x + 16 &= 210 : 7 \\ x &= 30 - 16 = 14 \end{aligned}$$

Die gedachte Zahl ist 14.

Aufgabe 4 - V00504
Die dreifache Summe der beiden Zahlen 14076 und 1009 soll um die doppelte Summe der beiden Zahlen 8072 und 496 vermehrt werden.

Zu berechnen ist
$$3 \cdot (14076 + 1009) + 2 \cdot (8072 + 496) = 62391$$

Aufgabe 5 - V00505
Wie viel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kantenlänge unterbringen?

Ein Zündholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot 2 = 200$ mm^3 $= 0{,}2$ cm^3. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000$ cm^3. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Zündhölzer in den Würfel.

Aufgabe 6 - V00506
1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; usf.
Diese Zahlenfolge ist nach einem bestimmten Gesetz aufgebaut. Setze diese Zahlenfolge bis über 50 hinaus fort!

Beginnend bei der 1 werden folgende Summanden addiert: 3, 1, 2, 5. Danach beginnt man wieder mit der 3 und addiert weiter 1, 2, 5, usw.

Damit ist die gesuchte Zahlenfolge:

$$1; 4; 5; 7; 12; 15; 16; 18; 23; 26; 27; 29; 34; 37; 38; 40; 45; 48; 49; 51; 56; \dots$$

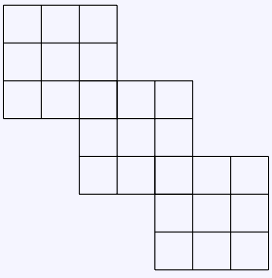
Aufgabe 7 - V00507
Wie heißen Subtrahend und Minuend in der folgenden Subtraktionsaufgabe: $\star\star\star\star - \star\star\star = 1$.

Die einzige vierstellige Zahl, die bei der Subtraktion mit einer dreistelligen Zahl 1 ergibt, ist die 1000. Damit ist der Subtrahend 1000 und der Minuend 999.

Aufgabe 8 - V00508
Drei Freunde sitzen in einer Gaststätte. Jeder hat 10 DM zu zahlen. Das sind insgesamt 30 DM. Der Wirt beauftragt jedoch den Ober, den Gästen 5 DM zurückzuzahlen.
Der Ober gibt jedem Gast aber nur 1 DM zurück, also insgesamt 3 DM, und behält 2 DM für sich. Die Freunde haben also für die Zeche zusammen 27 DM bezahlt. 2 DM hat der Ober behalten. Das sind 29 DM.
Wo ist die restliche Mark?

Jeder Gast hatte $(30 - 5) : 3 = 8\frac{1}{3}$ DM zu bezahlen, zahlte jedoch $(30 - 3) : 3 = 9$ DM, also $\frac{2}{3}$ DM zu viel.
Das sind $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ DM, die der Ober für sich behielt. Die Bezugnahme auf die restliche 1 DM ist eine Irreführung.

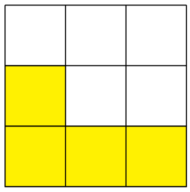
Aufgabe 9 - V00509



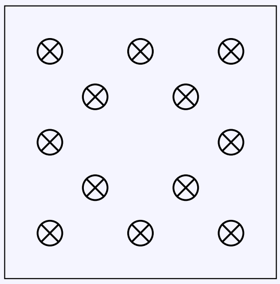
Setze in der Figur Zahlen zwischen 1 und 9 so ein, dass die waagerechte und senkrechte Addition stets die Summe von 18 ergibt!

7	8	3				
6	8	4				
5	2	6	4	1		
		3	9	6		
		2	5	4	6	1
				6	3	9
				1	9	8

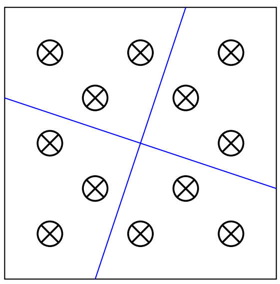
Aufgabe 10 - V00510
Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6 cm!
Schraffiere davon $\frac{4}{9}$ (vier Neuntel)!



Aufgabe 11 - V00511



In einem quadratischen Obstgarten sind 12 Obstbäume so angeordnet, wie die Zeichnung zeigt.
Der Garten soll durch zwei gerade Linien so in vier Teile zerlegt werden, dass auf jedem Stück drei Bäume stehen.



Alle Aufgaben gelöst durch Steffen Polster

2.2 I. Olympiade 1961

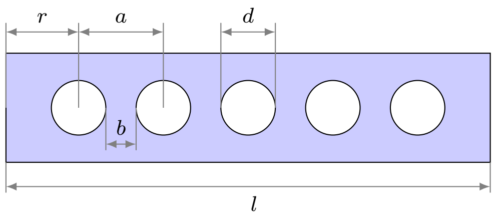
2.2.1 I. Runde 1961, Klasse 5

Aufgabe 1 - 010511
Im Rechenschaftsbericht an den XXII. Parteitag der KPdSU heißt es, dass an die Bevölkerung der Sowjetunion im Jahre 1953 insgesamt 1757000 t, im Jahre 1960 aber 4158000 t Fleisch und Fleischerzeugnisse verkauft wurden.
Wie viel Tonnen Fleisch und Fleischerzeugnisse wurden 1960 mehr verkauft als 1953?

Zur Lösung ist die Differenz der Massen der Fleisch und Fleischerzeugnisse von 1960 und 1953 zu berechnen. Es ist 4158000 t - 1757000 t = 2401000 t, d. h. es wurden 2,401 Millionen Tonnen mehr produziert.

Aufgabe 2 - 010512
Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang.
Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.

a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?



Für die gegebenen Größen (siehe Abbildung) wird: Länge des Brettchens l = 160 mm, Durchmesser eines Lochs d = 18 mm und als Abstand zwischen den Randbohrungen und dem Rand r = 24 mm.
Gesucht sind der Abstand zwischen zwei Lochmitten a und der Abstand zwischen zwei Bohrungen b.

a) Da links und rechts der Abstand r auftritt, verbleiben für die vier Abstände zwischen den Bohrungen $l - 2r$ und somit $a = \frac{1}{4}(l - 2r) = 28\,\text{mm}$.
Der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte beträgt 28 mm.

b) Da eine Bohrung einen Radius $\frac{d}{2}$ wird ebenso $b = a - 2\frac{1}{2}d = 10\,\text{mm}$.
Der Zwischenraum zwischen zwei Bohrungen beträgt 10 mm.

Aufgabe 3 - 010513

Ersetze die fehlenden Ziffern!
Wie hast du die fehlenden Ziffern gefunden?

```
  * * * · * 2
-----------
  * 0 8
* 6 *
-----------
* 1 2 *
```

Die Addition der zwei Zwischenprodukte ergibt sofort

```
  5 0 8
* 6 2
-------------
* 1 2 8
```

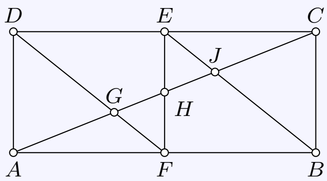
Da das erste Zwischenprodukt 508 vollständig ist und durch Multiplikation des ersten Faktors mit 2 entsteht, ist der erste Faktor folglich 254.
Die letzten Stelle der zweiten Multiplikation ist 2 erhalten. Damit muss die Einerstelle von 254 entweder mit 3 oder 8 multipliziert werden. Nur mit 3 ergibt sich aber die Zehnerstelle 6 des zweiten Produkts und somit

```
  2 5 4 · 3 2
-------------
  5 0 8
* 6 2
-------------
* 1 2 8
```

Die Ausgangsaufgabe ist vollständig bestimmt und ergibt damit als vollständige Lösung:

```
  2 5 4 · 3 2
-------------
  5 0 8
7 6 2
-------------
8 1 2 8
```

Aufgabe 4 - 010514



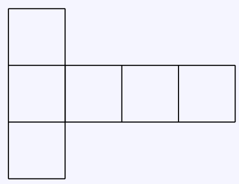
Wie viel Dreiecke sind in der Figur enthalten? Schreibe alle Dreiecke auf (z. B. ABC)!

Die Figur besteht aus 8 Teilflächen, wovon 2 unregelmäßige Vierecke und sechs Dreiecke sind. Diese Dreiecke sind: AGD, AFG, GFH, EHJ, EJC und JBC.

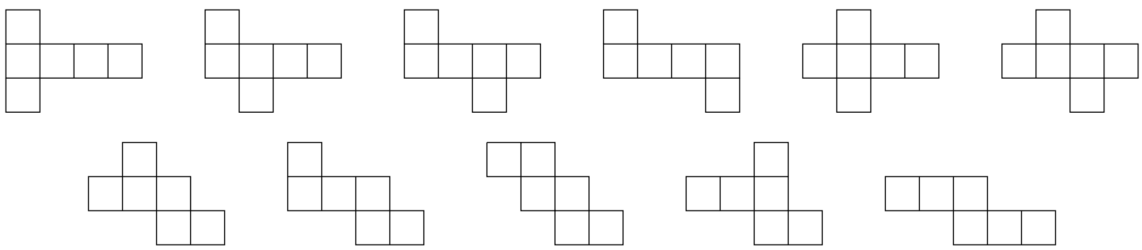
Verbindet man zwei, drei oder vier der insgesamt 8 Teilflächen, so können weitere Dreiecke entstehen. Aus zwei Teilflächen sind die sechs Dreiecke AFD, AFH, FED, EFB, EHC und EBC zusammengesetzt, aus drei Teilflächen die zwei Dreiecke ABJ und DGC und sogar aus vier Teilflächen die zwei Dreiecke ABC und DAC. Verbindet man mehr als vier Teilflächen, so entsteht kein Dreieck.
Damit gibt es ist der Figur insgesamt $6 + 6 + 2 + 2 = 16$ Dreiecke.

Aufgabe 5 - 010515

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels. Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen. Versuche, 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge $a = 2\,\mathrm{cm}$)!



Es existieren elf verschiedene inkongruente Netze des Würfels, von denen außer dem in der Aufgabenstellung fünf andere zu wählen sind:



Aufgaben der I. Runde 1961 gelöst von Steffen Polster

2.2.2 II. Runde 1961, Klasse 5

Aufgabe 1 - 010521
Im Jahre 1961 wurden in der DDR 70000 t Schlachtvieh und Geflügel, 115000 t Milch und 300000000 Eier mehr auf den Markt gebracht als im Jahre 1960. Die Einwohnerzahl unserer Republik beträgt rund 17000000.
Wie viel Schlachtvieh und Geflügel, wie viel Milch und wie viel Eier konnte jeder Bürger unserer Republik im Jahre 1961 zusätzlich verbrauchen? Runde auf volle Kilogramm bzw. volle Stückzahlen!

Für jedes Produkt ist der Quotient aus der produzierten Menge und der Einwohnerzahl zu berechnen:

Schlachtvieh und Geflügel: $\frac{70000}{17000000}$ t $= \frac{70000000}{17000000}$ kg ≈ 4 kg;

Milch: $\frac{115000}{17000000}$ t $= \frac{115000000}{17000000}$ kg ≈ 7 kg;

Eier: $\frac{300000000}{17000000}$ Stück ≈ 18 Stück.

Für jeden Bürger waren im Jahre 1961 durchschnittlich rund 4 kg Schlachtvieh und Geflügel, rund 7 kg Milch und rund 18 Eier zusätzlich verfügbar.

Aufgabe 2 - 010522
Bei einem Probeflug von Moskau zur sowjetischen Südpolar-Beobachtungsstation Mirny über insgesamt 25300 km legte ein Flugzeug vom Typ „IL 18“ die letzten 6700 km in zwei Etappen zurück. Dabei war die erste Etappe um rund 1700 km länger als die zweite.
Wie viel Kilometer betrugen die beiden Etappen?

Es sei a die Länge der ersten Etappe und b die Länge der zweiten Etappe. Damit ergeben sich die Gleichungen

$$a + b = 6700\,\text{km} \qquad ; \qquad a = b + 1700\,\text{km}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ergibt

$$(b + 1700\,\text{km}) + b = 6700\,\text{km} \quad \Rightarrow b = 2500\,\text{km} \quad ; \quad a = 2500\,\text{km} + 1700\,\text{km} = 4200\,\text{km}$$

Die erste Etappe ist 4200 km und die zweite 2500 km lang.

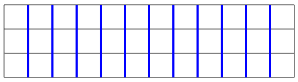
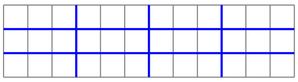
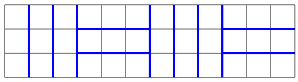
Aufgabe 3 - 010523
Jemand behauptet, er könne 30 Äpfel so unter 3 Kinder (ungleichmäßig) verteilen, dass jedes Kind eine ungerade Anzahl Äpfel erhält.
Ist das möglich? Begründe deine Antwort!

Eine ungerade Zahl kann geschrieben werden als $2 \cdot n + 1$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Bei dieser Aufgabenstellung soll die 30 sich als Summe von drei ungeraden Zahlen ergeben, d. h.

$$30 = (2 \cdot n_1 + 1) + (2 \cdot n_2 + 1) + (2 \cdot n_3 + 1) \qquad \Rightarrow \qquad 27 = 2 \cdot (n_1 + n_2 + n_3)$$

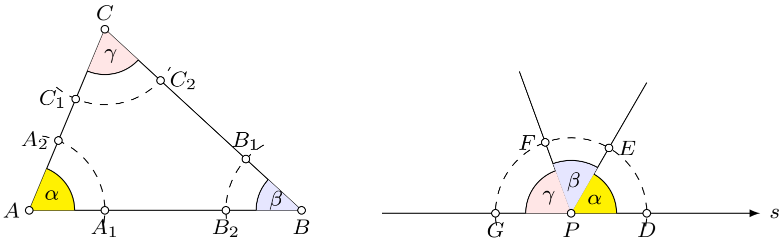
Da 27 eine ungerade Zahl ist und auf der rechten Seite der Gleichung auf Grund des Faktors 2 immer eine gerade Zahl entsteht, gibt es keine natürliche Zahlen n_1, n_2 und n_3 als Lösungen.
Es ist nicht möglich, wie gefordert die Äpfel unter den Kindern zu verteilen.

Aufgabe 4 - 010524
Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60$ cm und der Breite $b = 15$ cm sollen 12 kleine Brettchen von der Größe 5 cm mal 15 cm ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen.
Wie viel Schnitte muss er mindestens durchführen? (Das Sägen „im Paket“ soll dabei nicht gestattet sein.) Wie viel Zentimeter beträgt der Sägeweg?

a)  b)  c) 

Lutz kann auf drei verschiedene Arten die Schnitte ausführen.
In Bild a) sägt er 11 mal vertikal, womit 12 kleine Brettchen entstehen. Er benötigt 11 Schnitte.
Im Bild b) schneidet er zweimal horizontal und anschließend 9 mal vertikal, d. h. wieder 11 Schnitte. Das gleiche Ergebnis erhält er, wenn er dreimal vertikal und danach 8 mal horizontal durchsägt.
Im dritten Bild c) zersägt er das Brett mit 3 Schnitten und 4 kleinere Bretter der Größe 15 cm × 15 cm und anschließend jedes Teilbrett zweimal, je nach Bedarf waagerecht oder senkrecht.
In allen drei Fällen benötigt er 11 Schnitte. Der gesamte Sägeweg ist bei a) $11 \cdot 15\,\text{cm} = 165$ cm. Auch in den anderen zwei Fällen muss er 165 cm lang schneiden.

Aufgabe 5 - 010525
Zeichne ein beliebiges Dreieck und nenne seine Winkel α, β und γ!
Konstruiere mit Zirkel und Lineal außerhalb des Dreiecks den Winkel $\alpha + \beta + \gamma$! Wie groß ist der konstruierte Winkel vermutlich?



Die linke Abbildung zeigt das Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α, β und γ. Zur Konstruktion der Summe der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ wählt man einen beliebigen Punkt P und von diesem aus einen Strahl s. (rechte Abbildung)

Um die Punkte A, B und C des Dreiecks und den Punkt P zeichnet man Kreisbögen mit gleichem Radius. Die Schnittpunkte der Kreisbögen mit den Dreiecksseiten seien A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit dem Strahl s sei D.

Die Zirkelspannen A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 trägt man nacheinander, beginnend bei D, auf dem Kreisbogen um P ab und erhält die Schnittpunkte E, F und G. Verbindet man G mit P, so ist der Winkel $\angle DPG$ die Summe der Innenwinkel des Dreiecks. Man sieht, dass D, P und G auf einer Geraden liegen. Der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ ist also ein gestreckter Winkel und beträgt somit 180°.

Aufgaben der II. Runde 1961 gelöst von Steffen Polster

2.3 II. Olympiade 1962

2.3.1 I. Runde 1962, Klasse 5

Aufgabe 1 - 020511
Beim Aufbau des Berliner Stadtzentrums entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Zuerst wurde die Baugrube ausgehoben. Dabei mussten etwa 7100 m^3 Boden abtransportiert werden:

a) Wie viel Muldenkipperladungen waren das, wenn ein Kipper 4 m^3 Boden transportieren kann?
b) Wie lang wäre der für den gesamten Transport nötige „Muldenkipperzug“ gewesen, wenn jeder Muldenkipper eine Länge von 3 m hat?

a) Das Gesamtvolumen von 7100 m^3 ist durch die Ladefähigkeit eines Kippers von 4 m^3 zu teilen: $\frac{7100m^3}{4m^3} = 1775$.
Es waren 1775 Muldenkipperladungen.

b) Da jeder Kipper 3 m lang ist, ergibt sich für die Gesamtlänge aller Kipper 3 m $\cdot$ 1775 = 5325 m.

Aufgabe 2 - 020512
„Genau eine Million zweihundertneuntausendsechshundert Sekunden dauert es, bis wir uns wieder treffen“, sagt Walter, der gern mit großen Zahlen rechnet, zu Rolf, als sie sich am 10. Mai um 12.00 Uhr verabschieden.
Wann treffen die beiden wieder zusammen?

$$1209600 \text{ s} = \frac{1209600}{60} \text{ min} = 20160 \text{ min} = \frac{20160}{60} \text{ h} = 336 \text{ h} = \frac{336}{24} \text{ d} = 14 \text{ d}$$

14 Tage nach dem 10. Mai 12.00 Uhr sind der 24. Mai 12.00 Uhr. Walter und Rolf treffen sich am 24. Mai 12.00 Uhr wieder.

Aufgabe 3 - 020513
Zwei Pioniergruppen wollen an einem Sonntag eine Wanderung nach dem zwölf Kilometer entfernten Neuendorf machen. Die erste Gruppe will um 8.00 Uhr aufbrechen. Sie legt in jeder Stunde 4 km zurück.
Die andere Gruppe macht eine Radwanderung und kann in jeder Stunde 12 km schaffen.
Wann muss sie aufbrechen, wenn beide Gruppen gleichzeitig in Neuendorf eintreffen wollen?

Die erste Gruppe wandert 4 km pro Stunde und erreicht das Ziel in 12 km Entfernung in 3 Stunden, d. h. sie erreichen Neuendorf um 11.00 Uhr.
Die zweite Gruppe legt 12 km pro Stunde zurück und benötigt nur 1 Stunde bis zum Ziel. Damit mussen sie um 10.00 Uhr in Neuendorf starten.

Aufgabe 4 - 020514

Bei dieser Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich.
Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

```
4 * * · * 2 *
-------------
  * 3 * *
      * 1 2
      * * 4 *
-------------
  * * * * * 8
```

Aus den letzten zwei Spalten ergibt sich, dass das Ergebnis auf 68 und das dritte Zwischenprodukt auf 48 endet.

Die letzte Stelle des linken Faktors kann nur 1 oder 6 sein, um als letzte Stelle des zweiten Zwischenprodukts eine 2 zu erhalten. Die 1 im Zehner dieses Produkts muss aber durch einen Übertrag entstehen, womit die letzte Stelle des linken Faktors sicher eine 6 ist. Für die Zehnerstelle dieses Faktors ist damit eine 0 oder 5 möglich.

Die Ziffer 0 kann ausgeschlossen werden, da dann die 3 im ersten Zwischenprodukt ohne einen Übertrag aus einer Multiplikation der 4 mit einer anderen Ziffer folgen müsste, was nicht möglich ist:

```
4 5 6 · * 2 *
-------------
  * 3 * *
      9 1 2
      * * 4 8
-------------
  * * * * 6 8
```

Der Einer des rechten Faktors kann nur noch 3 oder 8 sein. Die 3 entfällt, da das letzte Produkt dann nicht auf 48 enden kann.

```
4 5 6 · * 2 8
-------------
  * 3 * *
      9 1 2
      3 6 4 8
-------------
  * * * * 6 8
```

Die noch offen erste Multiplikation wird durch Probieren gelöst, wobei nur die 3 die erste Stelle der zweiten Faktors sein kann. Werden noch alle Zwischenergebnisse addiert, ergibt sich als Ergebnis:

```
4 5 6 · 3 2 8
-------------
  1 3 6 8
      9 1 2
      3 6 4 8
-------------
  1 4 9 5 6 8
```

Aufgabe 5 - 020515

An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian.
Weiter wissen wir nur, dass unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.

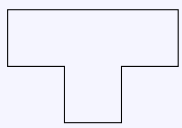
a) Von wem können wir mit absoluter Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muss er so heißen?

a) Einer der Schüler muss Lutz Schulz heißen.

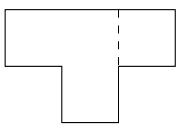
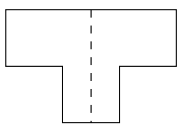
b) Vier der sieben Schülern heißen mit Vornamen Lutz. Ebenso heißen vier von sieben Schülern mit Nachnamen Schulz.
Nur drei Schüler haben nicht den Nachnamen Schulz. Da aber vier Jungen Lutz heißen, muss mindestens einer den Familiennamen Schulz tragen.

Aufgabe 6 - 020516

Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, dass die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?



Mögliche Schnitte sind:

1)  2) 

Aufgaben der I. Runde 1962 gelöst von Steffen Polster

2.3.2 II. Runde 1962, Klasse 5

Aufgabe 1 - 020521
Während der Herbstferien waren viele Oberschüler im Ernteeinsatz. Dabei sammelte jeder der 1200 Schüler eines Stadtbezirkes durchschnittlich 8 dt Kartoffeln täglich. Die Schüler arbeiteten 4 Tage.

a) Wie viel Kartoffeln wurden von den Schülern dieses Stadtbezirkes insgesamt gesammelt? (Angabe in dt)
b) Wie viel Familien können von diesem Vorrat Kartoffeln erhalten, wenn der Jahresbedarf je Familie 250 kg beträgt?

a) $1200 \cdot 8\frac{\text{dt}}{\text{d}} \cdot 4 \text{ d} = 38400$ dt. Von den Schülern wurden insgesamt 38400 dt Kartoffeln geerntet.
b) Die Gesamtmenge ist durch die Menge 250 kg = 2,5 dt je Familie zu teilen, d. h. $\frac{38400 \text{ dt}}{2{,}5 \text{ dt}} = 15360$. 15360 Familien können versorgt werden.

Aufgabe 2 - 020522
Die Erdölleitung „Trasse der Freundschaft“ wird etwa 4000 km lang sein. In jeder Stunde wird die DDR durch diese Leitung 540 t Erdöl erhalten.

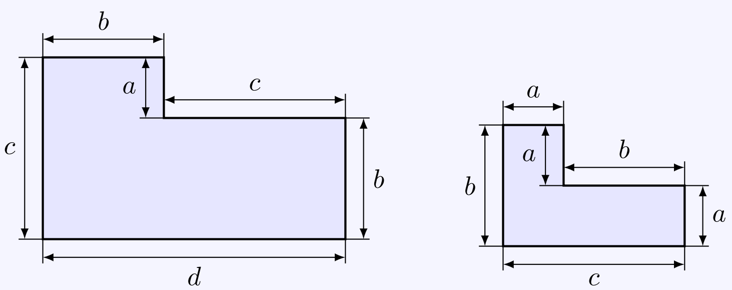
a) Wie viel Tonnen sind das in einer Minute?
b) Wie viel Kilogramm sind das in einer Sekunde?

a) Wenn in einer Stunde 540 t Erdöl transportiert werden, so sind dies je Minute $\frac{540}{60} = 9$ Tonnen.
b) 9 t sind 9000 kg, so dass $\frac{9000}{60} = 150$ kg je Sekunde transportiert werden.

Aufgabe 3 - 020523
Petra spielt mit Werner eine Partie Schach.
Als sie fertig sind, fragt Werner: „Wie lange haben wir eigentlich gespielt?“
Petra antwortet: „Ich weiß es nicht, aber ich habe aus dem Fenster gesehen und gezählt, dass die Straßenbahn genau zehnmal in dieser Zeit an unserem Hause in Stadtrichtung vorbeifuhr. Die erste Bahn kam, als wir mit dem Spiel anfingen, und die zehnte, als wir gerade fertig waren.“
(Die Bahn fährt alle 20 Minuten.)
Wie lange haben Petra und Werner gespielt?

Zwischen der ersten vorbeifahrenden Straßenbahn und der zehnten Bahn liegen $9 \cdot 20 = 180$ Minuten, da die Bahnen im Abstand von 20 Minuten fahren.
Petra und Werner haben somit 180 Minuten = 3 Stunden gespielt.

Aufgabe 4 - 020524
Die Abbildung zeigt zwei verschieden große Flächen. ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $d = 10$ cm)



a) Wie oft ist die kleine Fläche in der großen enthalten?
b) Weise die Richtigkeit dieser Behauptung durch eine Zeichnung nach!

a) Der Flächeninhalt der kleinen Fläche ergibt sich als Differenz der Flächeninhalte eines Rechtecks mit den Seitenlängen b und c, von dem rechts oben ein Rechteck mit den Maßen a und b herausgeschnitten wurde:

$$A_{klein} = bc - ab = 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} - 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

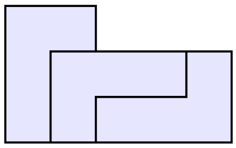
Für die große Fläche wird aus einem Rechteck mit den Seiten c und d ein Rechteck mit den Seiten a und c entfernt.

$$Agroß = cd - ac = 6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} - 2 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$$

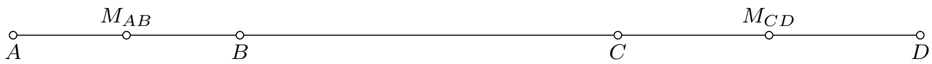
Damit passt die kleine Fläche in die große mit

$$\frac{A_{groß}}{A_{klein}} = \frac{48 \text{ cm}^2}{16 \text{ cm}^2} = 3$$

genau 3 mal hinein, wie auch die Abbildung zur Teilaufgabe b) zeigt.

b) 

Aufgabe 5 - 020525
Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm und $CD = 4$ cm ab! Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe deine Antwort durch Rechnung!



Die Entfernung zwischen M_{AB} und M_{CD} ergibt sich aus der Länge der Strecke BC und jeweils der Hälfte der Strecken AB und CD, d. h.

$$M_{AB}M_{CD} = 0{,}5 \cdot AB + BC + 0{,}5 \cdot CD = 0{,}5 \cdot 3cm + 5cm + 0{,}5 \cdot 4cm = 8{,}5cm$$

Aufgaben der II. Runde 1962 gelöst von Steffen Polster

2.4 III. Olympiade 1963

2.4.1 I. Runde 1963, Klasse 5

Aufgabe 1 - 030511
Der VEB Simson Suhl produziert gegenwärtig täglich 235 Kleinstroller KR 50. Im Jahre 1958 betrug die Produktion dagegen nur 42 Kleinstroller täglich.
Wie viel Kleinstroller wurden im Jahre 1963 mehr produziert als im Jahre 1958? Die Anzahl der Arbeitstage eines Jahres sei dabei mit 300 angenommen.

1958: Da täglich 42 Kleinstroller an 300 Arbeitstagen produziert wurden, ergibt dies insgesamt $42 \cdot 300 = 12600$ Stück im Jahr 1958.
Da 1963 täglich 235 Roller hergestellt wurden, sind dies für das ganze Jahr $235 \cdot 300 = 70500$ Kleinstroller.
Die Differenz beider Produktionszahlen ist 70500 - 12600 = 57900. 1963 wurden somit 57900 Kleinstroller mehr produziert als 1958.

Aufgabe 2 - 030512
Nach der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Pionier gefragt, wie viel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er:
„Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“

a) Wie viel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

a) Der Pionier erzielte 35 Punkte.

b) Die erreichten Punkte seien x. Dann ergibt sich die Gleichung: $(x + 10) \cdot 2 = 100 - 10$.
Über die äquivalenten Umformungen: $(x + 10) \cdot 2 = 90$ und weiter $x + 10 = \frac{90}{2} = 45$ ergibt sich die gesuchte Punktzahl $x = 35$.

Aufgabe 3 - 030513
Klaus hat sich für die „Knobelecke“ eine interessante Aufgabe ausgedacht:
Es sollen bei der Multiplikationsaufgabe

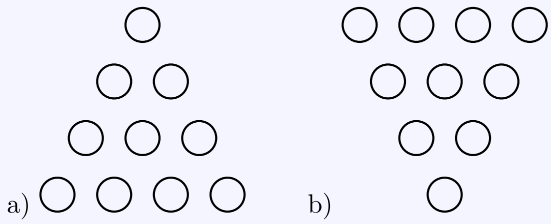
$$13* \cdot \quad 7* = 1****$$

alle * so durch Ziffern ersetzt werden, dass alle drei Zahlen auf die gleiche Ziffer enden und dass beim Ergebnis an der Zehnerstelle die gleiche Ziffer steht wie an der Hunderterstelle.
Was hast du bei der Lösung dieser Aufgabe überlegt?

Da die letzten Stellen der zwei Faktoren und des Produkts die gleiche Ziffer x, mit $0 \leq x \leq 9$, haben, muss auch das Produkt aus x mit sich selbst wieder auf x enden.
Dies gilt nur für die Ziffern $x = 0$, $x = 1$, $x = 5$ und $x = 6$. Die zwei Faktoren sind also 130, 70 oder 131, 71 oder 135, 75 oder 136, 76. Die Multiplikation ergibt:

$130 \cdot 70 = 9100$ ist vierstellig und damit keine Lösung;
$131 \cdot 71 = 9301$ ist vierstellig und ebenfalls keine Lösung;
$135 \cdot 75 = 10125$ ist zwar fünfstellig, jedoch sind Zehner- und Hunderterstelle nicht gleich;
$136 \cdot 76 = 10336$ erfüllt alle Forderungen und ist somit einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 030514

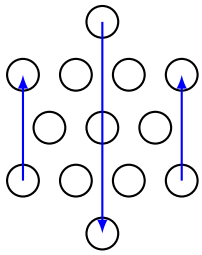


Zehn Pfennige liegen in der Anordnung auf dem Tisch, die die Abbildung a) zeigt. Es sollen einige Pfennige so umgelegt werden, dass die auf der Abbildung b) dargestellte Anordnung entsteht.

a) Wie viel Pfennige muss man mindestens umlegen?

b) Welche Pfennige sind das? Kreuze sie an!

Es müssen nur 3 Pfennige umgelegt werden, wie die Abbildung zeigt.



Aufgabe 5 - 030515
Von fünf Thälmann-Pionieren sind folgende zehn Altersvergleiche bekannt:
Doris ist jünger als Marga, Bärbel älter als Inge, Renate älter als Doris, Inge jünger als Marga, Bärbel jünger als Renate, Renate jünger als Marga, Doris älter als Inge, Marga älter als Bärbel, Inge jünger als Renate, Doris älter als Bärbel.

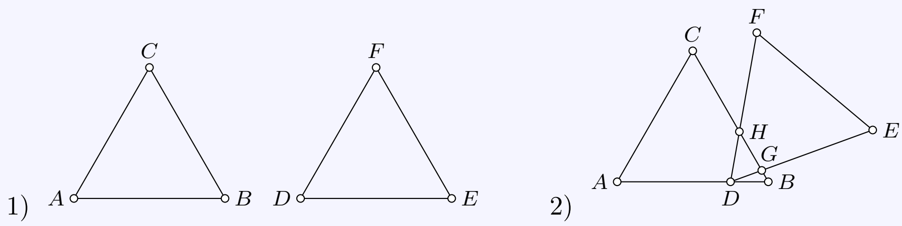
a) Wie lautet die Reihenfolge der fünf Mädchen nach ihrem Alter? Beginne mit der Jüngsten!
b) Welche angegebenen Vergleiche sind überflüssig? Warum?

a) Inge, Bärbel, Doris, Renate, Marga

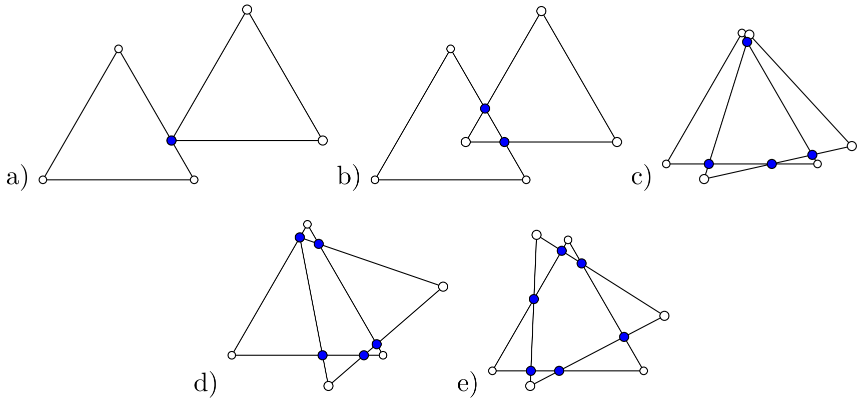
b) Für die Bestimmung der Reihenfolge benötigt man nur die Aussagen:
Bärbel ist älter als Inge, Doris ist älter als Bärbel, Renate ist älter als Doris und Renate ist jünger als Marga. Damit ergibt sich die Anordnung nach dem Alter.

Nicht notwendig sind die Aussagen:
Doris ist jünger als Marga, Inge ist jünger als Marga, Bärbel ist jünger als Renate, Doris ist älter als Inge, Marga ist älter als Bärbel und Inge ist jünger als Renate.

Aufgabe 6 - 030516
Gegeben seien die beiden unter 1) abgebildeten Dreiecke. Sie haben dabei keinen Punkt gemeinsam. Wenn sie dagegen so liegen wie auf der Abbildung 2), haben sie genau drei Punkte, nämlich D, G und H, gemeinsam.



Wie können die Dreiecke liegen, wenn sie genau
a) einen Punkt, b) zwei Punkte, c) vier Punkte, d) fünf Punkte, e) sechs Punkte gemeinsam haben sollen?
Zeichne die Dreiecke in diesen verschiedenen Lagen!



Aufgaben der I. Runde 1963 gelöst von Steffen Polster

2.4.2 II. Runde 1963, Klasse 5

Aufgabe 1 - 030521
Die Kosmonautin Valentina Tereschkowa umkreiste mit dem Raumschiff "Wostok 6" rund 48 mal die Erde. Durchschnittlich benötigte sie für jede Umkreisung rund 88 Minuten.
Wie lange dauerte der gesamte Weltraumflug?

Ohne Berücksichtigung der Start- und Ladezeit wird: Eine Umrundung dauert durchschnittlich 88 Minuten. Damit benötigen 48 Umrundungen $48 \cdot 88$ min = 4224 min = 70 h und 24 min.

Aufgabe 2 - 030522
In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.

a) Wie viel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich - 26 Arbeitstage - angefertigt?
b) Wie viel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

a) Bei 26 Arbeitstagen in einem Monat, an denen jeweils 14 Stück je Tag hergestellt wurden, sind dies für den ganzen Monat: $26 \cdot 14$ Stück = 364 Stück.

b) Ein Halbjahr besteht aus 6 Monaten. Jeden Tag (26 Tage je Monat) werden 2 Stück mehr produziert, als der Plan vorsieht.
Somit ergibt sich: 6 Monate $\cdot$ 26 Tage pro Monat $\cdot$ 2 Stück pro Tag = 312 Stück. Es werden 312 Maschinenteile über den Plan produziert.

Aufgabe 3 - 030523
Heidi, Fritz und Dieter sammeln Briefmarken. Auf die Frage, wie viel Briefmarken sie alle zusammen besitzen, antwortet Fritz:
„Jeder von uns hat eine ungerade Zahl von Briefmarken, zusammen sind es genau 500 Stück.“
Was meinst du zu dieser Behauptung?

Die Behauptung ist falsch.
Eine ungerade Zahl kann immer in der Form $2n+1$, wobei n eine natürliche Zahl ist, geschrieben werden.
Angenommen die Behauptung wäre richtig, so hätte Heidi $2a+1$, Fritz $2b+1$ und Dieter $2c+1$ Briefmarken.
Als Summe ergibt sich:

$$(2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 2(a + b + c) + 2 + 1 = 2(a + b + c + 1) + 1$$

Da $a + b + c + 1$ eine natürliche Zahl ist, ist die Summe selbst ungerade. 500 ist aber eine gerade Zahl, so dass die Annahme, d. h. die Behauptung, nicht stimmen kann.

Aufgabe 4 - 030524
Klaus, Ingrid, Peter und Susanne sollen bei einem Sportfest an einem Staffellauf teilnehmen.

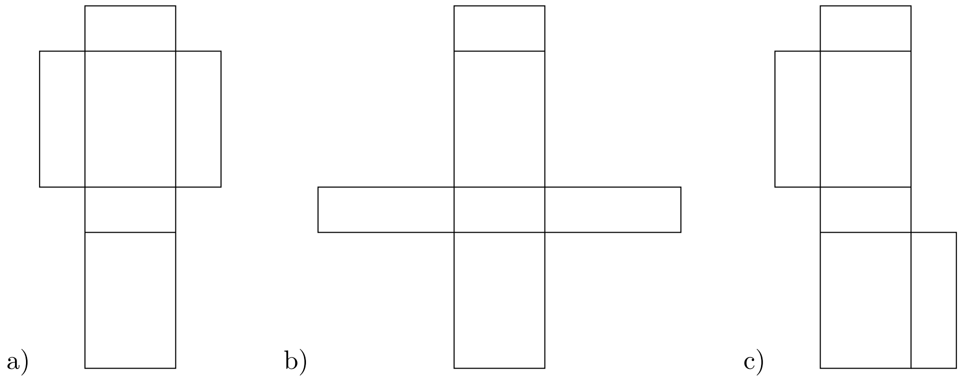
a) Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen? Begründe deine Antwort!
b) Wie viel Möglichkeiten gäbe es, wenn die Staffel aus fünf Läufern bestehen würde?

a) An erster Stelle können Klaus, Ingrid, Peter oder Susanne stehen. Dies sind 4 Möglichkeiten.
Ist ein Kind ausgewählt, so können an zweiter Stelle noch 3 Kinder stehen, d. h. 3 Möglichkeiten. Übrig bleiben 2 Kinder für die letzten beiden Stellen. Dazu gibt es noch 2 Möglichkeiten.
Insgesamt sind dies $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ verschiedene Reihenfolgen.

b) Für jede Reihenfolge der vier Schüler aus der Teilaufgabe a) kann der fünfte Schüler vor dem ersten, vor dem zweiten, vor dem dritten, vor dem vierten oder am Ende eingeordnet werden. Dies sind 5 Möglichkeiten.
Damit ist das Ergebnis das Fünffache des Ergebnisses von a), also 120.

Aufgabe 5 - 030525
Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen $a = 3$ cm (Länge), $b = 2$ cm (Breite) und $c = 1$ cm (Höhe)!

Drei mögliche Netze des Quaders zeigt die Abbildung. Es sind weitere möglich:

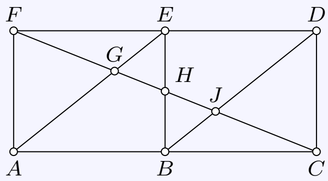


Aufgaben der II. Runde 1963 gelöst von Steffen Polster

2.5 IV. Olympiade 1964

2.5.1 I. Runde 1964, Klasse 5

Aufgabe 1 - 040511



Wie viel Dreiecke erkennst du in der obigen Figur?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf, z.B. $\triangle ABE$; $\triangle ACF$.

Es gibt in der Figur 16 Dreiecke:

$$ABE,\quad BCD,\quad CDI,\quad DFI,\quad EGH,\quad ACF,\quad BCI,\quad CDF,$$
$$EFG,\quad ACG,\quad BCH,\quad EFH,\quad AEF,\quad BIH,\quad AGF,\quad BDE$$

Aufgabe 2 - 040512
Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von:

1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg.

zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden.

Wie viel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

Mit den Stücken 1 g, 2 g, 2 g, 5 g kann man alle Werte von 1 g bis 9 g erreichen, mit 10 g, 20 g, 20 g, 50 g alle möglichen Zehner von 10 g bis 90 g und mit 100 g, 200 g, 200 g, 500 g alle Hunderter von 100 g bis 900 g. Mit dem 1 kg Wägestücke sind alle Werte von 1 kg bis 2 kg bestimmbar, d. h. man benötigt die folgenden Wägestücke:
1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, 500 g und 1 kg.

Aufgabe 3 - 040513
Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m^2 bzw. 200 m^2 besitzen.
Wie viel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

Die Fläche 0,15 ha sind 1500 m^2. Im Garten befinden sich 6 Parzellen zu je 150 m^2 und 3 Parzellen zu je 200 m^2. Es ist $6 \cdot 150 + 3 \cdot 200 = 1500$.

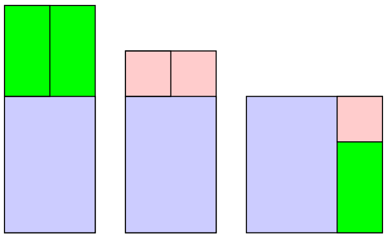
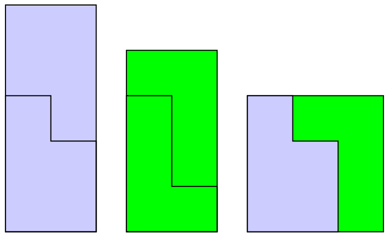
Anmerkung: Das Gleichungssystem $x + y = 9$, $150x + 200y = 1500$ ist normalerweise in der 5. Klasse nicht lösbar. Wahrscheinlich soll durch Probieren gelöst werden.

Aufgabe 4 - 040514
In Mücheln (Geiseltal, Bezirk Halle) wurde die längste Eisenbahnbrücke der DDR fertiggestellt. Sie besteht aus 7 gleichen Brückenbögen.
Für einen Brückenbogen wurden 147 m^3 Beton verwendet. 1 m^3 Beton hat eine Masse von 24 dt.
Wie viel Tonnen Beton wurden für den Brückenbau benötigt? (Runde auf ganze Tonnen!)

7 (Bögen) $\cdot$ 147 $m^3 \cdot 24 \frac{\text{dt}}{\text{m}^3} = 24696$ dt. Es werden insgesamt rund 2470 Tonnen Beton benötigt.

Aufgabe 5 - 040515
Gegeben seien ein Rechteck von 120 mm Länge und 60 mm Breite und ein zweites von 150 mm Länge und 60 mm Breite.

a) Zerlege die beiden Rechtecke so, dass beim Zusammenfügen aller Teile zwei gleichgroße Quadrate entstehen!
b) Ist es möglich, jedes Rechteck nur in zwei Teile zu zerlegen und dennoch zwei gleichgroße Quadrate zusammenfügen zu können?
Fertige zu a) und b) je eine Zeichnung an!

a)  b) 

Aufgabe 6 - 040516
Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

Die letzte Ziffer der kleineren Zahl muss 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Ziffer der größeren Zahl.
Aus der angegebenen Summe erkennt man leicht, dass die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen.
Als Formel:

$$a + b = 968 \qquad ; \qquad a = 10 \cdot b$$

Einsetzen ergibt $10 \cdot b + b = 968$ mit $b = 88$ und folglich $a = 880$.

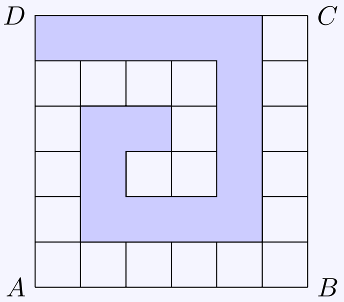
Aufgaben der I. Runde 1964 gelöst von Steffen Polster

2.5.2 II. Runde 1964, Klasse 5

Aufgabe 1 - 040521
Zwei Dreher übernahmen am 11. Januar 1965 (früh) den Auftrag, 1100 Werkstücke herzustellen. Der erste Dreher stellt 19 Werkstücke je Tag her, der zweite täglich 3 Stück mehr als der erste.
An welchem Tage werden sie bei gleichbleibender Leistung je Tag mit dieser Arbeit fertig, wenn an den Sonntagen nicht, an den Sonnabenden ausnahmsweise voll gearbeitet wird?

An jedem Tage werden 41 Werkstücke hergestellt.
Wegen $26 \cdot 41 = 1066$ und $27 \cdot 41 = 1107$ werden die Dreher im Laufe des 27. Tages fertig.
Dieser Tag ist der 10. Februar 1965.

Aufgabe 2 - 040522



Teile die Seiten eines Quadrats in sechs gleiche Teile und ziehe von dem Mittelpunkt M aus den aus der Abbildung ersichtlichen blauen Streifenzug. Eine Seite des Quadrats hat eine Länge von 12 cm.

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Streifens!

Jedes kleine Quadrat hat eine Seitenlänge von 2 cm. Der Umfang besteht aus 32 Seitenlängen, die Fläche aus 15 Teilquadraten.
Der Umfang beträgt 64 cm, der Flächeninhalt 60 cm^2.

Aufgabe 3 - 040523
a) Wie viel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?

b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d. h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

a) Es gibt neun dieser Zahlen, nämlich 16, 27, 38, 49, 50, 61, 72, 83, 94.
b) Der zusätzlichen Bedingung genügt nur die Zahl 72.

Aufgabe 4 - 040524
Während einer Vorstellung im "Theater der Jungen Welt" in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze.
Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt.
Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wusste, dass es im Theater 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädel mehr als Jungen anwesend waren?

Wenn die Anzahl der Jungen ungerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist aber eine gerade Zahl.

Wenn die Anzahl der Jungen gerade ist, so ist es auch die der Mädchen. Die Summe zweier gerader Zahlen ist ebenfalls eine gerade Zahl. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein, denn die Differenz zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl.

Oder: Ist a die Anzahl der Jungen, so ist $2a + 68$ die Anzahl der Jungen und Mädel im Theater. Die Anzahl der freien Plätze muss somit gerade sein.

Lösungen der II. Runde 1964 übernommen aus [5]

2.6 V. Olympiade 1965

2.6.1 I. Runde 1965, Klasse 5

Aufgabe 1 - 050511
In drei Abteilen eines Eisenbahnwagens befinden sich 90 Fahrgäste. Würden aus dem ersten Abteil 12 Fahrgäste in das zweite und aus dem zweiten 9 Fahrgäste in das dritte umsteigen, dann wären in allen drei Abteilen gleich viel Personen.
Wie viel Fahrgäste waren ursprünglich in den einzelnen Abteilen?

Sind 90 Fahrgäste auf 3 Abteile gleichverteilt, so befinden sich in jedem Abteil 30 Fahrgäste.

Wenn aus dem ersten 12 in den zweiten wechseln, so sind im ersten zu Beginn 12 zu viel, d. h. 42 Fahrgäste.
Wenn 9 vom zweiten in den dritten wechseln müssen um 30 Personen zu erhalten, so fehlen zu Beginn im 3 Abteile diese 9, d. h. es sind vor dem Umsteigen 21 im dritten Abteil.
Damit sind zu Beginn im 2. Abteil 90 - 42 - 21 = 27 Fahrgäste.

Aufgabe 2 - 050512

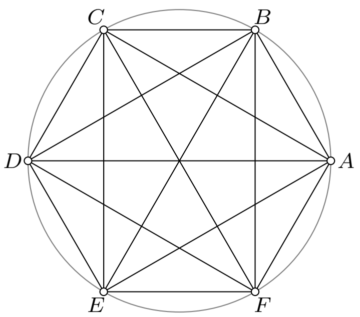
```
1 2 = 3
1 2 3 = 4
1 2 3 4 = 5
1 2 3 4 5 = 6
1 2 3 4 5 6 = 7
1 2 3 4 5 6 7 = 8
1 2 3 4 5 6 7 8 = 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 10
```

Setze auf der linken Seite Rechenzeichen derart, dass wahre Ausagen in Form von Gleichungen entstehen.
(Nebeneinanderstehende Ziffern dürfen als eine Zahl betrachtet, doch die Reihenfolge darf nicht geändert werden. Du darfst auch Klammern verwenden. Zu jeder Aufgabe genügt eine Lösung.)

Mögliche Lösungen sind:

$$1+2=3$$
$$12:3=4$$
$$(1+2)\cdot 3-4=5$$
$$1+2\cdot 3+4-5=6$$
$$1+2-3-4+5+6=7$$
$$1+2+3-4+5-6+7=8$$
$$1\cdot 2+3+4+5-6-7+8=9$$
$$1\cdot 2+3+4+5+6+7-8-9=10$$

Aufgabe 3 - 050513
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck! Zeichne in das Sechseck alle möglichen Diagonalen ein!
Wie viel Diagonalen findest Du? Zähle sie auf, indem du sie benennst (z.B. AB, ...)!



Von jedem Endpunkt des Sechsecks gehen je fünf Strecken zu den anderen Eckpunkten aus. Da aber jede Strecke einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzt und bei dieser Überlegung somit zweimal gezählt wird, gibt es $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ Strecken am Sechseck.

Da die sechs Seiten des Sechsecks nicht als Diagonalen gelten, verbleiben noch 9, d. h. in einem Sechseck gibt es neun verschiedene Diagonalen, in der Abbildung:

$$AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$$

Aufgabe 4 - 050514
Gerd, Fred, Heinz und Werner befinden sich auf dem Weg zur Schule. Fred ist noch dreimal so weit entfernt von der Schule wie Gerd. Heinz hat bis zur Schule noch den vierfachen Weg von Gerd zurückzulegen.
Werner muss noch 2,4 km bis zur Schule laufen; das ist die doppelte Länge von Freds Weg.

a) Welche Strecken müssen die einzelnen Schüler noch zurücklegen, bis sie die Schule erreicht haben?
b) Wie viel Minuten vergehen, bis alle Schüler in der Schule angekommen sind, wenn jeder Schüler für je 100 m genau 90 sec braucht?

a) Die noch zu laufenden Wege der Schüler seien für Fred f, für Gerd g, für Heinz h und für Werner w. Dann gelten entsprechend der Aufgabenstellung die Gleichungen:

$$f = 3g \quad (1); \qquad h = 4g \quad (2); \qquad w = 2{,}4 \text{ km} \quad (3); \qquad w = 2f \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt für Freds Weg 1,2 km. Damit hat nach (1) Gerd noch einen Restweg von 400 m zu laufen. Beziehung (2) ergibt für Heinz dann einen Weg von 1,6 km.

b) Da Werner noch am weitesten entfernt ist, treffen sich die Schüler erst wenn Werner ankommt. Für ihn gilt:
Werner braucht für 2,4 km: 24 · 90 s = 2160 s = 36 min.

Damit vergehen noch 36 min, bis alle Schüler in der Klasse sind.

Aufgaben der I. Runde 1965 gelöst von Steffen Polster

2.6.2 II. Runde 1965, Klasse 5

Aufgabe 1 - 050521
Aus 36 gleich großen Quadraten soll durch Aneinanderlegen ein Rechteck gebildet werden.

a) Wie viel Lösungsmöglichkeiten gibt es? (Bei jeder Lösung sollen sämtliche Quadrate verwendet werden.)
b) Welches der möglichen Rechtecke hat den kleinsten Umfang?

a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36 Flächeneinheiten. Die Länge jeder Rechteckseite muss infolge der Konstruktion ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer Quadratseite sein. Daher gibt es die folgenden 5 Möglichkeiten:

l. Rechteck: Länge 1, Breite 36, Umfang 74 Einheiten,
2. Rechteck: Länge 2, Breite 18, Umfang 40 Einheiten,
3. Rechteck: Länge 5, Breite 12, Umfang 30 Einheiten,
4. Rechteck: Länge 4, Breite 9, Umfang 26 Einheiten,
5. Rechteck: Länge 6, Breite 6, Umfang 24 Einheiten.

b) Unter diesen Rechtecken hat das 5. Rechteck (Quadrat) den kleinsten Umfang.

Aufgabe 2 - 050522
Für die fünf natürlichen Zahlen a, b, c, d, e gelten die folgenden Ungleichungen:
$a > e$; $b < c$; $c > e$; $d < e$; $a > b$; $b < d$; $c > a$; $a > d$;
Ordne diese Zahlen der Größe nach an!

Man sucht zunächst die kleinste Zahl, indem man der Reihe nach ausscheidet:
Die kleinste Zahl ist nicht: a, c, e, d.
Also ist b die kleinste Zahl. Indem man so fortfährt, erhält man schließlich

$$b < d < e < a < c$$

Aufgabe 3 - 050523
Für jeden von 600000 Einwohnern Leipzigs werden 125 kg Kartoffeln eingekellert.

a) Berechne die bereitzustellende Menge in Tonnen!
b) Welches ist die größte Anzahl von Güterwagen mit je 15 t Ladefähigkeit, die mit dieser Menge voll beladen werden können?
c) Wie viel Tonnen werden durchschnittlich an jedem Tag ausgeliefert, wenn der erste Auslieferungstag der 17.9. und der letzte Auslieferungstag der 14.10. ist und auch an Sonn- und Feiertagen ausgeliefert wird?

a) Die bereitzustellende Kartoffelmenge beträgt in Tonnen $(600000 \cdot 125) : 1000 = 75000$.

b) Die größte Anzahl der erwähnten Güterwagen, die mit 75000 t Kartoffeln voll beladen werden können, beträgt $75000 : 15 = 5000$.

c) Da an 28 Tagen ausgeliefert wird, beträgt die an jedem Tag durchschnittlich ausgelieferte Menge in Tonnen: $75000 : 28 \approx 2679$ Tonnen je Tag.

Aufgabe 4 - 050524
Ermittle die fehlenden Ziffern!

```
6 x · x x x
-----------
x x
  x x
    x x
-----------
x x x 6
```

Da alle Teilprodukte zweistellige Zahlen sind, muss der zweite Faktor 111 sein.
An der Einerstelle des ersten Faktors muss eine 6 stehen, da das Produkt von 111 mit einer natürlichen Zahl, an deren letzter Stelle keine 6 steht, nicht 6 als letzte Ziffer haben kann.
Die ergänzte Aufgabe lautet daher:

```
6 6 · 1 1 1
-----------
6 6
  6 6
    6 6
-----------
7 3 2 6
```

Lösungen der II. Runde 1965 übernommen aus [5]

2.7 VI. Olympiade 1966

2.7.1 I. Runde 1966, Klasse 5

Aufgabe 1 - 060511
Laut Jahresplan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli wurden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.

a) Berechne die hinreichende kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember hergestellt werden müssen, damit das Werk seinen Plan erfüllt!
b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,- MDN kostet!

a) Von Juli bis November wurden hergestellt (in Tonnen): $2430 + 2310 + 2680 + 2830 + 2940 = 13190$ Tonnen. Da das Ziel 16400 Tonnen sind, müssen im Dezember 16400 t - 13190 t = 3210 t produziert werden.

b) Mit $39 \cdot 3210 = 125190$ ergibt sich ein Preis von 125190 MDN für 3210 t Zement.

Aufgabe 2 - 060512
Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Ist die Länge der ersten Teilstrecke a, so ist die zweite Teilstrecke $3a$ lang und die dritte $4a$ lang. In der Summe ist dies $a + 3a + 4a = 168$ m, d.h. die erste Teilstrecke hat eine Länge von $a = 21$ m.
Die zweite Teilstrecke hat somit die Länge $3 \cdot 21$ m $= 63$ m und die dritte Teilstrecke $4 \cdot 21$ m $= 84$ m.

Aufgabe 3 - 060513
Ein Betrieb kann unter Verwendung des gleichen Uhrwerks verschiedene Ausführungen von Uhren herstellen. Dazu stehen ihm drei verschiedene Gehäuse, vier verschiedene Zifferblätter und zwei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die größte Anzahl voneinander verschiedener Ausführungen von Uhren an, die sich unter Verwendung der angegebenen Teile herstellen lassen!

Für jede Uhr können 3 verschiedene Gehäuse, vier Ziffernblätter und zwei Zeigerarten gewählt werden, so dass es insgesamt $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ verschiedene Ausführungen der Uhren mit dem gleichen Uhrwerk gibt.

Aufgabe 4 - 060514
Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.
Wie lautet die gesuchte Zahl?

a sei die gesuchte Zahl. Wenn 100 bei Division mit a den Rest lässt, ist 100 - 4 = 96 ein Vielfaches von a. Ebenso muss dann 90 - 18 = 72 ein Vielfaches von a sein. a ist aber auch größer als 18, da sonst kein Rest 18 entstehen würde.

72 und 96 haben nur einen gemeinsamen Teiler, der größer als 18 ist. Dieser Teiler ist 24, d.h. das gesuchte a ist 24.

Aufgaben der I. Runde 1966 gelöst von Steffen Polster

2.7.2 II. Runde 1966, Klasse 5

Aufgabe 1 - 060521
In jeder von fünf Kisten befindet sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren. Ermittle die Gesamtzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden !

Aus den fünf Kisten wurden 300 Äpfel herausgenommen; denn $5 \cdot 60 = 300$.
Diese Menge entspricht dem Inhalt von drei Kisten, da nur soviel Äpfel übrig blieben, wie vorher in zwei Kisten Waren.
Folglich befanden sich in jeder Kiste anfangs genau 100 Äpfel. Insgesamt waren daher genau 500 Äpfel vorhanden.

Aufgabe 2 - 060522
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muss größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll.
Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, dass die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen.
Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 3 - 060523
Die Zahl 97236 ist in sechs Summanden zu zerlegen.

Der erste Summand ist gleich dem neunten Teil dieser Zahl, der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, der dritte ist um 12792 kleiner als der zweite Summand, der vierte dreimal so groß wie der dritte und der fünfte ist ebenso groß wie der dritte Summand.
Wie lauten die sechs Summanden?

Der erste Summand lautet 10804; denn $97236 : 9 = 10804$;
der zweite Summand lautet 21608; denn $10804 \cdot 2 = 21608$;
der dritte Summand lautet 8816; denn $21608 - 12792 = 8816$;
der vierte Summand lautet 26448; denn $8816 \cdot 3 = 26448$;
der fünfte Summand lautet 8816 und
der sechste Summand lautet 20744; denn $10804 + 21608 + 8816 + 26448 + 8816 + 20744 = 97236$.

Aufgabe 4 - 060524
Hans nimmt am Training der Sektion Leichtathletik seiner Schulsportgemeinschaft teil. Eine der Übungen besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand.
Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Hans legt die Strecke auf folgende Weise zurück:
Zwei Schritte vor, nachfedern, dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor ... u.s.f., bis er die zweite Fahnenstange erreicht.

Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 5 dm beträgt?

Mit je 3 Schritten kommt Hans 50 cm vorwärts. Daher ist er nach genau $2 \cdot 3 \cdot 29$ Schritten = 174 Schritten 29 m vom Startpunkt entfernt.
Da er nach zwei weiteren Schritten die zweite Fahnenstange erreicht und dann nach Voraussetzung mit der Übung aufhört, legt er die Übungsstrecke mit genau 176 Schritten zurück.

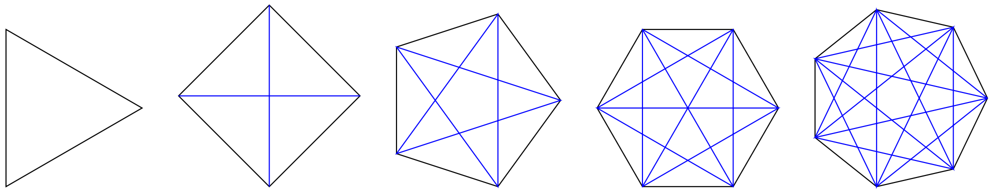
Lösungen der II. Runde 1966 übernommen aus [5]

2.8 VII. Olympiade 1967

2.8.1 I. Runde 1967, Klasse 5

Aufgabe 1 - 070511
Unter einer Diagonalen eines ebenen Vielecks mit 3 oder mehr Ecken versteht man die Verbindungsstrecken zweier nicht benachbarter Ecken des ebenen Vielecks.
Gibt es ebene konvexe Vielecke (d.h. Vielecke, bei denen jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist), bei denen

a) die Anzahl der Diagonalen halb so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
b) die Anzahl der Diagonalen doppelt so groß ist wie die Anzahl der Eckpunkte?
Wenn es solche Vielecke gibt, dann zeichne jeweils ein Beispiel dafür!



Ein Dreieck besitzt keine Diagonalen, ein Viereck 2 Diagonalen (siehe Abbildung) und ist somit die Lösung von Aufgabe a).
Das Fünfeck hat 5 Diagonalen, das Sechseck 9 Diagonalen und das Siebeneck 14 Diagonalen. Es ist die Lösung von Teilaufgabe b).

Vergleicht man die Diagonalenanzahl eines $n-1$-Ecks mit der Anzahl im n-Eck, so hat das n-Eck eine Ecke mehr von der zu $n-3$ Ecken eine Diagonale gezogen werden kann (zu den Nachbarecken und zu sich selbst nicht). Außerdem liegt eine Seite des $n-1$-Ecks jetzt im Inneren und ist damit Diagonale.
D.h., die Diagonalenzahl nimmt um $n-2$ zu, so dass die Anzahl der Diagonalen schneller als die Eckenzahl n für größere n wächst.
Die gefundenen Lösungen für a) und b) sind damit jeweils die einzigen.

Aufgabe 2 - 070512
Ein Bezirk plante, die Instandsetzung dreier Straßen durchzuführen. Die erste Straße hat eine Länge von 8 km, die zweite eine Länge von 7 km, die dritte eine Länge von 6 km. Für jeden Kilometer wurden 3000 MDN Kosten vorgesehen.
Eine der drei Straßen war nur wenig beschädigt, so dass man für diese mit der Hälfte der Kosten pro Kilometer auskam, während bei jeder der beiden anderen genau die eingeplante Summe verwendet wurde. Die Gesamtkosten für die Instandsetzung betrugen 51000 MDN.
Für welche der drei Straßen wurde nicht die eingeplante Summe verwendet?

Hätte man alle Straßen vollständig erneut, wären Kosten entstanden von

$$(8+7+6)\text{ km} \cdot 3000\frac{\text{MDN}}{\text{km}} = 63000\text{ MDN}$$

Da nur 51000 MDN benötigt wurden, blieb die Differenz 63000 MDN - 51000 MDN = 12000 MDN über. Da eine Straße nur 1500 MDN je Kilometer Kosten verursachte, muss diese $\frac{12000}{1500} = 8$ km sein. Der dritte Streckenabschnitt benötigte nur die halben Kosten.

Aufgabe 3 - 070513
Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die folgendes gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Tausenderziffer.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die fünfstellige Zahl ändert.

Eine fünfstellige natürliche Zahl mit den Ziffern [abcde] kann

$$z = 10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e,$$

geschrieben werden. Dabei kann a jede Ziffer von 0 bis 9, b, c, d, e jedoch nur von 1 bis 9 annehmen. Mit der Aussage a) kann d durch b ersetzt werden: $\frac{b}{2} = d$. b kann nun aber nicht mehr 9 werden. Die Aussage b) führt zu $e = c$. Damit wird:

$$z = 10000a + 1000b + 100c + 5b + c = 10000a + 1005b + 101c$$

Eine Summe wird dann am größten, wenn jeder Summand möglichst groß ist. Mit den Einschränkungen sind a und c maximal 9 und b maximal 8. Die gesuchte Zahl ist somit

$$z = 10101 \cdot 9 + 1005 \cdot 8 = 90909 + 8040 = 98949$$

Aufgabe 4 - 070514
Im Ferienlager erhält eine Zeltbelegung von ihrem Pionierleiter den Auftrag, in der Küche beim Kartoffelschälen zu helfen. Von sechs Jungen sollen drei für diese Tätigkeit ausgewählt werden.
Welches ist die Anzahl aller Möglichkeiten, verschiedene Gruppen zusammenzustellen?

Die Jungen seien mit A, B, C, D, E, F bezeichnet. Davon sind immer drei auszuwählen, wobei für unterschiedliche Gruppen nur die ausgewählten Jungen, aber nicht die Reihenfolge des Auswählens von Bedeutung ist.
Durch systematisches Vorgehen findet man folgende 20 Gruppen:

ABC	BCD	CDE	DEF	ABD	BCE	CDF	ABE	BCF	CEF
ABF	BDE	ACD	BDF	ACE	BEF	ACF	ADE	ADF	AEF

Anmerkung: Die gesuchte Anzahl ist gleich der Kombinationen von 3 Elementen aus einer Gesamtheit von 6 Elementen.

Aufgaben der I. Runde 1967 gelöst von Steffen Polster

2.8.2 II. Runde 1967, Klasse 5

Aufgabe 1 - 070521
Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft. (In der Produktion wird weißes Papier nicht unmittelbar aus Altpapier hergestellt. Durch Zusatz von Altpapier wird aber eine entsprechende Menge Rohstoff eingespart.)

Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann!

Berechnung der Menge des reinen weißen Papiers: Wegen

$$336 \cdot 700 = 235200 \quad \text{und} \quad 235200 \text{ g} = 235{,}2 \text{ kg}$$

können aus 336 kg Altpapier höchstens 255,2 kg weißes Papier hergestellt werden.

Berechnung der Menge von Schreibheften:
Wegen $235200 : 30 = 7840$ können aus 336 kg Altpapier höchstens 7840 Schreibhefte hergestellt werden.

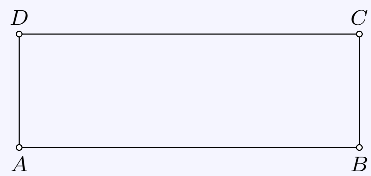
Aufgabe 2 - 070522
Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, dass die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche ist.
Wie lautet z im Dezimalsystem?

Es gibt genau drei zweistellige Zahlen, bei denen die Anzahl der Einer dreimal so groß ist wie die der Zehner, nämlich 15, 26, 59.
Von ihnen erfüllt nur 26 die Bedingungen der Aufgabe; denn

$$31 - 13 = 18, \qquad 62 - 26 = 36, \qquad 93 - 39 = 549$$

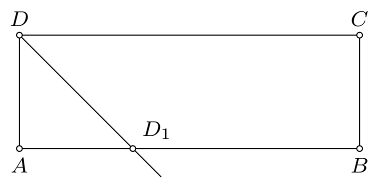
Daher ist $z = 26$.

Aufgabe 3 - 070523



Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Abbildung) mit folgenden Seitenlängen: $AB = 6$ cm und $BC = 2$ cm.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\angle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Man halbiert daher den Winkel $\angle CDA$. Die Winkelhalbierende schneidet wegen $AD_1 = AD < AB$ die Seite AB im Punkt D_1. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist das gesuchte.



Zweiter Lösungsweg:
Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Jede Diagonale eines Quadrate halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrate.

Man konstruiert nun das Quadrat DAD_1D_2, indem man von A auf AB die Strecke AD_1 mit $AD = AD_1$ und von D auf DC die Strecke DD_2 mit $AD = AD_2$ abträgt, und verbindet D mit D_1.
Dann ist DD_1 Diagonale des Quadrats DAD_1D_2 und der Winkel $\angle D_1DA$ ist 45° groß. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist daher das gesuchte.

Aufgabe 4 - 070524
Nachdem der Mathematiklehrer sämtliche 4 Olympiadeaufgaben seiner 36 Schüler korrigiert und ausgewertet hatte, gab er den Mitgliedern seiner Arbeitsgemeinschaft die folgende Tabelle und führte dazu aus:

"Die Anzahl der Schüler, die keine Aufgabe richtig lösten, ist gleich der Anzahl derjenigen, die alle Aufgaben richtig lösten.
Die Anzahl derjenigen, die nur 1 Aufgabe richtig bewältigten, ist doppelt so groß wie die An- zahl der Teilnehmer, die alle Aufgaben richtig lösten, und gleich der Anzahl derjenigen, die genau 3 richtige Lösungen abgaben.
Die Anzahl der richtigen (s. Spalte III, Zeile f) ist genau dreimal so groß wie die Anzahl der Teilnehmer mit genau 2 richtigen Lösungen und doppelt so groß wie die Anzahl aller Teilnehmer. Mit diesen Angaben seid ihr in der Lage, die Tabelle zu vervollständigen."

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	...	...
b)	1	...	...
c)	2	...	...
d)	3	...	...
e)	4	...	...
f)	Gesamtzahlen	36	...

Da die Anzahl aller Teilnehmer 36 ist, ist die Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt laut Aufgabe 72 und die Anzahl der Schüler mit genau 2 richtigen Lösungen 72 = 3 - 24.

Da die Anzahl der Schüler in Zeile a) gleich der in Zeile 0) und gleich der Hälfte der Anzahlen in Zeile b) bzw. in d) sein soll, sind die restlichen 12 Schüler wie folgt zu verteilen, und die Tabelle kann danach vervollständigt werden:

	I Anzahl der richtigen Lösungen pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)	Gesamtzahlen	36	72

Lösungen der II. Runde 1967 übernommen aus [5]

2.9 VIII. Olympiade 1968

2.9.1 I. Runde 1968, Klasse 5

Aufgabe 1 - 080511
Auf einer Großbaustelle sind drei Bagger eingesetzt. Bei gleichbleibender Leistung befördern sie in 20 min insgesamt 90 m^3 Erde. Für die Bedienung dieser drei Bagger ist ein Kollektiv von insgesamt sechs Arbeitern notwendig. Wir nehmen an, dass an Stelle dieser drei Bagger sechs Erdarbeiter diese Arbeit verrichten müssten.
Nach wie viel Arbeitstagen würden sie frühestens die 90 m^3 Erde ausgehoben haben, wenn jeder der Erdarbeiter an jedem Arbeitstag durchschnittlich 5 m^3 Erde bewegt?

Wenn 6 Erdarbeiter jeden Tag 5 m^3 Erde ausheben, so schaffen sie je Tag 30 m^3. Damit benötigen sie für 90 m^3 3 Tage.

Aufgabe 2 - 080512

Setze die Vielfachen der Zahl 3 von 3 bis 27 so in die einzelnen Felder des Quadrates ein, dass die Summen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht) und jeder Diagonale (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) gleich sind!

Die Summe der Vielfachen von 3 bis 27 beträgt: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 135$.
Da das Quadrat 3 Spalten und Zeilen hat, muss die Summe längs einer Zeile, Spalte oder Diagonalen gleich $\frac{135}{3} = 45$ sein.
Setzt man die mittlere Zahl 15 der Vielfachen von 3 in das Zentrum des Quadrates, ergibt sich durch Probieren u.a. die Lösung:

18	3	24
21	15	9
6	27	12

Aufgabe 3 - 080513
Annerose bringt aus dem Garten Äpfel und Pflaumen mit.
Als sie nach Hause kommt, wird sie von ihrem Bruder Gerd gefragt: "Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hast du mitgebracht?"
Verschmitzt antwortet Annerose: "Es sind zusammen weniger als 50 Stück, und zwar dreimal so viel Pflaumen wie Äpfel. Wenn Mutter von den mitgebrachten Äpfeln und Pflaumen jedem von uns vier Geschwistern je einen Apfel und je eine Pflaume gibt, bleiben noch viermal so viel Pflaumen wie Äpfel übrig."

Wie viel Äpfel und wie viel Pflaumen hatte sie mitgebracht?

Die Anzahl der Pflaumen sei p, die der Äpfel a.
Aus der Aufgabenstellung ergeben sich dann die Gleichungen

$$p - 4 = 4(a - 4) \qquad ; \qquad p = 3a$$

Setzt man die 2. Gleichung in die erste ein, wird

$$3a - 4 = 4a - 16 \qquad \Rightarrow a = 12; \quad p = 36$$

Annerose hat 12 Äpfel und 36 Pflaumen mitgebracht. Die Bedingung der Aufgabe, dass die Summe von p und a kleiner als 50 sein muss, ist erfüllt.

Aufgabe 4 - 080514
Fünf Flächen eines Würfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich. Danach wird dieser Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viel dieser kleinen Würfel haben 0; 1; 2; 3 bzw. 4 rot angestrichene Flächen?

Anleitung: Du kannst dir auch zur Veranschaulichung einen Würfel von 3 cm Kantenlänge basteln. Zerlege jede Fläche in Quadratzentimeter!

Nur die Würfel, die bis zur farbigen Außenseiten des großen Würfels reichen, haben eine farbige Fläche, d.h. der kleine Würfel im Inneren hat keinen Anstrich, ebenso der mittlere Würfel der sechsten Fläche.

Eine Farbfläche haben die mittleren Würfel der farbigen Seitenflächen und die 4 Würfel der sechsten Fläche, die in der Mitte der 4 Kanten liegen. Insgesamt 9 Würfel.

Zwei Farbflächen haben die mittleren Kantenwürfel die von beiden farbigen Seitenflächen des großen Würfels begrenzt sind, insgesamt 8. Die 4 Eckenwürfel der sechsten Fläche sind auch auf zwei Seiten farbig. In der Summe sind die 12 Würfel mit zwei farbigen Flächen.

Da es keinen keinen Würfel mit 4 farbigen Seiten gibt, verbleiben für kleine Würfel mit 3 angestrichen Seiten als Anzahl 27 - 2 - 9 - 12 = 4.

Es gibt somit kleine Würfel mit 2 mal 0, 9 mal 1, 12 mal 2, 4 mal 3 und 0 mal 4 angestrichenen Seiten.

Aufgaben der I. Runde 1968 gelöst von Steffen Polster

2.9.2 II. Runde 1968, Klasse 5

Aufgabe 1 - 080521

Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!

Eine Lösungsmöglichkeit ist z.B. die in der Abbildung dargestellte.

			×		
×					
				×	
	×				
					×
		×			

Aufgabe 2 - 080522
In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wie viel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wie viel in dem zweiten Lagerraum?

Es gilt: 85000 kg = 85 t und 5000 kg = 5 t.
Wenn nach der Entnahme von 85 t Weizen aus dem ersten und 5 t aus dem zweiten die Bestände in den beiden Lagerräumen gleich sind, befanden sich im ersten Lagerraum 80 t mehr als im zweiten; denn 85 t - 5 t = 80 t.

Da im ersten Lagerraum der Bestand anfangs dreimal so groß wie im zweiten war und nach der Entnahme in beiden die Bestände gleich sind, muss anfangs der Überschuss des ersten Raumes zweimal so groß wie der Bestand des zweiten Raumes gewesen sein.
Also befanden sich im zweiten Raum die Hälfte von 80 t, das sind 40 t, und im ersten 120 t Weizen; denn 40 t - 3 = 120 t.

Aufgabe 3 - 080523
Heinz fragt Gerd: "Wie viel Jahre bist du alt?"
Gerd antwortet: "Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt."

Berechne, wie viel Jahre Gerd alt ist!
(Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, muss Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder.
Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müsste Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, dass die Summe der Jahre 17 beträgt.

Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen 17 - 1 - 4 = 12 muss Gerd 12 Jahre alt sein.

Wegen $4 \cdot 4 > 12$ ist auch die Bedingung erfüllt, dass Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

Aufgabe 4 - 080524
Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz $a - b$ der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180.

Die Zahl 180 lässt sich nur auf die folgenden Weisen in zwei Faktoren a und b (mit natürlichen Zahlen a, b) zerlegen:

$$180 = 180 \cdot 1 = 90 \cdot 2 = 60 \cdot 3 = 45 \cdot 4 = 36 \cdot 5 = 30 \cdot 6 = 20 \cdot 9 = 18 \cdot 10 = 15 \cdot 12$$

Dabei ist wegen 15 - 12 = 3 nur für $a = 15$ und $b = 12$ auch die Bedingung (1) erfüllt.

Lösungen der II. Runde 1968 übernommen aus [5]

2.10 IX. Olympiade 1969

2.10.1 I. Runde 1969, Klasse 5

Aufgabe 1 - 090511

Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!
Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

Eine mögliche Lösung ist

1	5	2	3	4
4	2	1	5	3
5	4	3	2	1
3	1	5	4	2
2	3	4	1	5

Aufgabe 2 - 090512
In einer Mathematikarbeitsgemeinschaft wurde die folgende Aufgabe aus einem sowjetischen Lehrbuch gestellt:

Wassja kaufte zwei Alben für Briefmarken. Kolja fragte ihn, wie viel er dafür bezahlt habe.
"Ich verwendete zur Bezahlung nur Geldstücke einer Sorte", antwortete Wassja, "und zwar für das eine Album genau 7, für das andere genau 5. Für beide Alben bezahlte ich insgesamt 60 Kopeken."

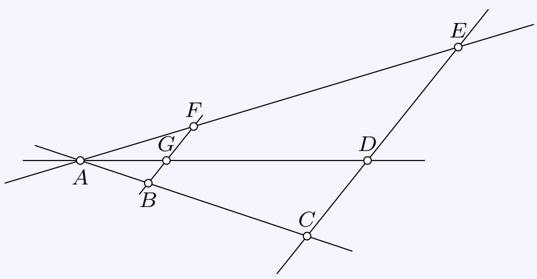
(In der Sowjetunion gibt es 1-, 2-, 3-, 5-, 10-, 15-, 20- und 50-Kopekenstücke und keine anderen Sorten von Kopekenstücken.)
Wie viel Kopeken kostete das eine und wie viel das andere Album?

a sei die Sorte, mit der das erste Album bezahlt wurde, b entsprechend die Sorte für das zweite Album. a und b können einen Wert von 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 annehmen.
Da einmal 7 und einmal 5 Münzen verwendet wurden, gilt $7a + 5b = 60$ Kopeken.

Da a und b natürliche Zahlen größer Null sind, muss $5b = 60 - 7a$ eine natürliche Zahl sein, d.h. $60 - 7a$ ist eine durch 5 teilbare Zahl.
Für die möglichen Werte von $a = 1, 2, 3, 5$ (ab 10 wird $60 - 7a < 0$) ergibt sich $60 - 7a = 53, 46, 39, 25$. Nur ein Ergebnis, die 25, ist durch 5 teilbar und $b = 5$. a ist dann ebenfalls 5.

Damit kostete erste Album 35 Kopeken und das 2. Album 25 Kopeken. Das erste Album wurde mit 7× 5-Kopekenstücken bezahlt, das zweite Album mit 5× 5 Kopekenstücken.

Aufgabe 3 - 090513



Die Abbildung zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C, eine durch A, F, E, eine durch A, G, D, eine durch B, G, F und eine durch C, D, E geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$.

Wir wollen sagen $\left\{\begin{array}{l}\text{eine Strecke}\\ \text{ein Dreieck}\\ \text{ein Trapez}\end{array}\right\}$ gehört der Zeichnung an; wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{ihre Endpunkte zwei}\\ \text{seine Eckpunkte drei}\\ \text{seine Eckpunkte vier}\end{array}\right\}$ der Punkte A, B, C, D, E, F, G sind und wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{die Strecke}\\ \text{alle Seiten des Dreiecks}\\ \text{alle Seiten des Trapezes}\end{array}\right\}$ schon vollständig gezeichnet in der Abbildung $\left\{\begin{array}{l}\text{vorkommt.}\\ \text{vorkommen.}\\ \text{vorkommen.}\end{array}\right\}$

Beispiele: Die Strecke AB, das Dreieck $\triangle ABF$ "gehören der Zeichnung an". Die Strecke BD "gehört der Zeichnung" nicht "an", auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\triangle ABD$.

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die "der Zeichnung angehören"!

Die "zur Zeichnung gehörenden" Strecken sind: AB, AC, AG, AD, AF, AE, BC, BG, BF, CD, CE, GF, GD, DE, FE.

Die "zur Zeichnung gehörenden" Dreiecke sind: $\triangle ABG$, $\triangle ABF$, $\triangle AGF$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$, $\triangle ACE$.

Die "zur Zeichnung gehörenden" Trapeze sind: $BCDG$, $BCEF$, $GDEF$.

Aufgabe 4 - 090514
Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.
Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen.

Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

Das Volumen des Kasten zur Aufbewahrung der Bauklötze ist

$$V_{\text{Box}} = 33 \text{ cm} \cdot 22 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} = 15246 \text{ cm}^3$$

Das Volumen eines Bauklotzes beträgt:

$$V_{\text{Bauklotz}} = 5{,}5 \text{ cm} \cdot 5{,}5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 211{,}75 \text{ cm}^3$$

Damit passen theoretisch 15246 : 211,75 = 72 Bauklötze in den Aufbewahrungskasten.

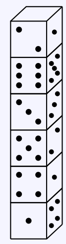
Es ist zu allerdings zu prüfen, ob die Bauklötze lückenlos in den Kasten eingefügt werden können.
Mit den Kantenlängen 55 mm und 55 mm können auf die Grundfläche des Kastens in der Länge $6 \cdot 5{,}5$ cm $= 33$ cm und in der Breite von $4 \cdot 5{,}5$ cm $= 22$ cm alle Lücken gefüllt werden. Auf der Grundfläche liegen somit $6 \times 4 = 24$ Bauklötze.
Da nun die Höhe des Kastens 21 cm beträgt und ein Bauklotz 7 cm Höhe besitzt, können 3 Schichten Bauklötze eingefügt werden, d.h. insgesamt 72 Bauklötze.

Aufgaben der I. Runde 1969 von Steffen Polster

2.10.2 II. Runde 1969, Klasse 5

Aufgabe 1 - 090521

Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abbildung zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen.



Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!

Beachte dabei, dass die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

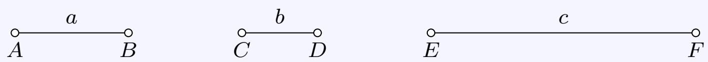
Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7 = 35$.
Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat aus dem in der Aufgabe genannten Grunde die Augenzahl 6.
Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35 + 6 = 41$.

Aufgabe 2 - 090522
In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30 M mehr als der erste.

Wie viel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

Der zweite Kunde kaufte genau 2 m Stoff mehr als der erste; denn $5m - 3m = 2m$. Für diese 2 m Stoff hatte er 30 M zu bezahlen.
Jedes Meter Stoff kostete daher die Hälfte davon, das sind 15 M. Die drei Kunden kauften zusammen 17 m Stoff; folglich hatten sie insgesamt $17 \cdot 15 = 255$ M zu bezahlen.

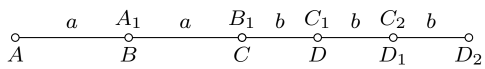
Aufgabe 3 - 090523



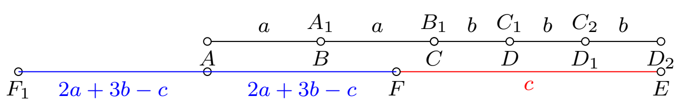
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (2a + 3b - c)$!
Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.

Konstruktion von Strecken der Längen $2a$ und $3b$

Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b$



Konstruktion der Strecken der Länge $2a + 3b - c$ und $2(2a + 3b - c)$



Die Strecke $\overline{FF_1}$ ist die gesuchte.

Aufgabe 4 - 090524
Ermittle alle natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

(a) z ist ungerade;
(b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
(c) $500 < z < 1000$.

Die Zahlen 3, 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist.
Nun gilt

$$4 \cdot 105 = 420 \quad , \quad 5 \cdot 105 = 525 \quad , \quad 6 \cdot 105 = 530 \quad , \quad 7 \cdot 105 = 735$$

$$8 \cdot 105 = 840 \quad , \quad 9 \cdot 105 = 945 \quad , \quad 10 \cdot 105 = 1050$$

Die Bedingungen (b) und (c) werden daher von den Zahlen 525; 630; 735; 840; 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1000.

Von diesen Zahlen erfüllen 525, 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung (3). Die gesuchten Zahlen sind daher 525. 735 und 945 und nur diese.

Lösungen der II. Runde 1969 übernommen aus [5]

2.11 X. Olympiade 1970

2.11.1 I. Runde 1970, Klasse 5

Aufgabe 1 - 100511

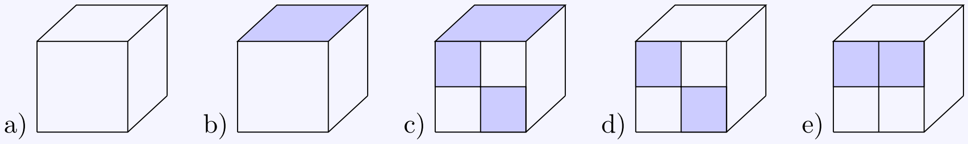


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt unter a) bis e) von fünf Würfeln je ein Schrägbild.

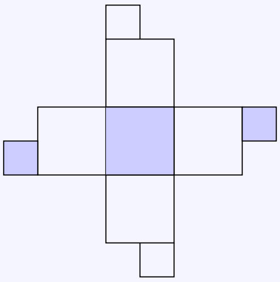


Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.
Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz (Abbildung 2) hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht!
(In den Fällen, in denen die Antwort "Ja" lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort "Nein" lautet, ist sie zu begründen.)

Würfel a) ist keine Lösung sein, da jede Ecke, die nicht an eine aus vier kleinen Quadraten bestehende Seitenfläche stößt, die komplett farbige Quadratseite berührt.

Würfel b) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel c) ist keine Lösung sein. Die Fläche mit den kleinen Quadraten stößt nicht an die Fläche, die vollständig farbig ist.

Würfel d) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel e) kann keine Lösung sein, da die kleinen farbigen Quadrate nicht nebeneinander liegen. Sie berühren sich nur an einer Ecke.

Aufgabe 2 - 100512
In einem alten Buch mit lustigen mathematischen Knobeleien fand Annerose folgenden Vers:

Eine Zahl hab' ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Gibt es wenigstens eine Zahl, die den gegebenen Bedingungen genügt? Wenn ja, ermittle alle diese Zahlen!

Die gesuchte Zahl sei z. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$(z + 107) : 100 \cdot 11 - 15 = 7 \qquad \Rightarrow \qquad z = 93$$

Die gesuchte Zahl lautet 93. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Aufgabe 3 - 100513

Gib eine Möglichkeit an, die Zahlen 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8 so in die Felder des abgebildeten quadratischen Netzes einzutragen, dass als Summe der Zahlen jeder Zeile (waagerecht), jeder Spalte (senkrecht), jeder der beiden Diagonalen (von links oben nach rechts unten und von rechts oben nach links unten) und als Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern die Zahl 18 erhalten wird!
(Keine Begründung erforderlich)

Eine mögliche Lösung ist

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

Aufgabe 4 - 100514

Hans und Günter wollen Briefmarken tauschen. Auf die Frage nach der Anzahl seiner Tauschmarken antwortet Günter:

"Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken und sonst keine anderen zum Tausch anzubieten. Es sind insgesamt 30 Stück.
Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarischen. Die Anzahl der bulgarischen Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl meiner sowjetischen Marken."

Gib alle Möglichkeiten an, die folgende Tabelle so auszufüllen, dass diese Bedingungen erfüllt sind!

Anzahl der polnischen Marken	...
Anzahl der sowjetischen Marken	...
Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	...

Die Anzahl der sowjetischen Marken sei s, die der polnischen p und die der bulgarischen b.Dann gilt nach der Aufgabenstellung

$$s + p + b = 30 \quad ; \quad p < s < b \quad ; \quad 4s < b < 5s$$

s, b und p sind größer als 0. p muss aber kleiner als 5 sein, da andernfalls s mindestens 6 und $b > 4s > 24$ wäre. Damit würde die Summe $p + s + b$ größer als 30 sein.

Addiert man zur letzten Ungleichung p und b, so ergibt sich $4s + s + p < s + p + b = 30 < 5s + s + p$, also $5s < 30 - p < 6s$. Das bedeutet für die möglichen Werte für p:

p	1	2	3	4
$5s < 30 - p < 6s$	$5s < 29 < 6s$	$5s < 28 < 6s$	$5s < 27 < 6s$	$5s < 26 < 6s$
mögliche Werte für s	5	5	5	5

D.h., s ist stets 5. Damit erhält man für die Anzahl der bulgarischen Briefmarken aus $b = 30 - p - s$ für $p = 1{,}2{,}3{,}4$ die Werte $b = 24{,}23{,}22{,}21$.

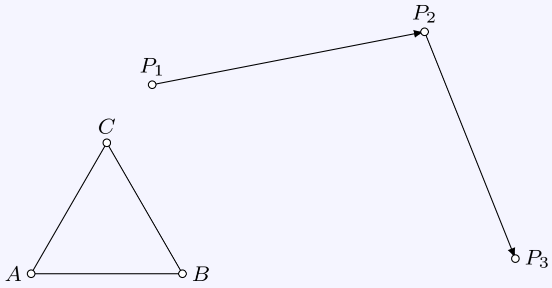
Es gibt damit genau die folgenden 4 Tripel (p,s,b): (1,5,24), (2,5,23), (3,5,22), (4,5,21), die auch alle Bedingungen erfüllen, wie die Tabelle zeigt.

Anzahl der polnischen Marken	1	2	3	4
Anzahl der sowjetischen Marken	5	5	5	5
Anzahl der bulgarischen Marken	24	23	22	21
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der polnischen Marken	$5 > 1$	$5 > 2$	$5 > 3$	$5 > 4$
Ungleichung zwischen der Anzahl der sowjetischen und der Anzahl der bulgarischen Marken	$5 < 24$	$5 < 23$	$5 < 22$	$5 < 21$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Vierfachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 > 4 \cdot 5 = 20$	$23 > 20$	$22 > 20$	$21 > 20$
Ungleichung zwischen der Anzahl der bulgarischen Marken und dem Fünffachen der Anzahl der sowjetischen Marken	$24 < 5 \cdot 5 = 25$	$23 < 25$	$22 < 25$	$21 < 25$

Aufgabe der I. Runde 1970 gelöst von Steffen Polster

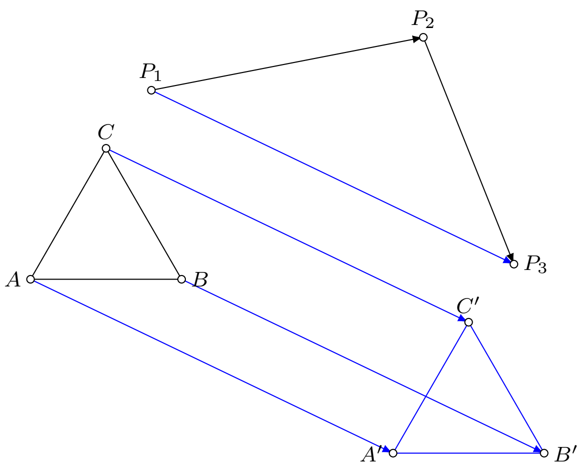
2.11.2 II. Runde 1970, Klasse 5

Aufgabe 1 - 100521



Auf der Abbildung sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ abgebildet. Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Zwei Verschiebungen können zu einer Verschiebung zusammengefasst werden, indem der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_3}$ gebildet wird.
Zu diesem Verschiebungspfeil werden die Parallelen durch die Punkte A, B und C konstruiert. Der Abstand P_1P_3 wird auf die Parallelen zu dem Verschiebungspfeil in den jeweiligen Punkten A, B und C abgetragen.



Aufgabe 2 - 100522

```
#@ + 8 = 3§
 -   -    -
1% + § = 1§
-----------
1@ + 3 = #%
```

Gib sämtliche Lösungen des Kryptogramms (siehe Abbildung) an, d.h. ersetze die geometrischen Figuren so durch je eine der Ziffern 0 bis 9, dass zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind. Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.

Aus $8 - x = 3$ folgt $x = 5$. Setzt man für x in Spalte 5 jeweils 5 ein, so erhält man $\% = 0$ und $\# = 2$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, dass $@ = 7$ sein muss.

```
27 + 8 = 35
 -   -    -
10 + 5 = 15
-----------
17 + 3 = 20
```

Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

Aufgabe 3 - 100523
Die Mitglieder einer Arbeitsgemeinschaft "Junge Botaniker" unterstützten ihre Paten-LPG beim Obstbau.
Zu diesem Zwecke hielten sie eine 2,6 ha große Obstplantage, auf der je Hektar durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, von Schädlingen frei. Danach wurden von jedem Baum durchschnittlich 50 kg Äpfel geerntet.
Berechne, wie viel Tonnen Äpfel unter diesen Umständen insgesamt auf der Plantage geerntet wurden!

Es gilt 2,6 ha = 260 a.
Da auf 1 ha = 100 a durchschnittlich 150 Apfelbäume standen, standen auf 10 a durchschnittlich 15 Apfelbäume, auf 260 a mithin 26 mal soviel, das sind insgesamt 590 Apfelbäume.

Diese 390 Apfelbäume trugen 390 mal soviel, wie jeder Apfelbaum durchschnittlich trug, das sind wegen $590 \cdot 50 = 19500$ insgesamt 19500 kg Äpfel.
Wegen 19500 kg = 19,5 t wurden somit auf der Plantage 19,5 t Äpfel geerntet.

Aufgabe 4 - 100524
Eine Gruppe Junger Mathematiker führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig.
Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wie viel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zu viel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zuwenig, bei einem Betrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zu viel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte.

Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zu viel bezahlt.
Dieser Betrag wurde jedem zurückerstattet. Wegen $110 : 5 = 22$ handelte es sich um 22 Junge Mathematiker, die an dieser Exkursion teilnahmen.

Lösungen der II. Runde 1970 übernommen aus [5]

2.12 XI. Olympiade 1971

2.12.1 I. Runde 1971, Klasse 5

Aufgabe 1 - 110511
Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1780 km zurück. Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen 8 Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen 8 Teilstrecken!

Die Länge der restlichen 8 Teilstrecken ist 1780 - 220 = 1560 km.
Damit hat ein Teilstück die Länge 1560 : 8 = 195, d.h. 195 km.

Aufgabe 2 - 110512
Rolf behauptet, dass sich eine Additionsaufgabe mit der Summe 1000 bilden lässt, wobei sämtliche Summanden natürliche Zahlen sind, in deren dekadischer Darstellung ausschließlich die Ziffer 8 auftritt, und zwar insgesamt genau 8 mal.

Stelle fest, ob Rolfs Behauptung richtig ist!
Wenn sie es ist, so gib alle derartigen Additionsaufgaben an und ordne darin die Summanden der Größe nach, beginnend mit dem größten!

Das Ergebnis der Additionsaufgabe soll auf Null enden, was nur möglich ist, wenn mindestens 5 Summanden auf 8 enden. 10 Summanden oder mehr sind nach der Aufgabenstellung nicht möglich.

Um 8 Ziffern 8 in 5 Summanden unterzubringen, müssen 3 Ziffern 8 als Zehner, Hunderter oder Tausender auftreten. Damit gibt es nur die Möglichkeiten

$$88 + 88 + 88 + 8 + 8 = 280 \tag{1}$$
$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000 \tag{2}$$
$$8888 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8920 \tag{3}$$

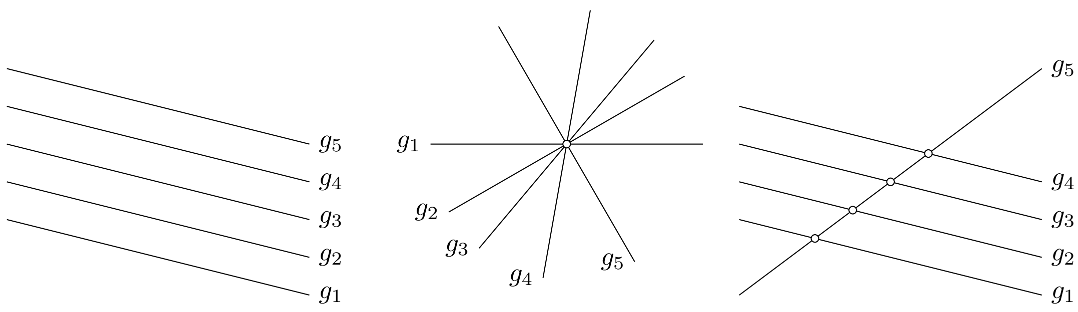
Nur (2) ergibt eine Summe von 1000 und ist damit die einzige mögliche Lösung. Rolf hat recht, es gibt so eine Additionsaufgabe und zwar genau eine.

Aufgabe 3 - 110513
Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 so, dass sie

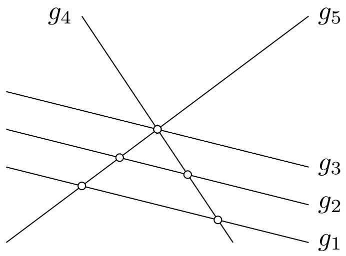
a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte

miteinander haben!

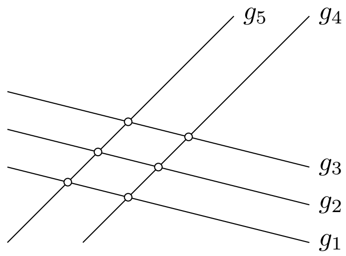
Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z.B. $g_1 \parallel g_2$).



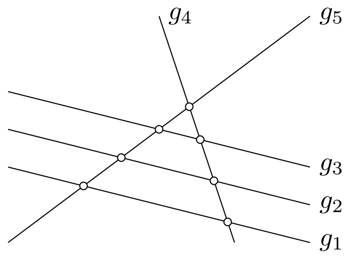
a) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4 \parallel g_5$ b) c) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4$



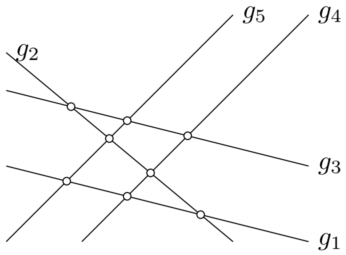
d) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



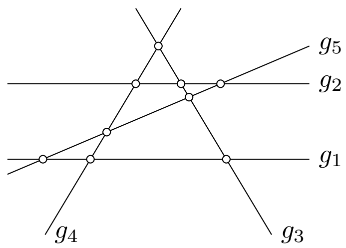
e) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$



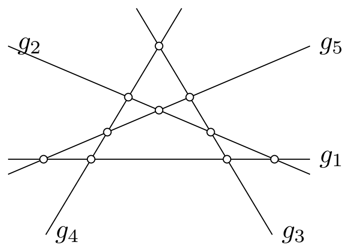
f) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



g) $g_1 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$



h) $g_1 \parallel g_2$



i)

Lösung übernommen aus [5]

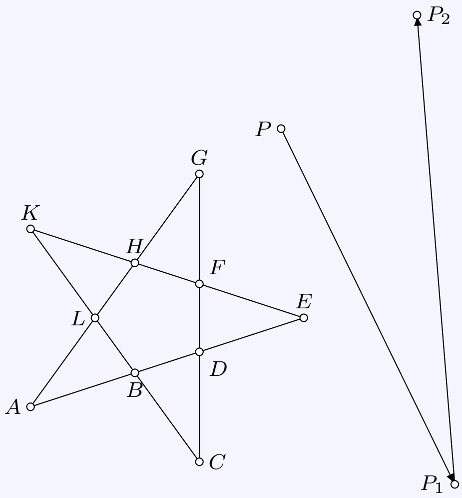
Aufgabe 4 - 110514
Es soll das Produkt $21 \cdot 12 \cdot 25$ berechnet werden.
Manfred will diese Aufgabe schriftlich lösen.
Annerose sagt: "Mit Hilfe eines Rechenvorteils kann ich die Aufgabe auch im Kopfe rechnen."
Gib an, welchen Rechenvorteil Annerose benutzt haben könnte!

Annerose nutzt zum Beispiel, dass $4 \cdot 25 = 100$ ist. Da 12 durch 4 teilbar ist (Ergebnis 3), kann sie rechnen: $21 \cdot 3 = 63$.
Die noch fehlende Multiplikation mit 100 wird durch Anhängen von 2 Nullen erreicht. Das Ergebnis ist damit 6300.

Aufgaben der I. Runde 1971 gelöst von Steffen Polster

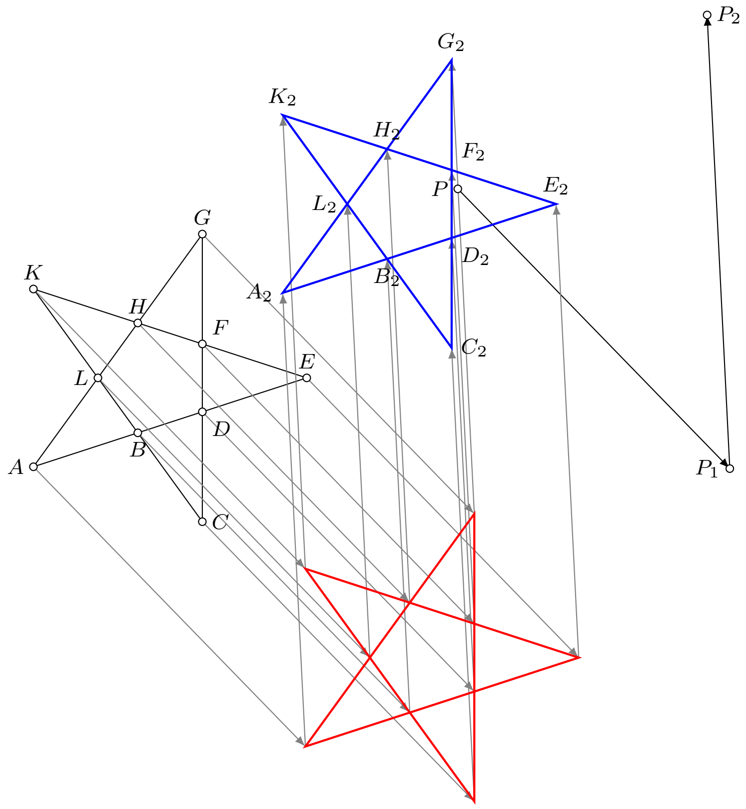
2.12.2 II. Runde 1971, Klasse 5

Aufgabe 1 - 110521



Auf der Abbildung sind eine Sternfigur $ABCDEFGHKL$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet.
Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 110522
Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarkstücke und kein weiteres Geld bei sich.
In Monikas Kasse befinden sich genau 20 Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarkstücken.
Sie behauptet, dass es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten.
Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmark- oder welches Zweimarkstück gegeben wird.

Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.
Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

1. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 1 Fünfmarkstück und 8 Zweimarkstücke. Wegen $5 + 8 \cdot 2 = 21$ sind das genau 21 Mark.
2. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 3 Fünfmarkstücke und 3 Zweimarkstücke. Wegen $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$ sind das ebenfalls genau 21 Mark.
3. Möglichkeit: Bernd gibt Monika 5 Fünfmarkstücke und erhält von ihr 2 Zweimarkstücke zurück. Wegen $5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 21$ sind das wiederum genau 21 Mark.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 110523
Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969.
Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968.
Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

Da es 1970 dreimal so viele Teilnehmer waren wie 1969, muss man die Anzahl 216 der Teilnehmer von 1970 durch 3 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1969 zu erhalten.
Diese betrug wegen $216 : 3 = 72$ somit 72.

Da es 1969 doppelt so viele Teilnehmer waren wie 1968, muss man die Anzahl 72 der Teilnehmer von 1969 durch 2 dividieren, um die Anzahl der Teilnehmer von 1968 zu erhalten.
Diese betrug wegen $72 : 2 = 36$ somit 36.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 110524
Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:
(a) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(b) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
(c) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1, deren Dreifaches kleiner ist als z.

Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Einerziffer der gesuchten Zahlen nicht 0 ist. Daher werden die Bedingungen (1) und (2) genau von den Zahlen 51; 62; 73; 84; 95 erfüllt.
Vertauscht man jeweils ihre Ziffern, dann erhält man der Reihe nach die Zahlen 15; 26; 37; 48; 59.

Das Dreifache dieser Zahlen beträgt der Reihe nach 45; 78; 111; 144; 177. Wegen $45 < 51$ und $78 > 62$; $111 > 73$; $144 > 84$; $177 > 95$ erfüllt somit genau die Zahl 51 alle Bedingungen der Aufgabe.

Lösung übernommen aus [5]

2.13 XII. Olympiade 1972

2.13.1 I. Runde 1972, Klasse 5

Aufgabe 1 - 120511
Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende - schon im Altertum bekannte - Knobelaufgabe:

Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen. In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.

Nach wie viel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

Nach 12 Stunden erreicht die Schnecke eine Höhe von 5 m, rutscht aber in den darauffolgenden 12 Stunden wieder 4 m zurück.
Damit startet sie am 2. Tag in 1 m Höhe, am 3. Tag in 2 m Höhe, usw. Am 6. Tag beginnt sie in 5 m Höhe zu kriechen und erreicht nach 12 h die geforderten 10 Meter Höhe.

Da sie 5 Tage kroch und zurück rutschte, am 6. Tag aber nach 12 Stunden am Ziel ankam, benötigte sie $5 \cdot 24 + 12 = 132$ Stunden.

Aufgabe 2 - 120512
Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:

(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.
(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.
(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennisspieler.
(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.
(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.
(6) Keiner der Tischtennisspieler spielt auch Handball.
(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.

Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt!
Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

Aus (2) und (4) bzw. (5) folgen, dass Gerd und Jochen nicht in Leipzig wohnen, also Heinz.
Dann folgt aus (4), dass Gerd und Heinz Fußball spielen; außerdem aus (5) und (6), dass Jochen kein Tischtennisspieler ist und somit Heinz und Gerd Tischtennis spielen.

Ergebnis: Heinz und Gerd spielen sowohl Fußball als auch Tischtennis; Jochen ist der Handballspieler.

Nach (3) muss Gerd nun aus Berlin sein, also Jochen in Rostock, da (siehe oben) Heinz in Leipzig wohnt. Weiterhin ist ist Jochen nach (5) älter als Heinz (Leipziger) und nach (6) Jochen (Handball) nicht der Älteste. Damit ergibt ist Gerd der Älteste, Jochen der Mittlere und Heinz der Jüngste.

Aufgabe 3 - 120513
Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.

Wie viel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

Der erste LKW transportiert in 20 Fahrten $20 \cdot 4 = 80$ t Kartoffeln.
Vom Rest von 170 t - 80 t = 90 t transportiert der 2. LKW je Fahrt 5 Tonnen, d.h. $90 : 5 = 18$. Der 2. LKW muss 18 mal fahren.

Aufgabe 4 - 120514
Erklärung: Mit der Schreibweise einer "fortlaufenden Ungleichung" $a < b < c < d$ drückt man aus, dass die drei Ungleichungen $a < b$, $b < c$ und $c < d$ gelten. Es gelten dann auch die Ungleichungen $a < c$, $a < d$ und $b < d$.

Aufgabe:
Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:

(1) $z > x$
(2) $z < w$
(3) $w > x$
(4) $x < y$
(5) $y > w$
(6) $z < y$

Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

Schreibt man alle Ungleichungen so, dass das Zeichen ">" verwendet wird, ergibt sich:

$$(1) \quad z > x, \quad (2) \quad w > z, \quad (3) \quad w > x, \quad (4) \quad y > x, \quad (5) \quad y > w, \quad (6) \quad y > z$$

Nach (5), (2) und (1) ist y die größte Zahl. Beginnt man mit (5) und setzt die restlichen Ungleichungen an, ergibt sich $y > w > z > x$.
Die Probe mit allen 6 Ungleichungen bestätigt das Ergebnis.

Aufgaben der I. Runde 1972 gelöst von Steffen Polster

2.13.2 II. Runde 1972, Klasse 5

Aufgabe 1 - 120521

```
4 * * · 3 * *
-------------
  * * * 5
    3 * * *
        8 * *
-------------
  * * * * 3 *
```

In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen (*) so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei muss jede Zeile mit einer von 0 verschiedenen Ziffer beginnen.
Als Ergebnis wird nur eine richtig ergänzte Aufgabe ohne Begründung verlangt.

$4 * * \cdot 3$ kann nur auf 5 enden, wenn der erste Faktor $4 * 5$ ist. Der Faktor $3 * *$ muss auf zwei enden, da nur so das 3. Teilergebnis dreistellig mit einer 8 am Anfang ist. Das erste Zwischenprodukt beginnt mit 1. Das 2. Produkt endet auf 0. Würde es auf 5 enden, so müsste das 3. Produkt 880 sein, was nicht möglich ist. Damit wird vorerst

```
4 * 5 · 3 * 2
-------------
  1 * * 5
    3 * * 0
        8 * 0
-------------
  * * * * 3 0
```

Das dritte Produkt ist durch die Endsumme gleich 830. Damit ist der erste Faktor 415 und das erste Zwischenprodukt 1245. Damit wird der Zehner im 2. Faktor gerade. Diese ist nur mit 8 möglich. Die Lösung ist somit eindeutig.

```
4 1 5 · 3 8 2
-------------
  1 2 4 5
    3 3 2 0
        8 3 0
-------------
  1 5 8 5 3 0
```

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 120522
Eine Oberschule führte für alle Schulklassen ein Schulsportfest durch. Nach dem Sportfest behauptete Gerald, es hätte insgesamt 325 Teilnehmer gegeben.
Günter, der wusste, dass die Anzahl der an dem Sportfest teilnehmenden Mädchen um genau 24 größer war als die der teilnehmenden Jungen, meinte, Geralds Behauptung sei falsch.
Weise nach, dass Günters Meinung richtig ist!

Günter konnte z.B. folgendermaßen schließen:
Die Differenz der Anzahl der Mädchen zu der der Jungen war eine gerade Zahl. Daher mussten die Anzahlen der Mädchen und die der Jungen entweder beide gerade oder beide ungerade sein.
In jedem dieser Fälle ist aber die Summe eine gerade Zahl, kann also nicht 325 sein.

Oder:
Die Anzahl aller Teilnehmer ist gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der teilnehmenden Jungen und 24, und damit eine gerade Zahl. Günters Meinung ist also richtig.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 120523
In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne.
Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Diese Anzahl soll sie so wählen, dass unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen.

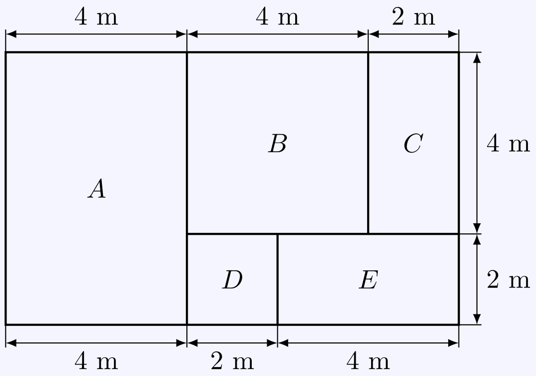
Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen.

Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben rot, blau, schwarz oder weiß tragen.
In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe.
Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

Lösung übernommen aus [5]

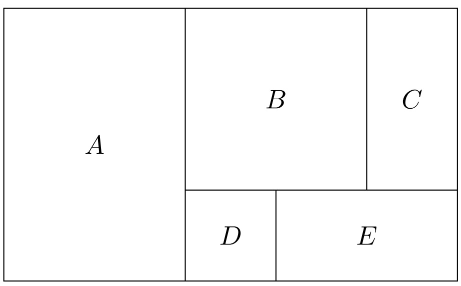
Aufgabe 4 - 120524



Die Abbildung stellt den Grundriss einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.

a) Zeichne den Grundriss dieser Wohnung im Maßstab 1:100!
b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden.

Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!



a) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 100 entspricht 1 cm auf der Zeichnung 1 m in der Wirklichkeit. Daher ergibt sich folgende Zeichnung:

b) Der Grundriss lässt sich in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise in Quadrate von je 1 cm Kantenlänge, also von 1 cm^2 Flächeninhalt, einteilen.
Wegen des Maßstabes 1 : 100 entspricht jedem solchen Quadrat in der Wirklichkeit ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 m, also mit dem Flächeninhalt 1 m^2.

Die Fußböden der Räume haben folgenden Flächeninhalt:
Raum A: 24 m^2, Raum B: 16 m^2, Raum C: 8 m^2, Raum D: 4 m^2, Raum E: 8 m^2.

Zu streichen sind insgesamt 40 m^2 Fußbodenfläche. Auszulegen sind 20 m^2 Fußbodenfläohe.

Lösung übernommen aus [5]

2.14 XIII. Olympiade 1973

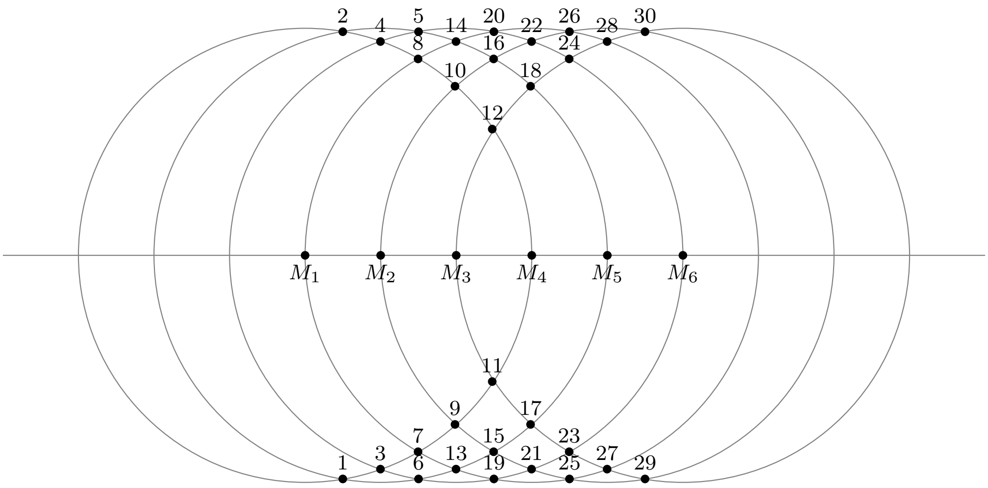
2.14.1 I. Runde 1973, Klasse 5

Aufgabe 1 - 130511
a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.

b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r = 3$ cm und nummeriere die Schnittpunkte.

a) Zwei Kreise können sich höchstens in 2 Punkten schneiden. Die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten der sechs Kreise entsteht, wenn jeder Kreis jeden der anderen fünf anderen zweimal schneidet. Die scheinbare Schnittpunktzahl $6 \cdot 5 = 60$ muss aber noch durch 2 geteilt werden, da bei diesem Produkt jeder Schnittpunkt zweimal gezählt wurde. Damit gibt es höchstens 30 Schnittpunkte.

b) Die Mittelpunkte der sechs Kreise müssen voneinander einen Abstand kleiner als 2 mal den Radius $r = 3$ cm haben, da sie nur so sich paarweise in jeweils zwei Punkten schneiden können.
Ein mögliches Beispiel ist:

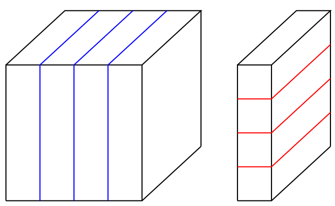


Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 130512
Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, dass am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.

a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wie viel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muss, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d.h. wenn das Schneiden "im Paket" nicht gestattet ist!

a) Das Volumen des großen Würfels beträgt 4 cm · 4 cm · 4 cm = 64 cm^3, das Volumen eines kleinen Würfels 1 cm^3. Damit ergeben sich 64 kleine Würfel.



b) Zuerst schneidet man den Würfel längs der blauen Linien und erhält mit drei Schnitten 4 Quader mit den Abmessungen 1 cm × 4 cm × 4 cm.
Danach schneidet man jeden dieser Quader mit je 3 Schnitten, insgesamt 12 Schnitte, längs der roten Linien und erhält insgesamt 16 Quader der Abmessung 1 cm × 4 cm × 1 cm.

Jeder dieser 16 Quader wird mit je 3 Schnitten, insgesamt 48 Schnitte, zum Abschluss in je 4 Würfel der gewünschten Größe zerschnitten.
Insgesamt benötigt man damit $4 + 12 + 48 = 63$ Schnitte.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 130513
Das Dreifache der Summe der Zahlen 38947 und 12711 soll durch das Sechsfache der Differenz der Zahlen 9127 und 8004 dividiert werden.
Wie lautet der Quotient?

Nach der Aufgabenstellung ist zu berechnen:

$$3 \cdot (38947 + 12711) : (6 \cdot (9127 - 8004)) = 3 \cdot 51568 : (6 \cdot 1123) = 154974 : 6738 = 23$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 130514
Aus einer Schulklasse arbeiten einige Thälmann-Pioniere im Klub der internationalen Freundschaft mit. Auf die Frage, wer von ihnen im Dolmetscherbüro dieses Klubs mitarbeitet, melden sich 7. Dann wird gefragt, wer im Länderzirkel des Klubs mitarbeitet; hierauf melden sich 6. Ebenso wird festgestellt, dass 5 der Pioniere im Zirkel junger Korrespondenten des Klubs tätig sind. Andere als diese 3 Zirkel gibt es in diesem Klub nicht.

Als Nächstes wird die Frage gestellt, wer gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Länderzirkel mitarbeitet; diesmal melden sich 4 der Pioniere. Ebenso ermittelt man, dass 3 von ihnen gleichzeitig mindestens im Dolmetscherbüro und im Zirkel junger Korrespondenten tätig sind und 2 von den Pionieren gleichzeitig mindestens zum Länderzirkel und zum Zirkel junger Korrespondenten gehören.
Genau einer der Pioniere der genannten Schulklasse gehört allen drei Zirkeln an.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Pioniere dieser Klasse, die im Klub der internationalen Freundschaft mitarbeiten! (Sämtliche Zahlenangaben gelten als genau)

Werden die Schülerzahlen je Zirkel nach deren Anfangsbuchstaben bezeichnet, so gilt $(d) = 7$, $(l) = 6$ und $k = 6$. Weiterhin sind in mehreren Zirkeln $(d + l) = 4$, $(d + k) = 3, (l + k) = 2, (d + k + l) = 1$.

In d und l ohne k sind entsprechend $(d + l) - (d + k + l) : 4 - 1 = 3$ Schüler, (*)
in l und k ohne d sind entsprechend $(l + k) - (d + k + l) : 2 - 1 = 1$ Schüler, (**)
in k und d ohne l sind entsprechend $(d + k) - (d + k + l) : 3 - 1 = 2$ Schüler. (***)

In d ohne k und l sind entsprechend $(d) - (*) - (**) - (***) : 7 - 3 - 2 - 1 = 1$ Schüler. Analog ist in l ohne k und d 1 Schüler, und ebenso in k ohne l und d entsprechend 1 Schüler.

Insgesamt wird damit $1 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 10$.
10 Schüler der Klasse arbeiten folglich im Klub der internationalen Freundschaft mit.

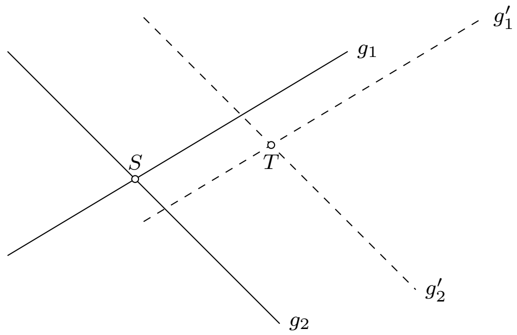
Lösung übernommen aus [5]

2.14.2 II. Runde 1973, Klasse 5

Aufgabe 1 - 130521
Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.
Stelle fest, wie viel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

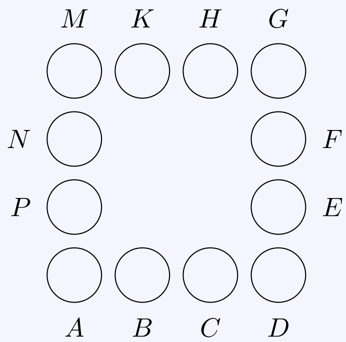
Da die Anzahl der Hechte ein Fünftel der Anzahl der Plötzen betrug, wurden genau 25 Hechte gefangen. Laut Aufgabe waren im Fang doppelt soviel Barsche wie Hechte, also genau 50 Barsche. Wegen 125 + 25 + 50 = 200 werden mithin insgesamt 200 Fische der genannten Arten gefangen.

Aufgabe 2 - 130522
Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T, der auf keiner der beiden Geraden liegt!
Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g_1' und g_2' der beiden Geraden!

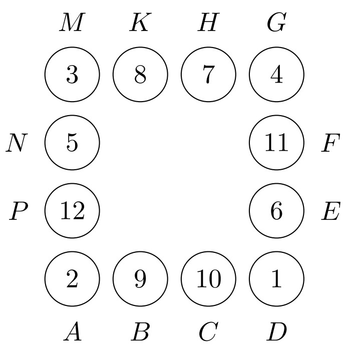


Als vollständige Lösung gilt jede Zeichnung mit einer möglichen Lage der beiden Geraden g_1, g_2, der Punkte S und T sowie der beiden Bildgeraden $g_1 \parallel g_1'$ und $g_2 \parallel g_2'$ die einander im Punkte T schneiden.

Aufgabe 3 - 130523
In die 12 Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P der Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, dass die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.



a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!
b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!



a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel dafür, wie die geforderte Eintragung lauten kann.

b) Es liege eine Eintragung vor und es seien a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, p die in dieser Reihenfolge in den Feldern A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P stehenden Zahlen. Ferner sei

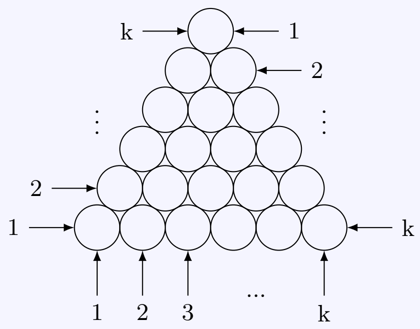
$$s_1 = e + b + c + d \qquad s_2 = d + e + f + g$$
$$s_3 = g + h + k + m \qquad s_4 = m + n + p + a$$

Dann gilt laut Aufgabe $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 22$. Daraus folgt $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 88$.

Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 12 beträgt 78. Sie ist also um 10 kleiner als die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + s_4$.

Nun werden aber die in den Eckfeldern A, D, G, M stehenden Zahlen bei der Bildung der vier Summen je zweimal berücksichtigt. Daher muss die Summe dieser Zahlen 10 betragen.
Wären nun a, g, d, m nicht die Zahlen 1, 2, 3, 4, so wäre mindestens eine von ihnen größer als 4, und die anderen wären nicht kleiner als 1, 2, 3, also wäre ihre Summe größer als 10.
Daher müssen bei jeder richtigen Eintragung der genannten Art in den Eckfeldern die Zahlen 1, 2, 3 und 4 und keine anderen stehen.

Aufgabe 4 - 130524



Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer "Pyramide" aufgeschichtet worden.
In jeder Schicht sind die Büchsen so "im Dreieck" angeordnet, wie die Abbildung zeigt.

Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden "Seitenkante des Dreiecks" beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.
Ermittle die Anzahl aller in der "Pyramide" enthaltenen Büchsen!

Die unterste Schicht besteht aus 9 Reihen, von denen die erste genau 1 Büchse und jede weitere genau eine Büchse mehr als die unmittelbar vorhergehende hat. Die neunte Reihe enthält danach genau 9 Büchsen. Folglich ist die Zahl aller Büchsen dieser Schicht gleich der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 9, also gleich 45.

Die unmittelbar darüberstehende Schicht von Konservenbüchsen enthält genau eine Reihe, nämlich die mit 9 Büchsen, weniger. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Schichten. Somit erhält man:

Erste Schicht:	45
zweite Schicht:	36 = 45 - 9
dritte Schicht:	28 = 36 - 8
vierte Schicht:	21 = 28 - 7
fünfte Schicht:	15 = 21 - 6
sechste Schicht:	10 = 15 - 5
siebente Schicht:	6 = 10 - 4
achte Schicht:	3 = 6 - 3
neunte Schicht:	1 = 3 - 2
insgesamt:	165

Für den Bau der "Pyramide" wurden insgesamt 165 Konvervenbüchsen verwendet.

Lösungen der II. Runde 1973 übernommen aus [5]

2.15 XIV. Olympiade 1974

2.15.1 I. Runde 1974, Klasse 5

Aufgabe 1 - 140511
Ermittle die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, von denen folgendes bekannt ist:

(1) a ist die Hälfte von b.
(2) b ist die Summe von c und d.
(3) c ist die Differenz von d und e.
(4) d ist das Dreifache von e.
(5) e ist der vierte Teil von 56.

Die natürlichen Zahlen lasse sich von (5) nach (1) berechnen:
Aus (5) folgt sofort $e = \frac{56}{4} = 14$ und somit $d = 42$. Mit $d - e = c = 28$ wird $b = 70$ und abschließend $a = 35$.

Aufgabe 2 - 140512
Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von 12600 cm^2 und ein Volumen von 1323 dm^3.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

Aus der Gleichung der Grundfläche $A_G = a \cdot b$ wird $b = \frac{A_G}{a} = 84$ cm.
Da für das Volumen $V = A_G \cdot c$ gilt, folgt $c = \frac{V}{A_G} = 105$ cm.

Aufgabe 3 - 140513
Die Schüler Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja beteiligten sich an der Kreisolympiade Junger Mathematiker.
Dabei erzielte Bernd mehr Punkte als Erich, Lutz bekam zwar mehr Punkte als Dora, aber weniger als Erich. Nina erhielt eine kleinere Punktzahl als Dora. Manjas Punktzahl war größer als die Punktzahl Bernds.
Ermittle die Reihenfolge der Punktzahlen der genannten Schüler; schreibe sie mit der größten beginnend auf!

Werden die Punktzahlen von Lutz, Dora, Erich, Nina, Bernd und Manja mit l, d, e, n, b und m bezeichnet, gelten nach der Aufgabenstellung die Ungleichungen

$$b > e; \qquad e > l > d; \qquad d > n; \qquad m > b$$

Aus der ersten und vierten Ungleichung ergibt sich: $m > b > e$, aus den anderen beiden $e > l > d > n$. Beide Ungleichungen kann man zu $m > b > e > l > d > n$ zusammenfassen. Die Reihenfolge war: Manja, Bernd, Erich, Lutz, Dora, Nina.

Aufgabe 4 - 140514
Einige Schüler einer Klasse 5 trugen ein Schachturnier aus. Jeder Teilnehmer spielte gegen jeden anderen genau 2 Partien. Insgesamt wurden an 24 Tagen je 3 Partien ausgetragen.
Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an diesem Turnier!

Es gab insgesamt $24 \cdot 3 = 72$ Partien.
Wenn Jeder gegen Jeden 2 Partien spielt, gibt es $n \cdot (n-1)$ Partien bei n Teilnehmern. Damit kommt man zu der Gleichung $n \cdot (n-1) = 72$, die im Bereich der natürlichen Zahlen (da es ja nur eine natürliche Zahl von Teilnehmern geben kann) nur durch $n = 9$ erfüllt wird. Auf diese Lösung kommt man durch systematisches Probieren.
Dazu prüft man nacheinander die Produkte $n(n-1)$, d.h. $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, ... bis zum Erreichen von $9 \cdot 8 = 72$.

Eine Lösung über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen $n^2 - n - 72 = 0$ mit $n_1 = 9$, $n_2 = -8$ ist für Schüler der Klassenstufe 5 im Allgemeinen nicht möglich.

Aufgaben der I. Runde 1974 gelöst von Steffen Polster

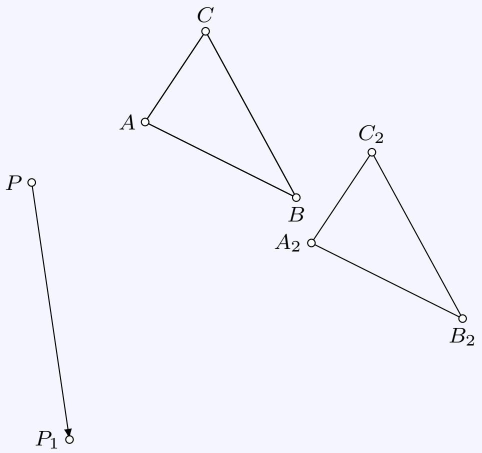
2.15.2 II. Runde 1974, Klasse 5

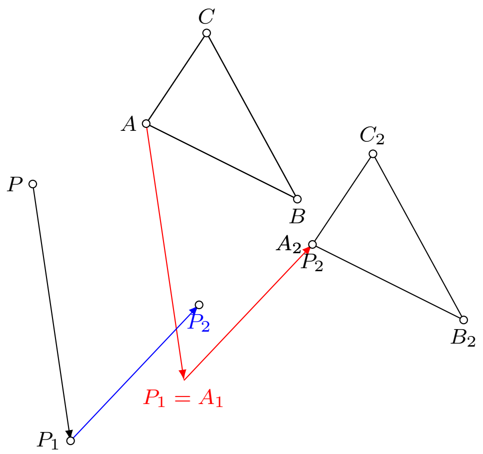
Aufgabe 1 - 140521

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, dass auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$, und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.





Als Lösung gilt jede einwandfreie Zeichnung, in der (1. Lösungsweg) für mindestens einen der Punkte A, B, C sein Bild A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder

(2. Lösungsweg) gleichsinnig parallel und gleichlang zu einem der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_2}$ und dann durch Verbindung von P_1 mit P_2 der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ konstruiert wurde.

Aufgabe 2 - 140522
Anita und Peter sollten für ihre Gruppe aus dem Konsum 7 Flaschen Selterswasser holen. Sie hatten eine Geldsumme bei sich, die genau hierfür gereicht hätte. Sie konnten aber nur Brause bekommen, von der jede Flasche 15 Pfennige mehr kostete als eine Flasche Selterswasser. Für ihr gesamtes Geld erhielten sie nunmehr 4 Flaschen Brause.

Ermittle den Preis für eine Flasche Selterswasser und den Preis für eine Flasche Brause. Wie viel kosteten die 4 Flaschen Brause?

Anita und Peter bezahlten für die 4 Flaschen Brause wegen $4 \cdot 15 = 60$ insgesamt 60 Pfennige mehr, als sie für 4 Flaschen Selters bezahlt hätten.
Für diese 60 Pfennig hätten sie genau $7 - 4 = 3$ Flaschen Selterswasser kaufen können. Wegen $60 : 3 = 20$ kostete mithin jede Flasche Selterswasser 20 Pfennig, und folglich jede Flasche Brause 35 Pfennig.
Wegen $4 \cdot 35 = 7 \cdot 20 = 140$ kosteten die 4 Flaschen Brause 1,40 Mark.

Aufgabe 3 - 140523
Uwe fuhr mit einem Sonderzug ins Ferienlager. Als der Zug genau die Hälfte seiner Reisestrecke zurückgelegt hatte, schlief Uwe ein und erwachte erst, als der Zug noch eine Strecke von genau 25 km bis zum Reiseziel zurückzulegen hatte.
Diese Strecke war halb so lang wie die Strecke, die der Zug zurückgelegt hatte, während Uwe schlief.
Wie viel Kilometer betrug Uwes Reisestrecke?

Laut Aufgabe legte der Zug, während Uwe schlief, eine Strecke zurück, die doppelt so lang wie 25 km war, also 50 km betrug.

Vom Zeitpunkt des Einschlafens an bis zum Reiseziel musste wegen $50 + 25 = 75$ Uwe folglich 75 km fahren.
Das war laut Aufgabe die Hälfte der Länge seiner Reisestrecke. Daher war diese Reisestrecke 150 km lang.

Aufgabe 4 - 140524
Schülerinnen und Schüler einer Klasse 5 trugen ein 14tägiges Schachturnier aus. Dabei wurden an jedem der 14 Tage genau 6 Spiele ausgetragen.
Die Anzahl der teilnehmenden Jungen war größer als die der teilnehmenden Mädchen. Jedes Mädchen spielte gegen jedes andere Mädchen und jeder Junge gegen jeden anderen Jungen genau zweimal. Keines der Mädchen spielte gegen einen Jungen.
Ermittle die Anzahl der Mädchen und die der Jungen, die an diesem Turnier teilnahmen!

Laut Aufgabe wurden wegen $14 \cdot 6 = 84$ in diesem Turnier insgesamt 84 Spiele ausgetragen. Diese Anzahl setzt sich additiv zusammen aus der Anzahl der Spiele, die die Mädchen gegeneinander durchführten, und der Anzahl der Spiele, an denen die Jungen beteiligt waren.

Bei n Spielern, von denen jeder gegen jeden $(n|1)$ der anderen Spieler genau zwei Spiele austrägt, beträgt die Anzahl aller Spiele $n(n-1)$.
Damit lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der Spieler	Anzahl der Spiele	Ergänzung zu 84
2	2	82
3	6	78
4	12	72
5	20	64
6	30	54
7	42	42
8	56	28
9	72	12
≥ 10	≥ 90	-

Da laut Aufgabe 84 Spiele insgesamt durchgeführt wurden, kann die Anzahl der teilnehmenden Jungen bzw. die der Mädchen nicht größer als 9 gewesen sein.
Als Summanden können nur die in der Tabelle ermittelten Zahlen auftreten, und zwar müssen es genau zwei Summanden der Form $n(n-1)$ sein, deren Summe 84 beträgt. Das ist, wie ein Vergleich der Zahlen der zweiten und dritten Spalte der Tabelle zeigt, nur für $42 + 42 = 84$ und $12 + 72 = 84$ möglich.

Da die Anzahl der teilnehmenden Jungen größer war als die der Mädchen, kann die gesuchte Lösung nur lauten:
Es nahmen 4 Mädchen und 9 Jungen an dem in der Aufgabe erwähnten Turnier teil.

Lösungen der II. Runde 1974 übernommen aus [5]

2.16 XV. Olympiade 1975

2.16.1 I. Runde 1975, Klasse 5

Aufgabe 1 - 150511
Im Jahre 1974 erzielten 187 Schiffe der DDR-Handelsflotte eine Transportleistung von insgesamt 1080000 t.

Berechne zur Veranschaulichung dieser Leistung, welche Länge ein Güterzug bei gleicher Transportleistung haben müsste!
Dabei sei angenommen, dass dieser Zug aus Güterwagen mit einer Tragfähigkeit von je 25 t besteht und dass jeder dieser Wagen (einschließlich der Koppelvorrichtung) eine Länge von 12 m besitzt.
Wie viel Güterzüge zu je 60 dieser Güterwagen hätten 1974 täglich fahren müssen, um die gleiche Transportleistung zu erzielen (das Jahr sei zu 360 Tagen gerechnet)?

Der Güterzug besteht aus 10800000 t : 25 t = 432000 Güterwagen, die damit 432000 · 12 m = 5184000 m = 5184 km lang sind.

Jeden Tag hätten 10800000 t : 360 = 30000 t transportiert werden müssen. Ein Zug mit 60 Güterwagen zu je 25 t Tragfähigkeit transportiert 60 · 25 t = 1500 t. Folglich müssten täglich 30000 t : 1500 t = 20 solcher Züge fahren, um die Leistung der Handelsschiffe zu erbringen.

Aufgabe 2 - 150512
Ermittle alle positiven geraden Zahlen u, p, g, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a) $42 > 5u > 19$
b) $11 < (3p + 3) < 22$
c) $23 > (3g - 3) \geq 3$,
und für die $(3g - 3)$ eine natürliche Zahl ist!

Gib die Lösungsmenge so an, dass die geraden Zahlen, die jeweils die betreffende Ungleichheit erfüllen, der Größe nach geordnet sind! Beginne stets mit der kleinsten!

a) $u = \{4, 6, 8\}$
b) $8 < 3p < 19 \Rightarrow p = \{4, 6\}$
c) $26 > 3g \geq 6 \Rightarrow g = \{2, 4, 6, 8\}$

Aufgabe 3 - 150513
Eine Gruppe von Pionieren unternahm eine Radwanderung. Sie starteten innerhalb eines Ortes und erreichten nach 800 m Fahrt den Ortsausgang. Nachdem sie danach das Fünffache dieser Strecke zurückgelegt hatten, rasteten sie.
Nach weiteren 14 km machten sie Mittagspause. Die Reststrecke bis zu ihrem Fahrtziel betrug 2,5 km weniger als die bisher zurückgelegte Strecke.
Ermittle die Gesamtlänge der Strecke vom Start bis zum Ziel!

Addition der Teilstrecken ergibt

$$s = (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) + (800m + 5 \cdot 800m + 14000m) - 2500m = 35100m$$

Die Radwanderung war 35 km und 100 m lang.

Aufgabe 4 - 150514
An einem Waldlauf beteiligten sich insgesamt 81 Personen. Von den teilnehmenden Erwachsenen (18 Jahre oder älter) war die Anzahl der Männer doppelt so groß wie die der Frauen.
Die Anzahl der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen (unter 18 Jahren) betrug die Hälfte der Anzahl der teilnehmenden Erwachsenen. Dabei waren es halb soviel Kinder (unter 16 Jahren) wie Jugendliche (16 Jahre oder älter, aber unter 18 Jahre).
Gib die Anzahlen der teilnehmenden erwachsenen Männer, Frauen sowie der teilnehmenden Kinder und Jugendlichen an!

Die Anzahl der Frauen, Männer, Kinder und Jugendlichen sei f, m, k und j. Dann ergeben sich aus der Aufgabenstellung die Beziehungen:

$$f + m + k + j = 81; \qquad m = 2f; \qquad m + f = 2 \cdot (k + j); \qquad j = 2k$$

Setzt man die vierte und zweite Gleichung jeweils in die erste und dritte ein, so wird

$$f + 2f + k + 2k = 3f + 3k = 81 \qquad ; \qquad 3f = 2f + f = 2 \cdot (3k)$$

Damit wird, mit erneutem Einsetzen: $6k + 3k = 81$, d.h. also $k = 9$ und weiter $f = 18$, $j = 18$, $m = 36$. Am Waldlauf nahmen 9 Kinder, 18 Jugendliche, 18 Frauen und 36 Männer teil.

Aufgaben der I. Runde 1975 gelöst von Steffen Polster

2.16.2 II. Runde 1975, Klasse 5

Aufgabe 1 - 150521
Die Werktätigen des Flachglaskombinates Torgau beschlossen, im Jahre 1975 als Beitrag zum Wohnungsbauprogramm 135000 m^2 Flachglas über den Plan hinaus zu produzieren. Diese Glasmenge reicht für 4500 Neubauwohnungen eines bestimmten Typs aus.
Ermittle den Bedarf an Flachglas (in Quadratmetern), der nach diesen Angaben für 1000 Neubauwohnungen dieses Typs zugrunde gelegt wurde.

Wegen 4500 : 9 = 500 und 135000 : 9 = 15000 wurde als Bedarf für 500 Neubauwohnungen 15000 m^2 Flachglas angenommen, für 1000 Neubauwohnungen folglich das Doppelte, also 30000 m^2.

Aufgabe 2 - 150522
Bei den folgenden fünf Gleichungen sind für die Buchstaben x, y, z, u, v natürliche Zahlen so einzusetzen, dass wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Zahlen.

(1) $x = y : 40$,
(2) $z = 4 \cdot u$,
(3) $u = 280 : 7$,
(4) $160 = v + 40$,
(5) $y = z + v$.

Aus Gleichung (3) entsteht wegen $280 : 7 = 40$ genau dann eine wahre Aussage, wenn man $u = 40$ einsetzt. Hiernach entsteht wegen $4 \cdot 40 = 160$ genau dann aus (2) eine wahre Aussage, wenn man $z = 160$ einsetzt. Gleichung (4) wird genau dann wahr, wenn man $v = 120$ einsetzt; denn es gilt $160 = 120 + 40$, während die Summe aus 40 und je einer anderen Zahl als 120 eine andere Zahl als 160 ergibt.
Wegen $160 + 120 = 280$ wird (5) genau für $y = 280$ wahr, und wegen $280 : 40 = 7$ wird (1) genau für $x = 7$ wahr.

Aufgabe 3 - 150523
Als eine Pioniergruppe über ihre in den letzten Jahren durchgeführten Ferienreisen berichtete, stellte sich folgendes heraus:

(1) Genau 13 Mitglieder dieser Gruppe waren schon einmal an der Ostsee.
(2) Genau 15 Pioniere waren schon einmal im Harz.
(3) Genau 6 Pioniere waren schon einmal sowohl an der Ostsee als auch im Harz.
(4) Genau 4 Pioniere waren bisher weder an der Ostsee noch im Harz.

Ermittle die Anzahl aller Pioniere, die dieser Gruppe angehören!

Nach (1) waren genau 13 der Pioniere schon einmal an der Ostsee.

Nach (2) und (3) betrug die Anzahl der Pioniere, die schon einmal im Harz, aber noch nicht an der Ostsee waren, wegen 15 - 6 = 9 genau 9 Pioniere. Also waren wegen 13 + 9 = 22 genau 22 Pioniere dieser Gruppe schon einmal in wenigstens einer der genannten Feriengegenden.

Nach (4) und weil damit jeder der anwesenden Pioniere erfasst wurde; betrug wegen 22 + 4 = 26 deren Anzahl 26.

Aufgabe 4 - 150524
Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A.
Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:

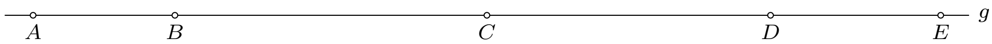
(1) Die Strecke AB ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke BC ist um 0,3 dm länger als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CE ist genauso lang wie die Summe der Strecken AB und BC.

(4) Die Strecke DE ist um 50 mm kürzer als die Strecke CE.

Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke AD (in cm)!

Wir tragen zunächst von A aus auf g mit dem Zirkel eine Strecke von 2,5 cm Länge ab. Ihr anderer Endpunkt sei 3.
Dann tragen wir wegen 0,3 dm = 3 cm und 2,5 cm + 3 cm = 5,5 cm von B aus auf der Halbgeraden von g, auf der A nicht liegt, eine Strecke von 5,5 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt C.

Wegen 2,5 cm + 5,5 cm = 8 cm tragen wir nun von C aus auf der Halbgeraden von g, auf der B nicht liegt, eine Strecke von 8 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt E.
Da D laut Aufgabe zwischen C und E liegt, tragen wir schließlich wegen 50 mm = 5 cm und 8 cm - 5 cm = 3 cm von E aus auf derselben Halbgeraden von g, auf der C liegt, eine Strecke von 3 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt D.
Wegen 2,5 cm + 5,5 cm + 8 cm - 3 cm = 13 cm hat die Strecke AD eine Länge von 13 cm.



Lösungen der II. Runde 1975 übernommen aus [5]

2.17 XVI. Olympiade 1976

2.17.1 I. Runde 1976, Klasse 5

Aufgabe 1 - 160511
In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:

Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:

(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.
(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.
(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H.

Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha".
Wie groß ist diese Leserzahl?"

Als Gleichungen ergeben sich

$$H = 2P; \qquad A = P + 2H; \qquad L = A + P + H$$

Außerdem sind A, L, P, H Ziffern von 0 bis 9.
Setzt man die erste Gleichung in die zweite und dritte ein, wird $A = 5P$ und $L = A + 3P$ und folglich $L = 8P$. Da P und L kleiner als 10 sind, muss $P = 1$ und $L = 8$ sein und damit $H = 2$, $A = 5$.
Die "alpha" hat somit 58125 Leser.

Aufgabe 2 - 160512
Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:

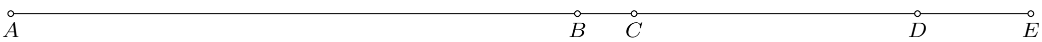
(1) Die Strecke AE hat die Länge $AE = 18$ cm.
(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.
(3) Die Strecke CD hat die Länge $CD = 5$ cm.
(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.

a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!
b) Ermittle die Längen der Strecken AD, AB, BC!

Als Lösung genügt:
a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und
b) die Ermittlung der Streckenlängen AD, AB, BC aus den Bedingungen (1) bis (4).

Aus (2) und (1) wird $AD = 16$ cm und somit mit (3) $AC = 11$ cm.
Weiterhin ist $CE = AE - AC = 18$ cm -11 cm $= 7$ cm und damit mit (4) $AB = 10$ cm.
Für die Streckenlängen folgt somit:
$AD = 16$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = AC - AB = 11$ cm -10 cm $= 1$ cm.

Konstruktion:



Aufgabe 3 - 160513
Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen.
Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g.
Wie viel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

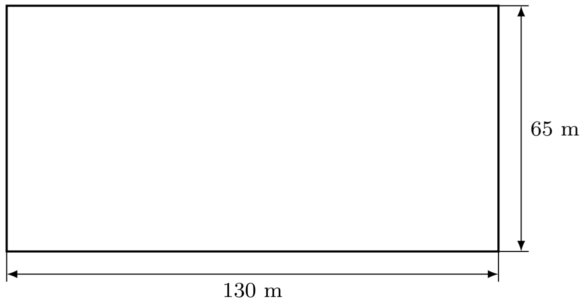
Die Masse der sechs Maiskolben ist $850 + 3 \cdot 640 + 2 \cdot 460 = 3690$ Gramm.
Als durchschnittliche Masse erhält man damit 3690 g : 6 = 615 g.

Aufgabe 4 - 160514
Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.

a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!
b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

Die kurze Seite sei a m lang und damit die lange Seite $b = 2a$ m lang. Für den Umfang des Rechtecks wird $u = 2a + 2b = 2a + 2 \cdot 2a = 6a = 390$ m. Damit ist $a = 65$.

a) Die kurzen Seiten des Spielplatzes sind 65 m und die langen Seiten sind 130 m lang.



b) In der Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 muss das Rechteck 13 cm breit und 6,5 cm hoch sein.

Aufgaben der I. Runde 1975 gelöst von Steffen Polster

2.17.2 II. Runde 1976, Klasse 5

Aufgabe 1 - 160521

A	·	A	=	B
+		·		-
C	·	D	=	E
F	-	G	=	H

In das obenstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Stelle fest, ob es eine solche Eintragung gibt, ob sie die einzige ist und wie sie in diesem Falle lautet!

Wenn es eine solche Eintragung gibt, so ist nach der 1. Zeile B das Quadrat von A ($\neq B$), also $B = 4$ oder $B = 9$.
Ferner ist B das Produkt zweier einstelliger Zahlen C, D, also nicht 0 und nicht 1. Daher ist auch keine der Zahlen C, D gleich 0 bzw. gleich 1.

Wegen $2 \cdot 3 = 6$ ist E mithin mindestens gleich 6. Da ferner E nach der 3. Spalte kleiner als B ist, scheidet $B = 4$ aus. Es folgt $B = 9$, also $A = 3$.
Da G ($\neq 3$) somit das Dreifache von D ($\neq 3$), aber größer als 0 und kleiner als 10 ist, verbleibt nur die Möglichkeit $D = 2$, $G = 6$.

Nach der dritten Zeile ist F größer als 6, also wegen $F \neq B$, $B = 9$, entweder $F = 7$ oder $F = 8$. Nach der zweiten Zeile ist E gerade, nach der dritten Spalte ist H ungerade, nach der dritten Zeile also F ungerade. Daher folgt $F = 7$ und somit $H = 1$, $E = 8$ sowie $C = 4$. Also kann nur die folgende Eintragung alle Bedingungen erfüllen:

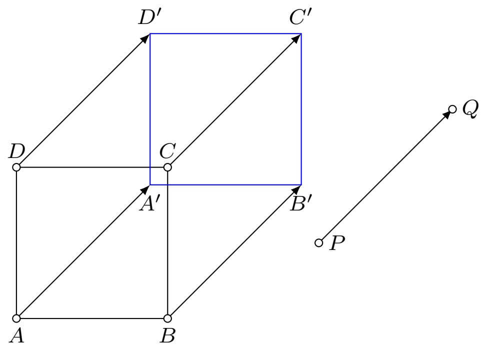
3	·	3	=	9
+		·		-
4	·	2	=	8
7	-	6	=	1

Sie erfüllt die Bedingungen; denn die für A, B, C, D, E, F, G, H eingetragenen Ziffern 3, 9, 4, 2, 8, 7, 6, 1 sind sämtlich verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgabe 2 - 160522
Zwei Junge Pioniere legten in ihrem Ruderboot stromabwärts in 10 Minuten eine Strecke zurück, deren Länge insgesamt 1 km und 200 m betrug.
Wie viel Zeit brauchten sie, um dieselbe Strecke gegen den Strom zurückzurudern, wenn sie dabei durchschnittlich in jeder Minute 40 m weniger zurücklegten als auf der Hinfahrt?

Auf der Hinfahrt legten die Pioniere eine Strecke von 1200 m in 10 Minuten zurück, in jeder Minute also durchschnittlich 120 m. Auf der Rückfahrt legten sie wegen 120 - 40 = 80 folglich in jeder Minute 80 m zurück.
Wegen 1200 : 80 = 15 brauchten sie daher für die Rückfahrt 15 Minuten.

Aufgabe 3 - 160523
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $AB = 4$ cm!
Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!
Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 4 - 160524
Jeder Schüler braucht im Jahr 15 Hefte. Aus 1 Tonne Papier können 25000 Hefte hergestellt werden. Wie viele Schüler insgesamt kann man unter diesen Umständen aus 3 Tonnen Papier für ein Jahr mit Heften versorgen?

Wegen $3 \cdot 25000 = 75000$ können aus 3 Tonnen Papier 75000 Hefte hergestellt werden.
Wegen $75000 : 15 = 5000$ lassen sich mit diesen Heften in einem Jahr insgesamt 5000 Schüler versorgen.

Lösungen der II. Runde 1976 übernommen aus [5]

2.18 XVII. Olympiade 1977

2.18.1 I. Runde 1977, Klasse 5

Aufgabe 1 - 170511
Die Oberschule "Wilhelm Pieck" hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation "Ernst Thälmann".
Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

Insgesamt sind 314 + 322 = 636 Schüler in der Oberschule. Ein Sechstel sind Mitglieder in der FDJ, d.h. 636 : 6 = 106 Schüler. Pioniere sind es somit 636 - 106 = 530.
Es gibt in der Schule 106 FDJler und 530 Pioniere.

Aufgabe 2 - 170512
Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:

(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.
(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.
(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.
(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.
(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.
(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.

Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

Da Frank wegen (3) und Gerd wegen (5) nicht Krause heißen, ist Haralds Familienname Krause. Gerd kann nicht Schulze heißen nach Bedingung (4) und (6). Er heißt Gerd Müller. Damit ist Franks Familienname Schulze.

D.h., die Namen sind Frank Schulze, Gerd Müller, Harald Krause.

Aufgabe 3 - 170513
Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist.
Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind. Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.
Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

m sei der auf Null endende Minuend sein, s der Subtrahend s. Streicht man bei m die Null, so ergibt sich s, d.h. der Minuend ist das Zehnfache des Subtrahenden: $m = 10s$. Die Differenz $m - s$ ist damit $10s - s = 9s$.

Die Differenz ist eine dreistellige Zahl, bei der alle Ziffern gleich sind. n sei diese Ziffer ($n = 1, 2, ..., 9$), d.h.

$$9s = 100n + 10n + n = 111n \qquad \Rightarrow \qquad 3s = 37n$$

Da 37 nicht durch teilbar ist, muss 3 durch teilbar sein. Probiert man die möglichen $n = 3, 6, 9$, ergibt sich
$n = 3 \Rightarrow s = 37, m = 370 \Rightarrow 370 - 37 = 333$
$n = 6 \Rightarrow s = 74, m = 740 \Rightarrow 740 - 74 = 666$
$n = 9 \Rightarrow s = 111, m = 1110 \Rightarrow 1110 - 111 = 999$.
Damit gibt es drei mögliche Subtraktionsaufgaben.

Offizielle Lösung: Wenn es eine derartige Subtraktionsaufgabe gibt; dann ist bei ihr der Minuend das Zehnfache des Subtrahenden. Daher ist die Differenz das Neunfache des Subtrahenden.
Die einzigen dreistelligen und durch 9 teilbaren Zahlen, die aus einander gleichen Ziffern bestehen, sind 333, 656 und 999.

Wegen 333 : 9 = 37, 666 : 9 = 718, 999 : 9 = 111 kann folglich der Subtrahend nur eine der Zahlen 37, 74, 111 sein. Daher können nun die folgenden Subtraktionsaufgaben den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

$$\begin{array}{r} 370 \\ -\ 37 \\ \hline 333 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 740 \\ -\ 74 \\ \hline 666 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1110 \\ -\ 111 \\ \hline 999 \end{array}$$

Für sie treffen alle Forderungen der Aufgabe zu. Also sind diese drei die gesuchten Subtraktionsaufgaben.

Aufgabe 4 - 170514
Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, dass folgendes gilt:
(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.
(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.
(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.

Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Die vier Teilstrecken seien a, b, c, d. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$a = 2b; \qquad b = c + d; \qquad 5c = 240 \text{ m}; \qquad a + b + c + d = 240 \text{ m}$$

Aus der dritten Beziehung folgt sofort $c = 48$ m. Setzt man in die vierte Gleichung für $c + d$ (aus der 2.) ein und zusätzlich noch (1), erhält man 240 m $= a + b + c + d = 2b + b + b = 4b$. Somit ist $b = 60$ m und damit auch $a = 120$ m.
d erhält man nun aus $d = 240$ m $- a - b - c = 12m$.
Die Teilstrecken haben die Längen 120 m, 60 m, 48 m und 12 m.

Offizielle Lösung: Nach (2) ist die Summe der Längen der zweiten, dritten und vierten Teilstrecke gleich der doppelten Länge der zweiten, d. h. nach (1) gleich der Länge der ersten Teilstrecke. Daher ist diese die Hälfte der Gesamtlänge 240 m, das sind 120 m, und die zweite Teilstrecke ist 60 m lang.
Nach (3) und wegen 250 : 5 = 48 ist die dritte Teilstrecke 48 m lang. Von der Summe 60 m der Längen der dritten und vierten Teilstreeke verbleibt somit wegen $60 - 48 = 12$ für die Länge der vierten Teilstrecke 12 m.
Die gesuchten Längen sind daher 120 m, 60 m, 48 m, 12 m.

Aufgaben der I. Runde 1977 gelöst von Steffen Polster

2.18.2 II. Runde 1977, Klasse 5

Aufgabe 1 - 170521
Im Schulgarten steckten Schüler auf einem 8 m^2 großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wie viel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

Für 1 ha : 10000 m^2 sind 2 dt = 200000 g Saatgut üblich; folglich werden für je 1 m^2 dann 20 g benötigt.
Für 8 m^2 wurden wegen $8 \cdot 20 = 160$ daher 160 g Saatgut genommen.
Der Ernteertrag betrug wegen $15 \cdot 160 = 2400$ folglich 2400 g = 2,4 kg.

Aufgabe 2 - 170522
Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel.
Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wie viel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

Bezeichnet man die Anzahl der Vögel, die am Ende auf dem ersten Baum sitzen, mit x, dann sitzen auf dem zweiten Baum $2x$ Vögel, auf dem dritten $4x$ Vögel. Das sind zusammen $7x$ Vögel.
Wegen $56 : 7 = 8$ müssen mithin zuletzt auf dem ersten Baum 8 Vögel, auf dem zweiten Baum 16 Vögel, auf dem dritten Baum 32 Vögel sitzen.

Auf dem ersten Baum saßen daher am Anfang 7 Vögel mehr als 8 Vögel, das sind 15 Vögel.
Auf dem zweiten Baum saßen zu Anfang noch nicht die später vom ersten Baum zugeflogenen 7 Vögel, dafür aber die dann zum dritten Baum geflogenen 5 Vögel; also waren es zu Anfang 2 Vögel weniger als 16 Vögel, das sind 14 Vögel.
Auf dem dritten Baum saßen am Anfang 5 Vögel weniger als 32 Vögel, das sind 27 Vögel.

Aufgabe 3 - 170523
Eine Fläche von 1710 m^2 ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe 150 m^2 oder die Größe 210 m^2.
Wie viel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

Die Anzahl der Parzellen der Größe 150 m^2 ist eine der Zahlen von 0 bis 9. Für jede dieser Zahlen erhält man folgende Werte:

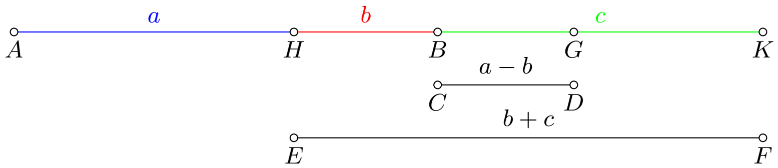
Parzellen 150 m^2		Parzellen 210 m^2		Flächeninhalt
Anzahl	Flächeninhalt	Anzahl	Flächeninhalt	aller Parzellen
0	0 m^2	9	1890 m^2	1890 m^2
1	150 m^2	8	1680 m^2	1830 m^2
2	300 m^2	7	1470 m^2	1770 m^2
3	450 m^2	6	1260 m^2	1710 m^2
4	600 m^2	5	1050 m^2	1650 m^2
5	750 m^2	4	840 m^2	1590 m^2
6	900 m^2	3	630 m^2	1530 m^2
7	1050 m^2	2	420 m^2	1470 m^2
8	1200 m^2	1	210 m^2	1410 m^2
9	1350 m^2	0	0 m^2	1350 m^2

Da der Flächeninhalt aller Parzellen 170 m^2 beträgt, gibt es folglich 3 Parzellen der Größe 150 m^2 und 6 Parzellen der Größe 210 m^2.

Aufgabe 4 - 170524
Drei vorgegebene Strecken AB, CD, EF und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$AB = a + b = 5{,}6$ cm; $CD = a - b = 1{,}8$ cm; $EF = b + c = 6{,}2$ cm.

Zeichne drei derartige Strecken AB, CD, EF, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!



Trägt man auf der Verlängerung von AB über B hinaus eine Strecke BG der Länge $BG = CD$ ab, so wird

$$AG = AB + BG = AB + CD = (a + b) + (a - b) = 2a$$

Konstruiert man den Mittelpunkt H der Strecke AG, so wird folglich $AH = a$.
Hiernach wird ferner $HB = AB - AH = (a + b) - a = b$.
Konstruiert man daher auf der Verlängerung von HB über B hinaus einen Punkt K so, dass $HK = EF$ gilt, so ergibt sich

$$BK = HK - HB = EF - HB = (b + c) - b = c$$

Lösungen der II. Runde 1977 übernommen aus [5]

2.19 XVIII. Olympiade 1978

2.19.1 I. Runde 1978, Klasse 5

Aufgabe 1 - 180511
Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wie viel Nüsse es sind.

Gerda meint: "Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück."
Renate meint: "Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen."
Peter sagt: "Eine von euch beiden hat bestimmt recht."

Nach dem Auszählen wurde festgestellt, dass Peter sich geirrt hatte.
Wie viel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

Gerda hatte wegen $5 \cdot 19 + 5 = 100$ gemeint, es seien mehr als 100 Nüsse auf dem Teller gewesen. Renate hatte wegen $5 \cdot 20 = 100$ gemeint, es seien weniger als 100 Nüsse gewesen. Da Peter sich geirrt hatte, hatte keines der beiden Mädchen recht. Daher lagen genau 100 Nüsse auf dem Teller.

Aufgabe 2 - 180512
Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.

a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
b) Wie viele von den kleinen Würfeln hätten drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?

Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a) 27 Würfel,
b) 8 Würfel,
c) 12 Würfel,
d) 6 Würfel,
e) l Würfel

Aufgabe 3 - 180513

	31		
	26	20	
			8

In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, dass sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und dass für jede Zeile und jede Spalte gilt:

Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.
Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an! Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

Aus 26 - 20 = 6 folgt, dass die Differenz benachbarter Zahlen in der zweiten Zeile 6 beträgt. Entsprechend folgt wegen 31 - 26 = 5 für die zweite Spalte 5 als Differenz. Hiermit ergeben sich die eingetragenen Zahlen in der zweiten Zeile und Spalte:

	31		
32	26	20	14
	21		
	16		8

In der vierten Spalte ist 14 - 8 = 6 das Doppelte der Differenz benachbarter Zahlen. Damit erhält man für diese Spalte die Differenz 3 sowie die in der folgenden Abbildung eingetragenen Zahlen der vierten Spalte.
Jetzt erhält man für die erste Zeile 31 - 17 = 14 als Doppeltes der Differenz dieser Zeile, also die Differenz 7 und damit die eingetragenen Zahlen der Abbildung.

38	31	24	17
32	26	20	14
	21		11
	16		8

Für die erste Spalte folgt dann 38 - 32 = 6, und für die dritte Spalte ergibt sich 24 - 20 = 4 als Differenz. Das vollständig ausgefüllte Rechteck sieht folgendermaßen aus, wobei die Differenzen für die Spalten und Zeilen am unteren bzw. rechten Rand angegeben sind.

38	31	24	17	7
32	26	20	14	6
26	21	16	11	5
20	16	12	8	4
6	5	4	3	

Aufgabe 4 - 180514
Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen ”Trabant”, ”Wartburg”, ”Skoda” und ”Wolga”. Die Anzahl der Wagen vom Typ ”Trabant” ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt:
Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ ”Wartburg” wie von den Typen ”Skoda” und ”Wolga” zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ ”Skoda” als vom Typ ”Wolga”.
Wie viel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

Teilt man die Wagen ”Trabant” in zwei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden alle übrigen Wagen eine dritte Gruppe derselben Anzahl. Jede Gruppe enthält daher 20 Wagen, also gibt es 40 ”Trabant”-Wagen auf dem Parkplatz. Für die restlichen 20 Wagen gilt:

Teilt man die Wagen ”Wartburg” in drei Gruppen gleicher Anzahl, so bilden die nun noch verbleibenden eine vierte Gruppe derselben Anzahl. Also enthält jede dieser Gruppen 5 Wagen, folglich sind 15 ”Wartburg”-Wagen auf dem Parkplatz. Für die verbleibenden 5 Wagen gilt:

Es handelt sich nur um Wagen der Typen ”Wolga” und ”Skoda”. Dabei ist laut Aufgabe die Anzahl der ”Skoda”-Wagen um drei größer als die der ”Wolga”-Wagen. Das ist nur möglich, wenn 4 ”Skoda”-Wagen und 1 ”Wolga”-Wagen auf dem Parkplatz stehen.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen aus [5]

2.19.2 II. Runde 1978, Klasse 5

Aufgabe 1 - 180521
Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene.
Wie viel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

Wegen $3200 \cdot 2 = 6400$ werden insgesamt 6400 km Schienen benötigt.
Wegen 6400 km = 6400000 m und $6400000 \cdot 65 = 416000000$ werden insgesamt 416000000 kg = 416000 t Stahl für diese Schienen benötigt.

Aufgabe 2 - 180522
Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.

Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Wenn eine Zahl z die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:

Die Einerziffer ist nach (1) nicht 0 und nach (2) so beschaffen, dass aus ihr nach Vergrößerung um 4 ein Ergebnis kleiner oder gleich 9 entsteht.
Daher ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und für z verbleiben höchstens die Möglichkeiten 51, 62, 73, 84, 95.

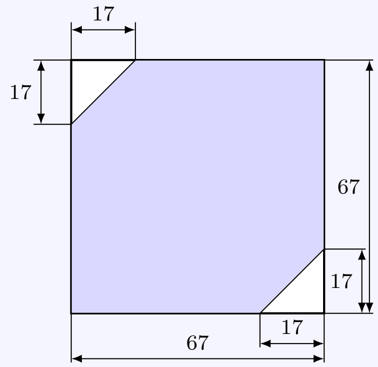
Durch Vertauschen der Ziffern entsteht jeweils 15, 26, 37, 48, 59, und das Dreifache dieser Zahlen ist jeweils 45, 78, 111, 144, 177.

Daher können wegen (3) nur die Zahlen 51 und 62 alle Bedingungen erfüllen. Die für diese Zahlen bereits durchgeführten Rechnungen zeigen, dass diese Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) auch tatsächlich erfüllen.

Aufgabe 3 - 180523
Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren.
Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Wegen $92 : 4 = 23$ verfügt nach dem Ausleihen jede der vier KAP über 23 Traktoren. Da C weder einen Traktor erhielt, noch einen Traktor abgab, besaß sie auch ursprünglich genau 23 Traktoren.
A besaß 3 Traktoren weniger als 23, also 20 Traktoren. D besaß 4 Traktoren weniger als 23, also 19 Traktoren. B besaß 7 Traktoren mehr als 23, also 30 Traktoren.

Aufgabe 4 - 180524



Die abgebildete farbige Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der farbigen Fläche (in cm^2) zu berechnen.

Wegen $67^2 = 4489$ beträgt der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrats 4489 mm^2.
Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem Viereck ergänzen, das vier gleichlange Seiten und zwei rechte Winkel enthält, also ein Quadrat ist. Wegen $17^2 = 289$ beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrats 289 mm^2.

Wegen 4489 - 289 = 4200 und 4200 mm^2 = 42 cm^2 hat die farbige Fläche den Flächeninhalt 42 cm^2.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

2.20 XIX. Olympiade 1979

2.20.1 I. Runde 1979, Klasse 5

Aufgabe 1 - 190511
(Eine historische Aufgabe, 2000 Jahre v.d.Z.)
In einem Käfig sind Kaninchen und Fasane eingesperrt. Diese Tiere haben zusammen 40 Köpfe und 104 Füße.
Nenne die Anzahl aller Kaninchen und die Anzahl aller Fasane, die in dem Käfig sind!

Die Anzahl der Kaninchen sei k, der Fasanen f.
Dann gilt $k + f = 40$ und $4 \cdot k + 2 \cdot f = 104$ denn sie haben jeweils 4 bzw. 2 Beine.
Subtrahiert man die erste Gleichung zweimal von der zweiten wird $2k = 24$, also $k = 12$ und damit $f = 28$.

Aufgabe 2 - 190512

In die sieben leeren Felder des folgenden Bildes sind Zahlen derart einzutragen, dass alle vier waagerechten und alle vier senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

4	+	□	-	□	=	2
+		-		+		+
□	-	2	+	0	=	□
-		+		-		-
□	+	□	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	□	=	3

4	+	7	-	9	=	2
+		-		+		+
9	-	2	+	0	=	7
-		+		-		-
12	+	0	-	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	-	3	=	3

Jede Gleichung, in der nur ein leeres Kästchen steht, ist sofort lösbar; die anderen anschließend:

Aufgabe 3 - 190513
Kurt, Peter und Konrad sind jeweils in genau einer der drei Arbeitsgemeinschaften “Mathematik”, “Biologie”, “Zeichnen”. Ferner ist bekannt:

(1) Peter geht häufiger zum Schwimmen als der Junge aus der AG “Mathematik”.
(2) Der Junge aus der AG “Mathematik” und Konrad haben nicht gleich viele Urkunden bei einem Sportwettkampf erhalten.
(3) Peter geht in eine niedrigere Klasse als der Junge aus der AG “Biologie”.
Welcher der drei Jungen besucht die AG “Mathematik”, welcher die AG “Biologie” und welcher die AG “Zeichnen”?

Aus den ersten beiden Aussagen folgt, dass nur Kurt die AG “Mathematik” besucht. Damit ergibt die dritte Aussage dann, dass Peter gern zeichnet und Konrad sich besonders für Biologie interessiert.

Aufgabe 4 - 190514
Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?
Wir wollen dabei annehmen, dass jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist.
Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Ein Streichholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot 2 = 200$ mm^3 $= 0{,}2$ cm^3. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000$ cm^3. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Streichhölzer in den Würfel.

Hinweis: Eine analoge Aufgabe wurde 1960 in der Vorolympiade gestellt. (siehe Aufgabe V00505)

Aufgaben der I. Runde 1979 gelöst von Steffen Polster

2.20.2 II. Runde 1979, Klasse 5

Aufgabe 1 - 190521
In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A, B, C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufsstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt.
Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A. Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B. Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D.

a) Wie viel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?
b) Wie viel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

a) Für die Sorte A beträgt wegen 900 : 3 = 300 der Lagerbestand 300 Pakete.
Für die Sorte B beträgt wegen 900 - 300 = 600 und 600 : 4 = 150 der Bestand 150 Pakete.
Wegen 600 - 150 = 450 und 450 : 2 = 225 beträgt für die Sorten C und D der Bestand je 225 Pakete.

b) Wegen $250 \cdot 900 = 225000$ und 225000 g = 225 kg sind insgesamt 225 kg Waschpulver in den Paketen enthalten.

Aufgabe 2 - 190522
In einem Bericht eines Schülers über einen 60 m-Lauf war zu lesen:

"Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen."

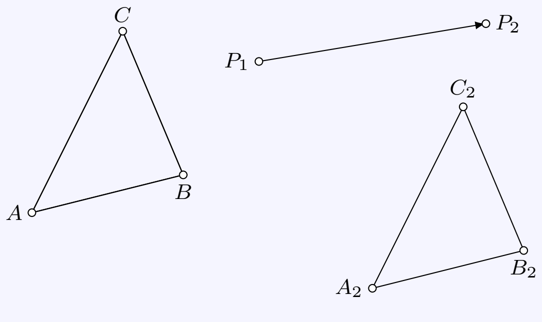
Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

Wären alle Aussagen des Berichtes wahr, so hätte Beate Doris "auf den letzten Metern überholt", und Doris hätte Christine "hinter sich gelassen". Also wäre Beate vor Christine ins Ziel gekommen.
Das steht im Widerspruch zu der Aussage, Beate wäre "etwas später ins Ziel gekommen als Christine". Folglich können nicht alle Aussagen des Berichtes gleichzeitig wahr sein.

Aufgabe 3 - 190523
Auf diesem Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit folgender Eigenschaft:

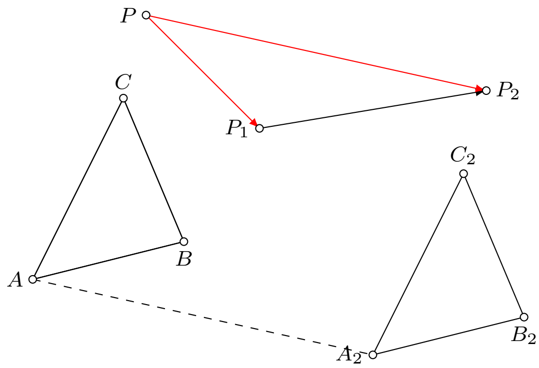
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.

Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit dieser Eigenschaft!



Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimetereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!

Beispiel einer als Lösung möglichen Konstruktion:



Aufgabe 4 - 190524
Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, dass in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und daß dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

$$\begin{array}{ccccccc}
x & y & z & \cdot & 8 & x & z \\
\hline
 & x & x & 8 & 8 & & \\
 & & & \square & \square & x & \\
 & & & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

Aus dem ersten Teilprodukt ist ersichtlich, dass $z \cdot 8$ auf 8 endet; daher muss $z = 1$ oder $z = 6$ gelten. Wäre $z = 1$, so könnte das dritte Teilprodukt nicht aus vier Ziffern bestehen, sondern nur aus drei. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit $z = 6$.
Aus dem zweiten Teilprodukt ist nun ersichtlich, dass $6 \cdot x$ auf x endet. Da x auch als Anfangsziffer vorkommt, also $x \neq 0$ gilt, kann folglich nur $x = 2$ oder $x = 4$ oder $x = 6$ oder $x = 8$ sein.
Wäre x eine der Ziffern 4, 6, 8, so würde das zweite Teilprodukt nicht dreistellig, sondern vierstellig. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x = 2$.

Hiernach lautet das erste Teilprodukt 2288. Wegen $2288 : 8 = 286$ muss daher der erste Faktor der Multiplikationsaufgabe die Zehnerziffer $y = 8$ enthalten.
Nun kann die vollständige Eintragung durch Fertigstellen des schriftlichen Multiplizierens erfolgen. Man erhält:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 8 & 6 & \cdot & 8 & 2 & 6 \\
\hline
 & 2 & 2 & 8 & 8 & & \\
 & & & 5 & 7 & 2 & \\
 & & & 1 & 7 & 1 & 6 \\
\hline
 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6
\end{array}$$

Lösungen der II. Runde 1979 übernommen aus [5]

2.21 XX. Olympiade 1980

2.21.1 I. Runde 1980, Klasse 5

Aufgabe 1 - 200511

Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift alpha stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:

D_1 D_2

a		l
	p	
h		a

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl p das Dreifache der Zahl a sein, und die Zahl h soll das Fünffache der Zahl l sein.

Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann! Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt $p = 3a$.
In der Diagonalen $_D1$ steht also die Summe $a + 3a + a = 5a$. Somit ist $5a = 135$, also $a = 135 : 5 = 27$, und, da $p = 3a$ ist, $p = 3 \cdot 27 = 81$. Ferner folgt $h = 5l$.
Also steht in der Diagonalen D_2 die Summe $l + 81 + 5l = 6l + 81$. Somit ist $6l + 81 = 135$ und daher $6l = 135 - 81 = 54$, mithin $l = 54 : 6 = 9$, und, da $h = 5l$ ist, $h = 5 \cdot 9 = 45$. Also kann nur die Eintragung

27		9
	81	
45		27

alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 2 - 200512
Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wie viel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

Wegen $105 \cdot 5 = 525$ waren insgesamt 525 t Schotter zu transportieren.
Wegen $35 \cdot 5 = 175$ hatte der erste LKW davon bis zu seiner Ablösung genau 175 t Schotter transportiert.
Mithin waren wegen 525 - 175 = 350 noch genau 350 t Schotter zu transportieren. Wegen $350 : 7 = 50$ konnte diese Menge von dem zweiten LKW mit genau 50 vollbeladenen Fuhren abtransportiert werden.

Aufgabe 3 - 200513
Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen.
Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra.
Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluss verwirklichen wollen?

Da Katrin älter als alle fünf anderen Mädchen ist, gilt auch:

Katrin ist älter als Annegret.
Lore ist jünger als Annegret, also, gilt: Annegret ist älter als Lore.

Ruth hat später als Lore Geburtstag, also gilt: Lore ist älter als Ruth.
Ferner gilt: Ruth ist älter als Heidi.
Schließlich gilt: Heidi ist älter als Petra.
Folglich lautet die gesuchte Reihenfolge: Katrin, Annegret, Lore, Ruth, Heidi, Petra.

Aufgabe 4 - 200514
Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1.
Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die

a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1 hatten!

b) Von allen denjenigen unter den sieben Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, haben sich genau Christine und Frank gemeldet, als gefragt wurde, wer in genau einem der beiden Fächer die Note 1 hat. Also hatten genau diese beiden Schüler in Mathematik, aber nicht in Russisch die Note 1.

a) Genau die übrigen unter denjenigen Schülern, die in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Beate und Dieter, hatten folglich in Mathematik und in Russisch die Note 1.

c) Genau diejenigen unter den sieben Schülern, die nicht in Mathematik die Note 1 hatten, d.s. genau Annette, Gerd und Hans, hatten in Russisch, aber nicht in Mathematik die Note 1.

Lösungen der I. Runde 1980 übernommen aus [5]

2.21.2 II. Runde 1980, Klasse 5

Aufgabe 1 - 200521
Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.
Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.
Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

Wegen 6 + 13 = 19 und 19 - 2 = 17 erhielten die Geschwister im November zusammen 17 Mark, wegen 6 + 13 + 17 = 36 mithin insgesamt 36 Mark.
Wegen 36 : 3 = 12 betrug ihre Solidaritätsspende 12 Mark. Den gleichen Betrag legten sie in ihre Ferienkasse.
Wegen 36 - 12 - 12 = 12 verblieben 12 Mark, davon erhielt jeder für sich die Hälfte, also jeder 6 Mark.

Aufgabe 2 - 200522
Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark Schein oder ein 20-Mark-Schein.
Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

Die folgende Tabelle enthält alle Zusammenstellungen von 2 Geldscheinen, von denen jeder ein 10-Mark-Schein oder ein 20-Mark-Schein ist. Anschließend wird für jede dieser Zusammenstellungen der Gesamtwert ermittelt:

Anzahl der Scheine zu je		Wert der Scheine zu		
10 M	20 M	10 M	20 M	Gesamtwert
0	12	0 M	240 M	240 M
1	11	10 M	220 M	230 M
2	10	20 M	200 M	220 M
3	9	30 M	180 M	210 M
4	8	40 M	160 M	200 M
5	7	50 M	140 M	190 M
6	6	60 M	120 M	180 M
7	5	70 M	100 M	170 M
8	4	80 M	80 M	160 M
9	3	90 M	60 M	150 M
10	2	100 M	40 M	140 M
11	1	110 M	20 M	130 M
12	0	120 M	0 M	120 M

Daraus ist ersichtlich, dass genau für die Anzahlen 7 und 5 der 10-Mark-Scheine bzw. 20-Mark-Scheine der Gesamtwert 170 Mark entsteht.

Aufgabe 3 - 200523
Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.
(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

(I) Wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und dabei $AB = x$ cm gilt, dann folgt aus (2) $BC = (x + 3)$ cm, also

$$AC = AB + BC = xcm + (x + 3)cm = (2x + 3)cm$$

Wegen (3) gilt dann $CD = 2AC = 2(2x + 3)cm = (4x + 6)cm$ und damit

$$AD = AC + CD + (2x + 3)cm + (4x + 6)cm = (6x + 9)cm$$

Wegen (1) folgt nun $6x + 9 = 15$, also $6x = 6$ und mithin $x = 1$.
Daher können die gestellten Bedingungen nur dann erfüllt werden, wenn $AB = 1$ cm und folglich (wegen (2) und (3)) $BC = 4$ cm und $CD = 10$ cm gilt.

(II) Dass durch diese Längenangaben die gestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt werden, zeigt folgende Probe:

Wegen $AD = AB + BC + CD = 1cm + 4cm + 10cm = 15$ cm ist Bedingung (1) erfüllt.
Die Strecke BC ist um 3 cm länger als die Strecke AB, also ist auch Bedingung (2) erfüllt.
Wegen $AC = AB + BC = 5$ cm ist die Strecke CD doppelt so lang wie die Strecke AC, und somit ist auch Bedingung (3) erfüllt.

Aufgabe 4 - 200524
Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)

Im Gespräch stellen sie fest, dass einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und dass einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:

(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, dass er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.
(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: "Das weiß ich schon, Kurt."
(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, dass er Besuch aus Suhl gehabt habe.

In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

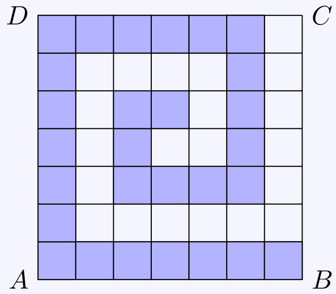
Wegen (1) ist Herr Meyer weder der Physiklehrer noch der Mathematiklehrer, also muss er der Deutschlehrer sein.
Wegen (2) heißt er Kurt mit Vornamen, und wegen (3) wohnt er in Suhl.
Wegen (1) und (2) ist Herr Peters der Physiklehrer und hat nicht den Vornamen Kurt.
Wegen (3) heißt er auch nicht Karl; also heißt er Otmar mit Vornamen. In Suhl kann er nicht wohnen, denn dies trifft ja für Herrn Meyer zu. In Leipzig kann er auch nicht wohnen, denn dies trifft wegen (1) für den Mathematiklehrer zu. Also wohnt er in Schwerin.
Folglich verbleibt für Herrn Siewert nur die Möglichkeit, dass er der Mathematiklehrer ist, in Leipzig wohnt und mit Vornamen Karl heißt.

Lösungen der II. Runde 1980 übernommen aus [5]

2.22 XXI. Olympiade 1981

2.22.1 I. Runde 1981, Klasse 5

Aufgabe 1 - 210511



Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abbildung zeigt. Der Streifenzug ist farbig hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!

Wegen $14 : 7 = 2$ hat jedes der Teilquadrate die Seitenlange 2 cm. Der Umfang des Streifenzuges besteht aus je 3 Seiten seines Anfangs- bzw. Endquadrates sowie je 2 Seiten seiner übrigen 26 Quadrate. Wegen $2 \cdot 26 = 52$, $3 + 3 + 52 = 58$ beträgt sein Umfang also das 58 fache der Seitenlänge eines Teilquadrates; wegen $58 \cdot 2 = 116$ sind das 116 cm.

Jedes der 28 Quadrate des Streifenzuges hat wegen $2 \cdot 2 = 4$ den Flächeninhalt 4 cm^2. Folglich beträgt wegen $28 \cdot 4 = 112$ der Flächeninhalt des Streifenzuges 112 cm^2.

Aufgabe 2 - 210512
Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte.
Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wie viel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

Angenommen, die Klasse 5a hätte 6 Hüllen weniger angefertigt. Dann wären insgesamt 60 Buchhüllen hergestellt worden. Außerdem könnte man dann die Menge dieser 60 Buchhüllen so in vier gleichgroße Teilmengen zerlegen, dass die Klassen 5a und 5b je eine dieser Teilmengen angefertigt hätten und die Klasse 5c die Übrigen zwei Teilmengen.
Wegen $60 : 4 = 15$ und $2 \cdot 15 = 30$ hat die Klasse 5b daher genau 15 Hüllen und die Klasse 5c genau 30 Hüllen angefertigt, während die Klasse 5a wegen $15 + 6 = 21$ genau 21 Buchhüllen hergestellt hat.

Aufgabe 3 - 210513

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & 0 & 0 & - & \square & \square & = & \square & \square & \square \\
 & : & & & & + & = & & - & \\
 & \square & \square & \cdot & \square & \square & = & 6 & 0 & 8 \\
\hline
 & 2 & 5 & + & \square & 3 & = & \square & \square & \square
\end{array}$$

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & 0 & 0 & - & 7 & 4 & = & 7 & 2 & 6 \\
 & : & & & & + & = & & - & \\
 & 3 & 2 & \cdot & 1 & 9 & = & 6 & 0 & 8 \\
\hline
 & 2 & 5 & + & 9 & 3 & = & 1 & 1 & 8
\end{array}$$

Aufgabe 4 - 210514
Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:

Ein "Oktoberkind" (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:

(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.

Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

Aus (1) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Kolja.
Aus (3) folgt: Der Komsomolze heißt nicht Sascha. Also hat er den Vornamen Igor. Daher heißt das Oktoberkind nicht Igor.
Aus (2) folgt: Das Oktoberkind heißt nicht Sascha. Somit hat es den Vornamen Kolja. Damit verbleibt für den Pionier nur der Vorname Sascha.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen aus [5]

2.22.2 II. Runde 1981, Klasse 5

Aufgabe 1 - 210521
Ein Behälter, der mit Sonnenblumenöl gefüllt ist, wiegt 17 kg 500 g. Der leere Behälter würde 2 kg 700 g wiegen.

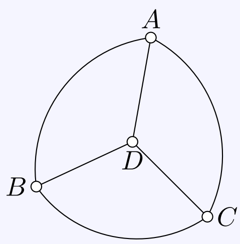
a) Wie viel Liter Öl befinden sich in dem Behälter, wenn 1 Liter Sonnenblumenöl 925 g wiegt ?
b) Für den Ladenverkauf wird das Öl in Flaschen zu 400 g abgefüllt. Wie viel Flaschen lassen sich mit dem im Behälter befindlichen Öl füllen?

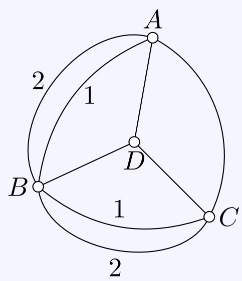
a) Wegen 17500 - 2700 = 14800 sind 14 kg 800 g Sonnenblumenöl im Behälter. Aus 14800 : 925 = 16 erhält man, dass sich 16 Liter Sonnenblumenöl im Behälter befinden.

b) Wegen 14800 : 400 = 37 lassen sich 37 Flaschen mit der im Behälter vorhandenen Ölmenge füllen.

Aufgabe 2 - 210522
Die vier Springbrunnen A, B, C, D eines Parkes sind so durch Wege verbunden, wie es das Bild zeigt. Ein Spaziergänger möchte so durch den Park gehen, dass er jeden dieser Wege genau einmal durchläuft. Ein solcher Spaziergang soll bei einem beliebigen Brunnen beginnen und bei einem beliebigen Brunnen (nicht unbedingt bei demselben) enden.

a) Untersuche, ob ein derartiger Spaziergang möglich ist!
b) Später wurde noch ein weiterer Weg zwischen B und A und ein weiterer Weg zwischen B und C angelegt, wie das Bild zeigt.
Untersuche, ob es danach möglich ist, einen Spaziergang der gewünschten Art zu machen!





Hinweis: Lautet bei a) oder b) die Antwort, dass ein derartiger Spaziergang nicht möglich ist, so beweise, warum nicht!
Lautet die Antwort aber, dass er möglich ist, so gib einen solchen Spaziergang an!

a) Angenommen, ein Spaziergang der genannten Art wäre möglich. Dann gäbe es unter den vier Springbrunnen A, B, C, D einen, der nicht Ausgangspunkt und nicht Endpunkt des Spaziergangs wäre.
Zu diesem Springbrunnen käme man bei dem Spaziergang auf einem der drei Wege, die von ihm, wie von jedem der vier Brunnen abgehen; auf einem zweiten Weg müsste man ihn wieder verlassen. Es verbleibt ein dritter Weg zu diesem Springbrunnen, und dieser Weg müsste während des Spaziergangs ebenfalls durchlaufen werden und somit entweder zum betrachteten Springbrunnen hin oder von ihm weg fuhren.

Es gäbe dann aber keinen vierten Weg, auf dem man wieder von diesem Springbrunnen weg oder vorher zu ihm hin kommen könnte; d.h., der Springbrunnen wäre doch End- oder Anfangspunkt des Spaziergangs. Damit ist die Annahme, es gäbe einen derartigen Spaziergang, zu einem Widerspruch geführt. Sie muss also falsch sein, d.h.: Es gibt in diesem Fall keinen Spaziergang der genannten Art.

b) Ein möglicher Spaziergang nach dem Einrichten der beiden weiteren Verbindungswege ist z.B.

$$B \to A \to D \to C \to B \to A \to C \to B \to D$$

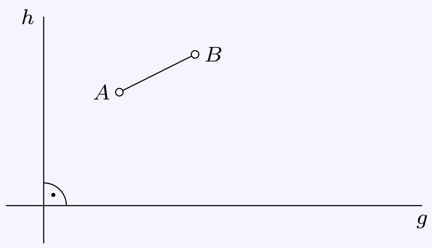
Aufgabe 3 - 210523
Vier Schüler mit den Familiennamen Erdborn, Freimuth, König und Meyer haben die Vornamen Alfred, Martin, Norbert und Torsten (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge).
Sie treffen sich auf der Geburtstagsfeier ihres Mitschülers Franz Neubert. Außer ihnen nahmen keine weiteren Personen an dieser Feier teil. Es ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Franz seinen Mitschüler Meyer begrüßen, als zweiten Norbert und danach Erdborn und später Martin.
(2) Jeder Gast brachte genau ein Geschenk mit: Meyer hatte ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Martin einen Strauß Rosen und König ein Buch mitgebracht.

Wie heißen die vier Schüler mit ihren Vor- und Familiennamen?

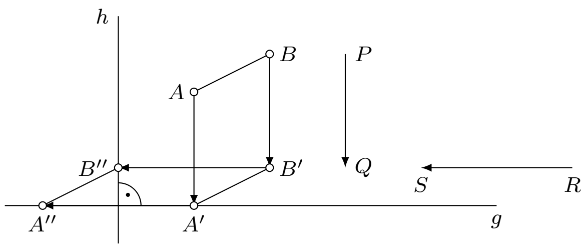
Meyer heißt nach (1) weder Norbert noch Martin. Nach (2) heißt er auch nicht Alfred. Daher gilt: Meyer heißt Torsten.
König heißt folglich nicht Torsten. Nach (2) heißt er auch weder Alfred noch Martin. Hieraus folgt: König heißt Norbert.
Erdborn heißt demnach weder Torsten noch Norbert. Nach (1) heißt er auch nicht Martin. Somit ergibt sich: Erdborn heißt Alfred.
Es verbleibt nun noch: Freimuth heißt Martin.
Damit sind alle zusammengehörigen Vor- und Familiennamen (eindeutig) ermittelt.

Aufgabe 4 - 210524
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g, h und eine Strecke AB gegeben. Konstruiere einen Verschiebungspfeil PQ parallel zu h und danach einen Verschiebungspfeil RS parallel zu g, und zwar so, dass folgendes gilt:

Wenn man die Strecke AB durch die Verschiebung PQ in die Strecke $A'B'$ überführt und diese danach durch die Verschiebung RS in die Strecke $A''B''$, so liegt A'' auf g und B'' auf h.



Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Lösungen der II. Runde 1981 übernommen aus [5]

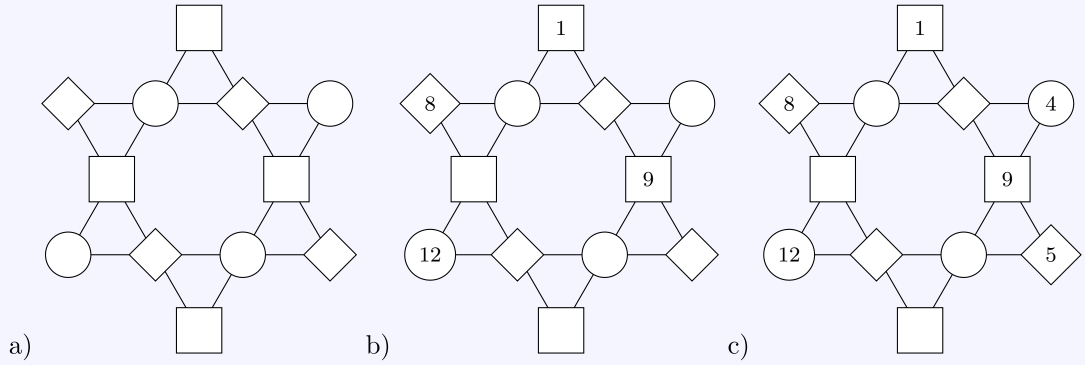
2.23 XXII. Olympiade 1982

2.23.1 I. Runde 1982, Klasse 5

Aufgabe 1 - 220511
In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, dass folgendes gilt:

Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;
die Summe der Zahlen in den vier auf einer Ecke stehenden Quadrate beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;
die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.

a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!
b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!
c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z.B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs "äußeren" Felder steht!

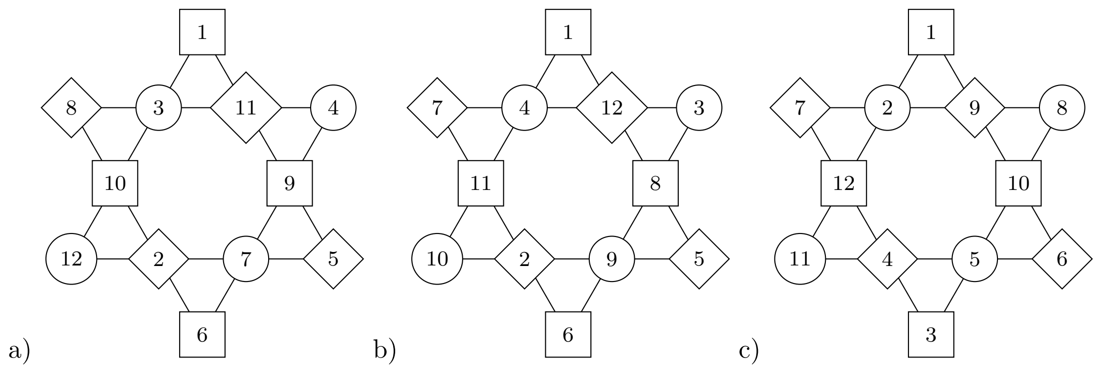


a) Die Eintragung in Abbildung a) erfüllt alle Forderungen; denn es gilt

$$8+3+11+4=26 \quad , \quad 12+2+7+5=26 \quad , \quad 12+10+3+1=26$$

$$6+7+9+4=26 \quad , \quad 6+2+10+8=26 \quad , \quad 5+9+11+1=26$$

$$1+10+6+9=26 \quad , \quad 8+2+5+11=26 \quad , \quad 12+7+4+3=26$$



b) Die Summe der beiden auf der Spitze stehenden Quadratfelder muss 26 - 1 - 9 = 16 betragen, für das linke untere auf der Spitze stehende Quadratfeld ergibt sich also 26 - 8 - 16 = 2. Es verbleiben die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.
Mit ihnen kann die Summe 16 der beiden rechten auf der Spitze stehenden Quadratfelder nur durch 5, 11 oder 6, 10 erreicht werden.

Die Summe des rechten unteren Kreis- bzw. auf der Spitze stehenden Quadratfeldes beträgt 26 - 12 - 2 = 12; sie kann nur durch 5, 7 erreicht werden. Also muss 5 in das rechte untere auf der Spitze stehende Quadratfeld, 7 in das rechte untere Kreisfeld, 11 in das rechte obere auf der Spitze stehende Quadratfeld kommen.

Es verbleiben 3, 4, 6, 10. Die Summe der beiden oberen Kreisfelder beträgt 26-8-11 = 7; sie kann nur durch 3, 4 erreicht werden. Die Summe des unteren Quadratfeldes und des rechten oberen Kreisfeldes beträgt 26 - 7 - 9 = 10; sie kann nur durch 4, 6 erreicht werden.
Also muss 4 in das rechte obere, 3 in das linke obere Kreisfeld, 6 in das untere Quadratfeld und hiernach 10 in das linke Quadratfeld kommen.

c) Zwei weitere Eintragungen liegen z.B. in Abbildung b und c vor.

Aufgabe 2 - 220512
Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.
Wie viel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

Ein Schal kostet halb so viel wie 18 M, also 9 M. Drei Schals kosten daher $3 \cdot 9$ M = 27 M.
Ein Paar Handschuhe kostet 9 M+ 1,50 M = 10,50 M.
Somit hat die Mutter 27 M+ 10,50 M = 37,50 M bezahlt. Danach hat sie noch 50 M - 37,50 M = 12,50 M übrig.

Aufgabe 3 - 220513
Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135$$
$$M + A + T + H + E = 32$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben A, B, E, H, I, J, M, R, T so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: ”Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht.”
Welche drei Zahlen sind dies!
b) Bertolt sagt: ”Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet.” Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?
c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung. Welche könnte es z.B. sein?

a) Die Primfaktorzerlegung von 135 ist $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Da bereits $3 \cdot 5$ (und erst recht $3 \cdot 3 \cdot 5$ bzw. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$) größer als jede der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist, muss der Primfaktor 5 als eine der Zahlen für B, J, M genommen werden. Aus den verbleibenden drei Faktoren 3 kann man die beiden anderen der Zahlen für B, J, M nur so bilden, dass sie 3 und $3 \cdot 3 = 9$ lauten.
Also sind 3, 5 und 9 die drei Zahlen für B, J, M.

b) Für A, T, H, E kommen dann nur noch vier der Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8, in Frage.
Wäre $M = 3$ oder $M = 5$, so müssten wegen der zweiten Gleichung die Zahlen für A, T, H, E die Summe 29 oder 27 haben. Das ist aber nicht möglich, da selbst die Summe der vier größten unter den Zahlen 1, 2, 4, 6, 7, 8 nur 25 beträgt. Also muss $M = 9$ sein.

c) Eine Lösung ist z.B.:

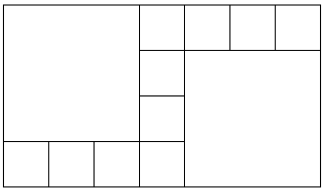
$$A = 8, \quad B = 3, \quad E = 2, \quad H = 6, \quad I = 4, \quad J = 5, \quad M = 9, \quad R = 1, \quad T = 7$$

denn die Gleichungen $3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$, 9 + 8 + 7 + 6 + 2 = 32, (6 + 2 + 4) : (7 - 2 - 1) = 3 sind wahr.

Es gibt noch genau eine weitere Lösung. Sie entsteht aus der genannten durch Vertauschen von B und J.

Aufgabe 4 - 220514
Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, dass sie die geforderten Eigenschaft hat!
Wie viel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?
b) Beweise, dass in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!
Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?



a) Eine Zerlegung liegt z.B. in der Abbildung vor. Außer den beiden Quadraten der Seitenlänge 3 cm kommen 10 Quadrate vor.

b) Da $2 \cdot 3 > 4$ ist, können die beiden Quadrate der Seitenlänge 3 cm nicht in Richtung der Rechteckseiten zu 4 cm nebeneinander liegen, sondern nur in Richtung der Rechteckseiten zu 7 cm. Wegen 4 - 3 = 1 und 7 - 2 · 3 = 1 bleibt dann neben diesen Quadraten in beiden Richtungen genau 1 cm Platz. Also müssen die anderen Quadrate, da sie möglichst groß sein sollen, alle die Seitenlänge 1 cm haben.

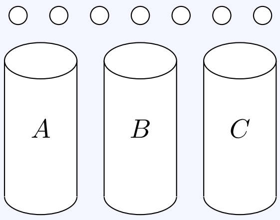
Wegen $4 \cdot 7 = 28$ beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks 28 cm^2.
Wegen $3 \cdot 3 = 9$ hat jedes der großen Quadrate den Flächeninhalt 9 cm^2, beide zusammen haben also den Flächeninhalt 18 cm^2. Für die Quadrate von je 1 cm Seitenlänge verbleibt somit der Flächeninhalt 28 cm^2 - 18 cm^2 = 10 cm^2.
Da jedes dieser Quadrate den Flächeninhalt 1 cm^2 hat, sind es genau 10 solcher Quadrate.

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen aus [5]

2.23.2 II. Runde 1982, Klasse 5

Aufgabe 1 - 220521

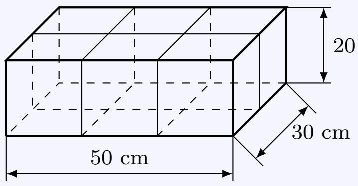
Sieben Kugeln sind so auf drei Becher A, B und C zu verteilen, dass im Becher C nicht weniger Kugeln als im Becher B und im Becher B nicht weniger als im Becher A liegen.
Es dürfen auch Becher leer bleiben.
Gib alle verschiedenen Möglichkeiten einer solchen Verteilung an!



Es gibt genau die folgenden Verteilungen der geforderten Art:

A	0	0	0	0	1	1	1	2
B	0	1	2	3	1	2	3	2
C	7	6	5	4	5	4	3	3

Aufgabe 2 - 220522



Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.
Wie viel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

Wegen $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 10 = 100 + 120 + 120 + 10 = 350$ wurden 350 cm Schnur verwendet.

Aufgabe 3 - 220523
Über die 650 Schüler einer Schule liegen folgende Angaben vor:

500 Schüler sind Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
400 Schüler sind Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft.
100 Schüler sind nicht Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Aus diesen Angaben soll ermittelt werden, wie viel der 650 Schüler sowohl Mitglied einer Sport-Arbeitsgemeinschaft als auch Mitglied einer anderen Arbeitsgemeinschaft sind.
Erkläre, wie man diese Anzahl finden kann!

Wegen 650 - 100 = 550 sind 550 Schüler Mitglied mindestens je einer Arbeitsgemeinschaft.
Wegen 550 - 400 = 150 sind von diesen 550 Schülern 150 Mitglied nur in einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
Unter den 500 Mitgliedern von Sport-Arbeitsgemeinschaften sind wegen 500 - 150 = 350 folglich 350 Schüler auch Mitglied je einer anderen Arbeitsgemeinschaft.

Aufgabe 4 - 220524
Ein Schüler kauft 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, wofür er insgesamt 3,80 M bezahlt.
Wie teuer ist ein derartiges Heft und wie teuer ein derartiger Bleistift, wenn ein Bleistift doppelt so viel kostet wie ein Heft?

Wegen $2 \cdot 7 + 5 = 19$ kosten die 7 Bleistifte und 5 Hefte ebenso viel wie 19 Hefte. Wegen $380 : 19 = 20$ kostet ein Heft folglich 20 Pf.
Wegen $2 \cdot 20 = 40$ kostet also ein Bleistift 40 Pf.

Lösungen der II. Runde 1982 übernommen aus [5]

2.24 XXIII. Olympiade 1983

2.24.1 I. Runde 1983, Klasse 5

Aufgabe 1 - 230511
Bernd, Peter und Fred nahmen mit Erfolg an der Schulolympiade teil. Jeder von ihnen bekam genau eine der folgenden drei Auszeichnungen: 1. Preis, 2. Preis oder Diplom. Ferner ist bekannt:

(1) Der Schüler mit den 2. Preis ist älter als Bernd.
(2) Fred erhielt nicht den 1. Preis.
(3) Bernd gehört keiner mathematischen Arbeitsgemeinschaft an.
(4) Der Schüler, der den 1. Preis errang, ist in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft.

Wer von ihnen erhielt den 1. Preis, wer von ihnen erhielt den 2. Preis, und wer von ihnen erhielt das Diplom?
Begründe deine Antwort!

Aus (3) und (4) folgt, dass Bernd nicht den 1. Preis errang. Da genau einer der drei Schüler einen 1. Preis erhielt, folgt dann aus (2): Peter erhielt den 1. Preis. (5)
Wegen (1) erhielt Bernd nicht den 2. Preis; wegen (5) erhielt auch Peter nicht den 2. Preis. Daraus folgt: Fred erhielt den 2. Preis. (6)
Da jeder der drei Schüler genau eine Auszeichnung bekam, folgt dann: Bernd bekam das Diplom.

Aufgabe 2 - 230512
Die Maßzahlen der (in Zentimeter gemessenen) Seitenlängen einen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang diesen Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang sind seine drei Seiten?

Die Maßzahl des Dreiecksumfangs ergibt sich durch Addition seiner drei Seitenlängen. Nun ist die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gleich dem Dreifachen der mittleren dieser drei Zahlen (denn die erste Zahl ist um 1 kleiner und die dritte um 1 größer als die mittlere Zahl).
Wegen 42 : 3 = 14 beträgt mithin die mittlere Zahl im vorliegenden Fall 14, und die beiden anderen Zahlen betragen 13 und 15.

Die Seiten des Dreiecks, dessen Umfang 42 cm beträgt, sind also 13 cm, 14 cm und 15 cm lang. Diese drei Seitenlängen erfüllen auch die Bedingung, dass die Summe zweier Seitenlängen stets größer als die dritte Seitenlänge ist.

Aufgabe 3 - 230513
Für die Buchstaben a, b, c, d, e, f sind in den nachstehenden Aufgaben (1) bis (6) natürliche Zahlen so einzusetzen, dass richtig gerechnete Aufgaben entstehen. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen bedeuten.

(1) $a + b + c = 21$,
(2) $b \cdot c = 42$,
(3) $c + d = 70 : b$,
(4) $e : a = d$,
(5) $c = 54 : 9$,
(6) $a + b + c + d + e + f = 60$

Finde eine solche Eintragung und überprüfe, ob sie alle Forderungen erfüllt!

Aus (5) folgt c = 6.
Setzt man das in (2) ein, so ergibt sich b · 6 = 42, also b = 42 : 6, d.h. b = 7.
Damit folgt aus (1), dass a + 7 + 6 = 21, also a = 21 - 13, d.h. a = 8 gilt.
Aus (3) erhält man ferner d + 6 = 70 : 7, also d = 10 - 6, d.h. d = 4.
Aus (4) erhält man daher e : 8 = 4, also e = 4 · 8, d.h. e = 32.
Aus (6) ergibt sich schließlich 8 + 7 + 6 + 4 + 32 + f = 60, also f = 60 - 57, d.h. f = 3.

Die so gefundenen Zahlen a, b, c, d, e, f sind paarweise verschieden und erfüllen (1) bis (6).

Aufgabe 4 - 230514

In die leeren Felder der Abbildung sind natürliche Zahlen so einzusetzen, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gelöst werden.
a) Gib eine solche Einsetzung an!
b) Es gibt insgesamt vier solche Einsetzungen. Erkläre, wie man diese finden kann und gib sie an!

3	$+$		$-$		$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
	$\cdot$		$:$		$= 3$
$-$		$-$		$+$	
	$+$		$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

a) Siehe eine der unter b) erhaltenen Einsetzungen. b) Wir bezeichnen die leeren Felder und die darin einzusetzenden Zahlen so mit a, b, c, d, e, f, g wie in der Abbildung angegeben. Für jede der gesuchten Einsetzungen gilt dann:

Zeile 1:	3	$+$	a	$-$	b	$= 7$
	$\cdot$		$+$		$\cdot$	
Zeile 2:	c	$\cdot$	d	$:$	e	$= 3$
	$-$		$-$		$+$	
Zeile 3:	f	$+$	g	$-$	7	$= 6$
	$= 2$		$= 4$		$= 7$	
	Sp.1:		Sp.2:		Sp.3:	

Da in der 2. Zeile durch e dividiert wird, gilt $e \neq 0$. Aus der 3. Spalte folgt $b \cdot e = 0$, wegen $e \neq 0$ also $b = 0$. Daher ergibt sich aus der 1. Zeile $a = 4$.
Aus der 3. Zeile folgt $f + g = 13$. Da f und g natürliche Zahlen sind, kommen folglich für sie nur die Zahlen 0, 1, 2, ..., 13 in Frage. Nach der 1. Spalte ist $3 \cdot c = 2 + f$, also ist $2 + f$ durch 3 teilbar. Daher verbleiben nur die Möglichkeiten

$f = 1$, $c = 1$, $g = 12$; (1) $f = 4$, $c = 2$, $g = 9$; (2)
$f = 7$, $c = 3$, $g = 6$; (3) $f = 10$, $c = 4$, $g = 3$; (4)
$f = 13$, $c = 5$, $g = 0$. (5)

Aus der 2. Spalte und $a = 4$ folgt $d - g = 0$, also $d = g$. Daher führen (1) bis (5) in der 2. Zeile auf folgende Gleichungen und Werte für e:

(1) $1 \cdot 12 : e = 3$, $e = 4$;
(2) $2 \cdot 9 : e = 3$, $e = 6$;
(3) $3 \cdot 6 : e = 3$, $e = 6$;
(4) $4 \cdot 3 : e = 3$, $e = 4$;
(5) $5 \cdot 0 : e = 3$, kein möglicher Wert für e.

Mithin können nur die folgenden Einsetzungen alle genannten Aufgaben lösen:

3	$+$	4	$-$	0	$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
1	$\cdot$	12	$:$	4	$= 3$
$-$		$-$		$+$	
1	$+$	12	$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

3	$+$	4	$-$	0	$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
2	$\cdot$	9	$:$	6	$= 3$
$-$		$-$		$+$	
4	$+$	9	$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

3	$+$	4	$-$	0	$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
3	$\cdot$	6	$:$	6	$= 3$
$-$		$-$		$+$	
7	$+$	6	$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

3	$+$	4	$-$	0	$= 7$
$\cdot$		$+$		$\cdot$	
4	$\cdot$	3	$:$	4	$= 3$
$-$		$-$		$+$	
10	$+$	3	$-$	7	$= 6$
$= 2$		$= 4$		$= 7$	

Man bestätigt, dass bei diesen Einsetzungen alle waagerechten und alle senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen aus [5]

2.24.2 II. Runde 1983, Klasse 5

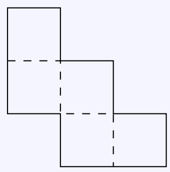
Aufgabe 1 - 230521
Die Zahlen von 1 bis 10 sollen als Ergebnisse von Rechenaufgaben auftreten, bei denen außer den Zeichen für die vier Grundrechenoperationen und Klammern jeweils nur die Ziffer 3 auftreten soll, und zwar genau 5 mal. Für zwei Aufgaben wurden Beispiele angegeben.
Gib für die Ergebnisse 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 und 10 je eine derartige Aufgabe an!

Beispiele:
$1 = 3 - 3 : 3 - 3 : 3 = (3 + 3 + 3) : 3 : 3$
$7 = (33 - 3) : 3 - 3 = 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3$

Lösungen sind z.B.:

$2 = 3 - 33 : 33 = 3 + 3 - 3 - 3 : 3$ $\quad$ $3 = 3 + 3 + 3 - 3 - 3 = 3 + 33 - 33$
$4 = 3 + 33 : 33 = 3 + 3 : 3 + 3 - 3$ $\quad$ $5 = 3 + 3 : 3 + 3 : 3 = 3 \cdot 3 - 3 : 3 - 3$
$6 = (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 - 3$ $\quad$ $8 = 3 + 3 + 3 - 3 : 3 = (33 - 3 \cdot 3) : 3$
$9 = 3 + 3 + 3 + 3 - 3 = (33 + 3) : 3 - 3$ $\quad$ $10 = 3 + 3 + 3 + 3 : 3 = 33 : 3 - 3 : 3$

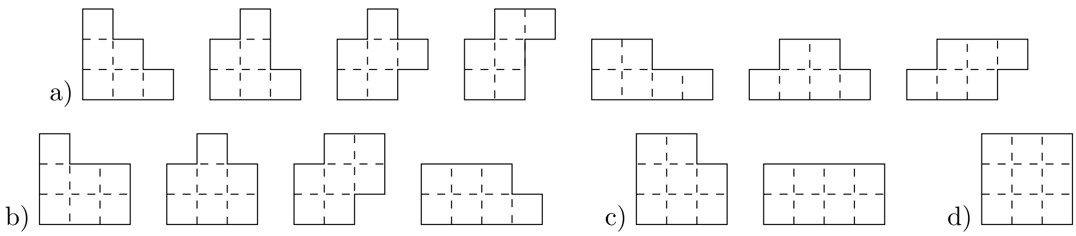
Aufgabe 2 - 230522
Mit 12 gleichlangen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden. Die Abbildung zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt.



(Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.)
Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von

a) 6 Flächeneinheiten,
b) 7 Flächeneinheiten,
c) 8 Flächeneinheiten,
d) 9 Flächeneinheiten!

Einige mögliche Lösungen zeigt nachstehende Abbildung:



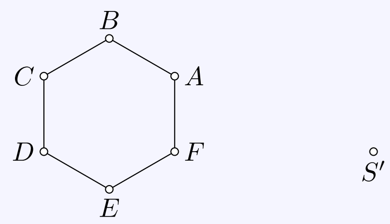
Aufgabe 3 - 230523
Die drei Pioniere Hans, Karl und Peter fuhren mit dem Rad von Leipzig nach Halle. Hans fuhr dabei in je 10 Minuten 2 Kilometer, Karl benötigte für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegte und Halle nach genau 100 Minuten erreichte.
Wie viel Minuten nach Peter trafen Hans und Karl in Halle ein, wenn alle drei Pioniere zur gleichen Zeit in Leipzig abfuhren?

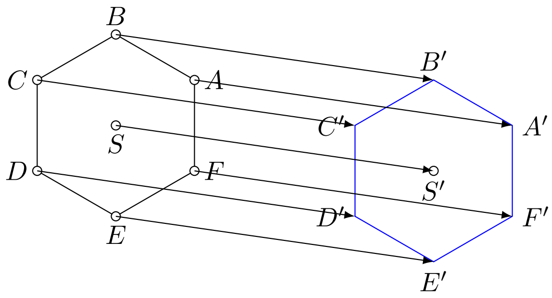
Wenn Peter in 10 Minuten 3 km zurücklegt, dann legt er in 100 Minuten zehnmal soviel zurück, also 30 km.
Wenn Hans für 2 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 30 km fünfzehnmal soviel, also 150 Minuten.
Wenn Karl für 2,5 km 10 Minuten braucht, dann benötigt er für 5 km 20 Minuten, also für 30 km 120 Minuten.

Wegen 150 - 100 = 50 kam Hans mithin 50 Minuten später als Peter in Halle an. Wegen 120 - 100 = 20 kam Karl 20 Minuten später als Peter in Halle an.

Aufgabe 4 - 230524
In der nachstehenden Abbildung sind ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ und ein Punkt S' gegeben.
Der Schnittpunkt der Diagonalen AD, BE und CF des Sechsecks sei S.
Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der S den Bildpunkt S' hat.

Konstruiere den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{SS'}$ und das Bild $A'B'C'D'E'F'$ des Sechsecks $ABCDEF$ bei dieser Verschiebung!





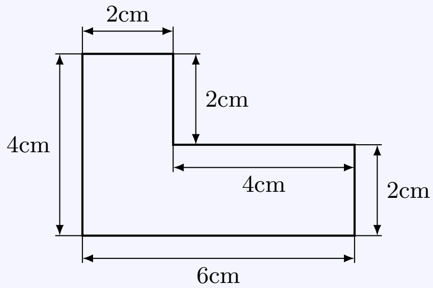
Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

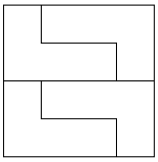
2.25 XXIV. Olympiade 1984

2.25.1 I. Runde 1984, Klasse 5

Aufgabe 1 - 240511

Aus Flächenstücken wie in der Abbildung kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt.
Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich?
Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!



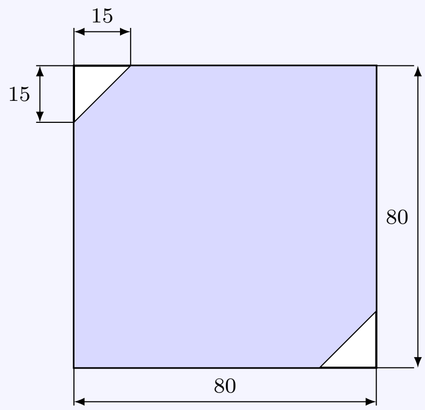


Es sind vier Flächenstücke erforderlich.
Eine Zeichnung der geforderten Art zeigt die Abbildung.

Aufgabe 2 - 240512
Roland löste eine Divisionsaufgabe. Er erhielt als Ergebnis den Quotienten 36.
Roland machte die Probe, indem er den Divisor mit diesem Quotienten multiplizierte. Dabei las er versehentlich im Divisor statt einer Ziffer 7 eine 1 und erhielt als Ergebnis dieser Multiplikation nicht den gegebenen Dividenden, sondern die Zahl 756.
Wie hieß die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte?

Bei der Probe multiplizierte Roland die falsche Zahl mit 36 und erhielt 756. Wegen $756 : 36 = 21$ war diese falsche Zahl 21. Der Fehler war entstanden, indem er statt einer 7 eine 1 gelesen hatte. Die richtige Zahl hätte also 27 lauten müssen.
Mit dieser hätte Roland bei seiner Probe $27 \cdot 36 = 972$ erhalten. Dies war somit der gegebene Dividend.
Die Divisionsaufgabe, die Roland lösen sollte, hieß folglich $972 : 27$.

Aufgabe 3 - 240513

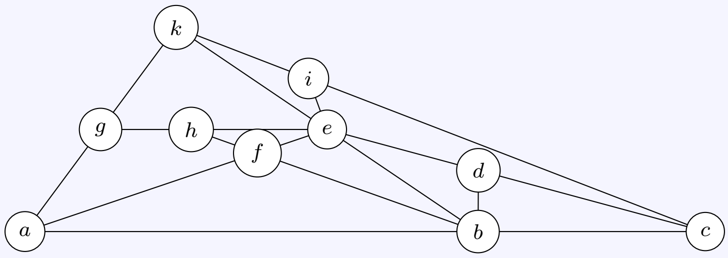


Die farbige Fläche in der Abbildung entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der farbigen Fläche in Quadratzentimeter!

Wegen $80 \cdot 80 = 6400$ beträgt der Flächeninhalt des Quadrates 6400 mm^2.
Die vier abgeschnittenen Dreiecke ergänzen sich paarweise zu insgesamt zwei Quadraten mit einer Seitenlänge von je 15 mm. Wegen $15 \cdot 15 = 225$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 225 mm^2.

Wegen 6400 - 225 - 225 = 5950 beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche also 5950 mm^2, das sind 59,5 cm^2.

Aufgabe 4 - 240514

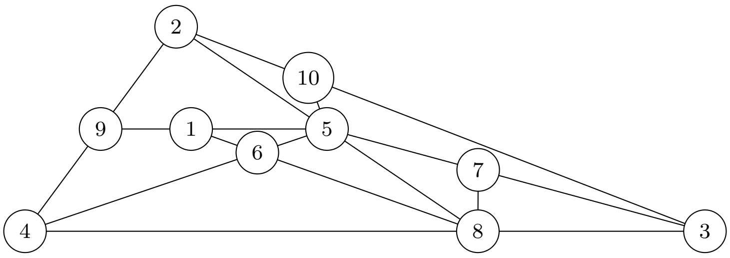


In die Felder der Abbildung soll für jeden Buchstaben eine der Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll genau einmal vorkommen. Auf jeder eingezeichneten Geraden soll die Summe der Zahlen 15 betragen; es soll also gelten:

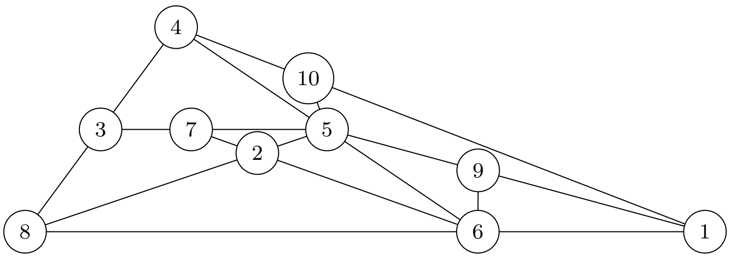
$15 = a+b+c = a+f+e = a+g+k = b+d = b+e+k = b+f+h = c+d+e = c+i+k = e+h+g = e+i$

(a) Gib eine solche Eintragung an, bei der zusätzlich festgelegt wird, dass $e = 5$ und $k = 2$ ist!
(b) Gib eine weitere von (a) verschiedene Eintragung an, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt! (Für e und k dürfen auch andere als die in (a) eingesetzten Zahlen verwendet werden.)
(c) Beweise, dass es keine Eintragung gibt, bei der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und außerdem $e = 10$ gilt!

(a) Für $e = 5$ und $k = 2$ gibt es genau eine Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es ist die Eintragung in der Abbildung



(b) Eine weitere Eintragung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die 2.Abbildung.



(c) Wäre eine Eintragung mit $e = 10$ möglich, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so folgte: Wegen $a + f + e = b + e + k = c + d + e (= e + h + g) = 15$ müsste $a + f = b + k = c + d (= h + g) = 5$ sein, also wären die Zahlen a, f, b, k, e, d (, h, g) sämtlich kleiner als 5. Das ist unmöglich, da es unter den Zahlen von 1 bis 10 nur vier gibt, die kleiner als 5 sind. Also kann es keine Eintragung mit $e = 10$ geben, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen aus [5]

2.25.2 II. Runde 1984, Klasse 5

Aufgabe 1 - 240521
Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten. Ihm ist bekannt:

(1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
(2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspielerin aber nicht.
(3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
(4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennisspielerin.

Beweise, dass die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

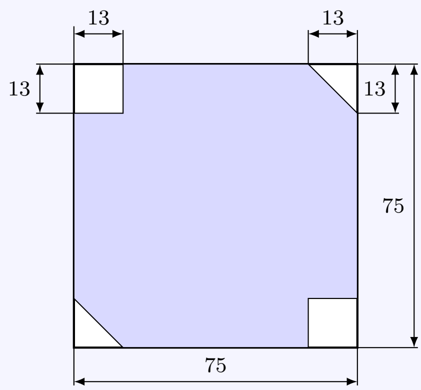
Aus (2) und (3) folgt, dass die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra ist. Nach (1) ist also Ruth die Volleyballspielerin und somit die Tischtennisspielerin nicht Ruth.
Nach (4) ist sie auch nicht Marion. Also ist Petra die Tischtennisspielerin.
Nochmals wegen (1) verbleibt daher für Marion die Sportart Schwimmen.
Damit ist bewiesen, dass die Verteilung der Sportarten durch (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 - 240522
In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt. Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:

Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.
Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

Wegen $4320 : 3 = 1440$ wurden auf der ersten Maschine 1440 Teile hergestellt.
Auf der zweiten Maschine wurden 864 Teile produziert; denn es ist $4320 : 5 = 864$.
Wegen $4320 - 1440 - 864 = 2016$ und $2016 : 2 = 1008$ wurden auf der dritten und auf der vierten Maschine je 1 008 Teile angefertigt.

Aufgabe 3 - 240523



Die abgebildete farbige Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem man von ihm zwei gleichgroße Dreiecke und zwei gleichgroße Quadrate abschneidet.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der farbigen Fläche!

Wegen $75^2 = 5625$ beträgt der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates 5625 mm^2.

Die beiden abgeschnittenen Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, das die gleiche Seitenlänge wie die beiden abgeschnittenen Quadrate hat. Wegen $13^2 = 169$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 169 mm^2.
Wegen 5625 - 3 $\cdot$ 169 = 5118 beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche daher 5118 mm^2, das sind 51,18 cm^2.

Aufgabe 4 - 240524
Peter berichtet: "Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058."

Beweise, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufgeschrieben hat!
Gib diese Zahl an!

Wenn die gesuchte Zahl x lautet, so ist $10 \cdot x$ die durch Anhängen der Ziffer 0 gebildete Zahl. Die Summe beträgt folglich $11 \cdot x$; nach Peters Angabe gilt also $11 \cdot x = 3058$.
Wegen $3058 : 11 = 278$ folgt hieraus $x = 278$.
Damit ist bewiesen, dass man aus Peters Angaben die von ihm als erste aufgeschriebene Zahl eindeutig ermitteln kann. Sie lautet 278.

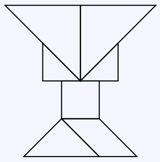
Lösungen der II. Runde 1984 übernommen aus [5]

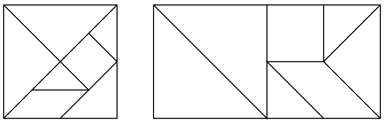
2.26 XXV. Olympiade 1985

2.26.1 I. Runde 1985, Klasse 5

Aufgabe 1 - 250511

Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich
a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.
Gib je eine Möglichkeit dafür an!



Eine mögliche Lösung ist 

Aufgabe 2 - 250512

Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt, hat verloren und muss einen Pfand geben.

Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll. Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, dass dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

Bezeichnet man die am Spiel beteiligten Kinder mit den Zahlen 1 bis 17 und beginnt bei 1 mit dem Abzählen, so findet man durch Probieren, dass das Kind mit der Nr. 2 als Verlierer übrigbleibt. Das Probieren kann z.B. in einer Tabelle der folgenden Art geschehen:

Pionier Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
scheidet als ...ter aus	16		5	3	14	7	1	11	10	12	9	4	6	2	15	13	8

Frank Pfiffig kann also sein Ziel erreichen, indem er mit den Abzählen einen Platz vor seinem Freund Herbert Nörgel beginnt.

Aufgabe 3 - 250513

Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wie viel bezahlte der dritte Kunde?

Wenn der erste Kunde x Schrauben kaufte, dann kaufte der zweite Kunde $x+4$ Schrauben und der dritte Kunde $2\cdot(x+4)$ Schrauben. Hierfür gilt $2\cdot(x+4) = 2x+8$.

Addiert man die drei Anzahlen, so ergibt sich $x+x+4+2x+8 = 4x+12$, also kauften die drei Kunden insgesamt $4x+12$ Schrauben.
Da sie insgesamt 5,32 M bezahlten und jede Schraube 7 Pfennig kostete, kauften sie wegen $532 : 7 = 76$ insgesamt 76 Schrauben. Also gilt $4x+12 = 76$ und somit $x = 16$.

Der erste Kunde kaufte also 16 Schrauben, der zweite kaufte 4 Schrauben mehr, also 20 Schrauben, der dritte kaufte doppelt so viele, also 40 Schrauben. Wegen $40\cdot 7 = 280$ bezahlte er hierfür 2,80 M.

Aufgabe 4 - 250514

In jede der Abbildungen a), b), c) sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden.

Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten:

Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.

a) Finde eine Eintragung in Abbildung a), bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!

b) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung b), bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!

c) Finde möglichst viele Eintragungen in Abbildung c), bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!

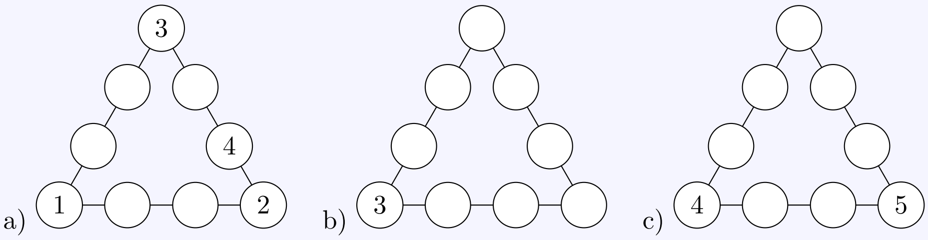
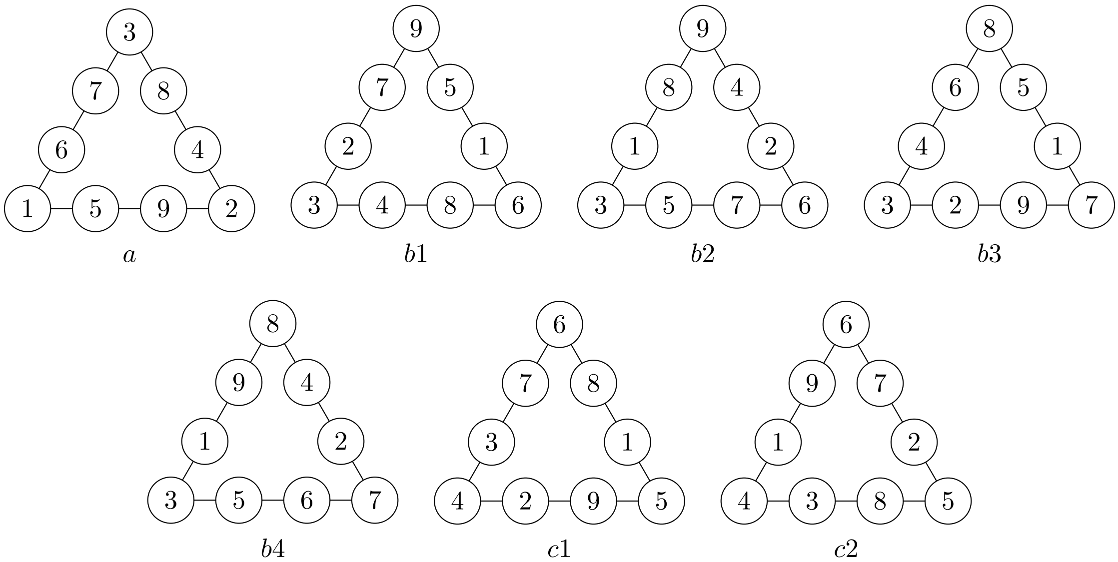


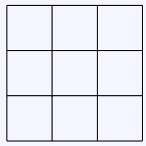
Abbildung a zeigt eine Lösung der Aufgabe a);
die Abbildungen b 1, 2, 3, 4 zeigen vier Lösungen von Aufgabe b);
die Abbildungen c 1, 2 zeigen zwei Lösungen der Aufgabe c), für jede Dreiecksseite beträgt die Summe in diesen beiden Lösungen 20.

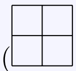


Lösungen der I. Runde 1985 übernommen aus [5]

2.26.2 II. Runde 1985, Klasse 5

Aufgabe 1 - 250521



In einem (3×3)-Felderbrett (siehe Abbildung) sind genau neun Quadrate enthalten, die aus einem Feld bestehen (), außerdem genau vier Quadrate, die aus vier Feldern bestehen (), und genau ein Quadrat, das aus neun Feldern besteht.

Insgesamt sind in dem (3×3)-Felderbrett also 14 Quadrate enthalten.
Beantworte folgende Fragen:
a) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (4×4)-Felderbrett enthalten?
b) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (5×5)-Felderbrett enthalten?
c) Wie viel Quadrate sind insgesamt in einem (6×6)-Felderbrett enthalten?
Eine Begründung der Antworten wird nicht verlangt.

a) In einem (4×4)-Felderbrett sind insgesamt $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ Quadrate enthalten.
b) In einem (5×5)-Felderbrett sind insgesamt $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ Quadrate enthalten.
c) In einem (8×8)-Felderbrett sind insgesamt $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$ Quadrate enthalten.

Aufgabe 2 - 250522
Vom Bahnhof Mathestädt fährt zu jeder vollen Viertelstunde ein Bus ab und trifft nach 2 Stunden in Knobelhausen ein.
Von dort fahren ebenfalls im Viertelstundenabstand Busse auf derselben Straße nach Mathestädt, wo sie nach 2 Stunden Fahrzeit eintreffen.
Morgens fährt der erste Bus von Mathestädt um 5.00 Uhr und der erste Bus von Knobelhausen um 7.10 Uhr ab. Die Busfahrer begrüßen einander jedesmal mit Kopfnicken, wenn sie sich unterwegs begegnen.

Wie viele ihm entgegenkommende Kollegen begrüßt der Busfahrer Franz Freundlich auf einer Fahrt von Mathestädt nach Knobelhausen, wenn diese Fahrt um 10.00 Uhr beginnt?

Als ersten begrüßt Franz Freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10 Uhr, 8.25 Uhr, 8.40 Uhr, 8.55 Uhr, 9.10 Uhr, 9.25 Uhr, 9.40 Uhr, 9.55 Uhr, 10.10 Uhr, 10.25 Uhr, 10.40 Uhr, 10.55 Uhr, 11.10 Uhr, 11.25 Uhr, 11.40 Uhr, 11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

Aufgabe 3 - 250523
Auf die Randlinie eines Quadrates sollen zwölf Damesteine so verteilt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Auf jeder Ecke des Quadrates liegen gleich viele Damesteine. Dabei ist es zulässig, daß die Ecken frei von Damesteinen sind; es dürfen aber auch mehrere Damesteine übereinander auf den Ecken liegen.
(2) Auf jeder Seite des Quadrates (einschließlich ihrer beiden Eckpunkte) sind gleich viele Damesteine. Dabei sollen alle Damesteine, die auf einer Quadratseite, aber zwischen deren Eckpunkten liegen, übereinander gestapelt sein.

a) Gib vier verschiedene Verteilungen der zwölf Damesteine an, so daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
b) Begründe, dass es nicht mehr als vier verschiedene Verteilungen dieser Art geben kann!

a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

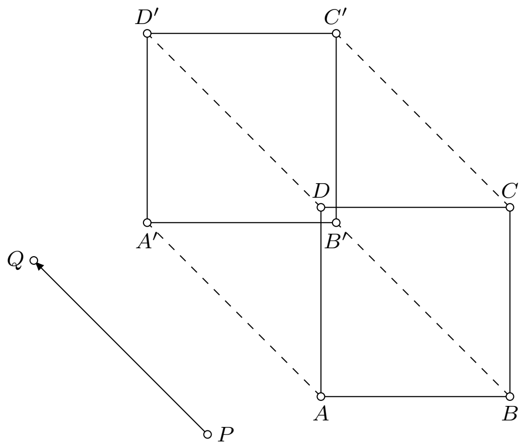
```
0 3 0     1 2 1     2 1 2     3 0 3
3   3     2   2     1   1     0   0
0 3 0     1 2 1     2 1 2     3 0 3
```

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt:
Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y.

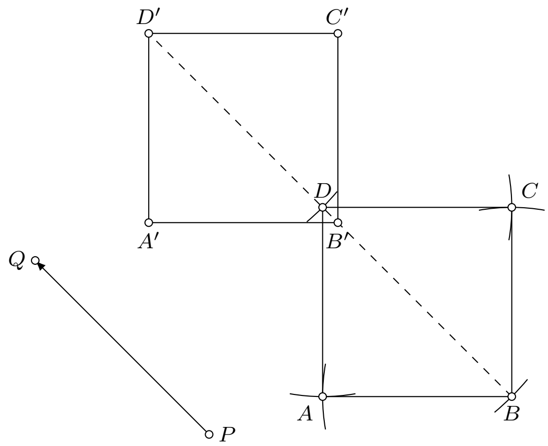
Daher sind insgesamt $4x + 4y$ Damesteine verteilt, also ist $4 \cdot x + 4 \cdot y = 12$, d.h. $x + y = 3$.
Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch $0 + 3 = 3$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$ oder $3 + 0 = 3$ erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

Aufgabe 4 - 250524
Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $A'B' = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft!

Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, dass außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, dass weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!
Eine Begründung und Konstruktionsbeschreibungen werden nicht verlangt.



a)



b)

Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]

2.27 XXVI. Olympiade 1986

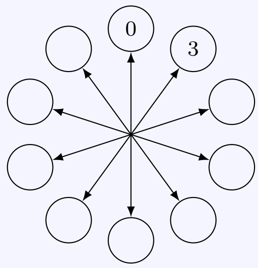
2.27.1 I. Runde 1986, Klasse 5

Aufgabe 1 - 260511
Die Mädchen Grit, Regina und Beate tragen jede eine einfarbige Bluse. Von diesen drei Blusen ist eine gelb, eine rot und eine blau.
Grit stellt fest, dass keines der Mädchen eine Bluse von der Farbe trägt, die den gleichen Anfangsbuchstaben wie der Vorname des Mädchens hat.
Das Mädchen mit der roten Bluse antwortet darauf: "Das hatte ich noch gar nicht bemerkt, aber du hast recht. Grit!"
Welche Bluse trägt jedes der Mädchen?

Aus Grits Feststellung folgt:
(1) Grits Bluse ist nicht gelb.
(2) Regina hat nicht die rote Bluse an.
(3) Beate trägt nicht die blaue Bluse.
Da das Mädchen mit der roten Bluse nicht Grit ist (denn es hatte Grits Feststellung noch nicht bemerkt), folgt: (4) Grits Bluse ist nicht rot.
Aus (1) und (4) folgt, dass Grit die blaue Bluse trägt. Dann aber muss wegen (2) Regina die gelbe Bluse anhaben. Daraus folgt weiter, dass Beate die rote Bluse trägt.

Aufgabe 2 - 260512

a) Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen so in die kleinen Kreise der Abbildung eingetragen werden, dass jedes Paar benachbarter Kreise dieselbe Summe wie das Paar an den beiden entgegengesetzten Pfeilspitzen ergibt.



Jede der zehn Zahlen soll genau einmal vorkommen. Die Zahlen 0 und 3 sollen wie angegeben eingetragen werden.

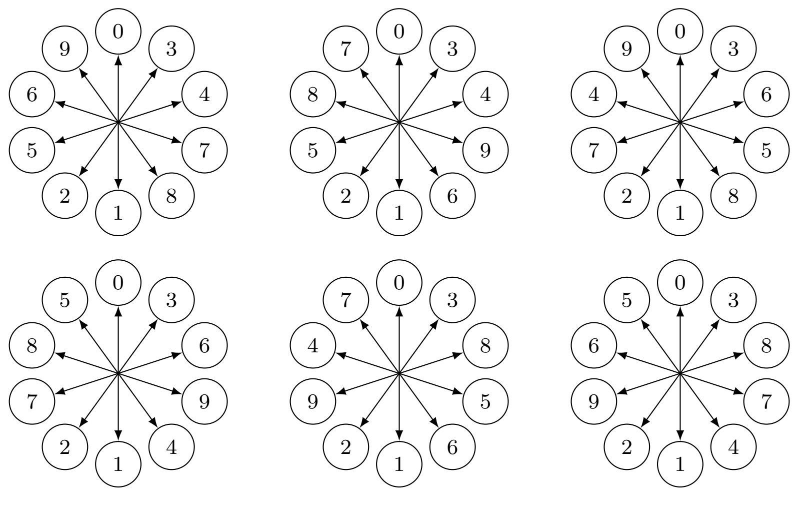
Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Für die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 lässt sich eine entsprechende Aufgabe stellen. Wie kann man für sie auf einfache Weise eine Lösung aus der Lösung von a) gewinnen?

c) Löse die entsprechende Aufgabe für die natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$, $n+9$!

d) Begründe deine Lösung von c)!

a) Jede der Eintragungen in der Abbildung ist eine Eintragung der geforderten Art. Als vollständige Lösung zu a) gilt eine dieser Eintragungen.



b) Man erhält z.B. aus der Lösung von a) eine Lösung von b), wenn man zu jeder Zahl der Figur 10 addiert.
c) Indem man in der Lösung von a) zu jeder Zahl der Figur die Zahl n addiert, erhält man eine mögliche Lösung der Aufgabe.
d) Bei dem in c) beschriebenen Vorgehen vergrößern sich jeweils beide in Aufgabe a) betrachtete Summen um den gleichen Wert, und zwar um das Doppelte von n.
Die Gleichheit der beiden Summen bleibt somit bei dieser Veränderung erhalten. Aus einer jeden Lösung von a) ergibt sich so bei der Veränderung eine Lösung von c).

Aufgabe 3 - 260513
Jörg bewundert Holgers Kaninchen und Tauben. Er möchte gern wissen, wie viel Kaninchen und Tauben Holger besitzt, und fragt ihn deshalb danach.

Dieser antwortet: "Ich habe insgesamt 24 Tiere, die zusammen 62 Beine haben. Andere Tiere als Kaninchen und Tauben habe ich nicht."

Wie viel Kaninchen und wie viel Tauben besitzt Holger? Begründe deine Antworten!

Hätte jedes von Holgers Tieren nur zwei Beine, so wären es wegen $24 \cdot 2 = 48$ zusammen genau 48 Beine. Nach Holgers Angaben und wegen 62 - 48 = 14 sind es aber 14 Beine mehr als 48.
Da Tauben nur zwei Beine besitzen, können diese 14 Beine nur zu den Kaninchen gehören. Zwei Beine eines jeden Kaninchen wurden schon bei den 48 Beinen mitgezählt. Die zwei restlichen Beine eines jeden Kaninchens müssen zusammengezählt 14 Beine ergeben.
Also können Holgers Angaben nur dann zutreffen, wenn er 7 Kaninchen und 17 Tauben besitzt, da 14 : 2 = 7 und 24 - 7 = 17 ist.

Aufgabe 4 - 260514
Der Pionier Klaus Knobler tritt als Zauberkünstler vor seiner Pioniergruppe auf. Nachdem ihm die Augen verbunden wurden, bittet er einen Zuschauer, aus einer Streichholzschachtel eine beliebige ungerade Anzahl von Hölzern, jedoch mindestens 13, zu entnehmen.
Diese Hölzer sollen in zwei parallelen Reihen auf den Tisch gelegt werden, wobei die obere Reihe genau ein Streichholz mehr enthalten soll als die untere. Nachdem dies geschehen ist, lässt Klaus Knobler

(1) irgendeine von ihm selbst genannte Anzahl a (mindestens 1, jedoch weniger als 7) Streichhölzer aus der oberen Reihe fortnehmen, dann
(2) aus der unteren Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, wie oben noch liegen, und dann
(3) aus der oberen Reihe alle übrigen Streichhölzer entfernen.

Danach nennt Klaus Knobler den staunenden Zuschauern die Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Hölzer. Wie groß ist sie?
Durch welche Überlegung kann Klaus Knobler sie finden, ohne die Anzahl der zu Beginn auf dem Tisch liegenden Hölzer zu kennen?

Klaus Knobler kann folgendermaßen überlegen:

Angenommen, zu Beginn haben in der oberen Reihe außer den a Streichhölzern noch weitere b Hölzer gelegen. Dann lagen also anfangs in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} a+b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (1) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a+b-1 \end{matrix}$ Hölzer. Nach Ausführen von (2) liegen in der oberen bzw. unteren Reihe $\begin{matrix} b \\ a-1 \end{matrix}$ Hölzer. Schließlich verbleiben nach Ausführen von (3) noch $a-1$ Hölzer auf dem Tisch. Klaus Knobler braucht also nur den Vorgänger der von ihm bei (1) genannten Zahl a zu bilden und als Anzahl der auf dem Tisch verbliebenen Streichhölzer anzugeben.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen aus [5]

2.27.2 II. Runde 1986, Klasse 5

Aufgabe 1 - 260521
Auf der DDR-Olympiade Junger Mathematiker treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

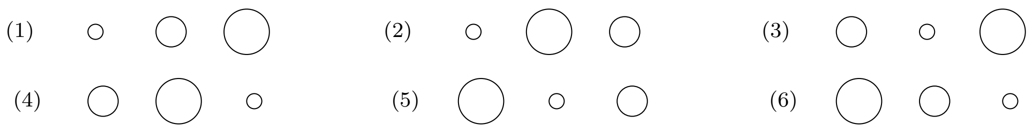
(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt?
Wer sind die beiden, die schon in Vorjahr an der DDR- Olympiade teilgenommen haben?

Aus (2) und (4) folgt, dass Kerstin nicht aus Dresden, aber auch nicht aus Schwerin sein kann. Wegen (1) und (2) ist Kerstin auch nicht aus Berlin, also folgt: (5) Kerstin kommt aus Halle.
Aus (1) und (2) folgt, dass Andreas nicht aus Berlin, aber auch nicht aus Dresden kommt. Daraus und wegen (5) folgt: (6) Andreas kommt aus Schwerin.
Aus (3), (5) und (6) ergibt sich: (7) Dirk kommt aus Dresden.
Weiter folgt: (8) Britta kommt aus Berlin.
Aus (1) und (8) ergibt sich: Andreas und Britta nahmen schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teil.

Aufgabe 2 - 260522
Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.
a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch. Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?
b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmarken so nebeneinander legen, dass sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln.
Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

a) Es gibt genau sechs derartige Anordnungen für die drei roten Spielmarken, und zwar:



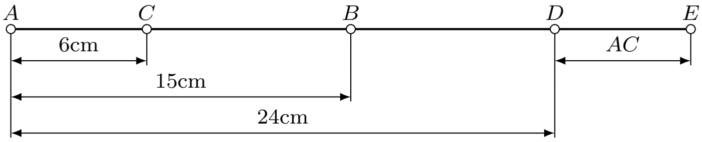
b) Ebenso wie für die drei roten Spielmarken gibt es genau sechs Anordnungsmöglichkeiten für die drei blauen Spielmarken. Da die Farben sich abwechseln sollen und sich jede Anordnung der roten Spielmarken mit jeder Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen lässt, gibt es wegen $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt 36 Anordnungen, die mit einer roten Spielmarke beginnen, und ebenso viele Anordnungen, die mit einer blauen Spielmarke beginnen.
Folglich gibt es insgesamt 72 unterschiedliche Anordnungen der geforderten Art für die drei roten und die drei blauen Spielmarken.

Aufgabe 3 - 260523
Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, dass $4 \cdot AC = AD$ und $CB = BD$ gilt.
Wie groß sind dafür AC und AD zu wählen?
Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen AC und AD kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

Aus der Forderung $4 \cdot AC = AD$ folgt, dass C auf dem genannten Strahl näher bei A liegen muss als D. Wegen der Forderung $CB = BD$ muss B der Mittelpunkt der Strecke CD sein.
Verlängert man AD über D hinaus nochmals um die Länge AC bis zu einem Punkt E, so ist folglich B auch der Mittelpunkt der Strecke AE. Wegen $AB = 15$ cm ergibt sich somit $AE = 30$ cm. Andererseits folgt

$$AE = AD + DE = 4 \cdot AC + AC = 5 \cdot AC$$

Wegen $30 : 5 = 6$ und $4 \cdot 6 = 24$ muss daher $AC = 6$ cm und $AD = 24$ cm gewählt werden.



Aufgabe 4 - 260524
Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen lässt:

(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
(2) Hierzu ist 5 zu addieren.
(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.
(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.

Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.
a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
b) Weise nach, dass das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

a) Wählt man zum Beispiel die Augenzahlen 3 und 5, dann führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot 3 = 6$ (2) $6 + 5 = 11$ (3) $11 \cdot 5 = 55$ (4) $55 + 5 = 60$
Wenn man von 60 die Zahl 25 subtrahiert, erhält man wie behauptet mit 35 eine Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

b) Für jeden möglichen Wurf sind die mit zwei Würfeln geworfenen Augenzahlen zwei natürliche Zahlen a und b, für die $1 \leq a \leq 6$ und $1 \leq b \leq 6$ gilt. Damit führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:
(1) $2 \cdot a$, (2) $2 \cdot a + 5$, (3) $5 \cdot (2 \cdot a + 5) = 10 \cdot a + 25$, (4) $10 \cdot a + 25 + b$

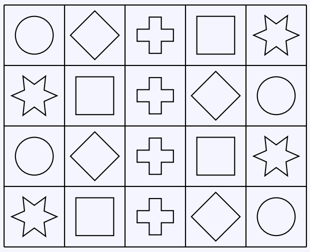
Wenn man von $10 \cdot a + 25 + b$ die Zahl 25 subtrahiert, so erhält man wie behauptet mit $10 \cdot a + b$ diejenige Zahl, deren eine Ziffer a die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer b die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

Lösungen der II. Runde 1987 übernommen aus [5]

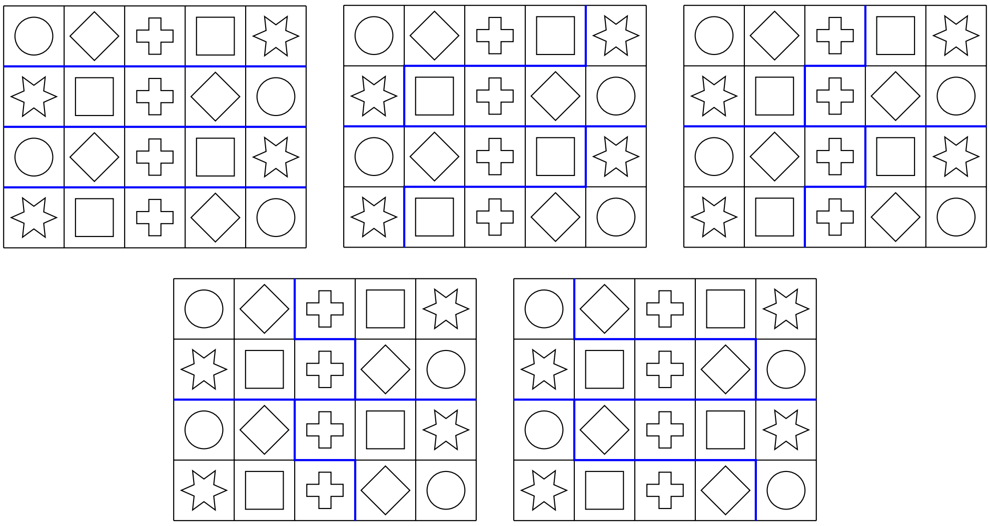
2.28 XXVII. Olympiade 1987

2.28.1 I. Runde 1987, Klasse 5

Aufgabe 1 - 270511



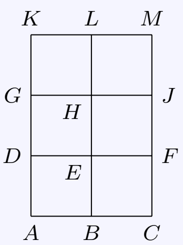
Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, dass sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).
Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung.
Zeichne diese fünf Zerlegungen! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Aufgabe 2 - 270512
Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47 mal so lang sein wie die kleinere.
Wie lang muss dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

Da die größere Teilstrecke genau 47 mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.
Wegen 240 : 48 = 5 muss also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen 240 - 5 = 235 muss die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Aufgabe 3 - 270513



Die Abbildung zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.
Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Alle derartigen Rechtecke sind $ABHG$, $ABLK$, $ACFD$, $BCJH$, $BCML$, $DELK$, $DFJG$, $EFML$, $GJMK$

Aufgabe 4 - 270514
a) Die Figur der Abbildung a soll so "in einem Zuge" gezeichnet werden, dass dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.
Ein solcher "Zug" kann z.B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.
Suche mindestens einen weiteren derartigen "Zug" und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!
b) Auch die Figur der Abbildung b lässt sich in einem Zuge so zeichnen, dass jede Linie genau einmal durchlaufen wird. Gib mindestens einen derartigen "Zug" an!
c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

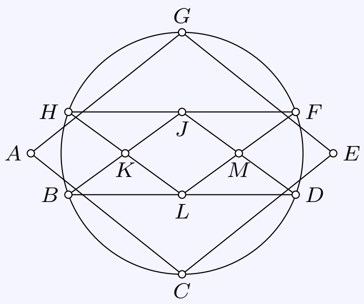


Abbildung a)

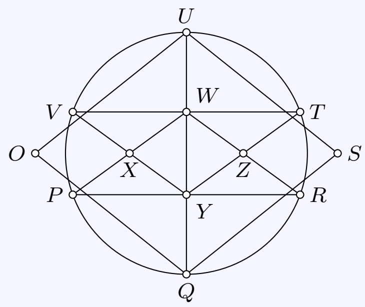


Abbildung b)

Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z.B.

a) $J, M, L, K, J, H, A, B, C, B, L, D, C, D, M, F, D, E, F, G, H, B, K, H, G, F, J$,

b) U, V, U, W, V, X, W, Y, X, P, O, V, P, Y, Q, P, Q, R, S, T, R, Z, T, U, T, W, Z, Y, R, Q.
Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).

c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein "geschlossener Weg". Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)
Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen "offenen Weg".

Lösung der I. Runde 1987 übernommen aus [5]

2.28.2 II. Runde 1987, Klasse 5

Aufgabe 1 - 270521
Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:

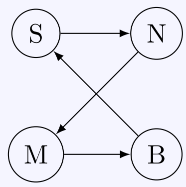
(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.

Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die Reihenfolge lautet: Kerstin, Steffen, Maik, Beate, Anja.

Aufgabe 2 - 270522

Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin (S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Abbildung).
Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann!
Wie viel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

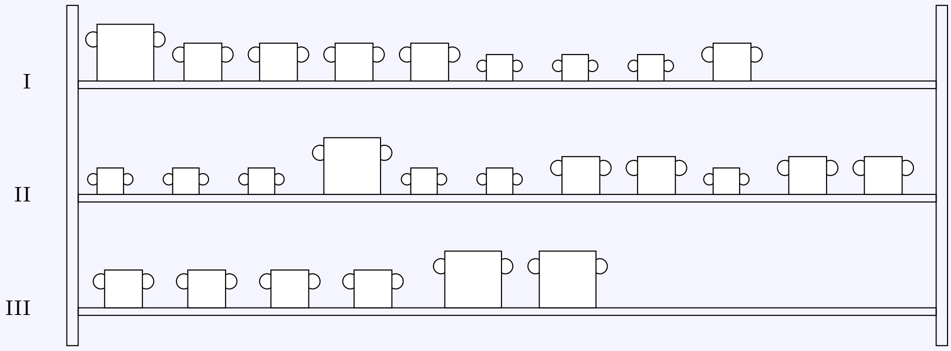


Die geforderte Angabe der Reiserouten kann in zeichnerischer Darstellung oder durch die Angabe der jeweils zu wählenden Reihenfolge der Städte erfolgen.
Ein Beispiel für eine vollständige Angabe ist etwa: $MBNSM$, $MBSNM$, $MNBSM$, $MNSBM$, $MSBNM$, $MSNBM$.
Die Anzahl der Reiserouten beträgt 6.

Aufgabe 3 - 270523
In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis. Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer.
Wie viel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse?
Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin?
Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

Die Anzahl der Teilnehmer war eine der Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. Genau ein Achtel davon erhielt einen ersten Preis, also war die Anzahl durch 8 teilbar.
Daraus folgt eindeutig: Die Anzahl der Teilnehmer war 24.
Wegen $24 : 2 = 12$ erhielten genau 12 Teilnehmer einen Preis.
Wegen $24 : 8 = 3$ erhielten genau 3 Teilnehmer einen ersten Preis.
Wegen $24 : 6 = 4$ erhielten genau 4 Teilnehmer einen zweiten Preis.
Wegen $12 - 3 - 4 = 5$ erhielten genau 5 Teilnehmer einen dritten Preis.

Aufgabe 4 - 270524



Die Abbildung zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?
Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, dass bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

Aus den Angaben ergibt sich durch Vergleich der Reihen I und II:
Ein mittelgroßer Topf fasst genau soviel wie drei kleine Töpfe.

Durch Vergleich der Reihen II und III ergibt sich: Ein großer Topf fasst genau soviel wie sechs kleine Töpfe.
Wegen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$ folgt damit: Die Reihe III fasst genau soviel wie 24 kleine Töpfe. Da Reihe III genau 24 Liter fasst, ergibt sich:
Jeder kleine Topf fasst genau 1 Liter, jeder mittelgroße Topf fasst genau 3 Liter, jeder große Topf fasst genau 6 Liter.
Die Überprüfung der Reihen ergibt mit diesen Fassungsvermögen folgende Literzahlen:

Reihe I: $3 + 5 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe II: $6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 = 24$,
Reihe III: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 24$.

Lösungen der II. Runde 1987 übernommen aus [5]

2.29 XXVIII. Olympiade 1988

2.29.1 I. Runde 1988, Klasse 5

Aufgabe 1 - 280511
In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, dass die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.
Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

	9	

10	14	15
17	9	13
12	16	11

Eine mögliche Eintragung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die Abbildung. Es gibt noch weitere derartige Eintragungen.

Aufgabe 2 - 280512
Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.
Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!
b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.
Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet werden können!

a) Die gesuchten Zahlen sind 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

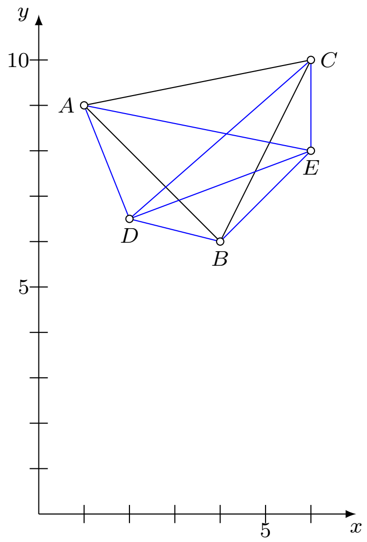
b) Die zusätzlich zu den in a) schon aufgezählten Zahlen noch zu bildenden Zahlen sind:

111, 112, 113, 121, 122, 131, 133, 211, 212, 221, 222, 223, 232, 233, 311, 313, 322, 323, 331, 332, 333.

Aufgabe 3 - 280513
Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.
Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

Wegen 132 - 12 = 120 beträgt die Gesamtmasse des Inhalts der vier Kisten 120 kg. Folglich beträgt wegen 120 : 4 = 30 die Masse des Inhalts je einer Kiste 30 kg.

Aufgabe 4 - 280514
a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1;9)$, $B(4;6)$ und $C(6;10)$!
Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke! Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, dass jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke!
Wie viel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?
c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.
Beschreibe eine solche Überlegung!
d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!



a) Es gibt genau 3 solcher Verbindungsstrecken.

b) Eine mögliche Lage der Punkte D und E, bei der die geforderten Bedingungen erfüllt sind, zeigt die Abbildung. Es gibt genau 10 solcher Verbindungsstrecken.

c) Eine mögliche Überlegung dafür, dass es bei der geforderten Lage der Punkte A, B, C, D, E genau 10 Verbindungsstrecken gibt, wäre:
Von A aus lassen sich genau 4 Strecken zu den von A verschiedenen Punkten zeichnen, von B aus dann noch genau 3 Strecken zu den von A und von B verschiedenen Punkten, von C aus noch genau 2 Strecken zu den von A, B und C verschiedenen Punkten und von D aus noch genau eine Strecke zu dem von A, B, C und D verschiedenen Punkt E.
Das sind wegen $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ insgesamt genau 10 Strecken.

d) Durch entsprechende Überlegungen wie in c) erhält man, dass es unter den angeführten Bedingungen wegen

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

(bzw. wegen $9 \cdot 10 = 90$ und $90 : 2 = 45$) genau 45 Strecken gibt, die die zehn Punkte auf die geforderte Weise miteinander verbinden.

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen aus [5]

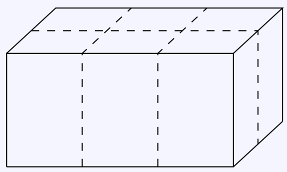
2.29.2 II. Runde 1988, Klasse 5

Aufgabe 1 - 280521
In einer Gaststätte, die aus einem Speisesaal und einem Grillrestaurant besteht, sind im Speisesaal genau 135 Plätze für die Gäste vorhanden. Die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant beträgt ein Drittel von der Anzahl der Plätze im Speisesaal.

a) Wie viel Plätze stehen in der Gaststätte insgesamt zur Verfügung?
b) Im Sommer kommen noch Plätze im Freien hinzu. Ihre Anzahl ist doppelt so groß wie die Anzahl der Plätze im Grillrestaurant.
Wie groß ist im Sommer das Platzangebot der Gaststätte?

a) Wegen $135 : 3 = 45$ und $135 + 45 = 180$ stehen in der Gaststätte insgesamt 180 Plätze zur Verfügung.
b) Wegen $45 \cdot 2 = 90$ und $180 + 90 = 270$ umfasst das Platzangebot der Gaststätte im Sommer 270 Plätze.

Aufgabe 2 - 280522
Das in der Abbildung abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch.
Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.
Wie viel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht? Wie viel Meter sind das?

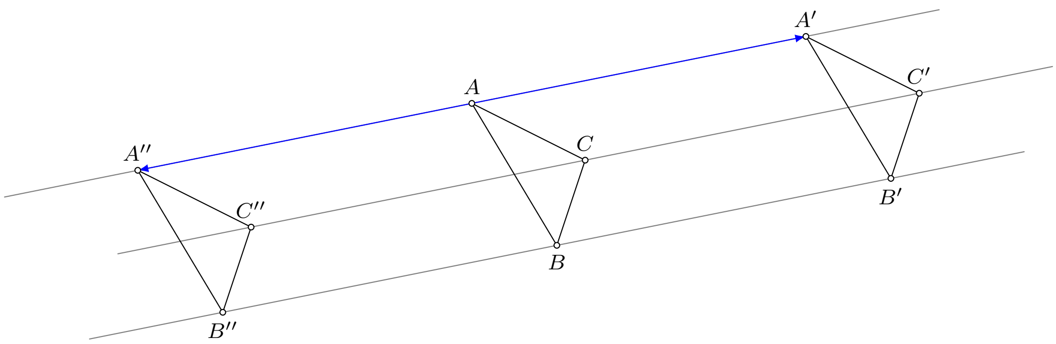


Wegen $2 \cdot 45 = 90$ benötigt man in Längsrichtung 90 cm Klebeband, wegen $4 \cdot 30 = 120$ in Breitenrichtung 120 cm und wegen $6 \cdot 25 = 150$ in Höhenrichtung 150 cm, wenn sich die Klebestreifen nicht überlappen. Wegen $90 + 120 + 150 = 360$ benötigt man unter Berücksichtigung der für die Überlappung der Klebestreifen benötigten 10 cm Klebeband insgesamt 370 cm Klebeband. Das sind 3,70 m.

Aufgabe 3 - 280523
a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!

b) Von einer Verschiebung wird verlangt, dass bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und dass die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.
Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?
Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!

c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!



a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel der geforderten Zeichnung von g und $\triangle ABC$.
b) Es gibt genau zwei solcher Verschiebungen. Verschiebungspfeile hierzu sind in der Abbildung gezeichnet.
c) Die Bilder $A'B'C'$ und $A''B''C''$ des Dreiecks ABC bei den beiden in b) genannten Verschiebungen sind ebenfalls in der Abbildung konstruiert.

Aufgabe 4 - 280524
a) In einer Kiste sind 3 grüne und 4 gelbe Kugeln und keine weiteren. Kerstin und Steffen überlegen, wie viel Kugeln sie mindestens aus der Kiste herausholen müssen, um zu sichern, dass von jeder Farbe (mindestens) eine dabei ist. Beim Herausholen der Kugeln soll nicht in die Kiste geschaut werden.

Kerstin meint, man müsse mindestens 5 Kugeln herausholen; dies würde aber auch ausreichen, um das Gewünschte zu sichern. Steffen ist dagegen der Ansicht, dass dafür schon 4 Kugeln reichen.
Wer von beiden hat recht? Begründe deine Entscheidung.

b) Jetzt seien in der Kiste 23 rote, 33 blaue, 21 schwarze, 21 weiße, 2 grüne Kugeln und keine weiteren. Gib an und begründe, wie viel Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um zu sichern, dass 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe haben!
Zeige, dass die von dir angegebene Zahl dafür auch ausreicht!

a) Steffen hat nicht recht; denn werden 4 Kugeln herausgeholt, so besteht auch die Möglichkeit, dass dies 4 gelbe Kugeln sind, also keine grüne Kugel dabei ist.
Also muss man mindestens 5 Kugeln herausholen, um das Gewünschte zu sichern. Dies reicht aber auch; denn unter 5 herausgeholten Kugeln können nicht nur gelbe sein (da es nur 4 gelbe gibt), und es können nicht nur grüne sein (da es nur 3 grüne gibt). Kerstin hat also recht.

b) 22 Kugeln reichen nicht aus; denn diese können 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und die beiden grünen sein, und dann haben keine 6 dieser Kugeln einander gleiche Farbe.
Also muss man mindestens 23 Kugeln herausnehmen, um das Gewünschte zu erreichen.

Das reicht aber auch; denn wären unter den herausgeholten Kugeln keine 6 von einander gleicher Farbe, so wären dabei höchstens 5 rote, 5 blaue, 5 schwarze, 5 weiße Kugeln und höchstens 2 grüne (da es nicht mehr grüne gibt). Dann wären aber höchstens 22 Kugeln herausgeholt worden, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass 23 Kugeln herausgeholt wurden.

Lösungen der II. Runde 1988 übernommen aus [5]

2.30 XXIX. Olympiade 1989

2.30.1 I. Runde 1989, Klasse 5

Aufgabe 1 - 290511
Kerstin erhält am 30. April zu ihrem Geburtstag von mehreren Verwandten Geld geschenkt. Sie hat nun genau 35 Mark in ihrer Sparbüchse und nimmt sich vor, in den folgenden Monaten fleißig Altstoffe zu sammeln, so dass sie am Ende jedes Monats genau 5 Mark in die Sparbüchse stecken kann.
Am Ende welchen Monats werden, wenn ihr Vorhaben gelingt, erstmals 55 Mark in der Sparbüchse sein?

Wegen 55 - 35 = 20 benötigt Kerstin zum Erreichen ihres Zieles noch genau 20 Mark. Da sie in jedem Monat 5 Mark sparen will, braucht sie wegen 20 : 5 = 4 noch genau 4 Monate dazu.
Der vierte Monat nach dem April ist der August. Die gewünschten 55 Mark werden also erstmals am Ende des Monats August in der Sparbüchse sein.

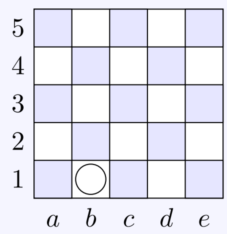
Aufgabe 2 - 290512
Wenn man zwei zweistellige Zahlen hintereinanderschreibt, entsteht eine vierstellige Zahl.
Gib zwei zweistellige Zahlen so an, dass die Summe aus diesen beiden Zahlen und der daraus gebildeten vierstelligen Zahl genau 1478 beträgt!
(Ein Nachweis, dass es nur eine einzige Möglichkeit für zwei solche Zahlen gibt, wird nicht verlangt. Du kannst aber versuchen, einen solchen Nachweis zu finden.)

Zwei solche Zahlen sind 14 und 32; denn es gilt 14 + 32 + 1432 = 1478.

Aufgabe 3 - 290513

Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damestein auf dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gehen. So kann er in vier Schritten auf die oberste Zeile (d.h. auf irgendeines der beiden Felder b5, d5) gelangen.

Gesucht ist die Anzahl aller verschiedenen Wege, auf denen dieses Ziel erreichbar ist.
Gib diese Anzahl an und beschreibe, wie du sie gefunden hast!

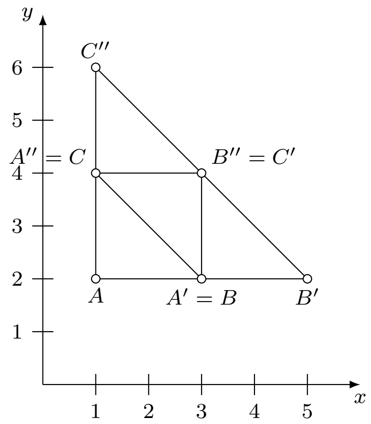


	a	b	c	d	e
5		5		4	
4	2		3		1
3		2		1	
2	1		1		0
1		1		0	

Die Anzahl aller genannten Wege ist 9. Man kann sie finden, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2, 3, 4, 5 abarbeitet:
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, das Feld d1 die Anzahl 0.
In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen, denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit wegen 5 + 4 = 9 zur gesuchten Anzahl 9 aller genannten Wege.

Aufgabe 4 - 290514
a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC'}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!



a) bis c) siehe Abbildung.

d) In der Gesamtfigur sind insgesamt die Dreiecke ABC, $AB'C''$, $A'B'C'$, $A'B''C$, $A''B''C''$ und die Parallelogramme $ABB''A''$, $A'B'B''A''$, $A'C'C''A''$ mit ihren vollständigen Seitenkanten enthalten.

Lösungen der I. Runde 1989 übernommen aus [5]

2.30.2 II. Runde 1989, Klasse 5

Aufgabe 1 - 290521

Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, dass jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.
Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, dass es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

1			
		2	
	3		
			4

Die Abbildung zeigt alle geforderten Eintragungen:

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

Aufgabe 2 - 290522

Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, dass die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel.
Weiter bemerkt sie, dass das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, dass Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

Wenn x die Anzahl der roten Würfel ist, dann ist nach Susannes Feststellungen $2x - 1$ die Anzahl der blauen Würfel und $3x + 1$ die Anzahl der gelben Würfel.
Die Summe der drei Anzahlen ist 18, also folgt

$$x + 2x - 1 + 3x + 1 = 18 \qquad ; \qquad x = 3$$

Daraus folgt weiter $2x - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ und $3x + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$.
Also können Susannes Feststellungen nur wahr sein, wenn die Anzahl der roten Würfel 3, die Anzahl der blauen Würfel 5 und die Anzahl der gelben Würfel 10 beträgt.

Aufgabe 3 - 290523

Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.

Zeige, dass es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an!
Überprüfe auch, dass die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

Wenn eine Zahl z die Bedingungen erfüllt, so muss sie vierstellig sein; denn hätte sie mehr Stellen, so erst recht $z + z'$; hätte sie aber 3 oder weniger Stellen, so könnte $z + z'$ höchstens mit der Anfangsziffer 1 vierstellig sein.
Sind nun a, b, c, d die Ziffern von z, so folgt aus (1), dass $c = 0$ ist, und wegen (2) wird das Kryptogramm

$$\begin{array}{ccccc} & \text{a} & \text{b} & 0 & \text{d} \\ + & & \text{a} & \text{b} & \text{d} \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

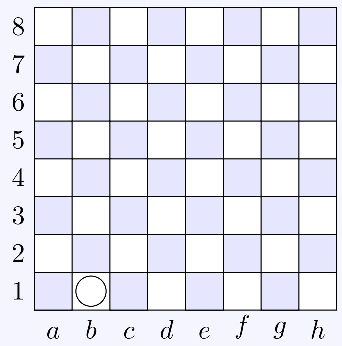
erfüllt. An der Einerstelle ist ersichtlich, dass $2d = 4$ oder $2d = 14$ gilt.
Im Fall $2d = 4$, also $d = 2$, folgt für die Zehnerstelle $b = 7$, und an der Hunderterstelle kann wegen $7 + a = 11$ nur $a = 4$ stehen.
Im Fall $2d = 14$, also $d = 7$, folgte für die Zehnerstelle $b = 6$, für die Hunderterstelle wegen $6 + a = 11$ also $a = 5$, und wegen des Übertrags ergäbe sich in der Tausenderstelle der Summe nicht 5, sondern 6. Also scheidet der Fall $2d = 14$ aus.

Daher können die Bedingungen nur von der Zahl $z = 4702$ erfüllt werden. Die Überprüfung

$$\begin{array}{rrrrr} & 4 & 7 & 0 & 2 \\ + & & 4 & 7 & 2 \\ \hline & 5 & 1 & 7 & 4 \end{array}$$

zeigt, dass diese Zahl die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 4 - 290524



Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld b1. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld g8 gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von b1 bis zum Feld e8 gelangen kann!

8					20		7	
7				14		6		1
6			9		5		1	
5		5		4		1		0
4	2		3		1		0	
3		2		1		0		0
2	1		1		0		0	
1		1		0		0		0
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Die gesuchten Anzahlen lassen sich ermitteln, indem man in jedes (weiße) Feld die Anzahl aller derjenigen Wege einträgt, auf denen dieses Feld von b1 aus erreichbar ist, und dabei der Reihe nach die Felder der Zeilen 1, 2,...,8 abarbeitet.
(Wie man feststellen kann, genügt es, nur die in der Abbildung eingetragenen Zahlen zu berücksichtigen.)
Das Feld b1 erhält die Anzahl 1, die anderen Felder der Zeile 1 die Anzahl 0. In jedes weitere Feld wird die Summe der (höchstens zwei) Anzahlen eingetragen, die schräg unter diesem Feld liegen; denn genau aus solchen Feldern führen alle Wege auf das betrachtete Feld.

So kommt man zu den Eintragungen in der Abbildung und damit zu den Angaben:
a) Von b1 nach g8 führen genau 7 Wege.
b) Von b1 nach e8 führen genau 20 Wege.

Lösung der II. Runde 1989 übernommen aus [5]

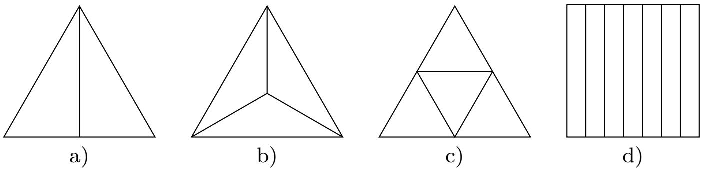
2.31 XXX. Olympiade 1990

2.31.1 I. Runde 1990, Klasse 5

Aufgabe 1 - 300511
Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d.h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!
b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!
c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!
d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

Abbildungen a bis d. Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.



Aufgabe 2 - 300512
Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

Wären alle Aussagen wahr, dann wäre wegen (1) Arnim nicht aus Dresden, wegen (2) Bert ebenfalls nicht. Wegen (3) wohnte auch Conny nicht in Dresden und wegen (4) schließlich auch Detlef nicht.
Das steht aber im Widerspruch zu den Angaben der Aufgabe. Folglich können nicht alle vier Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein.

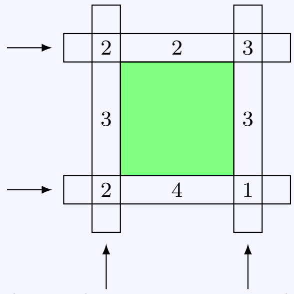
Aufgabe 3 - 300513
Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wie viel Muscheln sie im Beutel haben.

Fritz meint: "Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig."
Hans meint: "Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen."
Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: "Keiner von euch beiden hat recht."

Wie viel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

Hätte Fritz recht gehabt, dann hätten wegen $7 \cdot 12 + 6 = 90$ mindestens 91 Muscheln in dem Beutel sein müssen.
Hätte dagegen Hans recht gehabt, dann hätten es wegen $9 \cdot 10 = 90$ höchstens 89 Muscheln sein können.
Da keiner von beiden recht hatte, waren mithin genau 90 Muscheln in dem Beutel.

Aufgabe 4 - 300514

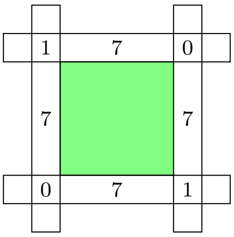


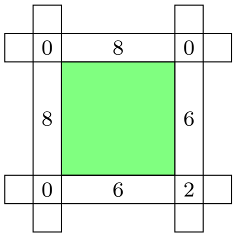
In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.

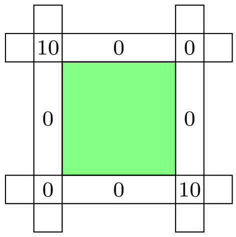
a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

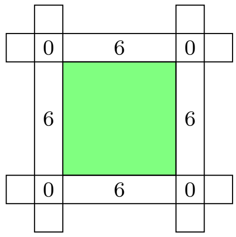
b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile, und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!
c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist! Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

Abbildungen a bis c Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.

a) 



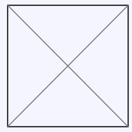
b) 

c) 

2.31.2 II. Runde 1990, Klasse 5

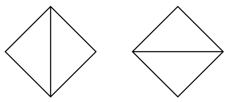
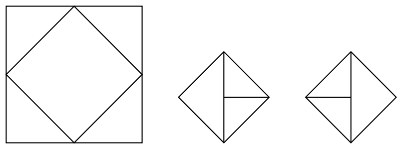
Aufgabe 1 - 300521

a) Die Abbildung zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.
Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.



b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, dass sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

Die Abbildungen a, b zeigen jeweils Zeichnungen der geforderten Art. Es gibt noch mehrere andere Möglichkeiten.

a)  b) 

Aufgabe 2 - 300522
Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:

(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.

a) Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

Bezeichnet man für jede Person das Alter mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so folgt aus den Angaben:

$$S > A > M \quad (1); \qquad T = A + M \quad (2); \qquad D > A + S \quad (3)$$

Nach (1) sind weder Susanne noch Antje die Jüngste, nach (2) auch Thomas nicht und nach (3) auch Dirk nicht. Also ist Manuela die Jüngste der fünf Personen.

Nach (1) sind weder Antje noch Manuela die älteste, nach (3) auch Susanne nicht. Also ist entweder Dirk oder Thomas die älteste der fünf Personen. Wegen (3) und $S > M$ (siehe (1)) gilt aber $D > A + M$, und nach (2) besagt dies $D > T$.
Folglich ist Dirk die älteste der fünf Personen.

b) Es gibt sowohl Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S < T$ gilt, als auch Altersangaben, für die (1), (2), (3) zutreffen und bei denen $S > T$ gilt.
Zur Begründung genügt es, je ein Beispiel hierfür anzugeben und die genannten Aussagen zu bestätigen. Solche Beispiele sind etwa

$$D = 16, T = 13, S = 8, A = 7, M = 6 \text{ bzw. } D = 22, S = 14, T = 13, A = 7, M = 6$$

Daher folgt aus den Angaben nicht eindeutig, welche Reihenfolge für die Altersangaben von Antje, Susanne und Thomas vorliegt.

Aufgabe 3 - 300523

1	2	3	→ 6
4	5	9	→ 18
6	8	7	→ 21

↙ ↓ ↓ ↓ ↘
14 11 15 19 13

a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3 x 3 Feldern eintragen, dass keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Die Abbildung zeigt ein Beispiel hierfür.

Gib zwei weitere Beispiele an, die aus der Abbildung weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!

b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2 x 2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, dass keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe Deine Antwort!

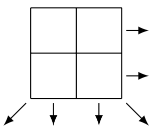
a) Zwei Beispiele der geforderten Art:

2	5	1	→ 8
3	8	7	→ 18
6	9	4	→ 19

↙ ↓ ↓ ↓ ↘
15 11 22 12 14

7	2	1	→ 10
4	3	6	→ 13
5	9	8	→ 22

↙ ↓ ↓ ↓ ↘
9 16 14 15 18



b) Wäre eine solche Eintragung möglich, so müssten sechs verschiedene Summen auftreten, wie die Abbildung zeigt. Es gibt aber überhaupt nur die fünf verschiedenen Summen

$$1+2=3, \quad 1+3=4, \quad 1+4=2+3=5, \quad 2+4=6, \quad 3+4=7$$

aus je zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4. Daher ist eine Eintragung der in b) genannten Art nicht möglich.

Aufgabe 4 - 300524
An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, dass sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, dass bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

a) Mit drei Farben, etwa blau, gelb, rot, lassen sich nur 9 verschiedene Farbkombinationen bilden, nämlich $bb, bg, br, gb, gg, gr, rb, rg, rr$.
Zur Unterscheidung von 10 Mannschaften reichen daher drei Farben nicht aus. Fügt man jedoch eine weitere Farbe, etwa weiß, hinzu, so lassen sich 10 Mannschaften unterscheiden, da es außer den genannten 9 Farbkombinationen z.B. noch die Kombination ww gibt.
Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine Unterscheidung von 10 Mannschaften erreichbar ist, beträgt daher 4.

b) Das gilt auch unter der in b) geforderten Bedingung.
Begründung: Mit drei Farben kann man schon, ohne diese Bedingung zu fordern, nicht 10 Mannschaften ausstatten. Also geht das erst recht nicht, wenn durch die zusätzliche Bedingung noch Kombinationen ausgeschlossen werden.
Mit vier Farben hat man aber zur Unterscheidung von 10 Mannschaften die Kombinationen

$$bg, br, bw, gb, gr, gm, rb, rg, rw, wb, wg, wr$$

zur Verfügung, was ausreichend ist.

Lösungen der II. Runde 1990 übernommen aus [5]

2.32 XXXI. Olympiade 1991

2.32.1 I. Runde 1991, Klasse 5

Aufgabe 1 - 310511
a) In die neun Felder eines 3×3 - Quadrates sollen die Zahlen 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 so eingetragen werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
In jeder Zeile kommt jede der Ziffern 1, 2, 3 sowohl an der Einerstelle als auch an der Zehnerstelle je genau einmal vor. Dasselbe gilt auch in jeder Spalte.

b) In die Felder eines 4×4 - Quadrates sollen die zweistelligen Zahlen eingetragen werden, die sich unter Verwendung der Ziffern 1, 2, 3, 4 bilden lassen. Dabei sollen für die Ziffern 1, 2, 3, 4 dieselben Bedingungen wie bei a) erfüllt sein.
Gib je eine geforderte Eintragung an!
Stelle bei a) und b) jeweils fest, ob sich zwei Eintragungen finden lassen, die sich nicht durch Vertauschen von Zeilen oder Spalten miteinander, durch Vertauschen von Spalten miteinander oder durch Umwandeln der Zeilen in Spalten (oder durch mehrere solche Vorgänge) ineinander überführen lassen!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die (bis auf die genannten Vertauschungen einzige) Eintragung zu a) ist:

11	22	33
23	31	12
32	13	21

zwei Eintragungen zu b) sind z.B.

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

11	22	33	44
24	13	42	31
32	41	14	23
43	34	21	12

Aufgabe 2 - 310512
Maik trifft sich mit sechs Mitschülern. Einer davon hat den Vornamen Heino, einer den Vornamen Torsten, und vier heißen mit Vornamen Steffen. Ferner haben vier von diesen sieben Schülern den Familiennamen Lehmann, einer heißt mit Familiennamen Krull und zwei haben den Familiennamen Pfitzner, aber unterschiedliche Vornamen.

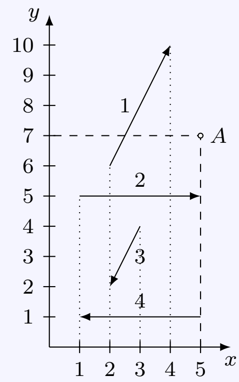
a) Zeige, dass für zwei der sieben Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus diesen Angaben hervorgeht! Gib den Vor- und Familiennamen dieser beiden Schüler an!
b) Untersuche, ob noch für weitere Schüler Vor- und Familiennamen eindeutig aus den Angaben hervorgeht oder ob für jeden weiteren Schüler mehr als eine Möglichkeit besteht, die obigen Angaben durch Zusammenstellen von Vor- und Familiennamen zu erfüllen!

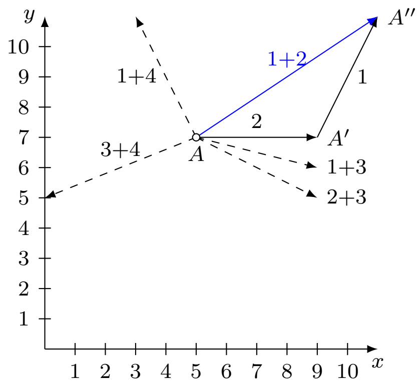
a) Wenn kein Schüler Steffen Lehmann hieße, so wären die vier Schüler Steffen und die vier Schüler Lehmann acht verschiedene Schüler, was nicht möglich ist. Also heißt mindestens einer der Schüler Steffen Lehmann.
Wenn von den anderen sechs Schülern ebenfalls keiner Steffen Lehmann hieße, so wären drei Schüler Steffen und drei Schüler Lehmann bereits diese sechs verschiedenen Schüler. Also käme der Familienname Pfitzner nur für Schüler mit dem Vornamen Steffen in Betracht, was ebenfalls den Angaben widerspricht. Somit heißt noch mindestens ein zweiter Schüler Steffen Lehmann.

b) Für die übrigen fünf Schüler entspricht es aber z.B. sowohl den Angaben zu den Vornamen
Steffen, Steffen, Maik, Heino, Torsten die Familiennamen Lehmann, Lehmann, Pfitzner, Pfitzner, Krull als auch die Familiennamen Pfitzner, Krull, Lehmann, Lehmann, Pfitzner
zusammenzustellen. Daher geht für keinen der übrigen fünf Schüler der Vor- und Familienname eindeutig aus den Angaben hervor.

Aufgabe 3 - 310513

Die Abbildung zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4.
Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''.
Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen musst, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.





Der Punkt A'' ist dann am weitesten von A entfernt, wenn man auf A die Verschiebungspfeile 2 und 1 (bzw. 1 und 2) anwendet.

Aufgabe 4 - 310514

Thomas schreibt die Zahl 2375246895 an die Tafel und erklärt, sie sei durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen habe er der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten. Keine der drei Zahlen enthalte eine Ziffer zweimal.

a) Sebastian vermutet, die drei Zahlen seien 2, 375 und 246895; denn sie entsprechen den Angaben von Thomas.
Werner entgegnet: "Die Angaben von Thomas können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden."
Stimmt das? Begründe Deine Antwort!

b) Ändere in der von Thomas angeschriebenen Zahl eine Ziffer so, dass es dann nur noch genau eine Möglichkeit gibt, die Angaben durch drei Zahlen zu erfüllen. Nenne (bei der von Dir gewählten Änderung) diese eine Möglichkeit für die drei Zahlen!
Ein Begründung wird nicht verlangt.

a) Die Angaben können auch durch drei andere Zahlen erfüllt werden. Zur Begründung genügt es, zwei der folgenden Möglichkeiten anzugeben (wobei zu 2, 375, 246895 ein Hinweis genügt):

$$2, 3, 75246895; \quad 2, 37, 5246895; \quad 2, 375, 246895; \quad 2, 3752, 46895;$$

$$23, 75, 246895; \quad 23, 752, 46895; \quad 237, 524, 6895$$

b) Ändert man z.B. die Ziffer 4 in 6, wählt also 2375266895 als anzuschreibende Zahl, so gibt es nur die Möglichkeit, dass 237, 526, 6895 die drei Zahlen sind.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen aus [5]

2.32.2 II. Runde 1991, Klasse 5

Aufgabe 1 - 310521
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch niemals die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln wiederholen.

a) Nenne ein Beispiel für eine Reihe, die diese Bedingungen erfüllt und nicht mehr durch Anlegen eines weiteren Würfels verlängert werden kann!
b) Es gibt insgesamt vier solche Reihen; sie sind nicht alle gleichlang. Nenne alle diejenigen, die möglichst große Länge haben!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

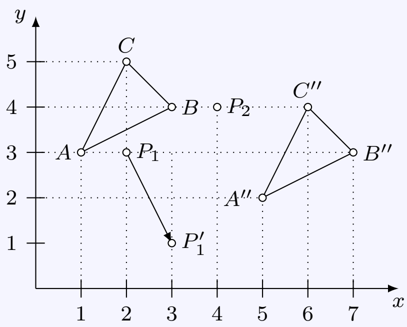
Alle Reihen, von denen zu a) eine zu nennen ist, sind:

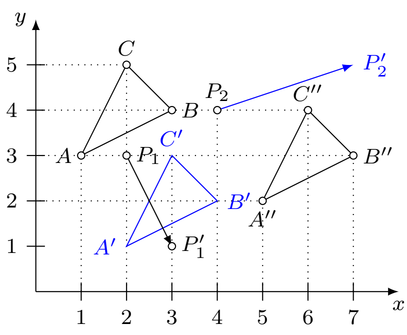
$$bgbrb, \quad bgbrgrb, \quad bgrbrgb, \quad bgrgbrb.$$

Möglichst große Länge haben, also in b) zu nennen sind die drei letzten.

Aufgabe 2 - 310522

In der Abbildung sind gegeben: Zwei Dreiecke ABC und $A''B''C''$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sowie ein Punkt P_2.
a) Konstruiere das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$!
b) Konstruiere den bei P_2 beginnenden Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_2P_2'}$ derjenigen Verschiebung, bei der $A'B'C'$ das Bild $A''B''C''$ hat!
Eine Beschreibung der Konstruktionen wird nicht verlangt.





Die Abbildung zeigt eine verlangte Konstruktion.
Die zu konstruierenden Punkte A', B', C', P_2' sind eindeutig bestimmt, für die Wahl von Hilfslinien gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 3 - 310523
Nach einem 100 m-Lauf, an dem 5 Sportler teilnahmen, fragt jemand, in welcher Reihenfolge sie ins Ziel kamen. Gert erinnert sich:

(1) Achim kam eher ins Ziel als Christian.
(2) Zeitgleich mit Emil kam kein anderer ins Ziel, und zwar war Emil der Dritte oder der Vierte.
(3) Frank kam nicht eher ins Ziel als Bernd.
(4) Frank kam jedoch eher ins Ziel als Achim.

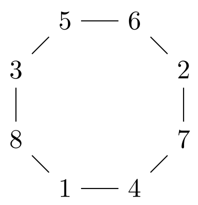
Nenne alle hiernach bestehenden Möglichkeiten der Reihenfolge! Zeige, dass nur bei den von dir genannten Möglichkeiten Gerts Aussagen wahr sind!
Hinweis: Beachte, dass es für die gesuchten Möglichkeiten der Reihenfolge einen Unterschied bedeutet, ob zwei Sportler gleichzeitig ins Ziel kamen oder nicht!

Mit A, B, C, E, F seien die Laufzeiten von Achim, Bernd, Christian, Emil bzw. Frank bezeichnet. Die Aussagen (4) und (1) können nur bei der Reihenfolge $F < A < C$ von Achim, Christian und Frank wahr sein.

Nach (3) gibt es für die Reihenfolge von Bernd und Frank nur die beiden Möglichkeiten $B < F$ bzw. $B = F$, für Achim, Bernd, Christian und Frank also nur $B < F < A < C$, (5) $B = F < A < C$. (6)
Sowohl zu (5) als auch zu (6) gibt es nur zwei Möglichkeiten, auch (2) zu erfüllen: Entweder ist E an die dritte Stelle zwischen F und A einzufügen oder an die vierte Stelle zwischen A und C. Also gibt es dafür, dass Gerts Aussagen wahr sind, nur die vier Möglichkeiten

$$B < F < E < A < C, \quad B < F < A < E < C, \quad B = F < E < A < C, \quad B = F < A < E < C$$

Aufgabe 4 - 310524
Klaus möchte an die Ecken eines Achtecks die Zahlen 1, 2, ... , 8 schreiben, an jede Ecke eine Zahl. Er will dann für jede Ecke die Summe aus den drei Zahlen bilden, die an dieser Ecke und an ihren beiden Nachbarecken stehen. Er möchte erreichen, dass jede der so gebildeten acht Summen
a) größer als 11 ist,
b) größer als 13 ist.
Gib für jedes der beiden Vorhaben a), b) an, ob es sich erfüllen lässt!
Ist es erfüllbar, so belege dies durch ein Beispiel mit der Angabe der acht Summen!
Ist das betreffende Vorhaben a) bzw. b) nicht erfüllbar, so begründe, warum nicht!



a) Das Vorhaben ist erfüllbar. Ein mögliches Beispiel zeigt die Abbildung; die acht Summen sind

$$8 + 1 + 4 = 13, \quad 1 + 4 + 7 = 12, \quad 4 + 7 + 2 = 13, \quad 7 + 2 + 6 = 15,$$

$$2 + 6 + 5 = 13, \quad 6 + 5 + 3 = 14, \quad 5 + 3 + 8 = 16, \quad 3 + 8 + 1 = 12$$

b) Bei jeder Verteilung der Zahlen 1, 2, ..., 8 auf die Ecken gibt es von den drei Zahlen 1, 2, 3 mindestens zwei, zwischen denen keine oder nur eine Ecke liegt (denn lägen sowohl zwischen 1 und 2 als auch zwischen 1 und 3 als auch zwischen 2 und 3 jeweils mindestens zwei Ecken, so gäbe es insgesamt mindestens $3 + 3 \cdot 2 = 9$ Ecken).
Bei jeder Verteilung hat daher eine der acht zu bildenden Summen zwei Summanden aus den drei Zahlen 1, 2, 3, der dritte Summand ist nicht größer als 8; diese Summe ist also nicht größer als $2 + 3 + 8 = 13$.
Damit ist bewiesen: Es ist nicht möglich, die Zahlen so zu verteilen, dass jede der zu bildenden Summen größer als 13 ist.

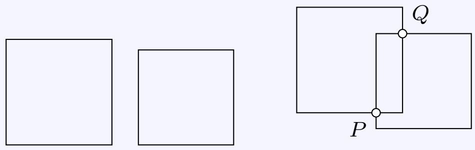
Lösung der II. Runde 1991 übernommen aus [5]

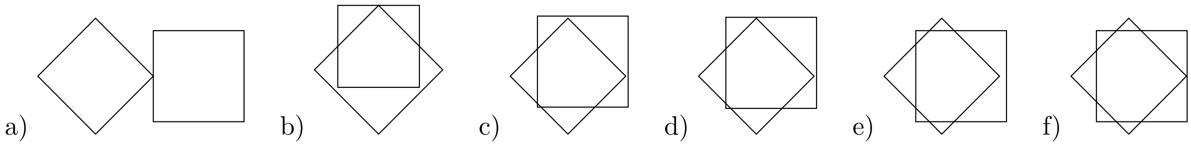
2.33 XXXII. Olympiade 1992

2.33.1 I. Runde 1992, Klasse 5

Aufgabe 1 - 320511
Gegeben seien zwei unterschiedlich große Quadrate, wie sie hier dargestellt sind:

Bei der linken Abbildung haben sie keinen gemeinsamen Punkt, bei der rechten genau zwei, nämlich P und Q. Wie können die Quadrate liegen, wenn sie genau
(a) einen Punkt
(b) drei Punkte
(c) vier Punkte
(d) fünf Punkte
(e) sechs Punkte
(f) sieben Punkte
gemeinsam haben sollen? Zeichne die Quadrate in diesen verschiedenen Lagen.





Aufgabe 2 - 320512
Gesucht ist die größte sechsstellige Zahl, für die folgendes gilt:

a) Die Zahl ist gerade.
b) Die Zehnerziffer stellt eine dreimal so große Zahl dar wie die Zehntausenderziffer.
c) Die Einer- und die Tausenderziffer kann man vertauschen, ohne dass sich die sechsstellige Zahl ändert.
d) Die Hunderterziffer stellt eine halb so große Zahl dar wie die Hunderttausenderziffer.

Nach d) muss die Hunderttausenderziffer gerade sein; damit sie so groß wie möglich wird, versucht man zunächst für die Acht und somit für die Hunderterstelle Vier eine Lösung zu finden.
Nach b) kann die Zehntausenderziffer nicht größer als Drei sein, also versucht man, mit der Zehntausenderziffer Drei und somit mit der Zehnerziffer Neun eine Lösung zu finden.
Da nach a) und c) an der Einer- und an der Tausenderstelle dieselbe gerade Ziffer steht, versucht man - um die größte Zahl zu erhalten - jeweils eine Acht einzusetzen.

Die jetzt erhaltene Zahl 838498 erfüllt die Bedingungen a), b), c) und d) und ist nach Konstruktion die größtmögliche.

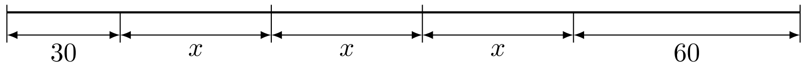
Aufgabe 3 - 320513
Vergleiche der Körpergrößen ergaben:
Jan ist größer als Steffi, Anna kleiner als Ingo, Franziska kleiner als Jan, Steffi kleiner als Moritz, Franziska kleiner als Moritz, Franziska größer als Steffi, Steffi kleiner als Anna, Anna kleiner als Moritz, Jan kleiner als Anna, Moritz größer als Ingo.

(a) Ordne diese Kinder nach ihrer Größe, beginnend mit dem kleinsten Kind.
(b) Welche der angegebenen zehn Vergleiche hätten ausgereicht, um die Aufgabe eindeutig zu lösen? Warum?

(a) Steffi, Franziska, Jan, Anna, Ingo, Moritz.

(b) Die sechste, dritte, neunte, zweite und zehnte Aussage genügen, um in dieser Reihenfolge die gewünschte Ordnung zu erreichen.

Aufgabe 4 - 320514
Ein 6 m 30 cm langer Kupferdraht ist in drei Teile zu unterteilen. Der erste Teil soll 30 cm länger als der zweite Teil sein und der dritte Teil 60 cm länger als der zweite.
Wie lang wird jeder der Teile?

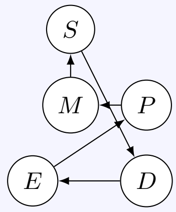


Aus der Abbildung wird ersichtlich:
Durch Subtraktion von 90 cm von der Gesamtlänge des Drahtes erhält man eine Länge, die dreimal so groß ist wie die Länge x des zweiten Teilstücks. Wegen 630 cm - 90 cm = 540 cm und 540 cm : 3 = 180 cm hat das zweite Teilstück eine Länge von 1 m 80 cm.
Wegen 180 cm + 30 cm = 210 cm und 180 cm + 60 cm = 240 cm haben das erste Teilstück eine Länge von 2 m 10 cm und das dritte Teilstück eine Länge von 2 m 40 cm.

Lösungen der I. Runde 1992 übernommen aus [5]

2.33.2 II. Runde 1992, Klasse 5

Aufgabe 1 - 320521
Ein Handelsvertreter mit Wohnsitz in Dresden (D) möchte jede der Städte Erfurt (E), Magdeburg (M), Potsdam (P), Schwerin (S) genau einmal aufsuchen und danach zu seinem Wohnsitz zurückkehren.
Die erste auswärtige Stadt dieser Reise soll Erfurt sein, die Reihenfolge der anderen Städte ist noch nicht festgelegt. Die Abbildung zeigt eine mögliche Reiseroute.



Gib alle Reiserouten an, die unter den genannten Bedingungen gewählt werden können!
Wie viele Reiserouten sind das insgesamt? Eine Begründung wird nicht verlangt.

Es kann unter genau den folgenden Reiserouten gewählt werden:

$$D-E-M-P-S-D,\quad D-E-M-S-P-D,\quad D-E-P-M-S-D,$$

$$D-E-P-S-M-D,\quad D-E-S-M-P-D,\quad D-E-S-P-M-D.$$

Das sind insgesamt 6 Reiserouten. Die Angabe der Routen kann in dieser oder ähnlicher Abkürzung oder zeichnerisch erfolgen.

Aufgabe 2 - 320522
In einem Schrank befinden sich 11 karierte, 7 liniierte und 12 unliniierte Schreibblöcke und keine weiteren. Es ist zu dunkel, um die Blöcke unterscheiden zu können, und sie liegen ungeordnet.
Jemand will eine Anzahl Schreibblöcke herausnehmen und erst dann feststellen, wie viele Blöcke der einzelnen Sorten er herausgenommen hat.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 karierte befinden?
b) Welches ist die kleinste Anzahl von Blöcken, durch deren Herausnehmen gesichert wird, dass sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind?
Begründe deine Antworten, indem du jedesmal nachweist, dass die von dir angegebene Anzahl, aber keine kleinere Anzahl, das Gewünschte sichert!

a) Nimmt man 24 Blöcke heraus, so können sich darunter höchstens 7 liniierte und höchstens 12 unliniierte befinden (da es von diesen Sorten nicht mehr gibt); also muss die Anzahl der herausgenommenen karierten Blöcke mindestens 24 - 7 - 12 = 5 betragen.
Nimmt man dagegen 23 Blöcke oder weniger heraus, so kann es sein, dass dabei nur 4 oder weniger karierte sind; denn die restlichen höchstens 19 Blöcke können liniiert bzw. unliniiert sein (da es von diesen Sorten zusammen so viele gibt).
Also ist 24 die in a) gesuchte kleinste Anzahl.

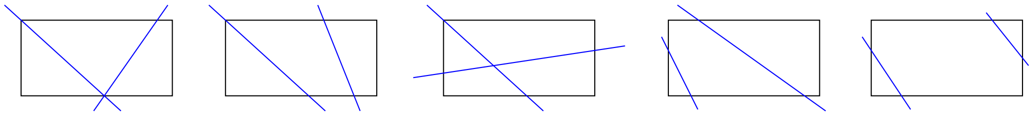
b) Nimmt man 13 Blöcke heraus, so ist es nicht möglich, dass sich darunter von jeder der drei Sorten nur 4 Blöcke befinden (denn $3 \cdot 4$ ist kleiner als 13); d.h., dann müssen sich unter den herausgenommenen Blöcken auch 5 befinden, die von einander gleicher Sorte sind.
Nimmt man dagegen höchstens 12 Blöcke heraus, so kann es sein, dass dies von jeder der drei Sorten höchstens 4 Blöcke sind; denn dazu reichen die von den einzelnen Sorten vorhandenen Anzahlen aus, die alle größer als 4 sind.
Also ist 13 die in b) gesuchte kleinste Anzahl.

Aufgabe 3 - 320523
Zeichne fünf Rechtecke! Zu jedem dieser Rechtecke sollen dann zwei Geraden gezeichnet werden, die den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das betreffende Rechteck in folgende Figuren zerlegen:

a) Zwei Dreiecke und ein Viereck.
b) Ein Dreieck und zwei Vierecke.
c) Ein Dreieck und drei Vierecke.

d) Ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck.
e) Zwei Dreiecke und ein Sechseck.
Führe diese Zeichnungen aus! Begründungen werden nicht verlangt

Die Abbildung zeigt für a) bis e) je ein Beispiel, wie die Geraden liegen können.



a) b) c) d) e)

Aufgabe 4 - 320524
In einem Haus mit Erdgeschoss und drei weiteren Etagen wohnen 72 Personen. In der zweiten Etage sind es 7 Personen mehr als in der ersten, in der dritten 6 Personen mehr als in der ersten.
Da im Erdgeschoss außer Wohnungen auch ein Geschäft ist, wohnen dort 12 Personen weniger als in der ersten Etage.
Wie viele Personen wohnen im Erdgeschoss und in jeder der weiteren Etagen?
Begründe, wie sich diese Personenzahlen aus den obigen Angaben herleiten lassen und überprüfe, dass bei den von dir angegebenen Zahlen diese Angaben zutreffen!

Aus den Angaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 12 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der zweiten Etage wohnen 12 + 7 = 19 Personen mehr als im Erdgeschoss.
In der dritten Etage wohnen 12 + 5 = 17 Personen mehr als im Erdgeschoss.
Würden diese hier genannten 12 + 19 + 17 = 48 Personen ausziehen, so blieben in jeder Etage ebenso viele Personen wie im Erdgeschoss; d.h., es blieb im ganzen Haus die vierfache Bewohnerzahl des Erdgeschosses. Da dabei im Haus 72 - 48 = 24 Personen blieben, folgt: Im Erdgeschoss wohnen 24 : 4 = 6 Personen.

Hieraus und aus den eingangs genannten Vergleichsangaben folgt:
In der ersten Etage wohnen 6 + 12 = 18 Personen, in der zweiten Etage 6 + 19 = 25 Personen, in der dritten Etage 6 + 17 = 23 Personen.

Lösungen der II. Runde 1992 übernommen aus [5]

2.34 XXXIII. Olympiade 1993

2.34.1 I. Runde 1993, Klasse 5

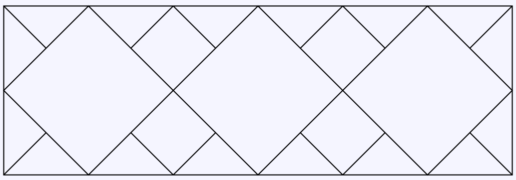
Aufgabe 1 - 330511
Bernd fragt seinen Großvater: "Wie viele Jahre mag dieses Foto alt sein?"
Er bekommt zur Antwort: "Addiere die größte einstellige Zahl und die größte zweistellige Zahl und die größte dreistellige Zahl! Dann subtrahiere die kleinste vierstellige Zahl, und du erhältst die Altersangabe."

Die größte einstellige Zahl ist 9, die größte zweistellige Zahl ist 99, die größte dreistellige Zahl ist 999. Durch Addieren dieser drei Zahlen ergibt sich 1107. Die kleinste vierstellige Zahl ist 1000. Subtrahiert man sie von der vorigen Zahl, so ergibt sich 107.
Das Foto ist also 107 Jahre alt.

Aufgabe 2 - 330512
Bei einer Geburtstagsfeier wird ein Spiel mit blauen Spielmarken und ebenso vielen roten Spielmarken gespielt.
Nach einiger Zeit hatte jedes Kind 12 blaue und 15 rote Spielmarken bekommen, und es waren noch 48 blaue und 15 rote Spielmarken übrig.
Wie viele Kinder spielten dieses Spiel?

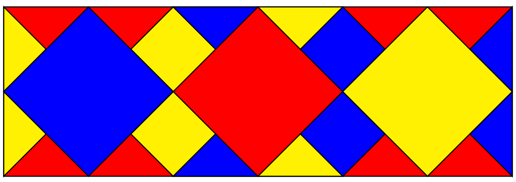
Wenn jedes Kind noch 3 blaue Spielmarken bekommen würde, so müssten ebenso viele blaue wie rote Spielmarken übrigbleiben, d.h., 15 Stück. Es müssten dabei also 48 - 15 = 33 Spielmarken verteilt werden. Weil dabei jedes Kind 3 Spielmarken bekäme, nahmen 11 Kinder an dem Spiel teil.

Aufgabe 3 - 330513



Kann man die Felder der Abbildung so mit den Farben Blau, Rot, Gelb färben, dass jede Farbe eine gleichgroße Gesamtfläche bedeckt wie jede andere Farbe und dass niemals zwei Farben längs einer Strecke zusammenstoßen?
Wenn das möglich ist, stelle eine solche Färbung her! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die Abbildung zeigt eine Färbung der geforderten Art.



Aufgabe 4 - 330514
Die Zahlen 100 und 90 sollen beide durch eine gesuchte Zahl geteilt werden. Im ersten Fall soll der Rest 4 und im zweiten Fall der Rest 18 bleiben.
Zeige, dass es hierfür genau eine gesuchte Zahl gibt; finde sie und bestätige, dass sie das Verlangte leistet!

Würde man nicht 100, sondern 100 - 4 = 96 durch die gesuchte Zahl teilen, so würde die Division ohne Rest aufgehen. Ebenso würde kein Rest bleiben, wenn man nicht 90, sondern 90 - 18 = 72 durch die gesuchte Zahl teilen würde. Ferner muss die gesuchte Zahl größer als 18 sein, da der Rest stets kleiner ist als die Zahl, durch die man teilt.

Die einzigen Zahlen, durch die sich 72 ohne Rest teilen lässt und die größer als 18 sind, sind die Zahlen 24 und 36. Durch 36 ist aber 96 nicht ohne Rest teilbar.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Zahl geben kann, die als die gesuchte Zahl in Frage kommt, nämlich 24.
Bestätigung: $100 : 24 = 4$, Rest 4 $90 : 24 = 3$, Rest 18

Lösungen der I. Runde 1993 übernommen aus [5]

2.34.2 II. Runde 1993, Klasse 5

Aufgabe 1 - 330521
In einer kleinen Stadt stehen auf einer Straße am linken und am rechten Straßenrand insgesamt 47 Laternen. Auf jeder Straßenseite beträgt der Abstand zwischen je zwei benachbarten Laternen 35 m. Am linken Straßenrand steht je eine Laterne genau am Anfang und am Ende der Straße.
Wie lang ist diese Straße?

Am linken Straßenrand muss genau eine Laterne mehr als am rechten Straßenrand stehen. Zählt man am linken Straßenrand die Laterne am Ende der Straße nicht mit, so stehen auf beiden Seiten der Straße gleich viele Laternen, also $46 : 2 = 23$ Stück.
Also ist die Straße $23 \cdot 35$ m $= 805$ m lang.

Aufgabe 2 - 330522
Rolf sucht vierstellige Zahlen, in denen keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer soll 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Tausenderziffer soll 4 betragen.
Beim Berechnen dieser Unterschiede soll es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden beiden Ziffern ankommen.
Wie viele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt?
Begründe, warum es nicht mehr als von dir angegeben sein können!

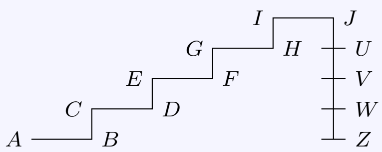
Die Tausenderziffer einer gesuchten Zahl kann nicht 0 sein, da die Zahl sonst nicht vierstellig wäre.
Ist die Tausenderziffer 1, 2 oder 3, so kann die Hunderterziffer nicht um 4 kleiner sein, sie muss also um 4 größer sein, d.h. 5, 6 bzw. 7 lauten. Bei der Tausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 kann die Hunderterziffer nicht um 4 größer sein. Nur wenn die Tausenderziffer 4 oder 5 lautet, ist jeweils sowohl die um 4 kleinere als auch die um 4 größere Hunderterziffer möglich.

Ähnlich gibt es zu den Hunderterziffern 0, 1, 2 nur die um 3 größere und zu 7, 8, 9 nur die um 3 kleinere Zehnerziffer, während für die Hunderterziffern 3, 4, 5, 6 beide Möglichkeiten bestehen.

Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, die ersten drei Ziffern gesuchter Zahlen zusammenzustellen:
$$158, 152, 269, 263, 374, 403, 485, 514, 596, 625, 730, 736, 841, 847, 958, 952$$

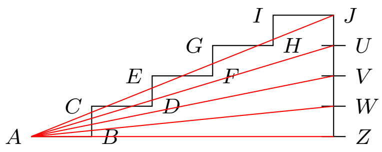
Da in jeder dieser 16 Zusammenstellungen genau drei verschiedene Ziffern auftreten, gibt es jedesmal für die noch fehlende Einerziffer genau 7 Möglichkeiten. Die Anzahl aller Zahlen der gesuchten Art beträgt daher $7 \cdot 16 = 112$.

Aufgabe 3 - 330523
Die Abbildung zeigt eine treppenartig aufsteigende Linie $ABCDEFGHIJ$ und eine abwärtsgehende Strecke JZ.
Alle Winkel bei B, C, D, E, F, G, H, I, J sind rechte Winkel.
Die Strecken BC, DE, FG, HI haben einander gleiche Länge, doppelt so lang sind AB, CD, EF, GH, IJ, und viermal so lang ist JZ.



Diese Strecke ist in vier gleichlange Strecken JU, UV, VW, WZ zerlegt.

a) Konstruiere eine derartige Figur $ABCDEFGHIJUVWZ$!
b) Finde dann durch Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte, die beim Schnitt der Treppenlinie $ABCDEFGHIJ$
(1) mit der Strecke AJ zwischen A und J,
(2) mit der Strecke AU zwischen A und U,
(3) mit der Strecke AV zwischen A und V,
(4) mit der Strecke AW zwischen A und W
vorkommen!



a) Die Abbildung zeigt die zu konstruierende Figur; zusätzlich wurden die Strecken AJ, AU, AV, AW konstruiert.
Als gesuchte Anzahlen von Schnittpunkten sind daran ersichtlich: b) 7, c) 3, d) 1, e) 1.

Aufgabe 4 - 330524
Rita berechnet die drei Zahlen

$$1+9-9+3=a, \qquad 1\cdot 9+9-3=b, \qquad 1\cdot 9\cdot 9\cdot 3=c$$

Sie betrachtet weitere Möglichkeiten, in die Kästchen der Zeile

$$1 \square 9 \square 9 \square 3 =$$

Zeichen einzusetzen, die entweder + oder - oder · sind. Dabei sucht sie alle diejenigen Einsetzungen, bei denen die auszurechnende Zahl größer als 30, aber kleiner als 100 ist.
Finde alle diese Einsetzungen; weise nach, dass du alle gefunden hast!
Addiere die dabei entstandenen auszurechnenden Zahlen!
Zur so gefundenen Summe addiere weiterhin das Produkt der beiden kleinsten unter den zwischen 30 und 100 gefundenen Zahlen! Addiere schließlich die oben als a, b und c berechneten Zahlen!

Die auszurechnende Zahl kann nur dann größer als 30 sein, wenn mindestens in einem der beiden Kästchen zwischen 9 und 9 bzw. zwischen 9 und 3 das Zeichen · steht.
Steht es zwischen 9 und 3, so kann davor nicht - stehen (es würde eine zu große Zahl subtrahiert), aber auch nicht · (denn 1 durch eine Rechenoperation +, - oder · mit $9\cdot 9\cdot 3=243$ verbunden, gibt kein Ergebnis zwischen 30 und 100). Also muss davor dann + stehen.

Ferner kann dann zwischen 1 und 9 nicht - stehen (wieder würde eine zu große Zahl subtrahiert). Steht das Zeichen zwischen 9 und 9, so kann danach nur + oder - stehen (weil · eben schon widerlegt wurde) und davor nicht - (es würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Also entstehen genau bei den Ersetzungen

$$\begin{aligned} 1+9+9\cdot 3&=37,\\ 1\cdot 9+9\cdot 3&=36,\\ 1+9\cdot 9+3&=85,\\ 1\cdot 9\cdot 9+3&=84,\\ 1+9\cdot 9-3&=79,\\ 1\cdot 9\cdot 9-3&=78 \end{aligned}$$

auszurechnende Zahlen zwischen 30 und 100.

Mit der Summe s dieser Zahlen ergeben die weiteren geforderten Additionen $s=37+36+85+84+79+78=399$; $36\cdot 37=1332$, $a+b+c=4+15+243=262$, in der Summe 1993.

Lösungen der II. Runde 1993 übernommen aus [5]

2.35 XXXIV. Olympiade 1994

2.35.1 I. Runde 1994, Klasse 5

Aufgabe 1 - 340511
In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte. Jeder Stift hat eine der Farben blau, gelb, rot, violett.
Jede Farbe kommt mindestens einmal vor. Es gibt mehr blaue Stifte als gelbe, es gibt ebenso viele gelbe Stifte wie rote, es gibt weniger violette Stifte als rote.
Gib alle hiernach möglichen Verteilungen an!
(Eine Verteilung wird angegeben, indem man angibt, wie viele Stifte von jeder Farbe in der Schachtel liegen.)

Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten.

violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau	violett	rot	gelb	blau
1	2	2	15	1	3	3	13	1	4	4	11
1	5	5	9	1	6	6	7	2	3	3	12
2	4	4	10	2	5	5	8	3	4	4	9
3	5	5	7	4	5	5	6				

Aufgabe 2 - 340512
Xaver und Yvette berichten: Jeder von uns hat sich eine natürliche Zahl gedacht. Wir haben diese Zahlen uns gegenseitig mitgeteilt.

Xaver sagt: Der Nachfolger meiner Zahl ist durch den Nachfolger von Yvettes Zahl teilbar.
Yvette sagt: Die Summe aus dem Nachfolger meiner Zahl und dem Nachfolger von Xavers Zahl ist eine ungerade Zahl.
Anette lässt sich das Produkt von Xavers Zahl und Yvettes Zahl sagen: Es beträgt 36.
Nenne zwei Zahlen, für die diese Aussagen zutreffen! Zeige, dass es keine weiteren derartigen Zahlen gibt!

Hinweis: Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist die um 1 größere Zahl. Beispielsweise hat 115 den Nachfolger 116.

Alle Möglichkeiten, 36 als Produkt zweier natürlicher Zahlen zu schreiben, sind

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 2 \cdot 18, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9, \quad 36 = 6 \cdot 6$$

Die Summe aus den Nachfolgern zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Hiernach verbleiben genau die Möglichkeiten

$$36 = 1 \cdot 36, \quad 36 = 3 \cdot 12, \quad 36 = 4 \cdot 9$$

Die hier genannten Zahlen haben die Nachfolger 2, 37 bzw. 4, 13 bzw. 5, 10. Genau im letzten Fall ist einer dieser beiden Nachfolger durch den anderen teilbar.
Also treffen die Aussagen genau dann zu, wenn Xavers Zahl 4 und Yvettes Zahl 9 lautet.

Aufgabe 3 - 340513

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & \square & 8 & \cdot & 4 & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \square & & \\
 & & 2 & 1 & \square & \square & \\
 & & & \square & \square & \square & 6 \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

In die leeren Felder der Abbildung sind derart Ziffern einzutragen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht.
Dabei soll die Regel beachtet werden, dass in jeder Zeile am Anfang eine von 0 verschiedene Ziffer steht.
Zeige, dass es genau eine Eintragung der gesuchten Art gibt!

$$\begin{array}{ccccccc} A & B & 8 & \cdot & 4 & C & D \\ \hline & 1 & 4 & 3 & E & & \\ & & 2 & 1 & F & G & \\ & & & H & J & K & 6 \\ \hline & L & M & N & P & Q & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 3 & 5 & 8 & \cdot & 4 & 6 & 7 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 2 & & \\ & & 2 & 1 & 4 & 8 & \\ & & & 2 & 5 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 1 & 8 & 6 \end{array}$$

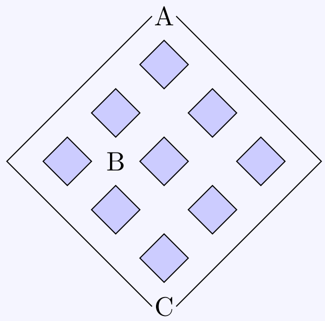
Bezeichnet man die fehlenden Ziffern wie in der linken Abbildung, so folgt:
Wegen $8 \cdot 4 = 32$ muss $E = 2$ sein.
Daher muss das Vierfache des ersten Faktors 1432 betragen, also ist der erste Faktor $1432 : 4 = 358$. Weiter muss die Zahl $358 \cdot C$ mit den Ziffern 21.. beginnen. Probiert man die Werte ≤ 5, C = 6, $C \geq 7$, so findet man wegen

$$358 \cdot 5 = 1790, \quad 358 \cdot 6 = 2148, \quad 358 \cdot 7 = 2506$$

dass nur $C = 6$ in Frage kommt. Die Zahl $358 \cdot D$ muss auf die Ziffer 6 enden; das ist nur mit $D = 2$ oder $D = 7$ möglich. Da aber $358 \cdot 2 = 716$ nicht vier Ziffern H, J, K, 6 mit von 0 verschiedener Anfangsziffer H ergibt, verbleibt nur $D = 7$und damit insgesamt nur die Multiplikation $358 \cdot 467$.
Wie die rechte Abbildung zeigt, führt diese Multiplikation auf eine Eintragung der gesuchten Art.

Aufgabe 4 - 340514

In das Gefäß aus der Abbildung können Kugeln durch die Öffnung A hineinfallen. Auf ihrem Weg nach unten werden sie jedesmal, wenn sie an die obere Ecke eines Hindernisses kommen, entweder nach links oder nach rechts abgelenkt.



a) Wie viele derartige Wege von A nach B gibt es insgesamt?
b) Wie viele derartige Wege von B nach C gibt es insgesamt?
c) Wie viele derartige Wege von A über B nach C gibt es insgesamt?
d) Wie viele derartige Wege von A nach C gibt es insgesamt?

Erläutere für wenigstens eine der Teilaufgaben a), b), c), d), wie du die gesuchte Anzahl möglicher Wege gefunden hast!

Zur Beschreibung des Weges einer Kugel werde die Ablenkung nach links bzw. rechts durch l bzw. r angegeben.

a) Auf jedem Weg von A nach B kommt man dreimal an eine Weggabelung. Um B zu erreichen, muss man an genau zwei Gabelungen nach links, an genau einer Gabelung nach rechts gehen. Daher gibt es genau die 3 Wege llr, lrl, rll.

b) Um von B nach C zu gelangen, muss man genau einmal nach links und genau zweimal nach rechts gehen. (Dabei handelt es sich in jedem dieser drei Fälle entweder um die Entscheidung an einer Weggabelung oder um die Fortsetzung, die durch den Rand des Gefäßes eindeutig erzwungen ist.)
Hiernach gibt es genau die 3 Wege lrr, rlr, rrl.

c) Um von A über B nach C zu gelangen, hat man nach jedem der drei Wege aus a) die Möglichkeit, jeden der drei Wege aus b) anzuschließen. Also gibt es insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ derartige Wege.

d) Um von A nach C zu gelangen, muss man genau dreimal nach links und genau dreimal nach rechts gehen (jeweils entweder bei einer Weggabelung oder durch den Rand des Gefäßes erzwungen). Damit gibt es genau die Wege
beginnend mit lll: lllrrr,
beginnend mit llr: llrlrr, llrrlr, llrrrl,
beginnend mit lrr: lrllrr, lrlrlr, lrlrrl,
beginnend mit lrr: lrrllr, lrrlrl, lrrrll,
beginnend mit rll: rlllrr, rllrlr, rllrrl,
beginnend mit rlr: rlrllr, rlrlrl, rlrrll,
beginnend mit rrl: rrlllr, rrllrl, rrlrll,
beginnend mit rrr: rrrlll,
das sind insgesamt 20 Wege.

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen aus [5]

2.35.2 II. Runde 1994, Klasse 5

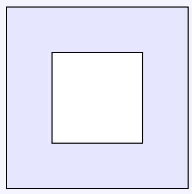
Aufgabe 1 - 340521
In einem Zirkus treten vier Artisten auf. Sie heißen Meier, Neumann , Opitz und Pfeifer. Ihre Vornamen sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter, Erich, Fritz und Gert. Außerdem ist bekannt:

(1) Die Reihenfolge ihrer Auftritte ist: Pfeifer, Fritz, Meier, Erich.
(2) Diese Auftritte sind, möglicherweise in anderer Reihenfolge: Dieter jongliert, Erich zaubert, Neumann tritt als Clown auf und Pfeifer arbeitet auf dem Drahtseil.

Zeige, dass durch diese Angaben für jeden der Artisten Meier, Neumann, Opitz und Pfeifer eindeutig bestimmt ist, welchen Vornamen er hat!
Nenne diese vier zusammengehörenden Vor- und Familiennamen!

Nach (1) heißt Pfeifer weder Fritz noch Erich, nach (2) heißt er auch nicht Dieter. Daher gilt: Pfeifer heißt Gert. (3)
Nach (1) heißt Meier weder Fritz noch Erich, nach (3) heißt er auch nicht Gert. Daher gilt: Meier heißt Dieter. (4)
Nach (2) heißt Neumann nicht Erich, nach (3) und (4) heißt er weder Gert noch Dieter. Daher gilt: Neumann heißt Fritz. (5)
Wegen (3), (4), (5) verbleibt schließlich nur: Opitz heißt Erich. (6)
Damit ist gezeigt, dass die Vornamen zu den Familiennamen eindeutig bestimmt sind, und diese zusammengehörenden Namen sind angegeben.

Aufgabe 2 - 340522
Die Abbildung zeigt eine ringförmige Fläche. Sie wird von einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und einem Quadrat der Seitenlänge 2 cm eingeschlossen.
Beide Quadrate haben denselben Mittelpunkt, jede Seite des kleinen Quadrats ist zu einer Seite des großen Quadrates parallel.
Nun sollen mehrere Geraden gezeichnet werden, so dass sie, genügend verlängert, die ringförmige Fläche in Teilflächen zerlegen. Die Teilflächen einer Zerlegung sollen einander gleiche Größe und gleiche Form haben. Folgende Anzahlen sollen erreicht werden:



Aufgabe	Anzahl der Geraden	Anzahl der entstehenden Teilflächen
(a)	2	4
(b)	3	6
(c)	4	8
(d)	6	12

Fertige zu jeder der Aufgaben (a), (b), (c), (d) eine Zeichnung an!
Zu zwei der Aufgaben (a), (b), (c), (d) fertige noch je eine weitere Zeichnung an, in der die Teilflächen von anderer Gestalt sind als in den vorigen Zeichnungen!
Eine Begründung oder Beschreibung wird nicht verlangt.

Die Abbildung zeigt Zeichnungen der geforderten Art.

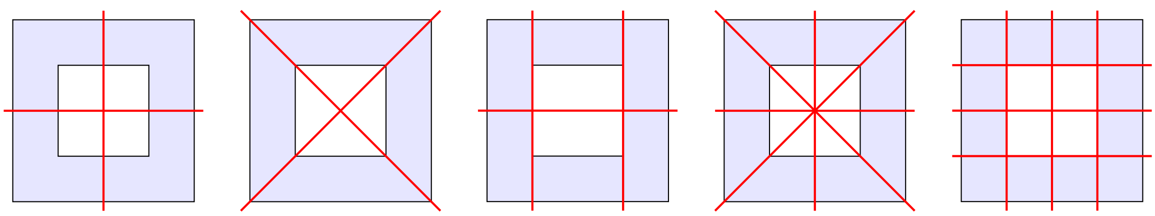


Abbildung a_1 Abbildung a_2 Abbildung b Abbildung c Abbildung d

Aufgabe 3 - 340523
Man kann jede natürliche Zahl 1, 2, 3, ... als eine Summe darstellen, in der jeder Summand eine 1 oder eine 2 ist. Zum Beispiel gibt es für die Zahl 3 unter Beachtung der Reihenfolge genau die Darstellungen

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$$

(a) Gib auch für jede der Zahlen 4, 5 und 6 alle Darstellungen an!
(b) Wie groß ist für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils die Anzahl aller Darstellungen?
Finde eine Gesetzmäßigkeit, die für diese sechs Anzahlen gilt!
Wie viele Darstellungen muss es - wenn die von dir genannte Gesetzmäßigkeit sogar allgemein gilt - für die Zahl 10 geben?

(a) Die gesuchten Darstellungen sind:

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 2+2$$

$$5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1 = 1+2+1+1 = 2+1+1+1 = 1+2+2 =$$
$$= 2+1+2 = 2+2+1$$

$$6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+2+1 = 1+1+2+1+1 =$$
$$= 1+2+1+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+2+2 = 1+2+1+2 = 1+2+2+1 =$$
$$= 2+1+1+2 = 2+1+2+1 = 2+2+1+1 = 2+2+2$$

(b) Als Anzahlen erhält man:

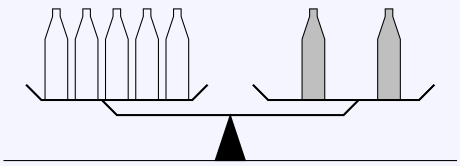
Darzustellende Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Darstellungen	1	2	3	5	8	13

Für sie gilt folgende Gesetzmäßigkeit:
Die Summe zweier benachbarter Anzahlen ist gleich der darauffolgenden Anzahl. Wenn diese Gesetzmäßigkeit allgemein gilt, so erhält man als Fortsetzung:

Darzustellende Zahl	7	8	9	10
Anzahl der Darstellungen	8+13=21	13+21=34	21+34=55	34+55=89

Für die Zahl 10 muss es dann also genau 89 Darstellungen geben.

Aufgabe 4 - 340524



Auf einer Waage sind fünf links stehende leere Mineralwasserflaschen mit zwei rechts stehenden vollen im Gleichgewicht (siehe Abbildung).

(a) Britta füllt zwei leere Flaschen mit Mineralwasser und erreicht dann, dass wieder Gleichgewicht eintritt, indem sie auf die rechte Waagschale leere Flaschen dazu stellt.
Wie viele leere Flaschen sind das?
(b) Jan entleert dann eine der rechts stehenden Flaschen und nimmt von der linken Waagschale eine leere Flasche weg. Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?
(c) Pia nimmt alle Flaschen von der Waage und stellt dann links zwei volle Flaschen und eine leere Flaschen auf, rechts eine volle Flasche und drei leere Flaschen.
Welche Waagschale neigt sich nun nach unten?

(a) Werden rechts noch drei leere Flaschen dazu gestellt, so stehen sowohl links als auch rechts je zwei volle und drei leere Flaschen; also tritt Gleichgewicht ein. Die gesuchte Anzahl ist somit 3.

(b) Denkt man sich in der Abbildung des Aufgabentextes auf beiden Waagschalen das Gewicht von zwei leeren Flaschen entfernt, so folgt:
Drei leere Flaschen haben dasselbe Gewicht wie das Mineralwasser, das zwei Flaschen füllt. Daraus ergibt sich die Aussage:
Eine leere Flasche hat ein kleineres Gewicht als das Wasser für eine Flasche. Da Jan links die Flasche und rechts das Wasser wegnimmt und vorher Gleichgewicht herrschte, neigt sich nun die linke Waagschale nach unten.

(c) Die Aufstellung, die Pia vornimmt, kann stattdessen auch aus der nach (b) erreichten Aufstellung erhalten werden, indem man dort links und rechts je eine leere Flasche wegnimmt.
Daher neigt sich auch bei Pias Aufstellung die linke Waagschale nach unten.

Lösungen der II. Runde 1994 übernommen aus [5]

2.35.3 III. Runde 1994, Klasse 5

Aufgabe 1 - 340531
Fritz hat geträumt, er bekäme ein Paket voller Gummibärchen, wenn er drei Aufgaben (a), (b), (c) löst.
Obwohl es nur ein Traum war und er nicht weiß, ob die Zahlen des Traumes genau stimmen, möchte er die Aufgaben doch lösen. In seinem Traum hieß es:

Ein Paket enthält 1000 Gummibärchen. Sie sind in 50 Tüten verteilt.
Der Inhalt einer Tüte kostet 1,60 DM. Ein Kilogramm Gummibärchen kostet 20 DM. In jeder Tüte ist dieselbe Anzahl Gummibärchen wie in jeder anderen Tüte. Jedes Gummibärchen wiegt ebenso viel und kostet ebenso viel wie jedes andere Gummibärchen.
Die Aufgaben lauten:

(a) Wie viel kosten zusammengenommen die Gummibärchen in einem Paket?
(b) Wie viel wiegt der Inhalt einer Tüte?
(c) Wie viel wiegt ein Gummibärchen?

Gib die Lösungen zu (a), (b), (c) an und begründe, wie du sie erhalten hast!

(a) Da ein Paket 50 Tüten enthält und der Inhalt jeder Tüte 1,60 DM kostet, kosten die Gummibärchen in einem Paket zusammengenommen $50 \cdot 1{,}60$ DM = 80 DM.

(b) Da 1000 Gramm Gummibärchen 2000 Pfennig kosten, kostet 1 Gramm 2 Pfennig. Also kosten 80 Gramm 1,60 DM.
Das ist der Preis für den Inhalt einer Tüte; dieser Inhalt wiegt also 80 Gramm.

(c) Da die 50 Tüten in einem Paket 1000 Gummibärchen enthalten, enthält wegen $1000 : 50 = 20$ eine Tüte 20 Gummibärchen. Da diese, wie in (b) gefunden, 80 Gramm wiegen, wiegt ein Gummibärchen 80 g : 20 = 4 g.

Aufgabe 2 - 340532
Aus genau 4 Stäbchen, von denen jedes etwas weniger als 1 cm Länge hat, lässt sich ein kleines Quadrat der Seitenlänge 1 cm legen:

```
 _
|_|
```

Für ein Quadrat, das aus vier der zuvor betrachteten kleinen Quadrate besteht, benötigt man genau 12 Stäbchen:

```
 _ _
|_|_|
|_|_|
```

(a) Wie viele Stäbchen genau benötigt man für ein Quadrat, das aus (1) neun, (2) sechzehn dieser kleinen Quadrate besteht?

```
 _ _ _ ...
|_|_|_ ...
|_|_|_ ...
| | |
: : :
```

Wie viele Stäbchen genau benötigt man, um mit diesen kleinen Quadraten ein Quadratgitter auszulegen, das 1 m lang und 1 m breit ist?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

(a) Man benötigt
(1) genau $(3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 =)$ 24 Stäbchen,
(2) genau $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =)$ 40 Stäbchen.

(b) Für dieses Quadratgitter aus $100 \cdot 100$ kleinen Quadraten benötigt man (in jeder waagerechten Reihe 101 senkrechte Stäbchen, in allen waagerechten Reihen zusammen also $100 \cdot 101$ senkrechte Stäbchen; ebenso viele waagerechte Stäbchen in allen senkrechten Reihen; insgesamt also) genau ($100 \cdot 101 + 100 \cdot 101 =$) 20200 Stäbchen.

Aufgabe 3 - 340533
Annette, Bernd, Christiane, Dieter und Ruth spielen folgendes Spiel: die vier Kinder außer Ruth verabreden, dass eines von ihnen einen Brief bei sich versteckt und dass dann jedes dieser Kinder drei Aussagen macht, von denen mindestens zwei wahr sind.
Ruth, die nur diese Regeln und die Aussagen der vier erfährt, soll herausfinden, wer den Brief hat. Eines der vier Kinder Annette, Bernd, Christiane, Dieter hatte sich das Spiel ausgedacht, sie wissen auch, wer es war; nur Ruth weiß das nicht. Folgende Aussagen werden gemacht:

Annette: Ich habe den Brief nicht. Entweder hat Bernd den Brief, oder Bernd hat den Brief nicht. Christiane hat sich das Spiel ausgedacht.
Bernd: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Dieter. Ich habe den Brief nicht. Annette oder Christiane oder Dieter hat den Brief.
Christiane: Entweder Bernd oder Dieter hat den Brief. Bernd hat drei wahre Aussagen gemacht. Annette hat den Brief nicht.
Dieter: Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Christiane. Ich habe den Brief nicht. Alle drei Aussagen von Christiane sind wahr.

Untersuche, ob durch die Regeln und die Aussagen eindeutig bestimmt ist, wer den Brief hat!
Wenn das der Fall ist, gib diesen Spieler an! Stelle dann auch fest, ob alle Aussagen den Regeln entsprechen, wenn der Brief bei dem von dir angegebenen Spieler ist!

I. Da Bernds zweite und dritte Aussage einander gleichwertig sind, sind sie entweder beide wahr oder beide falsch. Nach den Regeln können sie nicht beide falsch sein, also sind sie beide wahr. Also hat Bernd den Brief nicht.
Wenn auch Bernds erste Aussage wahr ist, so folgt daher weiter: Dieter hat den Brief.
Wenn aber Bernds erste Aussage falsch ist, so folgt: Christianes zweite Aussage ist falsch. Nach den Regeln müssen also Christianes erste und dritte Aussage wahr sein. Aus der ersten Aussage und daraus, dass Bernd den Brief nicht hat, folgt damit wieder: Dieter hat den Brief.

Damit hat sich insgesamt ergeben: Wenn alle Aussagen den Regeln entsprechen, so kann eindeutig nur Dieter den Brief haben.

II. Wenn Dieter den Brief hat, so haben Bernd, Christiane und Dieter je drei wahre Aussagen gemacht, und mindestens die ersten beiden Aussagen von Annette sind wahr. Also entsprechen dann alle Aussagen den Regeln.

Aufgabe 4 - 340534
In einem Schachverein wurde ein Turnier für Anfänger und für Fortgeschrittene durchgeführt. Jeder Anfänger spielte gegen jeden anderen Anfänger genau zwei Partien; jeder Fortgeschrittene spielte gegen jeden anderen Fortgeschrittenen genau zwei Partien.
Diese Partien wurden so angesetzt, dass an jedem von genau 28 Spieltagen genau 3 Partien gespielt wurden. Es nahmen an dem Turnier mehr Anfänger als Fortgeschrittene teil.

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Anfänger und wie viele Fortgeschrittene an dem Turnier teilnahmen! Nenne diese beiden Anzahlen!

Multipliziert man die Anzahl der Anfänger mit der um 1 kleineren Zahl, so erhält man die Anzahl aller von diesen Spielern gespielten Partien. Entsprechendes gilt für die von den Fortgeschrittenen gespielten Partien.

Zum Beweis kann man z.B. annehmen, dass für je zwei der betreffenden Spieler die beiden Partien so festgelegt werden, dass jeder der beiden einmal die weißen Steine bekommt. Dann kann man für jeden Spieler alle diejenigen Partien abzählen, die er insgesamt mit den weißen Steinen spielt. Einerseits hat man damit für jeden Spieler als Beitrag zu der so errechneten Zahl gerade die um 1 verringerte Anzahl der Spieler genommen; andererseits hat man insgesamt jede Partie genau einmal erfasst.

Die folgende Tabelle zeigt, welche Anzahlen von Partien so zustandekommen können:

Anzahl der Spieler	2	3	4	5	6	7	8	9	> 10
Anzahl der Partien	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	$4 \cdot 3$	$5 \cdot 4$	$6 \cdot 5$	$7 \cdot 6$	$8 \cdot 7$	$9 \cdot 8$	$> 10 \cdot 9$
	$= 2$	$= 6$	$= 12$	$= 20$	$= 30$	$= 42$	$= 56$	$= 72$	$= 90$

Da genau $28 \cdot 3 = 84$ Partien gespielt wurden, muss 84 als Summe von zwei der hier aufgezählten Anzahlen darstellbar sein; dabei müssen diese beiden Summanden (wegen der unterschiedlichen Spielerzahlen) voneinander verschieden sein.
Die einzige Möglichkeit hierfür ist, 84 als Summe von 12 und 72 darzustellen, das sind die Anzahlen der Partien für 4 bzw. 9 Spieler. Da mehr Anfänger als Fortgeschrittene teilnahmen, ist folglich eindeutig bestimmt: Es nahmen genau 9 Anfänger und genau 4 Fortgeschrittene teil.

Lösungen der III. Runde 1994 übernommen aus [5]

3 Klassenstufe 6

3.1 Vorolympiade 1960/61

3.1.1 Wettbewerb V1960/61, Klasse 6

Aufgabe 1 - V00601
Vor dem Zusammenschluss landwirtschaftlicher Einzelbetriebe eines Dorfes zur LPG musste eine Traktorenbrigade wegen der auseinanderliegenden Felder häufig den Arbeitsplatz wechseln. Sie hatte dadurch am Tage (8 Std.) 2,3 Stunden Leerlauf je Traktor.
Nach dem Zusammenschluss konnte mit jedem Traktor ohne Unterbrechung auf dem Felde gearbeitet werden.

a) Wie viel Hektar können mit jedem Traktor je Tag zusätzlich gepflügt werden, wenn in einer Stunde 0,26 ha gepflügt werden?
b) Die Brigade arbeitet mit 5 Traktoren, ziehe die Schlussfolgerung!

a) Es werden mit einem Traktor in 2,3 Stunden: $2{,}3 \cdot 0{,}26 \approx 0{,}6$ ha mehr gepflügt.
b) Mit 5 Traktoren sind es somit ≈ 3 ha.

Aufgabe 2 - V00602
Fünf Arbeitsgemeinschaften einer Schule kommen am 1. Juli zusammen, um ihre Ferienpläne zu beraten.
Sie beschließen, dass die Biologen jeden zweiten Tag, die Physiker jeden dritten Tag, die Geographen jeden vierten Tag, die Modellbauer jeden fünften Tag und die Elektrotechniker jeden sechsten Tag zusammenkommen. An dem Tag, an dem alle Gruppen wieder gleichzeitig in der Schule zusammenkommen, wollen sie ihre Arbeit auswerten.
Wann ist dieser Tag, wenn die Gruppen ab 1. Juli regelmäßig (auch an Sonntagen) zusammenkommen?

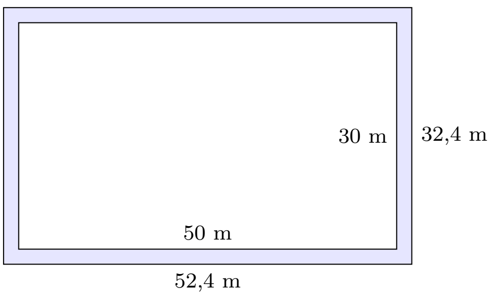
Die Arbeitsgemeinschaften treffen sich wieder, wenn die Zahl der Tage durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. D. h., die Anzahl der gesuchten Tage ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5 und 6, d. h. 60. Die Schüler treffen sich nach 60 Tagen wieder, d. h. am 30. August.

Aufgabe 3 - V00603
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

Die auszulegende Fläche ist die Differenz der zwei Rechtecke (siehe Abildung). Damit wird für den Flächeninhalt

$$F = 52{,}4 \text{ m} \cdot 32{,}4 \text{ m} - 50 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 197{,}76 \text{ m}^2$$

Ein Platte hat den Flächeninhalt $0{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}09 \text{ m}^2$. Damit benötigt man $\frac{197{,}76}{0{,}9} = 2197{,}3 \approx 2200$ Platten.



Aufgabe 4 - V00604
Ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier beliebiger Zahlen stets durch ihre größten gemeinsamen Teiler teilbar? Begründe deine Antwort!

Ja, denn die kleinste Primzahlpotenz eines Teilers der ggT ist immer in der größten Primzahlpotenz eines Teilers des kgV enthalten.

Aufgabe 5 - V00605
Wie viel sind eineinhalb Drittel von Hundert?

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{\frac{3}{2}}{3} \cdot 100 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

Aufgabe 6 - V00606
Wie heißt der Bruch mit einem einstelligen Nenner, der größer als $\frac{7}{9}$ und kleiner als $\frac{8}{9}$ ist?

Ein möglicher Bruch ist das arithmetische Mittel von $\frac{7}{9}$ und $\frac{8}{9}$:

$$\frac{\frac{7}{9} + \frac{8}{9}}{2} = \frac{\frac{15}{9}}{2} = \frac{15}{30} = \frac{5}{6}$$

Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar, da z. B. auch $\frac{6}{7}$ ein solcher Bruch ist.

Aufgabe 7 - V00607 = V00503
Zu einer gedachten Zahl wird 16 addiert, anschließend mit 7 multipliziert, dann 8 subtrahiert und schließlich mit 9 dividiert. Man erhält 22 Rest 4.
Wie heißt die gedachte Zahl?

x sei die gedachte Zahl. Dann ergibt sich mit den Operationen der Term

$$((x + 16) \cdot 7 - 8) : 9$$

Dieser Term soll 22 mit einem Rest 4 werden, d. h. es gilt

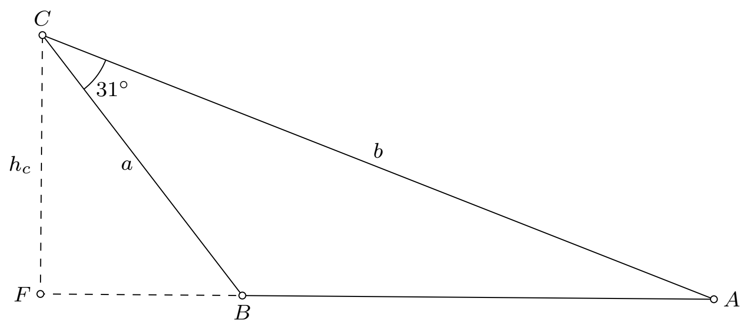
$$((x + 16) \cdot 7 - 8) = 9 \cdot 22 + 4$$

Schrittweises Zusammenfassen und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} ((x + 16) \cdot 7 - 8) &= 9 \cdot 22 + 4 \\ (x + 16) \cdot 7 - 8 &= 198 + 4 \\ (x + 16) \cdot 7 &= 202 + 8 \\ x + 16 &= 210 : 7 \\ x &= 30 - 16 = 14 \end{aligned}$$

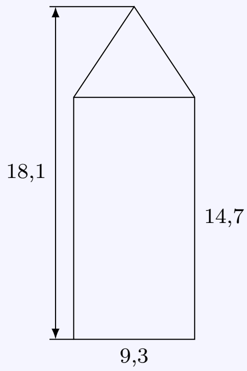
Die gedachte Zahl ist 14.

Aufgabe 8 - V00608
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!



Messung: $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm

Aufgabe 9 - V00609



In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m^2 Kalkanstrich!

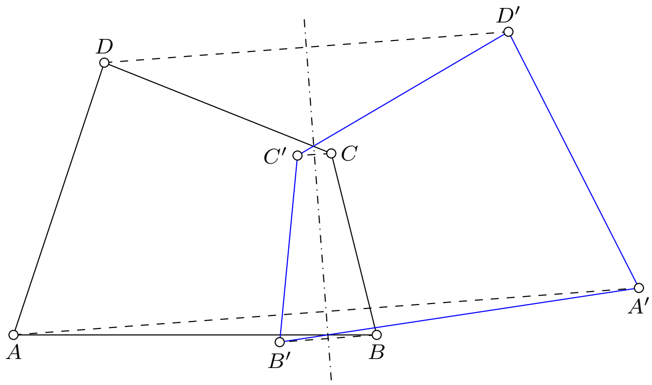
Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.

Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck (Höhe = 18,1 - 14,7 = 3,4 m) zusammen. Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$F = 9{,}3 \cdot 14{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 3{,}4 = 152{,}52 \text{ m}^2$$

Die zu verputzende Fläche hat einen Inhalt von 152,5 m^2. 1 m^2 Putz kostet damit $\frac{131{,}17}{152{,}52} = 0{,}86$ DM.

Aufgabe 10 - V00610
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!



Aufgabe 11 - V00611
Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge wird schwarz angestrichen. Dann wird er so zerschnitten, dass 27 kleinere Würfel entstehen.
Dabei entstehen Würfel mit drei schwarzen Seitenflächen, andere mit zwei, andere nur mit einer und Wieder andere, die überhaupt keine schwarzen Seitenflächen haben.
Wie viel Würfel sind in jeder Gruppe vorhanden und welche Länge haben die Kanten der 27 kleinen Würfel?

Es ergeben sich
a) 8 Würfel mit 3 schwarzen Seitenflächen
b) 12 Würfel mit 2 schwarzen Seitenflächen
c) 6 Würfel mit 1 schwarzen Seitenfläche
d) 1 Würfel ohne schwarze Seitenfläche
d. h. insgesamt 27 Würfel. Deren Kantenlänge ist $\frac{1}{3}$ der ursprünglichen Kantenlänge, d. h. also 4 cm.

Aufgabe 12 - V00612
Edgar hat während einer Mathematikarbeit eine Nebenrechnung so flüchtig hingeschrieben, dass er viele Ziffern selbst nicht mehr lesen kann.
Kannst Du die unleserlichen Ziffern herausfinden? Wie lautet die Aufgabe?
(Das Zeichen ? ist anstelle der unleserlichen Ziffern gesetzt).

```
? ? 5 ? ? : ? 9 = ? ? ?
1 ? ?
-----
  1 0 ?
    ? 7
  -----
    2 ? 3
    ? ? ?
    -----
        0
```

Da die Division aufgeht, muss die letzte Zeile 2?3 lauten und der Dividend auf 3 enden. Die Einer von Divisor und Quotient können nur 3 ergeben, wenn der Quotient auf 7 endet. Ebenso wird die 2. Zeile zu 1?5, d. h.

```
? ? 5 ? 3 : ? 9 = ? ? 7
1 ? 5
-----
  1 0 ?
    ? 7
  -----
    2 ? 3
    2 ? 3
    -----
```

Nur für einen Divisor 29 oder 39 ergibt das Produkt mit 7 eine dreistellige Zahl zwischen 200 und 300. Da aber das Produkt der Zehnerstelle des Quotienten mit dem Divisor die zweistellige Zahl ?7 ergeben soll, ist die Zehnerstelle eine 3 und der Divisor 29. Andernfalls wäre das Produkt dreistellig. Mit der Multiplikation von 29 mit 7 und 3 wird somit

```
? ? 5 ? 3 : 2 9 = ? 3 7
1 ? 5
-----
  1 0 ?
    8 7
  -----
    2 0 3
    2 0 3
    -----
```

Die Zeile 10? wird zu 107 und der Dividend zu ??573. Gleichzeitig muss der Quotient mit 5 beginnen, da sonst die 2. Zeile 1?5 nicht möglich wäre. Einsetzen und Rückmultiplikation ergibt die eindeutige Lösung:

```
1 5 5 7 3 : 2 9 = 5 3 7
1 4 5
-----
  1 0 7
    8 7
  -----
    2 0 3
    2 0 3
    -----
```

Aufgaben der Vorolympiade gelöst durch Steffen Polster

3.2 I. Olympiade 1961

3.2.1 I. Runde 1961, Klasse 6

Aufgabe 1 - 010611
a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$

b) $3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49}$

$$\text{a)} \quad 9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{139}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{138}{15} = 9\frac{1}{5}$$

$$\text{b)} \quad 3451\frac{23}{35} - 2868\frac{24}{49} = 3451 - 2868 + \frac{23}{5 \cdot 7} - \frac{24}{7 \cdot 7} = 583 + \frac{23 \cdot 7 - 24 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 7} = 583\frac{41}{245}$$

Aufgabe 2 - 010612
Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war.
Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

Das Verhältnis des Radius des Trefferkreises und der Entfernung des Zieles entspricht der Treffsicherheit. D. h., nach der Aufgabenstellung soll das unbekannte Verhältnis x : 25 m den Verhältnis 1 km : 12500 km gleich sein.

$$x = 25 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ km}}{12500 \text{ km}} = 0{,}002 \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

Der Trefferkreis des Schülers hätte einen Radius von 2 mm.

Aufgabe 3 - 010613
Ein „Trabant“ fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.

a) Wie viel Kilometer hat der „Trabant“ zurückgelegt?
b) Wie viel Liter Treibstoff muss der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

a) Die zurückgelegte Strecke ist gleich 18030 km - 17880 km = 150 km.

b) Für den Benzinverbrauch ergibt sich die Beziehung x : 10,5 l = 350 km : 150 km, d. h. x = 24,5 l.

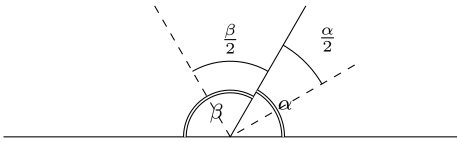
Aufgabe 4 - 010614
Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Bei vier aufeinanderfolgenden Zahlen sind immer zwei gerade und zwei ungerade. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, so dass die Summe der vier Zahlen immer gerade ist.
Diese Summe ist folglich stets durch 2 teilbar. Da die einzige gerade Primzahl, die 2, nicht Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen ist, kann die Summe keine Primzahl sein.

Aufgabe 5 - 010615
Wie viel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll?
Wie hast du die Anzahl ermittelt?

Da es ein Unterschied ist, ob man von einem Ort A nach einem Ort B fährt oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A, braucht man von jeder Station 14 Fahrkarten zu den anderen Stationen, d. h. insgesamt $15 \cdot 14 = 210$ Fahrkarten.

Aufgabe 6 - 010616
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!



α und β seien die zwei Nebenwinkel mit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind somit $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$.
Der Winkel zwischen den zwei Winkelhalbierenden ist damit

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$$

d. h. sie bilden einen rechten Winkel.

Aufgaben der I. Runde 1961 gelöst von Steffen Polster

3.2.2 II. Runde 1961, Klasse 6

Aufgabe 1 - 010621
Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau–Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ „AN-10“ und „IL-18“ Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean.
Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25300 km in 48 h und 7 min, die IL-18 in 44 h und 36 min zurück.
Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten der Strecke und der Flugzeit. Es wird damit für die AN-10:

$$\frac{25300 \text{ km}}{48\frac{7}{60} \text{ h}} = 525{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

und für die IL-18:

$$\frac{25300 \text{ km}}{44\frac{36}{60} \text{ h}} = 567{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Maschinen flogen durchschnittlich rund 526 km bzw. 567 km in einer Stunde.

Aufgabe 2 - 010622
Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1000 km zurück.

a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?
b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

An Tag 1 und 2 wurden $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ des Weges zurückgelegt. Die 1000 km des dritten Tages sind somit $\frac{4}{15}$ des ganzen Weges. $\frac{1}{15}$ des Weges sind folglich 250 km.

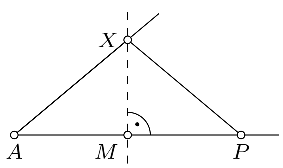
a) Am ersten Tag wurden $6 \cdot 250$ km $= 1500$ km und am zweiten Tag $5 \cdot 250$ km $= 1250$ km zurückgelegt.
b) Die Gesamtstrecke ist 3750 km lang.

Aufgabe 3 - 010623
Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km.“
Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km.“
Robert sagt: „Einer von beiden hat recht.“

Nun wissen wir, dass Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

Rudolf und Emil können nicht Recht haben, da sich ihre Aussagen widersprechen. Deshalb hat keiner von beiden Recht. D. h., dass die Entfernung bis Neustadt ist weder größer noch kleiner als 5 km war, sie ist also genau 5 km.

Aufgabe 4 - 010624
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!



Alle Punkte, die von A und P den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, so schneidet sie den zweiten Schenkel des Winkels im gesuchten Punkt X.

Aufgaben der II. Runde 1961 gelöst von Steffen Polster

3.3 II. Olympiade 1962

3.3.1 I. Runde 1962, Klasse 6

Aufgabe 1 - 020611
Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe.
Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15000 dt Kartoffeln geerntet. $\frac{1}{5}$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $\frac{1}{3}$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern."
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln ernteten
a) die Schüler?
b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?
c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

a) Die Schüler sammelten $\frac{1}{5} \cdot 15000$ dt $= 3000$ dt Kartofellen.
b) Die Bauern mit der Kartoffelkombine sammelten $\frac{1}{3} \cdot 15000$ dt $= 5000$ dt Kartoffeln.
c) Der Rest beträgt $15000 - 3000 - 5000 = 7000$ dt.

Aufgabe 2 - 020612
Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.

a) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?
b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden. Wie groß ist dabei die Einsparung?

a) Jede Maschine spart 2,40 DM, d. h. insgesamt werden $60 \cdot 2{,}40$ DM $= 144$ DM eingespart.
b) Werden 83 Maschinen verwendet, steigt die Einsparung auf $83 \cdot 2{,}40$ DM $= 199{,}20$ DM.

Aufgabe 3 - 020613
Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden."
Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

Wenn Pauls Mutter 40 Jahre ist, ist sein Vater folglich 45 Jahre. Lotte ist $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$ und Emil also 11. Paul ist damit 8 Jahre alt.

Aufgabe 4 - 020614
Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo.
Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

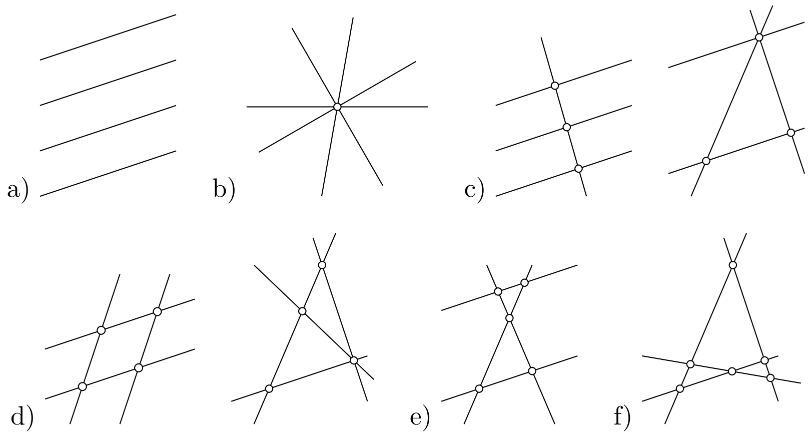
a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Wie heißt der Ingenieur? Wie heißt der Elektriker? Wie heißt der Monteur? Die Lösung ist zu begründen!

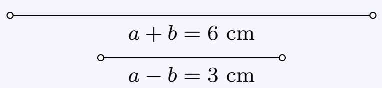
Nach Aussage a) heißt der Ingenieur nicht Baumann, nach Aussage b) ist Herr Hahn kein Elektriker. Nach d) ist Herr Hahn auch kein Ingenieur, d. h., er ist Monteur. Herrn Baumann muss somit Elektriker sein, und folglich Herr Eichler der Ingenieur.

Aufgabe 5 - 020615
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

Die Geraden müssen für a) zueinander parallel sein, bei b) sich alle in einem Punkt schneiden.
Die Bedingung c) wird erfüllt, wenn entweder drei zueinander parallele Geraden von der vierten Geraden geschnitten werden oder wenn ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt wird.
Für die Aufgabe d) können je zwei paarweise parallele Geraden vorliegen oder ein Dreieck von der letzten Gerade in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite geschnitten werden.
Für Bedingung e) müssen zwei Geraden parallel zueinander sein und bei f) dürfen keine der Geraden zueinander parallel sein.



Aufgabe 6 - 020616



Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz. Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Die Summe der beiden Strecken $(a + b)$ und $(a - b)$ ist gleich $(a + b) + (a - b) = (a + a) = 9$ cm.
Damit ist die Strecke $a = 4{,}5$ cm lang und $b = 1{,}5$ cm.

Aufgaben der I. Runde 1962 gelöst von Steffen Polster

3.3.2 II. Runde 1962, Klasse 6

Aufgabe 1 - 020621
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?
b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?
Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

a) Die Strecke entspricht $\frac{66}{80}$ der Erdumkreisung, d. h. $\frac{66}{80} \cdot 41000$ km ≈ 28000 km.
b) 60 Minuten bestehen aus 3600 Sekunden, d. h., in einer Sekunde legt das Raumschiff $\frac{41000}{3600}$ km $\approx 7{,}8$ km zurück.

Aufgabe 2 - 020622
Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, dass der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt.
Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.
In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

Für 30 mm Tiefe benötigt der Bohrer $\frac{30 \text{ mm}}{\frac{1}{4} \text{ mm}} = 120$ Umdrehungen und somit ein halbe Minute = 30 s.

Aufgabe 3 - 020623
Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$ so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Die gesuchte Zahl sei $10a + b$, wobei a eine Ziffer von 1 bis 9 und b eine Ziffer von 0 bis 9 sind. Es ergibt sich die Gleichung

$$10b + a = 4\frac{1}{2} \cdot (10a + b) = 45a + 4\frac{1}{2}b = 45a + 4{,}5b \quad \rightarrow \quad 44a = \frac{11}{2}b$$

und somit $8a = b$.
Da b kleiner 10 ist und a mindestens 1 sein muss, folgt eindeutig $a = 1$ und $b = 8$. Die gesuchte Zahl ist 18.

Aufgabe 4 - 020624
Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt:
„Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater.“

Wie alt ist Brigitte? Wie alt sind ihre Eltern? Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

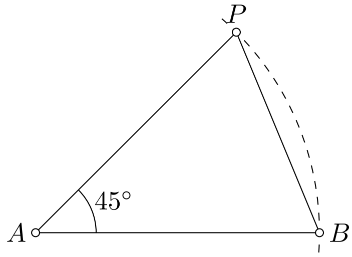
Brigitte sei a Jahre alt. Dann ist ihre Mutter $3a$ und ihr Vater $3a + 4$ Jahre alt und somit

$$a + 3a + (3a + 4) = 7a + 4 = 88 \quad \Rightarrow \quad 7a = 84$$

Die Lösung ist $a = 12$, womit Brigitte 12 Jahre alt ist, ihre Mutter 36 Jahre und ihr Vater 40 Jahre.

Aufgabe 5 - 020625
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man P und B, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?



Die Punkte A, B und P bilden ein Dreieck, bei dem die zwei Winkel bei B und P gleich groß sind. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist also gleichschenklig, die Basis ist BP und die Schenkel sind $AB = AP$. Damit findet man den Punkt P, indem man die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem zweiten Schenkel abträgt.

Aufgaben der II. Runde 1961 gelöst von Steffen Polster

3.4 III. Olympiade 1963

3.4.1 I. Runde 1963, Klasse 6

Aufgabe 1 - 030611
Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wie viel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?
b) Wie viel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

a) Ein Drittel mehr als 15 Milliarden DM sind $\frac{4}{3} \cdot 15$ Milliarden $=$ 20 Milliarden DM, die 1962 für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke ausgegeben wurden.

b) Im Jahr 1958 waren es $\frac{15000000000}{17000000}$ DM $\approx$ 882 DM, d. h. rund 900 DM.
Im Jahr 1962 waren es dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.

Aufgabe 2 - 030612
Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager.
Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mussten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wie viel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, wurde, wenn der Bus $\frac{9}{10}$ der Strecke in 30 Minuten fährt, eine Strecke von 18 km zurückgelegt. Das sind 36 km in einer Stunde.

Aufgabe 3 - 030613
Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, dass unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

a) Da jede zweite natürliche Zahl gerade ist, muss unter den den drei Zahlen mindestens eine durch 2 teilbar sein, d. h., die zweistellige Zahl ist keine Primzahl.

b) Da jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, muss eine der drei Zahlen ein Vielfaches von 3 sein.
Für eine Primzahl größer als 3, also mindestens 5, gilt eine analoge Aussage nicht.
Die gesuchten Primfaktoren sind 2 und 3.

Aufgabe 4 - 030614
Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade, ebenso die Summe zweier ungerader Zahlen. Eine ungerade Summe entsteht nur, wenn ein Summand gerade und der andere ungerade ist.

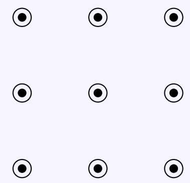
Nimmt Peter eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine gerade Anzahl zurück.
Wählt der Vater eine gerade Anzahl, bleibt eine gerade Anzahl übrig. Wählt er ”ungerade”, bleibt eine ungerade Anzahl zurück.

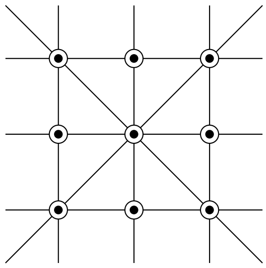
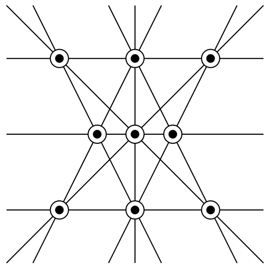
Nimmt Peter eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand, bleibt eine ungerade Anzahl zurück. Wählt der Vater nun eine gerade Anzahl, bleibt eine ungerade Anzahl übrig. Wählt er "ungerade", bleibt eine gerade Anzahl zurück.

Aufgabe 5 - 030615

a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, dass auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!

b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, dass man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen.
Fertige auch dazu eine Zeichnung an!



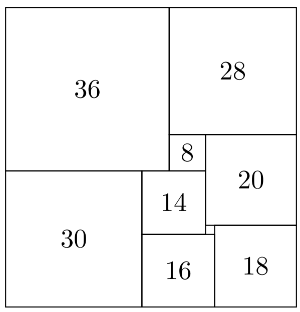
a)  b) 

Aufgabe 6 - 030616
Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen
$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm, $b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm, $c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.
Füge diese Quadrate so zusammen, dass sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

Addiert man die Flächeninhalte der 9 Quadrate, so hat das Rechteck einen Flächeninhalt von

$$A = (2^2 + 8^2 + 14^2 + 16^2 + 18^2 + 20^2 + 28^2 + 30^2 + 36^2)\ \text{mm}^2 = 4224\ \text{mm}^2$$

4224 hat die Primfaktoren 2, 3 und 11, da $4224 = 2^7 \cdot 3 \cdot 11$ gilt. Geht man von natürlichen Zahlen als Längen der Rechteckseiten aus und beachtet dass jede Seite mindestens 36 mm lang sein muss (sonst würde das 1. Quadrat nicht hineinpassen), so könnten die 44 mm und 96 mm bzw. 48 mm und 88 mm bzw. 64 mm und 66 mm lang sein.



Eine Seitenlänge 44 mm ist nicht möglich, da man zwar mit dem 36 mm-Quadrat und dem 8 mm-Quadrat eine Rechteckseite erhält, aber die entstehende Lücke am 8 mm-Quadrat nicht mehr schließen kann. Eine ähnliche Überlegung schließt die Seitenlänge 48 mm aus (30 mm-Quadrat und 18 mm-Quadrat).

Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen 64 mm und 66 mm.
Setzt man die zwei großen Quadrate (36 mm, 30 mm) an eine Seite, so ergibt sich mit etwas Probieren eine gesuchte Lösung (siehe Abbildung).

Aufgaben der I. Runde 1963 gelöst von Steffen Polster

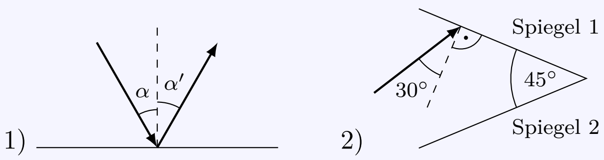
3.4.2 II. Runde 1963, Klasse 6

Aufgabe 1 - 030621
Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder
b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km mit Kopfhörern abhört?
Begründe deine Antwort.

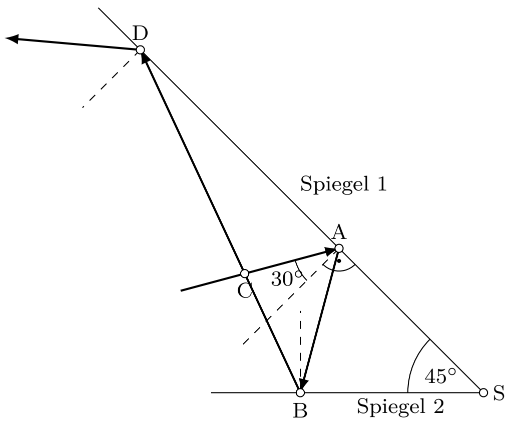
Da die Schallwellen für eine Strecke von 2 m rund $\frac{1}{170}$ Sekunde benötigen, die Rundfunkwellen aber für 1000 km nur $\frac{1}{300}$ Sekunde brauchen, hört der Rundfunkhörer den Redner etwas früher.

Aufgabe 2 - 030622



Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?



a) Die folgende Zeichnung stellt den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei D reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft. Die kann man wie folgt beweisen:

Der Einfallswinkel bei A beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\angle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BAS$ für den Winkel $\angle ABS$:

$$\angle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\angle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck $\triangle BSD$ gilt dann:

$$\angle BDS = 180° - \angle ASB - \angle ABS - \angle ABC = 180° - 45° - 75° - 30° = 30°$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\angle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.

b) Gesucht ist Winkel $\angle BCA$. Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich:

$$\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 2\Delta 30° - 30° = 90°$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

Aufgabe 3 - 030623
Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

Man schlägt um A und um B Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muss.
Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke AB, und diese lässt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

Aufgabe 4 - 030624
Wie viel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden?
(Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch ein Streichholz getrennt werden.)

Man erhält insgesamt 400 Quadrate.
In jeder horizontalen Reihe liegen 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ horizontal liegende Streichhölzer.
In jeder vertikalen Reihe liegen ebenfalls 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ vertikal liegende Streichhölzer. Daher werden insgesamt 840 Streichhölzer benötigt.

Lösungen der II. Runde 1963 übernommen aus [5]

3.5 IV. Olympiade 1964

3.5.1 I. Runde 1964, Klasse 6

Aufgabe 1 - 040611
In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m^3 Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben.
Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wie viel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

Es wären 1728 Erdarbeiter erforderlich.

Aufgabe 2 - 040612

```
J U N G E W
U N G E W E
N G E W E L
G E W E L T
```

Auf wie viel verschiedene Weisen kann man in der nebenstehenden Tabelle die Wörter "Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Man kann die Wörter „Junge Welt“ ohne Überspringen genau 56 mal lesen.

Anmerkung: Von jedem Buchstaben, der nicht in der letzten Zeile oder in der letzten Spalte steht, kann man entweder zum rechts daneben stehenden Buchstaben (Schritt a) oder zum darunter stehenden Buchstaben (Schritt b) weitergehen.
Jeder Möglichkeit, das Wort „Junge Welt“ in der angegebenen Weise zu lesen, ist also eine Folge von Schritten zugeordnet. z. B. ist a a b a b a b a. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 Buchstaben a und 3 Buchstaben b. Diese ist $\frac{(5+3)!}{5!\cdot 3!} = 56$.

Aufgabe 3 - 040613
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d. h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen.
Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

Aufgabe 4 - 040614
Zerlege die Zahl 390 in drei Summanden, von denen der zweite dreimal so groß wie der erste und der dritte $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie der erste ist!

Der erste Summand ist doppelt so groß wie seine Hälfte, der zweite 6 mal und der dritte 5 mal so groß wie diese Hälfte. Insgesamt besteht die Summe 390 also aus 13 Summanden, von denen jeder halb so groß wie der gesuchte erste Summand ist. Auf diese Weise findet man die drei Summanden 60, 180 und 150.

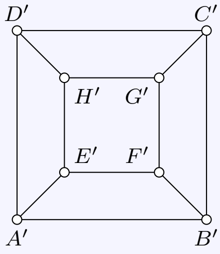
Aufgabe 5 - 040615
Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren

durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5 aufweist.

Man untersucht die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest 5 lassen, also 5, 11, 17, ... Dann streicht man von diesen die Zahlen, die bei Division durch 5 nicht den Rest 4 lassen u.s.w.

Man findet dadurch 59 als kleinste natürliche Zahl, die den Forderungen genügt.

Aufgabe 6 - 040616



Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Die Bilder seiner Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H sind mit A', B', C', D', E', F', G', H' bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite AB ist 5 cm, die Seite EF 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf.

Lösungen der I. Runde 1964 übernommen aus [5]

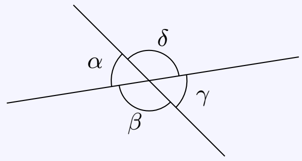
3.5.2 II. Runde 1964, Klasse 6

Aufgabe 1 - 040621
Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, dass der eine Teil fünfmal so lang wie der andere ist.
Wie lang werden die Teile?

Ansatz: $x + 5x = 10$ ergibt $8\frac{1}{3}$ m und $1\frac{2}{3}$ m.

Aufgabe 2 - 040622

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?



Über den Vollwinkel wird $\delta = 126°$. Mit den Beziehungen über Scheitel- und Nebenwinkel folgt dann $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$, $\gamma = 54°$.

Aufgabe 3 - 040623
Ein rechteckiger Schulgarten soll eingezäunt werden. Auf jeder der kürzeren Seiten, die jeweils je 40 m lang sind, stehen 21 Zementsäulen, auf den längeren jeweils 15 mehr. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Säulen ist gleich. Zwischen zwei dieser Säulen wird ein Tor eingebaut.

Wie hoch sind die Kosten, wenn 1 m Zaun 9,50 MDN, 1 Säule 11,00 MDN und das Tor 64,00 MDN kosten?
Die Dicke der Säulen wird dabei nicht berücksichtigt.

218 m Zaun kosten 2071 MDN, 1 Tor kostet 64 MDN und 110 Zementsäulen kosten 1210 MDN. In der Summe sind dies 3345 MDN.

Aufgabe 4 - 040624
Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf:

"In unserer Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar.
Wie viel Schüler besuchen die Klasse?"

Aus der ersten Angabe erfolgt, dass die Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler haben kann.
Die letzte Angabe schränkt diese Möglichkeit auf die Zahlen 30 bzw. 36 ein. Von diesen Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen.

Lösungen der II. Runde 1964 übernommen aus [5]

3.6 V. Olympiade 1965

3.6.1 I. Runde 1965, Klasse 6

Aufgabe 1 - 050611
Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?
b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

a) Der eine Radfahrer hat nach $2\frac{1}{2}$ Stunden insgesamt $2\frac{1}{2} \cdot 20 = 50$ km, der andere in der gleichen Zeit $2\frac{1}{2} \cdot 15 = 37{,}5$ km zurückgelegt.
Nach $2\frac{1}{2}$ Stunden beträgt daher ihre Entfernung voneinander (in Kilometern) $119 \cdot (50 + 37{,}5) = 31{,}5$.

b) In $\frac{1}{5}$ Stunde, also in 12 min fährt der eine Radfahrer 3 km, der andere 4 km. Beide legen also in 12 min zusammen 7 km zurück. Daher treffen sie einander nach $\frac{119}{7} \cdot 12 = 17 \cdot 12$ min.
In dieser Zeit hat der eine Radfahrer $17 \cdot 3$ km, der andere $17 \cdot 4$ km zurückgelegt. Der Treffpunkt liegt also 51 km von der einen und 68 km von der anderen Stadt entfernt.

Aufgabe 2 - 050612
Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:
Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

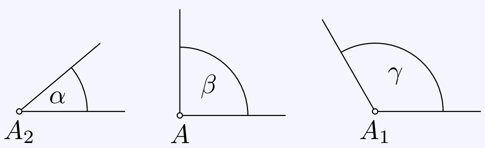
Bezeichnet man die Anzahl der Zehner mit a und die der Einer mit b, dann lautet die erste Zahl $(10a+b)$ und die zweite $(10b+a)$. Nach Aufgabe gilt:

$$a + b = 10 \tag{1}$$
$$2(10a + b) = (10b + a) + 1 \tag{2}$$

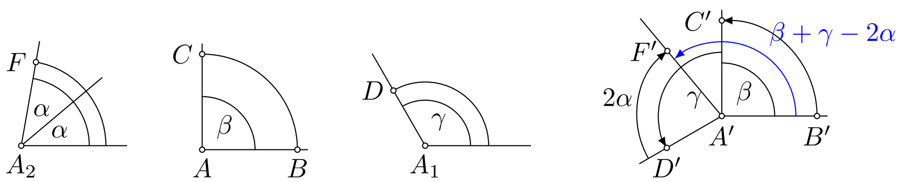
Die linke Zahl in (2) ist gerade. Wäre a gerade, so wäre die rechte Zahl ungerade. Also muss a ungerade und damit (wegen $a + b = 10$) auch b ungerade sein.
Die rechte Seite von (2) ist höchstens gleich $10b + 10$. Wäre a größer oder gleich b, dann wäre die linke Seite mindestens gleich $2(10b + b) = 22b = 10b + 12b$.

Das ist aber (wegen $b \geq 1$) sicher größer als $10b + 10$, daher muss b größer als a sein.
Es kommen als Lösung mithin nur die beiden Zahlenpaare $a = 1$; $b = 9$ und $a = 3$; $b = 7$ in Betracht. Durch Probieren findet man sofort, dass $a = 3$; $b = 7$ das einzige Zahlenpaar ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die gesuchte Zahl lautet also 37.

Aufgabe 3 - 050613
Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



a) siehe Abbildung



b) Konstruktionsbeschreibung:
Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt A'. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt A und um A' je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius.
Der Kreisbogen um A schneidet die Schenkel des Winkels β in den Punkten B und C. Der Kreisbogen um A' schneidet den Strahl im Punkt B'.
Dann schlage ich um B' mit BC als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch B' in C' schneidet. Ich verbinde A' mit C'.
Dann ist $\angle B'A'C'$ der verlangte Winkel β.

Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt A' an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel γ an. Dabei erhalte ich (siehe Abbildung) den Punkt D'.
Schließlich trage ich in A' an $A'D'$ im Uhrzeigersinn den Winkel 2α an (der Winkel 2α wurde vorher in der für den Winkel $(\beta + \gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt F'.
Der Winkel $\angle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta + \gamma - 2\alpha)$.

Aufgabe 4 - 050614
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, dass ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$.
Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genau soviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

Lösungen der I. Runde 1965 übernommen aus [5]

3.6.2 II. Runde 1965, Klasse 6

Aufgabe 1 - 050621
In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1920 Tische.
Wie viel Tische wurden im Juni und wie viel im Dezember hergestellt?

Bezeichnet man die Anzahl der im Januar produzierten Tische mit x, so kann man folgende Aufstellung anfertigen:

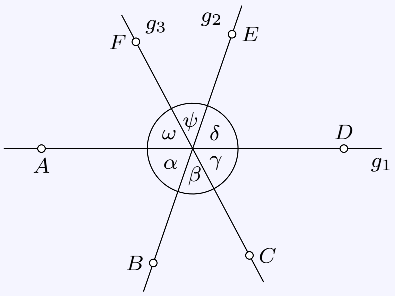
Monat	Anzahl der produzierten Tische
Januar	x
Februar	$x + 10$
März	$x + 20$
April	$x + 30$
...	
Dezember	$x + 110$
	$12x + 660$

Wäre die Produktion nicht gesteigert worden, d. h. wäre in jedem Monat die gleiche Anzahl wie im Januar produziert werden, so hätte die Anzahl der im ganzen Jahr produzierten Tische 1960 - 660 = 1260 betragen.
Die Anzahl der im Januar angefertigten Tische beträgt also 1260 : 12 = 105 und daher die der im Juni hergestellten Tische 105 + 50 = 155 und die der im Dezember fabrizierten Tische 105 + 110 = 215.

Aufgabe 2 - 050622

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α, β, γ, δ, ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) α dreimal so groß wie β ist?



Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360°$
und wegen (1) $\alpha + \beta = 108°$ also wegen (2) $4\beta = 108°$, d. h. $\beta = 27°$ und daher wegen (2) $\alpha = 81°$.

Weiter sind Scheitelwinkel, d. h. $\delta = \alpha = 81°$ und $\psi = \beta = 27°$. Nach der Nebenwinkelbeziehung wird $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = \omega = 72°$.

Aufgabe 3 - 050623
Gesucht ist eine natürliche Zahl b, die folgenden Bedingungen genügt:
(1) $40 < b < 600$,
(2) b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
(3) b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
(4) b lässt bei der Division durch 11 den Rest 6.
Wie viel solche Zahlen gibt es?

Wegen (2) ist b auch durch 36 teilbar. Man muss daher 36 mit einer natürlichen Zahl multiplizieren, um b zu erhalten.
Dieser Faktor kann wegen (1) nicht 0 bzw. 1 und wegen (3) nicht durch 2 bzw. 3 teilbar sein. Wegen (4) scheidet ferner 11 als Faktor aus.
Es kommen daher wegen $600 = 36 \cdot 16 + 24$ und auf Grund der obigen Überlegungen nur die Zahlen 5, 7 und 15 als Faktoren in Frage. Zu untersuchen sind also nur noch die Zahlen 180, 252 und 468, die sämtlich (l), (2) und (3) erfüllen.
Von ihnen erfüllt nur 468 auch (4). Daher ist $b = 468$ die einzige Lösung.

Aufgabe 4 - 050624
Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt.
Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

(1) Es ist wahr, dass Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.
(2) Es ist falsch, dass Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.
(3) Es ist nicht wahr, dass keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.
(4) Es ist wahr, dass Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.
(5) Es ist unwahr, dass Hans größer als Monika ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

Es soll festgestellt werden:
a) Welche Schüler sind gleich groß?
b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)

Bezeichnet man die Größe jedes der Schüler (in cm gemessen) mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so kann man die Aussagen (1) bis (6) in folgender Form schreiben:

(1) $I = M - 2$
(2) $E = G$
(3) H ist größer als der Kleinste von (E,R,M,I,J,G) also $H >$ Minimum(E,R,M,I,J,G)
(4) $H < J < I$
(5) $H \leq M$
(6a) $M = G + 2$
(6b) $M > J$

Aus (1) und (4) folgt (7) $H < J < I < M$. Aus (1) und (6a) folgt (8) $I = G$. Aus (2) und (8) folgt (9) $E = G = I$. Aus (9) und (7) folgt (10) $H < J < E = G = I < M$ und aus (5) und (10) folgt (11) $R < H$.
Daher lauten die Antworten:
a) Eva, Gerd und Ingrid sind gleich groß. Außer ihnen gibt es keine zwei Schüler, die gleich groß sind.
b) Monika, Eva, Gerd, Ingrid, Jürgen, Hans, Renate.

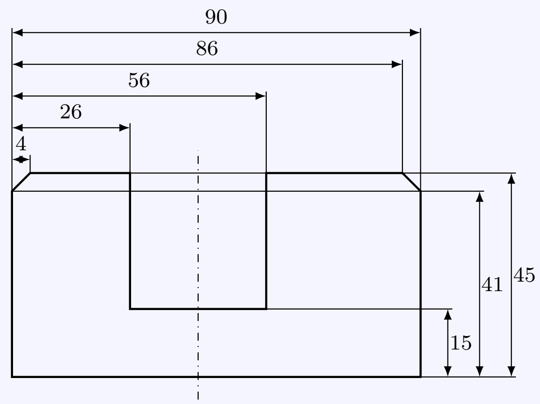
Lösungen der II. Runde 1965 übernommen aus [5]

3.7 VI. Olympiade 1966

3.7.1 I. Runde 1966, Klasse 6

Aufgabe 1 - 060611

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)



Aus einem Rechteck mit den Maßen 90 mm und 45 mm werden in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge 30 mm und an den oberen Ecken zwei rechtwinklige Dreiecke (Katheten je 4 mm) herausgeschnitten. Daraus ergibt sich:

$$A = 45 \cdot 90 - 30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 3134 \text{ mm}^2$$

Der Flächeninhalt der Figur beträgt rund 31 cm^2.

Aufgabe 2 - 060612

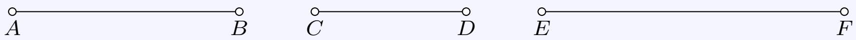
Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften, die eine kostet 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 MDN.
Wie viel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

a sei die Anzahl der Hefte zu 8 Pf und b die Anzahl der Hefte zu 15 Pf. Dann gilt

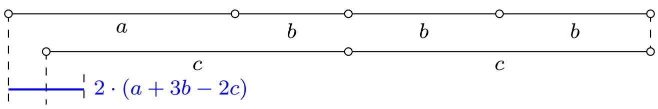
$$a \cdot 8 + b \cdot 15 = 131 \qquad ; \qquad a + b = 12 \quad \text{oder} \quad a = 12 - b$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, wird $8 \cdot (12 - b) + 15b = 131$. Daraus gewinnt man $b = 5$ und weiter $a = 7$.
Heinz kauft 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf.

Aufgabe 3 - 060613



Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (a + 3b - 2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Auf einer Geraden wird die Strecke AB abgetragen und an diese nacheinander dreimal die Strecke CD. Vom erreichten Endpunkt wird die Strecke EF zweimal in entgegengesetzter Richtung abgetragen.

Die entstehende Strecke zwischen dem Startpunkt und dem jetzt erreichten Punkt ist dann $a + 3b - 2c$ lang. Diese Strecke wird verdoppelt werden und hat die gesuchte Länge (in der Abbildung blau).

Aufgabe 4 - 060614
In einem Haus wohnen genau die Mietsparteien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Ilgner, Keies, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Richter und Pätzold.
Im Erdgeschoss und in jeder Etage wohnen genau zwei Mietsparteien, außerdem ist folgendes bekannt:

Albrechts wohnen zwei Stockwerke tiefer als Beckers.
Beckers wohnen sechs Stockwerke höher als Conrads.
Familie Fritsche wohnt neben Familie Geißler.
Familie Männig wohnt vier Stockwerke höher als Familie Nolte und zwei Stockwerke tiefer als Familie Fritsche.
Ein Stockwerk über Familie Nolte wohnt Familie Oswald.
Familie Albrecht wohnt drei Etagen über Familie Richter,
und Familie Pätzold wohnt fünf Stockwerke unter Familie Geißler.

a) Wie viel Stockwerke hat das Haus?
b) In welchem Stockwerk wohnt Familie Albrecht?

Die 16 Mietsparteien werden durch Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnet.
a) Da jeweils zwei Familien eine Etage bewohnen, hat das Haus neben dem Erdgeschoss noch 7 Stockwerke.

b) Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$a+2=b \quad (1) \quad ; \quad c+6=b \quad (2) \quad ; \quad f=g \quad (3) \quad ; \quad n+4=m \quad (4)$$

$$m+2=f \quad (5) \quad ; \quad n+1=o \quad (6) \quad ; \quad r+3=a \quad (7) \quad ; \quad p+5=g \quad (8)$$

Aus (3) bis (6) folgt $n+6=o+5=m+2=f=g$. Da außerdem (8) gilt, müssen Pätzold und Oswald auf der gleichen Etage wohnen ($o=p$).
Weiterhin ergeben die Gleichungen (1), (2), (7) $c+6=r+5=a+2=b$. c und n können damit nur im Erdgeschosse oder in der 1. Etage wohnen.

c und n können aber nicht in der gleichen Etage wohnen, da dann auch r, o und p unmittelbare Nachbarn wären. Wohnt im Erdgeschoss n, dann müssten in der 1. Etage o, p und c wohnen, was nicht möglich ist. Damit wohnt Nolte im 1. Stock und Conrad im Erdgeschoss und Albrecht folglich im 4. Stock.

Aufgaben der I. Runde 1966 gelöst von Steffen Polster

3.7.2 II. Runde 1966, Klasse 6

Aufgabe 1 - 060621
Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke. Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Bezeichnet man die Länge der zweiten Teilstrecke mit a, dann hat die erste Teilstrecke die Länge $2a$ und die dritte Teilstrecke die Länge $6a$. Die Länge der Gesamtstrecke beträgt also

$$a + 2a + 6a = 9a$$

Das sind laut Aufgabe 20 m. Für die Länge der zweiten Teilstrecke gilt daher $20 : 9 = \frac{20}{9}$, für die Länge der ersten Teilstrecke $\frac{40}{9}$ und für die Länge der dritten Teilstrecke $\frac{40}{3}$.
Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind also $2\frac{2}{9}$ m, $4\frac{4}{9}$ m und $13\frac{1}{3}$ m.

Aufgabe 2 - 060622
Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:

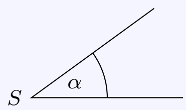
(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a lässt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muss b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen.

Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein.
Auf Grund der obigen Überlegungen können für den Faktor b nur die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage. Es sind also noch die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen. Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4).

420; 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen. Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

Aufgabe 3 - 060623
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!



Der geforderte Winkel lässt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren.
Der rechte Winkel wird wie üblich konstruiert. Dann halbiert man den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18°$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$.

Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

Aufgabe 4 - 060624
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 2400 \text{ cm}^2$.
Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400 \text{ cm}^2 = 960000 \text{ cm}^2 = 96 \text{ m}^2$.
Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. Die unbekannte Breite betrage b Meter, dann gilt $10b = 96$, woraus man $b = 9{,}6$ erhält.
Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.

Lösungen der II. Runde 1966 übernommen aus [5]

3.8 VII. Olympiade 1967

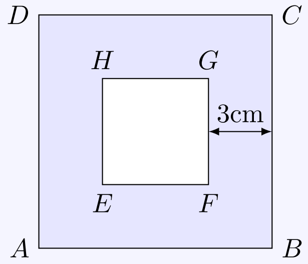
3.8.1 I. Runde 1967, Klasse 6

Aufgabe 1 - 070611
Zu einem Straßenbahnhof einer gewissen Großstadt gehören insgesamt 83 Straßenbahnwagen. Davon sind genau 46 Anhänger. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich insgesamt 8 Triebwagen mit je zwei Anhängern und 23 Triebwagen mit je einem Anhänger im Einsatz.
Welches ist die Anzahl aller Triebwagen und Anhänger, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht im Einsatz befinden?

Die Anzahl der Anhänger sei a, die der Triebwagen t. Dann gilt nach Aufgabenstellung $a+t = 46+t = 83$. Damit gibt es 37 Triebwagen.
Zu dem bestimmten Zeitpunkt sind $8 + 23 = 31$ Triebwagen und $16 + 23 = 39$ Anhänger im Einsatz. Folglich sind zu diesem Zeitpunkt 7 Anhänger und 6 Triebwagen nicht im Einsatz.

Aufgabe 2 - 070612

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen AC, BD, EG und FH einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm^2.
Berechne die Längen der Strecken BC und GH!



Für die Seiten gilt $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$ und nach Aufgabenstellung $a = b + 6$ cm.

Die Differenz der Flächeninhalte der zwei Quadrate ist somit (Angaben in cm^2):

$$A_{\text{groß}} - A_{\text{klein}} = a^2 - b^2 = (b + 6)^2 - b^2 = b^2 + 12b + 36 - b^2 = 12b + 36 = 96$$

Daraus folgt sofort, dass $b = 5$ cm ist und $a = b + 6 = 11$ cm ist.

Aufgabe 3 - 070613
In einem Speicher wurden insgesamt 2170 kg Getreide gelagert. Es waren genau 11 Sack Weizen zu je 80 kg, 6 Sack Gerste und 12 Sack Mais. Jeder Sack Gerste enthielt 5 kg mehr als jeder Sack Mais.
Wie viel Kilogramm Mais wurden im Speicher gelagert?

Die Masse des Weizens ist $11 \cdot 80$ kg $= 880$ kg, so dass die Masse von Gerste (g je Sack) und Mais (m je Sack) zusammen 1290 kg beträgt. Da $g = m + 5$ gilt, wird für beide (in Kilogramm):

$$6g + 12m = 1290 \qquad ; \qquad 6 \cdot (m + 5) + 12m = 1290 = 18m + 30$$

Daraus ergibt sich für den Mais je Sack $m = 70$ kg und somit für die Gerste je Sack $g = 75$ kg.
Da 12 Säcke Mais vorhanden sind, ist deren Gesamtmasse $12 \cdot 70$ kg $= 840$ kg.

Aufgabe 4 - 070614
Unter der Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (geschrieben $n!$) verstehen wir das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Es gilt zum Beispiel: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Ermittle, auf welche Ziffer die Summe $s = 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ endet!

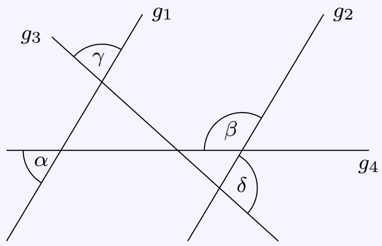
Die ersten Fakultäten der Summe enden auf $3! = 6$ und $4! = 24$ auf 4.
5! und alle höheren Fakultäten enden immer auf 0, da in ihnen die Faktoren 2 und 5 vorkommen.
Die Summe s hat somit, da $4 + 6 = 10$ ist, die Null als Endziffer.

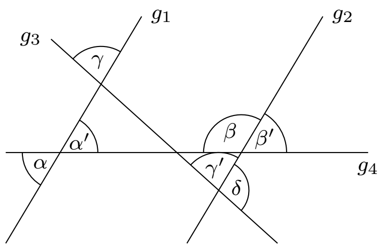
Aufgaben der I. Runde 1967 gelöst von Steffen Polster

3.8.2 II. Runde 1967, Klasse 6

Aufgabe 1 - 070621

Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle δ!





Es gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung
$\alpha = \alpha'$ als Scheitelwinkelpaar
$\beta + \beta' = 180°$ als Nebenwinkelpaar mithin $\beta' = 180° - \beta = 50°$, also $\beta' = \alpha$. Daraus folgt $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen und $\gamma' + \delta = 180°$ als Nebenwinkel.
Damit wird $\delta = 180° - \gamma' = 110°$.

Aufgabe 2 - 070622
Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muss, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muss der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das kgV von 210 und 330:

$$\begin{aligned} 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 330 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \\ kgV &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 \end{aligned}$$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muss, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher 2310 cm = 23,10 m lang.

Probe:
2310 : 210 = 11 und 2310 : 330 = 7. Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

Aufgabe 3 - 070623
Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Abgaben der Aufgabe

(1) $J > G$
(2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$. Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$, also $J < B$.
Daher gilt $R > J > G > E$. Die gesuchte Reihenfolge ist: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

Aufgabe 4 - 070624
Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben:

8 Schüler $= \frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe. Daraus folgt:
4 Schüler $= \frac{4}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe und
36 Schüler $= \frac{9}{9}$, (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe)

Laut Aufgabe gilt weiterhin: 36 Schüler $= \frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe also
480 Schüler $= \frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe). Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

Lösungen der II. Runde 1967 übernommen aus [5]

3.9 VIII. Olympiade 1968

3.9.1 I. Runde 1968, Klasse 6

Aufgabe 1 - 080611
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m^2. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

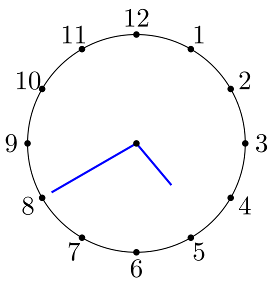
a sei die Länge der Quadratseiten, b die bekannte und c die gesuchte Rechteckseite. Dann gilt (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):

$$A_Q + A_R = a^2 + b \cdot c \Rightarrow 3000 = 30^2 + 30 \cdot c \Rightarrow c = 70$$

Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.

b) siehe Abbildung. Die Quadratseite mit 30 m Länge muss in der Abbildung 3000 cm : 2000 = 1,5 cm groß sein.

Aufgabe 2 - 080612
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!



Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger steht zwischen der 4 und 5.
In 60 Minuten bewegt sich der kleine Zeiger jeweils 30°. Zum Zeitpunkt 16:40 Uhr ist er somit $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$ von der 4 in Richtung 5 gewandert, bzw. er steht noch 10° vor der 5.

Der Winkel zwischen der 5 und der 8 ist ein rechter Winkel, da zwischen zwei Stundenangaben jeweils 30° liegen.
Damit ist der Winkel zwischen dem großen und dem kleinen Zeiger $90° + 10° = 100°$.

Aufgabe 3 - 080613
In einem Ferienlager "Junger Mathematiker" kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für seine Freunde folgende Waren ein:
13 Flaschen Limonade zu je 0,21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.

Rainer soll insgesamt 10,43 M bezahlen. "Das kann nicht stimmen", sagt er. Dabei wusste er noch gar nicht, wie viel jedes Lachsbrötchen kostet.
Weshalb konnte er seiner Behauptung trotzdem sicher sein?

Die Limonade kostet insgesamt $13 \cdot 0{,}21$ M = 2,73 M. Für die sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen würde Rainer damit 10,43 M - 2,73 M = 7,70 M bezahlen.

Sowohl die Anzahl 6 der Bockwürste und die Anzahl 9 der Lachsbrötchen ist durch 3 teilbar. Dann muss auch der Preis 7,70 M ihrer Summe durch 3 teilbar sein.
Das ist nicht der Fall, so dass die Behauptung nicht richtig sein kann.

Aufgabe 4 - 080614
Von drei Pionieren einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

(1) Sie haben die Vornamen Alex, Bodo und Dietmar.
(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.
(3) Alex heißt nicht Neumann.
(4) Der Pionier mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Pionier mit dem Vornamen Bodo.
(5) Die Mutter des Pioniers Neumann ist eine geborene Mittag.
(6) Die Mutter Bodos trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Pioniere zugeordnet sind!

Bodo kann nach den Aussagen (5) und (6) nicht Neumann heißen. Da Bodo auch nicht Neumann heißt (Aussage 4), muss sein Nachname Siebert sein.

Damit folgt aus (3), dass Alex Keller heißen muss und somit der dritte Pionier den Namen Dietmar Neumann hat.

Aufgaben der I. Runde 1968 gelöst von Steffen Polster

3.9.2 II. Runde 1968, Klasse 6

Aufgabe 1 - 080621
In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4.
Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$.
Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

Die Gesamtschülerzahl n muss ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu. $\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3, denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

Aufgabe 2 - 080622
Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im "Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge.
Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt 3 10 und die der kürzesten 3 14 von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.
Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.
Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$. Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.
Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g$$

dann ergibt sich:

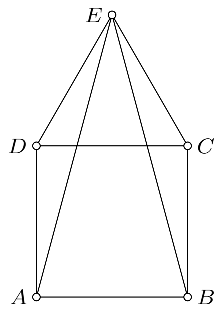
$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g$$

Daraus folgt: $\frac{1}{70}g = 4$ und demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.
Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe $72 + 64 = 136$, $72 = 64 + 8$, $84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60)$ und $60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60)$.

Aufgabe 3 - 080623
Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben.
Der Punkt E des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

Im Dreieck $\triangle AED$ gilt: (siehe Abbildung) $AD = DE$ (nach Konstruktion)
(1) Daraus folgt $\angle DAE = \angle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 150°$; ($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$) denn $\angle EDC = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\angle CDE = 90°$ (Winkel im Quadrat).



Aus (1), (2) und $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\angle AED = 15°$. Entsprechend ist $\angle BEC = 15°$, also $\angle AEB = \angle DEC - \angle AED - \angle BEC = 30°$.

Aufgabe 4 - 080624
Drei Freunde bereiten sich auf die "Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

a) Nach wie viel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, dass Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wie viel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

(a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.

Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das kgV von 225, 300 und 180 beträgt 900, und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

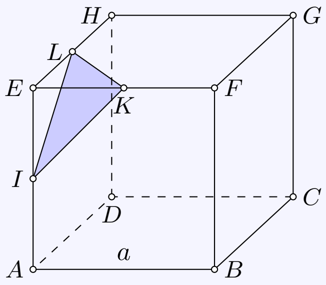
(b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

Lösungen der II. Runde 1968 übernommen aus [5]

3.10 IX. Olympiade 1969

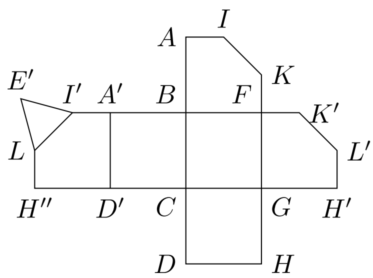
3.10.1 I. Runde 1969, Klasse 6

Aufgabe 1 - 090611



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist. Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Ein mögliches Netz:



Aufgabe 2 - 090612

In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$$1\tfrac{1}{2} \text{ Hühner legen in } 1\tfrac{1}{2} \text{ Tagen } 1\tfrac{1}{2} \text{ Eier}$$

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

Wenn $1\frac{1}{2}$ Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier legen, so legen sie in 6 Tagen das Vierfache ($1\frac{1}{2} \cdot 4 = 6$), d.h. 6 Eier.
7 Hühner sind das $\frac{14}{3}$-fache von $1\frac{1}{2}$ Hühner, da $\frac{14}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 7$ ist. Damit legen die 7 Hühner in 6 Tagen $\frac{14}{3} \cdot 6 = 28$ Eier.

Aufgabe 3 - 090613

In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.
In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet.
Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.

Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

Die Anzahl der eingesandten Lösungen sein n. Dann gilt:

Genau vier sind richtig, d.h $\frac{3}{25}n$, genau zwei sind richtig, d.h. $\frac{6}{25}n$, genau eine ist richtig, d.h. : $4 \cdot \frac{3}{25}n$ und keine Lösung richtig sind 240. Die Summe ergibt

$$n = \frac{3}{25}n + \frac{6}{25}n + 4 \cdot \frac{3}{25}n + 240 = \frac{21}{25}n + 240 \qquad \to \qquad \frac{4}{25}n = 240$$

Somit erfolgten insgesamt $n = 240 \cdot \frac{25}{4} = 1500$ Einsendungen.

Aufgabe 4 - 090614
Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240 M.
Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240 M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben.
Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4 M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder.

Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

Die Anzahl Schüler der Arbeitsgemeinschaft sei x. Bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes erhält jeder somit $a = \frac{240}{x}$, womit x ein Teiler von 240 sein muss.

Nehmen 3 Mitgliedern nicht teil so erhöht sich der Anteil für aller übrigen Mitglieder auf $a + 4$, d.h. es ist $a + 4 = \frac{240}{x-3}$, womit auch $x - 3$ ein Teiler von 240 ist.

Die Teiler x von 240, für die auch $x - 3 > 0$ ist, sind

$$4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240$$

Nur die Paare $(8; 5)$ und $(15; 12)$ sind Paare der Form $(x; x - 3)$. Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt: $\frac{240}{x} + 4 = \frac{240}{x-3}$.
Setzt man die zwei Paare ein, so zeigt sich, dass nur $x = 15$, $x - 3 = 12$ die letzte Gleichung erfüllen. Die Arbeitsgemeinschaft hatte somit 15 Mitglieder.

Aufgaben der I. Runde 1969 gelöst von Steffen Polster

3.10.2 II. Runde 1969, Klasse 6

Aufgabe 1 - 090621
Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

"Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

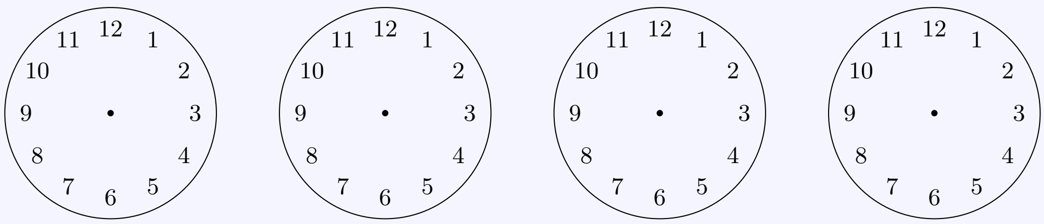
Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wie viel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

(I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel, wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{5}$ aller Teilnehmer dar.
Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.

(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so dass Klaus den 3. Platz belegte.

Lösung übernommen aus [5]

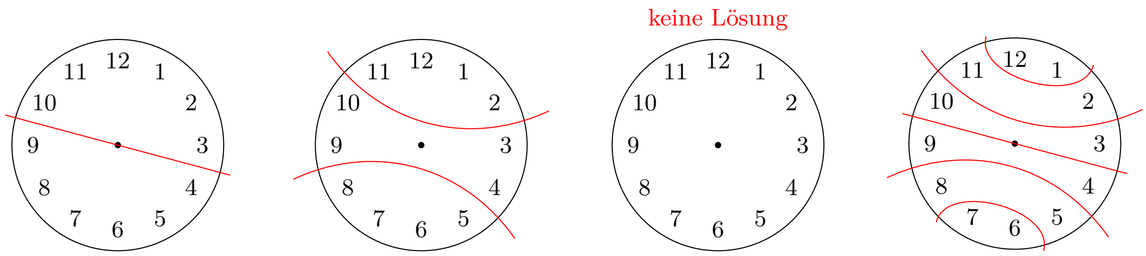
Aufgabe 2 - 090622
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.
Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z.B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, dass die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!
Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



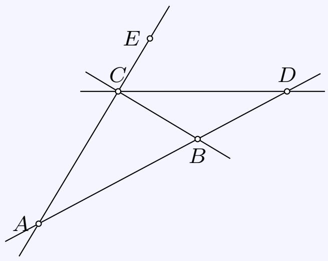
Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78.
Die Kreisscheibe lässt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2, 3 und 6, für 4 dagegen nicht.

Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen. Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich.
Wie die Abbildung zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, dass für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$$



Aufgabe 3 - 090623



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, dass C zwischen A und E liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

Die Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ECD$ wird von $\angle BCD$ zu 180° ergänzt.
Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ABC$ wird von $\angle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung $\angle BCD \cong \angle BAC$.

Aufgabe 4 - 090624
Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

Nach wie viel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?
(Es sei angenommen, dass jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.

Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges.
Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muss, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10.
Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

Lösungen der II. Runde 1969 übernommen aus [5]

3.11 X. Olympiade 1970

3.11.1 I. Runde 1970, Klasse 6

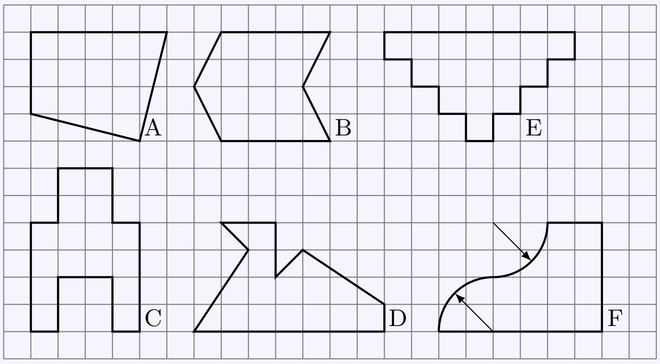
Aufgabe 1 - 100611
Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt.
Welches von den beiden Feldern hat den größeren Flächeninhalt? Um wie viel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

Vom ersten Feld wurden an Kartoffeln 810 t = 8100 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag 180 dt je ha betrug, erhalten wir für dieses Feld wegen 8100 : 180 = 45 einen Flächeninhalt von 45 ha.

Vom zweiten Feld wurden an Kartoffeln 640 t = 6400 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag hier 200 dt je ha betrug, erhalten wir für das zweite Feld wegen 6400 : 200 = 32 einen Flächeninhalt von 32 ha.

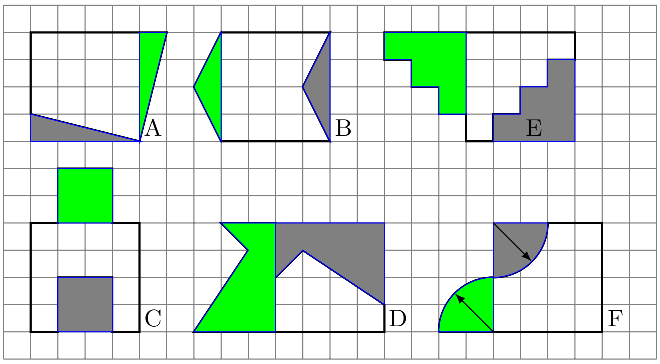
Also ist das erste Feld größer als das zweite. Die Differenz der Flächeninhalte beträgt 13 ha, das sind 1300 a.

Aufgabe 2 - 100612
Untersuche, welche der in der Abbildung dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen lässt, dass sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!



Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Sämtliche Figuren lassen sich der Aufgabe gemäß zerlegen:



Aufgabe 3 - 100613
Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte:

$$a + b = 10, \qquad c + d + e = 16, \qquad f + g + h = 14$$

Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) wurde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet? Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

Es gibt genau 9 einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, nämlich 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Die Summe aller dieser 9 Zahlen beträgt

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Von ihnen wurden laut Aufgabe genau 8 verwendet.
Aus den gegebenen Gleichungen erhält man durch Addition:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 10 + 16 + 14 = 40$$

Also wurde die 5 nicht verwendet. Eine mögliche Lösung ist z.B.:

$$a = 1, \quad b = 9, \quad c = 2, \quad d = 8, \quad e = 6, \quad f = 3, \quad g = 7, \quad h = 4.$$

Aufgabe 4 - 100614
An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" wurden insgesamt 25 Antwortkarten "sehr gut gelöst" von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte.

Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, dass mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielt. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt.

Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

Laut Aufgabe gibt es unter den 15 Teilnehmern mindestens 4, für die folgendes zutrifft:

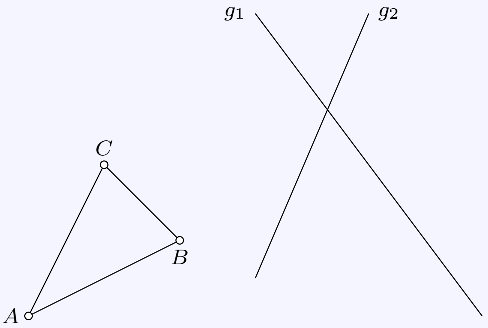
der erste von ihnen erhielt genau 2 Antwortkarten,
der zweite von ihnen erhielt genau 3 Antwortkarten,
der dritte von ihnen erhielt genau 4 Antwortkarten und
der vierte von ihnen erhielt genau 5 Antwortkarten.

Diese 4 Teilnehmer erhielten folglich zusammen genau 14 Antwortkarten. Da von den restlichen 11 Teilnehmern jeder mindestens eine Antwortkarte erhielt, sind damit schon sämtliche 25 Antwortkarten verteilt.
Keiner dieser 11 Teilnehmer kann daher mehr als eine Antwortkarte erhalten haben.
Unter den 15 erwähnten Teilnehmern gibt es mithin genau 11 mit je genau einer Antwortkarte.

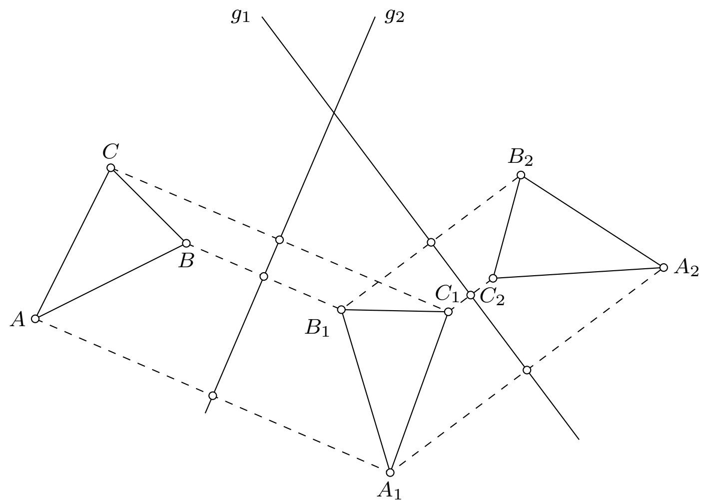
Lösungen der I. Runde 1970 übernommen aus [5]

3.11.2 II. Runde 1970, Klasse 6

Aufgabe 1 - 100621
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden g_1 und g_2. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden.



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)



Aufgabe 2 - 100622
Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41000 km zurück.
Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich

a) in jeder Stunde,
b) in jeder Sekunde zurücklegte!

Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km, das sind rund 28000 km zurück.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen $466000 : 60 = 7767$ rund 7800 m zurück.

Aufgabe 3 - 100623
In der fünfstelligen Zahl $52{*}2{*}$ sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, dass die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.

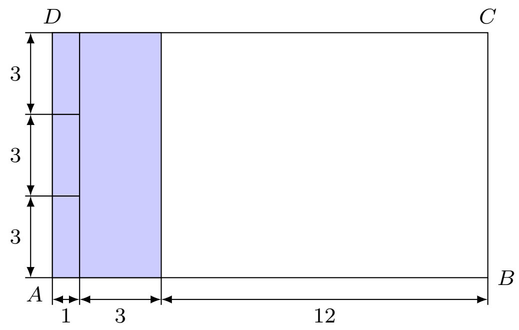
Gib alle Möglichkeiten hierfür an!
(Beachte: Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

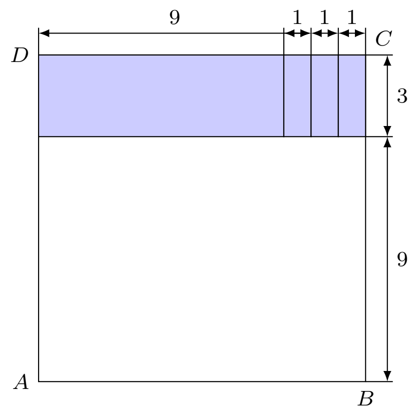
(1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kam als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer $\left\{\begin{matrix}0\\4\\8\end{matrix}\right\}$ so kann die Hunderterziffer nur $\left\{\begin{matrix}0 \text{ oder } 9\\5\\1\end{matrix}\right\}$ sein.
Also können nur die Zahlen 52020; 52920; 52524; 52128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, dass sie dies auch sämtlich tun.

Aufgabe 4 - 100624
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechteckflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!





Alle Maßangaben in cm.
Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$.
Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muss, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muss seine Seite 12 cm lang sein.

Lösungen der II. Runde 1970 übernommen aus [5]

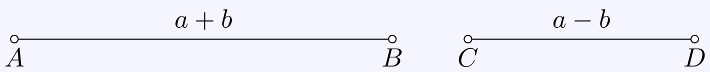
3.12 XI. Olympiade 1971

3.12.1 I. Runde 1971, Klasse 6

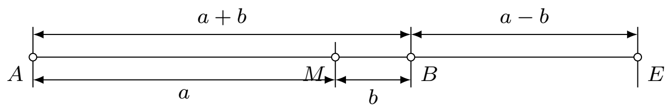
Aufgabe 1 - 110611
Von zwei Autos vom Typ "Wartburg" legte das eine eine Strecke von 1200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, dass jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.
Berechne, wie viel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

Wegen 1200 - 800 = 400 legte das erste Auto 400 km mehr zurück als das zweite. Für diese 400 km verbrauchte es laut Aufgabe 36 Liter Kraftstoff.
Beide Autos legten zusammen 1200 km + 800 km = 2000 km zurück. Das sind 5 mal soviel wie 400 km. Folglich verbrauchten sie insgesamt wegen $5 \cdot 36 = 180$ für diese Strecken 180 Liter Kraftstoff.

Aufgabe 2 - 110612
Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a-b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!



Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Strecke AB.
(2) Wir verlängern die Strecke AB über B hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) CD.
(3) Ist E der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke AE. Der Mittelpunkt von AE sei M genannt. Dann ist AM eine Strecke der Länge a und MB eine Strecke der Länge b.



Begründung: Nach Konstruktion hat AE die Länge $a+b+a-b=2a$. Daher hat AM die Länge a sowie MB die Länge $a+b-a=b$.

Aufgabe 3 - 110613
Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt. Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,
genau eine rot angestrichene Fläche,
genau zwei rot angestrichene Flächen,
genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:
a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.
b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.
Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

a) Genau 3 kleine Würfel haben keine rot angestrichene Fläche.
Genau 12 kleine Würfel haben genau eine rot angestrichene Fläche.

Genau 12 kleine Würfel haben genau zwei rot angestrichene Flächen.
Keiner der Würfel hat drei rot angestrichene Flächen.

b) Die Anzahlen lauten in diesem Falle in der oben angegebenen Reihenfolge: 4; 12; 9; 2.

Aufgabe 4 - 110614
Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.
Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, dass auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z.B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

Da die Straße die Länge 999 km hat, ist die Summe der Kilometerangaben auf jedem der Steine 999. Daraus folgt:

(1) Auf der einen Seite jedes der Kilometersteine steht eine gerade und auf der anderen Seite eine ungerade Zahl. Beide Zahlen sind also voneinander verschieden.
(2) Die Summe der Einerziffern auf jedem Kilometerstein beträgt 9, desgleichen die Summe der beiden Zehnerziffern und ebenso die Summe der beiden Hunderterziffern.
(3) Zu jedem Kilometerstein S der Aufgabe gibt es genau einen anderen S', der die gleiche Bezifferung trägt (S' hat von B dieselbe Entfernung wie S von A).

Die gesuchte Zahl x ist daher gleich der doppelten Anzahl y derjenigen Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei Ziffern verwendet wurden und die näher an A stehen als an B. Bei jedem solchen Stein S ist die Hunderterziffer der Kilometerangabe von S nach B eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 (wegen (2)).

Daher lautet die Hunderterziffer der anderen Kilometerangabe auf S jeweils 4, 3, 2, 1 bzw. 0.
In den ersten vier Fällen sind damit die beiden vorkommenden Ziffern bestimmt; aber auch im Fall 5 kann außer 9 (und evtl. 0) keine andere Ziffer z auftreten, da sonst die drei verschiedenen Ziffern 9, z und $(9-z)$ vorkämen.

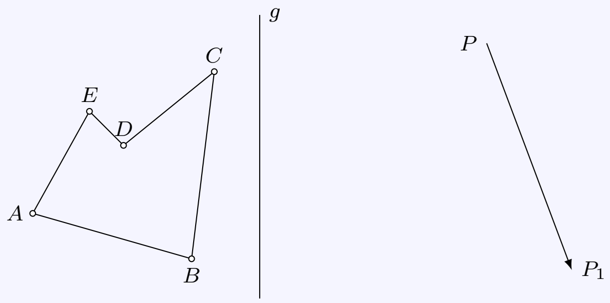
Nun kann man mit den Ziffern a und b, $b \neq a$, genau 4 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, deren Hunderterziffer a ist, nämlich aaa, aab, aba, abb.
Infolgedessen ist, da hier a die fünf Werte 5, 6, 7, 8, 9 und nur diese annehmen kann: $y = 5 \cdot 4$ und die gesuchte Anzahl $x = 2y = 40$.
Es gibt also genau 40 Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden.

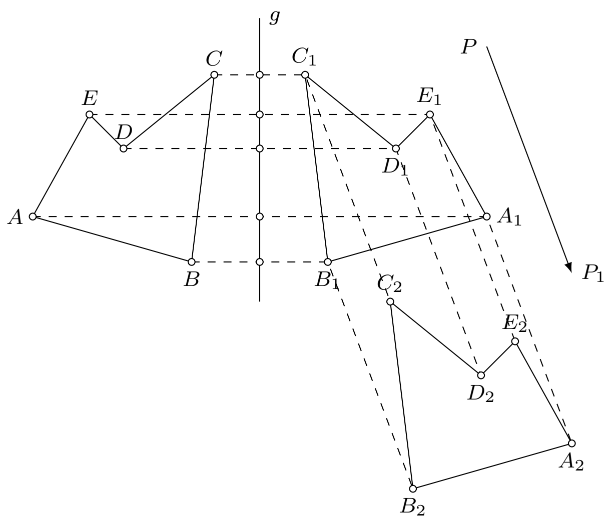
Lösungen der I. Runde 1971 übernommen aus [5]

3.12.2 II. Runde 1971, Klasse 6

Aufgabe 1 - 110621
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.





Aufgabe 2 - 110622
Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:

(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.

Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

(4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

Aufgabe 3 - 110623
Von dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, dass der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

Soll der größere Summand das 49fache des kleineren Summanden betragen, so muss die Summe das 50fache des kleineren Summanden sein. Diesen erhält man daher, wenn man die Summe durch 50 dividiert; er lautet somit $25 : 50 = \frac{1}{2}$, und hiernach muss der größere Summand $49 \cdot 1 = \frac{49}{2}$ sein.

In der Tat beträgt die Summe von diesen beiden Summanden (von denen der größere 49 mal so groß ist wie der kleinere) $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

Aufgabe 4 - 110624
Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes.
Wie viel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

Laut Aufgabe besitzt Rainer Spargeld. Dessen Betrag sei x Mark. Dann gilt

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit 30 weiter $10x + 6x = 15x + 210$ und daraus $x = 210$.
Also hat Rainer insgesamt 210 Mark gespart.

Lösungen der II. Runde 1971 übernommen aus [5]

3.13 XII. Olympiade 1972

3.13.1 I. Runde 1972, Klasse 6

Aufgabe 1 - 120611
Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift "alpha" und 6 Schüler weder "Frösi" noch "alpha".

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

Die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen, sei x.
Dann lesen genau $(20 - x)$ Schüler "Frösi" aber nicht "alpha", ferner genau $(12 - x)$ Schüler "alpha", aber nicht "Frösi". Daher gilt

$$x + (20 - x) + (12 - x) + 6 = 30$$

woraus $38 - x = 30$, also $x = 8$ folgt.

Aufgabe 2 - 120612
Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Ziffer blättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.
Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

Jedes der sechs Gehäuse muss mit einem der vier Zifferblätter ausgestattet werden. Das ergibt genau $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Möglichkeiten einer Ausstattung mit Gehäuse und Zifferblatt.
Jede dieser Möglichkeiten muss mit je einer der drei verschiedenen Zeigerausführungen verbunden werden. Das gibt insgesamt genau $24 \cdot 3 = 72$ verschiedene Ausführungsmöglichkeiten.

Aufgabe 3 - 120613
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 ^{2}	Maschine D: 60 m^2
Maschine B: 5 m^2	Maschine E: 18 m^2
Maschine C: 18 m^2	Maschine F: 50 m^2

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A: 14 m^2	An der Maschine D: 21 m^2
An der Maschine B: 6 m^2	An der Maschine E: 13 m^2
An der Maschine C: 15 m^2	An der Maschine F: 17 m^2

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als "Gesamtlänge der Transportwege" bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt 166 m^2, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke 86 m^2, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11 \cdot 36 = 396$ insgesamt 396 m^2.
Mithin verbleiben wegen 396 - 166 - 86 = 144 für die Transportwege 144 m^2.

b) Die Breite der Transportwege betrage x m. Dann gilt $48 \cdot x = 144$, woraus man $x = 144 : 48$, also $x = 3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

Aufgabe 4 - 120614
Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, dass eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

Angenommen, die Längen a, b, c haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

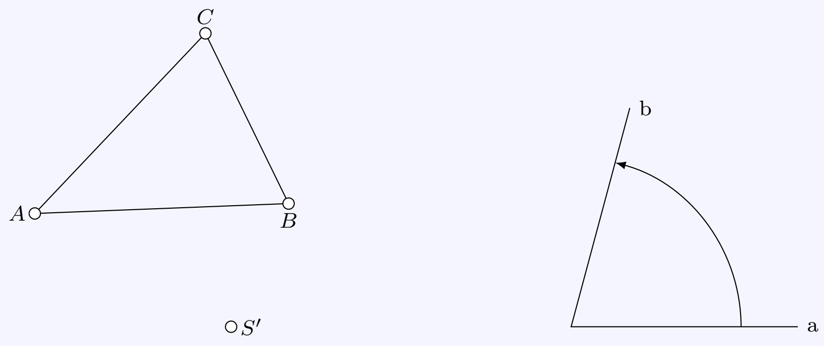
$a + b + c = 168$ m, ferner $b = 3a$ sowie $c = 4a$.
Daraus folgt: $a + 3a + 4a = 168$ m, also $8a = 168$ m, woraus man $a = 21$ m, also $b = 63$ m und $c = 84$ m erhält.

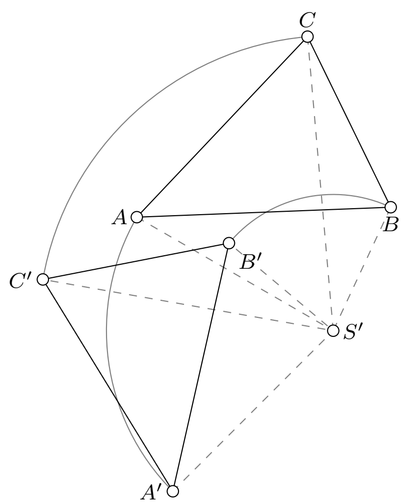
Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen 63 m = $3 \cdot 21$ m, 84 m = $4 \cdot 21$ m und 21 m + 63 m + 84 m = 168 m haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

Lösungen der I. Runde 1972 übernommen aus [5]

3.13.2 II. Runde 1972, Klasse 6

Aufgabe 1 - 120621
Das abgebildete Dreieck ABC ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\angle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.





Aufgabe 2 - 120622
An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam.
Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen, der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte.
An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1650 M ausgezahlt.

Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1000 M zur Verfügung.
Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muSS mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben.

Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.

Aufgabe 3 - 120623
Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:

(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.
(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.
(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.
(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.
(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.

Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit r, w, m, b, j (in Mark) bezeichnet. Dann gilt laut Aufgabe:

(1) $w > b > j$
(2) $j > r$; $r = 13$
(3) $b = r + 4$
(4) $w = m + 2$; $m = j + 1$

Aus (2) und (3) folgt $b = 17$. Aus (1) und (2) folgt $w > b > j > r$, aus (4) $w > m > j$ und daraus sowie aus (5) $m = b$, also $m = 17$.
Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.

Aufgabe 4 - 120624
Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:

"Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien.
Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe."

Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.

Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

Lösungen der II. Runde 1972 übernommen aus [5]

3.14 XIII. Olympiade 1973

3.14.1 I. Runde 1973, Klasse 6

Aufgabe 1 - 130611
Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, dass die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.
Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

Die Längen der vier Teilstücke seien x, $x+40$, $x+80$ und $x+120$ (alles in cm), womit für die Summe ergibt:

$$x+x+40+x+80+x+120 = 4x+240 = 700 \text{ cm} \qquad \Rightarrow \qquad x = 115 \text{ cm}$$

Das erste Teilstück ist somit 115 cm lang, das zweite 155 cm, das dritte 195 cm und das vierte 235 cm.

Aufgabe 2 - 130612
Für die "Galerie der Freundschaft" ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

Der Flächeninhalt des Bildes ist $12 \cdot 18 = 216$ cm^2. Der Flächeninhalt von Rahmen und Bild wird

$$(12+2\cdot 3)\cdot(18+2\cdot 3) = 18\cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

Damit ist die Rahmenfläche gleich 432 cm^2 - 216 cm^2 = 216 cm^2.

Aufgabe 3 - 130613
In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, dass die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und dass dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt:

Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert.

2				
	8			
	11	16		

Dabei heiße "Differenz": "rechte Zahl minus linke Zahl" bzw. "untere Zahl minus obere Zahl".
Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

2	5	8	11	14	3
4	8	12	16	20	4
6	11	16	21	26	5
8	14	20	26	32	6
10	17	24	31	39	7
2	3	4	5	6	Differenz

Die dritte Zeile und zweite Spalte ergeben sich durch die jeweils zwei gegebenen Zahlen. Trägt man diese ein, so ergeben sich alle anderen Zeilen.

Aufgabe 4 - 130614
Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist.
Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

Für die Zahlen zwischen 0 und 100, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten, gilt für einzelne Teilbereiche:

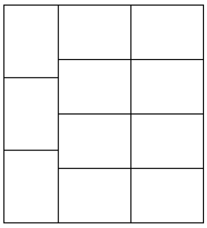
zwischen 0 und 49 gibt es 5 solche Zahlen,
zwischen 50 und 59 gibt es 10 solche Zahlen,
zwischen 60 und 100 gibt es 4 solche Zahlen.

Zwischen 0 und 99 gibt es somit 19 derartige Zahlen. Analog können auch die Bereiche 100 bis 199, 200 bis 299 u.s.w. untersucht werden, mit Ausnahme von 500 bis 599. Es ergeben sich insgesamt $9 \cdot 19 = 171$ solche Zahlen. Zusätzlich gibt es noch die Zahlen von 500 bis 599.
Damit existieren 271 Zahlen zwischen 0 und 1000 gibt, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten. 1001 - 271 = 730 Zahlen haben keine Ziffer 5. Es gibt damit weniger solche Zahlen mit 5 als Zahlen in diesem Bereich ohne Ziffer 5.

Aufgaben der I. Runde 1973 gelöst von Steffen Polster

3.14.2 II. Runde 1973, Klasse 6

Aufgabe 1 - 130621
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 cm^2. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 cm^2.
Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Dass dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung.

Aufgabe 2 - 130622
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte u.s.w., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d.h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d.h. nicht verdeckt) sind!

Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5 \cdot (242 + 122 + 62 + 32) - (122 + 62 + 32) = 3636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3636 cm^2.

Aufgabe 3 - 130623
Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note "5" bekam.
Ein Sechstel der Klasse schrieb eine "1", ein Drittel eine "2" und nur ein Neuntel eine "4". Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus nur, dass sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wie viel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine "3" geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist! Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10 < x < 40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27.
Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note "3". Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anzahl der Schüler mit der Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

Aufgabe 4 - 130624
Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, dass eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.
Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

Die Summe der für die Zeichen * einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18.
Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.
Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

$$5000805, 5010705, 5020605, 5030505, 5040405, 5050305,$$

$$5060205, 5070105, 5080005, 5080905, 5090805.$$

Lösungen der II. Runde 1973 übernommen aus [5]

3.15 XIV. Olympiade 1974

3.15.1 I. Runde 1974, Klasse 6

Aufgabe 1 - 140611

In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, dass die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.
Beweise, dass es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

Die oberste Zeile hat als Produkt 2^{15}. Damit ergibt sich für $a = \frac{2^{15}}{2^4 \cdot 2^7} = 2^4$.
Da in der Diagonale von links oben nach rechts unten nur noch b fehlt, kann dies berechnet werden, zu $b = 2^5$.
Die restlichen Werte ergeben sich dann zu $c = 2^8$, $d = 2^3$ und $e = 2^6$.
Zur Kontrolle aller Zeilen, Spalten und Diagonalen sind in der Abbildung deren Produkt eingetragen.

	2^6	2^2	2^7	2^{15}
	2^6	2^5	2^4	2^{15}
	2^3	2^8	2^4	2^{15}
2^{15}	2^{15}	2^{15}	2^{15}	2^{15}

Aufgabe 2 - 140612

Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen.
Bernd meint, dass bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten.
Monika entgegnet nach einigem Überlegen, dass das nicht stimmen könne.
Wer von beiden hat recht?

Bei der letzten Zusammenkunft waren 25 - 2 = 23 23 Teilnehmer anwesend. Ist die Anzahl der Mädchen x, so waren, nach Bernd, $x + 6$ Jungen da, d.h.

$$x + (x + 6) = 23 \qquad \to \qquad x = 8{,}5$$

Das Ergebnis ist nicht ganzzahlig, womit klar ist, dass Monika recht hat. Bernds Aussage ist nicht korrekt.

Aufgabe 3 - 140613

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.

a) Um wie viel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?
b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

Der erste Radfahrer benötigte für die Strecke t Stunden, der zweite $t - 1$ Stunden, da er eine Stunden später losfuhr. Die Strecken = Geschwindigkeit · Zeit sind für beide gleich, d.h. mit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$t \cdot 12 = (t - 1) \cdot 15 \quad \to \quad 12t = 15t - 15 \quad \to \quad 3t = 15 \quad \to \quad t = 5$$

Der erste Radfahrer für 5 Stunden, der zweite 4 Stunden, d.h., er holt ihn nach 4 Stunden ein.
Die Strecke ist damit $5 \cdot 12 = 4 \cdot 15 = 60$ km.

Aufgabe 4 - 140614

Jemand schreibt 3 * 6 * 5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, dass eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.
Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

Eine durch 75 teilbare Zahl endet auf 0, 25, 50 oder 75, d.h. die vorletzte Ziffer ist eine 2 oder 7.
75 ist aber auch durch 3 teilbar, so dass die gesuchte Zahl ebenfalls durch 3 teilbar sein muss. Ihre Quersumme ist $q = 3 + a + 6 + b + 5 = 14 + a + b$ mit $b = 2$ oder $b = 7$.

Ist $b = 2$ ist die Quersumme $q = 16 + a$, d.h., a kann 2, 5 oder 8 sein.
Ist $b = 7$ ist die Quersumme $q = 21 + a$, d.h., a kann 0, 3, 6 oder 9 sein.
Die fünfstellige Zahl kann somit sein

$$32625, \quad 35625, \quad 38625, \quad 30675, \quad 33675, \quad 36675, \quad 39675$$

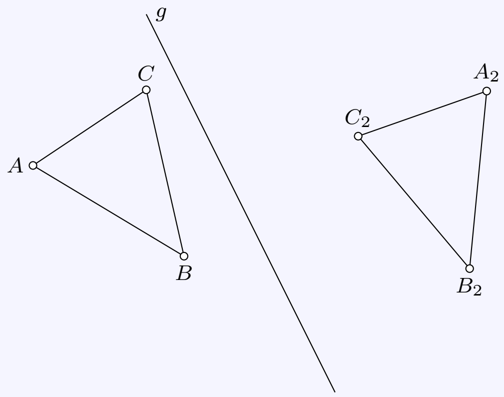
Aufgaben der I. Runde 1974 gelöst von Steffen Polster

3.15.2 II. Runde 1974, Klasse 6

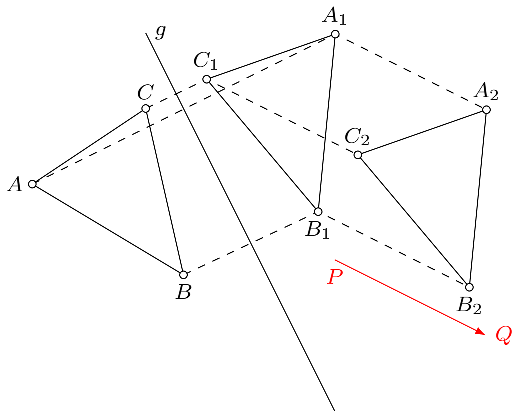
Aufgabe 1 - 140621

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.



Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

Aufgabe 2 - 140622

Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.
(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z':

(1) $z' = 198 + z$ sowie
(2) $z + z' = 13776$.

Aus (1) und (2) folgt: $z + 198 + z = 13776$, woraus man $2z = 13776 - 198 = 13578$, also $z = 6789$ erhält. Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben.
In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6789 + 198 = 6987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, dass in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.
Daher hat genau die Zahl z = 6789 die von Klaus genannten Eigenschaften.

Aufgabe 3 - 140623
Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.
(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.
(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Platzierung richtig und eine falsch angegeben.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Platzierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müsste Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist.
Folglich ist in (1) die Platzierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben, d.h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz.

Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, dass in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

Aufgabe 4 - 140624
Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.
Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.

Um wie viel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt.
Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste.
Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.
Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt.
Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

Lösungen der II. Runde 1974 übernommen aus [5]

3.16 XV. Olympiade 1975

3.16.1 I. Runde 1975, Klasse 6

Aufgabe 1 - 150611
Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132000 t Steinkohle und 24000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.
Wie viel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

Wegen $132000 + 24000 = 156000$ betrug die gelieferte Gesamtmenge 156000 t. Wegen $132000 : 600 = 220$, $24000 : 600 = 40$ und $220 + 40 = 260$ oder: wegen $156000 : 600 = 260$ waren das insgesamt 260 Kahnladungen.
Da es sich vom 6. bis 18. Dezember 1974 um insgesamt 13 Liefertage handelte, trafen wegen $260 : 13 = 20$ täglich durchschnittlich 20 dieser Kahnladungen aus der Volksrepublik Polen in Berlin ein.

Aufgabe 2 - 150612

$$\begin{array}{ccccc} a & \cdot & a & = & b \\ - & & & & - \\ c & \cdot & a & = & d \\ \hline e & \cdot & a & = & a \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, dass alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.
Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen "Zahlenrätseln" sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muss nachgewiesen werden, dass die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und dass sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

Die fünf im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben lauten:

$$(1) \quad a \cdot a = b, \qquad (2) \quad c \cdot a = d, \qquad (3) \quad e \cdot a = a, \qquad (4) \quad a - c = e, \qquad (5) \quad b - d = a.$$

Wenn fünf Ziffern a, b, c, d, e diese Aufgaben richtig lösen und sämtlich untereinander verschieden sind, so folgt $a \neq 0$; denn für $a = 0$ wäre wegen (1) auch $b = 0$. Aus (3) folgt hiernach $e = 1$.
Ferner folgt $c \neq 0$; denn für $c = 0$ wäre wegen (2) auch $d = 0$.
Hiernach und wegen $c \neq e$ ist $c \geq 2$, nach (4) also $a = c + e = 3$. Andererseits gilt nach (1) und weil b einstellig ist, $a \cdot a \leq 9$, also $a \leq 3$. Folglich muss $a = 3$ sein, nach (4) somit $c = a - e = 2$.

Aus (1), (2) erhält man nun $b = 9$, $d = 6$. Daher kann nur die Eintragung den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.
Sie genügt diesen Bedingungen; denn die für a, b, c, d, e eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 6, 1 sind untereinander verschieden, und alle im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben sind mit diesen Ziffern richtig gelöst. Also hat genau die angegebene Eintragung die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ - & & & & - \\ 2 & \cdot & 3 & = & 6 \\ \hline 1 & \cdot & 3 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 3 - 150613
Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker Leonard Euler ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.

Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, so gilt für sie:
Bezeichnet man den kleineren der beiden Summanden mit x, dann lautet der größere $49x$, und es gilt $x + 49x = 25$, woraus man $x = \frac{1}{2}$ erhält.

Also kann nur eine Zerlegung die geforderten Eigenschaften haben, in der der kleinere Summand $\frac{1}{2}$ und der größere $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ lautet.
Dies ist auch in der Tat eine Zerlegung der gesuchten Art; denn für diese beiden Summanden ist $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

Aufgabe 4 - 150614
Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, dass das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wie viel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

Am letzten Tag waren 27 kg gesammelt worden, am vorletzten Tag wegen 27 - 6 = 21, also 21 kg.
Wegen 27+21 = 48 betrug das Sammelergebnis der letzten beiden Tage daher 48 kg. Da dies ein Viertel der insgesamt erreichten Menge war, ist diese das Vierfache von 48 kg, wegen $4 \cdot 48 = 192$ also 192 kg Altpapier.

Lösungen der I. Runde 1975 übernommen aus [5]

3.16.2 II. Runde 1975, Klasse 6

Aufgabe 1 - 150621
Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15000 kp befördern.
Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet.
Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15000 kp, das sind 5000 kp. Der zweite beförderte damit 13125 kp; der dritte beförderte 9000 kp.
Das Sperrgut hatte somit wegen $5000 + 13125 + 9000 = 27\,125$ ein Gesamtgewicht von 27125 kp.

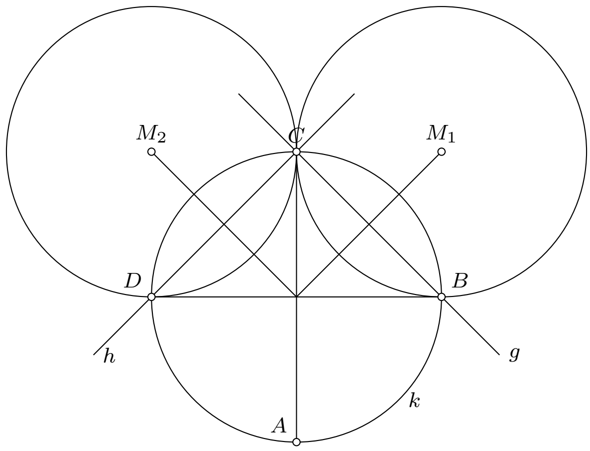
Aufgabe 2 - 150622
Das Wohnschiff "Kuhle Wampe", das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, dass es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und dass diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibettkabinen aufteilen.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen.

Die Anzahl dar Dreibett-Kabinen muss mindestens 1 und kann wegen $3 \cdot 14 = 42 > 41$ höchstens 13 betragen.
Außerdem muss ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Drei-Bett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt waren und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen lässt.

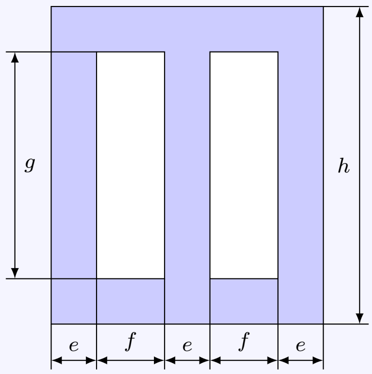
Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

Anzahl der Dreibett-K.	Anzahl der damit vorh. Betten	Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten	Anzahl der Zweibett-K.	Gesamtplätze
1	3	38	19	41
3	9	32	16	41
5	15	26	13	41
7	21	20	10	41
9	27	14	7	41
11	33	8	4	41
13	39	2	1	41

Aufgabe 3 - 150623
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D!
Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h. Spiegele den Kreis k an g und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.



Aufgabe 4 - 150624



Berechne den Inhalt A der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

a) Die gefärbte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm.
Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 mm^2 bzw. 750 mm^2 bzw. 750 mm^2.
Somit hat wegen 4200 - 750 - 750 = 2700 die gefärbte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700$ mm^2.

b) Die Seitenlängen von R sind $(3e + 2f)$ und h, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g. Daher hat R den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f \cdot g$.
Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

Lösungen der II. Runde 1975 übernommen aus [5]

3.17 XVI. Olympiade 1976

3.17.1 I. Runde 1976, Klasse 6

Aufgabe 1 - 160611

$$\begin{array}{ccccc} \text{AAA} & \cdot & \text{A} & = & \text{BBB} \\ + & & & & - \\ \text{CCC} & \cdot & \text{E} & = & \text{DDD} \\ \hline \text{FFF} & : & \text{F} & = & \text{GGG} \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle fünf angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.
Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

Wenn es eine derartige Eintragung gibt, so folgt aus der 3. Zeile $G = 1$. Ferner folgt aus der 1. Zeile, dass B das Quadrat von A ($\neq B$) ist, also $B = 4$ oder $B = 9$ gilt und daher $D = 3$ oder $D = 8$ sein muss. Andererseits ist D (nach der 2. Zeile) das Produkt zweier von D verschiedener Ziffern C, E, also keine Primzahl.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit $D = 8$, $B = 9$, $A = 3$.

Da $8 = 2 \cdot 4$ bis auf die Reihenfolge die einzige Zerlegung von 8 in zwei von 8 verschiedene Faktoren ist, folgt entweder $C = 2$, $E = 4$ oder $C = 4$, $E = 2$. Im ersten Fall ergibt sich $F = 5$, im zweiten Fall $F = 7$. Also können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 222 & \cdot & 4 & = & 888 \\ \hline 555 & : & 5 & = & 111 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 444 & \cdot & 2 & = & 888 \\ \hline 777 & : & 7 & = & 111 \end{array}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen auch; denn die für A, B, C, D, E, F, G eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 8, 4, 5, 1, bzw. 3, 9, 4, 8, 2, 7, 1 sind jeweils sämtlich voneinander verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgabe 2 - 160612
Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück.
Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.
Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

Die Zeit von 7.00 Uhr bis 11.00 Uhr beträgt 4 Stunden, das sind 240 Minuten. Die Rastzeit beträgt 20 Minuten, die Fahrzeit also 220 Minuten.

Wegen $220 \cdot 320 = 70400$ ist die von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke mithin 70400 m = 70,4 km lang.

Aufgabe 3 - 160613
Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches 17 19 subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert 7 11 erhalten soll.
Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

I) Wenn x eine solche Zahl ist, dann gilt für sie

$$\frac{17 - x}{19 + x} = \frac{7}{11}$$

Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muss der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muss die Zahl $19 + x$ ein Vielfaches der Zahl 11 sein.

Das kleinste Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muss x mindestens 3 betragen. Wäre $x > 3$, so wäre in dem Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ der Zähler kleiner als 14, und der Nenner größer als 22, der Bruch folglich kleiner als $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.
Somit kann nur die Zahl $x = 3$ die verlangte Eigenschaft haben.

II) Sie hat diese Eigenschaft; denn subtrahiert man sie vom Zähler 17 und addiert sie zum Nenner 19, so entsteht der Bruch

$$\frac{17-x}{19+x} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

Also erfüllt genau die Zahl $x = 3$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 160614
Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark.
Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.
Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

Wegen 91 - 26 = 65 zahlten die Pioniere dieser Gruppe insgesamt genau 65 Markstücke in die Reisekasse. Also ist 65 ein Vielfaches der Anzahl der Pioniere der Gruppe. Alle natürlichen Zahlen, die 65 als Vielfaches haben, kommen in den Zerlegungen $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ vor. Von diesen Zahlen ist nur 13 zugleich größer als 10 und kleiner als 50.

Entsprechend der Aufgabe müssen daher 13 Pioniere an der Fahrt teilgenommen haben, und jeder von ihnen hat genau 5 M in die Reisekasse gezahlt.

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen aus [5]

3.17.2 II. Runde 1976, Klasse 6

Aufgabe 1 - 160621
Ludwig sagt: "Ich kann die Leserzahl 58125 der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & A & L & P & H & A \\ + & & & H & E & I \\ + & & & T & E & R \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, dass $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben.
Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?"
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

Wenn bei einer Einsetzung alle Angaben zutreffen, so folgt aus den Angaben über die Zehntausenderziffer, dass $A = 5$ ist. Aus den Angaben über die Einerziffer folgt daher $I + R = 10$.
Von den möglichen Darstellungen der 10 als Summe von zwei verschiedenen einstelligen Zahlen

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

scheiden diejenigen aus, in denen die Ziffern schon für andere Buchstaben als I und R eingesetzt wurden, also $E = 1$, $H = 9$, $P = 7$, $L = 6$. Daher verbleibt nur die Darstellung 10 = 2 + 8.

Wegen $I < R$ ist also $I = 2$, $R = 8$. Da bei der Addition der Zehnerziffern eine Zehnerübertragung von genau 1 auftritt, ergibt sich aus den Angaben über die Hunderterziffern $T = 4$.
Also kann nur die Einsetzung $ALPHA$ (56795) $HEITER$ (912418) alle Forderungen erfüllen.

Sie erfüllt diese Forderungen; denn die für verschiedene Buchstaben eingesetzten Ziffern sind sämtlich verschieden, es gilt $EHPL = 1976$ und $I < R$, und die Addition

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 6 & 7 & 9 & 5 \\ + & & & 9 & 1 & 2 \\ + & & & 4 & 1 & 8 \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

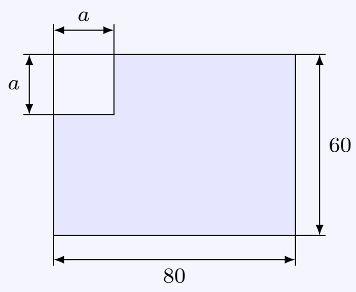
ergibt die Summe 58125.

Aufgabe 2 - 160622
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Wegen 68 + 76 + 64 + 52 = 260 besitzen die vier Räume eine Gesamtbodenfläche von 260 m^2.
Wegen 260 : 65 = 4 standen für jeden Pionier laut Aufgabe 4 m^2 Bodenfläche zur Verfügung. Daher ergab sich wegen 68 : 4 = 17, 76 : 4 = 19, 64 : 4 = 16 sowie 52 : 4 = 13 folgende Belegung:

Im ersten Raum: 17 Thälmann-Pioniere,
im zweiten Raum: 19 Thälmann-Pioniere,
im dritten Raum: 16 Thälmann-Pioniere,
im vierten Raum: 13 Thälmann-Pioniere,
zusammen also: 65 Thälmann-Pioniere.

Aufgabe 3 - 160623



Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks 4 800 mm^2 = 48 cm^2.
Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen 48 - 44 = 4 somit 4 cm^2. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.
Die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

Aufgabe 4 - 160624
Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist die Hälfte des Gemischs Haferschrot, $\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie, $\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot, $\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe, der Rest ist Wasser.
Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

Laut Aufgabe enthalten 35 kg des in der Aufgabe genannten Gemischs wegen $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17{,}5$ genau 17,5 kg Haferschrot,
wegen $\frac{1}{10} \cdot 35 = 3{,}5$ genau 3,5 kg Weizenkleie,
wegen $\frac{1}{4} \cdot 35 = 8{,}75$ genau 8,75 kg Gerstenschrot,
wegen $\frac{1}{100} \cdot 35 = 0{,}35$ genau 0,35 kg Mineralstoffe.

Das sind wegen $17{,}5 + 3{,}5 + 8{,}75 + 0{,}35 = 30{,}1$ insgesamt 30,1 kg. Wegen 35 - 30,1 = 4,9 verbleiben mithin genau 4,9 kg Wasser als Wasseranteil dieses Kraftfuttergemischs.

Lösungen der II. Runde 1976 übernommen aus [5]

3.18 XVII. Olympiade 1977

3.18.1 I. Runde 1977, Klasse 6

Aufgabe 1 - 170611
In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231000	334000	395000	424000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.
Berechne, um wie viel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:
a) von 1951 bis 1960
b) von 1961 bis 1970
c) von 1971 bis 1974!

a) Von 1950 bis 1960 wurde das Ergebnis um 334000 t - 231000 t = 103000 t gesteigert, d.h. um $\frac{103000}{231000} \cdot 100\% = 44{,}59$ %.
Für 10 Jahre entspricht das einer jährlichen Steigerung von 4,46%.

b) Von 1960 bis 1970 wurde das Ergebnis um 395000 t - 334000 t = 61000 t gesteigert, d.h. um 18,26 % und jährlich um 1,83 %.

c) Von 1970 bis 1974 wurde das Ergebnis um 29000 t gesteigert, d.h. um 7,34 % und für 3 Jahre jährlichen um von 2,45 %.

Aufgabe 2 - 170612
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schifffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.
Wie viel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Nach 5 Stunden ist das erste Schiff $5 \cdot 18 = 90$ km gefahren.
Da die Gesamtstrecke 240 km beträgt und das zweite Schiff nach 5 Stunden nur noch 45 km entfernt ist, muss es 105 km gefahren sein. Dies entspricht der Geschwindigkeit $\frac{105\text{ km}}{5\text{ h}} = 21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 3 - 170613
Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig.
Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.
Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

In der Klasse 6a wurden $27 \cdot 5 = 135$ Flaschen und $27 \cdot 8$ kg = 216 kg Altpapier gesammelt. Dies sind $135 \cdot 5$ Pf + $216 \cdot 15$ Pf = 675 Pf + 3240 Pf = 3915 Pfennig = 39,15 M.

Zusammen haben beiden Klassen 39,15 M + 25 M = 64,15 M gesammelt. Der Geldbetrag genügt für die gemeinsame Eisenbahnfahrt.

Aufgabe 4 - 170614
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher sprang als Ernst.
(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.

Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichen! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

Aus der vierten Aussage folgt sofort, dass Bernd Letzter war. Aus (2) und (3) folgt, dass Anton und Christian gleich hoch und höher als Ernst sprangen. Ernst sprang aber auch höher als Frank. Andererseits folgt aus (1), dass Detlef höher als Anton war und somit der Beste.
Damit ergibt sich die Reihenfolge: Detlef, Anton und Christian (gleiche Sprunghöhe), Ernst, Frank, Bernd.

Aufgaben der I. Runde 1977 gelöst von Steffen Polster

3.18.2 II. Runde 1977, Klasse 6

Aufgabe 1 - 170621
Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.

Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150 : 5 = 30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30$ km $= 360$ km.

Aufgabe 2 - 170622
Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:

(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, dass Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.

Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, dass die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und dass alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.
Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlauf?

Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte.
Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte.
Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta.
Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.

Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautete mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

Aufgabe 3 - 170623
In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil.
Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)

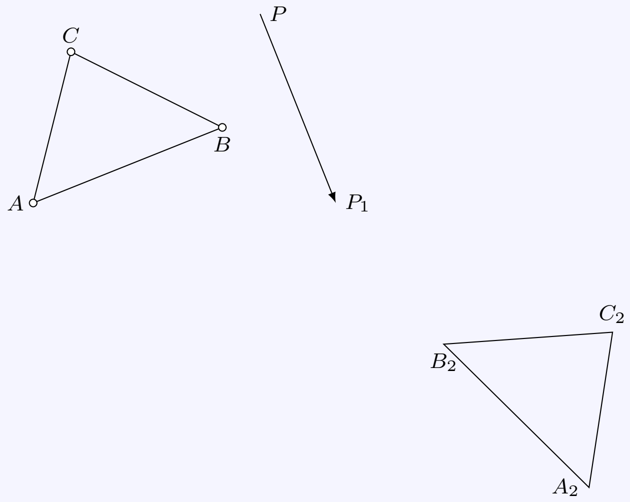
Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann noch einen Rohling, d.h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen.

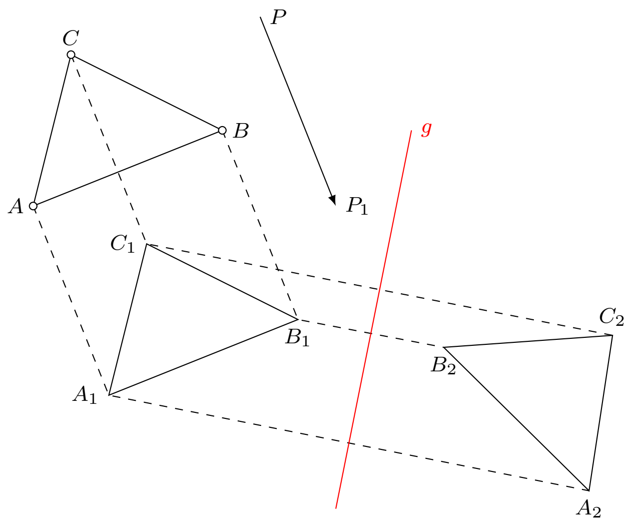
Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden.

Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36 + 6 + 1 = 43$.

Aufgabe 4 - 170624



Auf der Abbildung sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Lösungen der II. Runde 1977 übernommen aus [5]

3.19 XVIII. Olympiade 1978

3.19.1 I. Runde 1978, Klasse 6

Aufgabe 1 - 180611
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt 260 - 26 - 65 = 169.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt 1430 m^2; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt 4355 m^2; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt 13520 m^2; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13520$.
Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt 19305 m^2; denn es gilt $1430+4355+13520 = 19305$.

Aufgabe 2 - 180612
Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = \star 3 \star 60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern ($\star$) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, dass z die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) $60000 < z < 100000$,
(2) z ist durch 9 teilbar.

Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

Wenn z den Bedingungen genügt, so ist die Zehntausenderziffer von z wegen (1) eine der Zahlen 6, 7, 8, 9.
Weiterhin ist z wegen (2) durch 9 teilbar, und daher ist auch die Quersumme von z durch 9 teilbar. Da die Summe der Tausender-, Zehner- und Einerziffer 9 ist, muss die Hunderterziffer die obengenannte Zehntausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 zu einer durch 9 teilbaren Zahl ergänzen.

Das ist nur bei den Zahlen 63360, 73260, 83160, 93060, 93960 der Fall.
Jede der hiermit angegebenen Zahlen erfüllt (1) und, da sie durch 9 teilbar ist, auch (2). Daher sind die angegebenen Zahlen alle gesuchten.

Aufgabe 3 - 180613
Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler.
In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, dass drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften "alpha" und "technikus" lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a.
Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den "technikus" als auch die Zeitschrift "alpha".
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften "alpha" und "technikus"?

Fred ist keiner der beiden Schüler der 7. Klasse, mit denen er sich unterhielt. Er ist auch nicht der Schüler der 6a, da dieser in der von Hans gegebenen Aufzählung außer Fred erwähnt wird. Also gehört Fred der 6b an.

Zur Klasse 6a gehören nach dieser Aufzählung weder Fred noch Gerd. Da ferner Hans einer der Schüler der 7. Klasse ist, mit denen Fred sich unterhielt, gehört auch Hans nicht zur 6a. Folglich gehört Ingo der 6a an. Die beiden Schüler der 7. Klasse sind also Gerd und Hans.

Der Schüler der 7b kann nicht Gerd sein, da er beide Zeitschriften liest, Gerd aber nur eine. Also gehört Gerd der 7a und Hans der 7b an. Der Schüler, der beide Zeitschriften liest, ist folglich Hans.

Aufgabe 4 - 180614
Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er:

"Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank."

Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Angenommen, die Aussage "Frank erhielt einen zweiten Preis" wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde aber bedeuten, dass Klaus ebenfalls einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist die betrachtete Aussage falsch.

Angenommen, die Aussage "Klaus erhielt keinen zweiten Preis" wäre wahr.
Dann müssten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde jedoch bedeuten, dass keiner einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist auch diese Aussage falsch.

Mithin kann nur die Aussage "Silvia erhielt keinen ersten Preis" wahr sein. Da damit die beiden anderen Aussagen falsch sind, erhielt Klaus einen zweiten Preis.
Ferner kann nur Frank einen ersten Preis und mithin Silvia einen dritten Preis errungen haben. Nur bei dieser Preisverteilung ist genau eine von Rainers Aussagen wahr, und die anderen beiden sind falsch.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen aus [5]

3.19.2 II. Runde 1978, Klasse 6

Aufgabe 1 - 180621
a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!

b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

a) Wegen $115 \cdot 165 = 18975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes 18975 km^2.
b) Wegen $700000 \cdot 65 = 45500000$ ist die Strecke in Wirklichkeit 45500000 cm = 455 km lang.

Aufgabe 2 - 180622
Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

Wenn z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat z nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9.
Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

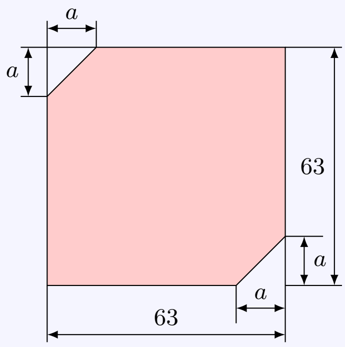
Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl, entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht.

Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

Aufgabe 3 - 180623
In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart.
Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wie viel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Wegen 1050 - 75 = 975 und 975 : 3 = 325 kostet die billigste Ausführung des Artikels 3,25 M.
Wegen 1050 + 75 = 1125 und 1125 : 3 = 375 kostet die teuerste Ausführung des Artikels 3,75 M.
Wegen 1050 - 325 - 375 = 350 kostet die dritte Sorte 3,50 M.

Aufgabe 4 - 180624



Die abgebildete farbige Fläche ist 38 cm^2 groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt 3969 mm^2. Wegen 38 cm^2 = 3800 mm^2 und 3969 - 3800 = 169 haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt 169 mm^2.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von 169 mm^2 und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm. Die Seitenlänge a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

3.20 XIX. Olympiade 1979

3.20.1 I. Runde 1979, Klasse 6

Aufgabe 1 - 190611
Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h, für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h, für den dritten Bus 36 Minuten und für den vierten Bus 1 Stunde.
Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab?
Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

Die Abfahrzeiten lauten
für den ersten Bus: 12.00, 12.45, 13.30, 14.15, 15.00, ...,
für den zweiten Bus: 12.00, 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, 14.30, 15.00, ...,
für den dritten Bus: 12.00, 12.36, 13.12, 13.48, 14.24, 15.00, ...,
für den vierten Bus: 12.00, 13.00, 14.00, 15.00, ...,

Daraus ist zu sehen: Die vier Busse fahren erstmalig um 15.00 Uhr wieder gleichzeitig ab. Bis dahin hat der erste Bus 4 Fahrten, der zweite Bus 6 Fahrten, der dritte Bus 5 Fahrten, der vierte Bus 3 Fahrten, durchgeführt.

Aufgabe 2 - 190612
Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so dass folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,
die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,
die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,
die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

Angenommen, vier Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen.
Die erste Zahl sei mit a bezeichnet. Die zweite, Zahl lautet dann $2a - 1$, die dritte Zahl $2(2a - 1) - 1 = 4a - 2 - 1 = 4a - 3$, die vierte Zahl $2(4a - 3) - 1 = 8a - 6 - 1 = 8a - 7$. Daher ist die Summe der vier Zahlen

$$a + 2a - 1 + 4a - 3 + 8a - 7 = 15a - 11$$

Aus $15a - 11 = 79$ folgt $15a = 90$. Daraus folgt, dass die erste Zahl $a = 6$ lautet, die zweite, dritte, vierte also 11, 21 bzw. 41.

Daher können nur die Zahlen 6, 11, 21, 41 (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen erfüllen. Die folgende Überprüfung zeigt, dass sie alle geforderten Bedingungen erfüllen:
Es gilt: $2 \cdot 6$ - 1 = 11, $2 \cdot 11$ - 1 = 21, $2 \cdot 21$ - 1 = 41 und 6 + 11 + 21 + 41 = 79.

Aufgabe 3 - 190613
In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, dass sie mit Sicherheit erreicht, dass sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint: "Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen."
Birgit meint: "Es genügen sogar 13 Kugeln."
Cornelia behauptet: "Es genügen dafür 12 Kugeln."
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, so erreicht man nicht mit Sicherheit, dass sich darunter 5 von gleicher Farbe befinden. Es können nämlich 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe Kugeln herausgegriffen worden sein.

Birgits Meinung ist wahr; denn hat man 13 Kugeln herausgegriffen, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:
1. Die ersten 12 herausgegriffenen Kugeln sind 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann muss die 13. Kugel eine dieser Farben haben; von dieser Farbe befinden sich also insgesamt 5 unter den 13 herausgegriffenen Kugeln, wie es erreicht werden sollte.

2. Die Farbverteilung unter den ersten 12 Kugeln ist eine andere als 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann hat sich gegenüber dieser Verteilung die Anzahl für mindestens eine dieser Farben erhöht, da sonst nicht insgesamt 12 Kugeln in der geänderten Verteilung vorliegen könnten. Also befinden sich bereits unter 12 Kugeln von mindestens einer Farbe mindestens 5 Kugeln. Damit ist dies erst recht für die 13 herausgegriffenen Kugeln der Fall.

Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn schon unter 13, erst recht also unter 15 Kugeln befinden sich 5 von gleicher Farbe.

Aufgabe 4 - 190614
Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

"Dieter erhielt keinen ersten Preis." (1)
"Karin erhielt keinen zweiten Preis." (2)
"Frank erhielt einen zweiten Preis" (3)

Später stellte sich heraus, dass von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.
Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Dieter erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 1. und die 2. Aussage wahr gewesen.
Auch Frank erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 2. und die 3. Aussage wahr gewesen.
Also erhielt Karin einen zweiten Preis. Somit waren die 2. und die 3. Aussage falsch, die erste dagegen wahr.
Folglich erhielt Dieter, da er weder einen ersten noch einen zweiten Preis erhalten haben konnte, einen dritten Preis. Den ersten Preis konnte schließlich nur Frank errungen haben; denn die beiden übrigen Preise hatten ja Karin und Dieter bekommen.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen aus [5]

3.20.2 II. Runde 1979, Klasse 6

Aufgabe 1 - 190621
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen 360 - 226 = 134 hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°.
Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen 180 - 134 = 46 hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

Aufgabe 2 - 190622
In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.
Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 119 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es das zu 15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M, so hatten beide Käufer zusammen 101 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M gezahlt.

Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muss folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu.
Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x = 99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.
Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müsste das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor.
Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

Aufgabe 3 - 190623
Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen.
Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat!
Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$x + 3x + 32x = 110 \qquad \to \qquad x = 20$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, dass man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.
Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal so viel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20 + 60 + 30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

Aufgabe 4 - 190624
Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel also genau 900 Zahlen zu drucken, d.h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1 mal vor.
Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1,...,9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9 mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10,...,19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10 mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1,...,8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen $(1 + 9 + 10 = 20)$, d.h. genau 160 mal. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100,...,199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100 mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit $1+9+10+160+100 = 280$.

Lösungen der II. Runde 1979 übernommen aus [5]

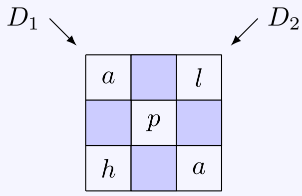
3.21 XX. Olympiade 1980

3.21.1 I. Runde 1980, Klasse 6

Aufgabe 1 - 200611

Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift alpha, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, dass sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 80 ergibt.



Dabei soll die Zahl a doppelt so groß wie die Zahl p sein; für l soll eine Primzahl eingetragen werden und für h eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von l ist.
Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt: Es gilt $a = 2p$.
In der Diagonalen D_1 steht daher die Summe $2p + p + 2p = 5p$.
Laut Aufgabe ist $5p = 80$, also $p = 16$ und $a = 32$. Ferner folgt $l + 16 + h = 80$, also $l + h = 64$.

Wäre die Primzahl l größer oder gleich 7, so wäre h größer als das Zehnfache hiervon, d.h. $h > 70$ und daher $l + h > 77$, im Widerspruch zu $l + h = 64$. Daher kann l nur eine der Primzahlen 2, 3, 5 sein.
Für $l = 2$ ergäbe sich $h = 62$, also keine Primzahl. Demnach verbleiben nur die Möglichkeiten, dass entweder $l = 3$, $h = 61$ oder $l = 5$, $h = 59$ ist.

32		3
	16	
61		32

32		5
	16	
59		32

Daher können nur die Eintragungen der Abbildung alle geforderten Bedingungen erfüllen.
Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt: $32 + 16 + 32 = 80$, $3 + 16 + 61 = 80$, $5 + 16 + 59 = 80$, 32 ist doppelt so groß wie 16, die Zahlen 3, 61, 5, 59 sind Primzahlen, 61 ist größer als das Zehnfache von 3, ebenso ist 59 größer als das Zehnfache von 5.

Also erfüllen genau die beiden angegebenen Eintragungen die geforderten Bedingungen.

Aufgabe 2 - 200612
Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, dass man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.
Berechne, wie viel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

Für 14 Tage verbrauchten 25 Urlauber 21000 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchten 25 Urlauber wegen $21000 : 14 = 1500$ also 1500 g Butter.
Für 1 Tag verbraucht 1 Urlauber wegen $1500 : 25 = 60$ also 60 g Butter.
Für 1 Tag verbrauchen 30 Urlauber wegen $60 \cdot 30 = 1800$ also 1800 g Butter.
Für 6 Tage verbrauchen 30 Urlauber wegen $1800 \cdot 6 = 10800$ also 10800 g = 10,8 kg Butter.

Aufgabe 3 - 200613
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

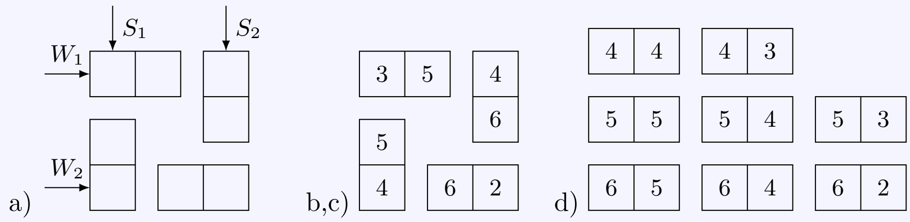
Wie die folgende Tabelle zeigt, haben genau die Zahlen 24 und 36 die verlangte Eigenschaft.

Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?	Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?
20	0	nein	21	2	nein
22	4	nein	23	6	nein
24	8	ja	25	10	nein
26	12	nein	27	14	nein
28	16	nein	29	18	nein
30	0	nein	31	3	nein
32	6	nein	33	9	nein
34	12	nein	35	15	nein
36	18	ja	37	21	nein
38	24	nein	39	27	nein

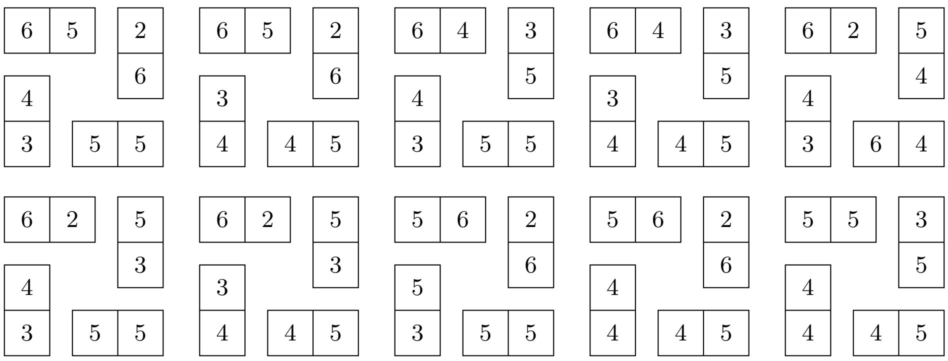
Aufgabe 4 - 200614
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt.
Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen W_1, W_2 und zwei senkrechte Streifen S_1, S_2. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z.B. ist diese Summe 12.
Die sonst übliche Regel, dass benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen W_1, W_2, S_1, S_2 die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.



Es genügt, fünf der Möglichkeiten aus der Abbildung anzugeben (oder jeweils statt einer dieser Möglichkeiten eine, die sich aus ihr durch Drehung oder Spiegelung gewinnen lässt).



Lösungen der I. Runde 1980 übernommen aus [5]

3.21.2 II. Runde 1980, Klasse 6

Aufgabe 1 - 200621
Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

Die Zeit von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr beträgt 1 h 15 min = 75 min.
Wegen 2100 - 600 = 1500 hat das Flugzeug in dieser Zeit 1500 km zurückgelegt. Wegen 75 : 15 = 5 benötigt es für je 100 km also 5 min, wegen 6 · 5 = 30 für die noch zurückzulegenden 600 km mithin 30 min. Daher trifft es 30 min nach 11.20 Uhr, d.h. um 11.50 Uhr in B ein.

Aufgabe 2 - 200622
Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt?
Wir nehmen an, dass der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

Wegen 22 · 6 · 1,5 = 22 · 9 = 198 enthält das bis zur Höhe von 1,50 m gefüllte Becken 198 m^3 Wasser. Da 1 m^3 = 1000 l sind, enthält das Becken also 198000 l Wasser. Wegen 198000 : 900 = 220 ist es somit nach genau 220 Minuten bis zur angegebenen Höhe gefüllt.

Aufgabe 3 - 200623
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1000 \leq z \leq 1700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

Eine Zahl ist genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) dieser Zahlen teilbar ist. Wegen der Primzahlzerlegungen

$$9 = 3^2, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 14 = 2\Delta 7$$

ist dieses kgV die Zahl 22 · 32 · 7 = 252.
Also ist eine natürliche Zahl z genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn es zu ihr eine natürliche Zahl n mit $z = 252 \cdot n$ gibt. Alle gesuchten Zahlen z erhält man daher aus denjenigen n, für die $1000 \leq 252n \leq 1700$ gilt. Nun stellt man fest:

Für $n = 3$ gilt $252n = 252 \cdot 3 = 756 < 1000$;
für $n = 7$ gilt $252n = 252 \cdot 7 = 1764 > 1700$;
für diese n erhält man also keine Zahlen z, die die genannten Bedingungen der Ungleichung erfüllen.

Für $n = 4$ wird $z = 252 \cdot 4 = 1008$;
für $n = 5$ wird $z = 252 \cdot 5 = 1260$;
für $n = 6$ wird $z = 252 \cdot 6 = 1512$;
diese drei Zahlen erfüllen also die Bedingung $1000 \leq z \leq 1700$.
Daher sind genau 1008, 1260 und 1512 die gesuchten Zahlen.

Aufgabe 4 - 200624
Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften "alpha" bzw. "Frösi" regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift "alpha".
(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.
(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig. Gerd dagegen nicht.

(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.
Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist!
Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, für die die gemachten Angaben zutreffen.
Dann ist Gerd wegen (3) und (4) weder der Schüler der Klasse 6b noch der Schüler der Klasse 6a noch der der Klasse 5b. Also besucht Gerd die Klasse 5a und liest wegen (2) [oder wegen (3)] die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.

Folglich gehört Ingo nicht der Klasse 5a an, nach (4) auch keiner der Klassen 6a oder 5b. Somit besucht Ingo die Klasse 6b und liest wegen (3) die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig.

Hans gehört demnach weder der Klasse 5a noch der Klasse 6b an. Da er nach (2) regelmäßig die Zeitschrift "alpha" liest, ist er wegen (1) auch nicht der Schüler der Klasse 5b. Also besucht Hans die Klasse 6a. Für Fred verbleibt somit nur noch die Klasse 5b. Hiernach und nach (1) liest er regelmäßig die Zeitschrift "Frösi".

Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, für die die gemachten Angaben zutreffen, dann kann es nur die folgende Zuordnung sein:

Vorname	Klasse	Zeitschrift
Gerd	5a	"alpha"
Fred	5b	"Frösi"
Hans	6a	"alpha"
Ingo	6b	"Frösi"

Man überzeugt sich leicht, dass für diese Zuordnung die gemachten Angaben tatsächlich zutreffen. Damit ist gezeigt, dass genau diese Zuordnung mit den gemachten Angaben übereinstimmt.

Lösungen der II. Runde 1980 übernommen aus [5]

3.22 XXI. Olympiade 1981

3.22.1 I. Runde 1981, Klasse 6

Aufgabe 1 - 210611
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

a) Verringert man die größere Seitenlänge des Rechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat.
Wegen 20 : 4 = 5 beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m^2.

b) Im Maßstab 1 : 250 wird wegen 5 m = 500 cm und 500 : 250 = 2 die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen 25 m = 2500 cm und 2500 : 250 = 10 wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.

Aufgabe 2 - 210612

6	4	6	:		□	9	=		□	□
	-					·			+	
□	□	□	-		□	6	=	□	4	□
□	8	□	-	□	□	□	=	□	□	0

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9 so geschrieben werden, dass die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

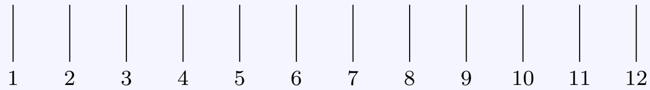
6	4	6	:		1	9	=		3	4
	-					·			+	
1	6	2	-		1	6	=	1	4	6
4	8	4	-	3	0	4	=	1	8	0

Aufgabe 3 - 210613
Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wie viel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

Hätte Heike 8 Kohlköpfe mehr und Kerstin 5 Kohlköpfe mehr geerntet, so wären es wegen 128+8+5 = 141 insgesamt 141 Kohlköpfe gewesen. Andererseits hätten dann alle drei Mädchen gleich viele Kohlköpfe geerntet, nämlich jede so viele wie Bianka.
Wegen 141 : 3 = 47 hat also Bianka 47 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 8 = 39 hat Heike 39 Kohlköpfe geerntet, wegen 47 - 5 = 42 hat Kerstin 42 Kohlköpfe geerntet.

Aufgabe 4 - 210614
Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Abbildung), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs "Doppelhölzchen" (d.h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden:

Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.



Beschreibe eine Serie von Sprüngen die diese Forderungen erfüllt!

Eine Serie der gesuchten Art ist z.B.: 1 auf 5, 7 auf 11, 9 auf 12, 4 auf 8, 2 auf 6, 3 auf 10.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen aus [5]

3.22.2 II. Runde 1981, Klasse 6

Aufgabe 1 - 210621
Ein Güterzug fährt von einer Station A (Kilometer 0) zu einer Station B (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in A ab.

Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr usw.) befindet!
Begründe diese Kilometerangaben!

Bei der Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde legt der Zug jeweils in 10 Minuten ein Sechstel der Strecke 45 km zurück, das sind (wegen $45 : 6 = 7\frac{1}{2}$) jeweils $7\frac{1}{2}$ km.
Berücksichtigt man noch die Wartezeit, so ergibt sich folgende Tabelle:

Uhrzeit	9.40	9.50	10.00	10.10	10.20	10.30	10.40	10.50	11.00	11.10
Kilometer	$7\frac{1}{2}$	15	15	15	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Aufgabe 2 - 210622
Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar.
Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form

$$418 * *$$

Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, dass sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen lässt.
Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat!
Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

Angenommen, es gibt eine solche Zahl. Dann folgt: Die Zahl ist durch 6 teilbar, also gerade; ihre Einerziffer lautet mithin 0, 2, 4, 6 oder 8.
Die Zahl ist ferner durch 9 teilbar; dasselbe gilt folglich für ihre Quersumme. Diese ist um $4 + 1 + 8$, d.h. um 13 größer als die Summe aus ihrer Zehner- und ihrer Einerziffer.
Setzt man der Reihe nach für die Einerziffer 0, 2, 4, 6, 8, dann ergibt sich für die Zehnerziffer jeweils der in der folgenden Tabelle angegebene Wert:

Einerziffer	Summe aus 13 und der Einerziffer	Zehnerziffer
0	13	5
2	15	3
4	17	1
6	19	8
8	21	6

Also kann die gesuchte Zahl nur eine der Zahlen 41850, 41832, 41814, 41886, 41868 sein. Von diesen ist nur 41832 durch 7 teilbar.
Daher kann nur diese Zahl an der angegebenen Stelle im Lehrbuch gestanden haben; denn sie hat als einzige alle verlangten Teilbarkeitseigenschaften und ist von der Form 418**, wie in der Aufgabe angegeben.

Aufgabe 3 - 210623
Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.
a) Wie viel Tische wurden im Monat Juni hergestellt ?
b) Wie viel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

In dem Betrieb wurden im Februar 10, im März 20, ..., im Juni 50, ..., im Dezember 110 Tische mehr hergestellt als im Monat Januar. Wegen

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 = 660$$

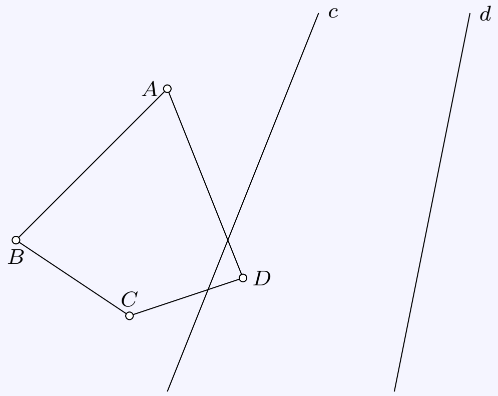
sind das insgesamt 660 Tische mehr, als wenn die Produktionssteigerung nicht erfolgt wäre, d.h. in allen 12 Monaten gleich viele Tische hergestellt worden wären, ebensoviele wie im Januar.
Wegen 1920 - 660 = 1260 und 1260 : 12 = 105 wurden im Januar somit 105 Tische produziert.

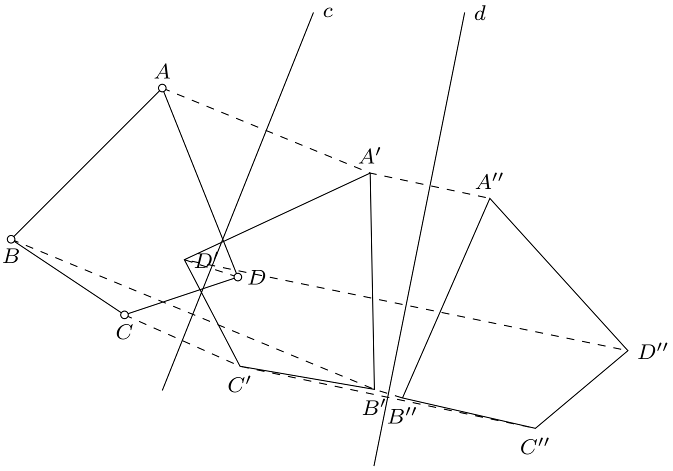
a) Aus 105 + 50 = 155 folgt, dass im Juni 155 Tische angefertigt wurden.
b) Wegen 105 + 110 = 215 wurden im Dezember 215 Tische hergestellt.

Aufgabe 4 - 210624

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden c und d!

Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.





Lösungen der II. Runde 1981 übernommen aus [5]

3.23 XXII. Olympiade 1982

3.23.1 I. Runde 1982, Klasse 6

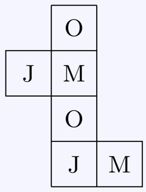
Aufgabe 1 - 220611
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

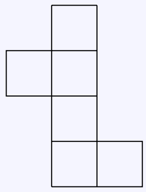
Wegen 60 - 10 = 50 hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen 60 cm · 60 cm · 50 cm = 180 000 cm^3 = 180 dm^3.
Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 dm^3 hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen 180 : 9 = 20 sind das genau 20 Eimer Wasser.

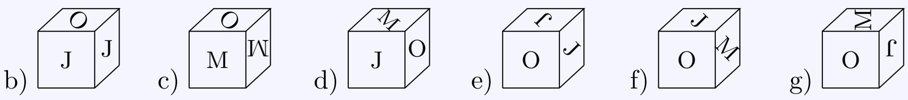
Aufgabe 2 - 220612

Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)

a) 

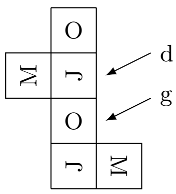
h) 



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.



a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

Aufgabe 3 - 220613
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, dass Frank höher als Ernst sprang.
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, dass Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

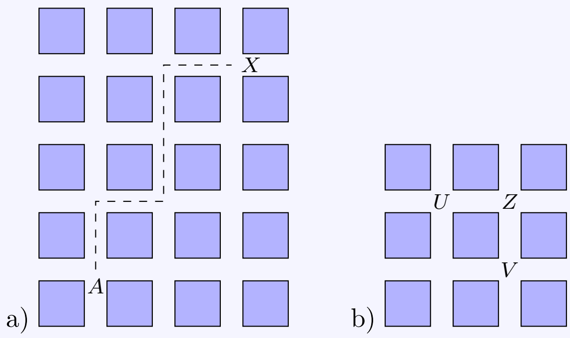
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten lässt!
Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

Bezeichnet man jeweils die Sprunghöhe eines Pioniers mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so erhält man:

Aus (1) folgt $D > A$, aus (3) folgt $A = C$ und $C > E$, aus (2) folgt $E > F$, aus (4) folgt $F > B$.
Die gesuchte Reihenfolge lautet daher:

$$D > A = C > E > F > B$$

Aufgabe 4 - 220614
Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z.B. X fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wie viel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.

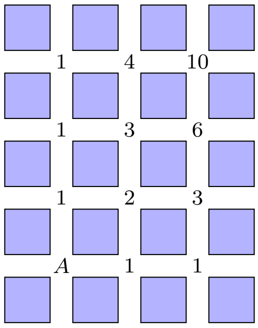


a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wie viel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wie viel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise:
Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z.B. w für waagerecht, s für senkrecht!

a) 

a) In der Abbildung sind die gesuchten Kreuzungen mit 1 bezeichnet.

b) Jeder mögliche kurze Weg von A nach Z führt entweder über U oder über V. Von U oder V aus hat man aber jeweils nur genau eine Möglichkeit, auf möglichst kurzem Wege nach Z zu kommen.
Also kann man die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen, indem man die entsprechenden Anzahlen für U und V addiert.

c) Ausgehend von den in a) gefundenen Kreuzungen findet man mit Hilfe der Überlegung aus b) der Reihe nach die Anzahlen

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 4 = 1 + 3, \quad 6 = 3 + 3, \quad 10 = 4 + 6$$

in der Abbildung.

d) Es gibt genau die folgenden möglichst kurzen Wege von A nach X:

s s s w w,
s s w s w,
s s w w s,
s w s s w,
s w s w s,
s w w s s,
w s s s w,
w s s w s,
w s w s s,
w w s s s.

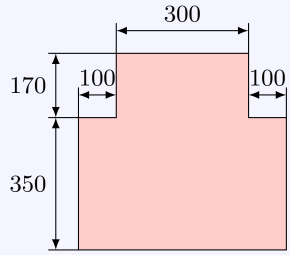
Ihre Aufzählung erfolgte hier "lexikographisch" (d.h. nach der Regel für die Anordnung in einem Lexikon), was eine bessere Übersicht zur Sicherung der Vollständigkeit ergibt.

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen aus [5]

3.23.2 II. Runde 1982, Klasse 6

Aufgabe 1 - 220621

Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.



Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

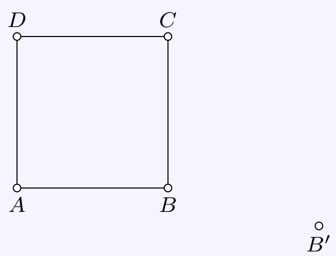
Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

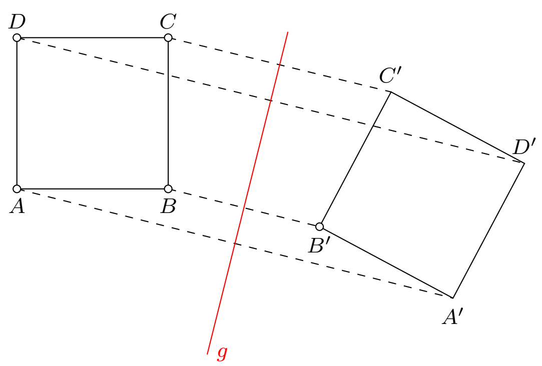
$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280cm^2 = 599200cm^2$$

das sind 59,92 m^2, also rund 60 m^2.
Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund $L_W = 60 \cdot (28+26+83)$ Pf $= 8220$ Pf, das sind 82,20 M. Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten: $A_D = (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350) =$ 252000 cm^2, das sind 25,2 m^2, also rund 25 m^2. Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit, mit analoger Rechnung, rund 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten L betragen daher $L = 124{,}03$ M, das sind rund 124 M.

Aufgabe 2 - 220622

Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g.
Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g!
Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.





Aufgabe 3 - 220623
Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.
Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.
Nenne vier derartige Summanden!
Überprüfe, dass sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, dass die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie $3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$.

Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müsste der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht.

Also muss der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, dass auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

Aufgabe 4 - 220624
An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(2) b ist ein Teiler von c,
(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,
(4) d ist ein Teiler von e,
(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,
(6) b ist ein Teiler von d,
(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,
(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt!
Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

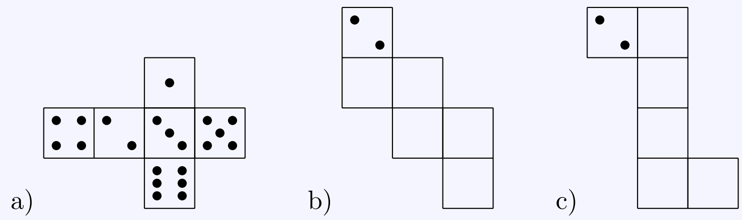
Aus (7) folgt $c > a$,
aus (1) folgt $a > e$,
aus (4) folgt $e > d$,
aus (6) folgt $d > b$.
Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$ die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein.
Sie sind erfüllbar, z.B. durch $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$; denn 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 1 ist ein Teiler von 16, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4, 2 ist ein Teiler von 4, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1, 1 ist ein Teiler von 2, 16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8, 8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Lösungen der II. Runde 1982 übernommen aus [5]

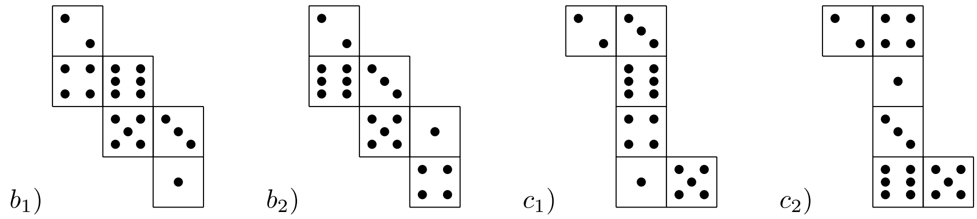
3.24 XXIII. Olympiade 1983

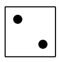
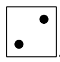
3.24.1 I. Runde 1983, Klasse 6

Aufgabe 1 - 230611
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.



Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

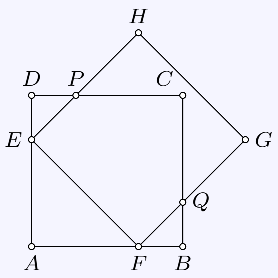


Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.
Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z.B.  .

Aufgabe 2 - 230612
Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel.
Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.
Wie viel Mark kostete ein Buch? Wie viel Mark kostete ein Ball?

Die zweite Brigade kaufte genau zwei Bälle mehr und bezahlte (wegen 24 - 15 = 9) genau 9 Mark mehr als die erste Brigade. Folglich kostet ein Ball (wegen 9 : 2 = 4, 50) genau 4,50 Mark.
Also zahlte die erste Brigade genau 9 Mark für die Bälle. Wegen 15 - 9 = 6 zahlte sie für die drei Bücher genau 6 Mark, also kostete ein Buch genau 2 Mark.

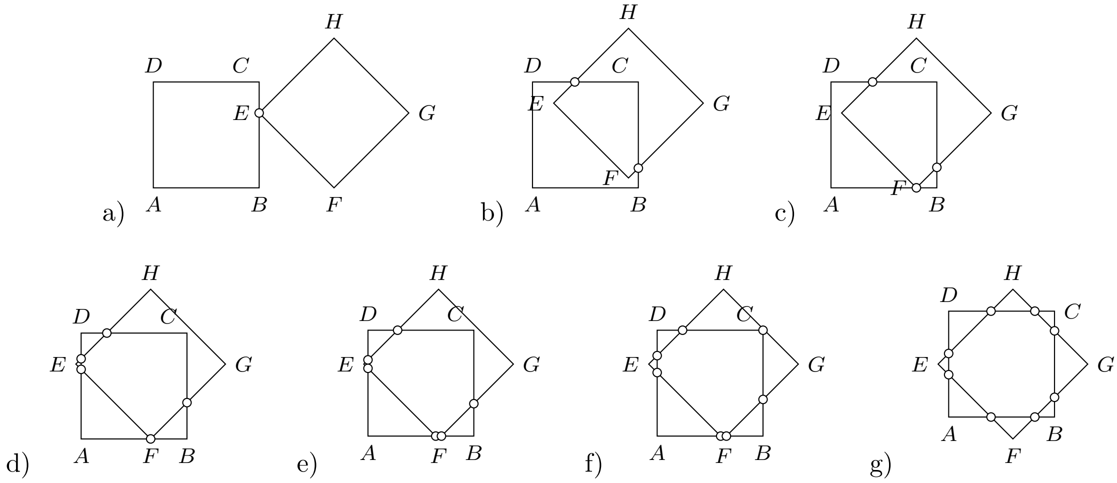
Aufgabe 3 - 230613



Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.
Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

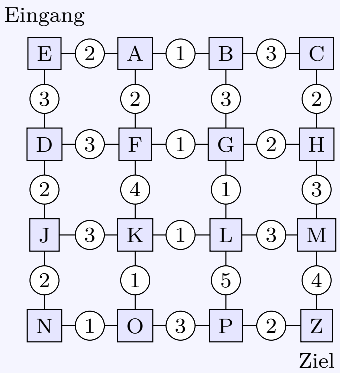
a) genau einen Punkt,
b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte,
d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte,
f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

Aufgabe 4 - 230614



Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen. Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird!
Wie viel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?
b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit A, B, C, D, E, F, ..., P bezeichnet, wie es in der Abbildung angegeben ist.

Um in kürzester Zeit zum Ziel zu kommen, sind 13 Minuten ausreichend.
Es gibt insgesamt genau vier verschiedene Wege, bei denen 13 Minuten ausreichend sind, nämlich

$$EAFGLKOPZ, \qquad EAFGLMZ, \qquad EAFGLPZ, \qquad EDJNOPZ$$

Als Lösung zu a) gilt die Angabe eines dieser Wege, als Lösung zu b) die Angabe zweier weiterer.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen aus [5]

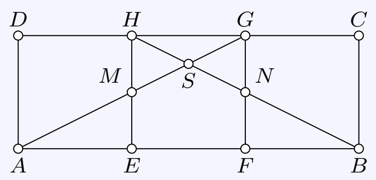
3.24.2 II. Runde 1983, Klasse 6

Aufgabe 1 - 230621
Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden.
Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9000 Liter Milch fasst.

a) Berechne, wie viel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!
b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

a) Wegen $2200 \cdot 25 : 4 = 13750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9600$ und $13750 + 7200 + 9600 = 30550$ sollen insgesamt 30550 Liter Milch ausgeliefert werden.
b) Wegen $30550 : 9000 = 3$ Rest 3550 waren für den Abtransport der 30550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

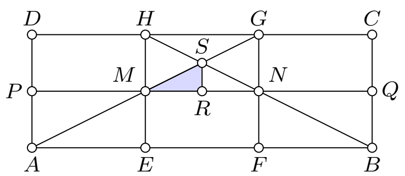
Aufgabe 2 - 230622
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Wegen $48 : 3 = 16$ beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten.



Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Der Abbildung ist dann zu entnehmen:

Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten.

Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks MNS.
Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

Aufgabe 3 - 230623
Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge).

Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgenden ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.
(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

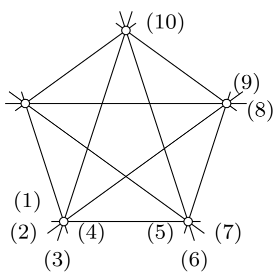
Zeige, dass sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagsgäste eindeutig ermitteln lässt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten!
Gib diese zusammengehörenden Namen an!

Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt: (3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.
Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (4) Giebler hat den Vornamen Christian.
Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt: (5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.
Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin: Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

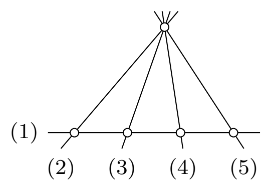
Aufgabe 4 - 230624
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, dass es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

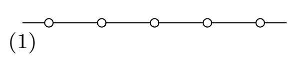
a) Folgende Beispiele zeigen, dass alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

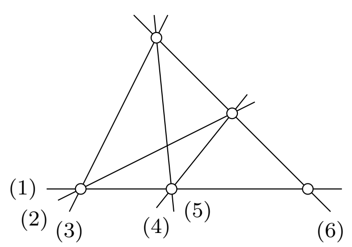


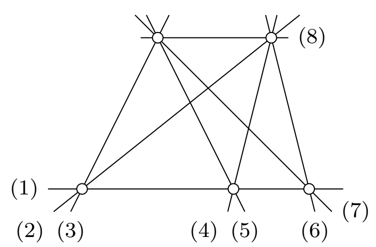
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungsgerade

b) Folgende beiden Beispiele zeigen, dass die fünf Punkte auch so liegen können, dass es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:





Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

3.25 XXIV. Olympiade 1984

3.25.1 I. Runde 1984, Klasse 6

Aufgabe 1 - 240611
Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

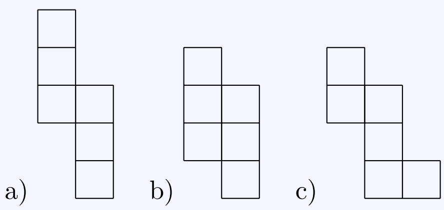
Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

Werden x Bücher zu je 6 M und y Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt $6x + 4y = 30$. (1)
Wegen $y \geq 1$ folgt hieraus $6x \leq 26$, also muss $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geq 1$ gibt es für x nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, dass $4y = 30 - 6x$ gelten muss.
Bei den übrigen Werten von x ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für y.

x	$6x$	$30 - 6x = 4y$	y
1	6	24	6
2	12	18	-
3	18	12	3
4	24	6	-

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:
Es werden entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M gekauft.
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geq 1$, $y \geq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

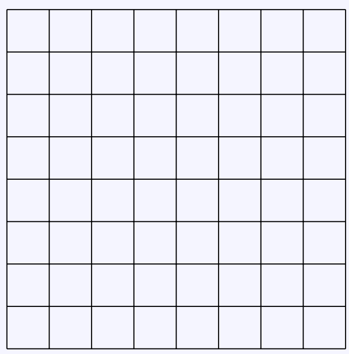
Aufgabe 2 - 240612
Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, dass es Körpernetze von Würfeln seien.



(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

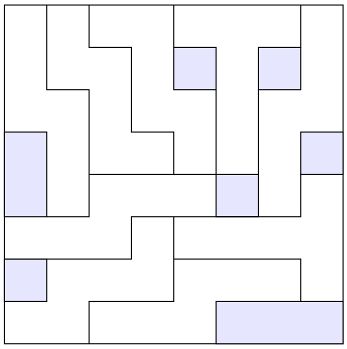
(2) Zeige, dass es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden!

Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.
Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wie viele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?



(1) Genau die Bilder a), c) und e) sind Würfelnetze.

(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt die Abbildung. Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.



Aufgabe 3 - 240613
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400 \text{ cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel.
Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels, also $A_D = a_1^2 = 400$ cm^2. Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor.
Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 4 - 240614
Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111111111.

(a) Um welche Zahl z handelt es sich?
(b) Ermittle eine Zahl x, die folgende Eigenschaft besitzt!
Wenn man x mit der in (a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.
(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?
Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

(a) Wegen $111111111 : 9 = 12345679$ ist $z = 12345679$ die Zahl, die mit 9 multipliziert 111111111 ergibt.

(b) Aus $12345679 \cdot 9 = 111111111$ folgt $12345679 \cdot 72 = 888888888$ (1)
Daher hat beispielsweise die Zahl $x = 72$ die verlangte Eigenschaft, dass die Zahl $z \cdot x$ mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt $12345679 \cdot 72 \cdot 1000000001 = 888888888 \cdot 1000000001$, (2)
d.h. $12345679 \cdot 72000000072 = 888888888888888888$. (3)
Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72 000 000 072 die verlangte Eigenschaft.

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen aus [5]

3.25.2 II. Runde 1984, Klasse 6

Aufgabe 1 - 240621
Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

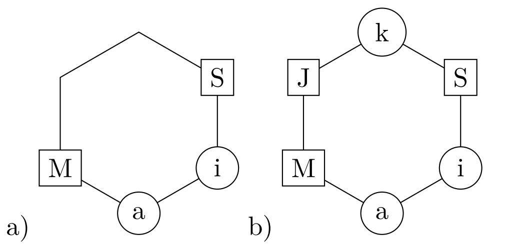
(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in der Abbildung a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach der Abbildung a nur der Platz rechts neben Ines.
Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in der Abbildung a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nichts Steffens Schwester ist, muss Kerstin Michaels Schwester (*) sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm.

Wie Abbildung a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung b).
Weiter folgt aus Abbildung a) oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist Ines Jörgs Schwester, (**)
und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben Agnes und Steffen. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung b) angegeben.



Aufgabe 2 - 240622
Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen?
(Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24
Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

Aufgabe 3 - 240623
Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.
Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.
Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen $6 \cdot 9 = 54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6 \cdot 8 = 48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6 \cdot 6 = 36$ in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen 54 - 48 = 6 bzw. 54 - 36 = 18 bzw. 48 - 36 = 12 die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen 6 km, zwischen Rainer und Frank 18 km, zwischen Jürgen und Frank 12 km.

Aufgabe 4 - 240624
Rita experimentiert mit einer Balkenwaage.
(Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)
Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:
"Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"
Beweise, dass man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne dass ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

Ist k, w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), dass jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

$$p + 5w = 14k \tag{5}$$
$$w + 8k = p. \tag{6}$$

Wegen (6) besagt (5) $w + 8k + 5w = 14k$, also $6w = 6k$ und folglich $w = k$. Hiernach ergibt sich aus (6) $9k = p$.
Damit ist bewiesen, dass man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

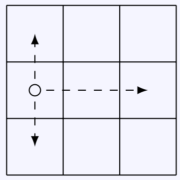
Lösungen der II. Runde 1984 übernommen aus [5]

3.26 XXV. Olympiade 1985

3.26.1 I. Runde 1985, Klasse 6

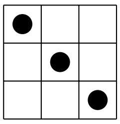
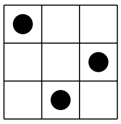
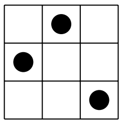
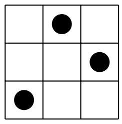
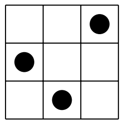
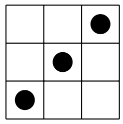
Aufgabe 1 - 250611

Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.



a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

a) Es gibt genau folgende sechs Stellungen der geforderten Art:

a)  b)  c)  d)  e)  f) 

b) Da in Stellung (a) das Mittelfeld besetzt ist, in Stellung (b) dagegen nicht, kann es keine Drehung um das Mittelfeld geben, bei der eine dieser beiden Stellungen aus der anderen hervorgeht.
Die Stellung (c), (d) bzw. (e) geht aus der Stellung (b) durch Drehung um 180°, 90° bzw. 270° um das Mittelfeld hervor. Die Stellung (f) geht aus der Stellung (a) durch Drehung um 180° um das Mittelfeld hervor.
Folglich gibt es genau zwei verschiedenartige Stellungen (nämlich die Stellungen (a) und (b)).

Aufgabe 2 - 250612

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{m} & \mathrm{a} & \mathrm{t} & \mathrm{h} & \mathrm{e} \\ + & & \mathrm{o} & \mathrm{l} & \mathrm{y} & \mathrm{m} \\ + & & & & \mathrm{p} & \mathrm{i} \\ + & & & \mathrm{a} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{k} & \mathrm{l} & \mathrm{a} & \mathrm{s} & \mathrm{s} & \mathrm{e} \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist. Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) a ist zwei Drittel von m.
(3) e ist zwei Drittel von a.
(4) Die Summe von a und s ist gleich m.
(5) d ist kleiner als h.

a) Zeige, dass es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wie viel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

a) Wenn eine Eintragung alle Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:
Wegen (2) und (3) ist sowohl m als auch a durch 3 teilbar, wobei a zwei Drittel von m beträgt. Folglich ist m sogar durch 9 teilbar.
Da m als Anfangsziffer nicht 0 ist, gilt somit $m = 9$.
Wegen (2) und (3) folgt hieraus $a = 6$ und $e = 4$. Wegen (4) gilt dann $6 + s = 9$, also $s = 3$. Offensichtlich gilt $k = 1$ und $l = 0$ (da die Summe kleiner als $96994 + 9969 + 99 + 694 = 107756$ ist). Unter Beachtung von (1) erhält man daher:

	9	6	t	h	4
+		9	0	6	9
+				t	i
+			6	d	4
1	0	6	3	3	4

Nur für $i = 7$ endet die Summe der Einerziffern auf 4, wobei ein Übertrag von 2 entsteht.
Für h, t und d bleiben noch die Ziffern 2, 5 und 8, deren Summe 15 beträgt, so dass die Summe aus den Zehnerziffern und dem Übertrag 2 insgesamt 23 ergibt. Unter Beachtung des sich aus 23 ergebenden neuen Übertrags folgt aus der Summe der Hunderterziffern, dass $t = 5$ gilt. Damit ist entweder $d = 2$ und $h = 8$ oder $d = 8$ und $h = 2$. (*)
Wegen (5) entfällt der letztgenannte Fall. Folglich kann nur die Eintragung

	9	6	5	2	4
+		9	0	6	9
+				5	7
+			6	8	4
1	0	6	3	3	4

alle Forderungen der Aufgaben erfüllen. Da man für diese Eintragung in der Tat alle Forderungen bestätigt, ist damit bewiesen, dass es genau diese eine Eintragung der geforderten Art gibt.

b) Verzichtet man auf die Forderung (5), dann können beide in (*) genannten Fälle eintreten, und es gibt genau zwei Lösungen des Kryptogramms.

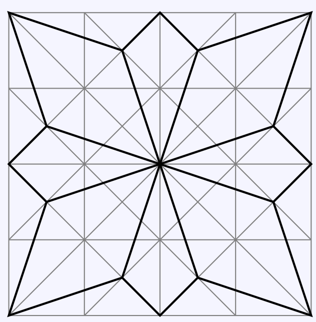
Aufgabe 3 - 250613

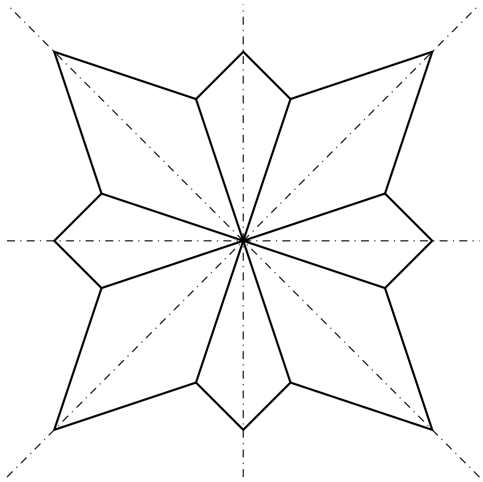
Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier.
Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, dass sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, dass Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte?
Gib alle Möglichkeiten an!

Jörg hat weniger als (die von Dirk gebrachten) 32 kg abgeliefert. Wegen 50 - 32 = 18 hat er aber mehr als 18 kg abgeliefert. Hätte er drei oder weniger Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $3 \cdot 5 + 3 = 18$ nur 18 kg oder weniger geliefert.
Hätte er sechs oder mehr Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $6 \cdot 5 + 3 = 33$ mehr als 32 kg geliefert. Also kann er nur vier oder fünf Bündel zu 5 kg gebracht haben.
Diese beiden Fälle sind in der Tat möglich, da sie auf $4 \cdot 5 + 3 = 23$ bzw. $5 \cdot 5 + 3 = 28$ führen.

Aufgabe 4 - 250614

In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!





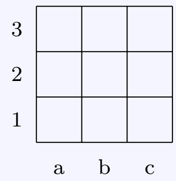
Die Überprüfung ergibt, dass das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.
a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

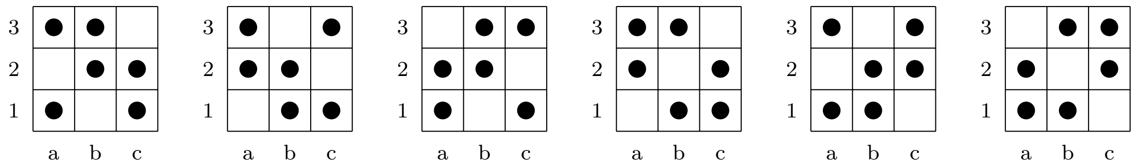
b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

Lösungen der I. Runde 1985 übernommen aus [5]

3.26.2 II. Runde 1985, Klasse 6

Aufgabe 1 - 250621
Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, dass jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.
Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine!
Eine Begründung wird nicht verlangt.





Aufgabe 2 - 250622
Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.
(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man
(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

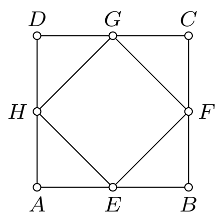
Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist $e - 4$ die erste Zahl, $e - 3$ die zweite Zahl, $e + 2$ die dritte Zahl, $e + 1$ die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher $e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 = 60$ und somit $e = 64$; also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt 12 + 13 + 18 + 17 = 60, also ist (1) erfüllt, und es gilt 12 + 4 = 16, 13 + 3 = 16, 18 - 2 = 16, 17 - 1 = 16, also ist (2) erfüllt.

Aufgabe 3 - 250623
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196 cm^2.
Wegen 196 : 2 = 98 hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98 cm^2.

Aufgabe 4 - 250624
Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!
b) Weise nach, dass es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt.
Außerdem ist ersichtlich, dass jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und dass für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen passt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müsste als Anke. Anke erhält genau 3 volle Flaschen.

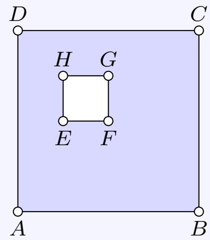
Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, dass von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte "voll" der obigen Tabellen).
Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wie viel leere Flaschen es bekommen muss, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte "leer").
Damit ist gezeigt, dass nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]

3.27 XXVI. Olympiade 1986

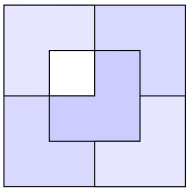
3.27.1 I. Runde 1986, Klasse 6

Aufgabe 1 - 260611



In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.

a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte 64 cm^2 bzw. 4 cm^2. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen 64 - 4 = 60 den Flächeninhalt 60 cm^2.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 260612
Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, dass jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.
(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.
(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.
(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.
(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.
(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.
(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.
(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!
b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

a) Unter den 15 in (8) genannten Teilnehmern ohne Rot- und Grünstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten Teilnehmer (ohne Rot- und Grünstift, aber) mit Kugelschreiber; die anderen 10 hatten folglich überhaupt kein Schreibgerät.
Aus (8) und (1) folgt ferner: Alle 85 in (8) nicht genannten Teilnehmer hatten ein Schreibgerät (nämlich mindestens eines der Geräte Rot- oder Grünstift). Also hatten nur die genannten 10 Teilnehmer kein Schreibgerät.
Damit ist gezeigt: Genau 90 der Teilnehmer hatten wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht.

b) Unter den 20 in (2) genannten sämtlichen Teilnehmern mit Kugelschreiber, aber ohne Rotstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten (mit Kugelschreiber, ohne Rotstift und) ohne Grünstift; die anderen 15 hatten folglich außer dem Kugelschreiber einen Grünstift mitgebracht. Daraus folgt:

Die mitgebrachten Schreibgeräte reichten aus, um alle Teilnehmer zu versorgen. Es genügte z.B., 10 der genannten Grünstifte an die in a) ermittelten Teilnehmer ohne mitgebrachtes Schreibgerät zu verteilen.

Aufgabe 3 - 260613
Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

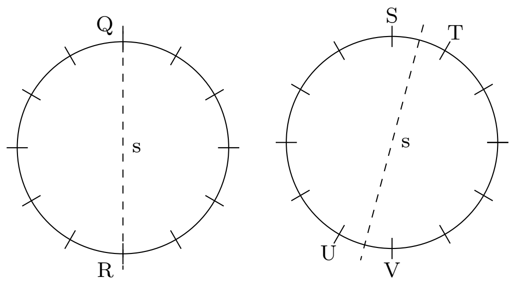
a) Wegen $AB + BC = 25$ km und $AC + BC = 27$ km ist AC um 2 km länger als AB. Damit ist wegen $CD = BD$ eine Wanderung von A über C nach D um 2 km länger als eine Wanderung von A über B nach D.
Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort B.

b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dem kürzeren Wege von A nach D gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von A nach D auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von A über B nach C, dann von C über A nach B und dann von B über C nach A laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks ABC durchlaufen und wegen 25 + 28 + 27 = 80 insgesamt 80 km zurücklegen.

Folglich ist wegen 80 : 2 = 40 der Umfang des Dreiecks ABC gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $AC + BC = 27$ km, so verbleibt $AB = 40$ km - 27 km = 13 km.
Subtrahiert man vom Umfang aber $AC + AB = 28$ km, so verbleibt $BC = 40$ km - 28 km = 12 km. Daher ist $BD = 12$ km : 2 = 6 km. Der gesuchte Weg beträgt folglich $AB + BD = 13$ km + 6 km = 19 km.

Aufgabe 4 - 260614
Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen.
Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.
Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?



Spieler B kann die Axialsymmetrie der Figur ausnutzen. Für den ersten Zug von Spieler A sind genau die folgenden zwei Fälle möglich

1. Spieler A nimmt nur einen Stein weg, wir bezeichnen ihn mit Q. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die durch Q geht.
Auf s liegt noch ein Stein R. Diesen nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

2. Spieler A nimmt zwei nebeneinanderliegende Steine S und T weg. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die zwischen S und T verläuft.

Die Gerade s verläuft dann noch zwischen zwei weiteren nebeneinanderliegenden Steinen U und V. Diese nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

Nach dem ersten Zug von Spieler B liegen zwei zueinander bezüglich s symmetrische Steine niemals nebeneinander, sondern sind durch mindestens einen Punkt ohne Spielstein voneinander getrennt. Daher kann Spieler A niemals in einem Zug gleichzeitig einen Stein P und den zu ihm bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein P' wegnehmen.

Folglich wird Spieler B in jedem Fall zum Wegnehmen des letzten Steines, also zum Gewinn, kommen, wenn er zu jedem Stein, den Spieler A wegnimmt, im Gegenzug den bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein wegnimmt.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen aus [5]

3.27.2 II. Runde 1986, Klasse 6

Aufgabe 1 - 260621
Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

$$27 * *7$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt.
Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern 0,2 bzw. 2,9 bzw. 1,1 bzw. 3,8 bzw. 2,0 bzw. 4,7 bzw. 5,6 bzw. 7,4 bzw. 8,3 bzw. 9,2 ersetzt werden.
Die gesuchten Zahlen lauten mithin
27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

Aufgabe 2 - 260622
Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken.
Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

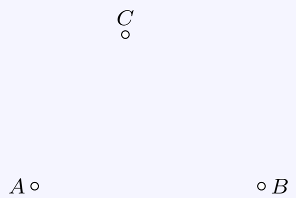
Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch.
Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.
Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

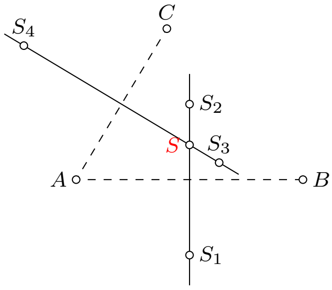
1. Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.
2. Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintraten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.)

Also muß der folgende Fall zutreffen:
3. Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch. Dass (2) falsch ist, besagt: Petra wünscht sich den Ball (in Übereinstimmung damit, dass auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und dass (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig: Anja wünscht sich die Puppe, Britta wünscht sich das Album.

Aufgabe 3 - 260623



Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!
c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!



a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung):
Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}AB$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3, und S_4, für die $S_3A = S_3C$ und $S_4A = S_4C$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind.
Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn: $S_A = S_B$ und $S_A = S_C$ und damit auch $S_B = S_C$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.

Aufgabe 4 - 260624
Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, dass Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muss.
Weise nach, dass die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen 20 - 8 = 12 müßte es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.

Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen 4 - 2 = 2 müsste es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben. Es wird nun ausgesagt, dass genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist.

Also folgt aus den Angaben, dass es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müsste. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, 13 + 16 = 29 ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

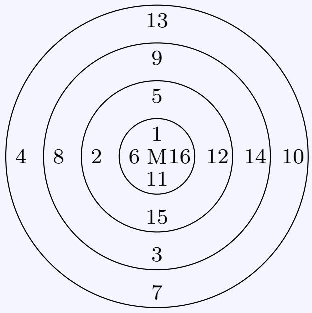
Lösungen der II. Runde 1986 übernommen aus [5]

3.28 XXVII. Olympiade 1987

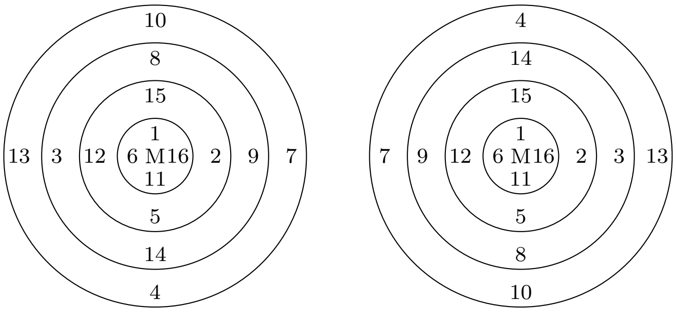
3.28.1 I. Runde 1987, Klasse 6

Aufgabe 1 - 270611

Vier Kreisscheiben (siehe Abbildung) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, dass danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.
Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Die Abbildung zeigt zwei Möglichkeiten:



Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, dass dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

Aufgabe 2 - 270612

In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (siehe Abbildung) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.
Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.

1			
	1		
		1	
			1

Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

1	3	5	2
4	1	3	5
2	4	1	3
5	2	4	1

1	3	5	2
4	1	3	5
2	5	1	3
5	2	4	1

1	4	2	5
3	1	4	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
3	1	5	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
4	1	5	2
2	5	1	4
5	2	4	1

1	4	2	5
5	1	4	2
2	5	1	4
4	2	5	1

1	5	2	4
4	1	5	2
2	4	1	5
5	2	4	1

1	5	2	4
5	1	4	2
2	4	1	5
4	2	5	1

Aufgabe 3 - 270613
Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.
(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.
(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.
(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

Ordne die Jungen nach ihren Gewicht; beginne bei dem schwersten!
Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

Die Reihenfolge lautet: Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.

Probe:
zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.
zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.
zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.
zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

Aufgabe 4 - 270614
Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, dass der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so dass nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.
Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander. Entsprechend wird fortgesetzt: übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt.
(Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)

(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem
a) zweiten, b) dritten, c) vierten Zerschneiden entstanden sind!

(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einen Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

(1) Die Anzahl ist a) 4, b) 8, c) 16.
(2) Als weitere Anzahlen nach dem fünften, sechsten, ... Schnitt u.s.w. treten auf: 32, 64, 128, 256, ... und dann noch größere Anzahlen (nämlich jeweils das Doppelte der vorangehenden Anzahl). Daher kommt unter den auftretenden Anzahlen die Zahl 160 nicht vor.

Lösungen der I. Runde 1987 übernommen aus [5]

3.28.2 II. Runde 1987, Klasse 6

Aufgabe 1 - 270621
Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

Frank sagte: "Jens oder Peter wird gewinnen."
Horst sagte: "Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."
Norbert sagte: "Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."
Stefan sagte: "Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."

(a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde! In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, dass Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

(a) Nach Stefans Aussage wurde Michael Dritter. Jens muss gewonnen haben; denn andernfalls ergäbe sich aus Horsts Vorhersage die falsche Aussage, dass Michael gewonnen hätte. Also wurde Jens Erster und Peter Zweiter.

(b) Da Franks Aussage falsch war, hat Michael gewonnen. Deshalb, und weil Norberts Aussage falsch war, kann Jens nicht Zweiter geworden sein; folglich wurde er Dritter und Peter Zweiter.

Aufgabe 2 - 270622
(a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!

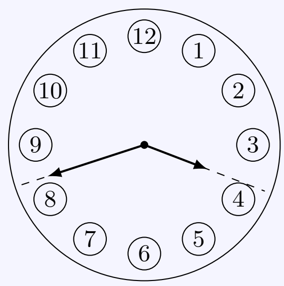
(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, dass bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

(a) Die Spiele (bezeichnet durch Hintereinanderschreiben der Buchstaben) sind AB, AC, AD, BC, BD, CD.

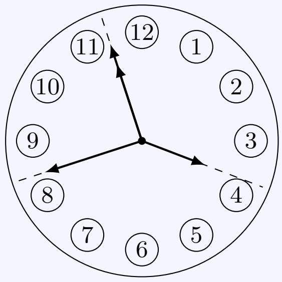
(b) Kommt noch eine fünfte Mannschaft E hinzu, so ergeben sich außer diesen sechs Spielen noch weitere vier (AE, BE, CE, DE), insgesamt also zehn Spiele.
Kommt eine sechste Mannschaft hinzu, so ergeben sich zusätzlich genau die fünf weiteren Spiele, die sie mit A, B, C, D, E auszutragen hat, insgesamt also 15 Spiele.
Eine siebente Mannschaft hat genau sechs weitere Spiele auszutragen. Damit ist gezeigt, dass bei sieben Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen.

Aufgabe 3 - 270623

(a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Abbildung) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9.
Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, dass in einem Teil die Summe $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ und im anderen Teil die Summe $9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$ steht.



Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!



(b) Bei einer anderen Uhr (siehe Abbildung) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.
Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen 4+5+6+7+8 = 30, 9+10+11 = 20, 12+1+2+3 = 18 aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

(a) Anzugeben ist eine Uhrzeit zwischen 3.45 Uhr und 3.50 Uhr sowie eine Uhrzeit zwischen 9.15 Uhr und 9.20 Uhr.
Zur Überprüfung beider Angaben ist die Gleichheit der Summen $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$, $10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 39$ zu bestätigen.

(b) Die Summe aller zwölf Zahlen des Zifferblattes beträgt 78. Gäbe es eine Uhrzeit der genannten Art, so müsste wegen $78 : 3 = 26$ in jedem der Teile die Summe 26 stehen. Dass dies nicht möglich ist, kann z.B. folgendermaßen gezeigt werden:

Die Zahl 10 kann nicht als erster Summand auftreten, da $10 + 11 < 26$ und bereits $10 + 11 + 12 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als erstem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann nicht als zweiter Summand auftreten, da $9 + 10 < 26$ und bereits $9 + 10 + 11 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als zweitem Summanden erst recht größer als 26 sind.
Die Zahl 10 kann aber auch nicht als dritter oder weiterer Summand auftreten, da bereits $8+9+10 > 26$ ist, also alle anderen Summen, in denen 10 als dritter oder weiterer Summand auftritt, erst recht größer als 26 sind.

Aufgabe 4 - 270624
In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden

auf Maschine A genau 2 Werkstücke, auf Maschine B genau 3 Werkstücke,
auf Maschine C genau 8 Werkstücke, auf Maschine D genau 12 Werkstücke

hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, dass zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, dass jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, dass
(a) auf allen vier Maschinen,
(b) auf genau drei der vier Maschinen,
(c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

Die Zeitpunkte, zu denen Werkstücke fertig werden, sind die folgenden Uhrzeiten:

Maschine	Uhrzeiten															
A								12								24
B					8						16					24
C		3		6		9		12		15		18		21		24
D	2		4	6	8		10	12	14		16	18	20		22	24

Daraus ist ersichtlich: Es kommt insgesamt
(a) genau einmal (nämlich um 24.00 Uhr)
(b) genau einmal (nämlich um 12.00 Uhr für A, C, D)
(c) genau viermal (nämlich um 6.00 Uhr und 18.00 Uhr für C, D sowie um 8.00 und 16.00 Uhr für B, D) vor, dass auf (a) allen, (b) genau drei bzw. (c) genau zwei Maschinen zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird.

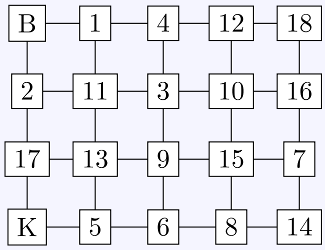
Lösungen der II. Runde 1987 übernommen aus [5]

3.29 XXVIII. Olympiade 1988

3.29.1 I. Runde 1988, Klasse 6

Aufgabe 1 - 280611

Bello (B) kann nur dann zum Knochen (K) gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2431 beträgt.
Welchen Weg muss er wählen?

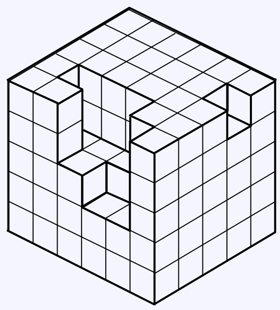


Die Zahl 2431 hat folgende Eigenschaften:
Sie ist weder durch 2 noch durch 4 teilbar; denn sie ist ungerade. Sie ist nicht durch 3 und auch nicht durch 9 teilbar; denn ihre Quersumme $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar. Sie ist nicht durch 5 teilbar; denn sie hat als letzte Ziffer weder die 0 noch die 5.

Daher kommt auf dem Bild nur ein Weg in Frage, der die Zahlen 2, 3, 4, 9 und 5 vermeidet. Es gibt genau einen solchen Weg, nämlich über 1, 11, 13, 17. Wegen $1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2\,431$ liefert er das geforderte Produkt.
Also muss Bello genau diesen Weg wählen.

Aufgabe 2 - 280612

Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!



Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich
genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.
Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

Aufgabe 3 - 280613
Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.
(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.
(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

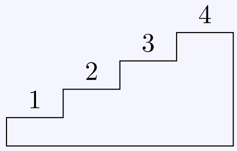
Nach Abschluss der Schulolympiade stellt sich heraus, dass die Aussage (4) wahr ist und dass in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.
Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte!
Zeige, dass die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Eine mögliche Verteilung lautet:
Tanja - 1. Platz; Mario - 2. Platz; Rigo - 3. Platz; Petra - 4. Platz.

Bei dieser Verteilung ist die Angabe (4) wahr. In (1) ist "Tanja erreicht den ersten Platz" wahr und "Petra den zweiten" falsch. In (2) ist "Tanja wird Zweite" falsch und "Rigo Dritter" wahr.
In (3) ist "Mario belegt den zweiten Platz" wahr und "Rigo den vierten" falsch. Somit ist in den Meinungen (1) bis (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch.

Aufgabe 4 - 280614

Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z.B. 1, 3, 4.)



a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wie viel sind es insgesamt?
b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!
c) Jemand behauptet: "Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."
Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!
d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen lässt!
e) Wie kommt es, dass die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?
f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

a) Alle möglichen Schrittfolgen für die vierstufige Treppe sind:

$$1,2,3,4; \quad 1,2,4; \quad 1,3,4; \quad 2,3,4; \quad 2,4$$

b) Alle möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe sind:

$$1,2,3; \quad 1,3; \quad 2,3$$

Alle möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe sind: $1,2;2$, Für eine einstufige Treppe gibt es genau die Schrittfolge 1.
c) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer vierstufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe: $5 = 3 + 2$.

d) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der zweistufigen und der einstufigen Treppe: $3 = 2 + 1$.

e) Um in der angegebenen Weise die vierstufige Treppe hinaufzugehen, kann man entweder mit dem ersten Schritt nur eine Stufe steigen und hat dann noch drei Stufen vor sich, oder man kann mit dem ersten Schritt zwei Stufen nehmen und hat dann nur noch zwei Stufen vor sich.

Im ersten Fall ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe, und im zweiten Fall ist sie gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer zweistufigen Treppe. Folglich ist die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen bei der vierstufigen Treppe gleich der Summe der Anzahlen möglicher Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe.

f) Entsprechend folgt: Die Gleichung $8 = 5 + 3$ führt zur Anzahl 8 der Schrittfolgen bei einer fünfstufigen Treppe; die Gleichung $13 = 8 + 5$ führt zur Anzahl 13 der Schrittfolgen bei einer sechsstufigen Treppe.

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen aus [5]

3.29.2 II. Runde 1988, Klasse 6

Aufgabe 1 - 280621
An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.
In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen. André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.
Wie viel Fahrkarten hat André insgesamt?
(Hinweis: Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte "Hin- und Rückfahrkarten" gibt es jedoch nicht.)

Von jedem der fünf Orte gibt es genau vier Bahnverbindungen. Da alle diese Bahnverbindungen verschieden sind und André zu jeder von ihnen genau eine Fahrkarte besitzt, hat er wegen $5 \cdot 4 = 20$ insgesamt 20 Fahrkarten.

Aufgabe 2 - 280622
Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.
Wie viel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden musste?

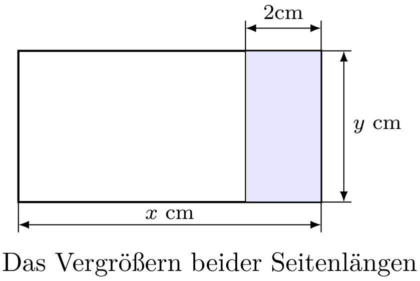
Frau Müller kauft Eintrittskarten für 3 Erwachsene und 5 Kinder. Weil Kinder nur halbe Preise zahlen, zahlt Frau Müller (wegen $3 \cdot 2 = 6$ und $6 + 5 = 11$) soviel an Eintritt, wie für 11 Kinder zu zahlen wäre. Hieraus folgt wegen $22 : 11 = 2$, dass für jedes Kind 2 Mark zu entrichten sind.

Wegen $2 \cdot 2 = 4$ kostet der Eintritt für einen Erwachsenen 4 Mark. Frau Beyer hat somit (wegen $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$) an Frau Müller 8 Mark zu bezahlen, ebenso Frau Schulz.

Aufgabe 3 - 280623
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

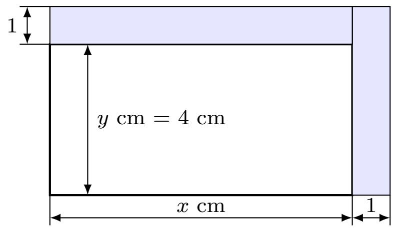
Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!



Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm^2 beträgt.
Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm^2, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen 13 - 5 = 8) dem Flächeninhalt 8 cm^2. Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.



In der Abbildung hat jede farbige Flächen den Flächeninhalt 13 cm^2.

Somit lässt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

Aufgabe 4 - 280624
Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten "Handball", "Mehrkampf", "Pop-Gymnastik", "Schwimmen". Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.
(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.
(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.
(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,
a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,
b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!
Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

Aus (1) und (3) folgt: (5) Heidi erhielt Silber, (6) Manuela erhielt Gold. Wegen (5) folgt aus (2): (7) Die Handballerin erhielt Silber.

Aus (4) und (7) folgt: (8) Simone erhielt Gold. In (5), (6) und (8) sind bereits drei Medaillenträgerinnen ermittelt; damit folgt aus (1): (9) Peggy erhielt Silber.

Nach (5), (9) ist (2) auf Heidi und Peggy anzuwenden und ergibt: (10) Heidi startete in Pop-Gymnastik, (11) Peggy ist die Handballerin.

Nach (6), (8) ist (2) auf Manuela und Simone anzuwenden und ergibt: (12) Manuela ist die Schwimmerin, (13) Simone startete im Mehrkampf.

In (10), (11), (12), (13) ist damit für jedes der Mädchen die Sportart und in (5), (6), (8), (9) auch die Medaillenart eindeutig gefunden. Die Überprüfung ergibt: (1) ist wegen (5), (6). (8), (9) erfüllt; (2) ist hiernach und wegen (10), (11) für die Mädchen mit Silbermedaillen sowie wegen (12), (13) für die Mädchen mit Goldmedaillen erfüllt; (3) ist wegen (5), (6) erfüllt; (4) ist wegen (8). (11) und (9) erfüllt.

Lösungen der II. Runde 1988 übernommen aus [5]

3.30 XXIX. Olympiade 1989

3.30.1 I. Runde 1989, Klasse 6

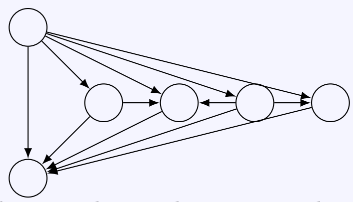
Aufgabe 1 - 290611
Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wie viel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter.
(Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)
Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

Peter kann folgendermaßen verfahren:
Er entnimmt zuerst durch Füllen des kleinen Gefäßes mit anschließendem Umgießen in das große Gefäß dreimal je 5 Liter aus der Kanne. Wegen $3 \cdot 5 = 15$ enthält das große Gefäß dann genau 15 Liter; wegen 17 - 15 = 2 passen noch genau 2 Liter Milch hinein. Diese werden aus dem noch einmal gefüllten kleinen Gefäß in das große Gefäß gegossen, so dass nun in dem kleinen Gefäß wegen 5 - 2 = 3 noch genau 3 Liter sind.

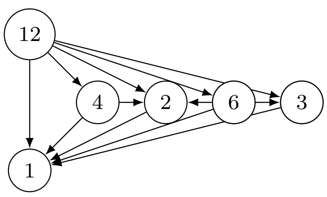
Danach wird das große Gefäß wieder durch Zurückgießen in die Kanne entleert, und die 3 Liter werden anschließend in das große Gefäß gegossen. Gießt man nun noch zweimal je 5 Liter Milch hinzu, so enthält das große Gefäß wegen $3 + 2 \cdot 5 = 13$ genau 13 Liter Milch, wie es verlangt war.

Aufgabe 2 - 290612

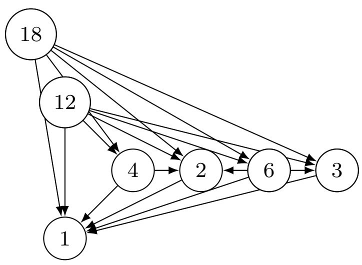
a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, dass jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.



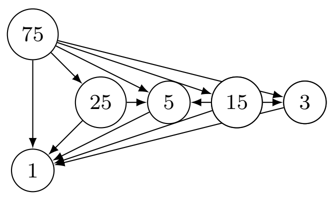
b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!



a)

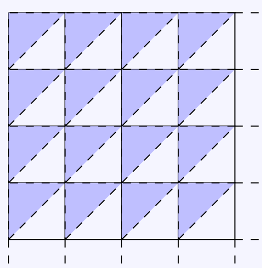


b)



c)

Aufgabe 3 - 290613



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

Wegen 3,6 m = 360 cm, 2,7 m = 270 cm, 360 : 30 = 12, 270 : 30 = 9 und $12 \cdot 9 = 108$ lässt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen.
Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen 108 : 2 = 54 insgesamt je 54 Stück benötigt.

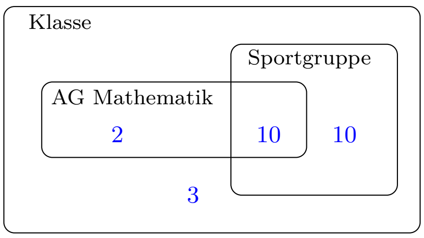
Aufgabe 4 - 290614
Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.
Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, dass es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

Aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 25 - 20 = 5:
Genau 5 Schüler der Klasse gehören nicht einer Sportgruppe an. Unter diesen müssen sich die 3 in der dritten Angabe des Aufgabentextes genannten Schüler befinden, die außerdem auch nicht der AG Mathematik angehören. Damit folgt wegen 5 - 3 = 2 als Antwort zu a): Insgesamt 2 Schüler der Klasse gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an.
Diese 2 Schüler müssen zu den 12 in der zweiten Angabe des Aufgabentextes genannten Schülern gehören.

Wegen 12 - 2 = 10 folgt damit als Antwort zu c): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an. Hieraus und aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen 20 - 10 = 10 als Antwort zu b):
Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören zwar einer Sportgruppe an, aber nicht der AG Mathematik.

Hinweis: Zur Probe kann man die Anzahlen in das Diagramm Abbildung eintragen und damit durch $10 + 10 + 2 + 3 = 25$, $10 + 10 = 20$, $10 + 2 = 12$ bestätigen, daß die Angaben des Aufgabentextes erfüllt sind.



Lösungen der I. Runde 1989 übernommen aus [5]

3.30.2 II. Runde 1989, Klasse 6

Aufgabe 1 - 290621
Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, dass sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln lässt!
Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

Aus den Notizen folgt:
Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d.h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1): (5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

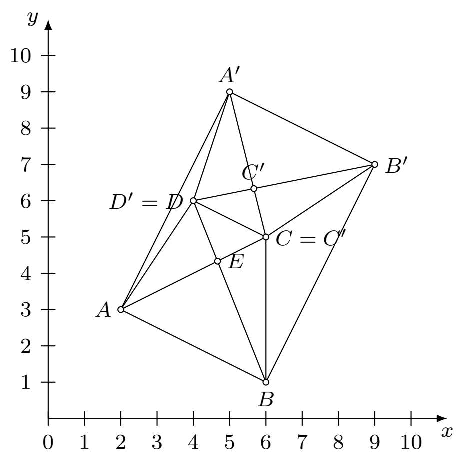
Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt: (6) Den ersten Preis gewann Christian, (7) den dritten Preis gewann Martin.

Damit ist gezeigt, dass sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln lässt.

Aufgabe 2 - 290622
a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(6;5)$ und $D(4;6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

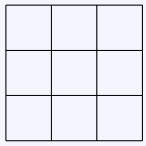


a,b)

c) Ein möglicher Weg ist: $D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$.

Aufgabe 3 - 290623

Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.



a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

Rechtecke	Flächeninhalt	Anzahl der Rechtecke	Summe der Flächeninhalte
1 cm · 1 cm	1 cm^2	9	9 cm^2
1 cm · 2 cm	2 cm^2	12	24 cm^2
1 cm · 3 cm	3 cm^2	6	18 cm^2
2 cm · 2 cm	4 cm^2	4	16 cm^2
2 cm · 3 cm	6 cm^2	4	24 cm^2
3 cm · 3 cm	9 cm^2	1	9 cm^2
		36	100 cm^2

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.
b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt 100 cm^2.

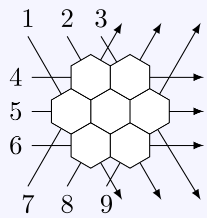
Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 290624

a) In ein 3×3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt. Das linke Bild zeigt dafür ein Beispiel.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem rechten Bild und stellt die Aufgabe:



In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und dass sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.
Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an!
Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

8	3	4
1	5	9
6	7	2

a) Ein Beispiel zeigt die Abbildung a.
b) Es gibt keine derartige Eintragung.
Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müsste bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1 + 2 + ... + 7 = 28$.

Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

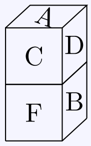
Lösungen der II. Runde 1989 übernommen aus [5]

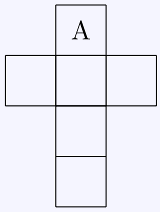
3.31 XXX. Olympiade 1990

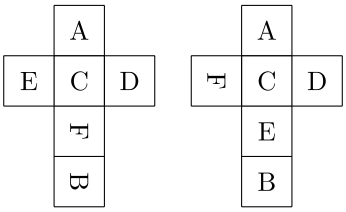
3.31.1 I. Runde 1990, Klasse 6

Aufgabe 1 - 300611

Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!

a) 

b) 



Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art.
Bei beiden muss als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

Aufgabe 2 - 300612
a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!
b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z.B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile genau alle in (a) gesuchten Zahlen. In der zweiten Zeile steht zu jeder dieser Zahlen ihre Quersumme. In der dritten Zeile steht jeweils die Antwort auf die Frage, ob die betreffende Zahl durch ihre Quersumme teilbar ist (j für ja, n für nein). Hiernach sind genau die Zahlen 40, 84 und 48 die in (b) gesuchten.

Zahl	40	51	15	62	26	73	37	84	48	95	59
Quersumme	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
teilbar?	j	n	n	n	n	n	n	j	j	n	n

Aufgabe 3 - 300613
Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, dass 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.
Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte?
Begründe deine Antwort!

Antwort: 10 Bleistifte und 2 Hefte sind teurer als 11 Hefte und 2 Bleistifte.

Begründung: Ist b der Preis für einen Bleistift und h der Preis für ein Heft, so gilt nach Linas Feststellung $7b > 8h$. (1) Daraus folgt erst recht $7b > 7h$, (2) also $b > h$. (3)

Aus (1) und (3) ergibt sich $8b > 9h$. (4)
Vergrößert man nun jeweils sowohl $8b$ als auch $9h$ um $2b + 2h$, so folgt $10b + 2h > 2b + 11h$, wie in der Antwort angegeben.

Aufgabe 4 - 300614
Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnummeriert.
a) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?
b) Wie oft wurde bei der Nummerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?
c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Nummerierung zu drucken?

a) Die Ziffer 4 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230, 231 bis 235 gebraucht, d.h. zusammen 24 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 40, 41, ... 49, 140, 141, ... 149 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d.h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wurde die Ziffer 4 bei der Nummerierung insgesamt 44 mal verwendet.

b) Die Ziffer 0 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230 gebraucht, aber nicht für die Zahlen 231 bis 235, d.h. zusammen 23 mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen 100, 101, ... 109, 200, 201, ... 209 gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d.h. zusammen 20 mal.

An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen von 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wird die Ziffer 0 bei der Nummerierung insgesamt 43 mal verwendet.

c) Unter den Zahlen von 1 bis 235 gibt es genau die 9 einstelligen 1, 2, ... 9, genau die 90 zweistelligen 10, 11, ... 99 und genau die 136 dreistelligen 100, 101, ... 235.
Daher sind bei der Nummerierung insgesamt $9 + 90 \cdot 2 + 136 \cdot 3 = 9 + 180 + 408 = 597$ Ziffern zu drucken.

Lösungen der I. Runde 1960 übernommen aus [5]

3.31.2 II. Runde 1990, Klasse 6

Aufgabe 1 - 300621
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1),\quad B(5;1),\quad C(5;5),\quad D(1;5)$$

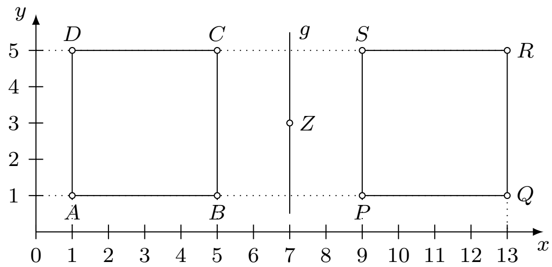
und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

$$P(9;1),\quad Q(13;1),\quad R(13;5),\quad S(9;5)$$

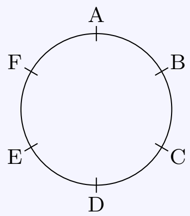
ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade g und eine Konstruktion dieser Geraden.
c) Das Drehzentrum ist $Z(7;3)$, der Drehwinkel beträgt 180°.

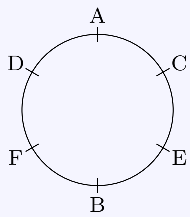


Aufgabe 2 - 300622



a)

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, dass in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann:
Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.



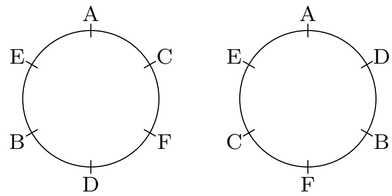
b)

a) Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, dass tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!
b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an!
Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A	F, B	D, C
B	A, C	E, F
C	B, C	A, E
D	C, E	F, A
E	C, F	C, B
F	E, A	B, D

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung b.



Aufgabe 3 - 300623
Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stückzahl	350	340	320	340	360	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden.
Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

Die Lettern reichen nicht aus.
An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen 1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020 gebraucht, d.h. 102 mal.
An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10 mal für die Zahlen 60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969 gebraucht, d.h. 100 mal.
An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen 600, ..., 699 gebraucht, d.h. 100 mal.
Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

Aufgabe 4 - 300624
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

Die folgende Tabelle zeigt alle Werte n = 5a + 7b mit a = 0, 1, 2, 3, 4, 5 und b = 0, 1, 2, 3, 4

b|a	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	15	20	25
1	7	12	17	22	27	32
2	14	19	24	29	34	39
3	21	26	31	36	41	46
4	28	33	38	43	48	53

Da bei weiterem Vergrößern von a oder b (oder beiden) stets jeweils auch n größer wird, ergibt sich:
(1) Unter allen natürlichen Zahlen $n \leq 24$ lassen sich genau die Zahlen 0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24 in der genannten Form darstellen. Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen 24, 25, 26, 27, 28 lassen sich in der genannten Form darstellen. Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... u.s.w. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, lassen sich in der genannten Form darstellen.
Mit (2) und (3) ist gezeigt, dass jede natürliche Zahl $n \geq 24$ sich in dieser Form darstellen lässt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen $n > 24$.

Lösungen der II. Runde 1990 übernommen aus [5]

3.32 XXXI. Olympiade 1991

3.32.1 I. Runde 1991, Klasse 6

Aufgabe 1 - 310611
Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck.
Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

Durch Aufzählen aller Darstellungen von 60 als Produkt zweier natürlicher Zahlen erhält man:
Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt:

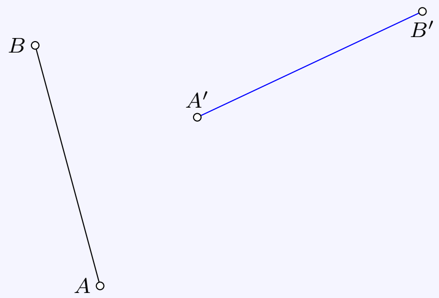
Seitenlängen in cm	Umfang in cm
1, 60	122
2, 30	64
3, 20	46
4, 14	38
5, 12	34
6, 10	32

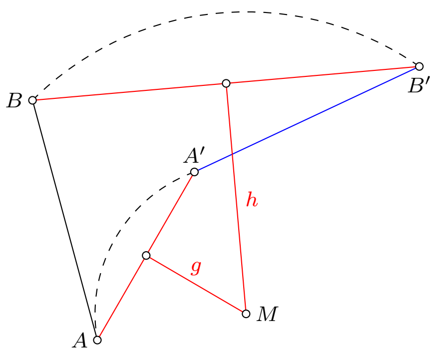
Von diesen Umfängen ist genau einer doppelt so groß wie einer der anderen, nämlich 64 cm doppelt so groß wie 32 cm. Also hat Jans Rechteck die Seitenlängen 2 cm, 30 cm und Uwes Rechteck die Seitenlängen 6 cm, 10 cm.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 310612

a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.





a) Wenn M der Drehpunkt einer Drehung ist, die A in A' überführt, so gilt $MA = MA'$. (1)
Daraus folgt, dass M auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen muss, da dies für alle Punkte M gilt, die (1) erfüllen.

b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.
g und h sind die Mittelsenkrechten von AA' bzw. BB', ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt M. Zur Kontrolle kann man überprüfen, dass im Kreis um M durch A die Radien MA, MA' einen gleichgroßen Winkel bilden wie MB, MB' im Kreis um M durch B.

Aufgabe 3 - 310613
Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.
(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.
(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können!
Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

Bezeichnen E, R, G, J die Anzahlen der Briefmarken von Elke, Regina, Gerd bzw. Joachim, so folgt aus den Angaben

$$J > G, \quad (1) \qquad E + R = J + G, \quad (2) \qquad E + J < R + G \quad (3)$$

Vermehrt man von den beiden Zahlen $E + J$ und $R + G$ in (3) sowohl die kleinere als auch die größere um die in (2) auf beiden Seiten genannte Zahl, so folgt $2E + R + J < R + J + 2G$.
Dies ist aber nur möglich, wenn $E < G$ (4) gilt. Hiernach kann die Gleichung (2) nur gelten, wenn für die anderen darin auftretenden Summanden $R > J$ (5) gilt. Mit (5), (1), (4) ist gezeigt, dass die Angaben nur durch die Reihenfolge $R > J > G > E$ erfüllt werden können.

Aufgabe 4 - 310614
An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.
(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.
(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wie viele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

I. Nach (1) waren genau 20 - 5 = 15 Teilnehmer älter als 30 Jahre.
Von ihnen kauften nach (2) genau 15 - 10 = 5 bei der ersten Rast und genau 15 - 12 = 3 bei der zweiten Rast nichts zu trinken. Da niemand auf beide Käufe verzichtete, waren diese 5 + 3 = 8 Teilnehmer bereits alle, die nicht zweimal zu trinken kauften. Von den 15 Teilnehmern über 30 Jahre kauften also 15-8 = 7 zweimal zu trinken.

II. Nach (3) kauften von den 6 Teilnehmern, die 40 Jahre oder älter waren, genau 2 bei der ersten Rast und genau 2 bei der zweiten Rast nichts zu trinken, Daraus folgt entsprechend, dass 6 - (2 + 2) = 2 dieser Teilnehmer zweimal zu trinken kauften.
Aus I. und II. folgt: Von den Teilnehmern, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften genau 7 - 2 = 5 zweimal zu trinken.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen aus [5]

3.32.2 II. Runde 1991, Klasse 6

Aufgabe 1 - 310621
a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.
(2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.
(3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

(4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die Bedingungen werden genau durch die Zahlen
a) 231213 und 312132,
b) 23421314 und 41312432
erfüllt.
a) An die zwei Stellen zwischen den Ziffern $2 \cdot \cdot 2$ können weder die beiden Ziffern 1 noch die beiden Ziffern 3 kommen. Also enthält die gesuchte Zahl die Teilfolge 2132 (oder umgekehrt 2312).
Nun kann die Ziffer 1 nur so hinzugefügt werden, dass 12132 (bzw. die umgekehrte Folge) entsteht. Daran anschließend ist nur 312132 (bzw. umgekehrt) möglich.

b) An den vier Stellen zwischen den Ziffern $4 \cdot \cdot \cdot \cdot 4$ muss eine der drei Ziffern 1, 2, 3 zweifach vorkommen. Die 3 kann dies nicht sein (da zwischen zwei Ziffern 3 dann nicht genug Platz wäre). Wäre es die 2, so müsste sie an die Stellen $42 \cdot \cdot 24$ kommen; zwischen den Ziffern 2 könnte dann keine Ziffer 1 stehen, also müssten dort beide Ziffern 3 stehen, was nicht möglich ist. Somit kommt nur $41 \cdot 1 \cdot 4$ (oder umgekehrt) in Betracht.

Nun würde die Eintragung $41 \cdot 134$ aber $41 \cdot 134 \cdot \cdot 3$ verlangen, obwohl nur noch zwei Ziffern 2 einzutragen wären. Also kann nur mit $41 \cdot 124$ und anschließend eindeutig mit $41 \cdot 124 \cdot 2$ sowie mit 41312432 (bzw. umgekehrt 23421314) fortgesetzt werden.

Aufgabe 2 - 310622
Zwischen vier Mannschaften A, B, C, D wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere.
Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften C und D endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft B wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft A belegte und wie viel Punkte sie erreichte!
Wenn das der Fall ist, gib beides an!
b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Platzierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können?
Begründe deine Antwort!

a) In eine Tabelle sei zunächst das unentschiedene Spiel C gegen D eingetragen. Aus der Information, dass dies das einzige unentschiedene Spiel war, folgt: Alle anderen Punktzahlen sind 0 oder 2.

Hätte A gegen C und D verloren (Tabelle 1), so müsste wegen der von C und D erreichten unterschiedlichen Punktzahlen B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mindestens so viele Punkte wie A erreicht; dieser Fall scheidet also aus.
Hätte A gegen B und eine der Mannschaften C, D verloren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gegen C; Tabelle 2), so hätte schon deswegen B mindestens so viele Punkte wie A.

Tabelle 1

	A	B	C	D
A	-		0	0
B		-		
C	2		-	1
D	2		1	-

Tabelle 2

	A	B	C	D
A	-	0	0	
B	2	-		
C	2		-	1
D			1	-

Also hat A mindestens zwei Spiele gewonnen.
Hätte A gegen C und D gewonnen (Tabelle 3), so müsste B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mehr Punkte als die von B besiegte dieser beiden Mannschaften. Also folgt:
A hat gegen B und genau eine der Mannschaften C, D gewonnen, o.B.d.A. gegen C (Tabelle 4).

Tabelle 3

	A	B	C	D
A	-		2	2
B		-		
C	0		-	1
D	0		1	-

Tabelle 4

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-		
C	0		-	1
D	2		1	-

Weiter folgt: B hat weniger Punkte als A, also höchstens ein Spiel gewonnen. Hätte B gegen C und D dieselben Ergebnisse wie A gegen C und D erreicht, so ergäbe das 2 Punkte für B und 1 Punkt für die Verlierermannschaft. Hätte aber B gegen C, D entgegengesetzte Ergebnisse wie A, so hätten C und D beide 3 Punkte.
Also kann B überhaupt kein Spiel gewonnen haben, eine der Mannschaften C, D hat 3, die andere 5 Punkte. Daher hat sich eindeutig ergeben: A belegte mit 4 Punkten den zweiten Platz.

b) Da beide Tabellen 5 und 6 allen Informationen entsprechen, jedoch voneinander abweichende Endstände angeben, folgt: Die Informationen sind nicht ausreichend, um den genauen Endstand des Turniers angeben zu können.

Tabelle 5

	A	B	C	D
A	-	2	0	0
B	0	-	0	0
C	0	2	-	1
D	2	2	1	-

Tabelle 6

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	0	0	0
C	2	2	-	1
D	0	2	1	-

Aufgabe 3 - 310623
Wie viele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die
a) Teiler von 256 sind,
b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,
c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?
Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

a) Man stellt fest: 256 ist durch 2 teilbar; es gilt $256 : 2 = 128$. Weiter gilt $128 : 2 = 64$. Indem man so fortgesetzt die Teilbarkeit durch 2 feststellt, ergibt sich

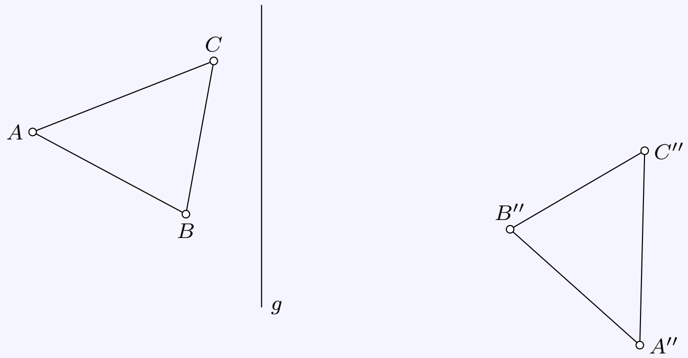
$$256 = 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 64 = ... = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Also ist eine natürliche Zahl genau dann Teiler von 256, wenn sie entweder gleich 1 oder gleich dem Produkt von einer Anzahl Faktoren 2 ist, wobei diese Anzahl höchstens 8 beträgt.
Für diese Anzahl gibt es somit genau 8 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt 9 natürliche Zahlen, die Teiler von 256 sind.
b) Aus $2 \cdot 256 = 2^9$;
c) aus $256 \cdot 256 = 2^{16}$ folgt: Es gibt insgesamt 10 bzw. 17 natürliche Zahlen, die Teiler von $2 \cdot 256$ bzw. von $256 \cdot 256$ sind.

Aufgabe 4 - 310624
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

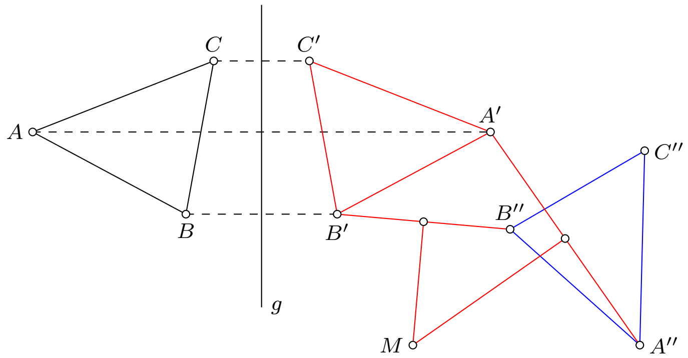
1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!
b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote AA_1, BB_1, CC_1 von A, B, C auf g und verlängert sie über A_1, B_1 bzw. C_1 hinaus um ihre eigene Länge bis A', B', C'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt M.



Lösungen der II. Runde 1991 übernommen aus [5]

3.33 XXXII. Olympiade 1992

3.33.1 I. Runde 1992, Klasse 6

Aufgabe 1 - 320611

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\ \cdot & & - & & - \\ \mathrm{C} & \cdot & \mathrm{C} & = & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{E} & - & \mathrm{F} & = & \mathrm{G} \end{array}$$

Für die Buchstaben sind Grundziffern (0; 1; 2; ...; 8; 9) so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und für unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Grundziffern stehen und dass die angegebenen Rechenoperationen richtig gelöst sind.

Die einzigen natürlichen Zahlen, deren Quadrate von der ursprünglichen Zahl verschieden und einstellig sind, sind Zwei und Drei, also sind A und C Zwei bzw. Drei.
$A = 2$ und $C = 3$ führt wegen $A - C = F$ zum Widerspruch, also gelten $A = 3, C = 2$ und somit $B = 9$, $D = 4$, $E = 6$, $F = 1$ und $G = 5$, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 2 - 320612
Von drei Mädchen aus unterschiedlichen Familien sei folgendes bekannt:

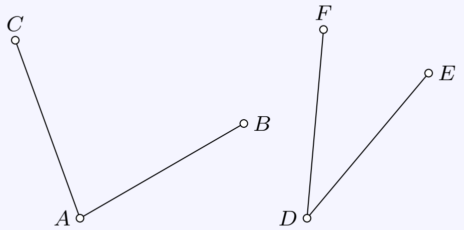
(1) Sie heißen Sabine, Christiane und Miriam.
(2) Miriam hätte lieber blondes Haar wie eines der drei Mädchen.
(3) Jedes der drei Mädchen hat eine andere Haarfarbe.
(4) Das rothaarige Mädchen hat dieselbe Haarfarbe wie ihr Bruder.
(5) Christiane hätte lieber solches schwarzes Haar wie die Schwester von Miriam.
(6) Das schwarzhaarige Mädchen hat keine Geschwister und ist mit seiner Haarfarbe zufrieden.

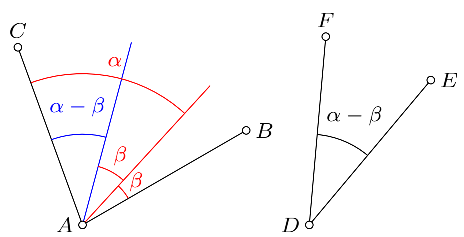
Welche Haarfarbe hat jedes der drei Mädchen?

Das schwarzhaarige Mädchen kann wegen (5) und (6) nicht Miriam, wegen (5) aber auch nicht Christiane sein, somit ist es Sabine.
Miriam kann wegen (2) nicht blond sein, ist also rothaarig.
Damit kann das blonde Mädchen nur Christiane heißen.
In der Tat erfüllt diese Zuordnung alle sechs Forderungen.

Aufgabe 3 - 320613

Gegeben seien zwei Winkel BAC und EDF mit den Maßen $\alpha + \beta$ bzw. $\alpha - \beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen α und β.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.





Wenn man die Winkelmaße $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man 2α bzw. 2β. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl AB^+ bzw. AC^+ Winkel mit den Maßen 2α bzw. 2β zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen α bzw. β erhalten.

Aufgabe 4 - 320614
Ein Radfahrer fährt von Schnellhausen nach Sausedorf, wobei er täglich 36 Kilometer zurücklegt. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer Radfahrer, der täglich 34 Kilometer zurücklegt, von Sausedorf aus entgegen. Die Entfernung zwischen Schnellhausen und Sausedorf beträgt 350 km.
In wie viel Tagen treffen sich die beiden Radfahrer? Führe auch eine Probe durch.

Die Entfernung zwischen den beiden Radfahrern betrug anfangs 350 Kilometer. Sie verringerte sich wegen 36 km + 34 km = 70 km täglich um 70 Kilometer. Folglich treffen sich die beiden Radfahrer wegen 350 km : 70 km = 5 in fünf Tagen.

Zur Probe kann man den von den Radfahrern in fünf Tagen zurückgelegten Weg berechnen:
Wegen $5 \cdot 36$ km = 180 km liegt der Treffpunkt der beiden Radfahrer 180 Kilometer von Schnellhausen entfernt, und wegen $5 \cdot 34$ km = 170 km beträgt seine Entfernung zu Sausedorf 170 km. Die beiden Wegstrecken ergeben zusammen die Entfernung Schnellhausen-Sausedorf: 180 km + 170 km = 350 km.

Lösungen der I. Runde 1992 übernommen aus [5]

3.33.2 II. Runde 1992, Klasse 6

Aufgabe 1 - 320621
Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

$$38 \star \star 42$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, dass die Zahl durch 9 teilbar ist.
Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können!
Weise nach, dass alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Durch Einfügen zweier Ziffern entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Das ist wegen $3 + 8 + 4 + 2 = 17$ genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern sich von 1 nur um ein Vielfaches der Zahl 9 unterscheidet.
Da eine Summe von zwei Ziffern höchstens $9 + 9 = 18$ betragen kann, ist folglich für die Summe der einzutragenden Ziffern nur entweder 1 oder 10 möglich. Alle Möglichkeiten, aus zwei Ziffern eine dieser Summen zu bilden, sind

$$1 = 0 + 1 = 1 + 0$$
$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 = 7 + 3 = 8 + 2 = 9 + 1$$

Alle gesuchten Zahlen sind daher

$$380142, 381042, 381942, 382842, 383742, 384642, 385542, 386442, 387342, 388242, 389142$$

Aufgabe 2 - 320622
Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.
a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, dass sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?
b) Wie viele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,
c) Wie viele haben keine rote Seitenfläche?

a) Je genau zwei rote Seitenflächen befinden sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die vor dem Zersägen an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten, aber nicht eine seiner Ecken enthielten.
Da der ursprüngliche Würfel genau 12 Kanten hatte, lagen an jeder seiner Kanten also genau $72 : 12 = 6$ derartige Teilwürfel. In der Verlängerung einer Reihe solcher Teilwürfel folgte nach beiden Seiten noch je genau ein Würfel, der eine Ecke des ursprünglichen Würfels enthielt. Einschließlich dieser beiden Würfel bestand eine solche Reihe also aus genau 8 Teilwürfeln. Daher wurde der ursprüngliche Würfel in $8^3 = 512$ Teilwürfel zersägt.

b) Je genau eine rote Seitenfläche befindet sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die an eine Seitenfläche, aber nicht an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten. Für je eine der 6 Seitenflächen des ursprünglichen Würfels bildeten diese Teilwürfel eine quadratförmige Anordnung von $6 = 36$ Stück; daher gibt es insgesamt $6\text{-}36 = 216$ solche Teilwürfel.

c) Die Teilwürfel ohne rote Seitenfläche bildeten vor dem Zersägen eine würfelförmige Anordnung, die ganz im Innern des ursprünglichen Würfels lag und aus genau $6^3 = 216$ Teilwürfeln bestand.

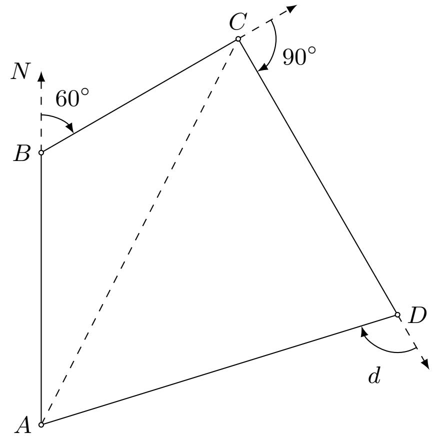
Aufgabe 3 - 320623
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von A nach D?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d.h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:
a) In D muss der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
b) Die Strecke von D nach A ist etwa 820 m lang.
c) Der Punkt A ist von C etwa 950 m entfernt.



Aufgabe 4 - 320624
Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür, diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz.
Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM. Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein.
Wie viel Geld erhält er zurück?

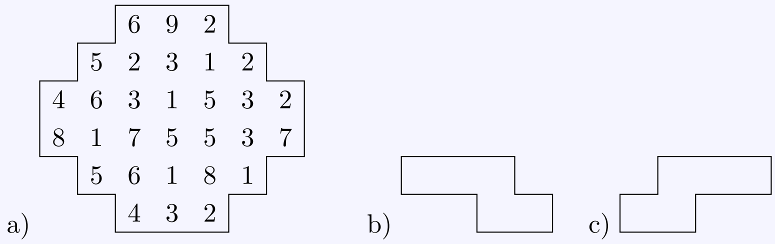
Thomas berechnet unter Berücksichtigung der Länge a = 4,40 m, der Breite b = 3,30 m des Zimmers und der Türbreite t = 0,90 m die erforderliche Gesamtlänge $2a + 2b - t$ = 8,80 m + 6,60 m - 0,90 m = 14,50 m.
Hierfür sind $5 \cdot 14{,}50$ DM = 72,50 DM zu zahlen. Also erhält Thomas 100 DM - 72,50 DM = 27,50 DM zurück.

Lösungen der II. Runde 1993 übernommen aus [5]

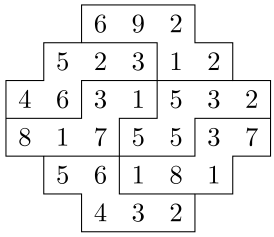
3.34 XXXIII. Olympiade 1993

3.34.1 I. Runde 1993, Klasse 6

Aufgabe 1 - 330611
Zerlege die Figur aus Abbildung a) so in Teilstücke, dass jedes Teilstück die Gestalt von Abbildung b) oder von Abbildung c) hat und dass auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!



Die Abbildung zeigt eine Zerlegung der geforderten Art.



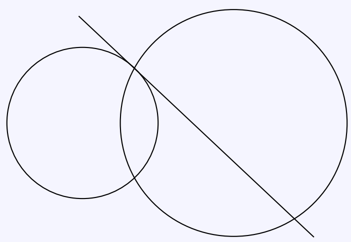
Aufgabe 2 - 330612
Zwei Zahlen sollen die Summe 2028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.
Zeige, dass die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, dass sie die Forderungen erfüllen!

Ist d das Ergebnis der Division der ersten Zahl durch 28, so lautet die erste Zahl $28 \cdot d$. Da d auch das Ergebnis der Division der zweiten Zahl durch 128 ist, lautet die zweite Zahl $128 \cdot d$. Als Summe der beiden Zahlen $28 \cdot d$ und $128 \cdot d$ ergibt sich folglich $156 \cdot d$; somit muss $156 \cdot d = 2028$ sein.

Daraus ergibt sich $d = 2028 : 156 = 13$. Also sind durch die Forderungen eindeutig $28 \cdot 13 = 364$ und $128 \cdot 13 = 1664$ als erste bzw. zweite Zahl bestimmt.
Für sie bestätigt man: $364 : 28$ und $1664 : 128$ haben dasselbe Ergebnis 13, und es gilt $364 + 1664 = 2028$.

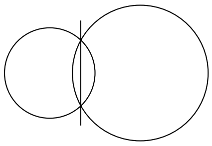
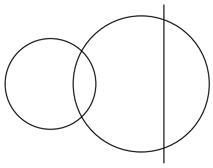
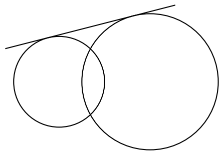
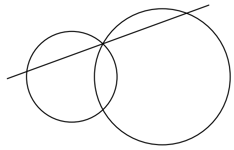
Aufgabe 3 - 330613
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,

1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.



Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.

$a)$  $b_1)$  $b_2)$  $c)$ 

Aufgabe 4 - 330614
Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: "n - Fakultät"). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

$$1! + 2! + 3! + 4! + ... + 99! + 100!$$

ergeben würde?

Indem man, beginnend mit $1! = 1$, jeweils das zuletzt erhaltene Ergebnis der Reihe nach mit 2, 3, 4, ... usw. multipliziert und jedes Mal nur die letzten drei Ziffern berücksichtigt, findet man: Es ist

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720;$$

die letzten drei Ziffern von 7! sind ...040
die letzten drei Ziffern von 8! sind ...320
die letzten drei Ziffern von 9! sind ...880
die letzten drei Ziffern von 10! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 11! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 12! sind ...600
die letzten drei Ziffern von 13! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 14! sind ...200

Von 15! an lauten die letzten drei Ziffern stets ...000, bei der verlangten Addition ändern sie also das Ergebnis nicht mehr. Durch Addition der hier verzeichneten Ergebnisse folgt daher bereits:
Die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + ... + 100!$ lauten ...313.

Lösungen der I. Runde 1993 übernommen aus [5]

3.34.2 II. Runde 1993, Klasse 6

Aufgabe 1 - 330621
Von einem "Fest der Tiere" wird erzählt:

Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so daß die Erzählung stimmt!
Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!
Bemerkung: Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.

Anzahlangabe: Es waren 8 Störche, 6 Hasen und 16 Käfer.

Überprüfen der Erzählung: Die 8 Störche haben 16 Beine, also ebenso viele, wie es Käfer gibt. Die 16 Käfer haben 96 Beine, also 90 mehr, als es Hasen gibt. Die 6 Hasen haben 24 Beine, das sind dreimal so viele, wie es Störche gibt.

Aufgabe 2 - 330622
Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch die Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

Für jede Möglichkeit, als Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 zu wählen, gibt es so viele Zahlen, wie es Reihenfolge-Möglichkeiten der übrigen vier Ziffern gibt. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt 24. Als Summe der Einerziffern erhält man folglich

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360$$

Dasselbe gilt für die Summe der Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderziffern. Daher ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & 6 & 0 \\ & & & 3 & 6 & 0 & \\ & & 3 & 6 & 0 & & \\ & 3 & 6 & 0 & & & \\ 3 & 6 & 0 & & & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 0 \end{array}$$

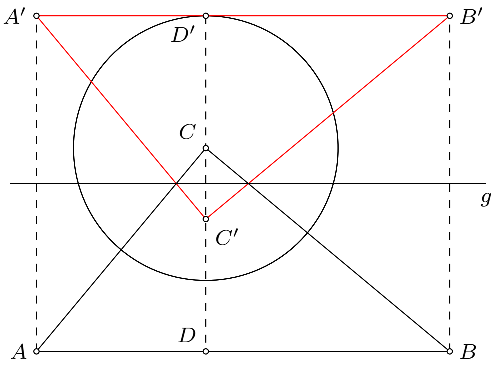
Aufgabe 3 - 330623
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck ABC mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei C!
Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d.h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

In Abbildung ist eine mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade g kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden:
a) Man konstruiert das Lot von C auf AB. Ist D sein Fußpunkt, so verlängert man DC über C hinaus bis zum Schnitt D' mit k.
Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von DD'.



Aufgabe 4 - 330624
In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl.
Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar.
Wie viele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

Für die Anzahlen b, g, r der blauen, gelben bzw. roten Kugeln gilt $9 \leq b+g+r \leq 21$, da jede der drei Zahlen b, g, r mindestens 3 und höchstens 7 beträgt. Da $b+g+r$ eine Primzahl ist, kann dies nur eine der Zahlen 11, 13, 17, 19 sein.
Nach dem Herausnehmen von einer gelben und zwei roten Kugeln verbleibt eine der Anzahlen 8, 10, 14, 16. Von ihnen ist nur 10 durch 5 teilbar; also musste $b+g+r=13$ sein.
Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, die mindestens 3 und höchstens 7 betragen, sind

$3+3+7$,	$4+3+6$,	$5+3+5$,	$6+3+4$,	$7+3+3$
$3+4+6$,	$4+4+5$,	$5+4+4$,	$6+4+3$	
$3+5+5$,	$4+5+4$,	$5+5+3$		
$3+6+4$,	$4+6+3$			
$3+7+3$				

Nur bei den blauen Zerlegungen ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar. Verringert man in diesen Zerlegungen den zweiten Summanden um 1 und den dritten um 2, so entsteht

$$3+4+3, \qquad 4+2+4, \qquad 5+3+2, \qquad 7+2+1$$

Nur bei der blau markierten Zerlegung (entstanden aus der Zerlegung $4+3+6$) ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar.
Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel.

Lösungen der II. Runde 1993 übernommen aus [5]

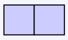
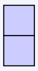
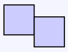
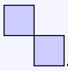
3.34.3 III. Runde 1993, Klasse 6

Aufgabe 1 - 330631
Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, dass $a + b + c = 12$ und $c - b = 3$ gilt!
Hinweis:
1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, dass sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

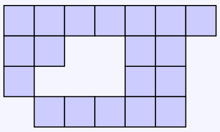
Es muss $b \leq 4$ sein; denn wäre $b \geq 5$, so folgte wegen $c - b = 3$, daß $c \geq 8$ wäre.
Damit wäre bereits $b + c \geq 13$, also erst recht $a + b + c \geq 13$, im Widerspruch zu $a + b + c = 12$.

Für $b = 0$ folgt $c = 3$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 9$.
Für $b = 1$ folgt $c = 4$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 7$.
Für $b = 2$ folgt $c = 5$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 5$.
Für $b = 3$ folgt $c = 6$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 3$.
Für $b = 4$ folgt $c = 7$ und wegen $a + b + c = 12$ dann $a = 1$.
Damit sind alle gesuchten Zusammenstellungen gefunden.

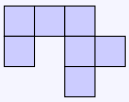
Aufgabe 2 - 330632
Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, dass sie beide genau eine Seite gemeinsam haben:
 oder  (dagegen nicht  und auch nicht .
Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, dass es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:

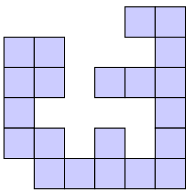


(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.
(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben.
Beispiel: Der Umfang der folgenden Figur beträgt 16 cm.

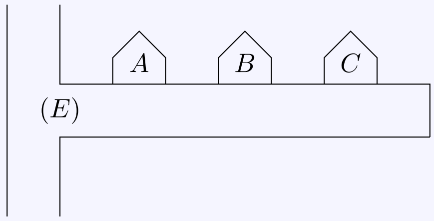


Zeichne eine solche Figur F!

Es gibt viele Möglichkeiten. Ein Beispiel:



Aufgabe 3 - 330633
In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z.B. in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow (E)$ tun. Er kann es aber z.B. auch in der Reihenfolge $(E) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow (E)$ tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.

(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!
(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen.
Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!
(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?
Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

Beim Angeben der Reihenfolge seien die Pfeile und die Angabe von (E) am Anfang und Ende weggelassen.
(a) Es gibt genau die 4 Möglichkeiten ABC, ACB, BCA, CBA.
(b) Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es genau die 8 Möglichkeiten $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BCDA$, $BDCA$, $CDBA$, $DCBA$.

(c) Auf dem Hinweg zum letzten der 10 Häuser hat man bei jedem der vorangehenden 9 Häuser zu entscheiden, ob man dieses Haus sogleich auf dem Hinweg beliefert oder seine Belieferung erst für den Rückweg vorsieht.
Da diese 9 Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ergeben sie insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$ Möglichkeiten.

Aufgabe 4 - 330634
Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, dass alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt. Die drei Aussagen von Dieter lauten:

(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.
(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.
(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

Da Dieters Aussagen falsch sind, gilt:

(1') Jedes Kind bekam eine der blauen Kugeln.
(2') Annette bekam entweder genau eine Kugel oder genau drei Kugeln.
(3') Bernd bekam keine verschiedenfarbigen Kugeln.

Nach (1') und weil nur drei blaue Kugeln vorhanden waren, bekam jedes Kind genau eine der blauen Kugeln.
Nach (3') kann Bernd überhaupt keine weitere Kugel bekommen haben. Hätte Annette genau eine Kugel bekommen, so wären auf Christiane vier Kugeln entfallen. Da sie aber (wie jedes der Kinder) höchstens

drei Kugeln bekam, scheidet dieser Fall aus; d.h. nach (2'): Annette muss genau drei Kugeln bekommen haben, also außer der einen blauen Kugel noch genau zwei gelbe Kugeln. Die restliche gelbe Kugel verblieb für Christiane.
Damit sind die Zahlen der Verteilung eindeutig bestimmt:
Annette bekam genau 1 blaue Kugel und genau 2 gelbe Kugeln. Bernd bekam genau 1 blaue Kugel und keine gelbe Kugel. Christiane bekam genau 1 blaue Kugel und genau 1 gelbe Kugel.

Aufgabe 5 - 330635

Ein 4×4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:

a	b	c	d
e	d	d	c
d	f	c	c
a	a	f	d

In jedem so gefüllten Feld kann man "Wörter" lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die "Wörter" liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten.
(Als Beispiele sind die "Wörter" ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche "Wörter" zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)
"Wörter", die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.
Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem "Wort" dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im "Wort" aa).
(2) Kein "Wort" darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das "Wort" cd).
a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!
b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und
b) nur 6 Buchstaben, c) nur 5 Buchstaben
verwendet? Begründe Deine Antworten!

(a) Als Lösung genügt es, eine Eintragung der geforderten Art anzugeben, zum Beispiel Abb. a):

a)

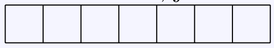
a	b	c	d
e	f	g	a
d	b	e	c
e	g	b	a

b)

a	b	a	c
d	c	e	a
f	d	b	f
b	e	d	a

(b) Es gibt auch eine Eintragung der geforderten Art mit nur 6 verwendeten Buchstaben. Dies wird etwa durch Abb. b) bewiesen.

(c) Eine Eintragung der geforderten Art mit nur 5 verwendeten Buchstaben kann es nicht geben.
Beweis: Im 4×4 - Feld lassen sich in jeder der 4 Zeilen und in jeder der 4 Spalten 3 "Wörter" lesen, zusammen also $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ "Wörter".
Es sind aber nur 20 "Wörter" zugelassen, nämlich mit einem der 5 Buchstaben am Anfang und dann jeweils mit einem der 4 anderen Buchstaben am Ende. Bei jeder Eintragung, die nur zugelassene "Wörter" aufweist, muss es also auch mehrfach auftretende "Wörter" geben; daher ist sie nicht von der geforderten Art.

Aufgabe 6 - 330636
Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln: Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern: 

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten.
Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt:
Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!
b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.
c) Untersuche, ob im Fall, dass $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!

a) Ist $n = 2$ vereinbart, so kann Anja den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf das Feld ganz rechts (das Feld für die Einerziffer) bringt. Nach der Teilbarkeitsregel für 2 entsteht dann nämlich bei jeder Fortsetzung eine durch 2 teilbare Zahl.
Ebenso kann Anja im Fall $n = 5$ den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang die Ziffer 5 auf das Feld ganz rechts bringt.

b) Die Summe $(1+8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5)$ der Zahlen auf allen Karten ist durch 9 teilbar.
Da am Ende genau eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 übrigbleibt und diese Zahl nicht durch 9 teilbar ist, kann auch die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 9 teilbar sein, gleichgültig, von wem und in welcher Reihenfolge sie ausgelegt wurden.
Nach der Teilbarkeitsregel für 9 besagt das aber: Die ausgelegte siebenstellige Zahl ist nicht durch 9 teilbar; Bernd hat gewonnen.

c) Bernd kann den Gewinn erzwingen, indem er dafür sorgt, dass jedenfalls die Zahlen 3 und 6 sich unter den ausgelegten befinden (er hat ja - sogar dreimal - Gelegenheit, von ihm gewünschte Zahlen nötigenfalls selbst auszulegen).
Damit erreicht er, ähnlich wie in b)): Da die Summe der Zahlen auf allen Karten durch 3 teilbar ist und eine nicht durch 3 teilbare Zahl übrigbleiben muss, kann die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 3 teilbar sein. Also ist die ausgelegte siebenstellige Zahl nicht durch 3 teilbar; folglich kann sie auch nicht durch 21 teilbar sein.

Lösungen der III. Runde 1993 übernommen aus [5]

3.35 XXXIV. Olympiade 1994

3.35.1 I. Runde 1994, Klasse 6

Aufgabe 1 - 340611
Herr Eilig fuhr auf der Autobahn eine Strecke von 475 Kilometern. Er legte diese Strecke in 3 Stunden und 10 Minuten zurück und verbrauchte dabei 57 Liter Benzin.

a) Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit?
b) Wie viel Benzin hatte er im Durchschnitt für je 100 km verbraucht?
c) Wäre er stattdessen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h gefahren, so hätte er für je 100 km nur 8 Liter verbraucht.

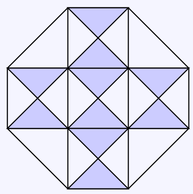
Welche Strecke hätte er bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 120 km/h mit dem gesparten Benzin noch fahren können?

a) Da Herr Eilig für 475 Kilometer 3 Stunden und 10 Minuten, d.h. 19 mal 10 Minuten brauchte, fuhr er in je 10 Minuten durchschnittlich $475 : 19 = 25$ Kilometer, in jeder Stunde also $6 \cdot 25 = 150$ Kilometer; d.h., seine durchschnittliche Geschwindigkeit betrug 150 km/h.

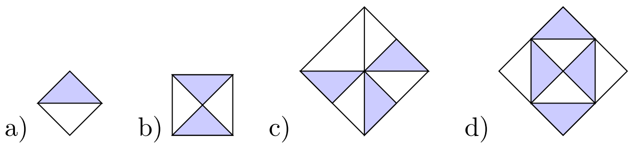
b) Da er für die $475 = 25 \cdot 19$ Kilometer $57 = 3 \cdot 19$ Liter Benzin brauchte, waren es für je 25 Kilometer durchschnittlich 3 Liter, also für je 100 Kilometer viermal so viel, d.h. 12 Liter.

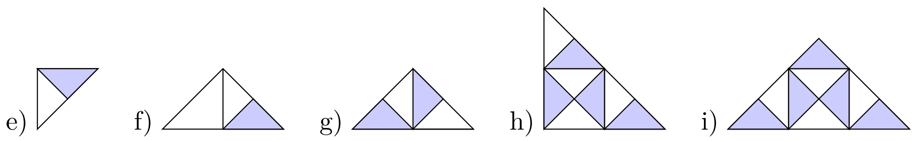
c) Hätte er für je 100 Kilometer nur 8 Liter gebraucht, so hätte er in je 100 Kilometern noch 4 Liter übrig behalten. Da das die Hälfte von 8 Litern ist, hätte er zu der insgesamt gefahrenen Strecke von 475 Kilometern zusätzlich noch eine halb so lange Strecke fahren können.
Wegen $475 = 474 + 1$ und $474 : 2 = 237$ sind das 237 Kilometer und ein halber Kilometer (500 Meter).

Aufgabe 2 - 340612
Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?



Es gibt genau 4 Quadrate aus je zwei Fliesen, 5 Quadrate aus je vier Fliesen, 4 Quadrate aus je sieben Fliesen, 1 Quadrat aus acht Fliesen (siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.





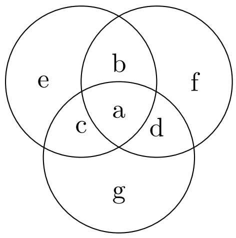
Es gibt genau 20 Dreiecke aus je zwei Fliesen, 8 Dreiecke aus je drei Fliesen, 8 Dreiecke aus je vier Fliesen, 4 Dreiecke aus je acht Fliesen, 4 Dreiecke aus je neun Fliesen (siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

Aufgabe 3 - 340613
Nach einem Wandertag wurden die Kinder gefragt, welche Erfrischungen sie sich gekauft hatten. Es hatte Cola, Hamburger und Popcorn gegeben. Die Befragung ergab das folgende Ergebnis:

Jeder der Teilnehmer hatte wenigstens eine der drei Waren gekauft.

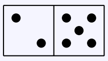
Von ihnen genau 22 mindestens Cola, genau 14 mindestens einen Hamburger und genau 13 wenigstens Popcorn. Mindestens Cola und Hamburger kauften genau 10 Teilnehmer, mindestens Cola und Popcorn genau 4 und genau 5 wenigstens Hamburger und Popcorn. Alle drei Waren gleichzeitig wurden nur von 2 Teilnehmern gekauft.

Weise nach, dass durch diese Angaben die Anzahl der Teilnehmer eindeutig bestimmt ist!
Berechne diese Anzahl!



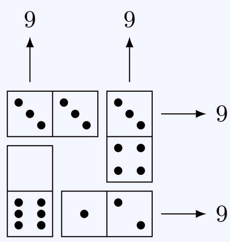
Für die Anzahl t aller Teilnehmer und für die in der Abbildung dargestellten Anzahlen gilt nach den Angaben
$a+b+c+d+e+f+g=t$, (1)
$a+b+c+e=22$, (2)
$a+b+d+f=4$, (3)
$a+c+d+g=13$, (4)
$a+b=10$, (5) $a+c=4$, (6)
$a+d=5$, (7) $a=2$. (8)

Aus (5) und (8) folgt $b=8$, aus (6) und (8) folgt $c=2$, aus (7) und (8) folgt $d=3$.
Aus (2) und (8), (9), (10) folgt $e=10$, aus (3) und (8), (9), (ll) folgt $f=1$, aus (4) und (8), (10), (ll) folgt $g=6$.
Damit folgt aus (1) und (8) - (14), dass die Anzahl t eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $t=32$.

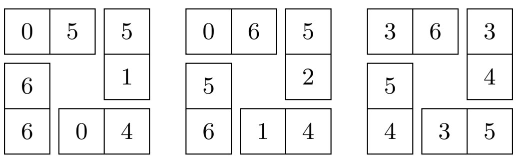
Aufgabe 4 - 340614
a) Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5: 

Nenne alle Steine eines Dominospiels!

b) Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in Abb. b) legen, und zwar so, dass auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt (im Beispiel beträgt diese "Seitensumme" 9).
Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 10, eines mit der Seitensumme 11 und eines mit der Seitensumme 12!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



a) Alle Steine eines Dominospiels sind (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6).
Es genügt eine Angabe wie z.B. in der obigen Ziffernschreibweise; eine zeichnerische Wiedergabe mit Punktsymbolen wird nicht vom Schüler verlangt.
b) Beispiele der verlangten Art zeigen die Abbildungen.



Lösung der I. Runde 1994 übernommen aus [5]

3.35.2 II. Runde 1994, Klasse 6

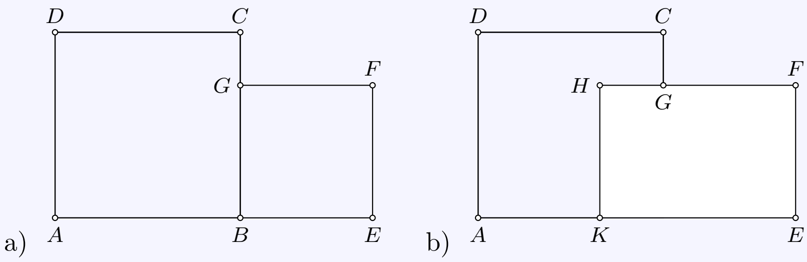
Aufgabe 1 - 340621
Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.
a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?
b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

(a) Da der Jogger in 20 Sekunden 100 m schafft und da 20 Minuten 60 mal so viel Zeit sind wie 20 Sekunden, schafft er in 20 Minuten $60 \cdot 100$ m = 6000 m.

(b) Während er die 1600 m mit der niedrigeren Geschwindigkeit läuft, braucht er 16 mal so viel Zeit wie für 100 m, also $16 \cdot 30$ Sekunden = 480 Sekunden = 8 Minuten.
Wegen 20-8 = 12 bleiben 12 Minuten für die höhere Geschwindigkeit. Da eine Minute 3 mal so viel Zeit wie 20 Sekunden ist, schafft er in diesen 12 Minuten $3 \cdot 12 \cdot 100$ m = 3600 m.
Insgesamt legt er so 1600 m + 3600 m = 5200 m zurück.

Aufgabe 2 - 340622
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite AD bzw. EF haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge GH ist Knobels Garten länger geworden?



(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $AD = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $EF = 25$ m.

(b) Wegen 1225 + 625 = 1850 haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen 1850 : 2 = 925 somit 925 Quadratmeter.

(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $EF = 25$ m ist wegen 925 : 25 = 37 die andere Seitenlänge $FH = 37$ m.
Damit ergibt sich $GH = FH - FG = 37$ m - 25 m = 12 m.

Aufgabe 3 - 340623
Nach folgenden Regeln lässt sich ein "Zahlenzug" bilden:

- Im ersten "Waggon" steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem "Waggon" eine gerade Zahl, so steht im nächsten "Waggon" die halb so große Zahl.
- Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten "Waggon" die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem "Waggon" die Zahl 1, so ist der "Zahlenzug" mit diesem "Waggon" beendet.

a) Nenne alle diejenigen "Zahlenzüge", die aus genau 4 "Waggons" bestehen!

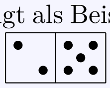
Begründe auch, dass deine Aufzählung vollständig ist!
b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht?
Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!
c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten "Waggon" eines "Zahlenzuges" vorkommen kann, der aus genau 7 "Waggons" besteht? Nenne einen solchen "Zahlenzug" mit dieser Anfangszahl und zeige, dass eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

Für jeden "Zahlenzug" gilt:
Im letzten "Waggon" steht eine 1. Steht in einem "Waggon" eine ungerade Zahl, so steht im vorangehenden "Waggon" das Doppelte. Steht aber in einem "Waggon" eine gerade Zahl, so steht im vorangehenden "Waggon" entweder die um 1 größere Zahl oder das Doppelte.

(a) Hieraus folgt der Reihe nach:
Im vorletzten "Waggon" steht eine 2, davor entweder eine 3 oder eine 4; vor der 3 steht eine 6; vor der 4 steht entweder eine 5 oder eine 8.
Damit ist als vollständige Aufzählung der "Zahlenzüge" aus genau 4 "Waggon" begründet:
$(6,3,2,1),(5,4,2,1),(8,4,2,1)$.

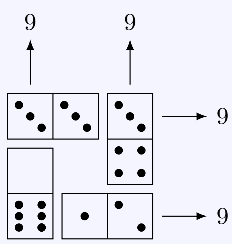
(b) Wählt man bei jeder geraden Zahl die Möglichkeit, als vorangehende Zahl das Doppelte zu nehmen, so erhält man als "Zahlenzug" aus genau 7 "Waggon": $(64,32,16,8,4,2,1)$.
Da das Verdoppeln einer Zahl, die größer als 1 ist, stets zu einem größeren Ergebnis führt als das Addieren von 1, ist eine größere Anfangszahl nicht möglich; damit ist als größtmögliche Anfangszahl 64 nachgewiesen.

(c) Im Anschluß an (a) folgt der Reihe nach:
Als fünftletzte Zahl sind genau möglich: Wenn sie ungerade ist, 7 und 9; wenn sie gerade ist, 10, 12, 16; als sechstletzte Zahl: ungerade 11, 13, 17; gerade 14, 18, 20, 24, 32.
Für die hierzu vorangehende Anfangszahl ist damit als kleinste ungerade Zahl 15, als kleinste gerade Zahl 22, also insgesamt 15 als kleinstmögliche Anfangszahl nachgewiesen. Der "Zahlenzug" hierzu lautet $(15,14,7,6,3,2,1)$.

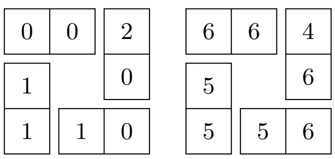
Aufgabe 4 - 340624
Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor.
Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.) 

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in der unteren Abbildung legen, und zwar so, dass auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel beträgt diese "Seitensumme" 9.

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!
b) Begründe, dass es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!
c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, dass kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat.
Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!



(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel der geforderten Art.



(b) Die einzige Darstellung von 18 als Summe dreier Zahlen von 0 bis 6 ist $18 = 6 + 6 + 6$.
Ein Fenster mit der Seitensumme 18 könnte daher nur aus Dominosteinen (6,6) bestehen. Da nach dem Aufgabentext das Fenster aber aus Steinen eines Dominospiels zu legen wäre und das Dominospiel den Stein (6,6) nur einmal enthält, ist ein solches Fenster nicht möglich.

(c) Drei solche Zahlen sind 0, 1 und 17. Die einzige Summendarstellung (ohne Beachtung der Reihenfolge) ist nämlich $0 = 0 + 0 + 0$ bzw. $1 = 0 + 0 + 1$ bzw. $17 = 6 + 6 + 5$. Daher könnte ein Fenster mit der Seitensumme 0 nur aus Steinen (0,0) bestehen, ist also nicht möglich; und zur Seitensumme 1 bzw. 17 müsste gelten:

Um auf der oberen waagerechten Seite diese Summe zu erreichen, müsste entweder links oben der Stein (0,1) bzw. der Stein (6,5) liegen und rechts davon eine 0 bzw. 6 vorkommen, oder es müsste links oben (0,0) bzw. (6,6) liegen und rechts davon 1 bzw. 5.
Da auch auf der rechten Seite die Summe 1 bzw. 17 zu erreichen ist, folgt in beiden Fällen:
Mindestens einer der Steine links oben, rechts oben müsste (0,1) bzw. (6,5) sein.

Ebenso folgt: Mindestens einer der Steine rechts unten, links unten müsste (0,1) bzw. (6,5) sein. Da das Dominospiel auch diesen Stein nur einmal enthält, sind somit ebenfalls die Seitensummen 1 und 17 als nicht erreichbar nachgewiesen.

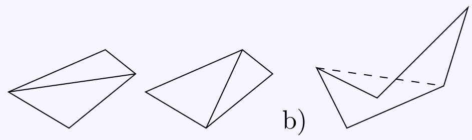
Lösungen der II. Runde 1994 übernommen aus [5]

3.35.3 III. Runde 1994, Klasse 6

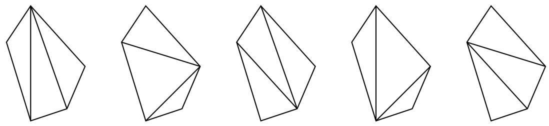
Aufgabe 1 - 340631
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

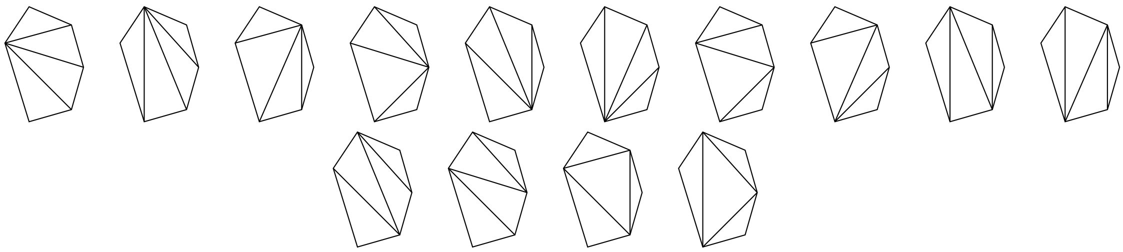
a) konvexes Fünfeck b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

a) b)


Die Abbildungen a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

a)


b)


Aufgabe 2 - 340632
Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein "Wort" genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, dass jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort.

Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

$$ALT, \quad ATL, \quad LAT, \quad LTA, \quad TAL, \quad TLA$$

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe u.s.w.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort LAND bilden lassen (das Wort LAND ist dabei mit aufzuzählen)!
(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort LAND?
(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort UMLAND bilden? (Wieder ist UMLAND mitzuzählen.)
(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort UMLAND?

(a) Die gesuchten Wörter, bereits alphabetisch geordnet, sind:

$ADLN$, $ADNL$, $ALDN$, $ALND$, $ANDL$, $ANLD$, $DALN$, $DANL$, $DLAN$, $DLNA$, $DNAL$, $DNLA$, $LADN$, $LAND$, $LDAN$, $LDNA$, $LNAD$, $LNDA$, $NADL$, $NALD$, $NDAL$, $NDLA$, $NLAD$, $NLDA$

(b) Das Wort LAND steht hierbei an der 14. Stelle.

(c) Für die Wahl des 1. Buchstabens (aus den 6 Buchstaben U, M, L, A, N, D) hat man genau 6 Möglichkeiten.
In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Wahl des 2. Buchstabens genau 5 Möglichkeiten. Damit ergeben sich $6 \cdot 5$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten beiden Buchstaben.
Entsprechend folgt:

Für die Wahl der ersten drei Buchstaben hat man $6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten. So fortfahrend ergibt sich: Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Wörter aus den 6 Buchstaben des Wortes UMLAND.

(d) Um die Wörter zu kennzeichnen, die dem Wort UMLAND vorangehen, betrachten wir zunächst die mit A beginnenden Wörter. Sie werden gebildet, indem man auf A alle Wörter aus den 5 Buchstaben D, L, M, N, U folgen lässt.
Wie in (c) ergibt sich, dass dies genau $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter sind.
In dieser Weise fortfahrend kommt man zu folgender Aufzählung. Dem Wort UMLAND gehen insgesamt voran:
Für jeden der 5 Buchstaben A, D, L, M, N jeweils $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter, die mit diesem betreffenden Buchstaben beginnen;

weitere, mit U beginnende Wörter, und zwar für jeden der 3 Buchstaben A, D, L jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Anfangsbuchstaben U folgt;

weitere, mit UM beginnende Wörter, und zwar für jeden der 2 Buchstaben A, D jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Wort-Anfang UM folgt;

schließlich (nach den zuletzt erfassten Wörtern mit dem Wort-Anfang UMD) das eine Wort UMLADN.

Zusammen sind das $5 \cdot 120 + 3 \cdot 24 + 2 \cdot 6 + 1 = 685$ Wörter. Also steht das Wort UMLAND an der 686. Stelle.

Aufgabe 3 - 340633
Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden Stammbrüche bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!
Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.
(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, dass einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!
(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Beispiele zu (a) sind etwa:
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \qquad ; \qquad \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$
(b),(c) Es gilt
$$\frac{1}{36} - \frac{1}{37} = \frac{37-36}{36 \cdot 37} = \frac{1}{3332}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{36} = \frac{1}{37} + \frac{1}{3332}$$
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$
Dabei hat der Summand $\frac{1}{37}$ (bzw. der Summand $\frac{1}{n+1}$ die verlangte Eigenschaft, dass kein größerer Stammbruch Summand in einer solchen Darstellung sein kann.

Beweis:
Unter den natürlichen Zahlen ist 37 (bzw. $n+1$) die nächstgrößere zu 36 (bzw. zu n), d.h.: Es gibt unter den natürlichen Zahlen, die größer als 36 (bzw. als n) sind, keine kleinere als 37 (bzw. $n+1$).
Daraus folgt:
Es gibt unter den Stammbrüchen, die (in einer gesuchten Darstellung als Summand auftreten und daher) kleiner als $\frac{1}{36}$ (bzw. als $\frac{1}{n}$) sein müssen, keinen größeren als $\frac{1}{37}$ (bzw. $\frac{1}{n+1}$).

Aufgabe 4 - 340634
Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.
(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.
(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten.
Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist!
Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

I. Wenn a, b, c die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen von drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines Quaders sind, auf den Veras Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

Nach (3) sind genau zwei der a, b, c einander gleich; die Bezeichnungen lassen sich so wählen, dass $b = c$ gilt.
Nach (2) und weil jede der Kantenlängen a, b, c genau 4 mal vorkommt, folgt daher $a+2b = 320 : 4 = 80$. (4)
Aus (1) folgt ferner: Es gilt entweder $a = 2b$ (5) oder $b = 2a$. (6)

Gilt (4) und (5), so folgt $a + a = 80$, also $a = 40$, $b = 20$, $c = 20$. (7)
Gilt aber (4) und (6), so folgt $a + 4a = 80$, $5a = 80$, also $a = 16$, $b = 32$, $c = 32$. (8)

II. Die in (7) genannten Zahlen erfüllen (4) und (5), die in (8) genannten Zahlen erfüllen (4) und (6); außerdem gilt in beiden Fällen $b = c$.
Daher treffen in beiden Fällen Veras Aussagen (1), (2), (3) zu.
Mit I. und II. ist gezeigt: Die Kantenlängen eines Quaders sind durch Veras Angaben (1), (2), (3) nicht eindeutig bestimmt (d.h. Utes Meinung ist nicht wahr), sondern es gibt für die Kantenlängen eines Quaders, auf den Veras Aussagen zutreffen, genau die beiden Möglichkeiten, daß diese Kantenlängen entweder 40 cm, 20 cm, 20 cm oder 16 cm, 32 cm, 32 cm betragen.

Aufgabe 5 - 340635
In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, dass die vier "Seitensummen" einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier "Seitensummen", zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier "Seitensummen", eine mit dem Wert 13 der vier "Seitensummen" und eine mit dem Wert 17 der vier "Seitensummen"!
(b) Auch mit dem Wert 18 der vier "Seitensummen" ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.
Zeige, dass das stimmt; erkläre den Unterschied!
(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die "Seitensumme" 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann:
"Die vier Zahlen für b, d, f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen 'Seitensumme'."

Gib eine solche Beziehung an und weise nach, dass Fritz recht hat!

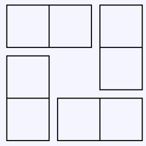
a)

a	b	c
h		d
g	f	e

b)

4	4	6
5		5
5	6	3

c)



(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel für Eintragungen mit den "Seitensummen" 2, 13 und 17.

1	1	0
0		2
1	1	0

4	6	3
5		4
4	3	6

5	6	6
6		5
6	5	6

(b) Der Unterschied kann folgendermaßen erklärt werden:
Für das Schema aus Abbildung zur Aufgabe a ist eine Eintragung mit der "Seitensumme" 18 möglich, indem man in alle acht Felder eine 6 einträgt.
Daraus jedoch, dass ein Dominospiel nur einen Stein (6;6) enthält, folgt: Mit den Steinen eines Dominospiels ist eine solche Eintragung nicht möglich.
Die einzige Möglichkeit, 18 als Summe von drei Summanden darzustellen, die nur Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sein dürfen, lautet nämlich $18 = 6 + 6 + 6$. Demzufolge gibt es keine andere Möglichkeit, die "Seitensumme" 18 zu erreichen, als mit der 6 in allen Feldern.
Dazu wäre aber mehr als ein Stein (6;6) erforderlich.

(c) Eine Beziehung zwischen den Zahlen für b, d, f, h ist $b + f = d + h$.

Beweis:
Wegen der Gleichheit aller vier "Seitensummen" gelten z.B. auch die Gleichungen $a + b + c = c + d + e$ und $e + f + g = g + h + a$, die auf beiden Seiten eine Eckenzahl enthalten.
Daher gelten auch die Gleichungen $a + b = d + e$, $e + f = a + h$.
Aus ihnen folgt $(a + b) + (e + f) = (d + e) + (h + a)$. Da auch in dieser Gleichung auf beiden Seiten übereinstimmende Summanden, nämlich a und e, vorkommen, folgt $b + f = d + h$.

Aufgabe 6 - 340636
Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:
(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.
(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)
(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.
(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.
(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?
Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)!
Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!
(b) Zeige, dass man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) weglässt!

(a) I. Aus den Feststellungen (1), (2), (3), (4) kann man folgende Schlüsse ziehen:
Um (1) anzuwenden, ermittelt man alle Zerlegungen von 242, 200 bzw. 6 in je zwei Faktoren, die als Tag- und Monatszahl möglich sind. Man findet, z.B. mit Hilfe der Zerlegungen $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ bzw. $6 = 2 \cdot 3$ in Primfaktoren:
Die genannten Zerlegungen sind genau $242 = 22 \cdot 11$, $200 = 25 \cdot 8 = 20 \cdot 10$ bzw. $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$; daraus folgt nach (1):
Der Geburtstag des Vaters ist der 22.11., (5)
Der Geburtstag der Mutter ist der 25.8. oder der 20.10., (6)

Der Geburtstag der Tochter ist einer der Tage 6.1., 3.2., 2.3., 1.6.. (7)

Aus (2) und (5), (6), (7) ergibt sich:
Der Vater ist 33 Jahre alt, (8)
die Mutter ist entweder 33 oder 30 Jahre alt, (9)
die Tochter ist entweder 7 oder 5 Jahre alt. (10)

Nach (8) und (4) beträgt das Produkt der Altersangaben von Mutter, Tochter und Sohn $59400 : 33 = 1800$. Da diese Zahl weder durch 33 noch durch 7 teilbar ist, sind in (9), (10) und damit in (6), (7) nur möglich:
Die Mutter ist 30 Jahre alt, ihr Geburtstag ist der 20.10., (11)
die Tochter ist 5 Jahre alt, ihr Geburtstag ist entweder der 3.2. oder der 2.3.. (12)
Nochmals nach (4) folgt dann wegen $1\,800 : 30 = 60$ und $60 : 5 = 12$:
Der Sohn ist 12 Jahre alt. (13)
Daher können die Feststellungen (1), (2), (3), (4) nur bei den Angaben in (5), (8), (11), (12), (13) erfüllt sein.

II. Bei diesen Angaben sind die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt. Wegen $33+30+5+12 = 80$ ist insbesondere auch die - in den bisherigen Betrachtungen noch nicht herangezogene - Feststellung (3) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt:
Die beiden in (5), (8), (11), (12), (13) angegebenen Möglichkeiten (für das Alter der vier Familienmitglieder und die Geburtstage von Vater, Mutter und Tochter) sind alle diejenigen, bei denen die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind.

(b) Da in (a) I. die Feststellung (3) nicht herangezogen wird (und in (a) II. natürlich auf das Bestätigen dieser Feststellung verzichtet werden kann, wenn sie nicht zu den Forderungen der Aufgabe gehört), hat die Aufgabe nach Weglassen von (3) dieselbe Lösung.

Lösungen der III. Runde 1994 übernommen aus [5]

4 Klassenstufe 7

4.1 Vorolympiade 1960

4.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 7

Aufgabe 1 - V00701
Drei Klassen halfen im NAW und putzten im Wettbewerb 9600 Ziegel ab. Die Klasse 7a putzte 840 Ziegel mehr ab als die Klasse 7b, die Klasse 7c jedoch schaffte 360 Stück mehr als die Pioniere der Klasse 7a.

Wer gewann den Wettbewerb, welche Leistungen erzielten die einzelnen Klassen (in Stück- und Prozentzahlen)?

Sind a, b, c die Stückzahlen der Klassen 7a, 7b und 7c, so gilt $a = 840 + b$ und $c = 360 + a$, also

$$a + b + c = 840 + b + b + 360 + 840 + b = 2040 + 3b = 9600 \quad \to \quad b = 2520, \quad a = 3360, \quad c = 3720$$

in Prozenten Klasse 7a: 35%, Klasse 7b: 26,25%, Klasse 7c: 38,75%.

Aufgabe 2 - V00702

Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten:

```
117??? : ??3 = ???
 ??6
 ----
 187?
 ????
 -----
  ????
  ????
  ----
     0
```

Aus der ersten Subtraktion $117x - yz6 = 187$ ergibt sich schrittweise rückwärts $x = 3$, aus $1173 - yz6 = 187$ folgt $z = 8$ und abschließend $y = 9$.
Damit ist 986 das größte Vielfaches des Divisors kleiner 1173, der dreistellig und auf 3 endet. 986 :??3 kann nur 2 ergeben, andernfalls würde bei Multiplikation der Einerstelle „3“ keine „6“ entstehen.
Damit ist die Divisionsaufgabe 117334 : 493 zu lösen, d. h.

```
117334 : 493 = 238
 986
 ----
 1873
 1479
 -----
  3944
  3944
  ----
     0
```

Aufgabe 3 - V00703
Der zehnte Teil einer Zahl wird um 3 vermehrt. Der gleiche Wert ergibt sich, wenn man $\frac{1}{100}$ dieser Zahl um 6 vermindert!
Wie heißt sie?

Ist x die gesuchte Zahl, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{x}{10} + 3 = \frac{x}{100} - 6$$

Deren einzige Lösung ist $x = -100$. Die gesuchte Zahl ist -100.

Aufgabe 4 - V00704
Welche der beiden Zahlen ist die größere?

$$\frac{35}{47} \quad \text{oder} \quad \frac{23}{31}$$

Welcher vierstellige Dezimalbruch kommt beiden Zahlen möglichst nahe?

Durch "Überkreuzmultiplizieren" von $\frac{35}{47} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} \frac{23}{31}$ wird $35 \cdot 31 = 1085 \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 1081 = 23 \cdot 47$, d. h. der linke Bruch ist der größere, also $\frac{35}{47} > \frac{23}{31}$.

Das arithmetische Mittel beider Brüche ist $\frac{1083}{1457} \approx 0{,}74331$, womit der gesuchte Dezimalbruch 0,7433 ist.

Aufgabe 5 - V00705

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Welche Rechenzeichen können an Stelle des Fragezeichens stehen?

Es ergeben sich mit den Rechenoperationen

$$\frac{169}{30} + \frac{13}{15} = \frac{13}{2} \qquad ; \qquad \frac{169}{30} - \frac{13}{15} = \frac{143}{30}$$
$$\frac{169}{30} \cdot \frac{13}{15} = \frac{2197}{450} \qquad ; \qquad \frac{169}{30} : \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

Als Rechenzeichen können "+" und ":" eingesetzt werden.

Aufgabe 6 - V00706

Für das Gehäuse einer Haushaltwaage wurde im VEB Thüringer Industriewerk Rauenstein ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm.
Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen.

Berechne die Materialeinsparung in t für eine Auflage von 100000 Stück!
(Dichte des Eisens 7,8 g$\cdot$cm^{-3})

Der quaderförmige Blechstreifen hat ursprünglich ein Volumen $V_1 = a \cdot b \cdot c = 39 \cdot 8{,}5 \cdot 0{,}25 = 82{,}875$ cm^3. Durch die Einsparung sind es noch 66,3 cm^3, d. h. eine Volumeneinsparung von 16,575 cm^3. Mit der Dichte des Eisens sind dies 129,285 g.
Da insgesamt 100000 Bleche erzeugt werden sollen, werden 12,9285 t $\approx$ 13 t Material eingespart.

Aufgabe 7 - V00707

Herr A fährt mit seinem PKW auf der Autobahn mit 100 km$\cdot$h^{-1} an einer Tankstelle (T_1) vorbei. 35 km hinter T_1 muss Herr A den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (T_2) auf der Autobahn noch weitere 35 km entfernt ist, geht Herr A auf 60 km$\cdot$h^{-1} herunter, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird Herr A die Strecke zwischen T_1 und T_2 unter diesen Bedingungen zurücklegen?

Für die Strecke 35 km von T_1 bis zum Umschalten auf Reserve werden $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{35km}{100\frac{km}{h}} = 21$ min benötigt.
Für die zweite Strecke von 35 km entsprechend $t_2 = \frac{s}{v} = \frac{35km}{60\frac{km}{h}} = 35$ min.
Aus der damit benötigten Gesamtfahrzeit von 56 Minuten zwischen T_1 und T_2 ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v = \frac{70km}{56min} = 75\frac{km}{h}$.

Aufgabe 8 - V00708

In die 9 Felder des abgebildeten Quadrats sind die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass du waagerecht, senkrecht und diagonal die Summe 15 erhältst.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Aufgabe 9 - V00709

Löse folgendes Zahlenrätsel, in dem gleiche Buchstaben gleiche Ziffern bedeuten:

```
abb - cdb = ebd
 :     +     -
 fg *  ch = gic
---------------
 fk + cfc = cbi
```

Aus der obersten Subtraktionsaufgabe ergibt sich sofort $d = 1$. Angenommen es wäre $f = 1$, so kann a nur 2 oder 3 sein. Beides ist nicht möglich, da c und e kleiner als a sein müssen und $f = 1$ wäre. Angenommen $f = 3$ gelte, so wäre $a = 9$ und g und k 1 bzw. 2 oder umgekehrt. $fg = 31$ und $fg = 32$ sind beide nicht möglich, da dann $ch > 45$ wäre und deren Produkt vierstellig. D. h., $f = 2$.

```
abb - c0b = eb0
 :     +     -
 2g *  ch = gic
---------------
 2k + c2c = cbi
```

g und k können nicht 1 sein, da dann b mit g oder k identisch wäre. Damit ist a 5, 6, 7 oder 8. Von allen Produkt der Faktoren 23 bis 29 miteinander enden 4 auf 00 und nur $23 * 28 = 644$ auf zwei gleiche Ziffern, die 4. Also sind $a = 6$ und $b = 4$. g und k sind 3 bzw. 8.

```
644 - c04 = e40
 :     +     -
 2g *  ch = gic
---------------
 2k + c2c = c4i
```

Angenommen $g = 8$, dann ergibt sich ein Widerspruch, da $g < e < a = 6$ gilt. g ist damit 3 und $k = 8$. Für c verbleibt dann nur 1, da sonst die mittlere Multiplikationsaufgabe nicht lösbar wäre.

```
644 - 104 = e40
 :     +     -
 23 *  1h = 3i1
---------------
 28 + 121 = 14i
```

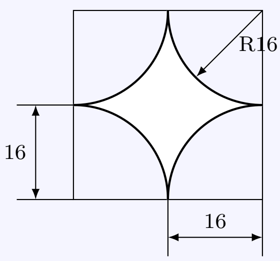
Die restlichen Ziffern sind dann $e = 5$, $h = 7$ und $i = 9$.

```
644 - 104 = 540
 :     +     -
 23 *  17 = 391
---------------
 28 + 121 = 149
```

Die Aufgabe ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 10 - V00710

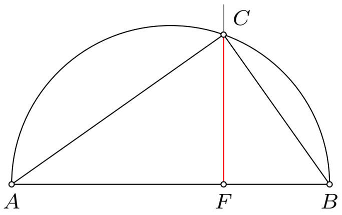
Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern.



Von einem Quadrat der Kantenlänge 32 mm wird ein Vollkreis des Radius 16 mm angezogen, d. h. $A = 32^2 - \pi \cdot 16^2 \approx 220 \text{ mm}^2$.

Aufgabe 11 - V00711

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miss die Höhe h_c!

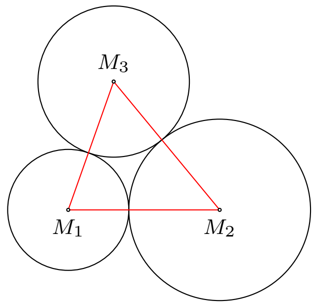


Höhe $h_c \approx 2{,}8$ cm

Aufgabe 12 - V00712

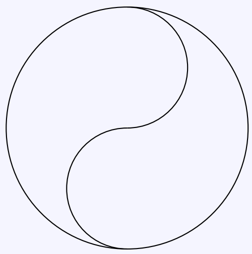
Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen. Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, dass er die beiden ersten Kreise von außen berührt! Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

Berühren sich die drei Kreise paarweise, so bilden deren Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein Dreieck mit den Seitenlängen $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$ und $r_2 + r_3$, wobei die r_i die Radien der Kreise sind.
Dieses Dreieck wird entsprechend des Kongruenzsatzes SSS konstruiert.

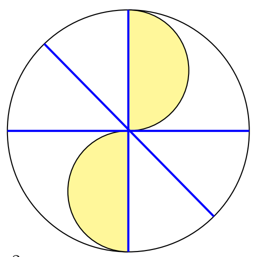


Aufgabe 13 - V00713

Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche Teile zerlegen?
Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen.



Die 3 Geraden müssen wie in der nachfolgenden Abbildung eingezeichnet werden:



Es ist noch zu zeigen, dass die zwei kleinen Halbkreise den Viertelkreis des großen Kreises halbieren. Hat der große Kreis den Radius r, so hat jeder Viertelkreis einen Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}r^2$.

Ein gelber Halbkreis hat dann den Radius $\frac{r}{2}$ und somit den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\pi\frac{r^2}{4}$, d. h. er halbiert den Viertelkreis. Alle 8 Teilflächen haben somit den gleichen Flächeninhalt.

Aufgaben der Vorolympiade 1960 gelöst von Steffen Polster

4.2 Vorolympiade 1961

4.2.1 I. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10711
Ordne folgende Zahlen der Größe nach:

$$\frac{29}{8};\quad -0{,}66;\quad -\frac{3}{2};\quad \frac{2}{3};\quad 3{,}52;\quad -0{,}67;\quad 3{,}5\overline{2}$$

Beginnend mit der kleinsten Zahl ergibt sich die Ordnung

$$-\frac{3}{2};\quad -0{,}67;\quad -0{,}66;\quad \frac{2}{3};\quad 3{,}52;\quad 3{,}5\overline{2};\quad \frac{29}{8}$$

Aufgabe 2 - V10712
Einer der größten von Menschenhand geschaffenen Seen ist der Zimljansker Stausee in der Sowjetunion. Er hat eine Oberfläche von rund 2600 km^2. Die Fläche des Müggelsees beträgt dagegen rund 750 ha.
Wie viel mal so groß ist die Fläche des Zimljansker Stausees?

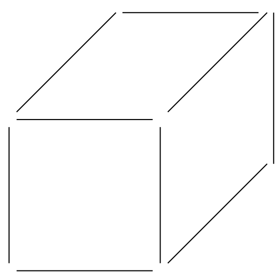
2600 km^2 sind gleich 260000 ha. Damit wird $\frac{260000}{750} = 346{,}\overline{6} \approx 347$.
Der Stausee ist 347 mal größer als der Müggelsee.

Aufgabe 3 - V10713
Für eine elektrische Leitung von 7 km Länge benötigt man 259 kg Kupferdraht.
Wie viel Kilogramm Kupferdraht der gleichen Stärke benötigt man für eine Leitung von 22 km Länge?

Mit direkter Proportionalität wird $\frac{259}{7} = \frac{x}{22}$ und $x = 814$ kg. Es werden 814 kg Kupferdraht benötigt.

Aufgabe 4 - V10714
Neun Streichhölzer sind so zu legen, dass sie drei Vierecke bilden. Jede Viereckseite soll die Länge eines Streichholzes haben. Zeichne die Figur auf.

Die Streichhölzer können so gelegt werden, dass sie ein Schrägbild eines Quaders darstellen. Die drei Vierecke sind ein Quadrat und zwei Rhomben.



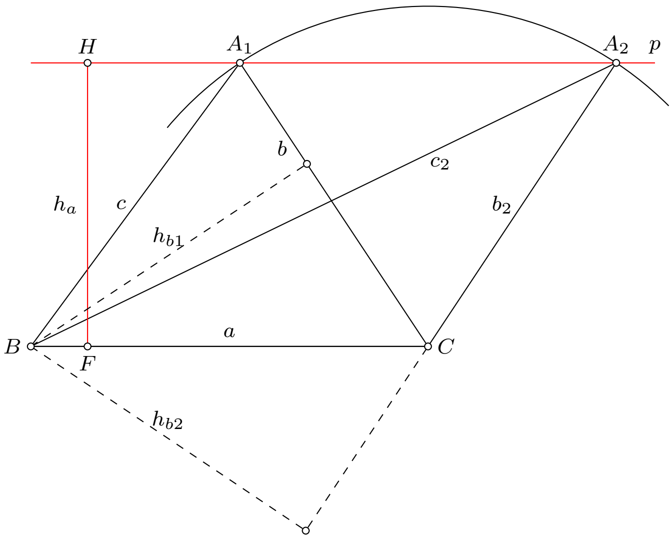
Aufgabe 5 - V10715
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!)
Wie viel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

Konstruktion:
1. Man zeichne die Strecke BC der Länge a.
2. In einem beliebigen Punkt F auf BC errichte man eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten sei H ein Punkt im Abstand h_a von F.
3. Durch H konstruiere man die Parallele p zu BC.
4. Ein Kreis um C mit dem Radius b schneidet dann die Parallele p in zwei Punkten. Diese Punkte sind A und A_2.

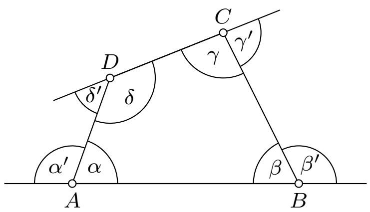
5. Die zueinander nicht kongruenten Dreiecke ABC und A_2BC sind dann die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung.

Messung der zwei Höhen h_{b1} und h_{b2} ergibt jeweils ≈ 6 cm. Die Berechnung ergibt

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b \qquad \rightarrow \qquad h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{35}{6} \text{ cm}$$



Aufgabe 6 - V10716
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!



Die Summe der vier Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der vier Außenwinkel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ beträgt 720°, da vier gestreckte Winkel addiert werden.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720^\circ$$

Da die Innenwinkelsumme im Viereck gleich 360° beträgt, ergibt sich

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$$

Die Summe der vier Außenwinkel des Vierecks beträgt 360°.

Aufgaben der Vorolympiade 1961 I. Runde gelöst von Steffen Polster

4.2.2 II. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10721
Alle Länder des sozialistischen Lagers zusammen erzeugten:

Erzeugnis	Vorkriegsjahr	1959
Elektroenergie	84,7 Mrd. kWh	418,2 Mrd. kWh
Stahl	25,4 Mill. t	92,7 Mill. t
Zement	14,5 Mill. t	73,3 Mill. t

Um wie viel Prozent stieg die Erzeugung?

Mit der Beziehung $W : G = p : 100$ (Prozentwert W, Grundwert G, Prozentsatz p) wird für jedes Erzeugnis:
Elektroenergie $p = 493{,}7$, d. h. Anstieg um 393,7 %; Stahl $p = 365{,}0$, d. h. Anstieg um 265 % und Zement $p = 505{,}5$, d. h. Anstieg um 405,5 %.

Aufgabe 2 - V10722
Die Strecke von Berlin nach Karl-Marx-Stadt wird von der Deutschen Lufthansa mit Flugzeugen vom Typ AN 2 beflogen. Um 09.45 Uhr startet die Maschine in Berlin und landet nach 220 Flugkilometern um 11.00 Uhr in Karl-Marx-Stadt.
Ein Flugzeug vom Typ IL 14 P startet um 12.30 Uhr in Leipzig und landet um 14.05 Uhr in Barth nach 443 Flugkilometern.
Im Schnellverkehr der Deutschen Reichsbahn fährt der D-Zug nach Magdeburg um 6.42 Uhr in Berlin ab und trifft nach einer Fahrtstrecke von 169 km um 8.59 Uhr in Magdeburg ein.

In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der drei Verkehrsmittel zueinander?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird mittel $v = \frac{s}{t}$ berechnet.
Flugzeug AN 2: $s_1 = 220$ km; $t_1 = 85$ min, d. h. $v_1 = \frac{220}{85} = 2{,}59 \frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 155 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
Flugzeug IL 14: $s_2 = 443$ km; $t_1 = 95$ min, d. h. $v_2 = \frac{443}{95} = 4{,}66 \frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 280 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
D-Zug: $s_3 = 169$ km; $t_1 = 137$ min, d. h. $v_1 = \frac{169}{137} = 1{,}23 \frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 74 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufstellen der gesuchten Proportionen: $155 : 74 = 2{,}1$ und $280 : 74 = 3{,}8$ und somit lautet die gesuchte Proportion $v_1 : v_2 : v_3 = 2{,}1 : 3{,}8 : 1$.

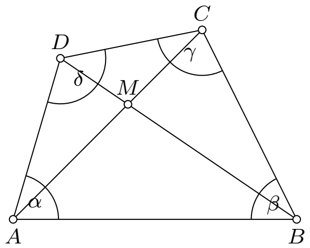
Aufgabe 3 - V10723
Zum Gruppenrat der Klasse 7 gehören Karl, Herbert und Richard, Ilse und Lore. Richard ist jünger als Herbert, aber Lore älter als Karl. Ilse ist jünger als Richard, während Herbert etwas eher geboren wurde als Lore. Karl ist jünger als Richard, ebenso ist Ilse wesentlich jünger als Herbert. Lore lebt schon einige Monate länger als Richard. Karl ist älter als Ilse, die jünger als Lore ist. Herbert ist älter als Karl.
Stelle die richtige Altersreihenfolge unserer Freunde fest!

Es gilt, mit den ersten Buchstaben als Abkürzung und < für "jünger als":

1. R < H, K < L, also derjenige muss der Älteste sein, der auf der linken Seite nicht auftritt: H
2. I < R, L < H, also ist Zweitältester derjenige, der links nur erscheint mit H als rechter Seite: L
3. K < R, I < H, der Nachfolgende ist der, der links auftritt mit H und L als rechter Seite: R
4. R < L, I < K, der Nächste kann nur der sein, der links auftritt und jeweils H, L und R auf der rechten Seite hat: K
5. I < L, K < H, der Jüngste muss dann der sein, der links erscheint mit H, L, R und K auf der rechten Seite: I

So ergibt sich die Reihenfolge (der Älteste zuerst): Herbert, Lore, Richard, Karl, Ilse.

Aufgabe 4 - V10724
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.



Voraussetzung: $AC = BD$, $AM = MC$, $BM = MD$

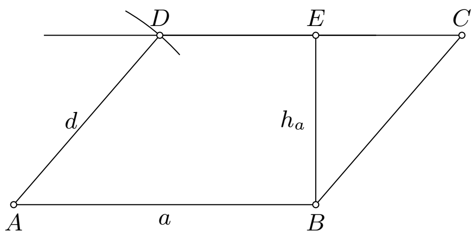
Behauptung: Winkel α = Winkel β = Winkel γ = Winkel δ

Beweis: Die Dreiecke ABM und DMC sind gleichschenklig und einander kongruent nach SWS, daher Winkel MAB = Winkel ABM = Winkel MCD = Winkel CDM.
Dasselbe trifft für die Dreiecke DAM und MBC zu. Daher Winkel DAM = Winkel MDA = Winkel MBC = Winkel BCM. Da

$$\alpha = \angle DAM + \angle MAB \qquad \beta = \angle ABM + \angle MBC$$
$$\gamma = \angle MCD + \angle BCM \qquad \delta = \angle CDM + \angle MDA$$

gilt, folgt daraus $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und laut Aufgabe die Diagonalen einander halbieren, ist jeder der vier Winkel ein Rechter, das Viereck also ein Rechteck.

Aufgabe 5 - V10725
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm^2.
Wie viel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen?



Gegeben sind $AB = a = 5$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm und $F = 14$ cm^2. Für die Konstruktion wird h_a über $\frac{F}{a} = h_a = 2{,}8$ cm ermittelt.

Konstruktion: Man zeichne die Seite AB. Im Abstand von h_a konstruiere man eine Parallele zu AB durch einen Punkt E mit $BE = h_a$.
Ein Kreisbogen um A mit dem Radius $AD = d$ schneidet die Parallele in einem Punkt D. Der Punkt C ergibt sich durch Parallelverschiebung von AD durch B.
$ABCD$ ist ein Parallelogramm, dass der Aufgabenstellung entspricht.

Durch Nachdenken über die Bestimmungsstücke von Parallelogramm, Rechteck und Quadrat kommt man zu dem Schluss:
a) Es gibt beliebig viele Parallelogramme, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen.
b) Es gibt genau ein Rechteck, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.
c) Es gibt kein Quadrat, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.

Aufgaben der Vorolympiade 1961 II. Runde gelöst von Steffen Polster

4.2.3 III. Runde V1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - V10731
In der DDR stieg die Zahl der hergestellten Fotoapparate von 1959 um 10% gegenüber 1958 und betrug rund 558000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
Fritz rechnet: "558000 minus 10% davon, das sind 55800. Also wurden 1958: $558000 - 55800 = 502200$ Stück hergestellt."
a) Welchen Fehler hat Fritz gemacht?
b) Wie muss man richtig rechnen, und wie lautet das Ergebnis?
c) Die Zahl der hergestellten Fernsehempfänger stieg von 1958 bis 1959 um 61% und betrug 1959 290000 Stück. Wie viel Stück wurden 1958 hergestellt?
d) Wie groß ist in diesem Falle die Abweichung gegenüber dem Ergebnis, das Fritz mit seiner falschen Rechnung erhält?

a) Der Fehler besteht darin, dass die 10 % auf den Prozentwert von 1959 bezogen wurde und nicht auf den Grundwert von 1958.
b) Eine Steigerung von 10 % bedeutet, dass der Prozentwert P von 1959 110 % des Grundwertes G von 1958 entspricht, d. h.

$$\frac{P}{G} = \frac{110}{100} \to \frac{558000}{G} = 1{,}1 \qquad \to \qquad G = \frac{558000}{1{,}1} = 507272$$

1958 wurden 507272 Fotoapparate hergestellt.
c) Analog zur Aufgabe b) wird

$$\frac{P}{G} = \frac{161}{100} \to \frac{290000}{G} = 1{,}61 \qquad \to \qquad G = \frac{290000}{1{,}61} = 180124$$

1958 wurden 180124 Fernsehgeräte produziert.
d) Mit der fehlerhaften Berechnung würde sich ergeben: $290000 - 0.61 \cdot 290000 = 113100$. Die Abweichung wäre folglich 67024 Fernsehgeräte.

Aufgabe 2 - V10732
Im Grundlehrgang Metallbearbeitung wurden von 5 Schülern Spannstücke für Parallelschraubzwingen angefertigt. Beim Nachmessen stellen die Schüler folgende Längen fest:
Spannstück 1 Länge 119,5 mm,
Spannstück 2 Länge 119,7 mm,
Spannstück 3 Länge 120,2 mm,
Spannstück 4 Länge 120,1 mm,
Spannstück 5 Länge 120,6 mm.
a) Welche durchschnittliche Länge hatten die Spannstücke?
b) Wie groß ist die Abweichung der Maßzahlen vom Sollmaß (120,0 mm) bei den einzelnen Spannstücken? (absoluter Fehler).
c) Wie viel Prozent des Sollmaßes betragen die Abweichungen? (prozentualer Fehler).
d) Welche Spannstücke sind brauchbar, wenn der prozentuale Fehler höchstens 1/2 Prozent betragen darf?

a) $(119{,}5 + 119{,}7 + 120{,}2 + 120{,}1 + 120{,}6) : 5 = 120{,}02$ Der Mittelwert ist 120,2 mm.
b-d)

Spannstück	absoluter Fehler	prozentualer Fehler
1	0,5 mm	0,417 %
2	0,3 mm	0,25 %
3	0,2 mm	0,167 %
4	0,1 mm	0,083 %
5	0,6 mm	0,5 %

Alle Spannstücke entsprechen dem maximalen Fehler und sind damit brauchbar.

Aufgabe 3 - V10733
Setze für ? die entsprechenden Ziffern ein:

```
3?7 * 8?
--------
 2??? 
  ???2
--------
 ?????
```

Versuche, deinen Lösungsweg zu erläutern.

Die letzte Ziffer des Produktes muss 2 sein. Da die 7 nur bei Multiplikation mit der 6 eine Endziffer 2 liefert, ist der 2. Faktor folglich 86. Weiterhin ist $8 \cdot 7 = 56$, so dass das 1. Zwischenergebnis auf 6 endet.

```
3?7 * 86
--------
 2?76
  ???2
--------
 ????2
```

$307 \cdot 8 = 2456$. Die fehlenden zwei Zehner zu 2?76 sind nur möglich, wenn die 2. Ziffer des ersten Faktors eine 4 ist. Die noch fehlenden Ziffern ergeben sich durch Ausmultiplizieren von $347 \cdot 86$.

```
347 * 86
--------
 2776
  2082
--------
 29842
```

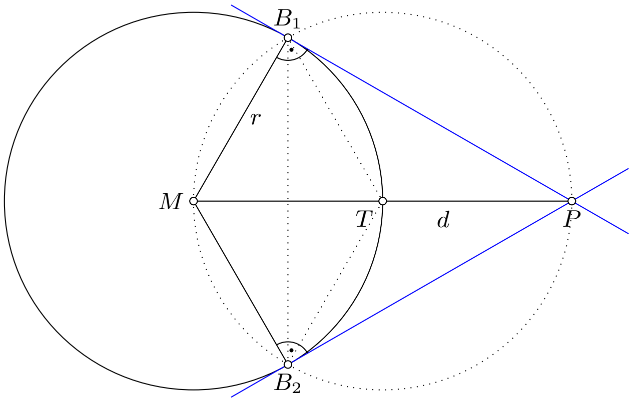
Aufgabe 4 - V10734
Eine Gruppe Junger Pioniere wandert von dem im Tal gelegenen Orte A auf den 9 km entfernten Berg B. Sie bricht in A um 8.00 Uhr auf und ist in B um 12.00 Uhr angelangt.
Am nächsten Tage wandert die Gruppe denselben Weg zurück. Sie geht um 8.30 Uhr los und kommt um 11.00 Uhr in A an.
Gibt es auf dem Wege von A nach B einen Punkt, an dem sich die Gruppe an beiden Tagen zu der gleichen Zeit befindet? Begründe die Antwort!

Einen solchen Zeitpunkt gibt es.
Auf dem Weg von A nach B hat die Gruppe eine Geschwindigkeit von $v_1 = \frac{9 \text{ km}}{4 \text{ h}}$, auf dem Weg von B nach A von $v_2 = \frac{9 \text{ km}}{2{,}5 \text{ h}} = \frac{18 \text{ km}}{5 \text{ h}}$.
Von A nach B ist die Gruppe von A nach einer Laufzeit t_1 genau $s = t_1 \cdot v_1 = \frac{9}{4} t_1$ km entfernt. Von B nach A ist der Abstand nach t_2 von B genau $s_2 = t_2 \cdot v_2 = \frac{18}{5} t_2$ km. Da die Gesamtstrecke 9 km lang ist, gilt $s_1 = 9km - s_2$. Da die Gruppe am zweiten Tag eine halbe Stunden losläuft, ist außerdem $t_2 = t_1 - 0{,}5$ h. Damit ergibt sich für den Punkt mit gleichem Abstand zu A und der gleichen Uhrzeit die Gleichung

$$\frac{9}{4} t_1 = 9 - (t_1 - 0{,}5) \frac{18}{5}$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich $t_1 = \frac{24}{13}$ h, d. h. der Zeitpunkt 9 Uhr 51 min. In diesem Moment sind die Pioniere an jedem Tag 4,15 km von A entfernt. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 5 - V10735
Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!



O.B.d.A. liege P wie in der Zeichnung gezeigt.
Die Berührungspunkte der Tangenten liegen dann auf dem Thaleskreis um den Mittelpunkt T der Strecke MP, da die Winkel zwischen den Berührradien und den Tangenten rechte Winkel sein müssen.

Konstruktion:
1. Man zeichnet den Kreis um M und die Strecke MP, die man in T halbiert.
2. Der Kreis um T mit dem Radius TP ist dann der Thaleskreis über MP und schneidet den Kreis um M in den zwei Berührungspunkten B_1 und B_2.
3. Die Geraden durch P und B_1 bzw. P und B_2 sind die gesuchten Tangenten von P an den Kreis.

Da die zwei Kreise um M und T gleiche Radien haben, sind sie spiegelsymmetrisch zur Gerade durch ihre zwei Schnittpunkte B_1 und B_2. Damit ist das Dreieck MTB_1 gleichseitig und der Winkel $\angle B_1TM = 60°$. $\angle B_1TM$ ist aber Außenwinkel des Dreiecks PTB_1, das auf Grund von $TB_1 = TP = \frac{d}{2}$ gleichschenklig ist. Der Innenwinkel $\angle B_1PM$ ist somit als Basiswinkel halb so groß, wie der Außenwinkel $\angle B_1TM$, d. h. es gilt $\angle B_1PM = 30°$.

Die zwei Dreiecke $\triangle MPB_1$ und $\triangle MPB_2$ sind nach Kongruenzsatz SSW zueinander kongruent. Zum einen sind die Seiten $MB_1 = MB = 2$ und $MP = MP$ gleich groß, zum anderen liegt der größere Winkel (der rechte Winkel) der größeren Seite gegenüber.
Damit ist auch $\angle B_2PM = 30°$ und der Schnittwinkel der Tangenten gleich 60°.

Da in dieser Herleitung die relative Lage von P zu M nicht benötigt wird, ist dieser Winkel für alle P mit $MP = d$ gleich groß.

Aufgaben der Vorolympiade 1961 III. Runde gelöst von Steffen Polster

4.3 I. Olympiade 1961

4.3.1 I. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010711

$$a)\ \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \qquad b)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad c)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \qquad d)\ \left(-\frac{4}{5}\right)^4$$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

Die Ergebnisse sind in absteigender Reihenfolge

$$a)\ \frac{25}{36} \qquad b)\ \frac{9}{16} \qquad d)\ \frac{256}{625} \qquad c)\ -\frac{32}{243}$$

Aufgabe 2 - 010712
Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1\frac{1}{2}$ mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.
Wie viel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

Zusammen sammelten die drei Gruppen also 1 mal + $1\frac{1}{2}$ mal + 1 mal soviel wie die erste allein plus 3 dt zusätzlich. $3\frac{1}{2}$mal der Ertrag der ersten ist also gleich (52 - 3) dt = 49 dt. Das bedeutet, dass die erste Gruppe 14 dt Kartoffeln aufgesammelt hat, für die zweite folgt daraus 21 dt und für die dritte 17 dt.

Aufgabe 3 - 010713
Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet.
Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

Das Volumen steigt proportional mit jeder Abmessung; da es drei mögliche Abmessungen gibt, hat das neue Stück ein $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$mal so großes Volumen. Das Gewicht verhält sich (bei gleichem Material) wie das Volumen, daher ist das neue Gewicht 30400 p.

Aufgabe 4 - 010714
Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung“ folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:
Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow – Max-Kreuziger-Oberschule	1:0
4. Oberschule Köpenick – 8. Oberschule Lichtenberg	2:0

Tabellenstand:

Platz	Mannschaft	Punkte	Tore
1.	4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
2.	12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
3.	Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
4.	8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?
Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für jede Niederlage 0:2 Punkte.

Da die 12. Oberschule und die 4. Oberschule am 2. Spieltag gewonnen und damit 2 : 0 Punkte bekommen haben, müssen die Max-Kreuziger-OS und die 8. Oberschule gemäß der Tabelle am 1. Spieltag je 2:0 Punkte geholt, d. h. gewonnen haben.

Diese beiden haben also nicht gegeneinander gespielt. Die Max-Kreuziger-OS muss also die 4. Oberschule Köpenick mit 1 : 0 geschlagen haben beim gegebenen Torverhältnis, während die 8. Oberschule Lichtenberg die 12. Oberschule Treptow mit 2:1 besiegt hat.

Aufgabe 5 - 010715
Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:
a) zwei benachbarte Seiten,
b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
c) beide Diagonalen,
d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,
e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?
Durch wie viel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!

a) Nein, da man z. B. sowohl ein Rechteck daraus konstruieren kann wie auch ein Parallelogramm mit beliebigem Winkel zwischen den gegebenen Seiten.

b) Nein, da die Länge der anderen Seite noch frei wählbar ist.

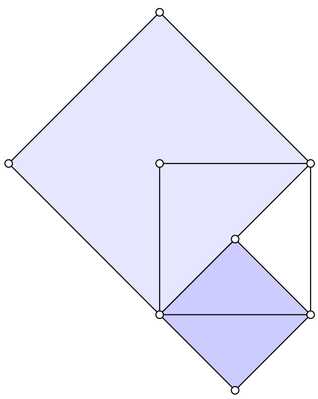
c) Nein, da der Winkel zwischen den beiden Diagonalen noch frei wählbar ist.

d) Nein, da die Länge der zweiten Diagonale noch frei wählbar ist.

e) Ja. Konstruktion: Länge der Diagonalen auf einer Geraden abtragen, an beiden Endpunkten die gegebenen Winkel antragen (Wechselwinkel). Die Seiten des Parallelogramms liegen auf den so entstandenen Schenkeln.

Ein Parallelogramm wird durch drei Stücke eindeutig bestimmt, wenn diese nicht durch Beziehungen wie z. B. dem Stufen- oder Wechselwinkelsatz in Verbindung stehen.
Man kann sich ein Parallelogramm als zwei aneinander gelegte kongruente Dreiecke vorstellen. Jede Angabe von Stücken, die ein Dreieck eindeutig festlegt, erzeugt damit auch ein Parallelogramm.

Aufgabe 6 - 010716
Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche
des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!



Für das neue Quadrat in a) nehme man die Diagonale des ersten als Kantenlänge (im Bild das hellere Quadrat), in b) nehme man die Hälfte der Diagonale (das dunklere Quadrat).

Beweis zu a):
Wenn man das neue Quadrat direkt an die Diagonale des alten konstruiert, sieht man, dass die überdeckte Hälfte des alten Quadrates genau einem Viertel des neuen entspricht.
Bei b) tauschen das alte und das neue Quadrat die Rollen.

Lösungen der I. Runde 1961 übernommen aus [5]

4.3.2 II. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010721
Der Kapitalismus hat zur Folge, dass einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.
So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603000000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204000000 t Stahl und 1604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie. Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1283000000 Menschen nur 6000000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.
Wie viel Stahl und wie viel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Zuerst rechnet man die Pro-Kopf-Produktion in den hoch entwickelten Ländern aus.

Stahl: 204 000 000 t : 603 000 000 = 0,338 $\frac{\text{t}}{\text{Person}}$,
Energie: 1 604 000 000 000 kWh : 603 000 000 = 2 660 kWh/Person.

Diese Werte multipliziert man mit der Anzahl der Menschen in den schwach entwickelten Ländern und stellt fest, dass sie etwa 434000000 t Stahl und 3413 Mrd. kWh Energie hätten produzieren müssen.

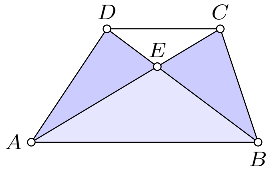
Aufgabe 2 - 010722
Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist 123,6 km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,7 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 75,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
a) Um wie viel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?
b) Wie viel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Gesucht ist diejenige Wegstrecke ist, die beide Züge bis zum Einholen zurücklegen. Diese Wegstrecke ist das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit und jeweils benötigter Zeit. Die Fahrzeiten, die die beiden Züge bis dahin benötigen, unterscheiden sich um 39 min = $\frac{13}{20}$ h (nämlich der Unterschied zwischen den Abfahrtszeiten).
Die Gleichung ist also, wenn t die Fahrzeit des D-Zuges bezeichnet:

$$t \cdot 75{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}} = \left(t + \frac{13}{20}\text{h}\right) \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} = t \cdot 32{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}} + 21{,}255\,\text{km}$$

a) Daraus errechnet sich $t = 0{,}5$ h = 30 min. Der D-Zug holt den Personenzug eine halbe Stunde nach 13.11 Uhr, also um 13.41 Uhr ein.
b) Zu diesem Zeitpunkt haben beide Züge 37,6 km zurückgelegt.

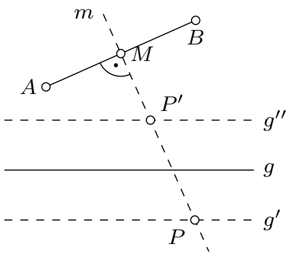
Aufgabe 3 - 010723
Es ist zu beweisen, dass in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.



Beweis:
Seien die Eckpunkte des Trapezes A, B, C und D, wobei $AB \parallel CD$ gelte. Dann sind die Dreiecke ABC und ABD flächengleich, da sie die Grundseite AB und die Höhe (d. h. den Abstand der parallelen Seiten) gemeinsam haben. Beide Dreiecke enthalten das Dreieck ABE, wobei E der Diagonalenschnittpunkt sei.

Wenn man von den Flächen von ABC bzw. ABD jeweils die Fläche von ABE wegnimmt, müssen die übrig bleibenden Flächen von AED und BEC auch gleich groß sein. Diese sind aber genau die beiden Dreiecke, deren Flächengleichheit zu zeigen ist.

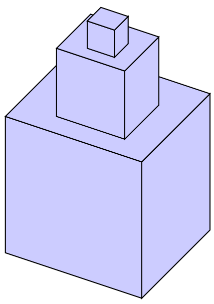
Aufgabe 4 - 010724
In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen. Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!



Konstruktion:
Man errichte die Mittelsenkrechte m zur Strecke AB, um alle Punkte mit $AP = BP$ zu erhalten. Dann konstruiere man die Parallelen g' und g'' auf beiden Seiten zu g im Abstand von 3 cm.
Die Schnittpunkte von m mit g' bzw. g'' sind die beiden gesuchten Punkte P bzw. P'.

Beweis:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt $AMP \cong BMP$ nach Kongruenzsatz SWS. Außerdem haben alle Punkte auf g' und g'' denselben geforderten Abstand zur Geraden g. Die Schnittpunkte P und P' erfüllen somit beide Forderungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 5 - 010725
Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.
Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?



(siehe Abbildung) Von jedem Würfel sind fünf Seitenflächen zu sehen (alle außer der Unterseite), abzüglich der überdeckten Oberseiten der beiden unteren Würfel (die ihrerseits so groß sind wie die Unterseiten der darauf gestellten Würfel).
Die sichtbare Fläche beträgt also

$$5a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 = 5a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 = 2464\,\text{cm}^2$$

Lösungen der II. Runde 1961 übernommen aus [5]

4.3.3 III. Runde 1961, Klasse 7

Aufgabe 1 - 010731
Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.
Um wie viel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität
a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,
b) beim Einsatz eines Melkstandes?
Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Die Ausgangsgröße ist der Melker, der 8 Kühe pro Stunde melkt.
a) Mit der sowjetischen Melkmaschine schafft er 96 Kühe/8 h = 12 Kühe/h, also 50% mehr.
b) Am Melkstand können 150 Kühe/3 h = 50 Kühe/h gemolken werden, das ist eine Steigerung auf 625 % oder um 525 % gegenüber der Ausgangsgröße.

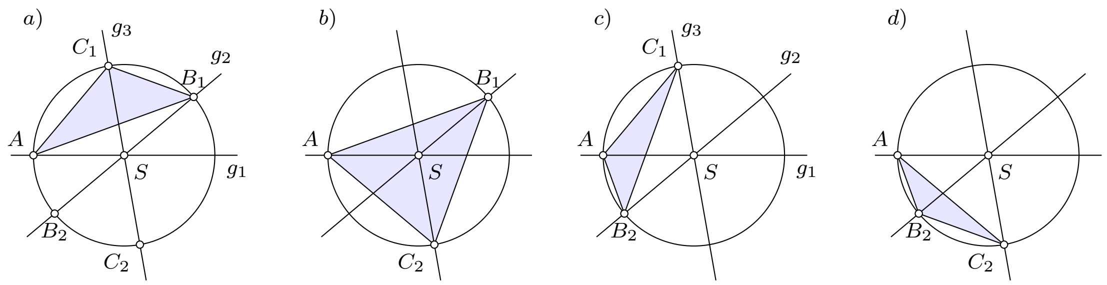
Aufgabe 2 - 010732
Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück.
Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750000 stellen wir die folgenden Strecken fest: Zossen–Storkow 4,5 cm, Storkow–Golßen 5,2 cm, Golßen–Zossen 3,9 cm. Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?
b) Um wie viel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Die geflogene Entfernung betrug $750000 \cdot (4{,}5 + 5{,}2 + 3{,}9)$ cm + 4 km = 106 km.

1. Als Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann $\frac{106\text{ km}}{1\frac{1}{40}\text{h}} = 103\frac{17}{41}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
2. Sein Konkurrent Ernst-Günter Haase erreichte nur $\frac{100\text{ km}}{1\frac{1}{5}\text{h}} = 83\frac{1}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so dass der neue Rekordinhaber den alten um 24 % übertraf.

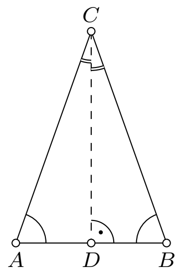
Aufgabe 3 - 010733
In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben.
Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wie viel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?



Konstruktion:
Es wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt S und dem Radius SA gezogen, der die beiden anderen Geraden g_2 und g_3 in den Punkten B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 trifft (Bild a).

Damit gilt jeweils $SA = SB_i = SC_j$, $(i,j = 1,2)$ und S ist tatsächlich der Umkreismittelpunkt aller möglichen Dreiecke AB_iC_j.
Da die Geraden den Kreis jeweils zweimal schneiden, gibt es für B und C jeweils zwei Möglichkeiten, insgesamt kann man sie zu vier ($= 2 \cdot 2$) Dreiecken AB_1C_1, AB_1C_2 (Bild b), AB_2C_1 (Bild c) und AB_2C_2 (Bild d) kombinieren.

Aufgabe 4 - 010734
Es ist zu beweisen, dass die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.



Beweis:
Die Höhe CD bildet mit der Grundseite AB einen rechten Winkel, die Schenkel $AC = BC$ und die Basiswinkel $\angle BAC = \angle ABC$ sind nach Voraussetzung gleich. Daher sind die beiden Teildreiecke ADC und BDC, die durch die Höhe entstehen, nach dem Kongruenzsatz SWW deckungsgleich.
Daraus folgt, dass die beiden Winkel $\angle ACD$ und $\angle BCD$ bzw. Strecken AD und BD gleich groß sind; was genau bei einer Halbierung der Fall ist. CD ist damit zugleich Winkel- und Seitenhalbierende.

Aufgabe 5 - 010735
Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.
a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!
b) Lässt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

Zu dieser Aufgabenstellung gibt es mehrere Lösungen, z.B.

$$a_1)\quad \left(7+7+7+7+7+7-\frac{7}{7}-\frac{7}{7}\right)7)\cdot 7\cdot 7+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=1962$$

$$a_2)\quad 7\cdot(7+7)\cdot(7+7)+(7+7+7+7+7)\cdot 7+7\cdot 7\cdot 7\cdot 7+(7+7):7=1962$$

$$b)\quad \frac{1962+1962+1962+1962+1962+1962+1962}{1962}=7$$

Lösungen der III. Runde 1961 übernommen aus [5]

4.4 II. Olympiade 1962

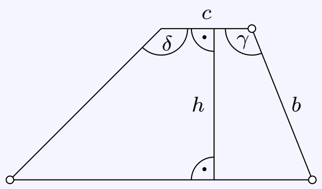
4.4.1 I. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020711
In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen: Länge l = 29,5 cm, Breite b = 12,0 cm.

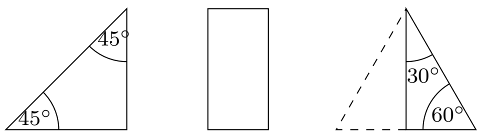
a) Berechne die Fläche einer Fliese!
b) Wie viel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge? Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

a) Die Fläche einer Fliese ist $b \cdot l = 29{,}5 \text{ cm} \cdot 12{,}0 \text{ cm} = 354 \text{ cm}^2$.
b) Damit man die Fliesen nicht zu zerteilen braucht, muss man die Fliesen der Länge nach aneinander legen, um die Breite der Wand aufzufüllen. Dann benötigt man $93 \cdot 36 = 3348$ Fliesen.

Aufgabe 2 - 020712



Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen.
Wie groß ist die Fläche?
b = 60 mm , c = 34 mm , h = 52 mm , $\gamma = 120°$, $\delta = 135°$



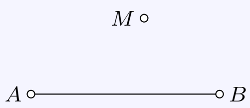
Teilfigur I Teilfigur II Teilfigur III

$$F_I = \frac{52 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm}}{2} = 1352 \text{ mm}^2$$
$$F_{II} = 34 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm} = 1768 \text{ mm}^2$$
$$F_{III} = \frac{30 \text{ mm} \cdot 52 \text{ mm}}{2} = 780 \text{ mm}^2$$
$$F = F_I + F_{II} + F_{III} = 3900 \text{ mm}^2$$

Aufgabe 3 - 020713
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist.

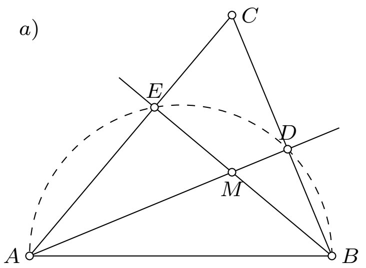
In einem Dreieck berechnet sich der Flächeninhalt zu $A = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei g eine Grundseite und h die zugehörige Höhe sind.
Für zwei verschiedene Höhen h_1 und h_2 mit $h = h_1 = h_2$ ist dann $A = \frac{g_1 \cdot h}{2} = \frac{g_2 \cdot h}{2}$, womit sofort $g_1 = g_2$ folgt. Das Dreieck ist gleichschenklig.

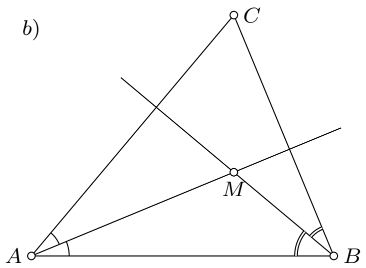
Aufgabe 4 - 020714



Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!
b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist! Beschreibe die Konstruktionen und begründe sie!

a) Zuerst zeichnet man die Geraden AM und BM ein. Auf diesen liegen die Höhen h_a und h_b des Dreiecks. Dann fällt man von A und B aus das Lot auf die jeweils andere Gerade. Da die Lote senkrecht zu den Höhen stehen und je ein Eckpunkt des Dreiecks auf ihnen liegt, sind sie die beiden anderen Seiten.
Ihr Schnittpunkt ist der Punkt C.





b) Man beginnt mit denselben Geraden. Dann trägt man aber die Winkel $\angle MAB$ und $\angle MBA$ nochmals in A und B an, so dass man die vollen Winkel des Dreiecks an diesen Eckpunkten erhält.
Damit hat man die zwei fehlenden Seiten und deren Schnittpunkt als dritten Eckpunkt C.

Aufgabe 5 - 020715
Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396.
Wie lauten die Zahlen?

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)=9n+36=396$$

damit folgt $9n=360$ und $n=40$. Die Zahlen sind also 40 bis 48.

Aufgabe 6 - 020716
In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so dass an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.
Wie viel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

Man kann (in Gedanken) von jedem Fenster, das noch zwei Läden hat, einen an einem Fenster anbringen, das keinen Laden mehr hat (schließlich ist die Anzahl dieser beiden "Arten" von Fenstern gleich!).
Dann hätte jedes Fenster einen Fensterladen, überall würde einer fehlen. Also braucht man 28 neue Fensterläden.

Lösungen der I. Runde 1962 übernommen aus [5]

4.4.2 II. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020721
An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3808 von 5828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5097 von 7387 Schülern teil.
Welcher Stadtbezirk wies die bessere relative Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

Die relative Beteiligung ist der Quotient aus der Anzahl der Schüler, die teilgenommen haben, und denen, die hätten teilnehmen können. Es müssen also die Zahlen 3808, 5828 und 5097, 7387 verglichen werden. Zur Vereinfachung kann man beide Zahlen auf einen Nenner bringen und die Zähler vergleichen; dann stellt man fest, dass

$$3808 \cdot 7387 \approx 28100000 < 5097 \cdot 5828 \approx 29700000$$

gilt. Das bedeutet, dass die relative Beteiligung in Lichtenberg höher ist.

Aufgabe 2 - 020722
Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuss; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoss die 9.
a) Wer gewann den Wettkampf?
b) Wer schoss die 10?
Die Antworten sind zu begründen!

Im für ihn günstigsten Fall konnte Günther in den letzten vier Schüssen $10+9+8+7 = 34$ Ringe schießen. Da seine letzten vier Schüsse aber zusammen durch neun teilbar sein müssen, kann er nur 27 Ringe erzielt haben und sein erster Schuss muss die 3 gewesen sein. Da er die 9 geschossen hat, hat er in den übrigen drei Schüssen insgesamt 18 erzielt. Also hat er zusammen 30 Ringe, die 10 ist nicht dabei.

Für Heidrun bleiben 36 von den insgesamt 66 geschossen Ringen übrig, sie hat also gewonnen.

Aufgabe 3 - 020723
Emil erzählt: "Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt."
Wie alt ist Emil? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Man bezeichne Emils Alter in Jahren mit a. Dann ist sein Bruder Heinz $\frac{a}{2}$, sein Vater $\frac{a^2}{4}$ und seine Mutter $\frac{a^2}{4} - 5$ Jahre alt. Zusammen sind sie

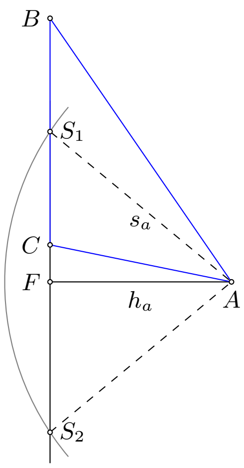
$$a + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} - 5 = 85$$

Die Gleichung kann man umformen zu $a^2+3a = 180$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen oder durch systematisches Probieren (a muss ein Teiler von 180 sein) kommt man auf $a = 12$, Emil ist also 12 Jahre alt.

Aufgabe 4 - 020724
Wie viel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?
Begründe deine Antwort!

Ein Außenwinkel ist so groß wie die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
Nehmen wir an, ein Außenwinkel sei spitz. Dann müssen die beiden entsprechenden Innenwinkel zusammen kleiner als 90° sein. Das bedeutet, dass der dritte Innenwinkel größer als 90° ist (Innenwinkelsumme). Dieser geht als Summand in die beiden anderen Außenwinkel ein, so dass diese beiden größer als 90° sind. Demzufolge besitzt ein Dreieck höchstens einen spitzen Außenwinkel.

Aufgabe 5 - 020725
Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!



Man beginne mit einer Geraden, auf der man h_a abtrage und einen Endpunkt mit A bezeichne. Um diesen Punkt A zeichne man einen Kreis mit s_a als Radius, im anderen Endpunkt errichte man die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten wird die Seite a liegen, ihr Schnittpunkt mit dem Kreis (einen auswählen, da es zwei gibt!) ist der Mittelpunkt der Seite a.
Von diesem Punkt aus kann man zu beiden Seiten je die Hälfte von a abtragen und erhält so die Punkte B und C und damit das Dreieck.

Lösungen der II. Runde 1962 übernommen aus [5]

4.4.3 III. Runde 1962, Klasse 7

Aufgabe 1 - 020731
Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wie viel Lösungen waren eingesandt worden?
b) Wie viel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Zuerst stellt man fest, dass es nicht möglich ist, drei Bauwerke richtig und eines falsch zuzuordnen. $12\%+24\%+48\% = 84\%$ hatten wenigstens ein Bauwerk richtig. Daher entsprechen die verbleibenden 16% den 240 vollkommen falschen Einsendungen. Damit waren insgesamt 1500 Lösungen eingesandt worden, davon hatten 240, 720, 360, 0 bzw. 180 genau 0, 1, 2, 3 bzw. 4 Paare richtig.

Aufgabe 2 - 020732
In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden.
In welchem Abstand muss angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Zwischen den 15 Löchern gibt es 14 Abstände. Also muss der Abstand zwischen den Mittelpunkten der äußersten Löcher in 14 gleiche Teile geteilt werden. An beiden Enden geht das 2,5fache eines Lochdurchmessers ab, also 100 mm. Dazu kommen noch zweimal der Radius, da die Angabe vorher sich auf den Lochrand bezog.
Es müssen also 2380 mm in 14 Abschnitte zerlegt werden. Jeder muss also 170 mm lang sein.

Aufgabe 3 - 020733
Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, dass er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen.
Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: "Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner."
Sie vereinbaren, dass sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und dass der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)
a) Wer gewinnt?
b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?
c) Wie viel Stufen müsste die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)
Begründe deine Antworten!

a) Die Anzahl der Schritte, die Klaus braucht, ist gleich der Anzahl der Stufen, also 80. Hans schafft in $3 + 2 = 5$ Schritten nur $3 - 2 = 1$ Stufe. Zu beachten ist aber, dass Hans von der 17. Stufe aus direkt auf seinen Stock kommt (mit drei Schritten), ohne die zwei Schritte wieder zurückzugehen.
Also braucht Hans $17 \cdot 5 + 3 = 88$ Schritte, womit Klaus gewinnt.

b) Klaus braucht $10 + 60 = 70$ Schritte; Hans nur $7 \cdot 5 + 3 = 38$ und gewinnt in diesem Fall.

c) Gleichheit der Anzahl der Schritte bei s Stufen: $(s - 3) \cdot 5 + 3 = s + 60$, damit $5s - s = 60 - 3 + 15$ und weiter $s = 18$.

Aufgabe 4 - 020734
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.
Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Wenn man die Konstruktion durchführt, stellt man fest, dass die Dreiecke ACE und BDE kongruent sind.
Es gilt nämlich $BE = CE$ (E ist der Mittelpunkt von a), $AE = ED$ (Verlängerung von AE um sich selbst) und $\angle AEC = \angle DEB$ (Scheitelwinkel). Damit sind die beiden Dreiecke flächengleich; durch das Hinzunehmen der Fläche des Dreiecks ABE folgt $F_1 : F_2 = 1$.

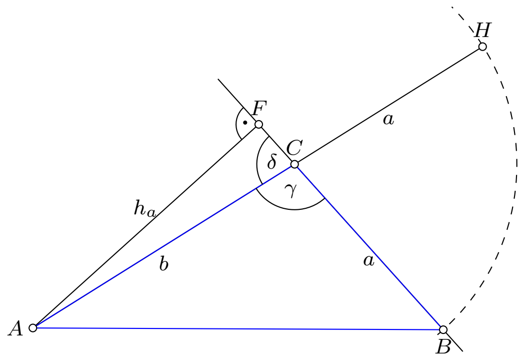
Aufgabe 5 - 020735
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M.
Beweise, dass der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

Die Trapezinnenwinkel am gleichen Schenkel sind zusammen je 180°. Die Strecken von M zu den Eckpunkten sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Daher gilt

$$\angle MDA + \angle DAM = \frac{\alpha + \delta}{2} = 90°$$

Nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck AMD folgt, dass der gesuchte Winkel ebenfalls 90° groß ist. Ebenso gilt das Gesagte am anderen Schenkel des Trapezes.

Aufgabe 6 - 020736
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $BC = a$ und $AC = b$), die Größe des Winkels $\angle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.



Zuerst überlege man sich, dass die Höhe h_a außerhalb des gesuchten Dreiecks liegen muss, weil es stumpfwinklig ist. Dann legt man eine Gerade (auf der später die Seite a liegt) und auf ihr den Punkt F beliebig fest. In F errichtet man eine Senkrechte, auf der man h_a abträgt; ihr Endpunkt wird A.

Nun kann man nutzen, dass man den Winkel γ kennt: Man kennt gleichzeitig δ (gestreckter Winkel: $\gamma + \delta = 180°$) und $\angle FAC$ (nach Innenwinkelsatz).
In A konstruiert man an AF einen Winkel von 10°, auf dem erhaltenen Schenkel trägt man $s = a + b$ ab; der Endpunkt sei H und der Schnittpunkt mit der ersten Geraden sei C.
Damit hat man aus den gegeben Stücken das Hilfsdreieck ACF erhalten, dessen Eckpunkt C die Seitensumme s in $b = AC$ und $a = CH$ teilt. Die Strecke CH überträgt man dann auf die Gerade, auf der die Seite a liegen muss; es entsteht der Punkt B. Damit kennt man das gesuchte Dreieck.

Lösungen der III. Runde 1962 übernommen aus [5]

4.5 III. Olympiade 1963

4.5.1 I. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030711
Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm.
Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d.h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.
Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Es gibt 400 Reihen zu je 900 Stauden. Die 360000 Stauden ergeben einen voraussichtlichen Gesamtertrag von 235 t Kartoffeln.

Aufgabe 2 - 030712
Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen.
Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen "Schnitt" von 40 km je Stunde.
In welcher Zeit und nach wie viel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Ampler legt in jeder Stunde durchschnittlich 2 km mehr zurück als Vyncke. Dieser hatte $\frac{2}{3}$ km Vorsprung, also wäre er nach 20 min von Ampler eingeholt worden. In dieser Zeit hätte Ampler 14 km zurückgelegt.

Aufgabe 3 - 030713
Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

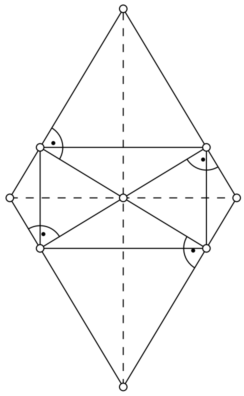
Es gilt

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377} = \frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{436 \cdot 377 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$$

Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

Aufgabe 4 - 030714
Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.
a) Beweise, dass die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!
b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

a) Beweis:
Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Außerdem sind alle Seiten gleich lang. Demzufolge sind die vier Dreiecke, in die ein Rhombus durch seine Diagonalen geteilt wird, kongruent. Daraus folgt, dass die vier Lote, die gleichzeitig die Höhe je eines der vier Dreiecke sind, gleich lang sind.
Weiterhin liegen je zwei Lote auf einer Geraden. Damit sind die Diagonalen des Lotfußpunktvierecks gleich lang und halbieren einander; es ist also ein Rechteck.



b) Wenn der Rhombus selbst ein Quadrat ist, bilden je zwei benachbarte Lote rechte Winkel. Ein Rechteck, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Quadrat.

Aufgabe 5 - 030715
Mit wie viel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Das Produkt enthält die Faktoren 5, 10, 15, 20, 30, 35 und 40, sowie den Faktor 25, in denen insgesamt neunmal der Faktor 5 vorkommt.
In allen übrigen Faktoren tritt der Faktor 5 nicht auf. Da die Anzahl der Endnullen von der Anzahl der Faktoren 2 und 5 abhängt und im vorliegenden Fall der Faktor mindestens neunmal auftritt, hat das Produkt genau 9 Endnullen.

Aufgabe 6 - 030716
a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 lässt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

a) Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5, und 6 ist 60. Die Zahlen 1, 61, 121, 181, ... lassen also bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1. Durch Probieren findet man, dass 301 die kleinste dieser Zahlen ist, die sich durch 7 teilen lässt.

b) Weitere Zahlen sind z. B. 721 und 1141. Durch Addition von 420 zu einer derartigen Zahl erhält man stets eine weitere Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

Lösungen der I. Runde 1963 übernommen aus [5]

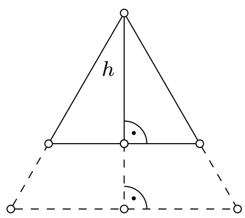
4.5.2 II. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030721
Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine mindestens durch 4 und genau eine andere durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Demnach ist von den vier aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets genau eine mindestens durch 8 und genau eine weitere durch 4, aber nicht durch 8 teilbar.
Die beiden anderen geraden Zahlen sind in jedem Fall durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Damit ist das betrachtete Produkt durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar.

Da unter den vier aufeinander folgenden geraden Zahlen keine durch 16 teilbar sein muss, ist das Produkt im allgemeinen nicht durch 2^8 teilbar. Die gesuchte höchste Potenz ist demnach 2^7.

Aufgabe 2 - 030722
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!



Konstruktion: (siehe Abbildung) Man konstruiere zuerst ein beliebiges gleichseitiges Dreieck (gestrichelt dargestellt).
In diesem errichte man eine der Höhen. Auf der (ggf. verlängerten) Höhe trägt man 4 cm vom Eckpunkt des Dreiecks aus ab; dies ist eine der Höhen h des gesuchten Dreiecks.
Im erhaltenen Endpunkt von h errichtet man die Senkrechte zu h; so erhält man die dritte Seite des gesuchten Dreiecks (durchgezogen dargestellt).

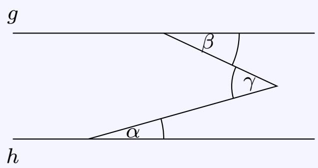
Diese Konstruktion erfüllt die Aufgabenstellung, da alle gleichseitigen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 3 - 030723
Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.
a) Wie viel Schnitte muss man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)
b) Wie viel Würfel erhält man?

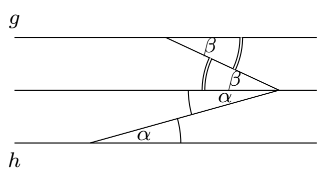
a) Man braucht 26 Schnitte $(2 + 6 + 18)$.
b) Man erhält 27 Würfel $(3 \cdot 3 \cdot 3)$.

Aufgabe 4 - 030724

Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!



Behauptung: $\gamma = \alpha + \beta$



Beweis: (siehe Abbildung) Man zeichne eine Parallele zu g und h durch den Scheitelpunkt von γ. Diese teilt γ in zwei Teilwinkel. Nach dem Wechselwinkelsatz ist der obere genauso groß wie β, der untere wie α. Zusammen gilt also: $\gamma = \alpha + \beta$.

Aufgabe 5 - 030725
In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, dass unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.
Wie viel Kugeln muss sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

Sie muss 38 Kugeln nehmen.
Im ungünstigsten Falle kann Brigitte zunächst die 10 schwarzen bzw. weißen Kugeln und von jeder Farbe 9 Kugeln, insgesamt also 37 Kugeln, herausnehmen. Nimmt sie jetzt noch eine weitere Kugel heraus, dann hat sie stets mindestens 10 Kugeln gleicher Farbe unter diesen 38 Kugeln.

Lösungen der II. Runde 1963 übernommen aus [5]

4.5.3 III. Runde 1963, Klasse 7

Aufgabe 1 - 030731
Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, dass seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.
Wie muss er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Auf 8 Stunden geht Peters Uhr 12 Minuten nach. Damit geht seine Uhr in einer Stunde 1,5 Minuten nach, und in 3 Stunden 4,5 Minuten. Also muss Peter um 15.00 Uhr seine Uhr auf 15.04 Uhr und 30 Sekunden stellen.

Aufgabe 2 - 030732
a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111111 !
b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

a) Es gilt:

$$111111 : 3 = 37037; \qquad 37037 : 7 = 5291; \qquad 5291 : 11 = 481; \qquad 481 : 13 = 37$$

Die Primfaktoren der Zahl 111111 lauten 3, 7, 11, 13 und 37.
b) Weitere Teiler sind

$$21(3 \cdot 7) \qquad 33(3 \cdot 11) \qquad 39(3 \cdot 13) \qquad 111(3 \cdot 37) \qquad 77(7 \cdot 11)$$

$$91(7 \cdot 13) \qquad 259(7 \cdot 37) \qquad 143(11 \cdot 13) \qquad 407(11 \cdot 37) \qquad 231(13 \cdot 37).$$

Aufgabe 3 - 030733
Eine Zahl $30 \star 0 \star 03$ soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die $\star$ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muss nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)
Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Die Zahl

$$30 \star 0 \star 03 = 3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y$$

ist genau durch 13 teilbar mit den Ziffern x und y, wenn $6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$ durch 13 teilbar ist, denn es gilt

$$3000003 + 10000 \cdot x + 100 \cdot y = 13 \cdot (230769 + 769 \cdot x + 7 \cdot y) + 6 + 3 \cdot x + 9 \cdot y$$

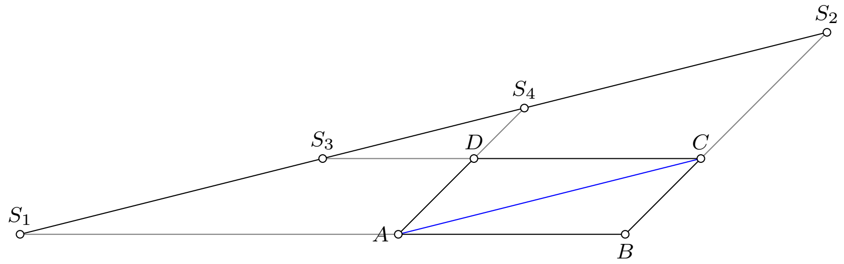
Durch systematisches Testen von $3 \cdot (2 + 3 \cdot y + x)$ auf Teilbarkeit durch 13 findet man für (x, y) schnell die Lösungen (8, 1), (5, 2), (2, 3), (9, 5), (6, 6), (3, 7) und (0, 8).
Somit erfüllen die folgenden Zahlen die geforderten Eigenschaften:

3000803; 3020303; 3030703; 3050203; 3060603; 3080103; 3090503

Aufgabe 4 - 030734
Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!
Wie viel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

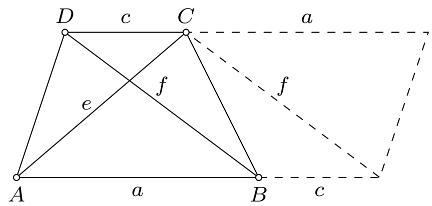
Es gibt
- 5 Vierecke, die aus je 3 Fünfeckseiten und einer Diagonalen,
- 5 Vierecke, die aus je 2 Fünfeckseiten und 2 Diagonalen und
- 5 Vierecke, die aus je einer Fünfeckseite und 3 Diagonalen
gebildet werden, insgesamt also 15 Vierecke.

Aufgabe 5 - 030735
Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, dass sie die Gerade schneiden!
Beweise, dass die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!



Die beiden Abschnitte sind zur selben Diagonalen parallel und als Parallelogrammseiten auch genau so lang wie diese Diagonalen, also sind sie auch untereinander gleich lang.
In der Darstellung gilt z.B. $S_1S_3 = AC = S_4S_2$.

Aufgabe 6 - 030736
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.
a) Konstruiere dieses Trapez!
b) Begründe die Konstruktion!



b) Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, dass beide zusammen ein Parallelogramm mit $(a + c)$ als Parallelseiten bilden. Es lässt sich dann aus $(a + c)$, e und f ein Teildreieck konstruieren.
Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes lässt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und auf einer Trapezseite durchführen.

Lösungen der III. Runde 1963 übernommen aus [5]

4.6 IV. Olympiade 1964

4.6.1 I. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040711
Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.
Gib eine der möglichen Lösungen an!

z.B.: $(777 + 777 + 777) : 7 + 77 + 777 + 777 = 1964$

Aufgabe 2 - 040712
Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Der Gesamtweg beträgt: $(35\frac{3}{4} + 92{,}7)$ km $\cdot\, 2 = 256{,}9$ km.
Die gesamte Fahrtzeit beträgt: $(1 + 2{,}5 + 3{,}2)$ h $= 6{,}7$ h.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt somit $v = \frac{s}{t} = \frac{256{,}9\text{ km}}{6{,}7\text{ h}} \approx 38{,}3\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 3 - 040713
Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung.
Brigitte findet zwei Lösungswege.

a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck auf, so dass zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert.
An der gewünschten Stelle lässt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.

b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle.
Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der bekannten geometrischen Grundkonstruktionen ebenfalls an die gewünschte Stelle.

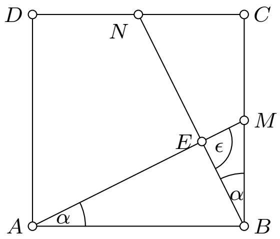
Anmerkung: In beiden Fällen wird folglich ein Dreieck aus drei Seiten konstruiert.

Aufgabe 4 - 040714
Jede natürliche Zahl heißt vollkommene Zahl, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist; wie man sieht; keine vollkommene Zahl.
Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Man schreibt die echten Teiler der natürlichen Zahlen von 2 bis 30 für jede dieser Zahlen auf und bildet jeweils die Summe. Dabei findet man

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad \text{und} \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

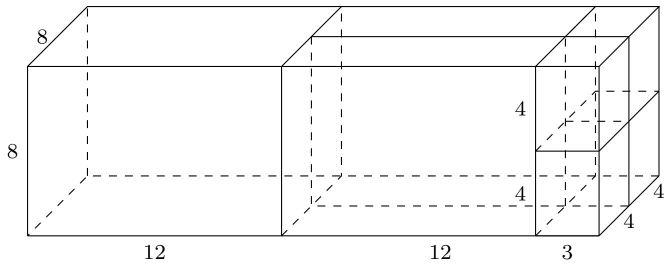
Aufgabe 5 - 040715
In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten BC bzw. CD.
Es ist zu beweisen, dass die Strecken AM und BN aufeinander senkrecht stehen.



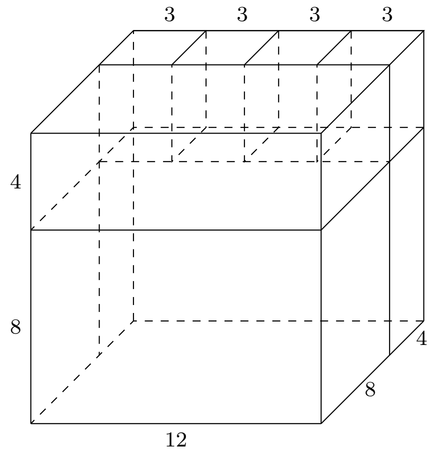
Die Dreiecke ABM und BNC sind kongruent (SWS). Daraus folgt:

$$\epsilon = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$$

Aufgabe 6 - 040716
Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm.
Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so dass sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.
Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!



Der Quader hat ein Volumen von $V = 8 \cdot 8 \cdot 27$ cm^3 = 1728 cm^3. Damit muss der Würfel bei gleichem Volumen eine Kantenlänge von 12 cm haben, da gilt: 1728 cm^3 = (12 cm)^3.



Lösungen der I. Runde 1964 übernommen aus [5]

4.6.2 II. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040721
Beweise, dass die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

$3n$ sei die kleinste der Zahlen, welche durch 3 teilbar ist. Dabei ist n eine natürliche Zahl. Für die Summe gilt dann:

$$3n + 3n + 1 + 3n + 2 + 3n + 3 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 = 21n + 21 = 21 \cdot (n + 1)$$

Da die Summe als $21 \cdot (n + 1)$ dargestellt werden kann, ist sie folglich durch 21 teilbar.

Aufgabe 2 - 040722
In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluss des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur "5", jeder neunte Schüler erhielt die Zensur "1", jeder dritte die Zensur "2" und jeder sechste die Zensur "4".
Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.
Wie viel Schüler erhielten die Zensur "3"?

Die Anzahl n muss ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d.h. ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ kommt nur $n = 36$ in Frage.

Zensur	1	2	3	4
Schüler	4	12	14	6

$x = 14$ Schüler haben die Zensur 3.

Aufgabe 3 - 040723
In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Berechne den Umfang des Dreiecks!

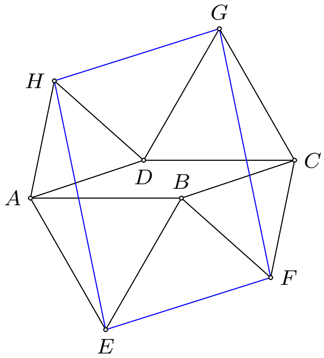
Nach den genannten Bedingungen und wegen $c < a + b$ und $c > a - b$ (Dreiecksungleichungen) kann c nur 8 cm lang sein.
Damit wird für den Umfang $u = a + b + c = 4 + 6 + 8 = 18$ cm.

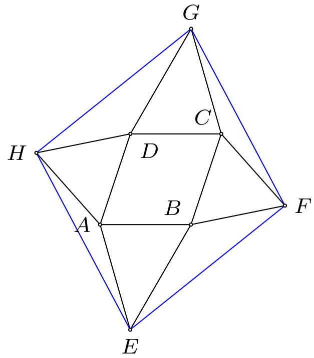
Aufgabe 4 - 040724
Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, dass die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.
Es ist zu beweisen, dass E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen besitzen.

1. Möglichkeit
Man kann die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten des Vierecks $EFGH$ dadurch beweisen, dass die gesamte Figur bei einer Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD um 180° mit sich zur Deckung kommt.

2. Möglichkeit
Man zeigt die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten im Viereck $EFGH$ etwa nach dem Kongruenzsatz SWS, angewendet auf die Dreieckspaare EFB, GHD und CGF, AEH. (Fallunterscheidung nötig!) Die Punkte A und C können auch auf den Seiten HE bzw. GF liegen.





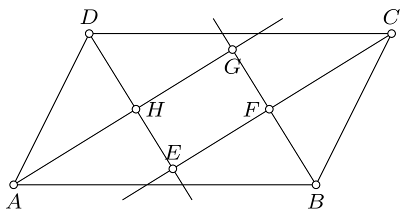
Lösungen der II. Runde 1964 übernommen aus [5]

4.6.3 III. Runde 1964, Klasse 7

Aufgabe 1 - 040731
Wie viel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend nummeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Zunächst hat man die Seiten 1-9 welche je 1 Ziffern haben $\Rightarrow$ 9 Ziffern.
Dann die Zahlen von 10-99 mit je 2 Ziffern $\Rightarrow$ 180 Ziffern.
Die nun folgenden Zahlen sind alle dreistellig. Bis zur Seite 99 wurden 189 Ziffern benötigt, zieht man das von den 1260 Gesamtziffern ab so sind noch 1071 Ziffern übrig. Teilt man das durch drei so erhält man die Anzahl der dreistelligen Zahlen. Diese ist 357.
Das heißt, dass nach Seite 99 noch 357 andere Seiten kommen. Rechnet man nun $99 + 357$ so erhält man die Gesamtseitenzahl. Also hat das Buch 456 Seiten.

Aufgabe 2 - 040732
Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, dass die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!



Entsprechend der Aufgabenstellung muss der Beweis nur für das gezeichnete Parallelogramm geführt werden. Wir betrachten als Beispiel den abgebildeten Fall und wählen von den verschiedenen Beweismöglichkeiten, bei denen auch Drehungen und Parallelverschiebungen verwendet werden können, die folgende:

Es gilt $\angle EDC = \angle ABG = \angle BIC$ und damit $EH \parallel FG$. Entsprechend beweist man $HG \parallel EF$. Also ist $EFGH$ ein Parallelogramm.
Bezeichnet R einen rechten Winkel, so gilt

$$\angle AGB = 2R - \frac{1}{2}\angle DAB - \frac{1}{2}(2R - \angle DAB) = R$$

Das Parallelogramm $EFGH$ ist daher ein Rechteck.

Aufgabe 3 - 040733
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:
1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.
In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.
Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Man betrachte zunächst die Aussagen 1 und 2. Es gibt nun 3 Möglichkeiten. Entweder ist Paul erster oder Paul ist zweiter oder Paul ist weder zweiter noch erster.

Möglichkeit 1: Paul ist weder erster noch zweiter.
Dann würde folgen, dass Jürgen zweiter und Wolfgang dritter ist. Jetzt kann aber keine der Aussagen bei 3. wahr sein, weil Hans nicht zweiter sein kann, weil das schon Jürgen ist und Wolfgang nicht vierter sein kann, weil er schon dritter ist, d.h. nicht möglich.

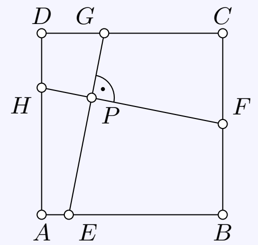
Möglichkeit 2: Paul ist zweiter.
Wäre Paul zweiter, so wäre die Aussage "Paul ist erster" falsch, dann müsste aber die Aussage "Jürgen ist zweiter" gelten. Das geht aber nicht, weil Paul schon zweiter, d.h. nicht möglich.

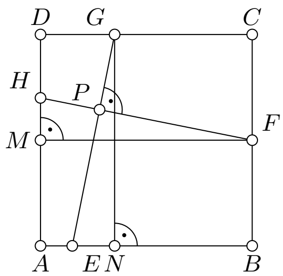
Möglichkeit 3: Paul ist erster.
Also ist die Aussage "Paul ist zweiter" falsch. Daraus folgt, dass Wolfgang dritter ist. (Aussage 2) Also ist die Aussage "Wolfgang ist vierter" falsch, also ist Hans zweiter. (Aussage 3) Jürgen bleibt übrig und ist demnach vierter.

Paul belegte den ersten Platz, Hans den zweiten, Wolfgang den dritten und Jürgen den vierten. Aufgrund des aufgezeigten Lösungsweges kann es auch keine andere Lösung geben.

Aufgabe 4 - 040734

Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, dass jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (siehe Abbildung).
Beweise, dass die beiden Strecken EG und HF gleich lang sind!





Wir legen durch F die Parallele zu AB und durch G die Parallele zu BC.
Es entstehen die Punkte M und N (siehe Abbildung). Dann gilt $NG = MF$; $\angle MFH = \angle NGE$ wegen $MF \perp NG$, $HF \perp EG$. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ENG$ und $\triangle HMF$.
Also gilt: $EG = HF$.

Aufgabe 5 - 040735
Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ \hline & \mathrm{V} & \mathrm{I} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, dass es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Betrachte man zunächst die zweite Spalte von rechts: $E + N = E$. So gibt es nur 2 Möglichkeiten für N:

(1) $N = 0, E + 0 = E$ wahr, kein Übertrag

Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts. $R + I = I \Rightarrow R = 0$ nicht möglich, da $R = N = 0$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

(2) Von der Aufgabe $I + S = R$ bleibt ein Übertrag zurück, dieser kann maximal 1 sein da I und S maximal 8 und 9 (I und S müssen ja einstellig sein) sein können und demnach maximal 17 für $I + S$ infrage kommt.

$N = 9, E + 9 + 1 = E + 10$ es bleibt wieder eins als Übertrag, wahr.

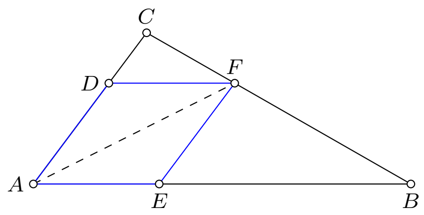
Nun betrachten wir die 3. Spalte von rechts.

$R + I + 1 = I + 10$ (hier muss ein Übertrag entstehen denn würde $R + I + 1 = I$ so wäre $R = -1$, die Buchstaben können aber nur positive Zahlen annehmen damit eine Additionsaufgabe entsteht.)

$R = 9$ nicht möglich, da $R = N = 9$ und es dürfen keine zwei Buchstaben den gleichen Wert annehmen.

Also gibt es keine Lösung für die Aufgabe.

Aufgabe 6 - 040736
Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, dass einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.



Wir denken uns die Aufgabe gelöst und betrachten den Rhombus $AEFD$. Die Diagonale AF halbiert den Winkel $\angle DAE$ und damit auch den Winkel $\angle CAB$.
Weiterhin gilt $AE = EF = FD = DA$ sowie $AE \parallel DF$ und $AD \parallel EF$.

Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen die Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, ihren Schnittpunkt mit BC nennen wir F. Durch F konstruieren wir Parallelen zu den Dreiecksseiten AB bzw. AC.
Die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten AB und AC werden E bzw. D genannt. Das Viereck $AEFD$ ist somit ein Parallelogramm und wegen $\angle DAF = \angle FAE$ ein Rhombus.

Lösungen der III. Runde 1964 übernommen aus [5]

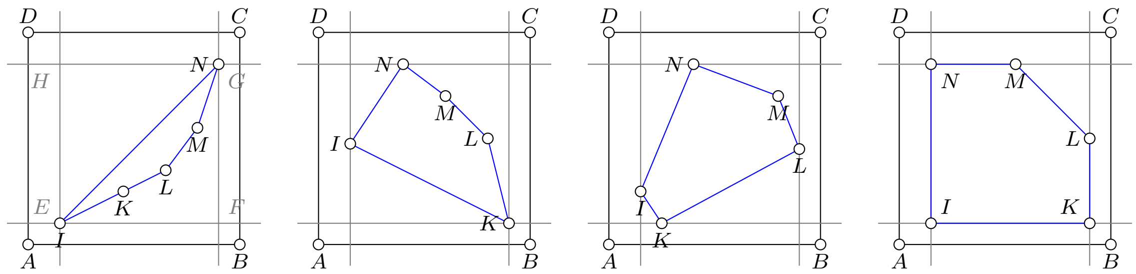
4.7 V. Olympiade 1965

4.7.1 I. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050711
Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genau soviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag.
Wer hat mehr Geld gespart?

Peters Geldbetrag sei p, Rainers r. Dann gilt $\frac{2}{3}p = \frac{3}{4}r$ und folglich $p = \frac{8}{9}r > r$, also hat Peter mehr Geld gespart als Rainer.

Aufgabe 2 - 050712
Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck.
Es ist zu beweisen, dass der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.



$ABCD$ sei das gegebene Quadrat, $IKLMN$ das gegebene Fünfeck (siehe Abbildungen).
Man verschiebt die Gerade durch AB parallel, bis sie zum ersten Mal durch einen Punkt des Fünfecks verläuft, aber nicht ins Innere des Fünfecks eintritt. Entsprechend verfährt man mit den Geraden durch BC, CD und AD.
Die vier so erhaltenen Geraden schneiden einander in den Punkten E, F, G und H, die Eckpunkte eines Rechtecks sind, das ganz im Innern von $ABCD$ liegt und daher einen kleineren Umfang als das Quadrat hat (jede Rechteckseite ist kürzer als die Quadratseite).
Von den Eckpunkten des Fünfecks liegen nun mindestens zwei auf dem Rande des Rechtecks. Man errichtet über jeder Fünfeckseite, die nicht auf dem Rande des Rechtecks liegt, je ein rechtwinkliges Dreieck mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Fünfeckseite ist Hypotenuse,
b) die Katheten liegen parallel zu den Rechteckseiten (bzw. liegen auf den Rechteckseiten),
c) die Dreiecksfläche liegt außerhalb des Fünfecks.

Da das Fünfeck konvex ist, ist die Konstruktion derartiger Dreiecke stets möglich. Je zwei so konstruierte rechtwinklige Dreiecke haben dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam. Die Summe der Längen aller Katheten dieser Dreiecke und der auf dem Rande des Rechtecks liegenden Fünfeckseiten ist, wie man leicht einsieht, gleich dem Umfang des Rechtecks $EFGH$ (siehe Abbildung).

Da höchstens vier Seiten des Fünfecks $IKLMN$ auf dem Rande des Rechtecks $EFGH$ liegen können, lässt sich stets mindestens ein solches rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Nach der Dreiecksungleichung ist aber die Länge seiner Hypotenuse kleiner als die Summe der Längen seiner Katheten.
Mithin ist der Umfang des Fünfecks $IKLMN$ kleiner als der des Rechtecks $EFGH$, und damit erst recht kleiner als der Umfang des Quadrats $ABCD$.

Aufgabe 3 - 050713
Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:
a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.
b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.
c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Für die beiden vorderen Ziffern gibt es unter den Bedingungen der Aufgabe 8 Möglichkeiten (alle außer 6 und 9). Jedes dieser 8 Ziffernpaare kann mit einer der 4 Kombinationen AB 69, AB 96, AD 69, AD 96 gekoppelt sein. Daher ist die größtmögliche Anzahl der den Bedingungen der Aufgabe genügenden PKW $4 \cdot 8 = 32$.

Aufgabe 4 - 050714
Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:
Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.
Wie viel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

Weil jeder genau einmal gegen jeden spielt, gilt, wenn n die Anzahl der Teilnehmer ist: n(n - 1) 2 = 28, also n(n - 1) = 56. Diese Gleichung wird von der natürlichen Zahl 8 erfüllt. Da für beliebige natürliche Zahlen n zu größeren Werten n stets größere Werte von n(n - 1) gehören, gibt es außer 8 keine natürliche Zahl, die diese Gleichung befriedigt. Also nahmen 8 Personen am Schachturnier teil.

Lösungen der I. Runde 1965 übernommen aus [5]

4.7.2 II. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050721
Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN
(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN
(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN (Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)
(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Eine Straßenbahnfahrt kostet im Falle (1) 20 Pfennig, im Falle (2) $16\frac{2}{3}$ Pfennig, im Falle (3) 15 Pfennig.
Im Falle (3) kosten x Fahrten im Monat genau $15 \cdot x$ Pfennig, während sie im Falle (4) gerade 1000 Pfennig kosten.
Daher ist die Monatskarte bei x Fahrten genau dann am billigsten, wenn $15 \cdot x \geq 1000$ ist; d.h. bei 67 und mehr Fahrten monatlich ist die Monatskarte am billigsten, bei weniger Fahrten nicht.
Die gesuchte Zahl ist daher 67.

Aufgabe 2 - 050722
Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

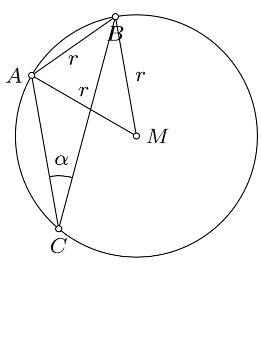
Angenommen, es gäbe ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β im Punkte S unter einem rechten Winkel schneiden.
Dann ergäbe sich aus dem Dreieck $\triangle ASB$, dass die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ zusammen 90° und damit α und β zusammen 180° betragen müssten, d.h., zwei Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ würden parallel verlaufen, was unmöglich ist. Es gibt also kein Dreieck dieser Art.

Aufgabe 3 - 050723
Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!
a) Welche der beiden Summen ist größer?
b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Man vergleicht die beiden ersten Summanden (100 und 102), die beiden zweiten Summanden (104 und 106) u.s.w. bis zu den beiden letzten Summanden (996 und 998). In jedem dieser Paare ist die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite.

a) Die Summe der nicht durch 4 teilbaren dreistelligen geraden Zahlen ist daher größer als die Summe der durch 4 teilbaren dreistelligen Zahlen.
b) Es gibt 225 solcher Paare; die Differenz der betrachteten Summen ist also dem Betrage nach 450.

Aufgabe 4 - 050724
In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, dass sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.
Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?



Der gemeinsame Endpunkt der Sehnen sei C, die anderen beiden Endpunkte seien A bzw. B. M sei der Mittelpunkt des Kreises (siehe Abbildung)
Dann sind $\angle BCA$ und $\angle BMA$ Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen oder über zueinander komplementären Bogen. Da nach Voraussetzung $\angle BCA$ das Winkelmaß $\alpha = 30°$ hat, hat $\angle BMA$ ein Winkelmaß von 60°.
Folglich ist das gleichschenklige Dreieck $\triangle BMA$ gleichwinklig und damit gleichseitig; also ist $AB = r$.

Lösungen der II. Runde 1965 übernommen aus [5]

4.7.3 III. Runde 1965, Klasse 7

Aufgabe 1 - 050731
Auf welche Ziffern endet das Produkt?

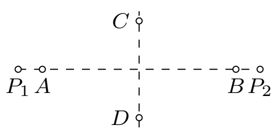
$$z = 345926476^3 \cdot 125399676^2 \cdot 2100933776^3$$

Sämtliche Faktoren von z sind von der Form $100a + 76$. Wegen

$$(100a + 76)(100b + 76) = 10000ab + 100(76a + 76b) + 76^2$$

wobei a und b natürliche Zahlen sind, sind allein die beiden letzten Stellen von 76^2 für die beiden letzten Stellen von z entscheidend. Da $76^2 = 5776$ ist, endet z auf 76.

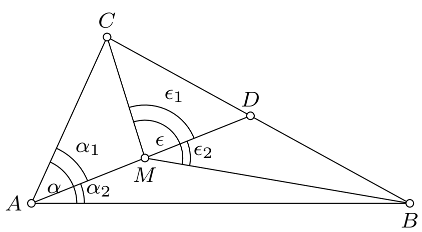
Aufgabe 2 - 050732
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.
a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!
b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!
Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.



b) Für die Beschreibung und Begründung:
Die Länge der Strecke AB sei a. Man schlägt um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius von der Länge $r > \frac{a}{2}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreisbögen seien C und D, die Länge der Strecke CD sei b. Nun schlägt man um C und D Kreisbögen mit dem gleichen Radius $r_1 > \frac{b}{2}$.
Die entstehenden Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden durch A und B und sind, falls $r_1 \neq r$ ist, von A und B verschieden.

Beweis: Die Gerade durch C und D ist auf Grund der Konstruktion Symmetrieachse zu der Strecke AB. Aus demselben Grund ist die Gerade durch A und B Symmetrieachse zu der Strecke CD.
Da laut Konstruktion $CP_1 = DP_1$ und $CP_2 = DP_2$ gilt, liegen P_1 und P_2 auf der die Punkte A und B enthaltenden Symmetrieachse der Strecke CD.

Aufgabe 3 - 050733
Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$.
Beweise, dass für jeden solchen Punkt M $\epsilon > \alpha$ gilt, wenn ϵ ($< 180°$) das Maß des Winkels $\angle BMC$ und α das Maß des Winkels $\angle BAC$ ist!



Die Gerade durch A und M schneide die Seite CB im Punkt D. D liegt zwischen C und B. Das Maß des Winkels $\angle CMD$ sei ϵ_1, das des Winkels $\angle CAM$ sei α_1, das des Winkels $\angle DMB$ sei ϵ_2 und das des Winkels $\angle MAB$ sei α_2. Dann gilt

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha; \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$
(2) $\epsilon_1 > \alpha_1$ (nach dem Außenwinkelsatz)
(3) $\epsilon_2 > \alpha_2$ (nach dem Außenwinkelsatz)

und folglich wegen (2) und (3)

(4) $\epsilon_1 + \epsilon_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ und wegen (1) und (4)
(5) $\epsilon > \alpha$

Aufgabe 4 - 050734
Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Die erwähnten Zahlen können entweder

(1) 4 gleiche Ziffern oder
(2) genau 3 gleiche Ziffern oder
(3) 2 untereinander verschiedene Paare von gleichen Ziffern oder
(4) genau 2 gleiche Ziffern enthalten.

Da nur 3 verschiedene Ziffern zugelassen sind, erhält man im Falle (1) 3 verschiedene derartige Zahlen. Im Falle (2) gibt es für jeweils 3 gleiche Ziffern 4 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung, wobei die 4. Ziffer jeweils eine der beiden anderen vorgegebenen Ziffern ist. Da 3 Ziffern vorgegeben wurden, beträgt im Falle (2) die Anzahl der derartigen vierstelligen Zahlen $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Im Falle (3) lassen sich die Ziffern der beiden Paare jeweils auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabb, bbaa, abba, baab, abab, baba). Da es 3 verschiedene Möglichkeiten der Zusammenstellung solcher Paare gibt, beträgt im Falle (3) die Anzahl der erwähnten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 3 = 18$.

Im Falle (4) lassen sich die beiden gleichen Ziffern, wenn man die Reihenfolge der beiden übrigen, von ihnen verschiedenen Ziffern beibehält, auf 6 verschiedene Weisen anordnen (nämlich aabc, bcaa, abca, baac, abac, baca). Für die Reihenfolge der beiden übrigen Ziffern gibt es genau 2 Möglichkeiten (nämlich bc und cb). Da 3 verschiedene Paare gleicher Ziffern möglich sind, beträgt im Falle (4) die Anzahl der gesuchten vierstelligen Zahlen $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Die Anzahl aller derartigen Zahlen beträgt mithin $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

Aufgabe 5 - 050735
In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $AD = DC = CB$.
Beweise, dass die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert!

Sei $\angle BAD := \alpha$. Dann ist auch $\angle ABC = \alpha$, da $AD = BC$ und damit das Trapez gleichschenklig ist. Daraus ergibt sich analog: $\angle ADC = \angle BCD = 180° - \alpha$.
Nun gilt, dass das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig ist, da $AD = CD$. Mit $\angle CAD = \angle ACD := \beta$ gilt in diesem Dreieck:

$$\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180° \qquad \text{Innenwinkelsummensatz im Dreieck}$$

also $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Damit halbiert β den Winkel α oder anders: die Diagonale AC halbiert den Winkel $\angle DAB$.

Aufgabe 6 - 050736
Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.
Wie viel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

Die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag laut Plan anzufertigenden Werkstücke beträgt $\frac{p}{20}$.
In Wahrheit wurden aber $(p + k)$ Werkstücke in $(20 - 5)$ Tagen produziert, an jedem Arbeitstag also durchschnittlich $\frac{p+k}{15}$ Werkstücke.
Daher betrug die Anzahl der durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus angefertigten Werkstücke

$$\frac{p+k}{15} - \frac{p}{20} = \frac{p+4k}{60}$$

Lösungen der III. Runde 1965 übernommen aus [5]

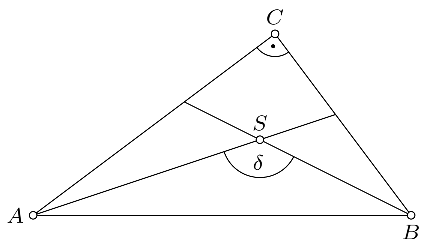
4.8 VI. Olympiade 1966

4.8.1 I. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060711
Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.
Nach wie viel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Nur nach jedem zweiten Schritt des Vaters setzen Vater und Sohn gleichzeitig einen Fuß auf. Das ist beim Vater stets der linke Fuß, da er laut Aufgabe den ersten Schritt mit den rechten Bein ausgeführt hat. Also können beide niemals unter den Bedingungen der Aufgabe gleichzeitig den rechten Fuß aufsetzen.

Aufgabe 2 - 060712
In dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.
Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\angle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!



Das Gradmaß des Schnittwinkels $\angle ASB$ sei δ. Die Gradmaße der spitzen Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ seien α bzw. β. Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck $\triangle ABS$:

$$\delta = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

Da im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ $\alpha + \beta = 90°$ ist, folgt $\delta = 135°$.

Aufgabe 3 - 060713
In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.
Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Wegen $3 + 5 = 8$, $3 + 3 + 3 = 9$ und $5 + 5 = 10$ lassen sich die Geldbeträge 8 Lei, 9 Lei und 10 Lei in der geforderten Weise zusammenstellen.
Die Zahlen 8, 9 und 10 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die bei der Division durch 3 der Reihe nach den Rest 2 bzw. 0 bzw. 1 lassen. Jede natürliche Zahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt, kann als Summe aus 2 und einem Vielfachen von 3 dargestellt werden (z.B. $17 = 2 + 5 \cdot 3$). Entsprechendes gilt für diejenigen natürlichen Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 0 bzw. 1 lassen.
Da bei der Division einer beliebigen natürlichen Zahl durch 3 nur diese drei Reste auftreten können, lassen sich die übrigen in der Aufgabe geforderten Geldbeträge, da sie größer sind als 8 Lei bzw. 9 Lei bzw. 10 Lei, durch Addition einer entsprechenden Anzahl von 3-Lei-Scheinen zu den "Grundbeträgen" 8 Lei, 9 Lei bzw. 10 Lei zusammenstellen.

Aufgabe 4 - 060714
Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.
Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $XS = XP$ gilt.

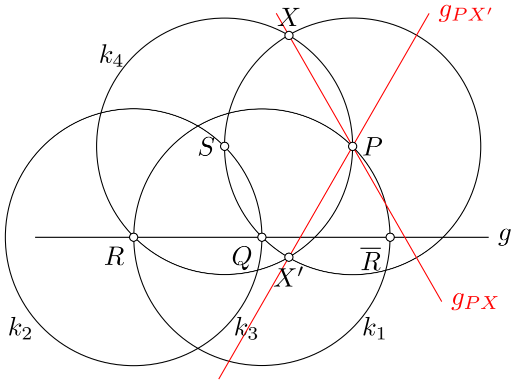
Man verbindet den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels mit dem Punkt P und konstruiert zur Strecke PS die Symmetrieachse s.
Die Schnittpunkte X_1 und X_2 von s mit s_1 und s_2 sind die gesuchten Punkte; denn weil sie Punkte von s sind, gilt für sie $X_1S = X_1P$ bzw. $X_2S = X_2P$.

Da alle übrigen Punkte von s_1 und s_2 nicht auf s liegen, kann für sie die oben genannte Beziehung nicht gelten. Die Punkte X_1 und X_2 sind also die einzigen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Sie existieren für jeden spitzen Winkel und sind stets eindeutig bestimmt.

Lösungen der I. Runde 1966 übernommen aus [5]

4.8.2 II. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060721
Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!



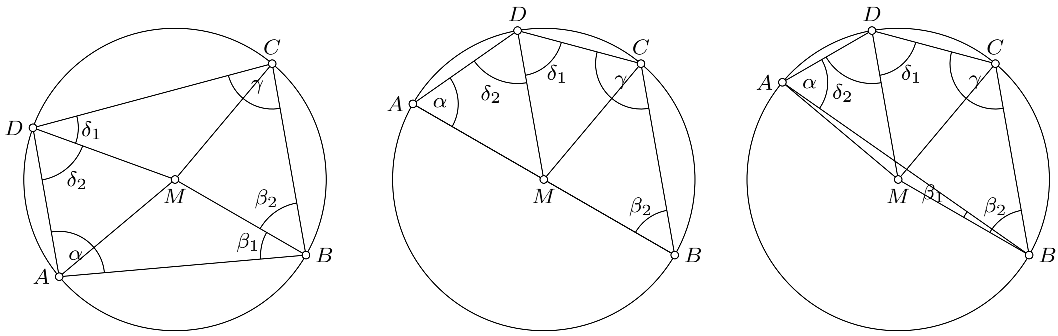
Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit PQ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und $\overline{R}$.
Nun schlägt man um R und um P mit PQ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf derselben Geraden, d.h., P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung).

Schlägt man nun mit PQ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$.
Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt $\overline{R}$ von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten X und X', aber zu denselben Geraden).

Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\triangle SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$ (als Seiten in dem Rhombus $RQPS$). Die Gerade g_{XP} schneide g im Punkte P_1.
Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) $\angle SPP_1 = \angle PP_1\overline{R}$ d.h. $\angle PP_1\overline{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$.
Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

Aufgabe 2 - 060722
In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, dass alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
Beweise, dass in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße mit α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so dass also α und γ die Gradmaße der Winkel $\angle DAB$ und $\angle BCD$ sind.
Ferner seien β_1, β_2, δ_1, bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\angle ABM$, $\angle MBC$, $\angle CDM$ und $\angle MDA$.



Behauptung: $\alpha + \gamma = 180°$
Beweis: Wir unterscheiden 3 Fälle.
Fall 1: Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks:
In den Dreiecken $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM$ und $\triangle DAM$ sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M. Daraus folgt:

$$(1) \quad \beta_1 + \delta_2 = \alpha$$
$$(2) \quad \beta_2 + \delta_1 = \gamma$$

Weiterhin gilt:

$$(3) \quad \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$$

als Winkelsumme im Viereck $ABCD$.
Aus (1), (2) und (3) folgt $\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$ und damit $\alpha + \gamma = 180°$.

Fall 2: Punkt M liegt auf dem Rande des Sehnenvierecks:
In diesem Fall ist entweder $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$. Der Beweis verläuft analog.

Fall 3: Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks:
In diese Falle ist entweder β_1 durch $-\beta_1$ oder β_2 durch $-\beta_2$ oder δ_1 durch $-\delta_1$ oder δ_2 durch $-\delta_2$ oder zu ersetzen.
Der Beweis verläuft analog Fall 1.

Aufgabe 3 - 060723
Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)

$$5 \cdot 100 = 500$$

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$$10 \cdot 55 = 550$$

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$$1 \cdot 555 = 555$$

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605 mal aufgeschrieben.

Aufgabe 4 - 060724
In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

Das Volumen (in Litern gemessen) ist der Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{4}$ des Volumens dadurch, dass $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden.
Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von $\frac{50}{7}$ Liter.

Lösungen der II. Runde 1966 übernommen aus [5]

4.8.3 III. Runde 1966, Klasse 7

Aufgabe 1 - 060731
Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.
Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$!

(1) Sind p, q natürliche Zahlen ≥ 1, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q.

(2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q.

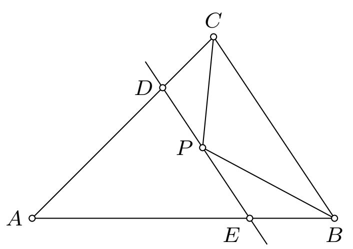
(3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c. Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, dass es a ist.

(4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b. Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, dass er c ist.

Aufgabe 2 - 060732
In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:
Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.
Mit wie viel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Der Hund braucht zu 4 Schritten genau soviel Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Da 4 Hundeschritte so lang wie 6 Fuchsschritte sind, kommt der Hund mit je 4 Schritten dem Fuchs um 1 Fuchsschritt näher. Die 54 Fuchsschritte holt der Hund folglich mit $54 \cdot 4$ Hundeschritten = 216 Hundeschritten auf.

Aufgabe 3 - 060733
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $BD + CE = DE$.



I. Angenommen, p sei eine gesuchte Parallele.
Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so dass $BD = DP$ und $CE = EP$ gilt. Daraus folgt

$\angle ABP = \angle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und $\angle DPB = \angle CBP$ (Wechsel-Kinkel an geschnittenen Parallelen), also ist BP die Winkelhalbierende von $\angle ABC$. Entsprechend folgt, dass CP die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sei wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ und $\angle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.
Beweis: Nach Konstruktion ist
$\angle DBP = \angle CBP$ (da $\angle ABC$ durch BP halbiert wird) und
$\angle CBP = \angle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),
also ist $\triangle BPD$ gleichschenklig, und zwar ist $BD = DP$. Ebenso folgt $CE = EP$ und daher $BD + CE = DE$.
Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets eindeutig. Nach III gibt es daher stets eine gesuchte Parallele p und nach I auch nur eine solche.

Aufgabe 4 - 060734
Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ nicht kürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

I. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ kann z.B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{16}$.

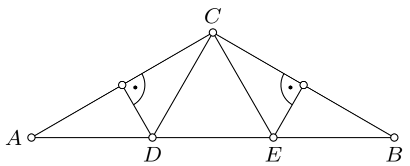
II. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n}$ kann z.B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III. $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m}$ kann (zugleich mit den Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15, a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

Aufgabe 5 - 060735
Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:
Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a+b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$.
Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man: $10a+b+a-b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar.

Aufgabe 6 - 060736
In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe der Winkel $\angle ACB$ ein Gradmaß von 120°.
Beweise, dass die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!



Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muss AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\angle BAC = \angle ABC$ (Gradmaß 30°).
Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. Dann ist

(1) $AD = CD$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also $\angle ACD = \angle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD) (Gradmaß 30°). Daher hat der Winkel $\angle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$). Ebenso zeigt man

(2) $BE = CE$ und $\angle CED = 60°$. Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt

(3) $CD = DE = CE$.

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $AD = DE = BE$.

Lösungen der III. Runde 1966 übernommen aus [5]

4.9 VII. Olympiade 1967

4.9.1 I. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070711
Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,
b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.
c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.
d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.
e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).
Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

a) Genau 15 Schüler erhielten eine Drei; denn $\frac{5}{12} \cdot 36 = 15$.
b) Genau 6 Schüler erreichten die Note Eins; denn $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$.
c) Genau 6 Schüler erzielten eine Vier.
d) Genau 8 Schüler bekamen eine Zwei; denn $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$.
e) Genau 1 Schüler erhielt eine Fünf; denn $36 - (15 + 6 + 6 + 8) = 1$.

Aufgabe 2 - 070712
Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Das ist nicht möglich.
Beweis: Angenommen, vier Innenwinkel wären spitz, dann wäre deren Summe kleiner als 360° und - da die Winkelsumme im Sechseck 720° beträgt - die Summe der beiden übrigen größer als 360°. Das ist aber unmöglich, weil in jedem konvexen Vieleck jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Aufgabe 3 - 070713
Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Bezeichnet man die Anzahl der Pfennigstücke mit x, die der Fünfpfennigstücke mit y und die der Zehnpfennigstücke mit z, dann gilt:

$$x + 5y + 10z = 2(x + y + z)$$

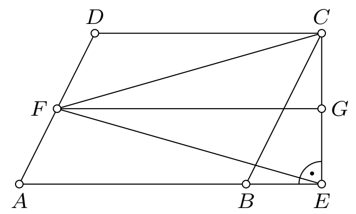
woraus man $8z + 3y = x$ erhält.

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
1	11	1	26
	14	2	34
	17	3	42
	20	4	50
	23	5	58
	26	6	66
	29	7	74
	32	8	82
	35	9	90
	38	10	98
2	19	1	44
	22	2	52
	25	3	60
	28	4	68
	31	5	76
	34	6	84
	37	7	92
	40	8	100

z	$x = 3y + 8z$	y	Geldbetrag (in Pfennig)
3	27	1	62
	30	2	70
	33	3	78
	36	4	86
	39	5	94
4	35	1	80
	38	2	88
	41	3	96
5	43	1	98

Da für alle $z \geq 6$ keine Lösungen unter den Bedingungen der Aufgabe existieren, gibt es also genau 26 derartige Geldbeträge, von denen genau 25 auf eine einzige Art und genau ein Geldbetrag (98 Pf) auf genau zwei Arten gemäß den erwähnten Bedingungen ausgezahlt werden kann.

Aufgabe 4 - 070714
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\angle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD. Beweise: Der Winkel $\angle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\angle BEF$!



Voraussetzung: Es gilt $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle BEC$ ist ein rechter Winkel; $AF = FD$.

Behauptung: Der Winkel $\angle EFC$ ist doppelt so groß wie $\angle BEF$.

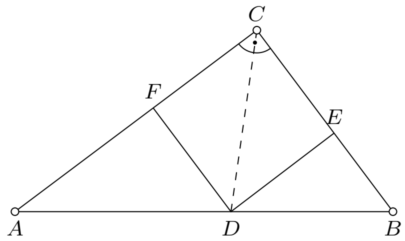
Beweis: Da der Winkel $\angle DAB$ spitz ist, fällt Punkt E weder mit A noch mit B zusammen. Die Parallele zu AB durch F halbiert das Lot CE im Punkt G und steht senkrecht auf CE, d.h. F liegt auf der Mittelsenkrechten der Punkte C und E.
Dann ist das Dreieck $\triangle EFC$ gleichschenklig mit $EF = FC$, und FG ist Winkelhalbierende in diesem Dreieck. Es ist also $\angle EFC$ doppelt so groß wie $\angle EFG$.

Nun gilt $\angle BEF = \angle EFG$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt, dass $\angle EFC$ auch doppelt so groß wie $\angle BEF$ ist.

Lösungen der I. Runde 1967 übernommen aus [5]

4.9.2 II. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070721
Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzuschreiben, dass der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!



Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\angle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

Aufgabe 2 - 070722
Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen!

Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.
Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung Ihrer Ziffern ergebenden Zahlen:

$$\begin{array}{ll} 100a + 10b + c & 100a + 10c + b \\ 100b + 10a + c & 100b + 10c + a \\ 100c + 10a + b & 100c + 10b + a \end{array}$$

Die Summe s ist dann:

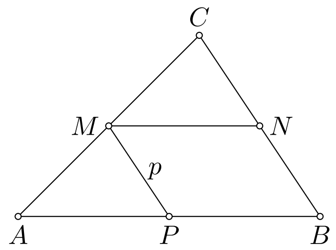
$$s = 100(2a + 2b + 2c) + 10(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c) = (100 + 10 + 1) \cdot (2a + 2b + 2c) =$$

$$= 111 \cdot 2 \cdot (a + b + c) = 111 \cdot 2Q$$

Beispiel: Die Zahl sei 534. Dann ist $2Q = 24$ und $2Q \cdot 111 = 24 \cdot 111 = 2664$ bzw. $534 + 543 + 354 + 345 + 453 + 435 = 2664$.

Aufgabe 3 - 070723
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.
Beweise, dass N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Dass diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so:
Durch p wird die Ebene, in der $\triangle ABC$ liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB.



Dann gilt:
(1) $\angle ABC = \angle MNC = \angle APM$, $\angle CAB = \angle CMN$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)
(2) $\triangle APM = \triangle MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww). Daraus folgt: $MP = CN$.
(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion). Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

Aufgabe 4 - 070724
Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler. Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, dass in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

Die Anzahl der Schüler pro Autobus muss ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein. Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd.
Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

Lösungen der II. Runde 1967 übernommen aus [5]

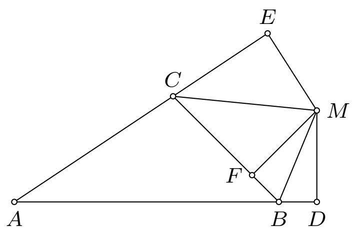
4.9.3 III. Runde 1967, Klasse 7

Aufgabe 1 - 070731
Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.
Wie viel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: "Wie viel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?" Dabei ist am Schluss die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren.

Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

Aufgabe 2 - 070732
Beweise folgende Behauptung!
Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $MD = ME = MF$.



Die Dreiecke $\triangle CFM$ und $\triangle CME$ sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein.
Daher gilt $ME = MF$.
Ebenso sind die Dreiecke $\triangle MFB$ und $\triangle MDB$ kongruent, woraus $MF = MD$ folgt. Mithin gilt $MD = ME = MF$.

Aufgabe 3 - 070733
Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu "bezahlen".
Wie müssten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische.
Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also "bezahlt" werden sollen, müsste der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

Aufgabe 4 - 070734
Gegeben sei die Gleichung
$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$$
In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, dass $x = 11$ die Gleichung erfüllt.
Wie lautet diese Zahl?

(I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung $\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt
$$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}$$
Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{41}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{4} = \frac{41}{4}$$

so dass im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

Aufgabe 5 - 070735
Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen. Beweise, dass das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 lässt!

Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz). Daher gilt:

$$n \cdot m = (5n' + 3) \cdot (5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5[5n'm' + 3(n' + m') + 1] + 4$$

d.h. $n \cdot m$ lässt bei Division durch 5 den Rest 4.

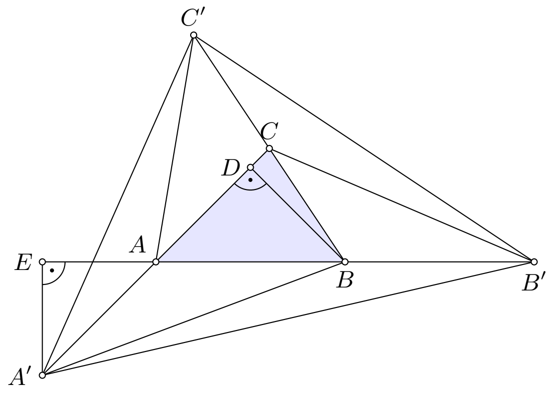
Aufgabe 6 - 070736
Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $BB' = AB$, $CC' = BC$ und $AA' = CA$, abgetragen. Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Zum Beweis verwendet man den Satz, dass Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$, wenn $I_{\triangle A'B'C'}$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ und I_{ABC} den des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet.

Beweis: Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt:
$\triangle ABC$ ist flächengleich $\triangle AA'B$; denn es gilt $AC = AA'$ und $BD = BD$ (als gemeinsame Höhe).
$\triangle BAA'$ ist flächengleich $\triangle B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle B'AA'$, und es gilt:

$BA = B'B$ sowie $A'E = A'E$. Daraus folgt, dass $\triangle B'BA'$ auch flächengleich $\triangle ABC$ ist. Entsprechend beweist man, dass die Dreiecke $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck $\triangle ABC$ sind.



Das Dreieck $\triangle ABC$ liegt ganz im Innern des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ (die Winkel $\angle A'CC'$, $\angle B'BC'$ und $\angle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sämtlich kleiner 180°).
Daher erhält man den Flächeninhalt $I_{\triangle A'B'C'}$, indem man den Flächeninhalt der sieben zu $\triangle ABC$ flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AA'B$, $\triangle B'BA'$, $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ addiert.
Mithin gilt: $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$.

Lösungen der III. Runde 1967 übernommen aus [5]

4.10 VIII. Olympiade 1968

4.10.1 I. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080711
Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.
Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Beide gesuchten Zahlen sind 1. Teiler von 210 und 2. Vielfache von 6. Wegen $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sind sowohl Teiler von 210 als auch Vielfache von 6 die folgenden Zahlen: 6, 30, 42 und 210 und nur diese. Folgende Zahlenpaare müssen untersucht werden:

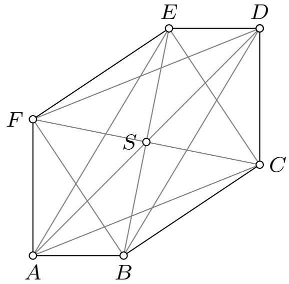
(1) 6 und 30
(2) 6 und 42
(3) 6 und 210
(4) 30 und 42
(5) 30 und 210
(6) 42 und 210.

Bei den ersten beiden Paaren ist das kleinste gemeinsame Vielfache 30 bzw. 42, aber nicht 210; die Paare 5 und 6 haben als größten gemeinsamen Teiler 30 bzw. 42, aber nicht 6. Für die Paare 3 und 4 treffen die gestellten Bedingungen zu.
Die Zahlenpaare 6 und 210 sowie 30 und 42 erfüllen als einzige die gestellten Bedingungen.

Aufgabe 2 - 080712
Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.
Zeige, dass es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Mit dem 3-l-Gefäß kann man durch (z.T. wiederholtes) Einschütten in das 18-l-Gefäß 3 l, 6 l, 9 l, 12 l, 15 l und 18 l, mit dem 8-l-Gefäß 8 l und 16 l abmessen.
Durch das Ausgießen aus einem Gefäß in ein kleineres Gefäß erhält man 5 l und 10 l.
Gießt man das Wasser aus dem 18-l-Gefäß in beide kleineren Gefäße, bleiben 7 l als Rest zurück, und 11 l bekommt man dadurch, dass beide kleineren Gefäße in das große entleert werden. Füllt man die 7 l in das 3-l-Gefäß und in das 8-l-Gefäß, hat man in letzterem 4 l; gießt man diese wiederum in das wieder entleerte 3-l-Gefäß, verbleibt 1 l.
Entleert man das 18-l-Gefäß zweimal in das 8-l-Gefäß, bleiben 2 l zurück, und füllt man aus den beiden anderen Gefäßen 11 l nach, erhält man 13 l.
Wie gezeigt wurde, kann man 1 l im 8-l-Gefäß erhalten. Gießt man nun 1 l in das 18-l-Gefäß und zweimal 8 l dazu, befinden sich 17 l darin. Um 14 l abzumessen, gießt man 3 l und 8 l aus dem 18-l-Gefäß in die kleineren Gefäße, und es verbleiben 7 l, davon gibt man 3 l in das kleinste und 4 l in das mittlere Gefäß. Nun füllt man das größte aufs neue vollständig und füllt das 8-l-Gefäß auf. So verbleiben 14 l.

Aufgabe 3 - 080713
Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.
Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, dass es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

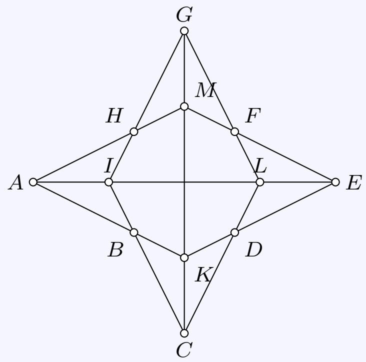


Wir verwenden den Satz: Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

Die Strecken BE und AD sind Diagonalen im Parallelogramm $ABDE$ und schneiden sich in S. Punkt S ist Mittelpunkt der Diagonalen BE und AD.
Im Parallelogramm $ACDF$ ist AD ebenfalls Diagonale, und S ist ebenfalls Mittelpunkt der Diagonalen AD und CF. Also ist Punkt S Mittelpunkt der drei Diagonalen AD, BE und CF und damit gemeinsamer Punkt dieser Diagonalen.

Die übrigen Diagonalen gehen nicht durch S, da jede von ihnen in einem der Parallelogramme $ABDE$, $ACDF$, $BCEF$ Seite ist, während S in jedem dieser Parallelogramme Mittelpunkt ist. Also gehen genau drei Diagonalen durch S.

Aufgabe 4 - 080714



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis 2 : 1 stehen, so dass die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.
Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

Die Dreiecke $\triangle SMF$ und $\triangle MGF$ sind flächengleich (gleich lange Grundlinie und gleich lange Höhe). Das gilt auch für die Dreiecke $\triangle SLF$ und $\triangle LEF$, für $\triangle SLD$ und $\triangle LED$ u.s.w.
Daraus folgt, dass der Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ doppelt so groß ist wie der des Achtecks $IBKDLFMH$.

Lösungen der I. Runde 1968 übernommen aus [5]

4.10.2 II. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080721
Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, dass sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M.
Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wie viel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Wegen des Gesamtbetrages muss Ulrike wenigstens ein Fünfpfennigstück bei sich gehabt haben.
Da 4 M der kleinstmögliche Betrag ist, kann Ulrike kein Einmarkstück, kein Fünfzigpfennigstück und auch nicht mehr als ein Zehnpfennigstück oder mehr als drei Fünfpfennigstücke besessen haben.
Andernfalls hätte sie entweder passend oder mit einem kleineren Betrag (z.B. 3 M; 2, 50 M; 2, 40 M) bezahlen können. Sie konnte daher nur folgende Geldstücke bzw. Geldscheine bei sich haben:
Entweder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 1 Zehnpfennigstück, 1 Fünfpfennigstück, 12 Einpfennigstücke
oder: 1 Fünfmarkschein, 2 Zweimarkstücke, 3 Fünfpfennigstücke, 12 Einpfennigstücke.

Aufgabe 2 - 080722
Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

(a) Angenommen, es gibt eine Zahl x mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab + x = a^2$, woraus man $x = a^2 - ab$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $x = a^2 - ab = a(a - b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b + a(a - b) = ab + a^2 - ab = a^2$$

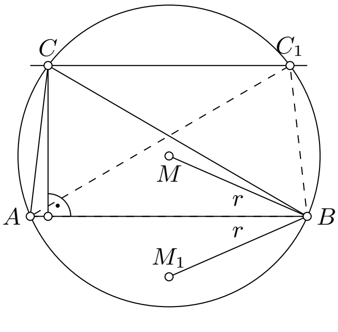
(b) Angenommen, es gibt eine Zahl y mit der geforderten Eigenschaft, dann gilt: $ab - y = b^2$, woraus man $y = ab - b^2$ erhält.

Also kann höchstens die Zahl $y = ab - b^2 = b(a - b)$ Lösung sein. Tatsächlich ist

$$a \cdot b - b(a - b) = ab - ab + b^2 = b^2$$

Aufgabe 3 - 080723
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ im Abstand h_c von AB.



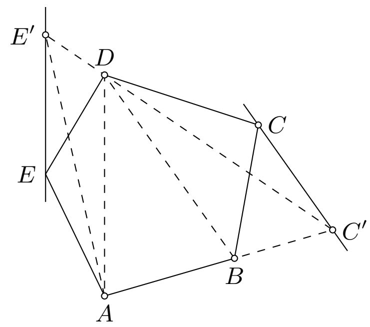
(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt.

Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1.
Die Dreiecke $\triangle ABC$ bzw. $\triangle ABC_1$ entsprechen den Bedingungen.

(III) Der Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

Aufgabe 4 - 080724
Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.



Das Fünfeck $ABCDE$ lässt sich in die Teildreiecke $\triangle ADE$, $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$ zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'.

Dann ist das Dreieck $\triangle BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle BCD$; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein.
Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\triangle ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle ADE$.
Daher ist das aus den Teildreiecken $\triangle ADE'$, $\triangle ABD$ und $\triangle BC'D$ bestehende Dreieck $\triangle AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Lösungen der II. Runde 1968 übernommen aus [5]

4.10.3 III. Runde 1968, Klasse 7

Aufgabe 1 - 080731
Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.
a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!
b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

a) Die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 lassen, beginnt: 4; 11; 18; 25; 32; 39; 46; 53; 60; 67; 74; 81; 88; 95; ...

Von diesen Zahlen lassen bei der Division durch 4 den Rest 3 genau die Zahlen: 11; 39; 67; 95; ... (ab 11 jede vierte Zahl der vorigen Folge).

Die kleinste unter diesen Zahlen, die auch noch bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, ist die Zahl 67.

b) Weitere, den Bedingungen entsprechende natürliche Zahlen erhält man, indem man zu 67 gemeinsame Vielfache von 3, 4 und 7 addiert.

Insbesondere erhält man die nächstgrößeren derartigen Zahlen, wenn man wiederholt das kgV von 3, 4 und 7 (d.i., da 3, 4, 7 paarweise teilerfremd sind, die Zahl $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$) zu 67 addiert. Die nächsten so entstehenden Zahlen sind: 151; 235; 319; ...

Aufgabe 2 - 080732
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z.B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden. Ermittle

a) für $n = 7$,
b) für $n = 10$,
c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n
die Anzahl aller dieser Darstellungen!

a) Die sämtlichen genannten Darstellungen sind:

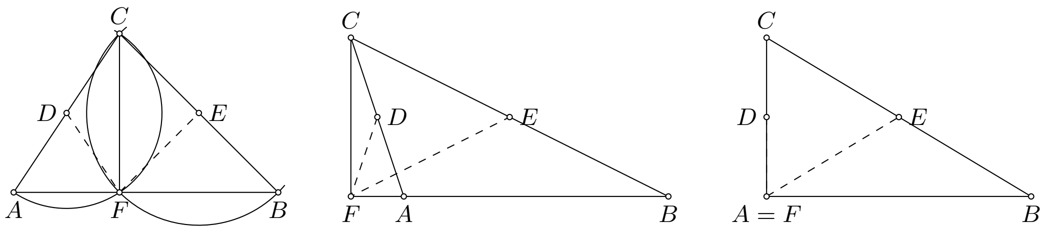
$$7 = 1 + 6, \quad 7 = 2 + 5, \quad 7 = 3 + 4, \quad 10 = 1 + 9, \quad 10 = 2 + 8, \quad 10 = 3 + 7, \quad 10 = 4 + 6$$

ihre Anzahl beträgt 3 bzw. 4.

b) Ist n ungerade, so treten in den sämtlichen genannten Darstellungen genau die Zahlen $1, ..., n - 1$ als Summanden auf, und zwar jede genau einmal. Da hierbei in jeder Darstellung genau zwei dieser Summanden vorkommen, ist die Anzahl der Darstellungen folglich $\frac{n-1}{2}$.

Ist n gerade, so treten dagegen nur die Zahlen $1, ..., n-1$ mit Ausnahme der Zahl $\frac{n}{2}$ auf. Diese Ausnahme rührt daher, dass in einer Darstellung von n mit einem Summanden $\frac{n}{2}$ der zweite Summand ebenfalls $\frac{n}{2}$ lauten müsste, also nicht von dem ersten verschieden wäre. Daher beträgt nun die gesuchte Anzahl $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$.

Aufgabe 3 - 080733
Beweise folgenden Satz!
Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.



Es sei o.B.d.A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F, der Mittelpunkt von AC sei D, der von BC sei E.

Dann sind die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle CFB$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC.

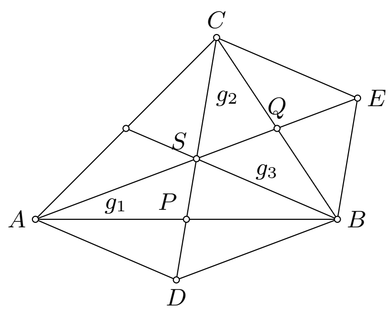
Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist $AD = DC = DF$ bzw. $CE = BE = EF$ als Radien in den Thaleskreisen. Mithin gilt

$$DF + EF = AD + EB = \frac{1}{2}(AC + BC)$$

Aufgabe 4 - 080734
Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, dass einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.
Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.

Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben.
Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt. Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen.
Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.

Aufgabe 5 - 080735
Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!



I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\triangle ABC$ (siehe Abbildung), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Der Mittelpunkt von AB sei P, der Mittelpunkt von BC sei Q. Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_c und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1.

Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.

II. Ein Dreieck $\triangle ABC$ kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man zieht durch A die Parallele zu g_3. Sie schneide g_2 im Punkt D. Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P. Sie schneide g_3 im Punkt B.
Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2, die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch P und Q, die g_2 in C schneide.

III. Wenn sich das Dreieck $\triangle ABC$ so konstruieren lässt, dann entspricht es den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle BSP$ sowie $\triangle BEQ$ und $\triangle CSQ$ kongruent, denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein.
Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $AP = PB$ sowie $BQ = QC$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$. Ihr Schnittpunkt S muss auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.

IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so dass also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind.
Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

Aufgabe 6 - 080736
Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.
Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?
(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

Von einem Tag des Jahres 1777 bis zum gleichen Tag des Jahres 1967 sind es 190 Jahre, und zwar 45 Jahre zu 366 Tagen und 145 Jahre zu 365 Tagen.
In den 45 Jahren rückte der Wochentag um 90 Wochentage vor, in den 145 Jahren um 145 Wochentage. Das sind zusammen 235 Wochentage, d.h. 33 mal eine Woche und 4 Wochentage. Daher war der 30.4.1777 ein Mittwoch.

Lösungen der III. Runde 1968 übernommen aus [5]

4.11 IX. Olympiade 1969

4.11.1 I. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090711
Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

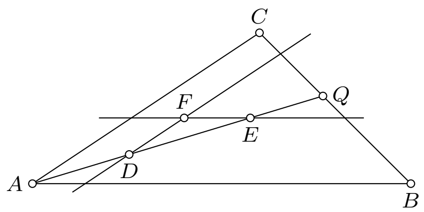
Falte das Stück Papier so, dass die Buchstaben in der Reihenfolge W O L F G A N G übereinander liegen!
Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

In der 3. und 4. Spalte liegt im Uhrzeigersinn die verlangte Buchstabenfolge L F G A vor. Damit L und F sowie A und G jeweils übereinander liegen, beginnt man, indem man $\frac{A}{L}$ unter $\frac{G}{F}$ faltet.

Um zu erreichen, dass G und F aufeinander liegen, faltet man O N G (wobei A mitgeführt wird) auf W G F (worunter L liegt). Nun liegen O W daneben N G sowie daneben A G F L jeweils in dieser Reihenfolge untereinander.

Die letztgenannten vier Buchstaben legt man um auf N (worunter G liegt), um L F G A N G zu erhalten. Schließlich faltet man O (wobei W mitgeführt wird) auf L (worunter F G A N G liegt) und erhält dadurch W O L F G A N G.

Aufgabe 2 - 090712
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Darin sei die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, dass diese sich im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.
Beweise, dass die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!



In der Abbildung sei p_1 die Halbierende des Innenwinkels bei A, p_2 eine Parallele zu AB und p_3 eine Parallele zu AC. Der Schnittpunkt von p_1, mit BC sei Q, der von p_1 mit p_2 sei E, der von p_1 mit p_3 sei D und der von p_2 mit p_3 sei F.

Da p_2, p_3 als Parallelen zu zwei Dreieckseiten nicht zueinander parallel sind und da p_1 als Halbierende eines Innenwinkels zu keiner Seite des Dreiecks parallel ist, existieren diese Schnittpunkte.
Nun liegt nach Voraussetzung F entweder (1. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle AQC$ oder (2. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle ABQ$.

Im 1. Fall gilt $\angle CAD = \angle FDE$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle DAB = \angle FED$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).

Im 2. Fall gilt entsprechend $\angle DAB = \angle FED$ und $\angle CAD = \angle FDE$.
(Anmerkung: Man kann auch den 2. Fall, statt ihn gesondert zu diskutieren, durch Umbenennung auf den 1. Fall zurückführen.)
Da laut Aufgabe $\angle CAD = \angle DAB$ gilt, ist mithin in jedem Fall auch $\angle FDE = \angle FED$. Das Dreieck $\triangle FED$ ist also gleichschenklig.

Aufgabe 3 - 090713
Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.
(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.
(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Aus (1) folgt: Genau 90 Touristen beherrschen mindestens eine der beiden Sprachen. Somit beherrschen nach (2) genau $(90 - 75)$ Personen der Gruppe Englisch, aber nicht Russisch, das sind 15 Personen.
Nach (3) beherrschen genau $(90 - 83)$ Personen der Gruppe Russisch, aber nicht Englisch, das sind 7 Personen.
Wegen $90 - 7 - 15 = 68$ folgt: Genau 68 Personen beherrschen beide Sprachen.

Aufgabe 4 - 090714
Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z.B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).
Beweise, dass für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:
Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

Jede sechsstellige Zahl, die in der beschriebenen Weise entstehen kann, ergibt sich aus ihrer dreistelligen Ausgangszahl durch folgende Rechnung:

1. Die Ausgangszahl wird mit 1000 multipliziert,
2. zum Ergebnis wird nochmals die Ausgangszahl addiert.

Daher ist die sechsstellige Zahl das 1001-fache der Ausgangszahl. Aus ihr entsteht folglich bei Division durch 7 wegen $1001 : 7 = 143$ das 143-fache der Ausgangszahl.
Wird dies durch 11 dividiert, so ergibt sich wegen $143 : 11 = 13$ das 13-fache der Ausgangszahl. Dividiert man dies durch 13, so erhält man die Ausgangszahl.
Das war die Behauptung, diese ist damit bewiesen.

Lösungen der I. Runde 1969 übernommen aus [5]

4.11.2 II. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090721
Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
b) Wir nehmen an, dass beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80cm = 320$ cm. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf.

Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.

Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

Aufgabe 2 - 090722
Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks "ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.
Ermittle die größtmögliche Anzahl "ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann "ausgezeichnet", wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt.
Nun gibt es Dreiecke mit genau einem rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit mehr als einem solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

Aufgabe 3 - 090723
Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.
Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.
Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

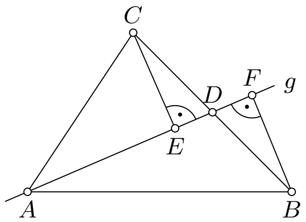
Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.

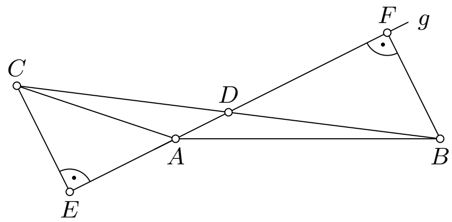
Wegen $1 + 5 + 10 = 16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges.
Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg $520km : 16 = 32{,}5$ km und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5km = 162{,}5$ km bzw. $10 \cdot 32{,}5km = 325$ km betrugen.

Daraus ergibt sich wegen $\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12} = 5\frac{25}{60}$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h (= 5 h 25 min).

Aufgabe 4 - 090724
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF. Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $AD \perp CB$ und damit wegen $CE = CD$ und $BF = BD$ auch $CE = BF$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen.





Dann stimmen die Dreiecke $\triangle CDE$ und $\triangle BDF$ in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$, $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein.
Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Lösungen der II. Runde 1969 übernommen aus [5]

4.11.3 III. Runde 1969, Klasse 7

Aufgabe 1 - 090731
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2555, jede genau einmal, aufgeschrieben.
Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

I. In der Tausenderstelle der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Hunderterstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 1000 ; für die Zahlen von 1001 bis 2000 (2 Gruppen) je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999). Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der Zehnerstelle der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt für die Zahlen von 1 bis 100 ; für die Zahlen von 101 bis 200 ; u.s.w. ; für die Zahlen von 2401 bis 2500 (25 Gruppen) je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 u.s.w.). Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der Einerstelle der Zahlen beträgt für die Zahlen von 1 bis 10 ; für die Zahlen von 11 bis 20 ; u.s.w. ; für die Zahlen von 2541 bis 2550 (255 Gruppen)je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einerstelle die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl $2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705$.

Aufgabe 2 - 090732
Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

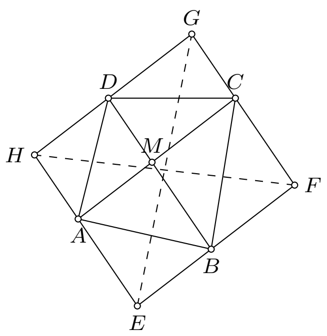
$$\begin{aligned} (I) \qquad & a + b = 38, \\ (II) \qquad & b + c = 46, \\ (III) \qquad & a + c = 42 \end{aligned}$$

erfüllen. Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen
a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!
b) Weise nach, dass ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!
(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt durch eine Eliminationsmethode, z.B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III):
$$a = 17, \quad b = 21, \quad c = 25$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksungleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich
$$17 + 21 > 25, \quad \text{also} \quad a + b > c \qquad ; \qquad 21 + 25 > 17, \quad \text{also} \quad b + c > a$$
$$17 + 25 > 21, \quad \text{also} \quad a + c > b$$
Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich
$$a + b = 17 + 21 = 38 \qquad , \qquad b + c = 21 + 25 = 46 \qquad , \qquad a + c = 17 + 25 = 42$$

Aufgabe 3 - 090733
Beweise folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!



Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden.
Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist.

Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$.

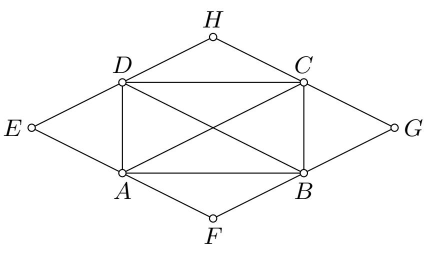
Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.

Aufgabe 4 - 090734
Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wie viel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$. Die Differenz ist $m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$. Wegen $\frac{3}{5}m = \frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m = \frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

Aufgabe 5 - 090735
Beweise folgenden Satz!
Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck, E, F, G, H sind so gelegen, dass A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $EF = DB$. Ebenso erhält man: $HG = DB$, $FG = AC$, $EH = AC$.

Da im Rechteck $ABCD$ ferner $AC = DB$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $EH = FG = HG = EH$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 6 - 090736
Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\angle BAD = 110°$ und $AC + BD = 15$ cm!
Anmerkung: $\angle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle BAD$.

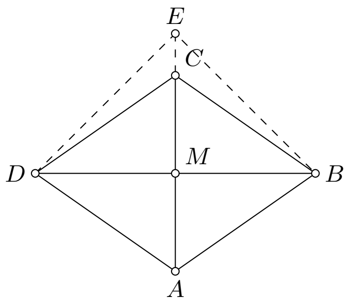
I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\angle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $MB = MD$. Schließlich ist

$$AM + MB = \frac{1}{2}(AC + BD)$$

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, dass $ME = MB$ ist. Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig, also, $\angle MEB = 45°$. Ebenso ist auch $\angle MED = 45°$.

II. Daraus folgt, dass ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.



(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.
(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.
(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius AD den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, dass diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:
Nach Konstruktion wird $\triangle AEB = \triangle AED$ (wsw), also $AB = AD$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB = \triangle AMD$ (sws), also $\angle BMA = \angle DMA = 90°$.
Demnach gilt $\triangle DMA = \triangle DMC$ (ssw; $AD > MD$), also $AD = CD$, $AM = CM$ und somit schließlich $\triangle AMB = \triangle CMB$ (sws), $AB = CB$. Daher ist $ABCD$ ein Rhombus.
In diesem gilt nach Konstruktion $\angle BAD = 110°$. Ferner ist $\angle BME = 90°$ und nach Konstruktion $\angle BEM = 45°$, also $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $BM = EM$. Somit auch

$$AC + BD = 2(AM + BM) = 2(AM + EM) = 2 \cdot AE = 15 \text{ cm}$$

wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2} < 90°$ ist.

Lösungen der III. Runde 1969 übernommen aus [5]

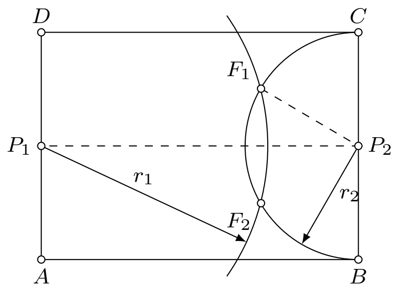
4.12 X. Olympiade 1970

4.12.1 I. Runde 1970, Klasse 7

Aufgabe 1 - 100711
Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen.
Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, dass sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!



Die Eckpunkte des Spielfeldes seien so mit A, B, C, D und die Standorte der Läufer so mit P_1 (für den FDJ-ler) und P_2 (für den Pionier) bezeichnet, wie es die Abbildung angibt. Dann gilt:
$AB = CD = P_1P_2 = 70$ m ; $AD = BC = 50$ m ; $AP_1 = P_1D = BP_2 = P_2C = 25$ m.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist ein Punkt genau dann einer der gesuchten Standorte der Fahne, wenn er

1. auf dem Kreis mit dem Radius $r_1 = 50$ m um P_1,
2. auf dem Kreis mit dem Radius $r_2 = 25$ m um P_2 und
3. innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt.

Wegen $r_1 > r_2$ und $r_1 - r_2 < P_1P_2 < r_1 + r_2$ gibt es genau 2 Punkte, die beide Kreise gemeinsam haben. Diese Punkte seien F_1 und F_2 genannt.
Wegen $r_1 < P_1P_2$ liegen F_1 und F_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie P_1. Der auf derselben Seite liegende Halbkreis um P_2 mit dem Radius r_2 liegt wegen $BP_2 = P_2C = r_2$ ganz auf dem Spielfeld. Infolgedessen liegen auch F_1 und F_2 auf dem Spielfeld.
Es gibt mithin genau diese 2 Punkte als Möglichkeiten, die Fahne gemäß den Bedingungen der Aufgabe aufzustellen.

Aufgabe 2 - 100712
Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!
Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Unter den Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen gibt es genau 4, die nicht größer als 17 sind, nämlich 1; 4; 9; 16.
Sämtliche Möglichkeiten, 17 als Summe aus diesen Quadratzahlen darzustellen, sind die folgenden:

$$17 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 4+4+4+1+1+1+1+1$$
$$17 = 4+4+4+4+1 = 9+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$17 = 9+4+1+1+1+1 = 9+4+4 = 16+1$$

Beweis: Es gibt genau folgende Fälle
1) Der größte auftretende Summand ist 1 (Möglichkeit 1).

2) Der größte auftretende Summand ist 4
2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 2).
2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 3).
2.3. Er tritt genau 3mal auf (Möglichkeit 4).
2.4. Er tritt genau 4mal auf (Möglichkeit 5).

3) Der größte auftretende Summand ist 9. Dieser kann höchstens 1mal auftreten.
3.1. Unter den übrigen Summanden ist 1 der größte (Möglichkeit 6).
3.2. Unter den übrigen Summanden ist 4 der größte. Er kann höchstens 2mal auftreten.
3.2.1. Er tritt genau 1mal auf (Möglichkeit 7).
3.2.2. Er tritt genau 2mal auf (Möglichkeit 8).

4) Der größte auftretende Summand ist 16. Dieser kann höchstens 1mal auftreten (Möglichkeit 9).

Aufgabe 3 - 100713
a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:
Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

1. Wenn die Summe s 4 natürlicher Zahlen a, b, c, d ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle ungerade wären, wäre die Summe gerade:

$$s = a + b + c + d = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) = 2(k + i + j + l + 2)$$

   Damit wäre s ein Vielfaches von 2 und somit gerade (Widerspruch zur Voraussetzung), also muss mindestens eine der Zahlen a, b, c, d gerade sein. Also gilt mit o.B.d.A. $a = 2k$ für das Produkt p:

$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d = 2k \cdot b \cdot c \cdot d$$

   und das ist eine gerade Zahl.

2. Wenn die Summe s von einer geraden Anzahl natürlicher Zahlen ungerade ist, muss mindestens eine der Zahlen gerade sein, denn wenn alle $2x$ Zahlen ungerade wären, wäre die Summe gerade:

$$s = (2k + 1) + (2i + 1) + (2j + 1) + (2l + 1) + ... = 2(k + i + j + l + ... + x)$$

   wäre ein Vielfaches von 2 und somit gerade, also muss mindestens eine Zahl gerade sein. Also gilt mit o.B.d.A. $a = 2k$ für das Produkt p:

$$p = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ... = 2k \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...$$

   und das ist wieder eine gerade Zahl.

Aufgabe 4 - 100714
$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $AB \geq BC$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, dass unter diesen Bedingungen $\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$ gilt.
Dabei sind folgende Fälle zu betrachten: a) $AB = BC$, b) $AB > BC$.

Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Ferner sei $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ gesetzt.

a) Im Fall $AB = BC$ ist $ABCD$ ein Quadrat. Also stehen die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht; ferner halbiert die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ und den Winkel $\angle BCD$. Daraus folgt $A_1 = A_2 = M = C_2 = C_1$, also haben alle vier in der Behauptung genannten Winkel die Größe 0°.

b) Im Fall $AB > BC$ erhält man zunächst aus
(1) $\triangle BAD = \triangle ABC = \triangle DCB = \triangle CDA$ (s,w,s) die Gleichungen
(2) $\alpha = \angle ABD = \angle BAC = \angle CDB = \angle DCA$
(3) $\beta = \angle ADB = \angle BCA = \angle CBD = \angle DAC$.
Weiter gilt
(4) $\alpha + \beta = 90°$, da die in (1) genannten Dreiecke (bei A bzw. B bzw. C bzw. D) rechtwinklig sind.

Ferner ist in jedem dieser Dreiecke diejenige Seite, die einem der in (2) auftretenden Winkel gegenüberliegt, kleiner als diejenige Seite, die einem der in (3) auftretenden Winkel gegenüberliegt; also gilt
(5) $\alpha < \beta$.
Aus (4) und (5) folgt $2\alpha < \alpha + \beta = 90°$, also
(6) $\alpha < 45°$.
Da auch die Dreiecke $\triangle AA_1D$ und $\triangle CC_1B$ bei A_1 bzw. C_1 rechtwinklig sind, folgt aus (3) und (4)
(7) $\angle DAA_1 = \angle BCC_1 = \alpha$
Nach (7), (2) und der Definition von A_2 und C_2 folgt nun $\angle A_1AA_2 = 45° - \alpha$ und $\angle A_2AC = 45° - \alpha$.

Analog gilt $\angle ACC_2 = 45° - \alpha$ und $\angle C_2CC_1 = 45° - \alpha$ und demzufolge

$$\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$$

Lösungen der I. Runde 1970 übernommen aus [5]

4.12.2 II. Runde 1970, Klasse 7

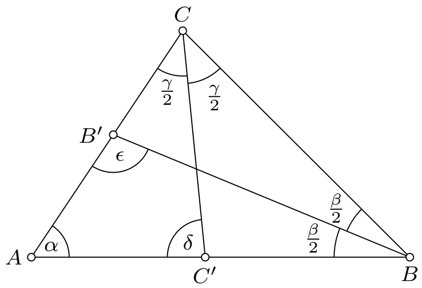
Aufgabe 1 - 100721
In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.
Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.
(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.
(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.
(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30% weniger als die Hälfte von 70% sind.
Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.
Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30% aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40% aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.
Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

Aufgabe 2 - 100722
In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\angle ABC$ und CC' die des Winkels $\angle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C').

Ferner seien die Größen der Winkel $\angle AB'B$ bzw. $\angle AC'C$ mit ϵ bzw. δ bezeichnet.
Beweise, dass für jedes derartige Dreieck $\epsilon + \delta = 180°$ gilt!



Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60°$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)

$$\beta + \gamma = 180° - 60° = 120°$$

Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\epsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \qquad (\triangle B'BC) \qquad ; \qquad \delta = \beta + \frac{\gamma}{2} \qquad (\triangle C'BC)$$

Daraus folgt $\quad \epsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2}120° = 180°$

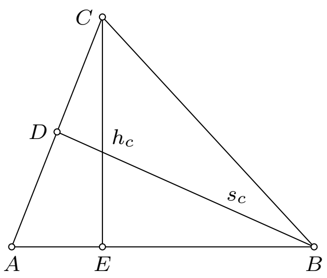
Aufgabe 3 - 100723
Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer $\star$ so anzugeben dass die folgende Gleichung gilt: $9(230 + t)^2 = 492 \star 04$.

Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen $4 + 9 + 2 + 0 + 4 = 19$ folgt daraus $\star = 8$. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492804 lauten.

Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230 + t)^2 = 492804 : 9 = 54756$, und daher erhält man: $230 + t$ ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, dass ihr Quadrat 54756 beträgt.

Daraus folgt, dass für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden.
Wäre $t > 4$, so wäre $(230 + t)^2 > 234^2 = 54756$. Also ist nur $t = 4$ möglich.
Wie die Probe zeigt, ist $t = 4; \star = 8$ Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

Aufgabe 4 - 100724
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!
Dabei sei α die Größe des Winkels $\angle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!



I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90°$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es lässt sich das Teildreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$ konstruieren. Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

II. Konstruktionsbeschreibung:
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$.
(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.
(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.
(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

III. Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $DB = s_b$, $CE = h_c$, und der Winkel $\angle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

IV. Eindeutigkeitsnachweis:
Wegen $\alpha < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium sww eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist.
Schließlich ist auch (4) nach sww eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt.
Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

Lösungen der II. Runde 1970 übernommen aus [5]

4.12.3 III. Runde 1970, Klasse 7

Aufgabe 1 - 100731
Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, dass man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

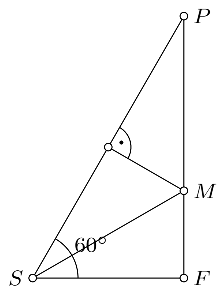
(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.
(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.
(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.
(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.
(6) Am Anfang und am Schluss der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, ..., S_1, S_2, ... bezeichnet.
Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe. Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe. Wegen (1) müssen diese Mindestzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein.

Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, dass X vor Y fuhr. Dann gilt (2) $D_1 < D_2 < B$, (3) $S_1 < P_1 < P_2$, (4) $B < S_2$.
Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)
(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.
Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)
(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.
Aus (6) und (8) folgt
(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.
Damit sind bereits 8 Fahrer erfasst, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

Aufgabe 2 - 100732
Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, dass sich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!



Da F eindeutig bestimmt ist, ist F auf Grund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F.

Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\angle MSP$ eine Größe von 30°.

Außerdem hat der Winkel $\angle SPF$ als Komplementwinkel des Winkels $\angle PSF$ eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle PSF$).

Daher ist $\triangle PSM$ gleichschenklig mit $PM = MS$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

Aufgabe 3 - 100733
Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau 3 5 dem Schulchor und genau 7 10 der Schulsportgemeinschaft an. Genau 2 5 der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).

Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores.

Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen $\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

Aufgabe 4 - 100734
Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

"Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert. Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!"

Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $(\frac{x}{2} + 1)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x - (\frac{x}{2} + 1) = \frac{x}{2} - 1$.
Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$$\frac{\frac{x}{2} - 1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$$

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{2} + 3 = \frac{x}{8} + \frac{9}{4}$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{x}{8} + \frac{9}{4}\right) = 0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich $x = 30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

Aufgabe 5 - 100735
Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne dass dabei die Primzahleigenschaft verloren geht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält!
(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

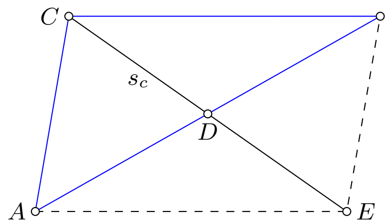
Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen.

Also müsste die Primzahl entweder aus den Ziffern 1, 3, 7 oder aus den Ziffern 1, 3, 9 oder aus den Ziffern 1, 7, 9 oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen.

Nun ist aber z.B. $371 = 7 \cdot 53$, $319 = 11 \cdot 29$, $791 = 7 \cdot 113$, $793 = 13 \cdot 61$, d.h., es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 6 - 100736
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $CD = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $CD = DE$ gilt. Dann ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $AE = CB = a$.



II. Konstruktionsbeschreibung:
Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Länge s_c,
(2) Wir zeichnen den Strahl CD.
(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $CD = s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.
(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.
(5) Wir schlagen den Kreis um D mit AD; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

III. Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:
Nach Konstruktion ist $AC = b$. Ferner ist $AD = DB$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $CD = s_c$.
Schließlich ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $CB = AE = a$.

IV. Konstruktion:
Wegen $a - b < 2s_c < a + b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.

Lösungen der III. Runde 1970 übernommen aus [5]

4.13 XI. Olympiade 1971

4.13.1 I. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110711
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

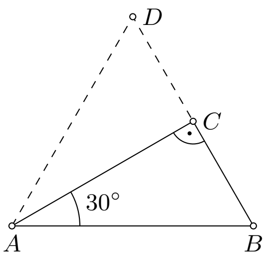
(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d.h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.
(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Wegen (3) kommen nur die Ziffern 2, 3, 5 und 7 in Frage. Wegen (2) müssen sie bei jeder der gesuchten Zahlen auch sämtlich verwendet werden. Daher und wegen (1) muss die Ziffer 2 die Einerstelle der gesuchten Zahlen besetzen.

Mithin können höchstens die Zahlen 3572; 3752; 5372; 5732; 7352; 7532 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Die Zahlen 3752 und 7352 sind durch 8 teilbar, die anderen dagegen nicht. Also erfüllen 3752 und 7352 als einzige alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 110712
Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck der geforderten Art, wobei C Scheitel des rechten Winkels und A Scheitel des Winkels von 30° sei.
Dann ist AB die Hypotenuse und BC kürzeste Kathete, da der Winkel $\angle BAC$ kleiner ist als $\angle ABC$, wie aus dem Winkelsummensatz hervorgeht.
Wegen des Winkelsummensatzes hat der Innenwinkel bei B eine Größe von 60°.

Verlängert man die Strecke BC über C hinaus um BC bis zum Punkt D, dann gilt $\triangle ACD = \triangle ACB$ (sws). Daher hat der Winkel $\angle DAC$ eine Größe von 30°. Das Dreieck $\triangle ABD$ ist mithin gleichseitig, und es gilt $AB = 2 \cdot BC$.

Aufgabe 3 - 110713
Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest:
Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Primzahl.
Ferner gilt $BC = a = 6$ cm, $AC = b = 2$ cm.
Ermittle $AB = c$ und u!

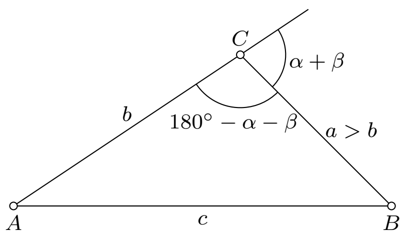
Aus der Dreiecksungleichung folgt für das Dreieck $\triangle ABC$: $c < a + b$ und $c > a - b$. Daraus folgt laut Aufgabe 4 cm $< c <$ 8 cm.
Da die Maßzahl des Umfangs u eine Primzahl sein soll und die Maßzahlen von a und b ganze Zahlen sind, muss auch die Maßzahl von c eine ganze Zahl z sein, für die $4 < z < 8$ gilt. Also kann z nur 5, 6 oder 7 sein.

Es sei $z = 5$. Dann ist $u = a + b + c = 13$ cm, und 13 ist eine Primzahl.
Es sei $z = 6$. Dann ist $u = 14$ cm.
Es sei $z = 7$. Dann ist $u = 15$ cm.
In den letzten beiden Fällen ist die Maßzahl von u keine Primzahl. Also ist $c = 5$ cm, $u = 13$ cm die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 110714

Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$! Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat der Winkel $\angle BCA$ wegen des Winkelsummensatzes im Dreieck eine Größe von $180° - (\alpha + \beta)$.
Mithin lässt sich die Aufgabe auf eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem einer der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel zurückführen.



(II) Infolgedessen kann ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir zeichnen einen Winkel der Größe $\alpha+\beta$ und zu ihm einen Nebenwinkel, dessen Größe somit $180° - (\alpha + \beta)$ beträgt.
(3) Wir tragen in C an AC einen Winkel der Größe $180° - (\alpha+\beta)$ an.

(4) Wir schlagen den Kreis k um A mit c. Schneidet er den freien Schenkel s (zu dem C nicht mit hinzugerechnet werde) des beim Konstruktionsschritt (3) angetragenen Winkels, so sei einer der entstehenden Schnittpunkte B genannt.

(III) Der Beweis, dass je drei so gewonnene Punkte A, B, C die Ecken eines Dreiecks $\triangle ABC$ bilden, das allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, folgt unmittelbar aus dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck und aus (II).

(IV) Es sei angenommen, dass die gegebenen Größen die (trivialen) Bedingungen $b > 0$; $c > 0$; $0° < (\alpha + \beta) < 180°$ erfüllen. Dann sind die Konstruktionsschritte (II) (1), (2), (3) stets (bis auf Kongruenz) eindeutig ausführbar.
Wegen $c > b$ schneidet der Kreis k (siehe (II) (4)) den freien Schenkel s in genau einem Punkt. Daher existiert (bis auf Kongruenz) genau ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Lösungen der I. Runde 1971 übernommen aus [5]

4.13.2 II. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110721
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie das kgV dieser Zahlen ist oder ein Vielfaches davon. Wegen

$$2 = 2 \qquad 3 = 3 \qquad 4 = 2 \cdot 2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 7 = 7 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist das kgV $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$.
Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504. Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 2 - 110722
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).
(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.
(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}4$ ihrer Spiele.
(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

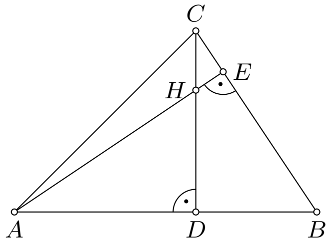
Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

(6) Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.

(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d.h., jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.

Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ aller Spiele.
Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein musste, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele.
Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

Aufgabe 3 - 110723
Beweise folgenden Satz:
In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!



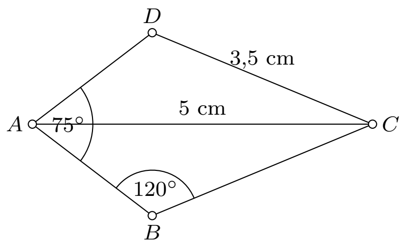
Weil $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet.

Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung lässt sich dann so wählen, dass dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt.

Dann gilt: $\angle ADC = \angle AEB$ als rechte Winkel und $\angle HAD = \angle EAD$ (H liegt auf AE). Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes (in $\triangle ADH$ bzw. $\triangle BEA$) $\angle AHD = \angle ABE$.

Aufgabe 4 - 110724
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $BC = 3{,}5$ cm; $CD = 3{,}5$ cm; $AC = 5$ cm; $\angle DAB = 75°$ und $\angle ABC = 120°$!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\angle ABC$ zu konstruieren.
Punkt D muss nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\angle BAD$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius CD liegen. Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $AC = 5$ cm, $BC = 3{,}5$ cm und $\angle ABC = 120°$.
(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe $75°$ so an, dass sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $CD = 3{,}5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

(III) Der Beweis, dass bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, Ddie vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I).
Ferner folgt aus (II), dass $\angle DAB + \angle ABC = 195° > 180°$ ist, so dass keiner der Winkel $\angle BCD$, $\angle CDA$ die Größe $180°$ erreichen oder überschreiten kann.
Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen $AC > BC$ und, weil $\angle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Der Kreis um C mit CD schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von $75°$ bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen.
Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie verschiedenen Flächeninhalt haben.

Lösungen der II. Runde 1971 übernommen aus [5]

4.13.3 III. Runde 1971, Klasse 7

Aufgabe 1 - 110731
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) p< 100.
(2) p lässt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
(3) p lässt bei Division durch 4 den Rest 1!

Angenommen, p sei eine Primzahl, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
Wegen (2) ist dann $p-2$ sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Da 3 und 5 teilerfremd sind, ist folglich $p-2$ durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar, d.h., p ist von der Form $n \cdot 15 + 2$ (n eine natürliche Zahl). Wegen (3) ist p und damit auch n ungerade.

Also können wegen (1) höchstens die Zahlen 17; 47; 77 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Von ihnen ist 77 keine Primzahl, und 47 genügt nicht der Bedingung (3). Also kann nur 17 Lösung der Aufgabe sein.
In der Tat erfüllt 17 die Bedingungen (1), (2), (3) und ist damit die einzige derartige Primzahl.

Aufgabe 2 - 110732
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.
Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.
(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.
(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.
(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.
(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.
(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.
(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball b) Leichtathletik c) Schwimmen d) Turnen beteiligen!

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Schüler, die sich nur an einer Sportart beteiligen, mit F, L, S, T, und die Schüler, die sich an zwei Sportarten beteiligen, mit FL, FS, FT, LS, LT, ST, jeweils nach den Anfangsbuchstaben der Sportarten. Dann gilt:

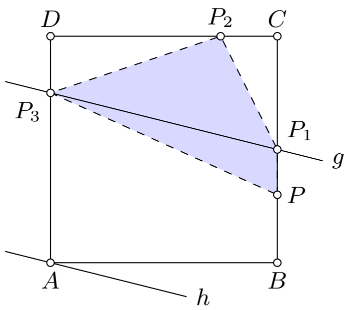
(8) Wegen (2) betreiben genau 18 Schüler je genau eine Sportart.
(9) Wegen (1) und (8) und weil die Klasse 28 Schüler hat, betreiben genau 10 Schüler je genau zwei Sportarten.
(10) Wegen (9) und (7) gibt es genau 5 LT.
(11) Wegen (9), (10), (4) und da es laut Aufgabenstellung mindestens 1 Schwimmer gibt, gibt es genau 1 FS, 1 LS, 1 ST. Gäbe es nämlich je 2 davon, wäre wegen $5 + 6 = 11 > 10$ die mögliche Anzahl bereits überschritten.
(12) Wegen (9), (10), (11) und (6) gibt es genau 2 FL.
(13) Wegen (10) und (3) gibt es genau 10 Leichtathleten, also wegen (10), (11) und (12) genau 2 L.
(14) Wegen (8), (13), (4) und (5) gibt es genau 8 P und 8 T. Folglich gibt es in dieser Klasse genau 11 Fußballer (nämlich 8 F, 2 FL, 1 FS), 10 Leichtathleten (nämlich 2 L, 2 FL, 1 LS, 5 LT), 3 Schwimmer (nämlich 1 FS, 1 LS, 1 ST), 14 Turner (nämlich 8 T, 5 LT, 1 ST).

Aufgabe 3 - 110733
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, dass $BP_1 = P_1C$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $P_2D = 3CP_2$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $P_3A = 3DP_3$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.
Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,
b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, dass P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.



Laut Aufgabe gilt:

$$AB = BC = CD = DA = a \quad ; \quad BP_1 = P_1C = \frac{a}{2}$$

$$CP_2 = DP_3 = \frac{a}{4} \quad ; \quad AP_3 = P_2D = \frac{3a}{4}$$

Das Vieleck $PP_1P_2P_3$ hat genau dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn das Dreieck $\triangle P_1PP_3$ (zur Strecke P_1P_3 entartet ist und damit) den kleinsten möglichen Flächeninhalt 0 hat.

Dies tritt genau dann ein, wenn $P = P_1$ oder $P = P_3$ gilt. In diesem Falle ist der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ gleich dem des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$.

Der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ ist genau dann am größten, wenn der des Dreiecks $\triangle PP_1P_3$ am größten ist, weil die Dreiecke auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt P den größten Abstand von P_1P_3 hat.
Zieht man durch A die Parallele h zu der Geraden g durch P_1 und P_3, dann erkennt man, dass unter allen möglichen Lagen des Punktes P dieser genau im Falle $P = A$ den größten Abstand von der fest vorgegebenen Seite P_1P_3 hat; denn für alle anderen Lagen des Punktes P liegt dieser im Innern des von g und h begrenzten Parallelenstreifens oder auf g, weil P_3A nach Voraussetzung größer als P_1B ist.

a) Den Flächeninhalt AD des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ erhält man, wenn man vom Flächeninhalt A_Q des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle P_2P_1C$ und $\triangle P_3P_2D$ sowie den Flächeninhalt des Trapezes P_1P_3AB subtrahiert. Es gilt daher

$$A_D = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4} \right) \cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{5a^2}{8} = \frac{7a^2}{32}$$

Das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt in diesem Falle, wegen $A_Q = a^2$ und $A_V = A_D$

$$A_D : A_Q = \frac{7a^2}{32} : a^2 = 7 : 32$$

b) Entsprechend kann der Flächeninhalt A_V des Vierecks $P_1P_2P_3A$ ermittelt werden:

$$A_v = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{32}$$

Das gesuchte größte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt also $A_V : A_Q = 19 : 32$.

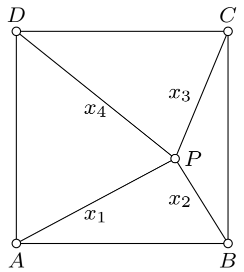
Aufgabe 4 - 110734
Fritz erzählt:
"In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen."
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Bezeichnet man die Anzahl der Jungen dieser Klasse mit x, dann ist die der Mädchen $2x$. Die Klasse hat mithin wegen $x + 2x = 3x$ insgesamt $3x$ Schüler (Mädchen und Jungen).
Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, so würde die Anzahl aller Schüler $3x - 10$ betragen. Daher gilt dann laut Aufgabe

$$3x - 10 = (x - 5) + 3(x - 5)$$

woraus man $x = 10$ erhält. Die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

Aufgabe 5 - 110735
Beweise den folgenden Satz:
Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!



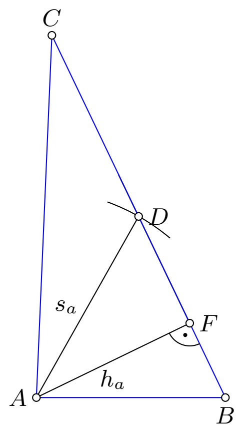
Es sei $AB = BC = CD = DA = a$. Ferner sei P ein Punkt der Quadratfläche, und es gelte: $AP = x_1, BP = x_2, CP = x_3, DP = x_4$.
Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$(1) \quad x_1 + x_2 \geq a \quad , \quad (2) \quad x_2 + x_3 \geq a,$$
$$(3) \quad x_3 + x_4 \geq a \quad , \quad (4) \quad x_4 + x_1 \geq a.$$

Dabei gilt in (1), in (2), in (3) bzw. in (4) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn P auf AB, auf BC, auf CD bzw. auf DA liegt. Da dies bei keiner Lage von P für alle vier Seiten AB, BC, CD, DA gleichzeitig zutrifft, gilt bei keiner Lage von P in allen vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) das Gleichheitszeichen.
Somit ergibt sich stets $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 > 4a$ und daher $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2a$

Aufgabe 6 - 110736
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade durch B und C sei F, der Mittelpunkt von BC sei D.
Dann werde das Teildreieck $\triangle ABF$ aus h_a, c und dem rechten Winkel $\angle AFB$ konstruiert.
Punkt D liegt erstens auf dem Kreis mit s_a um A und zweitens auf der Geraden durch F und B.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABF$ mit einem rechten Winkel $\angle AFB$ und Seiten AB, AF der Länge c bzw. h_a.
(2) Wir ziehen die Gerade durch F und B.
(3) Wir schlagen einen Kreis um A mit s_a. Schneidet er die Gerade durch F und B, so sei D einer der Schnittpunkte.
(4) Wir schlagen den Kreis um D mit BD. Schneidet er die Gerade durch B und F außer in B noch in einem zweiten Punkt, so sei dieser C genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $AB = c$, AF die auf der Geraden durch B und C senkrechte Höhe mit $AF = h_a$ und D der Mittelpunkt von BC; ferner gilt $AD = s_a$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist im (hier vorliegenden) Falle $h_a < c$ bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (2) ebenfalls.

Wegen $s_a > h_a$ ergibt (3) genau zwei Schnittpunkte, die D_1 und D_2 genannt seien. Da nicht B, sondern F Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist, ist $BD_1 \neq BD_2$.

Somit ergibt (4) genau zwei verschiedene Schnittpunkte, die C_1 und C_2 genannt seien. Wegen $BD_1 \neq BD_2$ ist auch $BC_1 \neq BC_2$. Es existieren folglich zwei Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, die beide die gleiche entsprechende Höhenlänge, aber verschiedene Längen der zugehörigen Grundseiten haben. Daher haben sie verschiedenen Flächeninhalt, sind also zueinander nicht kongruent. Infolgedessen existieren bis auf Kongruenz genau zwei verschiedene Dreiecke, die beide allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Lösungen der III. Runde 1971 übernommen aus [5]

4.14 XII. Olympiade 1972

4.14.1 I. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120711
Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, dass seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen.
Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, dass seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Die Armbanduhr ging in 24 Stunden genau 6 Minuten nach, d.h., in jeder Stunde ging sie den 24. Teil von 6 Minuten, das ist $\frac{1}{4}$ 4 Minute, nach.
Da von Sonnabend 12.00 Uhr bis Montag 8.00 Uhr genau 44 Stunden vergangen waren, ging die Uhr wegen $44 \cdot \frac{1}{4} = 11$ mithin 11 Minuten nach, zeigte also 7.49 Uhr, als es genau 8.00 Uhr war.

Aufgabe 2 - 120712
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.
(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

Angenommen, eine dreistellige natürliche Zahl z habe die Eigenschaften (1) und (2).
Wegen (1) und weil 9 und 11 teilerfremd sind, ist z ein Vielfaches von 99. Da z dreistellig ist, können höchstens die Zahlen

$$198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990$$

die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.
Von ihnen scheidet die Zahl 990 aus, da aus ihr durch Vertauschen der Einer- mit der Hunderterziffer keine dreistellige Zahl entsteht. Da ferner z' kleiner als z sein soll, scheiden auch die Zahlen 198, 297, 396 und 495 aus. Schließlich muss, da $z' = \frac{2}{9}z$ eine gerade Zahl ist, die Hunderterziffer von z eine gerade Zahl sein, also scheiden auch die Zahlen 594 und 792 aus. Für die restlichen beiden Zahlen erhält man:

z	$\frac{2}{9}z$	z'
693	154	396
891	198	198

Somit kann nur die Zahl $z = 891$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen. Eine Probe zeigt, dass sie die Eigenschaften (1), (2) tatsächlich hat.

Aufgabe 3 - 120713
Beweise den folgenden Satz:
Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ($AD = BC$) die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

In dem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ sei E der Schnittpunkt von AC mit BD. Ferner sei F der Fußpunkt des von E auf AB und G der Fußpunkt des von E auf CD gefällten Lotes. Dann ist FG eine Höhe des Trapezes.

Wegen $AB = AB$, $\angle BAD = \angle ABC$, $AD = BC$ gilt $\triangle ABD = \triangle ABC$ (sws) also $\angle BAC = \angle ABD$. Folglich ist $\triangle AEB$ gleichschenklig mit $AE = EB$ und daher EF Seitenhalbierende in diesem Dreieck. Da sich AC und BD in E rechtwinklig schneiden, hat der Basiswinkel $\angle EAB$ in diesem Dreieck eine Größe von 45°. Daher ist auch $\triangle AEF$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $EF = AF = \frac{1}{2}AB$.

Analog gilt im Dreieck $\triangle EGD$ $EG = DG = \frac{1}{2}DC$. Daher beträgt die Länge der Mittellinie des Trapezes $ABCD$
$$\frac{1}{2}(AB + DC) = EF + EG = FG$$

Aufgabe 4 - 120714
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,
(2) $AC = AC_1$.
(3) $C \neq C_1$.

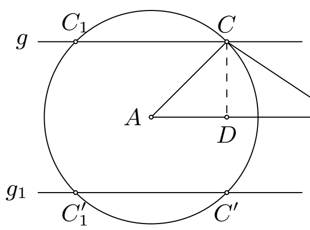
a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!
b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt! (Fallunterscheidung)

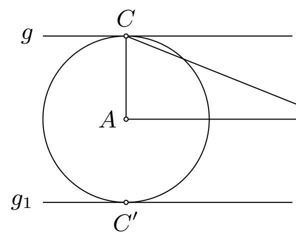
(I) Angenommen, ein Punkt C_1 habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gilt:
Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ haben die Seite AB gemeinsam. Wegen (1) stimmen sie daher auch in der zu dieser Seite gehörenden Höhenlänge überein. Folglich liegt der Punkt C_1 auf einer der Parallelen zu AB, die denselben Abstand von AB haben wie Punkt C. Wegen (2) liegt C_1 ferner auf dem Kreis mit dem Radius AC um A.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Punkt C_1 nur dann die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Wir zeichnen die Parallele g zu AB durch C und die von g verschiedene Parallele g_1 zu AB, die denselben Abstand von AB hat wie g. Wir schlagen um A mit dem Radius AC den Kreis k. Schneidet oder berührt er g oder g_1 noch in einem von C verschiedenen Punkt, so sei dieser C_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt C_1 den Bedingungen (1) bis (3) entspricht, folgt aus (II) sowie daraus, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ in der zur (gemeinsamen) Seite gehörenden Höhenlänge übereinstimmen.





(IV) Es sei D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes. Nun unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

1. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A nicht rechtwinklig, so ist $D \neq A$, also $\triangle ADC$ ein bei D rechtwinkliges Dreieck und darin AC die längste Seite (Hypotenuse), DC eine der anderen Seiten (Kathete), also $DC < AC$. Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also kleiner als der Radius von k. Daher schneidet k jede der Parallelen g, g_1 in genau zwei Punkten. Von den so entstehenden vier Schnittpunkten ist genau einer C. Die gesuchte Anzahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 3.

2. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A rechtwinklig, so ist $D = A$, also $DC = AC$. Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also gleich dem Radius von k. Daher berührt k jede der Parallelen g, g_1 in genau einem Punkt. Von den so entstehenden zwei Berührungspunkten ist genau einer C.
Die gesuchte Zahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 1.

Lösungen der I. Runde 1972 übernommen aus [5]

4.14.2 II. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120721
Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15390.
(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$$(1) \quad x + y = 15390 \qquad , \qquad (2) \quad z = 4u$$

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer eine 8 und als letzte Ziffer nicht 0.
Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88. Daher kann nur $x = 6$ oder $x = 2$ sein.

Wäre $x = 2$, so wäre $y = 15388$, und man erhielte $z = 215388$ sowie $u = 153882$ im Widerspruch zu $4 \cdot 153882 = 615528 \neq 215388$. Daher können nur $x = 6$ und $y = 15384$ die geforderten Eigenschaften haben.

In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z = 615384$ sowie $u = 153846$, so dass wegen $4 \cdot 153846 = 615384$ auch (2) erfüllt ist. Somit gibt es genau die Möglichkeit $x = 6$, $y = 15384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

Aufgabe 2 - 120722
Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d.h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung: $AE = EC$ sowie $BE = ED$.

Nun gilt weiter: $\angle AEB = \angle DEC$ und $\angle AED = \angle BEC$ als Scheitelwinkel. Daraus folgt: $\triangle AEB = \triangle DEC$ und $\triangle AED = \triangle BEC$ (je sws).

Folglich gilt: $\angle EAB = \angle ECD$ (1) sowie $\angle EAD = \angle ECB$ (2).
Aus (1) folgt: $AB \parallel DC$
aus (2) folgt: $AD \parallel BC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. d.h., $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 3 - 120723
Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.
(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.
(3) Christoph ist älter als Detlef.
(4) Bildet man alle möglichen "Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser "Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.
(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

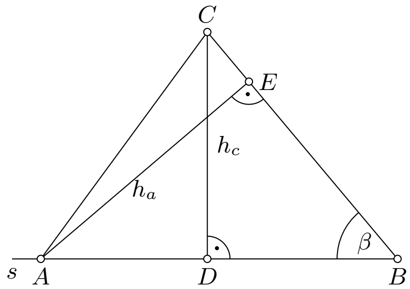
$$(1) \quad a + b + c + d = 100 \qquad , \qquad (2) \quad a + b = c + d \qquad , \qquad (3) \quad c > d$$

Aus (1) und (2) folgt (6) $a + b = c + d = 50$.

Wäre nun $a = c$ oder $a = d$ oder $b = c$ oder $b = d$, so folgte daraus wegen (2) $b = d$ bzw. $b = c$ bzw. $a = d$ bzw. $a = c$ im Widerspruch zu (4). Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), dass $a = b = 25$ sein muss.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c > 50 - c$, also $c > 25$, und daher $d = 50 - c < 25$.
Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c - d = 4$, woraus zusammen mit (6) dann $c = 27$ und $d = 23$ folgt.
Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt, und Detlef ist 23 Jahre alt.

Aufgabe 4 - 120724
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D. Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta < 90°$: $\angle DBC = \beta$, $\angle BDC = 90°$ und $CD = h_c$.

Punkt A liegt
1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\angle DBC$, $\angle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90° bzw. h_c sind.
(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.
(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(III) Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\angle DBC$, und dieser hat die Größe β, ferner ist $CD = h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der II. Runde 1972 übernommen aus [5]

4.14.3 III. Runde 1972, Klasse 7

Aufgabe 1 - 120731
An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die
a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: mathematisch- naturwissenschaftlich, S: Sport-AG, K: künstlerische AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen. Dann folgt:

$$\begin{array}{ll}
(0) & N + M + S + K + MS + MK + SK + MSK = 500, \\
(1) & S + MS + SK + MSK = 250, \\
(2) & MK + SK + MSK = 125, \\
(3) & M + MS + MK + MSK = 225, \\
(4) & SK + MSK = 25, \\
(5) & MS + MSK = 75, \\
(6) & MK + MSK = 25, \\
(7) & MSK = 5.
\end{array}$$

Wegen (7) und (4) bzw (5) bzw. (6) ist

$$(8) \quad SK = 20 \qquad , \qquad (9) \quad MS = 70 \qquad , \qquad (10) \quad MK = 20$$

Wegen (7) und (1), (8), (9) bzw. (2), (8), (10) bzw. (3), (9), (10) ist

$$(11) \quad S = 155 \qquad , \qquad (12) \quad K = 80 \qquad , \qquad (13) \quad M = 130$$

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist $N = 20$.
Die in a) gesuchte Anzahl ist $S+K+M$; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365. Die in b) gesuchte Anzahl ist $N = 20$.

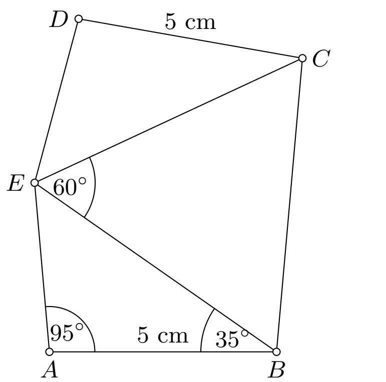
Aufgabe 2 - 120732
Beweise, dass es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei j. Dann gilt $1 \leq j$, und die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1) $j, j+1, j+2, ..., j+49, j+50$.
Nun gilt laut Aufgabe $j + 50 \leq 100$, also $1 \leq j \leq 50$. Folglich gehört $j + j = 2j$ auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen.

Aufgabe 3 - 120733
Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $AB = CD = 5$ cm,
(2) $\angle EAB = \angle ABC = 95°$,
(3) $BC = CE = BE$,
(4) $AE = ED$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $\triangle BCE$ gleichseitig, also gilt $\angle CBE = 60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist. Daher gilt:

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 95° - 60° = 35°$$

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(a) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABE$ aus $AB = 5$ cm, $\angle EAB = 95°$ und $\angle ABE = 35°$.
(b) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius BE. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.
(c) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius AE. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $AB = CD = 5$ cm, $BC = CE = BE$, $AB = DE$, also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist $\angle EAB = 95°$, $\angle ABE = 35°$, und, da $\triangle BCE$ gleichseitig ist, $\angle CBE = \angle BCE = \angle BEC = 60°$. Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 35° + 60° = 95°$$

also ist auch (2) erfüllt, und es gilt

$$\angle AEB = 180° - 95° - 35° = 50°$$

Weiterhin ist $\triangle DCE = \triangle ABE$ (sss), also $\angle EDC = 95°$, $\angle DCE = 35°$ und $\angle DEC = 50°$.
Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt

$$\angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 60° + 35° = 95°$$

Schließlich gilt:

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BEC + \angle DEC = 50° + 60° + 50° = 160°$$

Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (a) ist wegen $95° + 35° < 180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Ebenso ist Konstruktionsschritt (b) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d.h., es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C.
Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (c) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 120734
Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, dass nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben $a, b, c, ...$ angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

		1	a	b	·	c	d
	e	f	g	1			
h	i	j	1				
k	m	n	1	p			

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd:
"Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!"
Doch Gerd entgegnete ihm:
"Es lässt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Offensichtlich gilt $p = 1$ und $g = 0$. Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt $d \neq 1$ und $c \neq 1$. Das Produkt $b \cdot d$ endet ebenso wie das Produkt $b \cdot c$ mit 1. Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei $b = 9$, $c = d = 9$.
Daraus folgt $b \cdot d = 81$. Wegen $g = 0$ muss das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 9$, mit der Ziffer 2 enden, (denn $2 + 8 = 10$). Das ist aber genau für $a = 8$ der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99. Tatsächlich führt die Rechnung $189 \cdot 99$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei $b = 7$, $c = d = 3$.
Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei $b = 3$, $c = d = 7$.
Daraus folgt $b \cdot d = 21$. Das Produkt $a \cdot d$, also $a \cdot 7$, muss dann mit der Ziffer 8 enden (denn $2 + 8 = 10$). Das ist genau für $a = 4$ der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77. Tatsächlich führt die Rechnung $143 \cdot 77$ zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

		1	8	9	·	9	9
	1	7	0	1			
1	7	0	1				
1	8	7	1	1			

		1	4	3	·	7	7
	1	0	0	1			
1	0	0	1				
1	1	0	1	1			

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

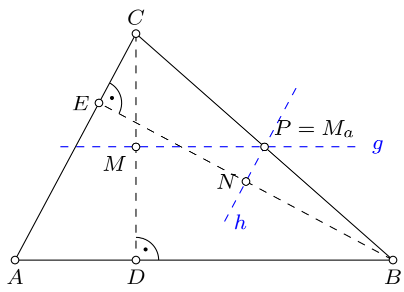
Aufgabe 5 - 120735
Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Es sei x eine beliebige rationale Zahl, für die $0 \leq x \leq 1$ gilt. Dann gilt $x + |x - 1| = x + 1 - x = 1$, also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen x, für die $x + |x - 1| = x + 1 - x = 1$ gilt, diese Gleichung.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x > 1$, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllt. Dann wäre $1 = x + |x - 1| = x + x - 1$ und somit $2x = 2$, also $x = 1$, im Widerspruch zu $x > 1$.

Also gibt es keine rationale Zahl $x > 1$, die die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen x, für die $(0 \leq x \leq 1)$ gilt, die gegebene Gleichung.

Aufgabe 6 - 120736
Beweise den folgenden Satz:
Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!



Die zwei im Satz genannten Höhen seien o.B.d.A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.

Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte.
Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P.

Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge CD, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $MD = \frac{1}{2}CD$.

Da nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$ in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $BP = \frac{1}{2}BC$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a.

Analog beweist man, dass auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.

Lösungen der III. Runde 1972 übernommen aus [5]

4.15 XIII. Olympiade 1973

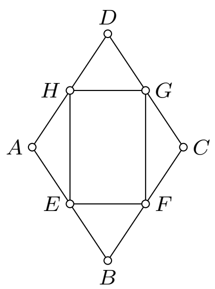
4.15.1 I. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130711
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111111 an!

Wegen $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ hat 111111 genau die 32 Teiler 1, 3, 7, 11, 13, 37 und

$3 \cdot 7 = 21$	$3 \cdot 11 = 33$	$3 \cdot 13 = 39$
$3 \cdot 37 = 111$	$7 \cdot 11 = 77$	$7 \cdot 13 = 91$
$7 \cdot 37 = 259$	$11 \cdot 13 = 143$	$11 \cdot 37 = 407$
$13 \cdot 37 = 481$	$3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$	$3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$
$3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$	$3 \cdot 11 \cdot 13 = 429$	$3 \cdot 11 \cdot 37 = 1221$
$3 \cdot 13 \cdot 37 = 1443$	$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$	$7 \cdot 11 \cdot 37 = 2849$
$7 \cdot 13 \cdot 37 = 3367$	$11 \cdot 13 \cdot 37 = 5291$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003$
$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547$	$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$	$3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 15873$
$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 37037$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111111$	

Aufgabe 2 - 130712
Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!



In dem Rhombus $ABCD$ gilt, da E, F, G, H die Mittelpunkte seiner Seiten sind:

$$AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA \qquad (1)$$

Ferner gilt: $\angle HAE = \angle FCG$ sowie $\angle EBF = \angle GDH$ (2)
Aus (1) und (2) folgt $\triangle HAE = \triangle FCG$ sowie $\triangle EBF = \triangle GDH$ (sws) (3)
Aus (3) folgt $EH = FG$ sowie $EF = HG$, daher ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Nun gilt $\angle EAH + \angle HDG = 180°$ sowie $\angle AEH = \angle AHE = \frac{1}{2}(180° - \angle EAH)$ und $\angle DGH = \angle DHG = \frac{1}{2}(180° - \angle HDG)$.
Folglich gilt $\angle AHE + \angle DGH = \frac{1}{2}(360° - 180°) = 90°$ und somit $\angle EHG = 180° - 90° = 90°$; daher ist $EFGH$ ein Rechteck.

Aufgabe 3 - 130713
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist $c = \frac{5}{2}a$ oder $a = \frac{5}{2}c$. Wäre $c = \frac{5}{2}a$, so wäre $a + a < \frac{5}{2}a - c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung
Wenn $a = \frac{5}{2}c$ ist, so folgt $\frac{5}{2}c + \frac{5}{2} + c = 24$ cm, also $6c = 24$ cm, woraus man $c = 4$ cm und $a = 10$ cm erhält.

Daher können nur $a = 10$ cm und $c = 4$ cm die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie genügen ihnen tatsächlich, da sie die Dreiecksungleichungen sowie die übrigen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 4 - 130714
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane
(2) Bertram und Franziska
(3) Anneliese und Franziska
(4) Bertram und Erich
(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.
Wie heißen die beiden Preisträger?

Angenommen, Anneliese hätte keinen Preis erhalten. Dann wären, da laut Aufgabe in zwei der Antworten (1), (3), (5) je ein Name richtig wäre, zwei der Teilnehmer Christiane, Franziska, Detlev die Preisträger. Hiernach waren aber in der Aussage (4) und außerdem noch in einer der Aussagen (1), (3), (5) beide Angaben falsch, im Widerspruch zur Aufgabe.
Folglich ist Anneliese eine Preisträgerin. Dann sind laut Aufgabe Christiane, Franziska und Detlev keine Preisträger.
Da von den Aussagen (2), (4) genau eine zwei falsche Namen enthalten muss und Bertram in beiden Aussagen vorkommt, ist Erich der andere Preisträger.
Also sind Anneliese und Erich die beiden Preisträger.

Lösungen der I. Runde 1973 übernommen aus [5]

4.15.2 II. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130721
Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.
(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Aus (3) folgt, dass die Summe aus der Anzahl der Schachspieler und der Anzahl der Judosportler 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei ganzzahlige Summanden erfüllt nur diejenige (5), nach der die Anzahl der Schachspieler 3 und die der Judosportler 1 ist. Daraus folgt nach (4), dass genau 6 Schüler Mitglied der Sektion Tischtennis sind.

Nach (1) betreiben mindestens 19 Schüler Leichtathletik und nach (2) mindestens 7 Schüler Schwimmen. Da für diese beiden Sportarten nur noch genau 26 Schüler in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen Anzahlen.

Von den 36 Schülern betreiben mithin genau 19 Leichtathletik, genau 7 Schwimmen, genau 6 Tischtennis, genau 3 Schach, und genau 1 Schüler betreibt Judo.

Aufgabe 2 - 130722
Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
$(a, c) = 6$,
$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, dass es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.
Ist diese Behauptung richtig?
Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

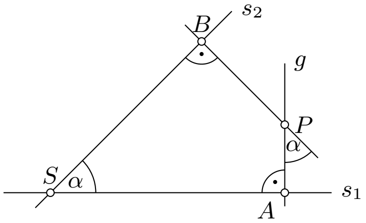
Erfüllen a, b, c die drei genannten Bedingungen über den ggT, so ist a durch 4 und durch 6, also durch das kgV dieser Zahlen, d.h. durch 12, teilbar.
Ferner ist dann b durch 4 und durch 14, also durch das kgV dieser Zahlen, d.h. durch 28, teilbar.
Ebenso ist c durch 6 und 14, also durch 42 teilbar.

Andererseits erfüllt die Wahl von (1) $a = 12$, $b = 28$, $c = 42$ alle drei ggT-Bedingungen. Daher ist die zweite Frage der Aufgabe mit Ja und der Angabe (1) zu beantworten.

Multipliziert man a in (1) mit einer zu b und c teilerfremden Zahl $z > 1$ (z.B. mit $z = 5$), so erhält man eine andere Wahl dreier Zahlen (im Beispiel 60, 28, 42), die ebenfalls alle drei ggT-Bedingungen erfüllt. Daher ist auch die erste Frage der Aufgabe mit Ja zu beantworten.

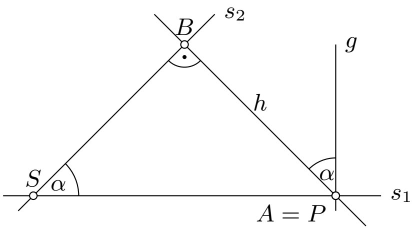
Aufgabe 3 - 130723
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:
Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von 90°, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, dass sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter 90° schneiden. Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:



Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels.

Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen $\angle SBP = \angle SAP = 90°$; $\angle BPA = 180° - \angle ASB = 180° - \alpha$, und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.



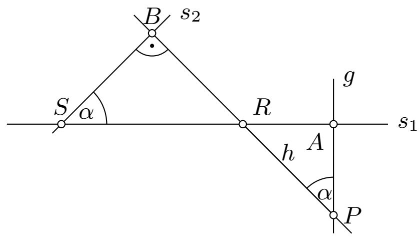
Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A.

Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1, bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\angle SAB = 180° - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.

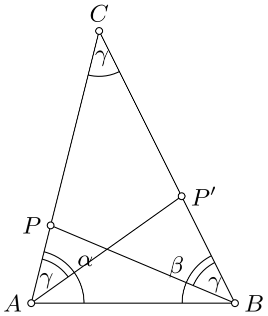
Fall 3: P liegt außerhalb des gegebenen Winkels.

O.B.d.A. liege P nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R.

Dann gilt: $\angle SRB = 180° - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\angle SRB = \angle PRA$ (Scheitelwinkel) und damit $\angle RPA = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen.



Aufgabe 4 - 130724
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.
Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so dass $\angle BPA = 2\gamma$ gilt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!



(I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt dann $\angle CBP = \angle BPA - \angle BCP = \gamma$.

(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.

(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch $\angle BPA = \angle BCP + \angle CBP = 2\gamma$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;
Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat. Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.

Lösungen der II. Runde 1973 übernommen aus [5]

4.15.3 III. Runde 1973, Klasse 7

Aufgabe 1 - 130731
Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

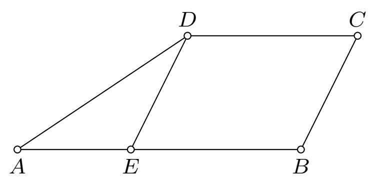
Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre. Daraus folgt:

Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere 15 Jahre alt.

Aufgabe 2 - 130732
Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar.
Wegen $p \geq 3$ ist die Primzahl p ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar.
Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar.

Aufgabe 3 - 130733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3$ cm, $b = 4$ cm, $d = 6$ cm, $e = 9$ cm!
Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $AE = a-c$. Dann ist $AB - CD = c$ und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun lässt sich $\triangle AED$ aus AE, ED $(= BC)$ und DA konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.

Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.

(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $AE = 3$ cm, $ED = 4$ cm und $AD = 6$ cm.
(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.
(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.
(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.
(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist $AD = d$. Weiter ist nach Konstruktion $AC = e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $BC(= ED) = b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $AB - DC(= AB - EB = AE) = a - c$.

(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s,s,s) eindeutig ausführbar.
Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $AC > AD$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar.
Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 130734
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v = 0$ oder $w = 0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a = 100x + 10y + z$ gleich der Hälfte der Summe von $b = 100y + 10z + x$ und $c = 100z + 10x + y$. Demnach gilt:

$$200x + 20y + 2z = 2a = b + c = 101y + 110z + 11x$$

also $189x = 81y + 108z$ und daher

$$7x = 3y + 4z \qquad (1)$$

Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$.

Wegen $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$ folgt hieraus, dass entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.
Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	1	1	2	2	2	...	...	...
9	9	9	8	1	4	7	0	3
0	7	4	1	8	5	2	9	6
9	2	5						

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein. Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt

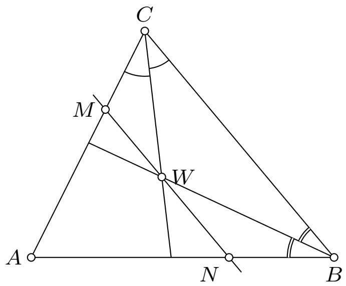
$$\frac{1}{2} \cdot (925 + 259) = 1184 : 2 = 529 \qquad \frac{1}{2} \cdot (814 + 148) = 962 : 2 = 481$$

$$\frac{1}{2} \cdot (703 + 37) = 740 : 2 = 370 \qquad \frac{1}{2} \cdot (74 + 740) = 814 : 2 = 407$$

$$\frac{1}{2} \cdot (185 + 851) = 1036 : 2 = 518 \qquad \frac{1}{2} \cdot (296 + 962) = 1258 : 2 = 629$$

Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 5 - 130735
Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $CM + BN = MN$.



Aus $\angle CBW = \angle WBN$ (laut Voraussetzung) und $\angle CBW = \angle NBW$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\angle WBN = \angle NWB$. Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt $BN = NW$. (1) Analog beweist man $CM = MW$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $CM + BN = MW + NW$, also $CM + BN = MN$.

Aufgabe 6 - 130736
Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

Man könnte sich vorstellen, dass der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verlässt, in dem die Lok auf die Brücke fährt. Wenn der Fußgänger nach 9 s 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen $27 - 9 = 18$ noch 18 s. In dieser Zeit legt er wegen $225 + 9 = 234$ genau 234 m zurück.

Folglich betrug wegen $234 : 18 = 13$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 13 m/s das sind wegen $13 \cdot \frac{3600}{1000} = 46{,}8$ genau 46,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Da der Zug zur Brückenfahrt 27 s benötigte, legte die Lok wegen $13 \cdot 27 = 351$ in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen $352 - 225 = 126$ hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.

Lösungen der III. Runde 1973 übernommen aus [5]

4.16 XIV. Olympiade 1974

4.16.1 I. Runde 1974, Klasse 7

Aufgabe 1 - 140711
Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.
Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, dass nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

Der genannte Betrag kann sich höchstens aus 1-Pfennigstücken, 5-Pfennigstücken, 10-Pfennigstücken und 20-Pfennigstücken zusammensetzen, da es in der zur Zeit gültigen Währung der DDR keine anderen Münzen bis zu einem Wert von 34 Pfennig gibt.

Angenommen, Klaus hätte ein 20-Pfennigstück, dann hätten die restlichen 16 Münzen einen Gesamtwert von 14 Pfennig. Das ist nicht möglich. Infolgedessen kann Klaus kein 20-Pfennigstück in seiner Geldtasche haben.

Angenommen, Klaus hätte mehr als ein 10-Pfennigstück, dann hätte er höchstens noch 15 weitere Münzen, deren Gesamtwert höchstens 14 Pfennig betragen könnte; das ist wiederum nicht möglich. Somit kann Klaus in seiner Geldtasche an 10-Pfennigstücken höchstens eines haben.

Angenommen, Klaus hätte kein 10-Pfennigstück. Hätte er dann 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hätte er 1-Pfennigstücke in der Anzahl $17-x$, und es wäre $5x+17-x=34$, also $4x=17$. Das ist nicht möglich, da 17 nicht durch 4 teilbar ist.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass Klaus in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück und den Restbetrag in anderen Münzen hat. Hat er nun 5-Pfennigstücke in der Anzahl x, so hat er dann 1-Pfennigstücke in der Anzahl $16-x$. Daraus folgt $5x+16-x=24$, also $4x=8$ und somit $x=2$. Falls die von Klaus gemachte Behauptung richtig ist, muss er in seiner Geldtasche genau ein 10-Pfennigstück, genau zwei 5-Pfennigstücke und genau vierzehn 1-Pfennigstücke haben.

Aufgabe 2 - 140712
Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, dass seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt.

Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, dass eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

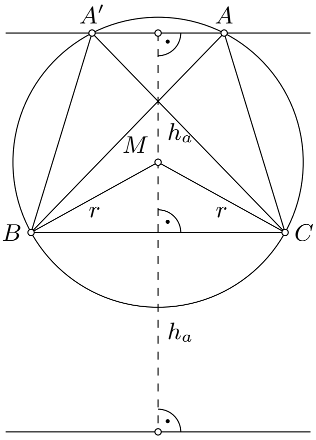
Ermittle, um wie viel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muss!

Der Würfel hat ein Volumen von 8 cm^3. Diese 8 cm^3 sind, wenn er gemäß den Bedingungen der Aufgabe gesenkt ist, gleich dem Inhalt eines Quaders Q oberhalb des ursprünglichen Flüssigkeitsquaders und mit gleicher Grundfläche wie dieser.

Da die Grundfläche einen Inhalt von 20 cm^2 hat, hat Q die Höhenlänge $\frac{8}{20}$ cm = 0,4 cm. Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Würfel so weit gesenkt worden, dass seine Deckfläche mit der obersten Fläche von Q in derselben Ebene liegt, d.h. um insgesamt (2 – 0,4) cm = 1,6 cm.

Aufgabe 3 - 140713
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.



Dann haben die Seiten BC, BM, CM des Teildreiecks BCM die Längen a, r, r. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit r und zweitens auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck BCM, in dem die Seiten BC, BM, CM die Längen a, r, r haben.
(2) Man schlägt den Kreis um M mit dem Radius r.
(3) Man konstruiert die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Schneidet eine von ihnen den in (2) konstruierten Kreis, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion hat die Seite BC des Dreiecks ABC die Länge a. Ferner haben BM, CM und AM die Länge r, also ist r die Länge des Umkreisradius von $\triangle ABC$. Schließlich hat A von der Geraden durch B und C den Abstand h_a, wie es verlangt war.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist wegen $2r > a$ bis auf Kongruenz eindeutig. Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig.
(3) liefert zunächst eindeutig die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Bei den gegebenen Werten von r, a und h hat - wie man sieht - von diesen Parallelen genau die auf der gleichen Seite der Geraden durch B und C wie M liegende Parallele Schnittpunkte mit dem Kreis um M mit r, und zwar genau zwei.

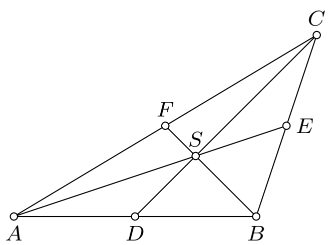
Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zu der Mittelsenkrechten von BC. Daher sind die beiden hiermit erhaltenen Dreiecke zueinander kongruent. Das Dreieck ABC ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 140714
Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

a) Es sei D der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC. Dann sind die Dreiecke ADC und DBC inhaltsgleich, da sie in der Länge der Seiten AD, DB und in der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Diese Dreiecke haben die Seite CD gemeinsam; folglich stimmen sie auch in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d.h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und D wie B. Also stimmen die Dreiecke CAS, BCS in der Seite CS und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Analog beweist man, dass die Dreiecke ABS und BCS inhaltsgleich sind. Daher haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.



b) Es sei D der Schnittpunkt des Strahles aus C durch S mit AB. Da die inhaltsgleichen Dreiecke CAS und BCS die Seite CS gemeinsam haben, stimmen sie in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d.h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und S wie B. Also stimmen die Dreiecke ADC und DBC in der Seite CD und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Da sie dieselbe Höhe auf den Seiten AD bzw. DB haben, sind folglich diese Seiten gleich lang. Somit ist CD die Seitenhalbierende durch C im Dreieck ABC.

Analog beweist man, dass, wenn F der Schnittpunkt des Strahls aus B durch S mit AC ist, BF die Seitenhalbierende durch B im Dreieck ABC ist. Daher ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.

Lösungen der I. Runde 1974 übernommen aus [5]

4.16.2 II. Runde 1974, Klasse 7

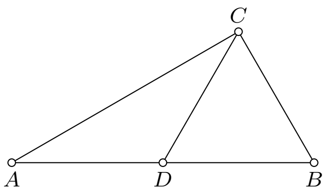
Aufgabe 1 - 140721
Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.
(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.
(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniertes Papier.
(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.
(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.
(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Aus (6), (3) und (2) folgt, dass weder die Schülerin Müller noch die Schülerin Richter am besten abschnitt. Folglich lautet der Zuname der erfolgreichsten Schülerin Naumann. Wegen (4) lautet ihr Vorname nicht Angelika und wegen (1) sowie (5) auch nicht Beate. Folglich heißt sie Christine.
Die erfolgreichste der drei Schülerinnen heißt Christine Naumann.

Aufgabe 2 - 140722
Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, dass für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung (1) $DB = BC = CD$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!



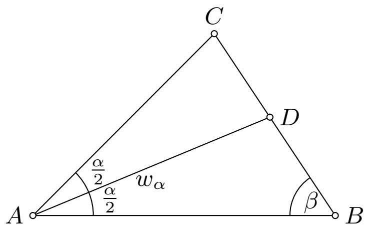
Wegen (1) ist das Dreieck DBC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin 60° groß.
Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $AD(= DB) = CD$. Also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig.

Als Nebenwinkel des Winkels $\angle BDC$ hat der Winkel $\angle ADC$ eine Größe von 120°.

Folglich hat der Winkel $\angle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von 30°.
Da die Größe des Winkels $\angle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\angle BCD$ und $\angle ACD$ ist, beträgt diese $60° + 30° = 90°$; das Dreieck ABC ist also rechtwinklig.

Aufgabe 3 - 140723
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5{,}5$ cm!
Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
AD sei die Winkelhalbierende von $\angle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $AD = w_\alpha$, $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle ABD = \beta$ bekannt.
Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das DreieckABD aus $AD = 5{,}5$ cm, $\angle BAD = 30°$ und $\angle ABD = 35°$.
(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe 60° nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.
(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle BAC$ die Größe 60°. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35°. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\angle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.
Da sowohl $\angle BAC$ als auch $\angle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 140724
Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

"Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muss ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
Wie viel Seiten hat das Buch insgesamt?"

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, dass alle Angaben von Fritz zutreffen!

Angenommen, die Angaben treffen zu, wenn das Buch x Seiten hat. Von ihnen las Fritz am ersten Tag $\frac{x}{12}$ Seiten, an den folgenden 4 Tagen zusammen $4 \cdot \frac{x}{8}$ Seiten, das sind zusammen $\frac{7}{12}x$ Seiten. Für den letzten Tag verblieben daher noch $\frac{5}{12}x$ Seiten. Das waren laut Aufgabe 20 Seiten weniger als $\frac{7}{12}x$ Seiten. Daraus folgt $\frac{2}{12}x = 20$ und somit $x = 6 \cdot 20 = 120$.

Somit können nur für die Antwort, das Buch habe 120 Seiten, die Angaben von Fritz zutreffen. In der Tat treffen sie hierfür zu; denn hat das Buch 120 Seiten, so las Fritz am ersten Tag 10 Seiten, an den folgenden 4 Tagen je 15 Seiten, bis dahin also zusammen 70 Seiten; und liest er noch (20 Seiten weniger, d.h.) 50 Seiten, so ergibt sich genau die Seitenzahl des Buches, 120 Seiten.

Lösungen der II. Runde 1974 übernommen aus [5]

4.16.3 III. Runde 1974, Klasse 7

Aufgabe 1 - 140731
Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln. Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.
(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.
(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

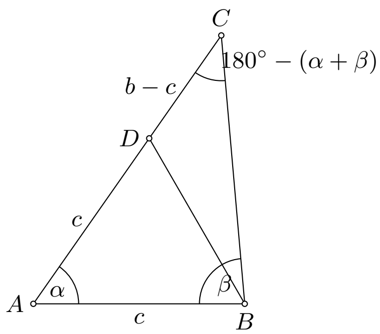
Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Wegen (1) ist Ulrich nicht Schüler der Klasse 7, wegen (3) sind Hans und Werner nicht Schüler der Klasse 7. Also ist Fritz der Schüler der Klasse 7.
Von den restlichen Schülern gehören wegen (3) Hans und Werner nicht der Klasse 8 an. Also ist Ulrich Schüler der Klasse 8.
Von den nun noch verbleibenden zwei Schülern ist Hans wegen (2) nicht Schüler der Klasse 6. Also gehört Werner der Klasse 6 an, und folglich ist Hans der Schüler der Klasse 5.

Aufgabe 2 - 140732
Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Für jede natürliche Zahl gilt:
Bei ihrer Division durch 3 tritt als Rest einer der Werte 0, 1, 2 auf. Unter diesen Werten befinden sich keine vier verschiedenen. Daher gibt es unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen zwei, die bei Division durch 3 denselben Rest lassen.
Ist r dieser Rest, so sind diese beiden Zahlen von der Form $3p+r$ und $3q+r$ mit natürlichen Zahlen p, q. Ihre Differenz ist demnach $(3p+r)-(3q+r)=3(p-q)$ also durch 3 teilbar.

Aufgabe 3 - 140733
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b-c=3$ cm, $\alpha=55°$ und $\beta=85°$!
Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $b>c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $AD=c$, also $DC=b-c$ gilt. Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

$$\angle ACB = 180° - (\alpha+\beta)$$

Ferner ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB=AD=c$, also gilt $\angle ABD=\angle ADB$.

Wegen $\angle ABD+\angle ADB+\alpha=180°$ folgt hieraus

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$$

Daher gilt

$$\angle CDB = 180° - 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.
Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b-c$, der Winkel $\angle CDB$ die Größe $90° + \frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\angle DCB$ die Größe $180° - (\alpha + \beta)$ haben.
(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.
(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.
(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat $\angle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\angle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe

$$180° - \angle ABC - \angle DCB = 180° - \beta - (180° - \alpha - \beta) = \alpha$$

Weiterhin ist nach Konstruktion $\angle ADB = 180° - \angle CDB = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und somit

$$\angle ABD = 180° - \angle BAD - \angle ADB = 180° - \alpha - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle ADB$$

Also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB = AD$, und somit gilt auch, wie verlangt, $AC-AB = AC-AD = CD = b-c$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180° - \alpha - \beta > 0$ und $(90° + \frac{\alpha}{2}) + (180° - \alpha - \beta) < 180°$ gelten.
Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und wegen $(180° - \alpha - \beta) + \beta < 180°$ und $90° + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ auch Konstruktionsschritt (4). Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 140734
In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A1 und danach in der Abteilung A2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein musste, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, dass der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?
Auf wie viel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?
Bemerkungen: Es sei angenommen, dass der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

In A1, produzierte nach Durchführung der Rationalisierung jeder der 53 Arbeiter $\frac{1,59}{53}$ und in A2 jeder der 62 Arbeiter $\frac{1,64}{62}$ des Produktionsausstoßes seiner Abteilung vor den Rationalisierungsmaßnahmen.
Da in A1 die Produktion auf eine größere Menge gewachsen war als in A2 mussten Arbeiter von A1 nach A2 überwechseln. Ihre Anzahl sei x. Danach betrug in A1 die Produktion $\frac{1,59}{53}(53-x)$ der früheren Produktion, in A2 aber $\frac{1,24}{62}(62+x)$. Da diese beiden Produktionsausstöße gleich waren, gilt

$$\frac{159}{53}(53-x) = \frac{124}{62}(62+x) \Rightarrow x = 7$$

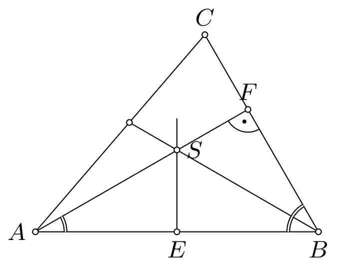
Es wechselten somit 7 Arbeiter von A1 nach A2 über. Der neue Produktionsausstoß in jeder Abteilung betrug dann $\frac{1,59}{53} \cdot 46 = 1,38$, d.h., er stieg auf 138 % des früheren Produktionsausstoßes.

Aufgabe 5 - 140735
Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.
Ermittle die Seitenlängen!

Es gilt $a : b = 3 : 8, b : c = 8 : 6$ (Erweiterung von $4 : 3$ mit 2), daraus folgt $a : b : c = 3 : 8 : 6$, d.h., a, b und c sind der Reihe nach das 3-, 8-, bzw. 6fache ein und derselben Länge.

Wegen $3 + 8 + 6 = 17$ und wegen des gegebenen Umfange von 34 cm beträgt diese Länge 2 cm. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm.

Aufgabe 6 - 140736
Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geht.
Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\angle ABC$ ermitteln.
Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\angle ABC$!



Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.
Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\angle ABC$ halbiert, gilt dann $\angle FBS = \angle SBA$. (1)
Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $AS = BS$, und deshalb ist $\angle SAB = \angle SBA$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\angle FBS = \angle SAB = \angle SBA$. (3)

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°. Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°. Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt 60°.

Lösungen der III. Runde 1974 übernommen aus [5]

4.17 XV. Olympiade 1975

4.17.1 I. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150711
Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.
(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefasst, ebenfalls eine Primzahl dar.
(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Die einstelligen Primzahlen sind 2, 3, 5, 7.

Wegen (1) können die Nummern weder durch 2 noch durch 5 teilbar sein, folglich enden sie wegen (2) auf 3 oder 7. Da die Nummern verschieden sind und wegen (3) und (1), haben die Nummern die Form $3x7$ bzw. $7x3$, wobei x eine einstellige Primzahl, also eine der Zahlen 2, 3, 5, 7 ist.
Es ist $x \neq 2$; denn $3|327$.
Es ist $x \neq 5$; denn $3|357$.
Es ist $x \neq 7$; denn $13|377$.
Für $x = 3$ erhält man die Zahlen 337 bzw. 737. Da die erste weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 teilbar ist und $192 = 361 > 337$ ausfällt, ist 337 eine Primzahl. Ebenso ist 733 weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar und wegen $292 = 841 > 733$ mithin Primzahl.
Die beiden Mathematiker haben also die Telefonnummern 337 und 733.

Aufgabe 2 - 150712
Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, dass A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, dass A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B, b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

(I) Wenn die genannten Eigenschaften vorliegen, so folgt:

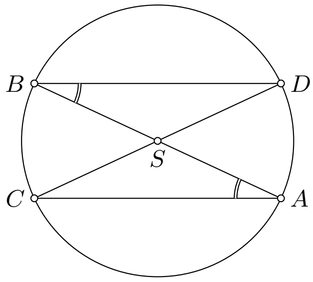
a) Gefäß A habe ein Fassungsvermögen von x Litern, dann hat B ein solches von $(8 - x)$ Litern. Hierfür gilt

$$\frac{x}{2} + 8 - x = x + \frac{8 - x}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Also kann nur die Angabe, dass Gefäß A ein Fassungsvermögen von 5 Litern und Gefäß B deshalb eines von 3 Litern hat, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Weiter folgt:

b) Wegen 3,0l + 2,5l = 5,5 l beträgt die Wassermenge W = 5,5 l. Also kann nur diese Angabe die Forderungen erfüllen.

Aufgabe 3 - 150713
Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, dass die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, dass also $AC = BD$ und $AC \parallel BD$ gilt!



Die Dreiecke ASC und BSD sind kongruent nach sws; denn es gilt:
(1) $AS = BS = CS = DS$
(2) $\angle ASC = \angle BSD$ als Scheitelwinkel.
Folglich gilt $AC = BD$ sowie $\angle CAS = \angle DBS$. Nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt daraus $AC \parallel BD$.

Aufgabe 4 - 150714
In der Ebene ϵ seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, dass keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.
a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!
b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

a) Zur Wahl eines ersten Endpunktes einer der Verbindungsstrecken hat man genau 50 Möglichkeiten. In jeder von dieser, hat man dann genau 49 Möglichkeiten, einen der übrigen Endpunkte als zweiten Endpunkt einer der Verbindungsstrecken zu wählen. Durch diese insgesamt $50 \cdot 49 = 2450$ Wahlmöglichkeiten erhält man alle gesuchten Verbindungsstrecken, und zwar (da nach Voraussetzung keine dieser Strecken außer den Endpunkten einen anderen gegebenen Punkt enthält) jede Strecke genau doppelt (da jeder der Endpunkte einmal als erster und einmal als zweiter Endpunkt auftritt).
Daher ist $2450 : 2 = 1225$ die Anzahl aller gesuchten Verbindungsstrecken.

b) Von diesen 1225 Verbindungsstrecken bilden genau 50 die Seiten des konvexen 50-Ecks, die übrigen sind die gesuchten Diagonalen. Ihre Anzahl ist also $1225 - 50 = 1175$.

Lösungen der I. Runde 1975 übernommen aus [5]

4.17.2 II. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150721
a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, dass die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa "auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit 650 m - 150 m = 500 m, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m.
Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt $125 \cdot 200$ m^2 = 25000 m^2 = 2,5 ha.

b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5} - 1 = 24$ und parallel zur kleineren $\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

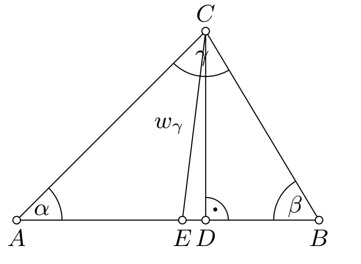
Aufgabe 2 - 150722
Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder.
Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.
Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?
Anmerkung: Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.

Ist am 1. Januar 1975 das jüngste Kind x Jahre alt, so ist das zweite $2x$ Jahre, das älteste $4x$ Jahre, die Mutter $14x$ Jahre, der Vater $15x$ Jahre und der Großvater $(64 + 4x)$ Jahre alt. Es gilt nun laut Aufgabe

$$x + 2x + 4x + 14x + 15x = 4x + 64$$

daraus folgt $32x = 64$, also $x = 2$.
Das jüngste Kind war am 1. Januar 1975 somit 2 Jahre alt, das zweite 4 Jahre, das älteste 8 Jahre, die Mutter 28 Jahre, der Vater 30 Jahre und der Großvater 72 Jahre alt.

Aufgabe 3 - 150723
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle DCE = \frac{1}{2}|\angle ABC - \angle CAB|$ gilt!



Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien α, β, γ. Da $\triangle ABC$ bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit α als Größe des Innenwinkels bei A. Daher gilt $\angle ACD = 90° - \alpha$.

Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich

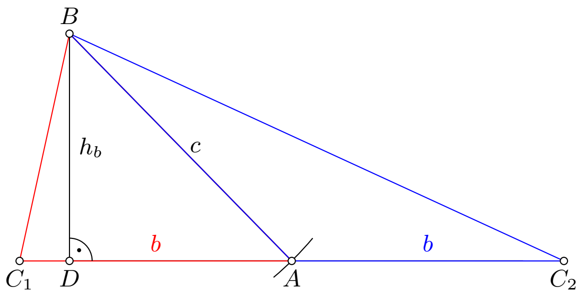
$$\angle DCE = |\angle ACD - \angle ACE| = |90° - \alpha - \frac{\gamma}{2}| = \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, dass $\angle CAB$ spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen lässt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

Aufgabe 4 - 150724
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D. Dann gilt $BA = c$, $h_b = BD$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck.

In ihm sind c, h_b Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\angle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $AB = c$, $BD = h_b$, und dem rechten Winkel $\angle BDA$.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A.
(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b. Schneidet er die Gerade durch D und A, so sei C einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $AC = b$, $AB = c$, $BD = h_b$, und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.
Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.
Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte C_1 und C_2. Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\angle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke ABC_1, ABC_2 als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Lösungen der II. Runde 1975 übernommen aus [5]

4.17.3 III. Runde 1975, Klasse 7

Aufgabe 1 - 150731
Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze.
Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (1) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

Angenommen, (1) wäre wahr. Dann hätte die Mannschaft der Klasse 8a den zweiten Platz belegt, also wäre (3) falsch und somit (4) wahr. Das steht im Widerspruch zur Annahme. Deshalb ist (1) falsch und somit (2) wahr, d.h., die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

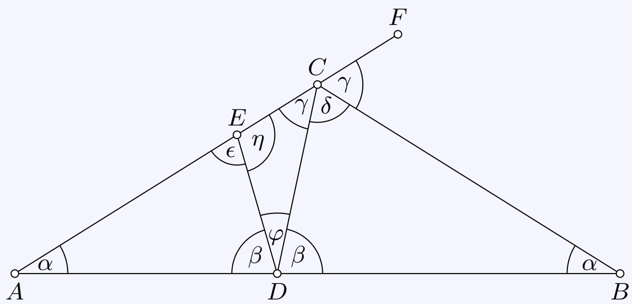
Daraus folgt, dass (6) falsch und somit (5) wahr ist. Den zweiten Platz belegte mithin die Mannschaft der Klasse 7a.

Daraus folgt, dass die Aussage (4) falsch und somit (3) wahr ist, d.h., den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a.
Für den vierten Platz verbleibt dann nur noch die Mannschaft der Klasse 7b. Daher kann nur die folgende Verteilung den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Den ersten Platz belegte die Mannschaft der Klasse 8a, den zweiten die Mannschaft der Klasse 7a, den dritten die Mannschaft der Klasse 8b und den vierten die Mannschaft der Klasse 7b. Diese Verteilung entspricht in der Tat den Bedingungen; denn bei ihr sind die Aussagen (2), (3), (5) wahr und (1), (4), (6) falsch.

Aufgabe 2 - 150732

In der abgebildeten Figur gelte:
$\angle ABC = \angle BAC = \alpha$,
$\angle ADE = \angle BDC = \beta$,
$\angle ACD = \angle BCF = \gamma$,
$\angle BCD = \delta$, $\angle AED = \epsilon$,
$\angle CED = \eta$, $\angle EDC = \psi$.
Es sei $\delta = 70°$.
Ermittle $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \eta$, und ψ!



Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$$2\gamma + 70° = 180° \Rightarrow \gamma = 55°$$

Der Winkel $\angle BCF$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma = 2\alpha \qquad ; \qquad \alpha = \frac{\gamma}{2} = 27{,}5°$$

Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle BDC$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 27,5° - 70° = 82{,}5°$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta + \psi = 180^\circ \Rightarrow \psi = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2 \cdot 82,5^\circ = 15^\circ$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle ECD$ gilt:

$$\eta + \gamma + \psi = 180^\circ \Rightarrow \eta = 180^\circ - \gamma - \psi = 180^\circ - 55^\circ - 15^\circ = 110^\circ$$

und damit nach dem Satz über Nebenwinkel

$$\epsilon = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Damit sind die Winkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \eta$ und ψ ermittelt.

Aufgabe 3 - 150733
Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, dass sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d.h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, dass jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und dass jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C. Dann lassen sich 2 Fälle unterscheiden:

a) Die Punkte A, B, C liegen auf einer und derselben Geraden (etwa p).
b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf einer und derselben Geraden.

Fall a) Es geht laut Aufgabe noch (mindestens) je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C. Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein. Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.

Fall b) Es können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B).

Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (C) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da andernfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde.

Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

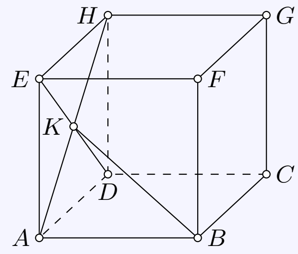
Aufgabe 4 - 150734
Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist.
Nach wie viel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

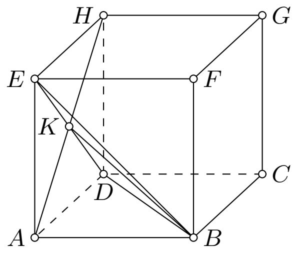
Ist v die auf der Strecke übliche Durchschnittsgeschwindigkeit, so fährt der Zug mit der Geschwindigkeit $\frac{120}{100}v = \frac{6}{5}v$.
Ist s die Länge der Strecke von B bis zu der Stelle, an der der Rückstand aufgeholt ist, und ist t die Fahrzeit des Zuges von B bis zu dieser Stelle, so ist einerseits $s = \frac{6}{5}v \cdot t$, andererseits die für die genannte Strecke übliche Fahrzeit (in Minuten) $t + 15$, also $s = v \cdot (t + 15)$.

Daraus folgt $\frac{6}{5}vt = vt + 15v$, also $\frac{1}{5}vt = 15v$, also $t = 5 \cdot 15 = 75$. Der Rückstand ist mithin in 75 min aufgeholt.

Aufgabe 5 - 150735

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.
Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!





Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD.
Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen.
Somit gilt tatsächlich $DE \perp BK$.

Aufgabe 6 - 150736
Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.
Ermittle c für jede 1 000 000 000-stellige durch 9 teilbare Zahl z!

Wegen $z > 0$ gilt auch $a > 0, b > 0, c > 0$.
Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Daher sind alle Zahlen a, b und c dieser Aufgabe durch 9 teilbar.
Da jede der 1 000 000 000 Ziffern von z höchstens 9 beträgt, ist

$$a \leq 9 \cdot 1000000000 = 9000000000$$

also ist a höchstens zehnstellig.
Deshalb ist $b < 9 \cdot 10 = 90$, also ist b eine der Zahlen 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9. Die Quersumme jeder dieser 9 Zahlen ist 9.
Daher gilt $c = 9$ für alle zu betrachtenden Zahlen z.

Lösungen der III. Runde 1975 übernommen aus [5]

4.18 XVI. Olympiade 1976

4.18.1 I. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160711
Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.
Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, dass in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.
Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten lässt!

Angenommen, Anita hätte keine volle Punktzahl erreicht. Dann hätten nach den Feststellungen über die Antworten (1), (2), (4) genau zwei der Schüler Christine, Fritz und Doris volle Punktzahl bekommen, d.h., in genau einer der Aussagen (1), (2), (4) wären beide Angaben falsch.
Im Widerspruch zur Aufgabe müssten dann aber auch in (5) beide Angaben falsch sein. Also hat Anita volle Punktzahl erreicht und Christine, Fritz und Doris demzufolge nicht.

Hätte außerdem Bernd volle Punktzahl erreicht, dann wären in keiner der Antworten (1) bis (5) beide Angaben falsch. Also hat Bernd keine volle Punktzahl bekommen. Daraus folgt, dass außer Anita nur Erich volle Punktzahl erreicht haben kann.

Tatsächlich steht diese Antwort mit allen Bedingungen der Aufgabe in Einklang: denn bei ihr sind in (3) beide Angaben falsch und in (1), (2), (4), (5) je genau eine Angabe falsch.
Die Preisträger mit voller Punktzahl sind also aus den vorliegenden Angaben eindeutig zu ermitteln; sie heißen Anita und Erich.

Aufgabe 2 - 160712
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... u.s.w. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form

$$z = 12345678910111213...9899100$$

entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

a) Die vorgegebene Zahl z entstand aus 9 einstelligen Zahlen, $9 \cdot 10$ zweistelligen Zahlen und der dreistelligen Zahl 100. Sie enthält mithin $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 192$ Stellen.

b) Von den insgesamt 192 Ziffern von z sollen in der zu bildenden Zahl z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern.

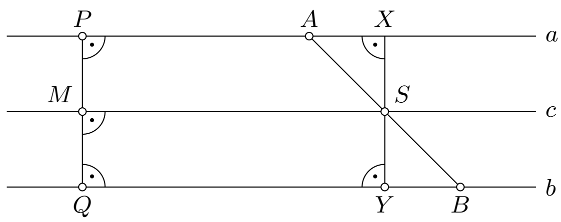
Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

Die Zahl beginnt dann so: 9999950515253545556575 05960...........

Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.
Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und in der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht.

Entsprechend zeigt man, dass als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muss. Die ersten zehn Ziffern der gesuchten Zahl z' lauten mithin 9999978596.

Aufgabe 3 - 160713
Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.
Beweise folgenden Satz: Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $AS = BS$.



Der Schnittpunkt von AB mit c sei S. Die Senkrechte zu c durch S schneide a in X und b in Y.
Ist $S = M$, so gilt $X = P$, $Y = Q$, also $XS = YS$. Ist $S \neq M$, so sind $MSXP$ und $MSYQ$ Rechtecke, also gilt ebenfalls $XS = PM = QM = YS$.

Ist $A = X$, so gilt $B = Y$, also die Behauptung $AS = BS$. Ist $A \neq X$, so sind die Dreiecke AXS und BYS nach (sww) kongruent; denn es gilt: $XS = YS$; $\angle XSA = \angle YSB$ (Scheitelwinkel); $\angle AXS = \angle BYS = 90°$. Also gilt auch in diesem Fall $AS = BS$.

Aufgabe 4 - 160714
Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, A mit einer Geschwindigkeit von 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wie viel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, dass beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?
b) Nach wie viel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen ("überrunden"), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden? Wie viele Runden hätte A und wie viele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

a) B muss innerhalb der gesuchten Zeit einen Vorsprung von 500 m aufholen. Innerhalb einer Stunde hätte B eine um 5 km = 5000 m längere Strecke zurückgelegt als A, d.h. einen zehnmal so großen Vorsprung aufgeholt wie erforderlich. Also holte er den Vorsprung von A in $\frac{1}{10}$ Stunde, d.h. in 6 Minuten auf.

b) Bis zum zweiten Mal des Überholens hätte B einen Vorsprung von 1 km aufzuholen. Die dazu benötigte Zeit wäre demnach doppelt so lang wie bei a), also 12 Minuten. In dieser Zeit legte A eine Strecke von $\frac{1}{5} \cdot 45\text{km} = 9$ km, also 9 Runden, zurück und B daher eine Runde mehr, d.h. 10 Runden.

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen aus [5]

4.18.2 II. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160721
Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.
Wie viel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x, dann erhielt jeder Schüler $(x-1)$ Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt.

Nun sind x und $x-1$ benachbarte natürliche Zahlen. Da $812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, lässt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:

$$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29$$

Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$. Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

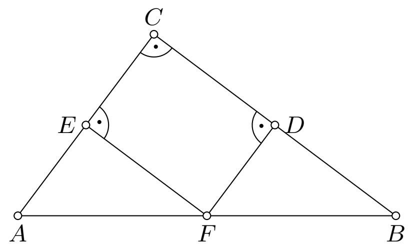
Aufgabe 2 - 160722
Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.
Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?
Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wie viel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5})$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark. Im November betrug der Preis

$$\frac{4}{5}x \text{ Mark } + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x \text{ Mark } = \frac{24}{25} \text{ Mark}$$

Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August. Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, dass der Preis für die Äpfel im November um 4% ihres Preises im August von diesem abwich.

Aufgabe 3 - 160723
Konstruiere aus $a = 5{,}0$ cm und $b = 7{,}0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, der von AC sei E. Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.
Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck $DCEF$, folgt mithin, dass $\angle ECD (= \angle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.

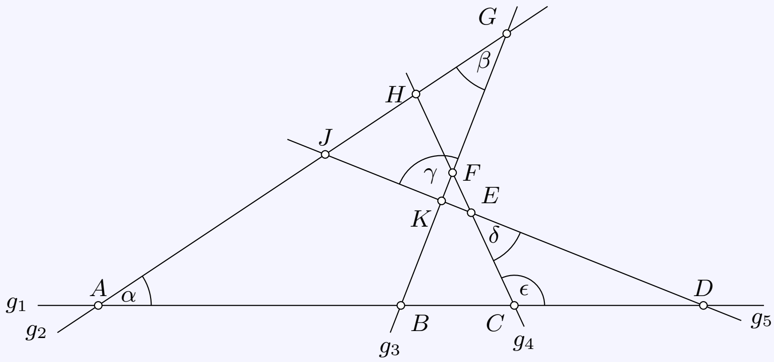
(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7,0 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC. Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.

Aufgabe 4 - 160724



Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\angle BAJ, \angle HGF, \angle FKJ$ und $\angle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt. Ermittle die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$!

Der Winkel $\angle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\angle FKJ$ hat $\angle BKD$ die Größe γ. Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\angle CDE$ im Dreieck BDK zu $180° - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE erhält man für die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$:

$$\epsilon = 180° - (180° - \alpha - \beta - \gamma + \delta) = 180° - 180° + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta$$

Lösungen der II. Runde 1976 übernommen aus [5]

4.18.3 III. Runde 1976, Klasse 7

Aufgabe 1 - 160731
Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, dass alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:
Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.
Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Die Lösung lässt sich z.B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde:

Name	Produkt	Primfaktorzerlegung	mögliche Geburtsdaten	tatsächliches Datum
A	49	$7 \cdot 7$	7.7.	7.7.
B	3	3	3.1. oder 1.3.	3.1.
C	52	$2 \cdot 2 \cdot 13$	26.2. oder 13.4.	13.4.
D	130	$2 \cdot 5 \cdot 13$	26.5. oder 13.10.	13.10.
E	187	$11 \cdot 17$	17.11.	17.11.
F	300	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$	30.10. oder 25.12.	25.12.
G	14	$2 \cdot 7$	14.1. oder 7.2. oder 2.7.	7.2.
H	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	21.2. oder 14.3. oder 7.6. oder 6.7.	7.6.
I	81	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	27.3. oder 9.9.	27.3.
K	135	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	27.5. oder 15.9.	27.5.
L	128	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16.8.	16.8.
M	153	$3 \cdot 3 \cdot 17$	17.9.	17.9.

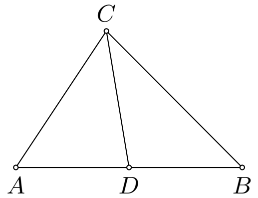
Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K). Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (I, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.
Reihenfolge: Streichung bei B, D, H; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H.

Aufgabe 2 - 160732
Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!



O.B.d.A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Abbildung). Es ist zu beweisen, dass

$$DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung gilt im Dreieck ADC: $DC < AD + AC$ und im Dreieck DBC: $DC < DB + BC$. Durch Addition beider Ungleichungen erhält man mit $AD + DB = AB$:

$$2 \cdot DC < AD + AC + DB + BC \Rightarrow DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

Aufgabe 3 - 160733
Unter "Primzahldrillingen" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.
Beweise, dass es genau eine Zahl p gibt, für die $p, p+2, p+4$ "Primzahldrillinge" sind, und ermittle diese!

Angenommen, für eine Primzahl p seien $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre $p+2$ durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen $p > 1$) größer als 3, also nicht Primzahl.
Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre $p+4$ durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl.
Also muss p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein. In der Tat sind für $p = 3$ auch $p+2 = 5$ und $p+4 = 7$ Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p, für die $p, p+2, p+4$ Primzahldrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahldrillinge sind 3, 5 und 7).

Aufgabe 4 - 160734
Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, dass dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!
b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5% von x Metern, d.h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, dass der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt: $\frac{7}{8} = 350$, also $x = 400$. Die wahre Entfernung beträgt also 400 m.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter zu groß gewesen, d.h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen. Folglich gilt: $\frac{9}{8}y = 350$, also $y = 311\frac{1}{9}$. In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen.

Aufgabe 5 - 160735
Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Angenommen, $(x; y)$ sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt. Dann folgt $3y = 27 - 2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

$$y = 9 - \frac{2}{3}x \qquad (1)$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt $\frac{2}{3}x \leq 9$, also $x \leq \frac{27}{2}$; daher kommen nur folgende Werte für x in Frage: $x = 0, x = 3, x = 6, x = 9$ und $x = 12$.

Nach (1) ergibt eich hierzu jeweils $y = 9, y = 7, y = 5, y = 3$ bzw. $y = 1$. Also haben höchstens die Zahlenpaare (0;9), (3;7), (6;5), (9;3) und (12;1) die verlangten Eigenschaften.

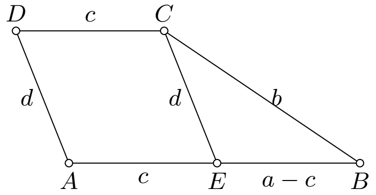
Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften, denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 27 \quad ; \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27 \quad ; \quad 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 27$$
$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 27 \quad ; \quad 2 \cdot 12 + 3 \cdot 1 = 27$$

Aufgabe 6 - 160736
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9{,}1$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $c = 6{,}7$ cm und $d = 5{,}0$ cm!
Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung).

Dann ist $a > c$. Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E, für den $AE = c$, also $EB = a - c$ gilt.
Daraus folgt, dass ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $EB = a - c$, $BC = b$ und $EC = d$.
(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A,
(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C.
(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A.

Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

III. Jedes so erhaltene Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck $AECD$ ist ein Parallelogramm, also gilt $CD = AE = c$ und $AD = EC = d$, und $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach Konstruktion ist $AB = BE + EA = a - c + c = a = 9{,}1$ cm, $BC = b = 6{,}3$ cm, $CD = AE = c = 6{,}7$ cm und $AD = EC = d = 5{,}0$ cm.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a - c = 2{,}4$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $d = 5{,}0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.
Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar. Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

Lösungen der III. Runde 1976 übernommen aus [5]

4.19 XVII. Olympiade 1977

4.19.1 I. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170711
Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

"Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht."

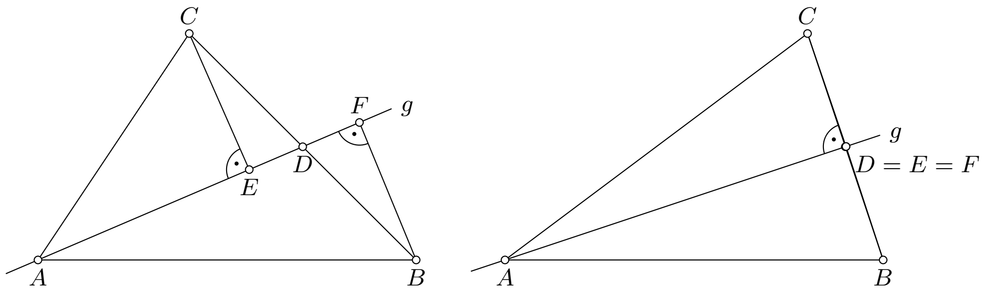
Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Es sei x die Anzahl aller Teilnehmer. Dann gilt laut Aufgabe:

$$x = \left(\frac{1}{4}x+4\right)+\left(\frac{1}{5}x+5\right)+\left(\frac{1}{6}x+6\right)+\left(\frac{1}{8}x+8\right)+\left(\frac{1}{9}x+9\right) = 21$$

woraus man erhält $x = 360$.
Wegen $360 : 8 = 45$ betrug die Anzahl der Zelte mithin 45.

Aufgabe 2 - 170712
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

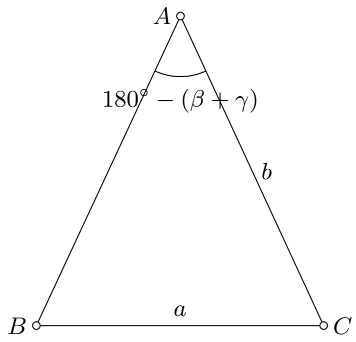


Das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abbildung). Ist BC nicht senkrecht auf g, so sind E und F von D verschieden, und es entstehen zwei Dreiecke CDE und BDF. Diese stimmen in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$ und $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein. Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Ist BC senkrecht auf g, so fallen E und F mit D zusammen, woraus $CE = CD = BD = BF$ folgt. Somit sind in jedem Falle die Abstände BF und CE der Punkte B und C von g einander gleich.

Aufgabe 3 - 170713
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9{,}7$ cm, $b = 7{,}6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle ABC$ und γ die des Winkels $\angle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, hat der $\angle BAC$ die Größe $180° - (\beta + \gamma)$. Daher sind im Dreieck ABC die Längen zweier Seiten und die Größe eines Winkels bekannt, der einer der beiden Seiten gegenüberliegt. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir tragen in A an AC einen Winkel der Größe $180° - (\beta + \gamma)$ an.
(3) Wir zeichnen den Kreis um C mit a. Schneidet er den freien Schenkel des nach (2) angetragenen Winkels, so sei ein Schnittpunkt B genannt.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AC = b$ und nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck $\angle ABC + \angle BCA = \beta + \gamma$.

(IV) Wegen $a > b$ ist die Konstruktion nach dem Kriterium ssw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Aufgabe 4 - 170714
Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten.
Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.
Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, dass Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

Die Höhe des von Uwe gebauten Würfelkörpers lässt sich sowohl aus einer Anzahl r roter Steine als auch aus einer Anzahl w weißer Steine zusammensetzen. Sie ist ferner gleich der Breite des Würfelkörpers, die sich aus der Breite von 2 roten Steinen und der einer Anzahl v (≥ 1) weißer Steine ergibt. Daher ist ihre Maßzahl (in cm) die Zahl

$$3r = 2w = 2v + 2 \cdot 3 \qquad (1)$$

Hiermit ist $(2v + 2 \cdot 3)$ und folglich auch v durch 3 teilbar. Also gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und mit $v = 3n$, und aus (1) folgt $w = 3n + 3$ sowie $r = 2n + 2$.
Alle verwendeten weißen Steine bilden einen Quader. Dieser besteht aus w Schichten; jede von ihnen enthält v Reihen zu je v Steinen. Daher wurden genau $W = w \cdot v2$ weiße Steine verwendet.

Wäre nun $n \geq 2$, so folgte $v \geq 6$, $w \geq 9$, also $W \geq 9 \cdot 36 > 60$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Somit gilt $n = 1, v = 3, w = 6, r = 4$, und damit werden genau $W = 6 \cdot 9 = 54$ weiße Steine verwendet.
Alle verwendeten roten Steine sind in r Schichten angeordnet; jede von ihnen lässt sich aus vier Reihen zu je $(r - 1)$ Steinen zusammensetzen. Daher wurden genau $R = r \cdot 4(r - 1) = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ rote Steine verwendet.

Lösungen der I. Runde 1977 übernommen aus [5]

4.19.2 II. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170721
Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist.
Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.
(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein.
Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein.
Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

Aufgabe 2 - 170722
a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) = 5a + 10$$

Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x + y$. Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10. Folglich gilt: $5|5a + 10$.

b) Ein Gegenbeispiel zeigt, dass die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist:
Es gilt z.B. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; $6 \nmid 21$.

c) Für n = 7 z.B. gilt: $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4) + (a + 5) + (a + 6) = 7a + 21$
Nun gilt $7|7a$ und $7|21$, daraus folgt: $7|7a + 21$. Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z.B. $n = 7$.

Aufgabe 3 - 170723
Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, dass die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

$$x + x + x' = 300^\circ \quad (1) \qquad x + x + y' = 300^\circ \quad (2)$$
$$x + y + x' = 300^\circ \quad (3) \qquad x + y + y' = 300^\circ \quad (4)$$

Wegen $x' + x = 180^\circ$ bzw. $y' + y = 180^\circ$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x = 120^\circ > 90^\circ$ im Widerspruch dazu, dass x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y' = 2x$ gilt, $4x = 300°$ und damit $x = 75°$, $y = 30°$.
Wegen $x + x' = 180°$ folgt aus (3) $y = 120°$ und $x = 30°$.
Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°.

Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75° + 75° + 30° = 180°$ bzw. $30° + 30° + 120° = 180°$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75°75° + (180° - 30°) = 75° + 75° + 150° = 300°$, im zweiten Falle $30° + 120° + (180° - 30°) = 30° + 120° + 150° = 300°$.

Aufgabe 4 - 170724
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $9x7y$ hat!
Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, dass sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $7y$.
Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten y = 2, y = 6.

Nun folgt weiter: Ist $y = 2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.
Ist $y = 6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen 9072, 9672 und 9576 die geforderten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Zifferndarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Lösungen der II. Runde 1977 übernommen aus [5]

4.19.3 III. Runde 1977, Klasse 7

Aufgabe 1 - 170731
Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1500 \leq a \leq 2650$ gilt.
Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt.

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512+64 \cdot 18 = 1512+1152 = 2664$. Da sie größer als 2650 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

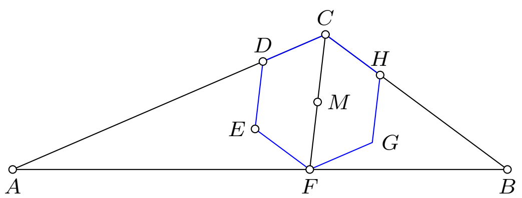
Aufgabe 2 - 170732
Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, dass zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, dass drei Kugeln der Sorte C ebenso viel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und dass fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wie viel Kugeln der Sorte D muss Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wie viel Kugeln der Sorte B muss Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C.
Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D; das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, dass Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muss, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.
Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B. Uli muss also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

Aufgabe 3 - 170733
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC = 9{,}0$ cm, $BC = 6{,}0$ cm und $\angle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, dass D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!



(I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge CM.

(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.
(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.
(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius MC, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.
(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius MC, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

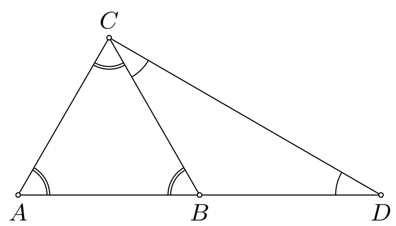
(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC.
Ebenfalls nach Konstruktion ist $CD = EF = FG = HC = CM$.
Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\angle DCH$ der Größe 120° liegt, $\triangle CDM$ also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle EFM$ ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\angle CMD = \angle FME = 60°$.

Hiernach und wegen $\angle FMC = 180°$ ist $\angle EMD = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $MD = ME$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MED = \angle MDE$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $DE = CM$.
Entsprechend ist $GH = CM$. Wegen $CD = DE = EF = FG = GH = HC = CM$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\angle CDE$, $\angle DEF$, $\angle EFG$, $\angle FGH$ und $\angle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 4 - 170734
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, dass $BD = AB$ ist.
Beweise, dass dann $\angle DCA = 90°$ ist!



Nach Voraussetzung gilt $AB = BC = AC$ und damit $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60°$.
Der Außenwinkel $\angle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.
Wegen $BC = BD$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B.
Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\angle DCB = \angle BDC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$$

Daraus folgt, dass

$$\angle DCA = \angle BCA + \angle DCB = 60° + 30° = 90°$$

Aufgabe 5 - 170735
Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

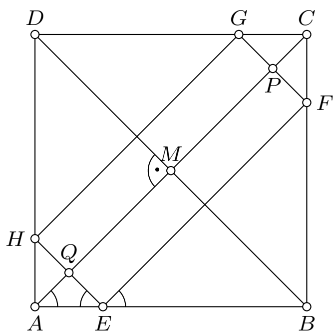
(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99: folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 6 - 170736
In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.
Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!



a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{AC}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.
Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $AC = 10{,}0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.
2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}AC$.
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt. $ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $AM = CM = BM = DM$. Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (sws) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $AB = BC = CD = DA$.
Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist. FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q. Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\angle CAB = 45°$.
Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\angle CAB = \angle FEB = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\angle FEH = 90°$ folgt $\angle HEA = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $AQ = QE$.
Analog gilt $AQ = HQ$, also $EH = 2AQ$. Entsprechend folgt $FG = 2CP$. Wegen $EH = FG$ folgt hieraus $AQ = CP$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $EF = QP$.

Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich:

$$u = 2(EF + EH) = 2(QP + AQ + CP) = 2AC$$

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit 20,0 cm.

Lösungen der III. Runde 1977 übernommen aus [5]

4.20 XVIII. Olympiade 1978

4.20.1 I. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180711
Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:

(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.

Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Zunamen?

Die Schüler heißen Ernst Altmann, Franz Müller, Karl Neubert und Martin Tauber.
Begründung: Wegen (1) können sowohl Martin als auch Karl nicht Altmann oder Müller heißen.
Wegen (2) heißt Martin auch nicht Neubert, also muss Martin Tauber heißen.
Daher heißt Karl nicht Tauber, sondern Neubert. Ernst und Franz heißen folglich Altmann oder Müller.
Ernst kann nach (2) nicht Müller heißen.

Aufgabe 2 - 180712
Berechne

$$\begin{aligned}
a &= 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60}\\
b &= 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6}\\
c &= \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6 + \left(\frac{45}{56} - 0{,}375\right)\\
d &= c - \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

Es ist

$$a = \frac{5}{4} : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 91}{4 \cdot 13 \cdot 60} = \frac{7}{4}$$

$$b = \frac{89}{40} - \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{801 - 200 - 300}{360} = \frac{301}{360}$$

$$c = \frac{32 \cdot 15}{15 \cdot 14} + 6 + \left(\frac{45}{56} - \frac{3}{8}\right) = \frac{17}{6} + 6 + \frac{45 - 21}{56} = \frac{61}{7}$$

$$d = \frac{61}{7} - \frac{\frac{301}{360}}{\frac{7}{4}} = \frac{61}{7} - \frac{301 \cdot 4}{360 \cdot 7} = \frac{61 \cdot 90}{7 \cdot 90} - \frac{301}{90 \cdot 7} = \frac{5490 - 301}{630} = \frac{5189}{630}$$

Anmerkung: Auch die Angaben $a = 1\frac{3}{4}$, $a = 1{,}75$, $c = 8\frac{5}{7}$ und $d = 8\frac{149}{630}$ genügen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 3 - 180713
Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

Wenn nach einigen Jahren die Mutter viermal so alt wie Margit sein wird, wird die Großmutter doppelt so alt wie die Mutter sein.

Der Altersunterschied von 32 Jahren zwischen der Großmutter und der Mutter ändert sich nicht. Er wird also auch zu dem in der Aufgabe genannten späteren Zeitpunkt 32 betragen. Dann ist er aber, da laut Aufgabe die Großmutter das doppelte Alter der Mutter haben wird, gleich dem Alter der Mutter zu diesem Zeitpunkt. Sie wird demnach dann 32 Jahre alt sein, was in zwei Jahren eintreten wird. Wegen $32 : 4 = 8$ ist Margit zu diesem Zeitpunkt 8 Jahre alt; folglich ist sie jetzt 6 Jahre alt.

Aufgabe 4 - 180714
Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 lässt!

Ist p die gesuchte Primzahl, so ist $p - 1$ durch 5, 7 und 11 teilbar. Außerdem ist, da die einzige gerade Primzahl $p = 2$ die geforderten Eigenschaften nicht aufweist, p ungerade, also $p - 1$ auch durch 2 teilbar. Deshalb, und weil 2, 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, kommen für p nur um 1 vermehrte Vielfache von $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ in Frage.

Die Zahl 771 ist durch 3, die Zahl $2 \cdot 770 + 1 = 1541$ durch 23 teilbar. Die nächste derartige Zahl lautet $3 \cdot 770 + 1 = 2311$. Da sie weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47 teilbar ist und da $53^2 = 2809 > 2311$ ist, ist 2311 eine Primzahl.
2311 lässt bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1, daher ist sie die gesuchte Zahl.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen aus [5]

4.20.2 II. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180721
An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.
(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.
(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute $S = d$, dass Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; $S \neq b$ bedeute, dass Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; u.s.w.

Aus (1) und (2) folgt $S \neq b$ und $S \neq p$; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog $S \neq r$ und $S \neq m$. Wegen (1) muss daher $S = d$ und $S = g$ gelten.
Ebenfalls wegen (1) gilt $K \neq d$ und $K \neq g$, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen $K \neq b$ und $K \neq r$ folgen, gilt wegen (1) mithin $K = m$ und $K = p$.
Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich $U = r$ und $U = b$. Damit ist gezeigt, dass auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist:

Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte,
Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie,
Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

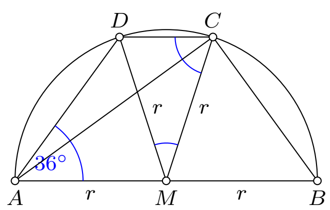
Aufgabe 2 - 180722
Von einem Bruch wird gefordert, dass er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.
(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$. Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$.
Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7|p + q$ gleichbedeutend ist.

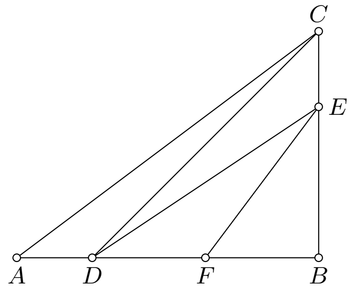
Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten. Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein. Tatsächlich erfüllt der Bruch beide Bedingungen.

Aufgabe 3 - 180723
In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, dass die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist. Außerdem sei $\angle MAC = 36°$.
Beweise, dass dann $\angle CMD = 36°$ ist!



Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $AM = MC = r$, also gilt $\angle MAC = \angle ACM = 36°$. (1)
Da $\angle DCA$ und $\angle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle DCA = \angle MAC = 36°$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $\angle DCA + \angle ACM = \angle DCM = 72°$. (3)
Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $MD = MC = r$; hiernach und wegen (3) gilt $\angle MDC = \angle DCM = 72°$. Daraus folgt $\angle CMD = 36°$.

Aufgabe 4 - 180724
Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:
$\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB, E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB.
Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $FB = 15$ cm und $BE = 20$ cm.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!



Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so dass für BD folgt:

$$\frac{1}{2} BD \cdot BE = 300 \text{ cm}^2, \text{ d.h. } BD = 30 \text{ cm}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung

$$\frac{1}{2} BC \cdot BD = 450 \text{ cm}^2, \text{ d.h. } BC = 30 \text{ cm.}$$

Analog folgt für AB:

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = 600 \text{ cm}^2, \text{ d.h. } AB = 40 \text{ cm.}$$

und somit $AD = AB - BD = 40$ cm - 30 cm = 10 cm. Die Länge der Strecke AD beträgt 10 cm.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

4.20.3 III. Runde 1978, Klasse 7

Aufgabe 1 - 180731
In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt:
"Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, dass unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße.
Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!"

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden.
Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Angenommen, es gibt eine Dirks Angaben entsprechende Verteilung der Getränke auf die Gefäße. Dann gibt es - da die Kanne nach dem Umstellen zwischen zwei anderen Gefäßen steht, wobei das Teegefäß jeweils unmittelbar links, das Milchgefäß unmittelbar rechts neben der Kanne steht, - genau die nachfolgend angegebenen drei Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gefäße:

(1)	Flasche	Tee	Kanne	Krug	Milch	Tasse	Becher
(2)	Flasche	Krug	Tee	Kanne	Tasse	Milch	Becher
(3)	Flasche	Krug	Tasse	Tee	Kanne	Becher	Milch

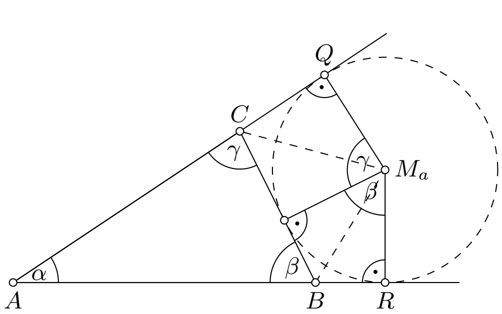
Die Möglichkeiten (1) und (3) scheiden aus, da sie der Angabe widersprechen, dass sich in dem in der Mitte stehenden Gefäß Kaffee befindet.
Somit verbleibt nur die Möglichkeit (2), und dabei ist nach der eben genannten Angabe die Kanne mit Kaffee gefüllt. Hiernach und da außerdem das Limonadengefäß unmittelbar neben dem Milchgefäß steht, verbleibt als einzig mögliche mit Dirks Angaben übereinstimmende Verteilung die folgende:

Die Flasche enthält Most, der Krug Tee, die Kanne Kaffee, die Tasse Milch und der Becher Limonade. Für diese Verteilung treffen alle von Dirk gemachten Angaben zu. Sie ist daher die einzige Verteilung der gesuchten Art.

Aufgabe 2 - 180732
Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k "Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)".

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:
"Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab."

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!



Es seien β, γ die Größen von $\angle ABC$ bzw. $\angle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R.
Dann gilt für die Nebenwinkel von $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$: $\angle CBR = 180° - \beta$ und $\angle BCQ = 180° - \gamma$.
Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\angle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt: $\angle CBM_a = 90° - \frac{\beta}{2}$. Entsprechend gilt $\angle BCM_a = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

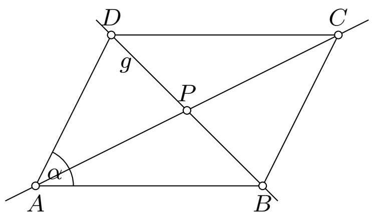
$$\angle BM_aC = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt: $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, also $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, woraus dann $\angle BM_aC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ folgt.

Aufgabe 3 - 180733
Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.
Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, dass P der Mittelpunkt von BD ist!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A.

Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so dass P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d.h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2AP$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.
(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.
(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $AP = PC$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.

IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

Aufgabe 4 - 180734
In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wässrigen Lösung, d.h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.
Wie viel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

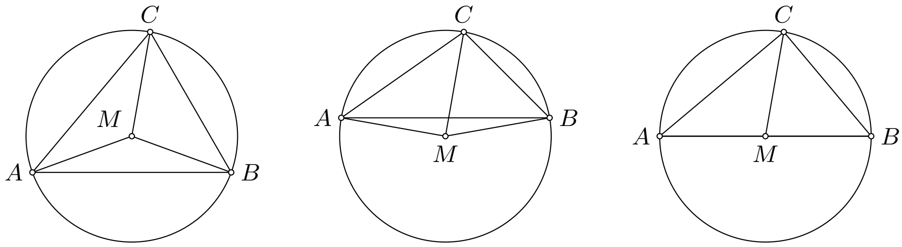
In der Ausgangslösung befinden sich genau 4% der gelösten Substanz, das ist bei 25 kg Lösung genau 1 kg. Diese Menge stellt nach dem Entzug einer Wassermenge genau dann 10% der neuen Lösung dar, wenn die neue Lösung insgesamt 10 kg umfasst.

Somit beträgt genau dann, wenn man der Ausgangslösung 15 kg Wasser entzogen hat, sein Anteil 90%, wie es gefordert war. Zu ermitteln ist demnach, wie viel Prozent von 24 kg Wasser 15 kg Wasser sind. Für diesen gesuchten Prozentsatz x gilt die Beziehung

$$x : 100\% = 15 : 24 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1500}{24}\% = 62{,}5\%$$

Demzufolge sind 62,5% des in der Ausgangslösung enthaltenen Wassers dieser Lösung zu entziehen, um eine neue Lösung mit 90% Wasseranteil zu erhalten.

Aufgabe 5 - 180735
In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.
Beweise, dass dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!



Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;
(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.

Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $MA = MB = MC = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

$$2r = MA + MB > AB \tag{1}$$
$$2r = MA + MC > AC \tag{2}$$
$$2r = MB + MC > BC \tag{3}$$

Durch Addition erhält man daraus (4) $6r > AB + AC + BC = u$, also $r > \frac{u}{6}$ Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 6 - 180736
Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:
Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

Angenommen, eine rationale Zahl a habe die genannte Eigenschaft. Dann gilt

$$a \cdot |a| = a + |a| \tag{1}$$

Für die Zahl a trifft nun genau einer der folgenden zwei Fälle zu:

1. Fall: $a \geq 0$.
Dann gilt $|a| = a$, also folgt aus (1) (2) $a^2 = 2a$. Hiernach verbleiben im 1. Fall nur die Möglichkeiten, dass entweder $a = 0$ gilt oder, falls $a \neq 0$ ist, aus (2) weiter $a = 2$ folgt.

2. Fall: $a < 0$.
Dann gilt $|a| = -a$, und es folgt einerseits $a \cdot |a| \neq 0$, andererseits $a + |a| = 0$. Die Annahme, dass a die Eigenschaft (1) hat, führt somit im 2. Fall auf einen Widerspruch.
Folglich können nur die beiden Zahlen 0 und 2 die genannte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt $0 \cdot |0| = 0 = 0 + |0|$ sowie $2 \cdot |2| = 4 = 2 + |2|$. Also sind genau die Zahlen 0 und 2 die gesuchten Zahlen.

Lösungen der III. Runde 1978 übernommen aus [5]

4.21 XIX. Olympiade 1979

4.21.1 I. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190711
Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, dass von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Das Volumen des Grabens der ersten Gruppe beträgt $(3 \cdot 6 \cdot 200)$ dm^3 = 3600 dm^3; für jeden der 8 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (3600 : 8) dm^3 = 450 dm^3 auszuheben.
Das Volumen des Grabens der zweiten Gruppe beträgt $(2{,}5 \cdot 5 \cdot 220)$ dm^3 = 2750 dm^3; für jeden der 6 Schüler dieser Gruppe ist daher ein Volumen von (2750 : 6) dm^3 = $458\frac{1}{3}$ dm^3 auszuheben.
Hat jeder der Schüler so lange gearbeitet, bis er 458 dm^3 ausgehoben hat, so ist die erste Gruppe fertig, die zweite noch nicht. Daher benötigt die erste Gruppe weniger Zeit als die zweite.

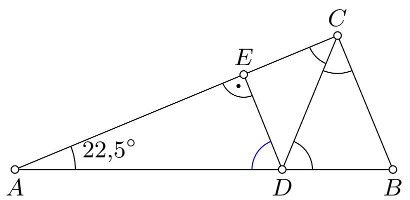
Aufgabe 2 - 190712
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch die angegebenen Zahlen teilbar, wenn sie durch deren kgV teilbar ist. Wegen der Primfaktorzerlegung

$$\begin{array}{cccc} 2 = 2 & 5 = 5 & 8 = 23 & 12 = 22 \cdot 3 \\ 3 = 3 & 6 = 2 \cdot 3 & 9 = 32 & 14 = 2 \cdot 7 \\ 4 = 22 & 7 = 7 & 10 = 2 \cdot 5 & 15 = 3 \cdot 5 \end{array}$$

ist dieses kgV die Zahl $23 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Alle (von 0 verschiedenen) natürlichen Vielfachen dieser Zahl sind: Die Zahlen $1 \cdot 2520 = 2520$, $2 \cdot 2520 = 5040$, $3 \cdot 2520 = 7560$ sowie alle Zahlen $n \cdot 2520$ mit natürlichem $n \geq 4$.
Für jedes $n \geq 4$ gilt aber: Wegen $n \cdot 2520 \geq 4 \cdot 2520 = 10080$ ist die Zahl $n \cdot 2520$ nicht vierstellig.
Daher erfüllen genau die Zahlen 2520, 5040 und 7560 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 3 - 190713
Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.
Beweise hierfür die folgende Aussage:
Wenn $\angle CAB = 22{,}5°$ ist, dann gilt $\angle ADE = \angle CDB$!



Aus $\angle EAD = \angle CAB = 22{,}5°$ und $\angle AED = 90°$ folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle ADE = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$.
Aus $\angle CAB = 22,5°$ und $\angle ACB = 90°$ folgt ebenso $\angle ABC = 67,5°$. Ferner ist nach Voraussetzung $\angle BCD = 90°2 = 45°$; hieraus und aus $\angle DBC = \angle ABC = 67,5°$ folgt wiederum nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck: $\angle CDB = 180° - 67,5° - 45° = 67,5°$.
Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 190714
Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.
(5) Helga spendete 2 M weniger als Frank, Peter 2 M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wie viel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

Es seien f, g, h, i, k, p die von Frank, Gisela, Helga, Inga, Konrad bzw. Peter gespendeten Geldbeträge in Mark. Aus den Angaben der Aufgabenstellung folgt damit:

(7) $h > g > p$, $f > h > k > p > i$ aus (2), (3), (4)
(8) $f = h + 2$, $p = i + 2$ aus (5)
(9) $f \leq 12$, $i \geq 6$ aus (1)
(10) $h \leq 10$, $p \geq 8$ aus (8)
(11) Wäre in (9) sogar $f < 12$ oder $i > 6$ so folgte aus (8) $h < 10$ oder $p > 8$;

unter der Bedingung (10) kann jedoch $h > g > p$ durch keine ganze Zahl g erfüllt werden. Daher scheidet dieser Fall aus,

(12) d.h. in (9) muss $f = 12, i = 6$ gelten.
(13) Somit folgt aus (8) $h = 10$, $p = 8$;
(14) hiernach können die Ungleichungen $h > g > p$ und $h > k > p$ ganzzahlig nur durch $g = 9$, $k = 9$ erfüllt werden.

Da die somit ermittelten Spenden [(12), (13), (14)] die Hälfte der erhaltenen Beträge waren, folgt: Frank erhielt 24 M, Gisela 18 M, Helga 20 M, Inge 12 M, Konrad 18 M und Peter 16 M.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen aus [5]

4.21.2 II. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190721
Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt: (4) Hans ist mit Rita verheiratet.

Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt: (5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.

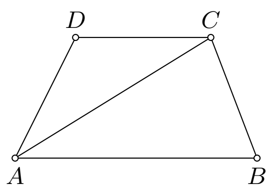
Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt: (6) Peter ist mit Erika verheiratet.

Aus (4), (5), (6) folgt schließlich: (7) Klaus ist mit Simone verheiratet.

Damit ist gezeigt, dass für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

Aufgabe 2 - 190722
a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung $CD = AD$ (1) gilt, dann gilt die folgende Aussage (2): Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\angle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).



a) Wegen $AB \parallel CD$ sind $\angle ACD$ und $\angle CAB$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt: $\angle ACD = \angle CAB$ (3).

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleichgroß, also gilt: $\angle ACD = \angle CAD$ (4). Aus (3) und (4) folgt $\angle CAB = \angle CAD$.

b) Aus $AB \parallel CD$ folgt wie eben (3). Wegen (2) gilt $\angle CAB = \angle CAD$ (5). Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; d.h., es gilt (1).

Aufgabe 3 - 190723
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d.h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt: Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a < 10$, also $a < 5$. Die folgende Tabelle enthält für die verbleibenden Möglichkeiten $a = 1, 2, 3, 4$ die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z.

Hunderterziffer a	Zehnerziffer	Einerziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl $z = 234$ aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117 = 3 \cdot 39$ keine Primzahl ist. Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, dass sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.
Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

Aufgabe 4 - 190724
Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt.
Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in km h ausgedrückt?
c) Wie viel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

a) Der Kraftfahrer benötigte wegen $20 + 30 + 12 + 4 = 66$ bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.

b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66 - 30 - 4 = 32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40 : \frac{8}{15}$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mithin 75 $\frac{km}{h}$.

c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden benötigte, legte er dabei wegen $75 \cdot \frac{11}{10} = 82{,}5$ noch weitere 82,5 km zurück. Mithin hatte er von A nach B insgesamt 40 km + 82,5 km = 122,5 km zurückgelegt.

Lösungen der II. Runde 1979 übernommen aus [5]

4.21.3 III. Runde 1979, Klasse 7

Aufgabe 1 - 190731
Ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

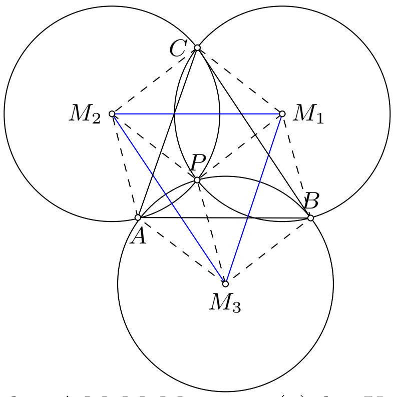
Angenommen, für ein Paar $(x; y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt $y = 3x - 1$ (1) und $6x \cdot 4y = 1680$, also $xy = 70$ (2).
Wie man (bei Beachtung von $70 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt: (1;70), (2;35), (5;14), (7;10), (10;7), (14;5), (35;2), (70;1).

Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14 = 3 \cdot 5 - 1$ und $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 14 = 30 \cdot 56 = 1680$.

Aufgabe 2 - 190732
Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.
k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.
k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!



Nach Voraussetzung gilt

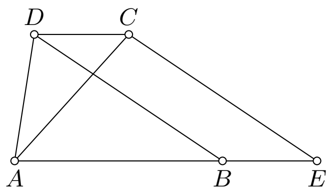
$$PM_1 = PM_2 = PM_3 = AM_2 = AM_3 = BM_3 = \\ = BM_1 = CM_1 = CM_2 = r \quad (1)$$

Daher sind PM_2AM_3, PM_3BM_1, PM_1CM_2 Rhomben. Also gilt $BM_3 \parallel M_1P \parallel CM_2$, $CM_1 \parallel M_2P \parallel AM_3$, $AM_2 \parallel M_3P \parallel BM_1$.
Hiernach und wegen (1) sind BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2 Parallelogramme, also gilt $BC = M_2M_3$, $CA = M_3M_1$, $AB = M_1M_2$. Folglich ist $\triangle ABC = \triangle M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).

Nun hat $\triangle M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um P mit r als Umkreis. Also hat das zu $\triangle M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck ABC ebenfalls r als Umkreisradius.

Aufgabe 3 - 190733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $e = 4{,}5$ cm, $f = 6{,}0$ cm!
Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften.
Dann schneidet die Parallele durch C zu BD die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt. Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $EC = BD$ und $BE = DC$.
Somit hat $\triangle AEC$ die Seitenlängen $AC = e$, $EC = f$ und $AE = AB + BE = a + c$.



II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man verlängert AB über B hinaus um c; der erhaltene Endpunkt sei E.
(3) Man konstruiert den Kreis um A mit e und den Kreis um E mit f. Schneiden sie sich, so sei C einer ihrer Schnittpunkte.
(4) Man konstruiert die Parallele durch C zu AB und die Parallele durch B auf EC. Schneiden sie sich, so sei D ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $AB = a$ und $AC = e$. Nach (2) und (3) ist ferner $BE = c$, $BC = f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $DC = BE = c$ und $BD = EC = f$.

IV. Da für die gegebenen a, c, e, f je zwei der Längen $e, f, a + c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck AEC; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 190734
Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG "Bildende Kunst" teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, dass mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:
Aus den Informationen folgt, dass mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG "Bildende Kunst", Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, dass aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, dass Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, dass Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

a) Da $60\% = \frac{3}{5}, 66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muss die gesuchte Anzahl z durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $35 \cdot 30 = 18, 23 \cdot 30 = 20, 12 \cdot 30 = 15$nehmen genau 18 Schüler an der AG "Bildende Kunst" teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, dass mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, dass mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z.B. folgende Verteilung möglich:

Von den 18 Teilnehmern der AG "Bildende Kunst" gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek.

Damit ist bewiesen, dass Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das eben genannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, dass kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

Aufgabe 5 - 190735
Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus.
Nach dem Einkauf stellt sie fest, dass sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit x, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18 - x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit

$$(2x + (18 - x) \cdot 0{,}5) \text{ Mark } = (1,5x + 9) \text{ Mark}$$

Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0{,}75x+4{,}5)$ Mark. Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18 - x)$ Zweimarkstücken und x Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt

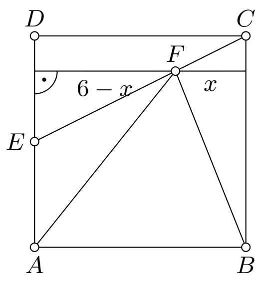
$$0{,}75x + 4,5 = 2(18 - x) + 0{,}5x = 36 - 1{,}5x$$

woraus man $2,25x = 31,5$, also $x = 14$ erhält.

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

2. Lösungsweg:
Hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau p Mark, so hatte sie vorher genau $2p$ Mark. Würde man ebenso viele Geldstücke (jeweils der gleichen Werte), wie sie vorher hatte, und dazu noch ebenso viele, wie sie nachher hatte, nebeneinanderlegen, so wären das einerseits genau 18 Zweimarkstücke und 18 Fünfzigpfennigstücke, also $(36 + 9)$ Mark $= 45$ Mark; andererseits wären es $(2p + p)$ Mark $= 3p$Mark.
Daher gilt $3p = 45$, also $p = 15$.
Folglich hatte Cathrin nach dem Einkauf noch genau 15 Mark.

Aufgabe 6 - 190736
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!



Das Lot von F auf CB habe die Länge x cm, das Lot von F auf AD hat dann die Länge $(6 - x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke AFE und BCF gleich sind und E Mittelpunkt von AD ist, gilt

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6 - x) = \frac{1}{2} \cdot 6x \qquad \text{also} \qquad x = 2$$

folgt.
Für die Flächeninhalte A_{ABF}, A_{ECD}, A_{BCF}, A_{ABCD} der Dreiecke ABF, ECD, BCF bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

$$A_{ABF} = A_{ABCD} - A_{ECD} - 2A_{BCF} \qquad A_{ABCD} = 36 \text{ cm}^2$$
$$A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2 \qquad A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$$

Folglich ist $A_{ABF} = 15 \text{ cm}^2$.

Lösungen der III. Runde 1979 übernommen aus [5]

4.22 XX. Olympiade 1980

4.22.1 I. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200711
Anlässlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

Es sei n die Anzahl der Preisträger. Zählt man für jeden Preisträger die Händedrücke, die er mit den anderen Preisträgern ausführte, und addiert die erhaltenen Zahlen, so ergibt sich die Summe von n Summanden $n-1$, also die Zahl $n\cdot(n-1)$.
In dieser Zahl ist jeder der insgesamt auftretenden Händedrücke genau zweimal erfasst (nämlich in den Abzählungen für jeden der beiden Partner des betreffenden Händedrucks). Folglich ist die Anzahl aller Händedrücke gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$.
Daher gilt $\frac{1}{2}n(n-1) = 91$, also $(n-1)n = 182$.

Erste Fortsetzungsmöglichkeit: Wegen der Primzerlegung $182 = 2\cdot 7\cdot 13$ hat 182 in natürlichen Zahlen bis auf die Reihenfolge nur die Faktorzerlegungen $182 = 1\cdot 182 = 2\cdot 91 = 7\cdot 26 = 13\cdot 14$. Davon ist nur $13\cdot 14$ eine Zerlegung in zwei Faktoren der Form $n-1$ und n. Also ist die gesuchte Anzahl $n = 14$.

Zweite Fortsetzungsmöglichkeit: Wäre $n < 14$, so wäre $(n-1)n < 13\cdot 14 = 182$; wäre $n > 14$, so wäre $(n-1)n > 13\cdot 14 = 182$. Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 14$.

Aufgabe 2 - 200712
Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v.u.Z.) stammt folgende Aufgabe:
Ein Wanderer stellt fest, dass ein Hirte 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: "Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?"
"Nein", antwortet der Hirte, "ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide."

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

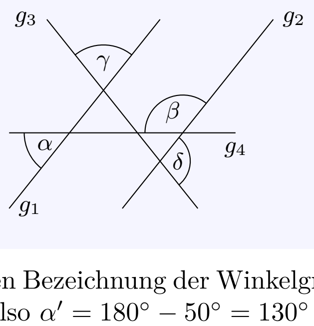
Ist x die gesuchte Stückzahl der gesamten Herde, so ist ein Drittel der Herde $\frac{x}{3}$, und zwei Drittel von diesem Drittel sind $\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}$. Daher gilt nach dem Aufgabentext:

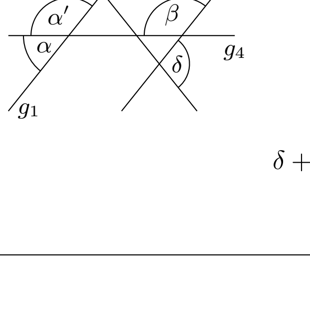
$$\frac{2}{3}\cdot 13 = 70 \qquad \text{also} \qquad x = 315$$

Die Stückzahl der gesamten Herde beträgt daher 315.

Aufgabe 3 - 200713

Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!

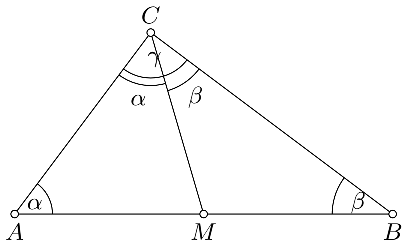




Mit der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnung der Winkelgrößen gilt $\alpha' = 180° - \alpha$ als Nebenwinkel, also $\alpha' = 180° - 50° = 130° = \beta$. Da α' und β die Größen von Stufenwinkeln an den geschnittenen Geraden g_1, und g_2 sind, gilt laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $g_1 \parallel g_2$. Ferner sind δ und γ die Größen von entgegengesetzt liegenden Winkeln an den geschnittenen Geraden g_1 und g_2. Da diese Geraden parallel sind, gilt

$$\delta + \gamma = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°$$

Aufgabe 4 - 200714
Beweise folgenden Satz:
Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $AM = BM = CM$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.



Es sei $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Nach Voraussetzung ist M der Mittelpunkt von AB, daher ist auch $\angle CAM = \alpha$ und $\angle MBC = \beta$.

Wegen $MA = MC$ ist das Dreieck ACM gleichschenklig mit $\angle ACM = \alpha$, wegen $MB = MC$ ist auch das Dreieck BCM gleichschenklig mit $\angle BCM = \beta$. Daher ist $\alpha + \beta = \gamma$.
Andererseits ist nach dem Winkelsummensatz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$.

Lösungen der I. Runde 1980 übernommen aus [5]

4.22.2 II. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200721
Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.
(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Die genannten Teilnehmer verstehen nach (2), da sie Ungarisch verstehen, auch die französische Sprache. Daher, und weil sie Russisch verstehen, gehören sie zu den in (1) genannten Teilnehmern; sie verstehen also Englisch.
Aus (2) folgt ferner, dass sie auch Deutsch verstehen. Also brauchen sie für keine der fünf Sprachen einen Dolmetscher.

Aufgabe 2 - 200722
Von einem Dreieck wird gefordert:
Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

a) 36% von 25 cm sind $36 \cdot \frac{25}{100}$ cm = 9 cm, 48% von 25 cm sind 12 cm.
Ferner gilt 25 cm - 9 cm - 12 cm = 4 cm. Da nun die Dreiecksungleichungen

$$12 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 9 \text{ cm}, \qquad 4 \text{ cm} + 9 \text{ cm} > 12 \text{ cm}, \qquad 9 \text{ cm} + 12 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$

erfüllt sind, gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 4$ cm. Dieses erfüllt die gestellten Forderungen.

b), c) Wenn eine Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftritt, das die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt: Die Zahl z ist eine natürliche Zahl, ferner ist auch $\frac{36}{100}z = \frac{9}{25}z$ eine natürliche Zahl, nämlich die Maßzahl von a.
Also ist $9z$ durch 25 teilbar. Da 9 zu 25 teilerfremd ist, ist mithin z durch 25 teilbar. Somit kann nur für $z = 25n$ mit natürlichem n die Länge $u = z$ cm als Umfang eines Dreiecks auftreten, das die gestellten Forderungen erfüllt.
Wegen der Forderung $z < 100$ kommen dabei nur Werte $n < 4$ in Betracht, d.h. die Längenangaben $u = 25$ cm, $u = 50$ cm, $u = 75$ cm.

Für jede solche Umfangsangabe gilt: 36% von $25n$ sind $9n$; 48% von $25n$ sind $12n$; ferner gilt $25n-9n-12n = 4n$. Wieder sind damit die Dreiecksungleichungen erfüllt, also gibt es zu diesen Umfangsangaben auch Dreiecke, die die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

Indem man für n die Werte 1, 2, 3 einsetzt, erhält man die gesuchten Seitenlangen, nämlich für $n = 1$ die Werte aus dem Aufgabenteil a) und für $n = 2$ zum Umfang $u = 50$ cm die Seitenlängen $a = 18$ cm, $b = 24$ cm, $c = 8$ cm bzw. für n = 3 zum Umfang $u = 75$ cm die Seitenlängen $a = 27$ cm, $b = 36$ cm, $c = 12$ cm.

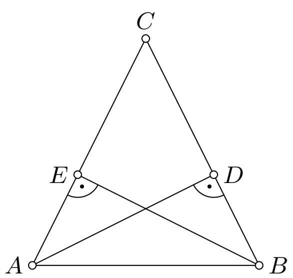
Aufgabe 3 - 200723
Jens sagt: "Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV) beträgt 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725."

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Die Primzerlegungen der genannten Zahlen sind:
kgV: $51975 = 33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11$,
ggT: $45 = 32 \cdot 5$,
erste Zahl: $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$.
Wenn eine natürliche Zahl z die zweite gedachte Zahl sein kann, so gilt für sie:
In ihrer Primzerlegung enthält sie höchstens solche Primzahlen, die im kgV vorkommen, also höchstens die Primzahlen 3, 5, 7, 11. Die Primzahl 3 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 2 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 2 als Faktor vorkommen.

Die Primzahl 5 kommt in 4725 in größerer Anzahl vor als im ggT, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Die Primzahl 7 kommt in 4725 vor, aber nicht im ggT Daher kann sie in z nicht auftreten. Die Primzahl 11 kommt nicht in 4725 vor, aber im kgV, wo sie in der Anzahl 1 auftritt. Daher muss sie in z in dieser Anzahl 1 als Faktor vorkommen.
Also kann höchstens die Zahl $z = 32 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ die zweite gedachte Zahl sein. Sie kann dies tatsächlich; denn $4725 = 33 \cdot 52 \cdot 7$ und $z = 32 \cdot 5 \cdot 11$ haben das kgV $33 \cdot 52 \cdot 7 \cdot 11 = 51975$ und den ggT $32 \cdot 5 = 45$.
Es gibt folglich genau eine natürliche Zahl, die die zweite gedachte Zahl sein kann: sie lautet 495.

Aufgabe 4 - 200724
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.
b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$.



a) Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, so folgt für die Höhen AD und BE, dass $\angle BAE = \angle ABD$ gilt, da diese Winkel mit den einander gleichgroßen Basiswinkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ übereinstimmen; denn wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC liegt der Höhenfußpunkt D zwischen B und C und der Höhenfußpunkt E zwischen A und C.
Ferner gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$. Daher sind die Dreiecke ABE und BAD nach dem Kongruenzsatz (sww) kongruent, woraus $BE = AD$ folgt.

b) Wenn für die Höhen AD und BE eines spitzwinkligen Dreiecks ABC $BE = AD$ gilt, so folgt:
Es gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$.
Ferner liegen die Winkel $\angle AEB$ bzw. $\angle BDA$ als rechte Winkel jeweils den größten Seiten in den Dreiecken ABE bzw. BAD gegenüber. Daher sind die Dreiecke ABE und ABD nach dem Kongruenzsatz (ssw) kongruent, woraus $\angle BAE = \angle ABD$ folgt.
Diese Winkel stimmen wiederum mit den Winkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ überein, also ist das Dreieck ABC wegen der gleichgroßen Innenwinkel bei A und B gleichschenklig mit $AB = BC$ ist.

Lösungen der II. Runde 1980 übernommen aus [5]

4.22.3 III. Runde 1980, Klasse 7

Aufgabe 1 - 200731
Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, dass sie sich in vier Summanden zerlegen lässt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Wenn eine natürliche Zahl z so in vier Summanden s_1, s_2, s_3, s_4 zerlegt ist, dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so gilt

$$z = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \quad (1) \qquad s_1 = \frac{2}{3}z \quad (2) \qquad s_2 = \frac{1}{4}s_1 \quad (3)$$
$$s_3 = \frac{4}{5}s_2 \quad (4) \qquad s_4 = \frac{1}{4}s_3 \quad (5) \qquad s_3 = 48 \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt (7) $s_4 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.
Aus (6) und (4) folgt (8) $48 = \frac{4}{5} \cdot s_2$, also $s_2 = \frac{5}{4}5 \cdot 48 = 60$.
Aus (8) und (3) folgt (9) $60 = \frac{1}{4} \cdot s_1$, also $s_1 = 4 \cdot 60 = 240$.
Aus (1) und (6) bis (9) folgt $z = 240 + 60 + 48 + 12 = 360$.
Daher kann nur die Zahl $z = 360$ und ihre Zerlegung in $s_1 = 240$, $s_2 = 60$, $s_3 = 48$, $s_4 = 12$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 2 - 200732
Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.
b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!
c) Berechne, wie viel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind!
(Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen der drei ausgewählten Strecken seien jedesmal a, b, c genannt. Wegen der Unabhängigkeit von ihrer Reihenfolge kann dabei $a < b < c$ angenommen werden. Mit diesen Bezeichnungen gibt es genau die in der folgenden Tabelle in den Spalten a, b, c angegebenen Auswahlmöglichkeiten. Aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen kann genau dann ein Dreieck konstruiert werden, wenn die drei Dreiecksungleichungen

$$a + b > c \quad (1) \qquad b + c > a \quad (2) \qquad c + a > b \quad (3)$$

gelten. Wegen $a < b < c$ sind (2) und (3) stets erfüllt. In der letzten Spalte der folgenden Tabelle ist jeweils angegeben, ob auch (1) erfüllt ist.

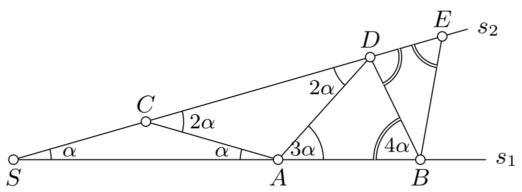
a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?
1	3	5	Nein	1	3	7	Nein	1	3	9	Nein
1	3	11	Nein	1	3	15	Nein	1	5	7	Nein
1	5	9	Nein	1	5	11	Nein	1	5	15	Nein
1	7	9	Nein	1	7	11	Nein	1	7	15	Nein
1	9	11	Nein	1	9	15	Nein	1	11	15	Nein
3	5	7	Ja	3	5	9	Nein	3	5	11	Nein

a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?	a	b	c	Gilt $a+b>c$?
3	5	15	Nein	3	7	9	Ja	3	7	11	Nein
3	7	15	Nein	3	9	11	Ja	3	9	15	Nein
3	11	15	Nein	5	7	9	Ja	5	7	11	Ja
5	7	15	Nein	5	9	11	Ja	5	9	15	Nein
5	11	15	Ja	7	9	11	Ja	7	9	15	Ja
7	11	15	Ja	9	11	15	Ja				

Daraus folgt:
Die in a) gesuchte Anzahl beträgt 35, die in b) gesuchte Anzahl beträgt 11, der in c) gesuchte Prozentsatz beträgt $11 \cdot 10035\% \approx 31{,}4\%$.

Aufgabe 3 - 200733
Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, dass auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und dass auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist $SC = CA = AD = DB = BE$ und $SB = SE$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BSE$!



Aus den Voraussetzungen folgt
$\angle CAS = \angle ASC = \alpha$ da $\triangle ACS$ gleichschenklig mit $AC = CS$ ist,
$\angle ACD = \angle CAS + \angle ASC = 2\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ACS,
$\angle ADC = \angle ACD = 2\alpha$ da $\triangle ACD$ gleichschenklig mit $AC = AD$ ist,
$\angle BAD = \angle ADC + \angle ASC = 3\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ADS,
$\angle ABD = \angle DAB = 3\alpha$ da $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AD = BD$ ist,
$\angle BDE = \angle ABD + \angle ASC = 4\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks BDS,
$\angle BED = \angle BDE = 4\alpha$ da $\triangle BDE$ gleichschenklig mit $BD = BE$ ist,
$\angle EBS = \angle BED = 4\alpha$ da $\triangle BES$ gleichschenklig mit $BS = ES$ ist,
sowie aus der Winkelsumme im Dreieck BES:

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = \angle BSE + \angle BED + \angle EBS = 180^\circ \qquad \text{und damit} \quad \alpha = 20^\circ$$

Aufgabe 4 - 200734
Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund:
"In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Sind a, b, c, d Horsts Angaben entsprechende Anzahlen der Wettkämpfe im 1., 2., 3. bzw. 4. Jahr, so gilt

$$0 < a < b < c < d \qquad (1)$$
$$d = 3a \qquad (2)$$
$$a + b + c + d = 21 \qquad (3)$$

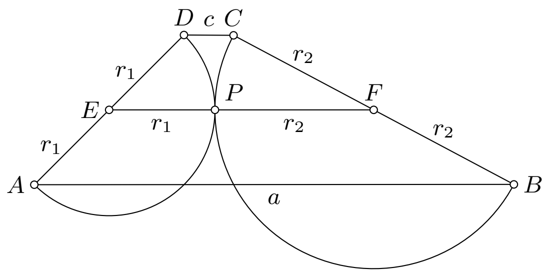
Wäre $a \geq 4$, so folgte aus (1), dass $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, also $a + b + c + d \geq 22$ wäre, im Widerspruch zu (3).
Wäre $a \leq 2$, so folgte aus (2), dass $d \leq 6$ wäre; aus (1) folgte dann $c \leq 5$, $b \leq 4$, also $a + b + c + d \leq 17$, in Widerspruch zu (3). Also muss $a = 3$ (4) sein.

Nach (2) folgt $d = 9$ (5), nach (1) folgt $b \geq 4$ (6).
Wäre $b > 4$, so folgte aus (2), dass $c > 5$, also $a + b + c + d > 21$ wäre, im Widerspruch zu (3). Daher muss $b = 4$ (6) sein, und aus (3), (4), (S), (6) folgt $c = 5$.

Also können nur die Anzahlen 3 Wettkämpfe im ersten Jahr, 4 Wettkämpfe im zweiten Jahr, 5 Wettkämpfe im dritten Jahr, 9 Wettkämpfe im vierten Jahr Horsts Angaben entsprechen (7).

Sie entsprechen ihnen; denn es gilt $0 < 3 < 4 < 5 < 9$; $9 = 3 \cdot 3$; $3 + 4 + 5 + 9 = 21$. Daher gibt es Anzahlen, die Horsts Angaben entsprechen, sie gehen eindeutig aus den Angaben hervor und lauten wie in (7) angegeben.

Aufgabe 5 - 200735
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!



Die Mittelpunkte der genannten Kreise seien E bzw. F, ihre Radien r_1 bzw. r_2. Da EF die Mittellinie des Trapezes ist, gilt $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.
Ferner ist EF die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier sich von außen berührender Kreise mit den Radien r_1, r_2, also gilt $EF = r_1 + r_2$. Daraus folgt $AB + CD = 2 \cdot EF = 2(r1 + r2)$.
Andererseits haben die Durchmesser AD bzw. BC der genannten Kreise die Längen $AD = 2r_1$, $BC = 2r_2$.

Somit gilt $AD + BC = 2r_1 + 2r_2 = 2(r_1 + r_2) = AB + CD$.

Aufgabe 6 - 200736
In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe "Mathematische Schülerbücherei".
Außerdem ergab sich aus Gesprächen, dass genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

Sind a, b, c die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, 7, 8 in dieser Reihenfolge, so folgt aus den Angaben:
Es sind a und b durch 3 teilbar, c ist durch 4 teilbar, außerdem ist b durch 10 teilbar. Da 3 und 10 teilerfremd sind, ist folglich b durch 30 teilbar. Also gibt es natürliche Zahlen p, q, r mit $a = 3p$, $b = 30q$, $c = 4r$ (1); dabei sind p, q, r ebenso wie a, b, c von 0 verschieden.

Aus (1) und der Angabe über die Gesamtzahl der Schüler folgt $3p + 30q + 4r = 85$ (2); aus (1) und der Angabe über die Anzahl derjenigen Schüler, die Bücher aus der "Mathematischen Schülerbücherei" entliehen hatten, folgt $p + 10q + r = 26$ (3).

Wegen (2) kann nur $q = 1$ oder $q = 2$ sein. Wäre $q = 2$, dann folgte aus (3): $p + r = 6$ und aus (2) weiterhin $3p + 4r = 3p + 3r + r = 3(p + r) + r = 25$. Wegen $p + r = 6$ gilt $1 \leq p \leq 5$ und $1 \leq r \leq 5$. Aus $3(p + r) + r = 3 \cdot 6 + r = 25$ folgte aber $r = 7$, im Widerspruch zu $r \leq 5$.
Also ist $q = 1$ und mithin $p + r = 16$ sowie $3p + 4r = 3(p + r) + r = 55$. Daraus folgt $3 \cdot 16 + r = 55$ und schließlich $r = 7$ sowie $p = 9$. Damit ist gezeigt, dass aus den Angaben der Aufgabe eindeutig hervorgeht:

Die Anzahlen der Schüler der Klassenstufen 6, 7 bzw. 8 betragen 27, 30 bzw. 28.

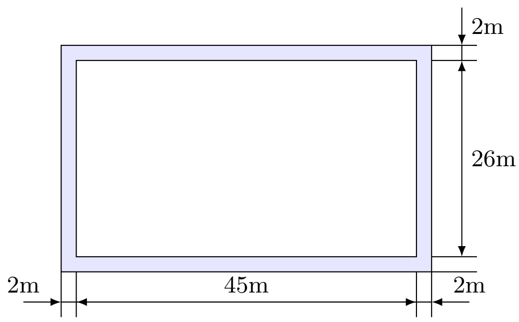
Lösungen der III. Runde 1980 übernommen aus [5]

4.23 XXI. Olympiade 1981

4.23.1 I. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210711
Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden.
Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wie viel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?



a) Der Flächeninhalt des Weges ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Rasens von dem Flächeninhalt des Rechtecks subtrahiert, den Weg und Rasen zusammen einnehmen. Dessen Seitenlängen sind jeweils um 4 m länger als die Seitenlängen 45 m bzw. 26 m des Rasens; sie betragen also 49 m bzw. 30 m.

Daher beträgt der gesuchte Flächeninhalt 49 m $\cdot$ 30 m - 45 m $\cdot$ 26 m = 1470 m^2 - 1170 m^2 = 300 m^2.

Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man die Fläche des Weges aus Teilflächen zusammensetzt. Die in der Abbildung dargestellte Zusammensetzung z.B. führt auf $2 \cdot 49\text{ m} \cdot 2\text{ m} + 2 \cdot 26\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 196\text{ m}^2 + 104\text{ m}^2 = 300\text{ m}^2$.

b) Wegen $300 \cdot 16 = 4800$ sind insgesamt 4800 Platten erforderlich.

Aufgabe 2 - 210712
Andreas sagt zu seinem Freund:
"Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen!
Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."
Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Wenn der Freund in der linken Hand eine gerade und in der rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Das erste Produkt ist gerade, weil einer seiner Faktoren gerade ist. Das zweite Produkt ist ungerade, weil beide Faktoren ungerade sind. Die Summe aus diesen beiden Produkten, einer geraden und einer ungeraden Zahl, ist folglich ungerade.

Wenn aber der Freund in der linken Hand eine ungerade Anzahl und in der rechten Hand eine gerade Anzahl von Hölzchen hat, so gilt:
Beide Produkte sind gerade; denn in jedem dieser Produkte kommt ein geradzahliger Faktor vor. Also ist auch ihre Summe eine gerade Zahl.
Daher kann man mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten: Wenn der Freund eine ungerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der linken Hand; wenn er aber eine gerade Zahl als Ergebnis nennt, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in der rechten Hand.

Aufgabe 3 - 210713
Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen. Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, dass Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, dass Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, dass keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, dass Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, dass Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, dass Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und dass Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Bezeichnet man für jede Schülerin ihre in Zentimeter gemessene Größe mit dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens, so lauten die Informationen:

(1) Es gilt $D = C - 2$.
(2) Es gilt $A = G$.
(3) Es gilt mindestens eine der Ungleichungen $A < F, B < F, C < F, D < F, E < F, G < F$.
(4) Es gilt $E < D$ und $E > F$.
(5) Es gilt $F \leq C$. (6) Es gilt $C = G + 2$ und $C > E$.

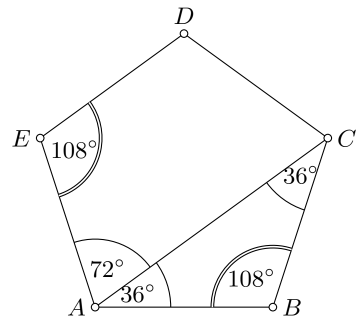
I. Angenommen, bei einer Reihenfolge der Schülerinnen treffen alle Informationen (1) bis (6) zu.
(7) Aus (1) und (6) folgt dann $D = G = C - 2$.
(8) Aus (2) und (7) folgt $A = D = G$.
(9) Aus (1), (4) und (8) folgt $C > A = D = G > E > F$.
(10) Aus (3) und (9) folgt $B < F$.
Daher können nur bei der Reihenfolge $C > A = D = G > E > F > B$ alle Informationen (1) bis (6) zutreffen.

II. Wenn diese Reihenfolge vorliegt und überdies $A = D = G = C - 2$ ist, so gilt:
Es ist $D = C - 2$, also ist (1) erfüllt.
Es ist $A = G$, also ist (2) erfüllt.
Es ist $B < F$, also ist (3) erfüllt.
Es ist $E < D$ und $E > F$, also ist (4) erfüllt.
Es ist $F < C$, also ist (5) erfüllt.
Es ist $C = G + 2$ und $C > E$, also ist (6) erfüllt.
Damit ist bewiesen, dass es genau eine Reihenfolge gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen. Sie lautet wie in (10) angegeben.

Aufgabe 4 - 210714
In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, dass diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

1. Lösungsweg:
Die Bezeichnung der Ecken des Fünfecks kann so gewählt werden, dass AC die zu betrachtende Diagonale ist. Da die Winkelsumme im n-Eck stets $(n - 2) \cdot 180°$ beträgt, hat jeder der Innenwinkel des Fünfecks $ABCDE$ (siehe Abbildung) die Größe

$$\frac{1}{5} \cdot (5 - 2) \cdot 180° = 108°$$



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AB = BC$. Daher gilt $\angle BAC = \angle BCA$, nach dem Innenwinkelsatz also $\angle BAC = \angle BCA = 12(180° - 108°) = 36°$.
Daraus folgt $\angle CAE = 108° - 36° = 72°$.
Also ergänzen sich $\angle CAE$ und $\angle AED$ zu 180°. Da sie (für die Gerade durch A, E, die von AC und ED geschnitten wird) entgegengesetzt liegende Winkel sind, folgt hieraus $AC \parallel ED$.

2. Lösungsweg:
Die Innenwinkel des Fünfecks bei E und D sind einander gleichgroß, d.h. es gilt (1) $\angle AED = \angle CDE$. Ebenso ist $\angle BAE = \angle BCD$. Wegen $AB = BC$ gilt ferner $\angle BAC = \angle BCA$. Daraus folgt durch Subtraktion (2) $\angle CAE = \angle ACD$.
Ferner beträgt im Viereck $ACDE$ die Innenwinkelsumme 360°. Hieraus und aus (1), (2) folgt

$$360° = \angle CAE + \angle ACD + \angle CDE + \angle AED = 2\angle CAE + 2\angle AED$$

Daher gilt $\angle CAE + \angle AED = 180°$. Wie im 1. Lösungsweg folgt hieraus $AC \parallel ED$.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen aus [5]

4.23.2 II. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210721
a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.
Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.
Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wie viel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, dass der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird.
(Es ist auf volle Meter zu runden.)

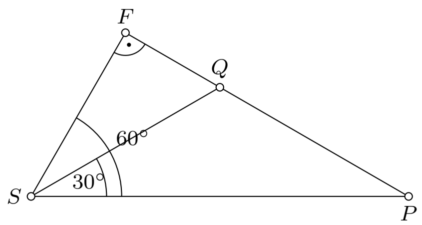
Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

a) Das erste Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 270 m, wegen $105 \cdot 270 = 28350$ also den Flächeninhalt 28350 m^2, d.h. in der angegebenen Weise gerundet 2,84 ha.
Das zweite Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 180 m, wegen $105 \cdot 180 = 18900$ also den Flächeninhalt 18900 m^2, d.h. 1,89 ha.

b) Das gesamte Flurstück hat die Länge 105 m und wegen $270 + 3 + 180 = 453$ die Breite 453 m, wegen $105 \cdot 453 = 47565$ also den Flächeninhalt 47565 m^2, d.h. gerundet 4,76 ha.

c) Das gesamte Flurstück hat wegen $2 \cdot (105 + 453) = 2 \cdot 558 = 1116$ den Umfang 1116 m. Für den Zaun werden wegen $2 \cdot 1116 = 2232$ und wegen $2232 : 100 = 22{,}32$ sowie $2232 + 22{,}32 = 2254{,}32$ daher gerundet 2254 m Draht gebraucht.

Aufgabe 2 - 210722
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.
Beweise, dass Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!



Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel sei F.
Nach Voraussetzung ist $\angle FSP = 60°$ und $\angle PFS = 90°$; wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Dreieck SPF, folgt $\angle SPF = 30°$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\angle QSP = 30°$; also ist das Dreieck SPQ gleichschenklig mit $SQ = PQ$.
Folglich ist Q ein Punkt der Mittelsenkrechten von SP.

Aufgabe 3 - 210723
Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

(1) Es gibt natürliche Zahlen m, n mit $a = 15m$, $b = 15n$.
(2) Wegen $0 < a < b$ folgt $0 < m < n$,
(3) wegen $ab = 7875$ folgt $15m \cdot 15n = 7875$, also $225mn = 7875$, $mn = 35$. (3)

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, dass entweder $m = 1$, $n = 35$ oder $m = 5$, $n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, dass nur die Paare (15; 525), (75; 105) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $0 < 15 < 525$, $0 < 75 < 105$; wegen der Primfaktorzerlegungen $15 = 3 \cdot 5$, $525 = 3 \cdot 52 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 52$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $3 \cdot 5 = 15$ der ggT von 15 und 525 sowie auch der ggT von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7875$ und $75 \cdot 105 = 7875$.
Daher erfüllen genau die Paare (15; 525) und (75; 105) die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 210724

Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich ”Melancholie” ein ”magisches Quadrat” aus den Zahlen 1 bis 16, d.h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.
In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.
In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben. Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

16	3	2	13
			9
9			12
4			

Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 34.
Daraus folgt, dass die fehlende Zahl in der ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt. Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie lässt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile, beträgt 13, sie lässt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muss nun so erfolgen, dass auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur oder

11	10
7	6

oder

10	11
6	7

lauten. In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zelle 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

Lösungen der II. Runde 1981 übernommen aus [5]

4.23.3 III. Runde 1981, Klasse 7

Aufgabe 1 - 210731
In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: "An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate."
Beate: "An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate."
Christa: "An der Tafel ist genau ein Parallelogramm."
Detlev: "An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke."

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?
b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

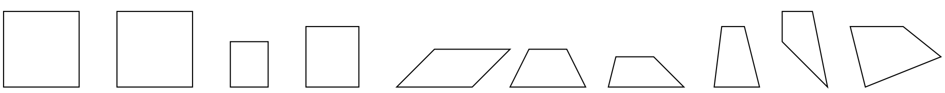
a) Angenommen, die Aussage von Axel wäre falsch.
Dann befände sich an der Wandtafel entweder kein oder genau ein Quadrat; ferner wären dann die anderen drei Aussagen wahr. In dem Fall, dass kein Quadrat an der Tafel wäre, folgte: Nach den wahren Aussagen von Beate und Detlev wäre kein Trapez an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Parallelogramm ein Trapez ist.

In dem Fall, dass genau ein Quadrat an der Tafel wäre, folgte:
Nach der Aussage von Beate wären zwei Rechtecke an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber nur ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.

Also ist Axels Aussage wahr; es befinden sich mindestens zwei Quadrate an der Tafel.
Daher und weil jedes Quadrat ein Parallelogramm ist, ist Christas Aussage falsch. Die Aussagen von Beate und Detlev sind somit wahr.

b) Wären mindestens drei Quadrate an der Tafel, so wären folglich mindestens zwölf Trapeze an der Tafel. Das ist ein Widerspruch, da nur zehn Vierecke gezeichnet wurden.
Daher waren genau zwei Quadrate an der Tafel. Hiernach waren genau vier Rechtecke an der Tafel. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, waren es also außer den zwei Quadraten noch genau zwei Rechtecke, die nicht Quadrate waren. Ferner waren genau acht Trapeze an der Tafel. Da jedes Rechteck ein Trapez ist, waren es also außer den vier Rechtecken noch genau vier Trapeze, die nicht Rechtecke waren. Schließlich waren somit von den zehn Vierecken außer den acht Trapezen genau zwei Vierecke, die nicht Trapeze waren.

c) Ein mögliches Tafelbild für diese Mathematikstunde ist:



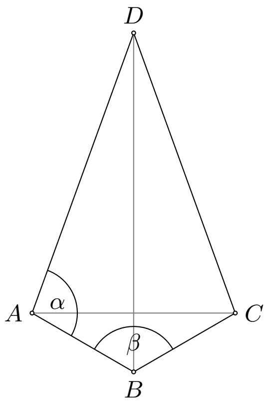
Aufgabe 2 - 210732
Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Wenn ein Paar $(x; y)$ rationaler Zahlen den Bedingungen der Aufgabe genügt, dann gilt

(1) $x + y = x \cdot y$ und
(2) $x + y = x : y$.

Aus (1) und (2) folgt (3) $x \cdot y = x : y$.
Wäre $x = 0$, so wäre nach (1) auch $y = 0$ im Widerspruch zur Existenz von $x : y$. Also kann man (3) durch x dividieren und erhält $y = \frac{1}{y}$.
Die einzigen rationalen Zahlen, die gleich ihrem Kehrwert sind, sind die Zahlen +1 und -1. Wäre $y = +1$, so ergäbe (1) den Widerspruch $x + 1 = x$. Also ist $y = -1$ und damit nach (1) $x - 1 = x$, also $x = \frac{1}{2}$
Daher kann nur das Paar $(\frac{1}{2}; -1)$ den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 3 - 210733
Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3{,}1$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge $AB = BC$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAD$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Drachenviereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung). Im Teildreieck ABC sind dann die Seitenlängen AB, BC und die Größe des eingeschlossenen Winkels $\angle ABC$ gegeben. Ferner ist BD Spiegelachse des Drachenvierecks $ABCD$, und es gilt $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$.
(Wegen $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$ hat $ABCD$ weder bei B noch bei C eine einspringende Ecke. Also liegt D auf derselben Seite der Geraden durch A, B wie C und auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.)

Daraus folgt, dass ein Drachenviereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen $AB = BC = a$ und der Winkelgröße $\angle ABC = \beta$.
(2) In A bzw. C trage man an AB bzw. BC jeweils einen Winkel der Größe α an (jeweils nach derjenigen Seite von AB bzw. BC, auf der der Punkt C bzw. A liegt). Ist D Schnittpunkt der freien Schenkel dieser beiden Winkel, so ist damit ein Viereck $ABCD$ konstruiert.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (1) gilt $AB = BC$. Nach (2) ist $\angle BAD = \angle BCD = 120°$ jeweils in den Dreiecken BAD bzw. BCD der größte Innenwinkel, liegt also der größten Seite gegenüber. Hiernach und wegen $BD = BD$ sind die Dreiecke BAD und BCD nach (ssw) kongruent, also ist $AD = CD$. Daher ist $ABCD$ ein Drachenviereck.

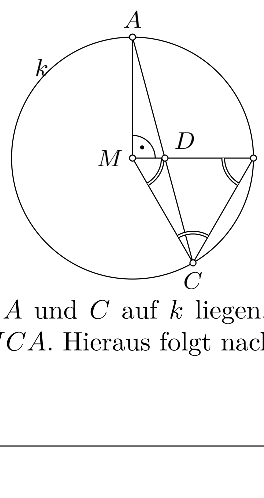
In ihm haben AB, BC und $\angle ABC$ nach (1) sowie $\angle BAD$ nach (2) die verlangten Größen.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Danach ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar und ergibt auch wegen $\beta + 2\alpha < 360°$ einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt D.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 210734
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.
(2) Es gilt $MB = BC$.
(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\angle CDB$!



Da B und C auf k liegen, gilt $MB = MC$; nach Voraussetzung ist aber auch $MB = BC$. Somit ist das Dreieck MCB gleichseitig, jeder seiner Innenwinkel beträgt mithin 60°.
Läge C auf dem von A nach B führenden Viertelkreisbogen von k, so würde die Gerade durch A und C die Strecke MB nicht schneiden. Also liegt C außerhalb dieses Viertelkreisbogens, und es gilt $\angle AMC = 90° + 60° = 150°$.

Da A und C auf k liegen, das Dreieck AMC also mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MAC = \angle MCA$. Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAC = \angle MCA = 12(180° - 150°) = 15°$.

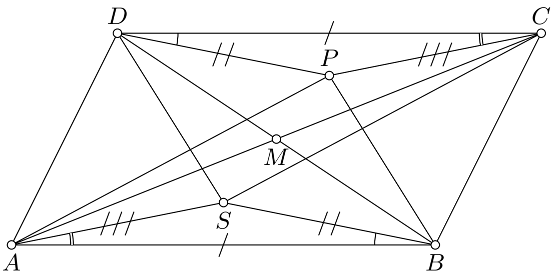
Somit ergibt sich nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck MCD

$$\angle CDB = \angle CMD + \angle MCD = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$$

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann auch $\angle CDB = \angle MDA$ (Scheitelwinkel), $\angle MDA = 90^\circ - 15^\circ$ (Innenwinkel im Dreieck ADM) verwenden.

Aufgabe 5 - 210735

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!



Das Viereck $DSBP$ ist auf Grund der Voraussetzungen ein Parallelogramm, und es gilt deshalb $SB = DP$, $SB \parallel DP$.
Aus $AB \parallel CD$ und $SB \parallel DP$ folgt $\angle SBA = \angle PDC$.
Wegen $AB = CD$ und $SB = DP$ und $\angle SBA = \angle PDC$ gilt (nach wsw) $\triangle ABS = \triangle CDP$.
Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $AS = CP$.

In analoger Weise lässt sich $AP = CS$ nachweisen.
Folglich ist das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm.

2. Lösungsweg:
M sei Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $ABCD$. Dann ist, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren, M auch Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $DSBP$. Mithin ist M gemeinsamer Halbierungspunkt von AC und SP, und $ASCP$ ist daher ein Viereck, in dem die Diagonalen einander halbieren, also ein Parallelogramm.

Aufgabe 6 - 210736

Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet 1,20 M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet 2,80 M. Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1000 g- Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.
Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1000 g-Flasche gekauft wird?

Die leere 200 g-Flasche koste x Mark. Daraus folgt: Die leere 500 g-Flasche kostet 50% mehr, also $\frac{3}{2} \cdot x$ Mark.
Ferner folgt:
Je 200 g der Flüssigkeit kosten $(1{,}20 - x)$ Mark,
je 500 g der Flüssigkeit kosten $(2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x)$ Mark.
Da der Preis für 500 g aber andererseits $\frac{5}{2}$ des Preises für 200 g betragen muss, ergibt sich

$$2{,}80 - \frac{3}{2} \cdot x = \frac{5}{2}(1{,}20 - x) = 3 - \frac{5}{2}x$$

woraus man $x = 0{,}20$ erhält.
Also kostet die leere 200 g-Flasche 0,20 M, die leere 500 g-Flasche mithin 0,30 M und schließlich die leere 1000 g-Flasche $\frac{3}{2} \cdot 0{,}30$ M $= 0{,}45$ M.
Folglich kosten fünf leere 200 g-Flaschen $5 \cdot 0{,}20$ M $= 1$ M. Kauft man daher die 1000 g Flüssigkeit nicht in diesen fünf Flaschen, sondern statt dessen in einer Flasche zu 1000 g, so spart man $(1 - 0{,}45)$ M $= 0{,}55$ M ein.

Lösungen der III. Runde 1981 übernommen aus [5]

4.24 XXII. Olympiade 1982

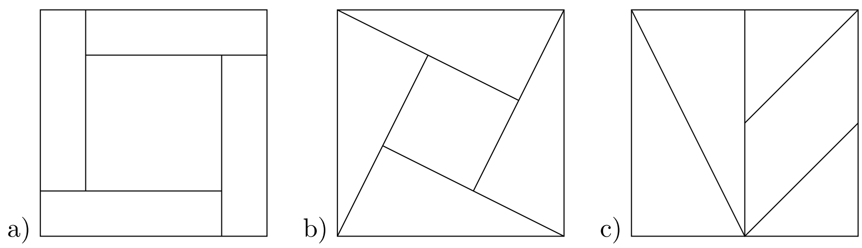
4.24.1 I. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220711
Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,
b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,
c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, dass sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!
Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.



Aufgabe 2 - 220712
Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit.
Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine.
Nach Abschluss der Fahrt stellte man fest, dass genau 121 Servietten verbraucht wurden.
Wie viel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

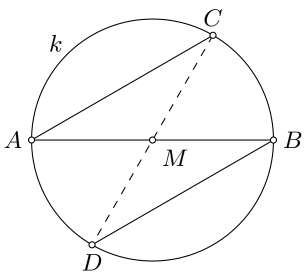
Die Anzahl der verbrauchten Papierservietten ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Teilnehmer und der Anzahl der von jedem Teilnehmer eingenommenen Mahlzeiten.
Nun ist $121 = 11 \cdot 11$ die einzige Faktorzerlegung, die hier in Frage kommt; denn $121 = 1 \cdot 121$ scheidet aus, da sowohl die Anzahl der Teilnehmer als auch die Anzahl der Mahlzeiten jedes Teilnehmers größer als 1 war. Folglich haben insgesamt 11 Familienmitglieder, mithin also genau 7 Kinder an der Urlaubsfahrt teilgenommen.

Aufgabe 3 - 220713
Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern.
Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km.
Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, dass jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt.
Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Jede LPG säuberte ein Drittel des 2,4 km langen Grabens, also 0,8 km. Diese Länge entspricht daher den 240 M, die die LPG C bekommt. Für je 0,1 km erhält die LPG C somit jeweils 30 M. Von den 0,9 km der LPG B wurden 0,8 km mit eigenen Kräften und folglich 0,1 km durch die LPG C gesäubert.
Die LPG B zahlte daher 30 M, die LPG A die restlichen 210 M an die LPG C.

Aufgabe 4 - 220714
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!



Da M der Mittelpunkt von k und damit auch der Mittelpunkt des Durchmessers AB ist, gilt (1) $AM = BM$.
Wegen $AC \parallel BD$ (und da M auf AB liegt) gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (2) $\angle CAM = \angle DBM$.

Da Radien eines Kreises stets gleich lang sind, sind die Dreiecke AMC, BMD gleichschenklig mit AC bzw. BD als Basis. Nach dem Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgt daher $\angle CAM = \angle ACM$ und $\angle DBM = \angle BDM$. Zusammen mit (2) ergibt sich somit (3) $\angle ACM = \angle BDM$.

Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sww), dass die Dreiecke ACM und BDM kongruent sind.

Hinweis: Der Kongruenzsatz (sws) führt nicht ohne weiteres zum Ziel, weil man $\angle AMC = \angle BMD$ als Gleichheit von Scheitelwinkeln erst erhalten kann, wenn man zur Verfügung hat, dass M auf CD liegt. Das müsste aber erst aus den Voraussetzungen hergeleitet werden.

Der Kongruenzsatz (ssw) führt ebenfalls nicht ohne weiteres zum Ziel, weil er nur anwendbar ist, wenn $\angle CAM$ der größeren Seite gegenüberliegt, was nicht der Fall sein muss.

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen aus [5]

4.24.2 II. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220721
Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.
(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.
(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

I. Wenn eine Zahl z die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
Die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl ist eine der Zahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$; denn wegen $4^3 < 100$ und $10^3 > 999$ sind dies die einzigen dreistelligen Kubikzahlen.

Da z und somit die letzte Ziffer von z gerade ist, verbleiben nur die Möglichkeiten 216 und 512 für die letzten drei Ziffern von z. Also endet die aus den ersten drei Ziffern von z gebildete Zahl auf 2 oder 5.

Es gibt aber keine Quadratzahl, die auf 2 endet; denn endet eine natürliche Zahl a auf 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9, so endet ihre Quadratzahl auf 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 bzw. 1.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit 512 für die letzten drei Ziffern von z, und die ersten drei Ziffern bilden eine auf 5 endende Quadratzahl, also eine der Zahlen $5^2, 15^2, 25^2, 35^2, ...$
Von diesen sind wegen $5^2 < 100$ und $35^2 > 999$ nur $15^2 = 225$ und $25^2 = 625$ dreistellig.

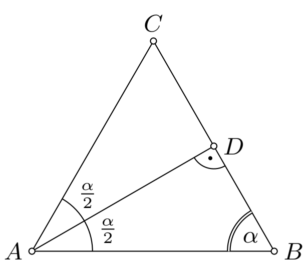
Damit ist gezeigt, dass nur 22512 und 62512 die geforderten Eigenschaften haben können.

Aufgabe 2 - 220722
In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AC = BC$
(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: "Dann muss das Dreieck ABC rechtwinklig sein."
Vera behauptet: "Nein, dann muss es gleichseitig sein."
Werner behauptet: "Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein."

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!



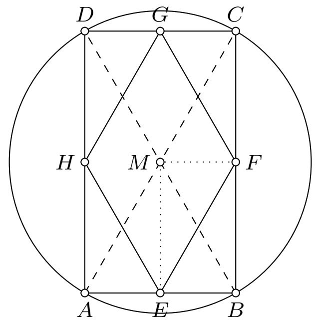
Ist $\angle BAC = \alpha$, so folgt aus (1), dass auch (3) $\angle ABC = \alpha$ gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).
Ist ferner D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$, so folgt aus (2) und (3), dass $\frac{\alpha}{2} + \alpha + 90° = 180°$ gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD).

Daher ist $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90°$, also $\angle BAC = \alpha = 60°$, nach (3) daher auch $\angle ABC = 60°$.

Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras Behauptung wahr, Ursels und Werners Behauptungen sind falsch.

Andere Beweismöglichkeit:
Aus (2) folgt $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Hiernach und wegen $AD = AD$ gilt $\triangle ABD = \triangle ACD$ (wsw), also $AB = AC$. Daher und nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 3 - 220723
Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muss!



Der Mittelpunkt von k sei M. Im gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $AM = BM = r$) ist die Seitenhalbierende ME zugleich Höhe, also gilt $\angle MEB = 90°$. Entsprechend folgt $\angle MFB = 90°$.
Da ferner nach Voraussetzung auch $\angle EBF = \angle ABC = 90°$ ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die Diagonalen gleichlang, also gilt $EF = MB = r$. Entsprechend ergibt sich $FG = r$, $GH = r$ und $HE = r$.
Damit ist die Behauptung $EF + FG + GH + HE = 4r$ bewiesen.

Aufgabe 4 - 220724
Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.
(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen 270 cm^3, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

Natürliche Zahlen a, b, c erfüllen genau dann die Forderung (2), wenn für sie die Gleichungen

(3) $abc = 270$,
(4) $a + b + c = 20$ gelten.

I. Wenn natürliche Zahlen a, b, c die Bedingungen (1),(3),(4) erfüllen, so folgt:

Nach (3) sind a, b, c von 0 verschieden; hiernach und wegen (1), (4) gilt (5) $0 < a < b < c < 20$.

Die einzigen Teiler von 270 zwischen 0 und 20 sind (6) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15 und 18.

Die einzigen Möglichkeiten, aus diesen Zahlen zwei als a und b mit $a < b$ so auszuwählen, dass die, nach (4) erhaltene, Zahl $c = 20 - a - b$ auch $b < c$ erfüllt, sind in der folgenden Tabelle angegeben.
Für diejenigen a, b, für die auch diese Zahl $c = 20 - a - b$ eine der Zahlen (6) ist, wird dann geprüft, ob auch $abc = 270$ gilt:

a	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	5
b	2	3	5	6	9	3	5	6	5	6	6
c	17	16	14	13	10	15	13	12	12	11	9
c in (6)?	nein	nein	nein	nein	ja	ja	nein	nein	nein	nein	ja
abc					90	90					270

Es ergibt sich, dass nur $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$ die Bedingungen (1), (3), (4) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt $5 < 6 < 9$, $5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$, $5 + 6 + 9 = 20$.
Damit ist gezeigt: Es gibt Zahlen, die die Forderungen (1), (2) erfüllen, sie sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und lauten $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$.

Lösungen der II. Runde 1982 übernommen aus [5]

4.24.3 III. Runde 1982, Klasse 7

Aufgabe 1 - 220731
Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D;
die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?
b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

a) Der Betrag, für den die Familie A, B, C bzw. D Konsummarken abgerechnet hatte, sei a, b, c bzw. d. Dann gilt

$$b = \frac{1}{2}a; \qquad c = \frac{1}{3}a; \qquad d = \frac{1}{4}a$$

Die vier Familien hatten also zusammen für den Betrag $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a$. Da 1,6% hiervon 336 M sind, gilt

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}a = \frac{336 \cdot 100}{1{,}6} M \quad \Rightarrow \quad a = 10080M$$

und damit

$$b = \frac{1}{2} \cdot 10080M = 5040M \quad ; \quad c = \frac{1}{3} \cdot 10080M = 3360M \quad ; \quad d = \frac{1}{4} \cdot 10080M = 2520M$$

b) Familie A erhielt $\frac{10080 \cdot 1{,}6}{100} M = 161{,}28M$, Familie B erhielt $\frac{5040 \cdot 1{,}6}{100} M = 80{,}64M$, Familie C erhielt $\frac{3360 \cdot 1{,}6}{100} M = 53{,}76M$, Familie D erhielt $\frac{2520 \cdot 1{,}6}{100} M = 40{,}32M$.

Aufgabe 2 - 220732
Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, dass die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!
b) Beweise, dass bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

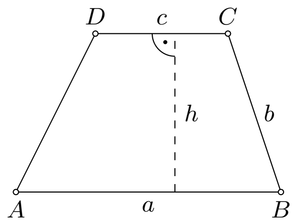
a) Wählt man als erste Zahl z.B. 0, so ergibt sich
als zweite Zahl $2 \cdot 0 + 7 = 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot 21 + 7 = 7 \cdot 7 = 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot 49 + 7 = 15 \cdot 7 = 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot 105 + 7 = 31 \cdot 7 = 217$

und damit als Summe $57 \cdot 7 = 399$. Wegen $399 : 21 = 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

b) Wählt man als erste Zahl n, so ergibt sich
als zweite Zahl $2n + 7$,
als dritte Zahl $2 \cdot (2n + 7) = 4n + 21$,
als vierte Zahl $2 \cdot (4n + 21) = 8n + 49$,
als fünfte Zahl $2 \cdot (8n + 49) = 16n + 105$,
als sechste Zahl $2 \cdot (16n + 105) = 32n + 217$

und damit als Summe $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32)n + 399 = 63n + 399$. Wegen $(63n + 399) : 21 = 3n + 19$ ist diese Summe durch 21 teilbar.

Aufgabe 3 - 220733
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm und $h = 3{,}0$ cm!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

Es gilt $AB = a$. Ferner ist die Gerade durch C, D parallel zur Geraden durch A, B und hat von ihr den Abstand h. Weiterhin gilt $BC = b$. Schließlich ist $CD = c$, und D liegt auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.

II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn A, B, C und D durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man konstruiert eine Parallele p zu AB im Abstand h.
(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius b und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um C mit dem Radius c und bezeichnet denjenigen Schnittpunkt von p und k', der auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A liegt, mit D.

III. Beweis, dass für so konstruierte A, B, C, D stets $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist:

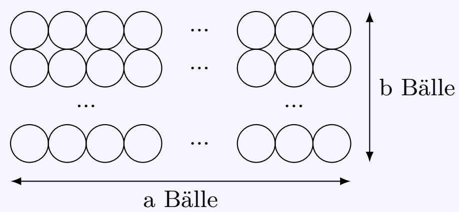
Nach (2), (3), (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$, in dem AB und DC den Abstand h voneinander haben; nach (1) ist $AB = a$, nach (3) ist $BC = b$, und nach (4) ist $CD = c$.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Wegen $b > h$ ist Konstruktionsschritt (3) ausführbar und ergibt zwei verschiedene Schnittpunkte C_1, C_2 von p und k (siehe Abbildung). Danach ist Konstruktionsschritt (4) jeweils eindeutig ausführbar, ergibt also zu C_1, genau einen Punkt D_1 und zu C_2 genau einen Punkt D_2.

Bei (3) entsteht wegen $b > h$ ein gleichschenkliges Dreieck BC_1C_2, dessen Basiswinkel bei C_1 und C_2 folglich spitze Winkel sind. Wählt man die Bezeichnungen wie in der Abbildung (C_1 auf derselben Seite der Geraden durch B, C_2 wie A), so gilt also $\angle BC_1D_1 > \angle BC_1C_2 = \angle BC_2C_1 = \angle BC_2D_2$; daher sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 nicht kongruent.
Also ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Längen nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 220734

Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt.



Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht.
In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

O.B.d.A. sei in der untersten Schicht $b = 10$ die kleinere der beiden Anzahlen a, b und $a = x$ die größere.

Dann ist in den folgenden Schichten jeweils $b = 9$, $b = 8$, ..., $b = 1$ die kleinere und $a = x - 1$, $a = x - 2$, ..., $a = x - 9$ die größere der beiden Anzahlen a, b. Daraus folgt

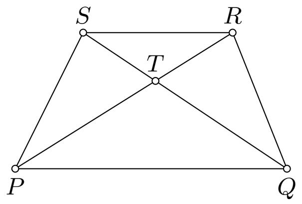
$$550 = 10x + 9(x-1) + 8(x-2) + 7(x-3) + 6(x-4) + 5(x-5) + 4(x-6) + 3(x-7) + 2(x-8) + (x-9)$$

$$= 10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x - 9 - 16 - 21 - 24 - 25 - 24 - 21 - 16 - 9$$

$$= 55x - 165 = 13$$

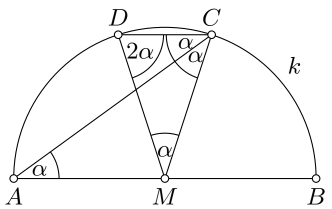
In der untersten Schicht liegen folglich $10 \cdot 13$ Bälle, d.s. 130 Bälle.

Aufgabe 5 - 220735
Beweise folgenden Satz!
Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.



Wegen $PQ \parallel SR$ haben die Dreiecke PQS und PQR zu ihrer gemeinsamen Seite PQ als Grundlinie gleichlange Höhen. Also haben sie einander gleichen Flächeninhalt.
Subtrahiert man von ihm den Flächeninhalt des Dreiecks PQT, so ergibt sich, dass die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 6 - 220736
Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleich groß.
Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!



Aus den Voraussetzungen folgt $\angle ACD = \angle BAC = \alpha$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle ACM = \angle BAC = \alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACM),
also $\angle DCM = 2\alpha$ und daher auch $\angle CDM = 2\alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CDM).

Hieraus und aus $\angle CMD = \alpha$ ergibt sich nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck CDM, $5\alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

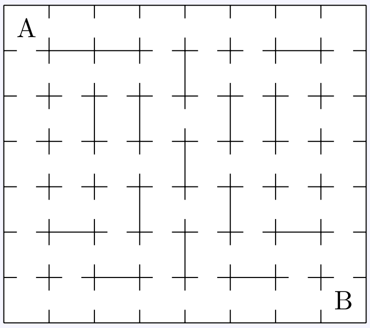
Lösungen der III. Runde 1982 übernommen aus [5]

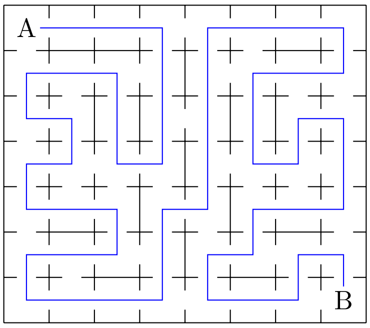
4.25 XXIII. Olympiade 1983

4.25.1 I. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230711

Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede "Tür" höchstens einmal benutzt werden.
Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.





Aufgabe 2 - 230712

Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von 85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Wie viel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?
b) Wie viel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

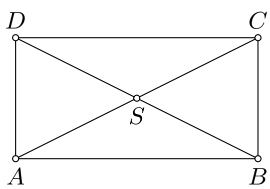
a) Da die Geschwindigkeit des zweiten Kraftwagens um 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer ist als die des ersten Kraftwagens, legt der zweite Kraftwagen 5 km mehr in der Stunde zurück als der erste. In $\frac{1}{5}$ h, d.h. in 12 Minuten, kommt er dem ersten Kraftwagen um 1 km näher, also hat er den ersten Kraftwagen in $2 \cdot 12$ Minuten = 24 Minuten eingeholt.

b) In dieser Zeit hat er eine Entfernung von $85 \cdot \frac{2}{5}$ km = 34 km zurückgelegt.

Aufgabe 3 - 230713

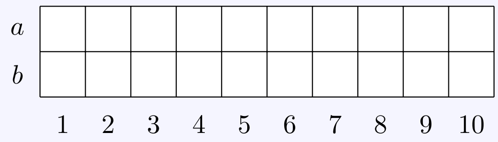
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\angle ASB$ habe die Größe 120°.
Ermittle die Diagonalenlängen AC und BD in Abhängigkeit von der Seitenlänge BC!

Da im Rechteck die Diagonalen gleichlang sind und einander halbieren, gilt
(1) $AS = BS = CS = DS$

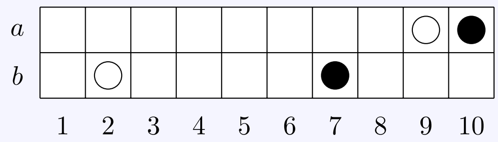


Das Dreieck BCS ist somit gleichschenklig, demnach gilt
(2) $\angle CBS = \angle BCS$
Nach dem Innenwinkelsatz gilt daher
(3) $\angle CBS + \angle BCS + 60° = 180°$
Aus (2) und (3) folgt $\angle CBS = \angle BCS = 60°$, also ist das Dreieck BCS gleichseitig, und es gilt
(4) $BC = BS$.
Wegen $2BS = BD$ ist $BD = 2BC$. Aus (1) und (4) folgt $AC = BD = 2BC$.

Aufgabe 4 - 230714
Zwei Spieler A und B spielen auf einem "2 x 10 - Brett" folgendes Spiel:



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein.
Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muss, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist "Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7 (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.



Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muss (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, dass dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, dass er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: a9, b2; Schwarz: a10, b7.
(2) Weiß: a3, b5; Schwarz: a8, b6.
(3) Weiß: a8, b4; Schwarz: a10, b7.
(4) Weiß: a4, b2; Schwarz: a8, b9.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: a2, b4; Schwarz: a7, b9.
(6) Weiß: a6, b2; Schwarz: a8, b5.
(7) Weiß: a5, b3; Schwarz: a8, b6.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

a) (1) A zieht b2 nach b6. Dann kann B nur noch den Stein b7 nach rechts ziehen. Jedesmal antwortet A, indem er seinen b-Stein wieder unmittelbar links neben den schwarzen Stein zieht.
Dadurch wird B schließlich auf b10 gezwungen und von A mit b9 blockiert.

(2) A zieht a3 nach a7. Dann kann B jeden seiner Steine nur noch nach rechts ziehen. A rückt wieder nach, unmittelbar links daneben. Dadurch wird einer der schwarzen Steine auf Spalte 10 gezwungen, und es geht entsprechend wie in (1) weiter.

(3) A zieht b4 nach b5. Zieht dann B einen Stein nach links, so ist er unmittelbar rechts neben einem weißen Stein, und A kann wie in (2) den Sieg erzwingen. Will B das aber vermeiden, indem er seinen b-Stein nach rechts zieht, so rückt A stets ebenso viele Felder mit seinem b-Stein nach rechts. Spätestens wenn B so auf b10 gezogen hat, ist er gezwungen, einen Stein nach links zu ziehen, also kann A den Sieg erzwingen.

(4) A zieht b2 nach b5. Zieht dann B nach rechts, so rückt A mit seinem Stein auf derselben Zeile ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links ziehen; dann kann A erreichen, dass der Zwischenraum zwischen den Steinen für beide Zeilen dieselbe Länge hat, aber eine kleinere als drei Felder. Das lässt sich wiederholen, so dass A zu Stellungen der Art (2) oder (3) - nämlich auf beiden Zeilen mit Zwischenraum ein Feld bzw. ohne Zwischenraum zwischen den zwei Steinen - gelangt und so den Sieg erzwingt.

b) (5) Hier kann A nicht gewinnen, wenn B das aus (4) ersichtliche Verfahren einschlägt, d.h.:

Falls A nach links zieht, rückt B ebenso viele Felder nach; falls A nach rechts zieht, erzielt B auf beiden Zeilen gleichlange Zwischenräume, aber kürzer als vorher. Schließlich hat B beide Steine unmittelbar rechts neben die weißen Steine gebracht und folgt ihnen unmittelbar, bis sie auf Spalte 1 blockiert sind.

(6),(7) Dasselbe gilt für (7), während (6) wieder wie bei (4) die Möglichkeit für A bietet, den Sieg zu erzwingen.

c) Von einer Anfangsstellung aus kann A genau dann den Sieg erzwingen, wenn die Zwischenräume, die sich in den Zeilen a und b jeweils zwischen dem weißen und dem schwarzen Stein befinden, verschieden lang sind.

Beweis:
I. Wenn die genannten Zwischenräume verschieden lang sind, kann A den Sieg folgendermaßen erzwingen: Im ersten Zug erreicht er, dass die Zwischenräume gleich lang werden. Zieht B dann nach rechts, so rückt A in derselben Zeile um ebenso viele Felder nach. Schließlich muss B nach links rücken, und A kann eine Stellung mit gleichlangen aber kürzeren Zwischenräumen in beiden Zeilen erreichen.
Auf diese Weise erzwingt A nach endlich vielen Zügen stets, dass in beiden Zeilen die Steine unmittelbar benachbart sind, B muss daher nach rechts ziehen, worauf A dichtauf folgen kann, bis B blockiert ist.

II. Wenn die genannten Zwischenräume gleich lang sind, so kann A den Sieg nicht erzwingen. A muss nämlich (falls er nicht schon in der Anfangsstellung blockiert ist) im ersten Zug eine Stellung herbeiführen, in der die genannten Zwischenräume verschieden lang sind. Von dieser Stellung aus kann dann B nach dem in I. geschilderten Verfahren den Sieg erzwingen.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen aus [5]

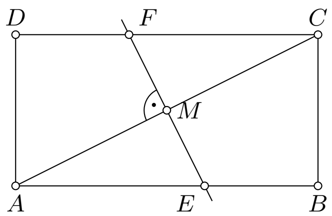
4.25.2 II. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230721
Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.
Um wie viel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Wenn der Weg bis zum Rathaus genau $\frac{1}{4}$ des Gesamtweges und der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Rathaus bis zum Bahnhof (wegen $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$) genau $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges.

Wenn der Weg bis zum Bahnhof genau $\frac{1}{3}$ des Gesamtweges ist, dann ist der Weg vom Bahnhof bis zur Schule genau $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ des Gesamtweges.
Da Uwe für $\frac{1}{12}$ des Gesamtweges genau 2 Minuten benötigte, benötigte er für $\frac{8}{12}$ des Gesamtweges genau 16 Minuten. Da Uwe um 7.32 Uhr am Bahnhof war, trifft er folglich um 7.48 Uhr in der Schule ein.

Aufgabe 2 - 230722
Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.
Beweise, dass dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!



Es gilt:
(1) $AM = MC$; denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.
(2) $\angle FMC = \angle AME = 90°$; denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.
(3) $AB \parallel CD$; da $ABCD$ laut Voraussetzung ein Rechteck ist.
(4) $\angle MAE = \angle MCF$; da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, dass die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind.

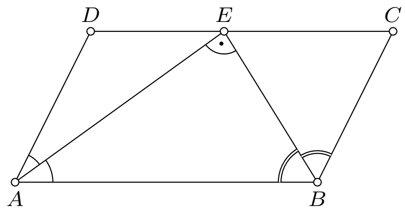
Aufgabe 3 - 230723
Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.
Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!
Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, dass es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

I) Bezeichnet man mit b, g bzw. r einen blauen, gelben bzw. roten Würfel, dann zeigen folgende Beispiele, dass es Reihen mit 7 Würfeln gibt, die alle gestellten Bedingungen erfüllen:

$$b, g, b, r, g, r, b; \qquad b, g, r, b, r, g, b; \qquad b, g, r, g, b, r, b;$$

II) Ist w_1, w_2, w_3, ..., w_8, ... eine Reihe von 8 oder mehr Würfeln, so kommen darin die 7 Farbfolgen (w_1,w_2), (w_2,w_3), ..., (w_7,w_8) vor.
Zu den drei verschiedenen Farben b, g, r gibt es aber nur die folgenden 6 verschiedenen Farbfolgen (b, g), (b, r), (g, b), (g, r), (r, b), (r, g). Daraus folgt, dass bei einer Reihe von 8 oder mehr Würfeln (ohne benachbarte gleichfarbige Würfel) mindestens eine Farbfolge doppelt auftreten müsste, was der gestellten Bedingung widerspricht.
Aus I) und II) folgt, dass 7 die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe der verlangten Art ist.

Aufgabe 4 - 230724
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt.
Ferner wird vorausgesetzt, dass die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!



Das Dreieck ABE und das Parallelogramm $ABCD$ stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein.
Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.

Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\angle EAB$ und $\angle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels.
Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17{,}5$ mithin 17,5 cm^2 und der des Parallelogramms $ABCD$ daher 35 cm^2.

Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

4.25.3 III. Runde 1983, Klasse 7

Aufgabe 1 - 230731
Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: "Ich bin 5 Jahre jünger als Elke."
(2) Birgit: "Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit."
(3) Carmen: "Ich bin 14 Jahre alt."
(4) Dorit: "Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen."
(5) Elke: "Birgit und Carmen sind beide jünger als ich."

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

Bezeichnet man das Lebensalter jedes Mädchens entsprechend dem Anfangsbuchstaben ihres Vornamens mit A, B, C, D und E, so folgt aus (2) $D < B < C$ und weiter aus (5) $D < B < C < E$.
Also ist D die kleinste der vier Zahlen B, C, D, E. Da aber D nach (4) nicht die kleinste der fünf Zahlen A, B, C, D, E sein kann, folgt $A < D < B < C < E$.
Nach (3) ist $C = 14$. Somit sind A, D und B drei natürliche Zahlen, für die $10 < A < D < B < 14$ gilt. Das ist nur möglich mit $A = 11$, $D = 12$, $B = 13$. Nach (1) gilt daher $E = 16$.

Somit lässt sich aus den Angaben der Aufgabenstellung eindeutig ermitteln, wie alt jedes der fünf Mädchen ist, und zwar gilt: Anja ist 11, Birgit 13, Carmen 14, Dorit 12 und Elke 16 Jahre alt.

Aufgabe 2 - 230732
Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck gilt für jedes Viereck mit den genannten Innenwinkelgrößen

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$$

Daraus folgt

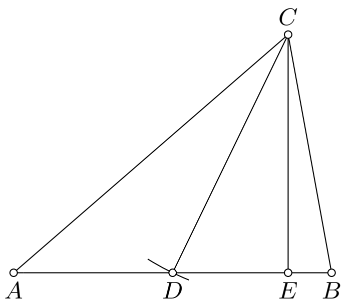
$$\angle DAB + \angle CDA = \alpha + 4\alpha = 180°$$

Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen gilt somit $AB \parallel DC$, also ist $ABCD$ ein Trapez.

Aufgabe 3 - 230733
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.
Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her!
Beweise, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

I. Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt:
Die auf AB senkrechte Höhe CE hat die Länge $h_c = 4{,}5$ cm, und die Punkte A und B liegen auf der in E auf CE errichteten Senkrechten g. Der Mittelpunkt D der Seite AB liegt auch auf dieser Geraden g, und A und B haben von D den Abstand $\frac{c}{2}$. Außerdem hat D von C den Abstand $s_c = 5$ cm.

II. Damit ist hergeleitet, dass ein Dreieck ABC, wenn es die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, nach folgender Konstruktionsbeschreibung erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert eine Strecke CE der Länge h_c.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in E auf CE.
(3) Man konstruiert den Kreis k um C mit s_c und bezeichnet einen Schnittpunkt von k und g mit D.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um D mit $\frac{c}{2}$ und bezeichnet die Schnittpunkte von k' und g mit A und B.

Beweis, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat:

Nach Konstruktionsschritt (4) ist $AD = DB = \frac{c}{2}$, also einerseits $AB = c$, andererseits CD die Seitenhalbierende von AB. Nach Konstruktionsschritt (3) gilt für sie $CD = s_c$.
Ferner ist CE nach Konstruktionsschritt (2) die auf AB senkrechte Höhe, und nach Konstruktionsschritt (1) gilt für sie $CE = h_c$.

Aufgabe 4 - 230734
Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

Wenn man die Zahl halbiert,
vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet
und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, dass jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und dass jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

Eine Zahl x hat genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1=1$$

erfüllt. Diese Gleichung ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1&=1\\ \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1&=8\\ \frac{x}{2}-1&=27\\ x&=56\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die Zahl 56 die geforderte Eigenschaft hat und dass sie die einzige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Aufgabe 5 - 230735
Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest:

Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.
Beweise, dass man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

Ist Q der Quotient, so ist nach Rolands Feststellungen der Dividend $\frac{3}{5}Q$ und der Divisor $\frac{3}{4}Q$. Die Divisionsaufgabe lautet somit

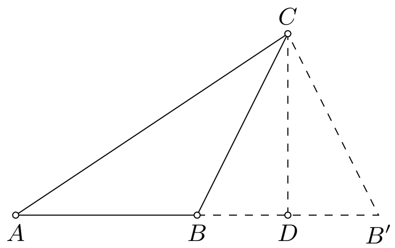
$$\frac{3}{5}Q:\left(\frac{3}{4}Q\right)$$

Ihr Ergebnis ist $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$.

Damit ist bewiesen, dass man den Quotienten aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann. Er lautet $\frac{4}{5}$.

Aufgabe 6 - 230736
Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:
Der Innenwinkel $\angle ABC$ ist größer als $90°$.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot BD = AB = BC$.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!



Die Größe des Winkels $\angle BAC$ sei mit α bezeichnet. Wegen $AB = BC$ gilt $\angle ACB = \angle BAC = \alpha$, nach dem Außenwinkelsatz hat also der Nebenwinkel des Winkels $\angle ABC$ die Größe 2α.
Da $\angle ABC > 90°$ ist, also der Lotfußpunkt D auf der Verlängerung von AB liegt, ist somit $\angle DBC = 2\alpha$ gezeigt.

Wenn nun B bei der Spiegelung an der Geraden durch C und D den Bildpunkt B' hat, so ist $BB' = 2BD = BC = B'C$, also ist das Dreieck $BB'C$ gleichseitig und daher $2\alpha = \angle DBC = \angle B'BC = 60°$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt, und die gesuchten Winkelgrößen sind ermittelt.

Lösungen der III. Runde 1984 übernommen aus [5]

4.26 XXIV. Olympiade 1984

4.26.1 I. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240711
Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:
Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften "Foto", "Junge Mathematiker", "Turnen" an. Ferner gelten folgende Aussagen:

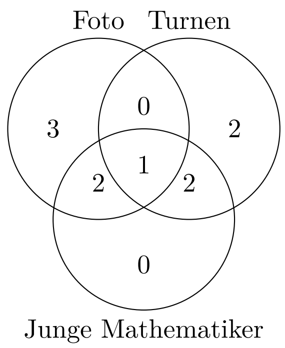
(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Foto".
(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Junge Mathematiker".
(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Turnen".

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Junge Mathematiker".
(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Turnen".
(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Junge Mathematiker" als auch zur AG "Turnen".

Schließlich gilt auch die Aussage
(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, dass in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)
Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!



Außer dem einen Jungen, der nach (7) alle drei Arbeitsgemeinschaften besucht, gibt es nach (4), (5) bzw. (6) (und wegen $3-1=2$, $1-1=0$ bzw. $3-1=2$) genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Foto" und "Junge Mathematiker" gehören, keinen Jungen, der genau zu den AG "Foto" und "Turnen" gehört, genau 2 Jungen, die genau zu den AG "Junge Mathematiker" und "Turnen" gehören.

Hiernach und nach (1), (2) bzw. (3) (sowie wegen $6-2-0-1=3$, $5-2-2-1=0$ bzw. $5-0-2-1=2$) gibt es genau 3 Jungen, die genau zur AG "Foto" gehören, keinen Jungen, der genau zur AG "Junge Mathematiker" gehört, genau 2 Jungen, die genau zur AG "Turnen" gehören.

Mit dieser Aufzählung sind alle Möglichkeiten erfasst, mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften anzugehören, und zwar jede solche Möglichkeit genau einmal.
Daher ist $1+2+0+2+3+0+2=10$ die gesuchte Anzahl aller Jungen dieser Klasse.

Aufgabe 2 - 240712
Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, dass $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander "verschieden", wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?
(2) Beim Spiel fragt Peter: "Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?" Beantworte diese Frage!
(3) Klaus überlegt: "Wie viel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?" Ermittle auch diese Anzahl!
(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

(1) Die kleinste Summe der Augenzahlen wird mit dem Wurf (1, 1, 1) erreicht und beträgt somit 3, die größte Summe tritt beim Wurf (6, 6, 6) auf und beträgt somit 18.

(2) Es gibt genau die folgenden sechs verschiedenen Würfe, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt: $(6,5,1), (5,5,2), (4,4,4), (6,4,2), (5,4,3), (6,3,3)$.

(3) Es gibt genau die folgenden verschiedenen Würfe, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist:

$(6,6,6)$, $(6,6,5)$, $(6,5,5)$, $(6,6,4)$, $(6,5,4)$, $(6,4,4)$, $(6,6,3)$, $(6,5,3)$, $(6,4,3)$, $(6,3,3)$, $(6,6,2)$, $(6,5,2)$, $(6,4,2)$, $(6,3,2)$, $(6,2,2)$, $(6,6,1)$, $(6,5,1)$, $(6,4,1)$, $(6,3,1)$, $(6,2,1)$, $(6,1,1)$

Ihre Anzahl beträgt $6+5+4+3+2+1=21$.

(4) In entsprechender Weise gibt es genau die folgenden $5+4+3+2+1=15$ verschiedenen Würfe mit 5 als höchster Augenzahl

$(5,5,5)$, $(5,5,4)$, $(5,4,4)$, ..., $(5,5,1)$, $(5,4,1)$, ... , $(5,1,1)$;

analog genau $4+3+2+1=10$ verschiedene Würfe mit 4 als höchster Augenzahl und $3+2+1=6$ verschiedene Würfe mit 3 als höchster Augenzahl.

Wegen $21+15+10+6>50$ sind dies bereits mehr als 50 verschiedene Würfe. Also können in 50 Würfen nicht alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein.

Aufgabe 3 - 240713
In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden.

Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluss der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluss der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?
Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, dass der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Vorrunde:
In jeder der sechs Gruppen sind $6 \cdot \frac{5}{2}$ Spiele, d.s. 15 Spiele, auszutragen. Da sechs Platten vorhanden sind, steht für jede Gruppe stets eine Platte zur Verfügung, an der sie ihre 15 Spiele austragen kann (und da hierbei auch alle sechs Platten ständig belegt sind, ist eine weitere Verkürzung der Spielzeit durch gleichzeitiges Austragen von noch mehr Spielen nicht möglich). Also braucht man für die Vorrunde 15 Viertelstunden, an die sich eine Pause von 4 Viertelstunden anschließt.

Zwischenrunde:
Wieder sind in jeder der beiden Gruppen 15 Spiele auszutragen. Da man jeder Gruppe drei Platten zur Verfügung stellen kann, sind wegen $15:3=5$ mindestens 5 Viertelstunden hierfür erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets drei der 15 Spiele gleichzeitig ausgetragen werden, z.B. für sechs Spieler A,B,C,D,E,F durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), (E,F), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,E), (D,F),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,F), $(C.E)$, vierte Viertelstunde: (A,E), (B,D), (C,F),
fünfte Viertelstunde: (A,F), (B,C), (D,E).

(Wieder ist eine weitere Verkürzung nicht möglich, da alle Platten ständig belegt sind.)
Nach der somit ermittelten Spielzeit von 5 Viertelstunden schließt sich eine Pause von 1 Viertelstunde an.

Endrunde:
Diesmal sind $4 \cdot \frac{3}{2}$ Spiele, d.s. sechs Spiele, auszutragen. Es können gleichzeitig stets nur zwei Spiele ausgetragen werden, da insgesamt nur vier Spieler in der Endrunde sind. Also sind wegen $6 : 2 = 3$ mindestens 3 Viertelstunden erforderlich.
Sie sind auch ausreichend; denn man kann es so einrichten, dass stets zwei Spiele gleichzeitig stattfinden, z.B. für vier Spieler A, B, C, D durch folgende Verteilung:

erste Viertelstunde: (A,B), (C,D), zweite Viertelstunde: (A,C), (B,D),
dritte Viertelstunde: (A,D), (B,C).

Zu den so ermittelten 3 Viertelstunden Spielzeit kommt noch eine Viertelstunde Pause hinzu. Damit sind insgesamt $15 + 4 + 5 + 1 + 3 + 1 = 29$ Viertelstunden bis zur Siegerehrung vorzusehen; diese ist hiernach um 15.45 Uhr anzusetzen.

Aufgabe 4 - 240714
(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:
(1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!
(2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

(a) Da der Umfang die Summe der Längen der kürzesten Dreiecksseite und der beiden anderen Seiten ist, beträgt nach (2) die Summe der Längen der beiden anderen Seiten 25 cm. Also ist 25 nach (1) die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Das ist nur möglich, wenn es sich um die Zahlen 12 und 13 handelt. Hiernach (und nochmals wegen (1)) lauten die gesuchten Seitenlängen 11 cm, 12 cm, 13 cm.

(b) Wie in (a) folgt, dass n die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist.
Bezeichnet m die Zahl in der Mitte zwischen diesen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $m - \frac{1}{2}$ und $m + \frac{1}{2}$; ihre Summe ist also $2m$.
Da sie n beträgt, muss $m = \frac{n}{2}$ sein. Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind somit $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ und $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$, die Maßzahlen der drei gesuchten Seitenlängen können folglich nur $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}$, $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ lauten.
(c) Die Aufgabe (b) ist hiernach genau dann lösbar, wenn die zuletzt gefundenen Zahlen natürliche Zahlen größer als 0 sind, die auch die in der Dreiecksungleichung geforderte Bedingung erfüllen, dass die größte der drei Maßzahlen kleiner als die Summe der beiden anderen Maßzahlen ist.

(I) Natürliche Zahlen sind die drei Zahlen genau dann, wenn die (vorzugebende natürliche) Zahl n ungerade ist und $n \geq 3$ gilt.
(II) Größer als 0 sind sie genau dann, wenn $n > 3$ ist.
(III) Für $n = 5$ lauten die drei Maßzahlen 1, 2, 3; sie erfüllen also nicht die Dreiecksungleichung.
Für $n = 7$ lauten sie 2, 3, 4 und erfüllen somit die Dreiecksungleichung.
Vergrößert man n noch weiter, so vergrößern sich die drei Maßzahlen stets um einen einheitlichen Betrag. Also vergrößert sich die Summe der beiden kürzesten Längen um den doppelten Betrag wie die längste; somit bleibt die Dreiecksungleichung erst recht gültig.
Mit (I), (II), (III) ist bewiesen: In (b) entsteht genau dann eine lösbare Aufgabe, wenn die natürliche Zahl n als ungerade Zahl $n \geq 7$ vorgegeben wird.

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen aus [5]

4.26.2 II. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240721
Drei Ehepaare sitzen zum Romméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, dass man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

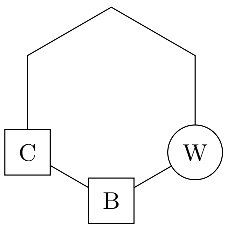


Abbildung a

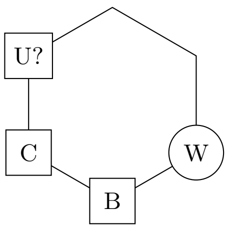


Abbildung b

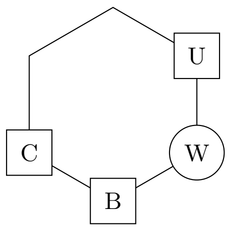


Abbildung c

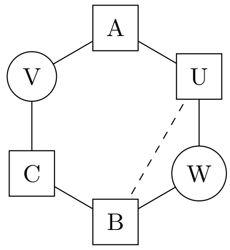


Abbildung c

Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, dass Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt: Ulrikes Mann ist Bernd, (*) und man erhält Abbildung a.

Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Abbildung b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch zu (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Abbildung c).

Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Abbildung d angegeben. Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Abbildung d und (3): Antons Frau ist Vera, (**) und es verbleibt als drittes Ehepaar: Christians Frau ist Waltraud. (***)

Damit ist bewiesen, dass man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung d angegeben.

Aufgabe 2 - 240722
Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!
b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt $a = 13 + b$ (1) sowie, weil der halbe Umfang 92 m : 2 = 46 m beträgt, $a + b = 46$. (2)

Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13 + 2b = 46$, d.h. $b = 16{,}5$ und damit aus (1) $a = 29{,}5$.
Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich $16{,}5 \text{ m} \cdot 29{,}5 \text{ m} = 486{,}75 \text{ m}^2$.

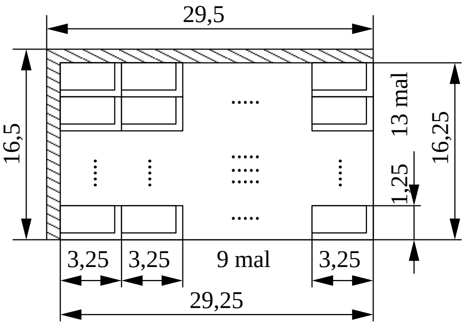
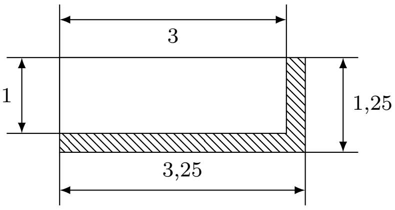


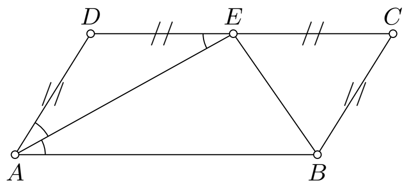
Abbildung a (nicht maßstabsgetreu)

b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Abbildung a schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite.



Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Abbildung b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt.
Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung a, wie sich wegen $29,25 : 3,25 = 9$ und $16,25 : 1,25 > 13$ bestätigen lässt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.

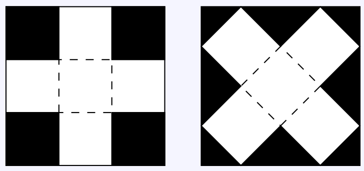
Aufgabe 3 - 240723
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle CBA$ auf der Seite CD liegt.
Beweise, dass unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!



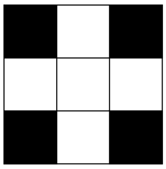
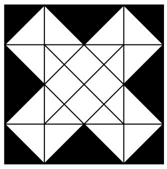
Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen $\angle BAE = \angle DEA$.
Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\angle BAD$ halbiert, gilt $\angle BAE = \angle EAD$. Daher folgt $\angle DEA = \angle EAD$.
Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus $AD = ED$. Analog erhält man $BC = EC$.
Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind, gilt $AD = BC$. Also ist $ED = EC$.
Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

Aufgabe 4 - 240724

Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt.
Beide Netze sind so angeordnet, dass die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.



Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

a)  b) 

Variante 1:
Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Abbildung a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 2:
Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z.B. wie in Abbildung b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Der Abfall beträgt $\frac{3}{8}a^2$.
Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$. Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.

Lösungen der II. Runde 1984 übernommen aus [5]

4.26.3 III. Runde 1984, Klasse 7

Aufgabe 1 - 240731
Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:
Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer.
Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfasste genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wie viel Fahrern sie dort vertreten waren!
Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Wenn genau x Fahrer an der Etappe teilnahmen, so waren genau $x-14$ Fahrer nicht zurückgefallen, und genau 10% hiervon, also $\frac{1}{10}(x-14)$ Fahrer, bildeten die Spitzengruppe. Da dies auch $\frac{x}{12}$ Fahrer waren, folgt

$$\frac{1}{10}(x-14) = \frac{x}{12} \qquad \Rightarrow \qquad x = 84$$

Somit bestand wegen $84 : 12 = 7$ die Spitzengruppe aus genau 7 Fahrern.
Darunter waren auch DDR- Fahrer, und zwar mindestens 2, da sich auch CSSR-Fahrer in der Spitzengruppe befanden, aber mindestens einer weniger als DDR-Fahrer.
Wären es mindestens 3 DDR-Fahrer gewesen, so mindestens 4 sowjetische Fahrer, im Widerspruch dazu, dass unter den 7 Fahrern der Spitzengruppe nicht nur die DDR- und die UdSSR-Mannschaft vertreten waren.
Also lässt sich eindeutig ermitteln: In der Spitzengruppe waren genau 2 DDR-Fahrer, (1) ferner genau 1 CSSR-Fahrer. (2)
Ferner folgt, dass die sowjetische Mannschaft mit 3 oder 4 Fahrern vertreten war. Wären es genau 3 gewesen, so folgte der Widerspruch, dass eine weitere Mannschaft genau einen Fahrer in der Spitzengruppe gehabt hätte, also die CSSR-Mannschaft nicht als einzige am schwächsten dort vertreten gewesen wäre.
Damit ergibt sich eindeutig: In der Spitzengruppe waren genau die Mannschaften der UdSSR, DDR und CSSR vertreten, darunter (außer den in (1),(2) genannten Fahrern) genau 4 sowjetische Fahrer.

Aufgabe 2 - 240732
a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.
(2) x hat die Quersumme 29.
(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

a) Unter allen Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, findet man die größte, indem man mit so vielen Ziffern 9 beginnt, wie dies möglich ist, ohne die Summe 29 zu überschreiten (d.s. genau 3 Ziffern 9), sodann eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 2), wonach nur noch die Möglichkeit verbleibt, zwei Ziffern 0 anzuschließen.
Die größte Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, ist also 999200.

Die nächstkleinere Zahl, die (1) und (2) erfüllt, ergibt sich, indem man die Ziffer 2 durch 1 ersetzt, dann wieder eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 1), wonach nur noch eine Ziffer 0 verbleibt. So ergibt sich als zweitgrößte Zahl, die (1) und (2) erfüllt, 999110.

Entsprechend ergibt sich die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2), indem man die zweite Ziffer 1 durch 0 ersetzt, wonach 999101 verbleibt. Die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2) ist entsprechend 999020.

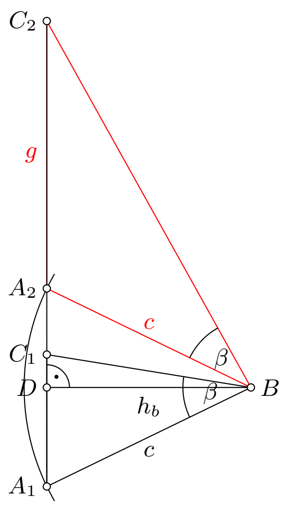
Die Forderung (3) wird von 999200, 999110 und 999102 nicht erfüllt, wohl aber von 999020.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M ist 999020.

b) Unter allen Zahlen, die (1),(2) und (4) erfüllen, findet man die größte, indem man mit 9 beginnt, die größte von 9 verschiedene Ziffer (d.i. die Ziffer 8) anschließt, sodann die größte von 9 und 8 verschiedene Ziffer (d.i. 7) und dann die größte von 9, 8 und 7 verschiedene Ziffer, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 5), wonach 987500 verbleibt. Die nächstkleineren Zahlen mit (1),(2) und (4) ergeben sich, indem man die Ziffer 5 durch 4 ersetzt, wonach (der Größe nach geordnet) 987410 und 987401 verbleiben.
Sodann hat man 4 durch 3 zu ersetzen. Um hiernach für die letzten beiden Ziffern die Summe 2 unter Einhaltung von (4) zu erreichen, verbleiben 987320 und 987302.
Wird weiter 3 durch 2 ersetzt, so verbleiben entsprechend 987230 und 987203; wird 2 durch 1 ersetzt, so ergibt sich als größtmöglich: 987140.

Die Forderung (3) wird von 987500, 987410, 987401, 987320, 987302, 987230 und 987203 nicht erfüllt, wohl aber von 987140.
Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M' ist 987140.

Aufgabe 3 - 240733
Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.
Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)



Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruktion einer Strecke DB der Länge h_b.
(2) Konstruktion der Senkrechten g in D auf DB.
(3) Konstruktion des Kreises k um B mit c; er schneidet g in zwei Punkten A_1, A_2.
(4) Antragen eines Winkels der Größe β in B an BA_1; sein zweiter Schenkel schneidet g in C_1.
(5) Antragen des Winkels der Größe β in B an BA_2 in gleichem Drehsinn wie der in (4) konstruierte Winkel. Der zweite Schenkel des in (5) konstruierten Winkels schneidet g in C_2.
A_1BC_1 und A_2BC_2 sind zwei Dreiecke der geforderten Art.

Bemerkung: In Konstruktionsschritt (4) hat man zwei Möglichkeiten des Antragens. Eine ist in der Abbildung dargestellt; die andere entsteht (bis auf die Bezeichnung) durch Spiegelung beider Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 an der Geraden durch B und D.

Aufgabe 4 - 240734
Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

Für jedes Dreieck gilt mit den genannten Bezeichnungen, dass der Flächeninhalt F des Dreiecks sowohl die Gleichung $F = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ als auch die Gleichung $F = \frac{1}{2}b \cdot h_b$ erfüllt. Daher gilt $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, also $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 5 - 240735
In dem Schema 43_1_5_ ist jede der Leerstellen _ so mit einer Ziffer auszufüllen, dass die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wie viel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Die in die Leerstellen einzutragenden Ziffern seien so mit a, b und c bezeichnet, dass die entstehenden Zahlen die Zifferndarstellung $43a1b5c$ haben.

Eine solche Zahl ist genau dann durch 75 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 25 teilbar ist, da 3 und 25 teilerfremd sind. Durch 25 ist sie genau dann teilbar, wenn $c = 0$ ist.
Durch 3 ist sie genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme $(4 + 3 + a + 1 + b + 5 + c =)13 + a + b$ durch 3 teilbar ist.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt $0 \leq a + b \leq 18$. Für die genannte Quersumme gilt daher $13 \leq 13 + a + b \leq 31$. Sie ist folglich genau dann durch 3 teilbar, wenn sie eine der Zahlen 15, 18, 21, 24, 27, 30 ist, d.h. genau dann, wenn die Summe s aus den beiden Ziffern a und b eine der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17 ist.
Die folgende Tabelle enthält alle Ziffernpaare $(a; b)$, die eine dieser Summen $s = a + b$ besitzen:

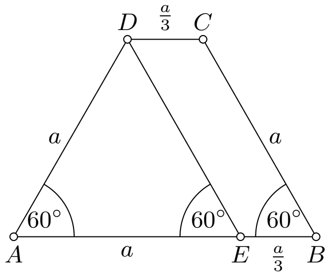
Ziffernsumme s	Alle Ziffernpaare $(a; b)$ mit $a + b = s$	Anzahl der Ziffernpaare
2	(0;2), (1;1), (2;0)	3
5	(0;5), (1;4), (2;3), (3;2), (4;1), (5;0)	6
8	(0;8), (1;7), (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), (7;1), (8;0)	9
11	(2;9), (3;8), (4;7), (5;6), (6;5), (7;4), (8;3), (9;2)	8
14	(5;9), (6;8), (7;7), (8;6), (9;5)	5
17	(8;9), (9;8)	2

Daher ist mit $3 + 6 + 9 + 8 + 5 = 33$ die gesuchte Anzahl gefunden.

Aufgabe 6 - 240736
Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,
(2) $AD = BC = 3 \cdot DC = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,
(3) $\angle BAD = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!



Wegen (1) und (2) ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez. Wegen (3) gilt daher
(4) $\angle CBA = 60°$.
Die Parallele zu BC durch D schneide AB in E. Da Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen gleichgroß sind, folgt hieraus und aus (4)
(5) $\angle DEA = 60°$.
Hieraus und aus (3) (sowie dem Winkelsummensatz) folgt dann, dass das Dreieck AED gleichseitig ist. Wegen (2) gilt daher
(6) $AE = AD = a$.
Da $BC \parallel ED$ und wegen (1) auch $EB \parallel DC$ gilt, ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus und aus (2) folgt dann
(7) $EB = DC = \frac{a}{3}$.
Für den Umfang u des Vierecks $ABCD$ gilt daher

$$u = AE + EB + BC + CD + DA = a + \frac{a}{3} + a + \frac{a}{3} + a = \frac{11}{3}a$$

Lösungen der III. Runde 1984 übernommen aus [5]

4.27 XXV. Olympiade 1985

4.27.1 I. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250711
In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, dass das mit nur drei Wägungen möglich ist!

Man halbiert zunächst ohne Wägestück das Kilogramm Zucker und erhält zweimal 500 g. Auf die gleiche Art halbiert man die 500 g Zucker und erhält zweimal 250 g. Mit Hilfe des 50 g-Wägestückes ermittelt man 50 g Zucker und gibt sie zu den 250 g dazu. Somit hat man 300 g Zucker.

Anderer Lösungsweg:
Mit dem 50 g-Wägestück ermittelt man 50 g Zucker. Mit diesen 50 g und dem 50 g-Wägestück ermittelt man (aus dem restlichen Zucker) in einer zweiten Wägung 100 g Zucker, der mit den 50 g Zucker zusammen 150 g Zucker ergibt.
Mit diesen 150 g Zucker ermittelt man nochmals 150 g Zucker, so dass die Inhalte der zwei Waagschalen zusammen 300 g Zucker ergeben.

Aufgabe 2 - 250712
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Die Bedingung (1) wird genau von den in der 1. Spalte der folgenden Tabelle genannten zweistelligen Zahlen erfüllt, wobei jedoch die Zahl 50 sogleich weggelassen wurde, da aus ihr durch Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl entsteht.
In der 2. Spalte steht jeweils die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl, in der 3. Spalte das Doppelte der Zahl in der 2. Spalte. In der 4. Spalte steht die um 4 vergrößerte ursprüngliche (d.h. in der 1. Spalte stehende) Zahl.

16	61	122	20	61	16	32	65
27	72	144	31	72	27	54	76
38	83	166	42	83	38	76	87
49	94	188	53	94	49	98	98

Genau für die Zahl 94 der 1. Spalte ergibt sich Gleichheit in der 3. und 4. Spalte. Daher erfüllt genau die Zahl 94 beide Bedingungen (1), (2).

Anderer Lösungsweg:
Wenn a und b die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so folgt:
Die Zahl lautet $10a + b$, die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl lautet $10b + a$, und nach (2) gilt:

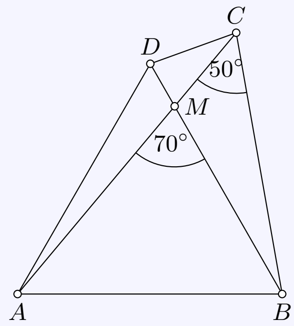
$$2 \cdot (10b + a) = 10a + b + 4 \qquad \Rightarrow \qquad 19b = 4 \cdot (2a + 1)$$

Da $19b$ das Produkt aus 4 und der ungeraden Zahl $2a+1$ ist und da 19 und 4 teilerfremd sind, ist folglich b durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Die einzige Zahl mit diesen Eigenschaften ist $b = 4$, und es folgt weiter $2a + 1 = 19$, d.h. $a = 9$.

Daher kann nur die Zahl 94 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt $9 - 4 = 5$ und $2 \cdot 49 = 98 = 94 + 4$. Also genügt die Zahl 94 den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 3 - 250713

Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).
Es soll $AB = BC = AD$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\angle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\angle BCM$ die Größe 50° haben.
Gerd behauptet, dass durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\angle DAM$ eindeutig bestimmt ist.



Uwe vertritt die Meinung, dass es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\angle DAM$ aufweisen. Wer hat recht?

In jedem konvexen Viereck $ABCD$, das die Forderungen erfüllt, gelten für die Winkelgrößen

$$\angle BAC = \angle BAM = \alpha, \quad \angle ABD = \angle ABM = \beta, \quad \angle ADB = \angle ADM = \gamma, \quad \angle DAM = \angle DAC = \phi$$

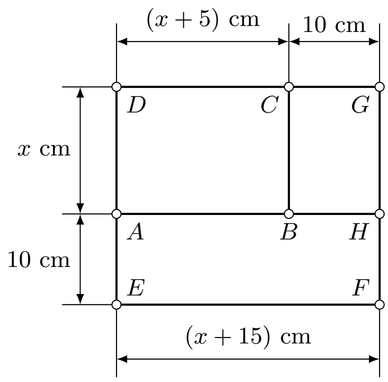
folgende Aussagen:
Da $\angle BAC$ und $\angle BCA$ ($= \angle BCM$) Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC sind, ist $\alpha = 50°$. Nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ABM, folgt daher $\beta = 180° - 70° - \alpha = 60°$. Da $\angle ADB$ und $\angle ABD$ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABD sind, ist $\gamma = \beta = 60°$.

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ADM, folgt $\gamma + \phi = 70°$, also $\phi = 70° - \gamma = 10°$. Diese Winkelgröße ist somit durch die Forderungen eindeutig bestimmt; Gerd hat recht, Uwe nicht.

Aufgabe 4 - 250714
Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!



$ABCD$ sei ein Rechteck, das (1) erfüllt, und es gelte $AD = BC = x$ cm sowie $AB = DC = (x + 5)$ cm. $EFGD$ sei ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 10 cm länger als die des Rechtecks $ABCD$ sind (siehe Abbildung). Dann gilt

$$ED = FG = (x + 10)cm \qquad \text{und} \qquad EF = DG = AH = (x + 15)cm$$

Der Flächeninhaltszuwachs lässt sich als Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $AEFH$ und $BHGC$ darstellen, und es gilt wegen (2): $10 \cdot (x + 15) + 10 \cdot x = 430$.
Formt man die linke Seite der Gleichung mit Hilfe des Distributivgesetzes um, so folgt $10x + 150 + 10x = 430$. Wegen $10x + 10x = 20x$ folgt weiter $x = 14$. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher 14 cm und 19 cm.

Lösungen der I. Runde 1985 übernommen aus [5]

4.27.2 II. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250721
Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.
Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: "Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2."
Es stellt sich jedoch heraus, dass sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.
Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben.
Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, dass die Note 2 erteilt wurde.
Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr.
Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

Aufgabe 2 - 250722
Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216$ dm^3, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.
Von einem zweiten Quader sei bekannt, dass er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und dass die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.
Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Für den ersten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216$ cm^3; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.

Für den zweiten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm.

Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

$$A_1 = 2 \cdot (12 \cdot 6cm^2 + 12 \cdot 3cm^2 + 3 \cdot 6cm^2) = 252cm^2$$

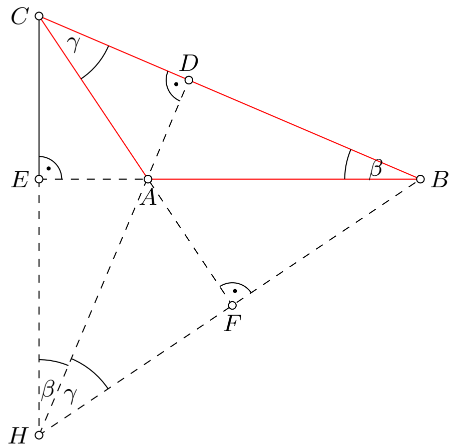
Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

$$A_2 = 2 \cdot (14 \cdot 5cm^2 + 14 \cdot 3cm^2 + 5 \cdot 3cm^2) = 254cm^2$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit 2 cm^2.

Aufgabe 3 - 250723
Es sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BHC = \angle ABC + \angle ACB$ gilt!

Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Abbildung).



Hiernach gilt in den Dreiecken $\triangle BDH$ und $\triangle CFB$ $\angle HBD = \angle FBC$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\angle CDH = \angle CFB = 90°$.
Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\angle DHB = \angle FCB = \gamma$. (1)

Analog beweist man durch Betrachtung der Dreiecke CDH und BEC $\angle DHC = \angle EBC = \beta$ (2)
Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung $\angle BHC = \angle DHC + \angle DHB = \beta + \gamma$.

Aufgabe 4 - 250724
a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.
Zeige, dass die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.
Beweise, dass die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten: 279, 297, 729, 792, 927, 972.

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a, b, c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$$100a + 10b + c, \qquad 100a + 10c + b, \qquad 100b + 10a + c$$

$$100b + 10c + a, \qquad 100c + 10a + b, \qquad 100c + 10b + a$$

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt $222a + 222b + 222c$. (1)
Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe.

Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]

4.27.3 III. Runde 1985, Klasse 7

Aufgabe 1 - 250731
Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl $2n$ sind!

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, ist genau dann Teiler von $2n$, wenn ihre Primfaktorzerlegung keine anderen Primfaktoren als die Primzahl 2 aufweist, und zwar nicht mehr als n solche Faktoren. Das trifft genau auf die n natürlichen Zahlen

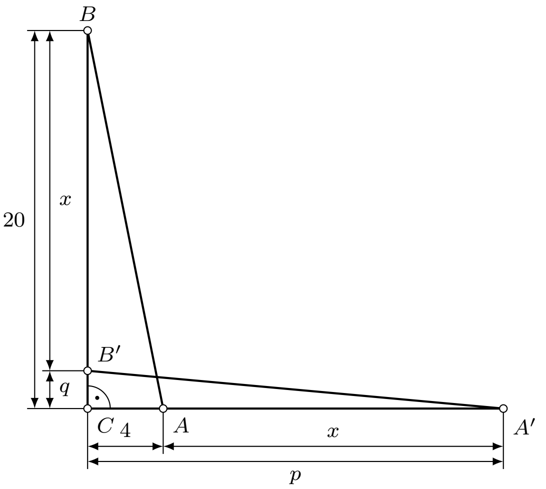
$$21, 22, ..., 2n - 1, 2n \tag{1}$$

zu. Ferner gilt: 1 ist Teiler der Zahl $2n$. (2)
Die gesuchte Anzahl der in (1) und (2) aufgezählten sämtlichen natürlichen Zahlen, die Teiler von $2n$ sind, ist folglich $n + 1$.

Aufgabe 2 - 250732
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $CA = 4$ cm, $CB = 20$ cm.
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d.h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $CB' = CB - x$ cm.
b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!



Im Dreieck ABC ist wegen $CA \perp CB$ die eine dieser beiden Seiten gleichzeitig die zur anderen zugehörige Höhe. Also hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$J = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20cm^2 = 40cm^2 \tag{3}$$

Ist $A'B'C$ ein Dreieck wie in (1), (2) beschrieben, so ist es ebenfalls bei C rechtwinklig und hat daher den Flächeninhalt

$$J' = \frac{1}{2} \cdot CA' \cdot CB' \tag{4}$$

weiterhin gilt für $CA' = p$ cm und $CB' = q$ cm, dass p und q natürliche Zahlen mit $p = 4 + x$, $q = 20 - x$ (5) sind.
Dabei ist aus (3), (4) ersichtlich, dass die Bedingungen (1) und (2) genau dann erfüllt werden, wenn außer (5) auch

$$J' = \frac{55}{100} J \qquad \text{d.h.} \qquad p \cdot q = 44$$

gilt. Die einzigen Zerlegungen von 44 in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen sind aber $44 = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$.
Aus (5) folgt nun $p + q = 24$ und $p > 4$, so dass für (5) nur die Möglichkeit $p = 22$, $q = 2$ und damit, nochmals nach (5), $x = 18$ verbleibt.
Da hiermit in der Tat (5) und (6) gelten, ist bewiesen:
Es gibt genau eine natürliche Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, nämlich $x = 18$.

Aufgabe 3 - 250733
Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

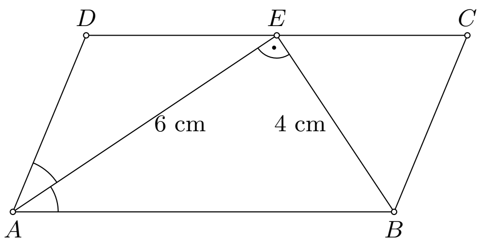
(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $AE = 6{,}0$ cm und $BE = 4{,}0$ cm.

a) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

a) Für jedes Viereck $ABCD$, das (zusammen mit einem Punkt E) die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, gilt:

Nach (1), also $BC \parallel AD$, ist $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Nach (2) ergibt sich durch Halbieren $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz, dass $\angle AEB$ ein rechter Winkel ist.
Nach (3) liegen A und B so auf seinen Schenkeln, dass $EA = 6{,}0$ cm und $EB = 4{,}0$ cm gilt. Nach (1) ist die Gerade p durch C und D eine Parallele zu AB; nach (2) geht sie durch E.
Auf dieser Geraden p liegt D; ferner liegt D nach (2) auf dem Schenkel AD des Winkels $\angle BAD$, der doppelt so groß ist wie $\angle BAE$.
Auch C liegt auf der Geraden p; ferner liegt C nach (1) auch auf der Parallelen q durch B zu AD.

Damit ist bewiesen, dass jedes Viereck $ABCD$, das (1), (2), (3) erfüllt, nach der folgenden Beschreibung konstruiert werden kann:



b) (I) Man konstruiert einen rechten Winkel mit dem Scheitel E.
(II) Von E aus trägt man auf einem Schenkel dieses Winkels die Strecke EA der Länge 6,0 cm und auf dem anderen Schenkel die Strecke EB der Länge 4,0 cm ab.
(III) Man konstruiert die Parallele p durch E zu AB.
(IV) In A trägt man an AE nach derjenigen Seite, auf der B nicht liegt, den Winkel der Größe $\angle BAE$ ab und bezeichnet den Schnittpunkt von seinem freien Schenkel und von p mit D.
(V) Man konstruiert die Parallele q durch B zu AD und bezeichnet den Schnittpunkt von p und von q mit C.

c) Für jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:

Nach (III) und (V) ist $DC \parallel AB$ und $BC \parallel AD$, also (1) erfüllt. Nach (V) und (IV) ist p die Gerade durch C und D, auf ihr liegt E; durch E geht nach (IV) die Winkelhalbierende von $\angle BAD$.
Nach (I) und dem Innenwinkelsatz ist ferner $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; nach (IV) folgt hieraus durch Verdoppeln $\angle BAD + 2 \cdot \angle ABE = 180°$.
Andererseits folgt aus $BC \parallel AD$: $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Also ist $2 \cdot \angle ABE = \angle ABC$; somit geht auch die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ durch E, folglich ist (2) erfüllt. Nach (II) ist auch (3) erfüllt.

Aufgabe 4 - 250734
Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde. Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Die Geschwindigkeit des Sportflugzeugs sei $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des Jagdflugzeugs ist dann $3x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da das Sportflugzeug in einer Stunde x km flog, flog das Jagdflugzeug in einer halben Stunde $(x + 200)$ km und daher in einer Stunde $2 \cdot (x + 200)$ km. Also gilt

$$3x = 2 \cdot (x + 200) \qquad \Rightarrow \qquad x = 400$$

Das Sportflugzeug hatte somit die Geschwindigkeit 400 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, das Jagdflugzeug hatte die Geschwindigkeit 1200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 5 - 250735

In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, dass niemand anders als er die Zahlen sehen kann und dass sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinander gehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen.
Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, dass nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen. Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

"Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1373736."

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Bezeichnet man die gesuchte zweistellige Zahl zunächst mit einem Kästchen $\square$, so gibt es genau die folgenden Möglichkeiten für die Reihenfolge der drei Karten:

$$\begin{array}{ccc} 15 & 23 & \square \\ 15 & \square & 23 \\ 23 & 15 & \square \\ 23 & \square & 15 \\ \square & 15 & 23 \\ \square & 23 & 15 \end{array}$$

Ohne Berücksichtigung aller Ziffern, die in den Kästchen stehen, ergibt sich durch Addition

$$76 \quad 76 \quad 76$$

Nach Rainers Angabe ergibt sich mit Berücksichtigung der Ziffern in den Kästchen als Summe die Zahl

$$137 \quad 37 \quad 76$$

Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn eine Addition der folgenden Art

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \end{array}$$

auf ein Ergebnis führt, das seinerseits zu 767676 addiert die Summe 1373736 ergibt. Wegen 1373736 − 767676 = 606060 gilt dies genau dann, wenn die Addition das Ergebnis 606060 hat. Das trifft zu, wenn die Addition $\square + \square$ auf die Summe 60 führt, also genau dann, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

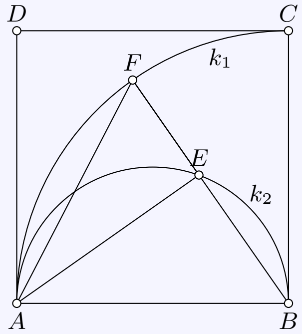
2. Lösungsweg:
Sind a und b (in dieser Reihenfolge) die gesuchten zwei Ziffern, so addiert Rainer die Zahlen

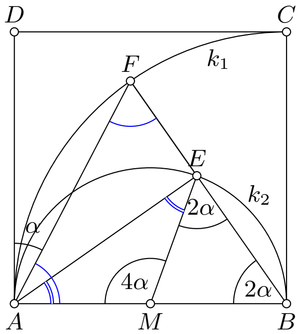
$$\begin{array}{rcl} 152300 + 10a + b & ; & 150023 + 100 \cdot (10a + b) \\ 231500 + 10a + b & ; & 230015 + 100 \cdot (10a + b) \\ 1523 + 10000 \cdot (10a + b) & ; & 2315 + 10000 \cdot (10a + b) \end{array}$$

Ihre Summe ist $767676 + 20202 \cdot (10a + b)$. Daher sind Rainers Aussagen genau dann erfüllt, wenn $767676+20202\cdot(10a+b) = 1373736$ gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $20202\cdot(10a+b) = 606060$, $(10a + b) = 30$.
Also treffen Rainers Aussagen genau dann zu, wenn auf der dritten Karte die Zahl 30 steht.

Aufgabe 6 - 250736

Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius AB sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2.
Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\angle DAF = \angle EAF$ folgt!





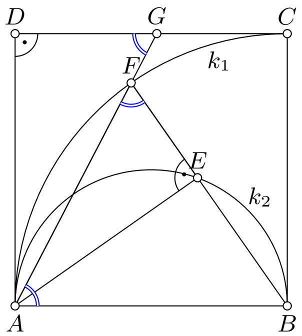
a)

Es sei M der Mittelpunkt von AB, ferner sei $\angle DAF = \alpha$ (Abbildung a).
Da $ABCD$ ein Quadrat ist, gilt $\angle BAD = 90°$, also $\angle BAF = 90° - \alpha$. (1)
Da A und F auf k_1 liegen, gilt $AB = FB$. Nach dem Basiswinkelsatz folgt somit $\angle AFB = \angle BAF = 90° - \alpha$. (2)
Aus (1), (2) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck ABF) folgt $\angle FBA = 2\alpha$. (3)
Da B und E auf k_2 liegen, gilt $BM = EM$ und somit nach dem Basiswinkelsatz $\angle MEB = \angle EBM = \angle FBA = 2\alpha$. (4)
Aus (3), (4) und dem Außenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck BEM) folgt $\angle EMA = 4\alpha$. (5)
Da A und E auf k_2 liegen, gilt $AM = EM$ und somit $\angle MAE = \angle AEM$.
Aus (5) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck AME) folgt daher

$$\angle MAE = \angle AEM = \frac{1}{2}(180° - \angle EMA) = 90° - 2\alpha \qquad (6)$$

Somit ergibt sich aus (1) und (6)

$$\angle EAF = \angle BAF - \angle MAE = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha$$



b)

2. Lösungsweg:
Die Verlängerung von AF schneide CD in G (Abbildung b). Dann folgt (Wechselwinkel):
$\angle AGD = \angle BAG = \angle BAF = \angle BFA$ (7) (Basiswinkel im Dreieck ABF mit $BA = BF$.) Ferner folgt $\angle GDA = 90° = \angle AEB$ (Thalessatz) $= \angle AEF$ (Nebenwinkel) (8)
Aus (7) und (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz, angewendet auf die Dreiecke AGD und AFE, $\angle EAF = \angle DAG = \angle DAF$.

Lösungen der III. Runde 1985 übernommen aus [5]

4.28 XXVI. Olympiade 1986

4.28.1 I. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260711
Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
b) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen lässt.
c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.
d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.
e) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

a) Für jede natürliche Zahl n gilt $\frac{7}{12} + \frac{n}{12} = \frac{7+n}{12}$; diese Summe ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 + n < 12$ gilt. Das trifft genau für $n = 0; 1; 2; 3; 4$ zu.

b) Aus den unter a) ermittelten n erfüllen genau diejenigen auch die Forderung b), die nach Addition von 7 eine zu 12 teilerfremde Zahl ergeben. Dies trifft genau für $n = 0; 4$ zu.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\frac{7}{12} - \frac{n}{12}$ zu berechnen, ist genau dann in Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar, wenn $n \leq 7$ gilt. Daher wird die Forderung c) genau von allen natürlichen Zahlen $n > 7$ erfüllt.

d) Für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ gilt $\frac{7}{12} - \frac{n}{12} = \frac{7-n}{12}$. Diese Differenz ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 - n < 12$ gilt. Dies trifft genau für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ (d.h. $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$) zu.

e) Die Summe $\frac{7+n}{12}$ ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn $(7 + n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist; d.h. genau dann, wenn n eine der Zahlen $n = 5; 17; 29; ...$ ist. Diese Zahlen lassen sich in der Form $n = 12k + 5$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ darstellen.

Aufgabe 2 - 260712
In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Missgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen.
Da zu jedem Vorhängeschloss von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer passt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muss herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloss gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: "Jetzt muss ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muss also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen."
Sein Freund Uwe meinte jedoch, dass man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d.h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloss den passenden Schlüssel findet!

Von den insgesamt zwölf Vorhängeschlössern passt zu jedem Schlüssel genau eines. Nehmen wir einen der zwölf Schlüssel und probieren, zu welchem von den zwölf Vorhängeschlössern er passt, so kann es im ungünstigsten Fall vorkommen, dass bei elfmaligen Probieren noch nicht das Schloss probiert wurde, zu dem der Schlüssel passt.

Da der Schlüssel aber zu einem der Schlösser gehört, muss er zu den Schloss passen, das beim Probieren noch nicht berücksichtigt wurde, und er kann ohne eine weitere Probe zu diesem Schloss gelegt werden. Bei zwölf Vorhängeschlössern finden wir also mit Sicherheit nach höchstens elfmaligem Probieren den Schlüssel, der zu einem der Schlösser passt.

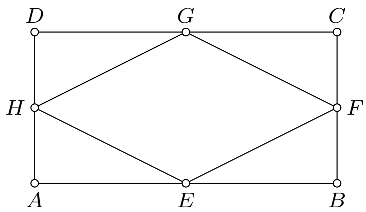
Ein weniger als elfmaliges Probieren dieses Schlüssels kann aber in ungünstigen Fällen die Frage nach dem passenden Schloss noch offen lassen. Für die noch verbleibenden elf Vorhängeschlösser und ihre Schlüssel gelten die entsprechenden Überlegungen, so dass wir nach höchstens zehnmaligem weiteren Probieren mit Sicherheit den Schlüssel zu einem dieser elf Vorhängeschlösser angeben können, während weniger als zehn Proben in ungünstigen Fällen nicht ausreichen.

Setzt man diese Überlegungen analog fort, dann folgt, dass nach höchstens 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 66.
Versuchen zu jedem der zwölf Vorhängeschlösser der passende Schlüssel gefunden werden kann und dass dies auch die gesuchte kleinste Anzahl von Proben ist.

Aufgabe 3 - 260713
Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden.
Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, dass jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.
Wie viel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Die Fläche für Wege und Spielplatz beträgt $\frac{1}{4}$ von 800 m^2, das sind 200 m^2. Zur Bearbeitung verbleiben somit 800 m^2 - 200 m^2 = 600 m^2.
Die Gesamtschülerzahl der drei Klassen beträgt $25 + 20 + 30 = 75$. Somit hat
Klasse 2 $\frac{25}{75}$ von 600 m^2, das sind 200 m^2,
Klasse 3 $\frac{20}{75}$ von 600 m^2, das sind 160 m^2 und
Klasse 4 $\frac{30}{75}$ von 600 m^2, das sind 240 m^2
zu bearbeiten.

Aufgabe 4 - 260714
Ein Junger Mathematiker zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, dass die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!



Die Eckpunkte des Rechtecks seien A, B, C, D, die Mittelpunkte der Seiten E, F, G, H (siehe Abbildung).
Da gegenüberliegende Seiten des Rechtecks einander gleichlang sind und da alle Seiten des Rechtecks halbiert werden, gilt: $AE = EB = DG = GCundAH = HD = BF = FC$
Außerdem sind alle Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ gleich groß. Demzufolge sind die Dreiecke HAE, EBT, FCG und GDH nach (sws) kongruent.

Nach den Eigenschaften kongruenter Dreiecke folgt: $HE = EF = FG = GH$, also sind alle Seiten des Vierecks $EFGH$ gleichlang, somit ist es ein Rhombus.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen aus [5]

4.28.2 II. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260721
Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.
Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten?
Wir setzen voraus, dass sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

Anne hat in einer Minute $\frac{1}{10}$ ihres Korbes gefüllt, Bernd $\frac{1}{15}$ und Peter $\frac{1}{30}$. Alle zusammen haben nach einer Minute also

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5}$$

eines Korbes gefüllt. Sie brauchen somit zusammen 5 Minuten, um einen Korb gemeinsam zu füllen.

Aufgabe 2 - 260722
Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete:

"Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 lässt."

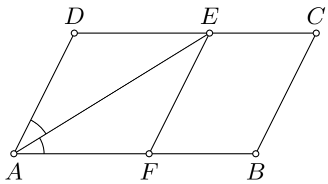
Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Dorit sei im Jahre x zehn Jahre alt geworden. Dann ist $x-1$ eine natürliche Zahl, die durch 2, 3, 5 und 11 teilbar ist. Diese vier Teilbarkeitsaussagen gelten genau dann, wenn $x-1$ ein Vielfaches des kgV dieser vier Zahlen ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass mit einer natürlichen Zahl n

$$x-1=330\cdot n \qquad \text{d.h.} \qquad x=330\cdot n+1$$

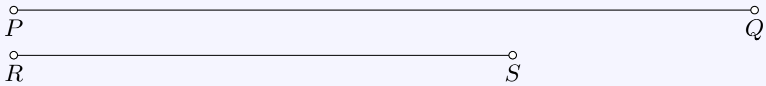
gilt. Da 330 bei Division durch 7 den Rest 1, also $330\cdot 2$ den Rest 2, $330\cdot 3$ den Rest 3 u.s.w. lässt, führt n = 6 auf die kleinste Zahl x, die (außer den genannten Teilbarkeitsaussagen für $x-1$) auch die Bedingung erfüllt, durch 7 teilbar zu sein.
Daraus folgt $x=330\cdot 6+1=1981$; d.h., aus Dorits Antwort lässt sich eindeutig ermitteln:
Dorit wurde im Mai des Jahres 1981 zehn Jahre alt; im Juni 1986 ist sie mithin 15 Jahre alt.

Aufgabe 3 - 260723
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\angle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.
Beweise, dass das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!



Nach Voraussetzung ist $AB \parallel CD$ und $FE \parallel AD$, somit ist das Viereck $AFED$ ein Parallelogramm mit $AF=DE$ und $AD=EF$.
Da der Winkel $\angle DAF$ durch AE halbiert wird, gilt $\angle DAE=\angle EAF$. Außerdem sind die Winkel $\angle EAF$ und $\angle AED$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleichgroß.
Damit gilt $\angle DAE=\angle EAF=\angle AED$, und das Dreieck AED ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit $AD=DE$. Also ist $AF=DE=AD=EF$, d.h., das Parallelogramm $AFED$ hat vier gleichlange Seiten und ist damit ein Rhombus.

Aufgabe 4 - 260724



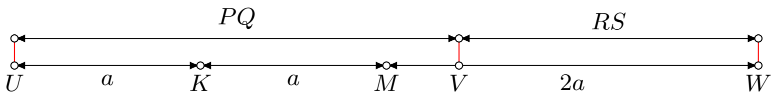
Zu zwei gegebenen Streckenlängen PQ und RS (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

(1) $PQ = 2a + b$,
(2) $RS = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.
Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:
(a) Übertrage PQ und RS auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen $PQ = 9{,}8$ cm und $RS = 6{,}6$ cm betragen!

(a) I. Konstruktion:



II. Beschreibung:
1. Man konstruiert eine Strecke UV der Länge $UV = PQ$.
2. Man verlängert UV über V hinaus um RS bis zum Punkt W.
3. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke UW.
4. Man konstruiert den Mittelpunkt K der Strecke UM.

Dann sind $UK = a$ und $MV = b$ die gesuchten Längen.

III. Begründung:
Für die so konstruierten Längen gilt: Nach 4. ist $UM = 2 \cdot UK = 2a$; hieraus und aus 1. folgt $PQ = UV = UM + MV = 2a + b$, d.h., (1) ist erfüllt.
Nach 3. ist ferner $MW = UM = 2a$; hieraus und aus 2. folgt $RS = VW = MW - MV = 2a - b$, d.h., (2) ist erfüllt.

(b) Aus (1) und (2), d.h. $2a + b = 9{,}8$ cm (3) und $2a - b = 6{,}6$ cm, (4) folgt durch Addition $4a = 16{,}4$ cm, also $a = 4{,}1$ cm. Hieraus und aus (3) folgt $b = 9{,}8$ cm$-8{,}2$ cm $= 1{,}6$ cm.

Lösungen der II. Runde 1986 übernommen aus [5]

4.28.3 III. Runde 1986, Klasse 7

Aufgabe 1 - 260731
Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km musste Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen.
Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf 60 $\frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?
(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ auf 60 $\frac{km}{h}$ h herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflusst.)

Die Fahrstrecke von A bis zu der Stelle, an der die Geschwindigkeit herabgesetzt wurde, beträgt $s_1 = 175$ km, die Fahrstrecke von dieser Stelle bis B beträgt $s_2 = 45$ km, die Gesamtstrecke von A bis B also $s = s_1 + s_2 = 220$ km. (1)
Die Geschwindigkeit, mit der die erste Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_1 = 100\frac{km}{h}$. Da diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{175}{170}\text{h} = \frac{7}{4}\text{h}$$

Die Geschwindigkeit, mit der die zweite Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_2 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da auch diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{45}{60}\text{h} = \frac{3}{4}\text{h}$$

Also ist die gesamte Fahrzeit von A nach B $t = t_1 + t_2 = \frac{5}{2}$ h (2). Aus (1) und (2) ergibt sich als gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\text{ km}}{\frac{5}{2}\text{h}} = 88\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 2 - 260732
Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben!
Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Es sei m die Anzahl der Mädchen, j die Anzahl der Jungen und f die Anzahl der Frauen. Die Anzahl aller Feriengäste in dem Ferienheim sei x. Dann gilt nach Aufgabenstellung

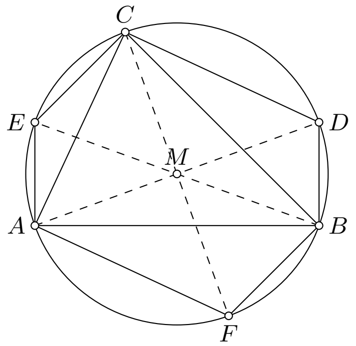
$$m = \frac{1}{2}(x - m) \qquad \text{also} \qquad m = \frac{x}{3} \tag{1}$$

Entsprechend folgt aus $j = \frac{1}{3}(x - j)$, also $3j = x - j$, die Beziehung $j = \frac{x}{4}$ (2) und aus $f = \frac{1}{4}(x - f)$ die Beziehung $f = \frac{x}{5}$ (3).
Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin $x = m + j + f + 26$. Hieraus folgt wegen (1), (2), (3)

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 26 \Rightarrow x = 120$$

Nochmals nach (1), (2), (3) folgt hieraus $m = 40$, $j = 30$, $f = 24$.
Damit ist gezeigt, dass sich aus den Angaben eindeutig diese Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben.

Aufgabe 3 - 260733
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!



Da die Dreiecke MFA und MCA in den Seitenlängen MF, MC (Radien von k) und in der Länge der zugehörigen Höhe (Lot von A auf den Durchmesser FC) übereinstimmen, gilt mit der Bezeichnung: Ist PQR ein Vieleck, so bezeichnet $J(PQR)$ seinen Flächeninhalt: $J(MFA) = J(MCA)$.

Entsprechend erhält man $J(MCD) = J(MCA)$, $J(MFB) = J(MCB)$, $J(MCE) = J(MCB)$, $J(MDB) = J(MAB)$, $J(MAE) = J(MAB)$.
Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich $J(AFBDCE) = 2 \cdot J(ABC)$. Das gesuchte Verhältnis beträgt folglich 2:1.

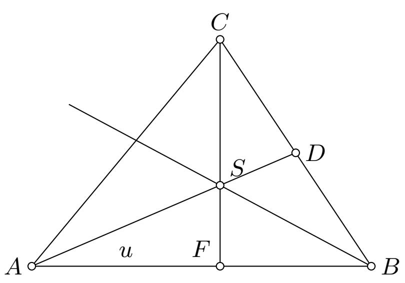
Aufgabe 4 - 260734
Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) m und n sind dreistellige Zahlen.
(2) Es gilt $m - n = 889$.
(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von m und n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

I. Wenn ein Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Wegen (1) gilt $1 \leq Q(m) \leq 27$, $1 \leq Q(n) \leq 27$. Daher kann (3) nur so erfüllt werden, dass entweder $Q(m) = 27$, $Q(n) = 2$ oder $Q(m) = 26$, $Q(n) = 1$ gilt.

Die einzige dreistellige Zahl m mit der Quersumme $Q(m) = 27$ ist aber $m = 999$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $n = m - 889 = 110$.
Die einzige dreistellige Zahl n mit der Quersumme $Q(n) = 1$ ist $n = 100$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $m = 889 + n = 989$.
Also können nur die Paare $(999; 110)$ und $(989; 100)$ (4) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 5 - 260735
Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben?
Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Es gibt derartige Dreiecke. Eine Konstruktion eines solchen Dreiecks ist z.B. die folgende:

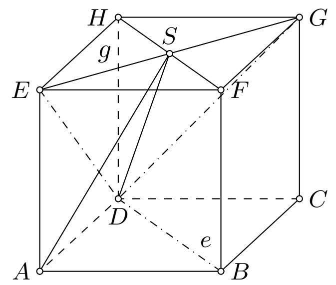
(1) Man konstruiert eine beliebige Strecke BC und ihren Mittelpunkt D.
(2) In B trägt man an BC einen beliebigen spitzen Winkel an, dessen Größe von 60° verschieden ist; der zweite Schenkel dieses Winkels sei u.
(3) Man fällt das Lot von C auf u; der Lotfußpunkt sei F.
(4) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\angle CBF$; sie schneidet CF in einem Punkt S.

(5) Man konstruiert die Gerade durch D und S; sie schneidet u in A.

1) Der genannte Schnittpunkt A existiert (bei jeder Wahlmöglichkeit in (1) und (2)); denn der in (4) konstruierte Punkt S liegt zwischen u und der Parallelen durch D zu u, weil die Konstruktion auf $BD = DC$, aber $FS < SC$ führt.

Aufgabe 6 - 260736
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.

a) Beweise, dass der Winkel $\angle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, dass der Winkel $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist!



(a) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, steht die Kante AE auf der Fläche $EFGH$ senkrecht. Da die Strecke SE in dieser Fläche liegt, steht AE auch auf SE senkrecht.
Folglich ist ASE ein Dreieck, das bei E einen rechten Winkel hat. Nach dem Innenwinkelsatz folgt hieraus, dass der Winkel $\angle ESA$ kleiner als ein rechter Winkel ist.

(b) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, sind die Flächendiagonalen ED, DG und GE einander gleichlang (als Diagonalen der zueinander kongruenten Quadrate $ADHE$, $DCGH$ bzw. $EFGH$).
Da S der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $EFGH$ ist, wird die Diagonale EG von S halbiert. Also ist DEG ein gleichseitiges Dreieck, und darin ist DS eine Seitenhalbierende. Somit ist DS auch Höhe in diesem Dreieck; d.h., DS steht senkrecht auf EG. Damit ist bewiesen, dass $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist.

Andere Lösunqsmöglichkeit:
Man wendet die folgenden beiden Sätze an, in denen g eine Gerade durch einen Punkt S bedeutet und e eine Ebene durch S bedeutet:

(1) Wenn g auf e senkrecht steht, so steht g auf allen und nur denjenigen Geraden durch S senkrecht, die in e liegen.
(2) Wenn g auf zwei verschiedenen in e liegenden Geraden durch S senkrecht steht, so steht g auf e senkrecht.

Auf der Ebene durch E, F, G, H stehen die Kanten BF und DH und daher auch die zu ihnen parallele Gerade durch S senkrecht. Nach Satz (1) steht diese Gerade also auch auf der Geraden g durch E, G senkrecht.

Auch die Gerade durch F und H steht auf g senkrecht (Diagonalen im Quadrat $EFGH$).
Nach Satz (2) stehen somit g und die Ebene e durch B, F, H, D aufeinander senkrecht. Daraus folgt nach Satz (1):
(b) Da DS in e liegt, steht DS auf EG senkrecht.
(a) Da AS nicht in e liegt, steht AS nicht auf EG senkrecht.

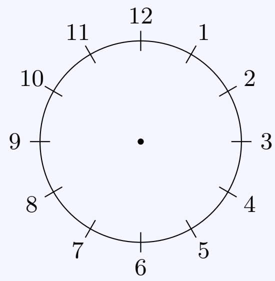
Lösungen der III. Runde 1986 übernommen aus [5]

4.29 XXVII. Olympiade 1987

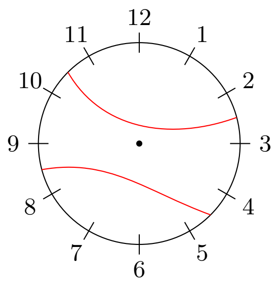
4.29.1 I. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270711

Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke.
Nachdem der erste Schreck über das Missgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, dass keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen.
Dabei stellte er fest, dass sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.



Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein?
Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, dass die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!



Das Zifferblatt könnte so zersprungen sein, wie die Abbildung zeigt. Dies überprüft man, indem man bestätigt, dass

$$11 + 12 + 1 + 2 = 3 + 4 + 9 + 10 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$$

gilt.

Aufgabe 2 - 270712

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und dass mindestens eine schwarze Kugel dabei ist.
Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinander unterscheiden.
Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, dass man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.
b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.
c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

a) Ein solches Herausgreifen ist möglich.
Die größtmögliche Anzahl herausgegriffener Kugeln, unter denen sich keine 12 von gleicher Farbe befinden, ergibt sich nämlich, indem man 11 rote, 11 blaue, 11 grüne und alle 10 schwarzen oder weißen Kugeln herausgreift, das sind 43 Kugeln. Greift man also (mindestens) 44 Kugeln heraus, so kann man folglich mit Sicherheit vorhersagen, dass sich darunter mindestens 12 von gleicher Farbe befinden müssen.

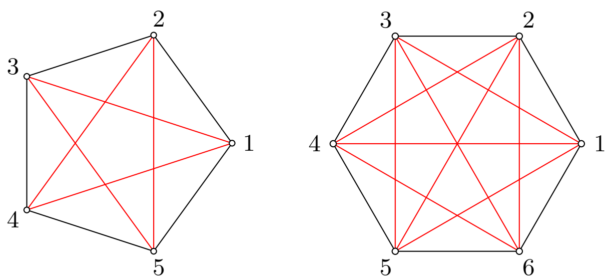
b) Ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn greift man, wie verlangt, nicht alle Kugeln heraus, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an überhaupt nur eine schwarze Kugel in der Kiste befand und dass (mindestens) gerade diese Kugel nicht mit herausgegriffen wird.

c) Auch ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.
Denn es ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, dass sich von Anfang an weniger als 5 weiße Kugeln in der Kiste befanden und folglich bei keinem Herausgreifen 5 weiße genommen werden.

Aufgabe 3 - 270713
In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

In jedem Dreieck gilt: Eine Seite ist stets kleiner als die Summe und stets größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.
Folglich gilt laut Aufgabe 2 cm $< c <$ 10 cm, wobei c die Länge der dritten Seite des betrachteten Dreiecks ist. Da nach Voraussetzung die Maßzahl von c gerade und von 4 und 6 verschieden ist, erfüllt nur $c = 8$ cm alle Bedingungen.
Der Umfang u des Dreiecks lässt sich somit eindeutig ermitteln, und es gilt: $u = 6 + 4 + 8 = 18$ cm.

Aufgabe 4 - 270714
Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.
a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!
c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Lässt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?



a) Das Fünfeck hat genau fünf und das Sechseck genau neun Diagonalen, wie man z.B. der Abbildung entnehmen kann.

b) Um in einem n-Eck alle Diagonalen zu erfassen, kann man für jeden der n Eckpunkte die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Eckpunkt außer den beiden benachbarten Eckpunkten betrachten. Damit hat man insgesamt $n \cdot (n-3)$mal eine Strecke betrachtet, und zwar jede Diagonale des n-Ecks genau 2mal.
Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen mit x, so gilt demzufolge $x = \frac{1}{2}n \cdot (n-3)$.

c) Für $n = 3$ gibt diese Formel den Wert $x = 0$. Er lässt sich in die Aussage fassen, dass bei jedem Dreieck die Anzahl der Diagonalen gleich Null ist.

Lösungen der I. Runde 1987 übernommen aus [5]

4.29.2 II. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270721
Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück.
Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, dass Jörg am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des für alle drei Tage geplanten Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag. Da $6 \cdot 24 = 144$ ist, betrug die gesamte Wanderstrecke 144 km.
Am ersten Tag legte Jörg somit $144km : 2 = 72$ km, am zweiten Tag $144km : 3 = 48$ km zurück. Damit verblieben Jörg für den dritten Tag wegen $144 - 72 - 48 = 24$ noch 24 km.

Aufgabe 2 - 270722
Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, dass für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln lässt!

(a) Wäre Dietmars Aussage falsch, dann wäre auch Angelas Aussage falsch. Da nach Petras Feststellung aber nur genau eine Aussage falsch ist, folgt eindeutig, dass Dietmars und damit auch Angelas Aussage wahr ist.
Daraus folgt eindeutig: Das erste Spiel endete unentschieden.

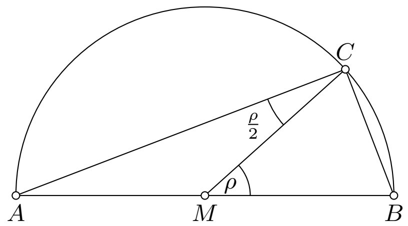
(b) Wenn Klasse 7a das zweite Spiel gewann, so ist Bodos Aussage wahr und folglich Constanzes Aussage falsch; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Wenn Klasse 7b das zweite Spiel gewann, ist Bodos Aussage falsch und folglich Constanzes Aussage wahr; ferner ist dann Angelas und daher auch Dietmars Aussage falsch.
Da es somit zwei verschiedene Ausgänge des zweiten Spiels gibt, bei denen Rolfs Feststellung zutrifft, lässt sich aus dieser Feststellung der Ausgang des zweiten Spiels nicht eindeutig ermitteln.

Aufgabe 3 - 270723
Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.
Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, dass die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Eine Zahl ist genau dann als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite möglich, wenn sie $c < a+b$ und $c > a-b$, d.h. $4 < c < 20$ erfüllt.
Für den Umfang $u = a + b + c = 20 + c$ (1) ist dies gleichbedeutend mit $24 < u < 40$.
Das ist genau dann eine Primzahl, wenn u eine der Zahlen 29, 31, 37 ist, und dies wegen (1) genau dann, wenn c eine der Zahlen $9, 11, 17$ ist.

Aufgabe 4 - 270724
Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, dass der Winkel $\angle BMC$

(a) die Größe $42°$,
(b) eine beliebig vorgegebene Größe ρ mit $0° < \rho < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ und die des Winkels $\angle ACB$!



(b) Aus den Voraussetzungen folgt: $MA = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle ACM = \angle CAM$ (Basiswinkel im Dreieck ACM).
Hieraus und aus $\angle ACM + \angle CAM = \rho$ (Außenwinkelsatz für Dreieck ACM) folgt $\angle ACM = \frac{\rho}{2}$. (1)
Aus den Voraussetzungen folgt ferner $MB = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle BCM = \angle CBM$ (Basiswinkel im Dreieck BCM). Hieraus und aus $\angle BCM + \angle CBM = 180° - \rho$ (Innenwinkelsatz für Dreieck BCM) folgt $\angle BCM = 90° - \frac{\rho}{2}$.
Daraus und aus (1) ergibt sich durch Addition $\angle ACB = 90°$. (2) Mit (1) und (2) sind die gesuchten Winkelgrößen ermittelt.

(a) Die Lösung zu (a) kann (mit der ebenso ausgeführten Herleitung oder) durch Einsatz von $\rho = 42°$ gefunden werden. Es ergibt sich $\angle ACM = 21°$ und $\angle ACB = 90°$.

Andere Lösungsmöglichkeiten:
Statt des Außenwinkelsatzes für Dreieck ACM kann der Innenwinkelsatz unter Verwendung von $\angle ACM = 180° - \rho$ (Nebenwinkel) herangezogen werden, ebenso statt des Innenwinkelsatzes für Dreieck BCM der Außenwinkelsatz.

Lösungen der II. Runde 1987 übernommen aus [5]

4.29.3 III. Runde 1987, Klasse 7

Aufgabe 1 - 270731
Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.
(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.
(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.
(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten! Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A					
B					
C					
D					

Aus den Angaben folgt:
Nach (4) gewann D gegen B und gegen den Vorjahressieger, d.h. nach (2) gegen A. Da ferner C nach (3) nicht gegen D gewann und nach (4) auch nicht gegen D unentschieden spielte, folgt:
(5) D gewann alle Spiele.
Da C hiernach aus dem Spiel gegen D keinen Punkt erhielt, folgt aus (3), dass die Summe der Punktzahlen, die C aus seinen Spielen gegen A und B erreichte, gerade ist. Ferner sind diese beiden Punktzahlen nach (3) kleiner als 2. Da C aber nach (1) nicht ohne Punkte blieb, verbleibt als einzige Möglichkeit:
(6) C spielte gegen A und B unentschieden.
Nach (5) und (6) erreichte A in den Spielen gegen C und D ebenso viele Punkte wie B gegen C und D. Also kann die nach (2) höhere Gesamtpunktzahl für A als für B nur dadurch entstanden sein, dass gilt:
(7) A gewann gegen B.
Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Punktzahlen folgen:

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A	–	2	1	0	3
B	0	–	1	0	1
C	1	1	–	0	2
D	2	2	2	–	0

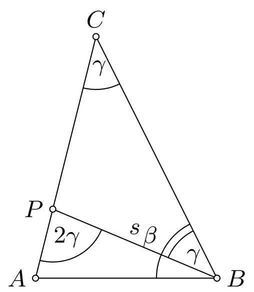
Aufgabe 2 - 270732
In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,20 M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.
Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebenso viele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.
Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Werden pro Jahr x Stück hergestellt, so würden die Herstellungskosten für die in 3 Jahren ohne Nutzung der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse $3x \cdot 19{,}20$ M betragen. 80% hiervon sind $0{,}8 \cdot 3x \cdot 19{,}20$ M $= 3x \cdot 15{,}36$ M.
Die Herstellungskosten für die in 3 Jahren mit der neuen Maschine hergestellten Erzeugnisse betragen $3x \cdot 13{,}15$ M. Also wird das Planziel genau dann erreicht, wenn $13500 + 3x \cdot 13{,}15 < 3x \cdot 15{,}36$, also $x \cdot 2{,}21 > 4500$ gilt.
Wegen $2036 \cdot 2{,}21 = 4499{,}56$ und $2037 \cdot 2{,}21 = 4501{,}77$ ist somit die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der das Planziel erreicht wird, $x = 2037$.

Aufgabe 3 - 270733
Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\angle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\angle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\angle APB$ hat die Größe 2γ.

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, dass sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und dass die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).



(a) Man trägt in B an BC denjenigen Winkel der Größe γ an, dessen zweiter Schenkel s auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegt wie A.
Für jedes Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ gilt: Da der Strahl s von B aus in das Innere des Dreiecks geht, schneidet er die Strecke AC in genau einem Punkt P.

(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) liegt P auf AC, also auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A, es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$, und BCP ist ein Dreieck, für das nach den Außenwinkelsatz und nach (2)

$$\angle CBP = \angle APB - \angle PCB = 2\gamma - \gamma = \gamma$$

gilt. Also liegt P auf AC und auf dem zweiten Schenkel s des nach der Konstruktionsbeschreibung an BC angetragenen Winkels der Größe γ.

(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, so folgt: P liegt auf AC, erfüllt also (1), und es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$. Ferner folgt nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion $\angle APB = \angle PCB + \angle CBP = \gamma + \gamma = 2\gamma$, also ist auch (2) erfüllt.

Aufgabe 4 - 270734
Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die $x^2 + xy + y^2 = 49$ gilt!

Man kann zunächst diejenigen Paare ermitteln, die außer der geforderten Gleichung noch $x \leq y$ erfüllen.

I. Wenn ein Paar $(x; y)$ diese Bedingungen erfüllt, so folgt

$$3x^2 \leq x^2 + xy + y^2 = 49 < 51 \Rightarrow x^2 < 17$$

x ist eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.
Für $x = 0$ folgt $y^2 = 49$, also $y = 7$.
Für $x = 1$ folgt $y + y^2 = 48$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y \leq 6$ ist, so gilt $y + y^2 \leq 6 + 36 < 48$, und wenn $y \geq 7$ ist, so gilt $y + y^2 \geq 7 + 49 > 48$.

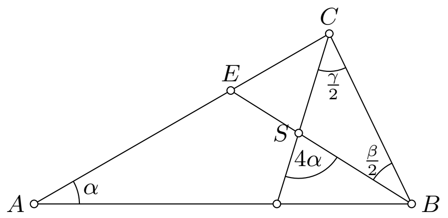
Für $x = 2$ folgt $2y + y^2 = 45$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y \leq 5$ ist, so gilt $2y + y^2 \leq 10 + 25 < 45$, und wenn $y \geq 6$ ist, so gilt $2y + y^2 \geq 12 + 36 > 45$.

Für $x = 3$ folgt $3y + y^2 = 40$. Dies wird nur von $y = 5$ erfüllt; denn wenn $y < 5$ ist, so gilt $3y + y^2 < 15 + 25 = 40$, und wenn $y > 5$ ist, so gilt $3y + y^2 > 40$.

Für $x = 4$ folgt $4y + y^2 = 33$. Dies wird von keiner natürlichen Zahl y erfüllt; denn wenn $y \leq 4$ ist, so gilt $4y + y^2 \leq 16 + 16 < 33$, und wenn $y \geq 5$ ist, so gilt $4y + y^2 \geq 20 + 25 > 33$.

Also können nur die Paare $(x; y) = (0; 7)$ und $(x; y) = (3; 5)$ (1)
die geforderte Gleichung und die Bedingung $x \leq y$ erfüllen.
Nach Weglassen der Bedingung $x \leq y$ kommen zu (1) noch genau die Paare $(x; y) = (7; 0)$ und $(x; y) = (5; 3)$ (2) hinzu. Also sind genau die in (1) und (2) genannten Paare alle gesuchten.

Aufgabe 5 - 270735
In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ bzw. $\angle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$.
Vorausgesetzt werde nun, dass der Winkel $\angle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

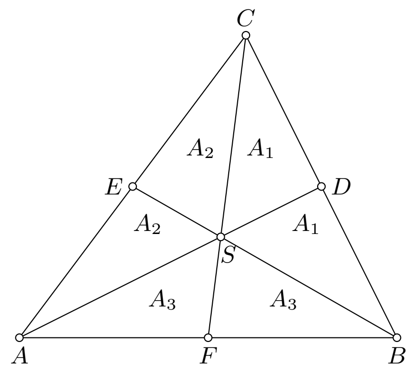


Mit den Bezeichnungen $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ folgt aus dem Außenwinkelsatz für Dreieck BCS und aus der Voraussetzung

$$4\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \qquad , \qquad 8\alpha = \beta + \gamma$$

Ferner ist nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Somit folgt $8\alpha = 180° - \alpha$, $9\alpha = 180°$; damit ergibt sich, dass durch die Voraussetzung eindeutig bestimmt ist: $\alpha = 20°$.

Aufgabe 6 - 270736
In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.
Beweise, dass für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!



Wegen $BD = DC$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke BDS und DCS einander gleichen Flächeninhalt; dieser sei mit A_1 bezeichnet.
Ebenso haben CES und EAS einander gleichen Flächeninhalt A_2 sowie AFS und FBS einander gleichen Flächeninhalt A_3.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke AFC und FBC einander gleichen Flächeninhalt, also gilt $A_3 + 2A_2 = A_3 + 2A_1$. Daraus folgt $A_1 = A_2$. Ebenso ergibt sich $A_1 = A_3$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Lösungen der III. Runde 1987 übernommen aus [5]

4.30 XXVIII. Olympiade 1988

4.30.1 I. Runde 1988, Klasse 7

Aufgabe 1 - 280711
Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:
Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab.
Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?
b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

a) Für den beginnenden Spieler gibt es eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen. Man kann dies folgendermaßen zeigen:

Der Spieler kann den Gewinn erzwingen, wenn sich (im Verlauf des Spiels) herausstellt:
Der Spieler kann erreichen, dass sein Gegenspieler eine der Zahlen 90, 91, ..., 99 nennen muss. (1)
Von jeder dieser Zahlen aus ist nämlich die Zahl 100 im nächsten Schritt erreichbar. Wenn nun der Spieler selbst die Zahl 89 nennen kann, so trifft für ihn (1) zu, und er kann den Gewinn erzwingen. Diese Zahl 89 ist um 11 kleiner als 100. Verkleinert man sie nochmals um 11 und wendet entsprechende Überlegungen an, so folgt:
Wenn der Spieler selbst die Zahl 78 nennen kann, so muss sein Gegenspieler eine der Zahlen 79, 80, ..., 88 nennen. Damit hat wiederum der Spieler in jedem Fall die Möglichkeit, 89 zu nennen und kann den Gewinn erzwingen.

Weitere Zahlen, deren Erreichen die Möglichkeit ergibt, den Gewinn zu erzwingen, sind entsprechend durch Subtraktion von 11 zu erhalten. Sie lauten 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1.
Damit ist gezeigt:
Der beginnende Spieler kann das Spiel dadurch in jedem Fall gewinnen, dass er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und dann 100 nennt. (2)

b) Es gibt auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen.
Ein solcher Spielbeginn liegt vor, wenn der beginnende Spieler als erste Zahl eine der Zahlen 2, 3, ... 9 nennt. Dann nämlich hat der zweite Spieler die Möglichkeit, die Zahl 12 zu nennen, und von da ab kann er der Reihe nach (stets, wenn er am Spiel ist) die weiteren in (2) angeführten Zahlen nennen.
Wie in a) gezeigt ist, erzwingt er damit den Gewinn.

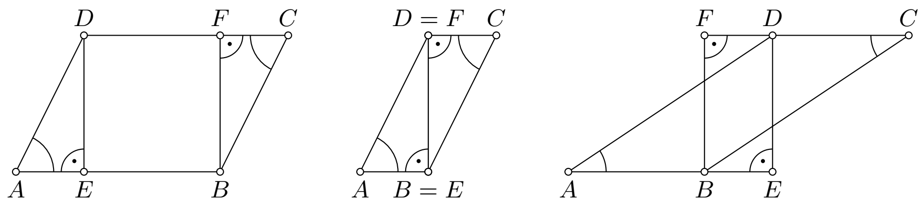
Aufgabe 2 - 280712
Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.
a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.
b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

a) Mit zwei Ziffern kann man genau zwei verschiedene zweistellige Zahlen bilden (z. B. 13 und 31). (1)
Nimmt man eine dritte Ziffer hinzu, so kann diese vor, zwischen oder hinter die beiden Ziffern der zweistelligen Zahl gesetzt werden; das sind somit drei Möglichkeiten. Aus (1) folgt demnach wegen $2 \cdot 3 = 6$, dass aus drei verschiedenen Ziffern genau sechs verschiedene dreistellige Zahlen gebildet werden können. (2)
Bildet man nun unter Hinzunahme einer vierten Ziffer vierstellige Zahlen, kann diese vierte Ziffer an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen (vier Möglichkeiten), und aus (2) folgt wegen $6 \cdot 4 = 24$, dass auf diese Weise 24 vierstellige Zahlen gebildet werden können. (3)
Durch analoge Überlegungen erkennt man, dass es hinsichtlich der Stellung einer fünften Ziffer in einer vierstelligen Zahl genau fünf Möglichkeiten gibt und somit wegen (3) und $5 \cdot 24 = 120$ insgesamt 120 fünfstellige Zahlen gebildet werden können. (4)
Die Anzahl der sechsstelligen Zahlen ergibt sich analog aus (4) und wegen $6 \cdot 120 = 720$. Somit können aus den genannten Ziffern genau 720 verschiedene sechsstellige Zahlen gebildet werden.

b) Eine natürliche Zahl ist nur dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 9 teilbar ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Alle 720 auf die geforderte Weise gebildeten Zahlen haben jedoch die Quersumme $1+3+4+5+7+9 = 29$, folglich ist keine dieser Zahlen durch 18 teilbar.

Aufgabe 3 - 280713
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\angle DAB$ ein spitzer Winkel ist!
Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!
b) Beweise, dass in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\triangle AED \cong \triangle CFB$ gilt!

a) In den Abbildungen sind drei Beispiele einer geforderten Zeichnung angegeben.



b) Für jedes solche Parallelogramm $ABCD$ und die konstruierten Punkte E, F gilt
$AD = CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm) (1)
$\angle AED = \angle CFB$ (Lote, nach Konstruktion) (2)
$\angle DAE = \angle BCF$ (gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm) (3)

Aus (1), (2), (3) folgt: Die Dreiecke AED und CFB stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein, nach dem Innenwinkelsatz also auch im dritten Winkel. Daher folgt aus den Kongruenzsatz (wsw): $\triangle AED \cong \triangle CFB$.

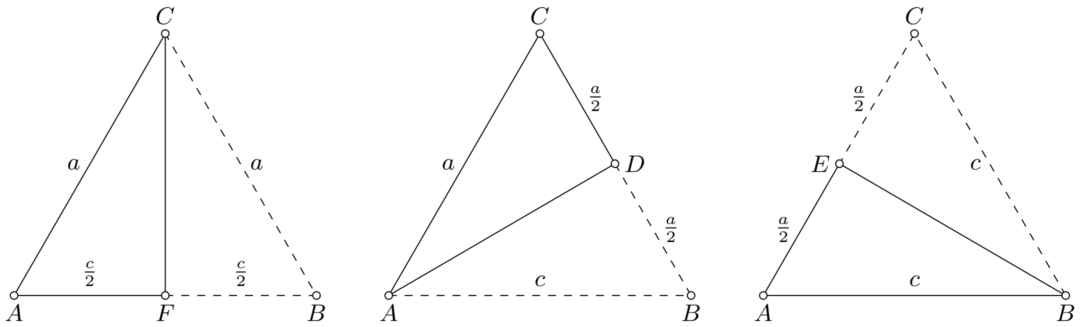
Aufgabe 4 - 280714
Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, dass eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, dass der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.
Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim: "Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit: "Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."
Claudia: "Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."
Dorit: "Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

Wenn AD, BE und CF die Seitenhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit $AC = BC = a$; $AB = c$ sind, so gilt:
Die Teile, in die CF den Umfang teilt, haben die Längen $a + \frac{c}{2}$ und $a + \frac{c}{2}$. (1) (Siehe Abbildung a)

Ferner haben sowohl die Teile, in die AD den Umfang teilt, als auch die Teile, in die BE den Umfang teilt, die Längen $c + \frac{a}{2}$ und $a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$. (2) (Siehe Abbildungen b und c)
Die Längen (1) sind einander gleich, können also nicht 12 cm und 9 cm betragen; daher kann die Forderung der Aufgabe nicht mit der Seitenhalbierenden CF erfüllt werden!



Dafür, dass die Längen (2), wie gefordert, 12 cm und 9 cm betragen, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

I. Es ist $\frac{3}{2}a = 12$ cm und $c + \frac{a}{2} = 9$ cm. Dann folgt $a = 8$ cm und $c = 5$ cm.

II. Es ist $\frac{3}{2}a = 9$ cm und $c + \frac{a}{2} = 12$ cm. Dann folgt $a = 6$ cm und $c = 9$ cm.

Ein Dreieck ABC mit den in I. genannten Längen $AC = BC = 8$ cm, $AB = 5$ cm gibt es, da die Summe je zweier Seiten größer ist als jeweils die dritte Seite. Ein Dreieck ABC mit den in II. genannten Längen $AC = BC = 6$ cm, $AB = 9$ cm gibt es (aus demselben Grund) ebenfalls.

Wegen der Verschiedenheit ihrer Seitenlängen sind die beiden genannten Dreiecke auch nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Achim, Birgit und Dorit haben nicht recht; Claudia hat recht.

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen aus [5]

4.30.2 II. Runde 1988, Klasse 7

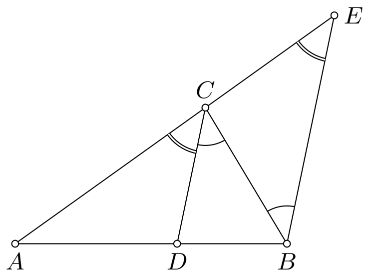
Aufgabe 1 - 280721
Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: "Die Zahl ist durch 11 teilbar."
(2) Birgit: "Die Zahl ist eine Primzahl."
(3) Christian: "Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."
(4) Doris: "Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.
Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Da eine Primzahl weder zusammengesetzte Zahl noch Quadratzahl sein kann, muss die Aussage (2) falsch sein, denn sonst wären (3) und (4) falsch, was der Feststellung des Mathematiklehrers widersprechen würde.
Nochmals wegen dieser Feststellung ist (2) die einzige falsche der Aussagen (1) bis (4), also sind (1) und (4) wahr.
Die gesuchte Zahl ist somit eine durch 11 teilbare Quadratzahl. Da 11 eine Primzahl ist, muss diese durch 11 teilbare Quadratzahl sogar durch $11^2 = 121$ teilbar sein. Die einzige durch 121 teilbare Zahl zwischen 100 und 200 ist aber die Zahl 121 selbst.
Damit ist gezeigt, dass die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist; sie lautet 121.

Aufgabe 2 - 280722
Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!



$\angle CBE = \angle BCD$ ($CD \parallel BE$ und Wechselwinkelsatz). (1)
$\angle BCD = \angle ACD$ (Halbierung $\angle ACB$ durch CD) (2)
$\angle ACD = \angle CEB$ ($CD \parallel BE$ und Stufenwinkelsatz). (3)
$\angle CBE = \angle CEB$ (aus (1), (2) und (3)). (4)

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist somit das Dreieck BEC (mit $BC = EC$) gleichseitig.

Aufgabe 3 - 280723
Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie 5 : 4.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.
(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.
Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist.
Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

Wegen (1) gilt $AB : CD = 5 : 4$, also $CD = \frac{4}{5}AB$. (4)
Da die Länge der Mittellinie im Trapez gleich der Hälfte der Summe der Längen der beiden parallelen Seiten ist, gilt wegen (2) $\frac{1}{2}(AB + CD) = 5{,}4$ cm. Hieraus und aus (4) folgt

$$\frac{1}{2}(AB + \frac{4}{5}AB) = 5{,}4 \text{ cm} \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}$$

Nach (3) folgt hieraus: Die Höhenlänge des Trapezes beträgt 3 cm. Daraus und aus (2) ergibt sich nach der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes, dass dieser (wegen $5{,}4 \cdot 3 = 16{,}2$) durch die Angaben (1) bis (3) eindeutig bestimmt ist; er beträgt 16,2 cm^2.

Aufgabe 4 - 280724
a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!
b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1000!

a) Für jede mögliche Zehnerziffer gibt es genau zwei durch 5 teilbare Zahlen, nämlich eine, die auf 0, und eine, die auf 5 endet.
Die Summe der Zehnerziffern aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen ist somit $2\cdot(1+2+3+...+9) = 90$, und die Summe ihrer Einerziffern erhält man mit $9 \cdot 5 + 9 \cdot 0 = 45$. Also beträgt die gesuchte Summe der genannten Quersummen $90 + 45 = 135$.

b) Betrachtet man alle natürlichen Zahlen von 0 bis 999, so erkennt man, dass jede der Ziffern von 0 bis 9 in der Hunderterstelle genau 100mal auftritt.
Lassen wir die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Zehnerstelle jede der Ziffern genau zehnmal auf, beim Durchlaufen aller zehn Ziffern der Hunderterstelle insgesamt also $10 \cdot 10 = 100$ mal. Lässt man die Zehnerstelle und die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Einerstelle jede der Ziffern genau einmal auf, insgesamt $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ mal. Die Zahl 1000 hat die Quersumme 1.

Aus den vorgenannten Feststellungen folgt: Die gesuchte Summe der genannten Quersummen beträgt

$$300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + ... + 300 \cdot 9 + 1 = 300 \cdot 45 + 1 = 13501$$

Lösungen der II. Runde 1988 übernommen aus [5]

4.30.3 III. Runde 1988, Klasse 7

Aufgabe 1 - 280731
Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2.
Wäre das Volumen von w_2 um genau 9 cm^3 kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Nach den Angaben gilt für die Volumina a_1^3 und a_2^3 von w_1 bzw. w_2

$$a_1^3 = 8a_2^3 \quad (1) \qquad ; \qquad a_2^3 - 9cm^3 = \frac{a_1^3}{12} \quad (2)$$

Aus (2) folgt $12a_2^3 - 108$ cm$^3 = a_1^3$, hieraus und aus (1) folgt

$$12a_2^3 - 108 \text{ cm}^3 = 8a_2^3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 3 \text{ cm} \quad (3)$$

Daraus und aus (1) ergibt sich $a_1^3 = 8 \cdot 27$ cm^3, $a_1 = 6$ cm. (4)
Mit (3) und (4) sind die gesuchten Kantenlängen ermittelt.

Aufgabe 2 - 280732
In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Der Restbestand enthält $\frac{32}{100} \cdot 300$ kg = 96 kg Alkohol. Fügt man (x kg 90prozentigen Alkohol und damit) $\frac{9}{10}x$ kg Alkohol hinzu, so enthält der neue Bestand $(96 + \frac{9}{10}x)$ kg Alkohol.
Damit dies 40 Prozent der Menge $(300 + x)$ kg des neuen Bestandes sind, muss

$$96 + \frac{9}{10}x = \frac{4}{10}(300 + x)$$

gelten. Daraus folgt

$$96 + \frac{9}{10}x = 120 + \frac{4}{10}x \qquad \Rightarrow \qquad x = 48$$

Die gesuchte Menge 90prozentigen Alkohols beträgt 48 kg.

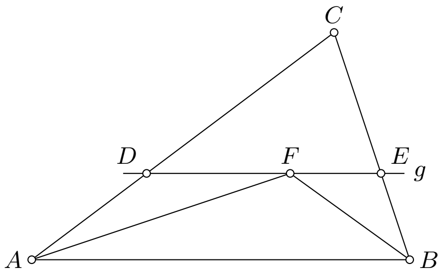
Aufgabe 3 - 280733
Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $AD + BE = DE$.

I. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

I. Analyse:
Wenn eine Gerade g die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) gibt es auf der Strecke DE einen Punkt F, für den $DF = AD$ und $EF = BE$ (3) gilt. Aus (3) folgt nach dem Basiswinkelsatz

$\angle DAF = \angle DFA$ und $\angle EBF = \angle EFB$; (4)
wegen (1) gilt nach dem Wechselwinkelsatz
$\angle DFA = \angle FAB$ und $\angle EFB = \angle ABF$; (5)
Aus (4) und (5) folgt: AF halbiert den Winkel $\angle BAC$, und BF halbiert den Winkel $\angle ABC$. Damit und wegen (1) ist gezeigt, dass eine Gerade g, wenn sie (1) und (2) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:



II. Konstruktionsbeschreibung:
1. Man konstruiert die Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und $\angle ABC$ und ihren Schnittpunkt F.
2. Man konstruiert die Parallele g durch F zu AB.

III. Beweis:
Wenn eine Gerade g nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:
Nach Konstruktionsschritt 2. erfüllt die Gerade g die Bedingung (1).

Nach Konstruktionsschritt 1. gilt für ihre Schnittpunkte D, E mit AC bzw. BC ferner $\angle DAF = \angle FAB$ und $\angle EBF = \angle ABF$; (6) nach Konstruktionsschritt 2. und dem Wechselwinkelsatz gilt $\angle FAB = \angle DFA$ und $\angle ABF = \angle EFB$. (7)

Aus (6) und (7) folgt nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = DF$ und $BE = EF$, also ist mit $AD + BE = DF + EF = DE$auch die Bedingung (2) erfüllt.

IV. Konstruktion: siehe Abbildung

Aufgabe 4 - 280734
Ermittle alle diejenigen Paare (p, q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

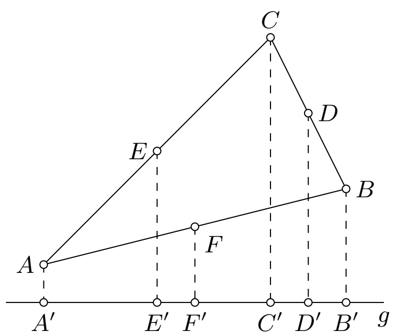
(1) Es gilt $q > p + 1$.
(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

I. Wenn ein Paar $(p; q)$ von Primzahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt:
Nach (1) und (2) sind q und s Primzahlen größer als 2, also ungerade. Da nach (3) aber $p \cdot q \cdot s$ gerade ist, muss p gerade sein, also $p = 2$ (4) gelten. Aus (3) und (4) folgt:
$q \cdot s$ ist durch 5 teilbar. Da q und s Primzahlen sind, ist das nur möglich, wenn $q = 5$ oder $s = 5$ gilt. Wegen (2) und (4) folgt hieraus $s = 7$ oder $q = 3$.

Da nach (1) und (4) aber $q > 3$ gilt, verbleibt nur die Möglichkeit $s = 7$ und damit $q = 5$. Also kann nur das Paar (2; 5) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 5 - 280735
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$AA' + BB' + CC' = DD' + EE' + FF'$$



Nach Voraussetzung sind BB', CC' und DD' senkrecht zu g, also zueinander parallel, und D ist der Mittelpunkt von BC. Da die Gerade durch B und C auf g nicht senkrecht steht, ist die Gerade, in der das Lot BB' liegt, auch verschieden von der Geraden, in der CC' liegt.
Also ist $B'BCC'$ ein Trapez, und DD' ist seine Mittellinie.
Nach dem Satz über die Länge der Mittellinie gilt folglich $DD' = \frac{1}{2}(BB' + CC')$. Entsprechend erhält man auch
$EE' = \frac{1}{2}(CC' + AA')$, $FF' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$.

Durch (Ausmultiplizieren der Klammern und) Addieren dieser drei Gleichungen erhält man die Behauptung

$$DD' + EE' + FF' = AA' + BB' + CC'$$

Aufgabe 6 - 280736
Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d.h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... u.s.w. werden markiert.
Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d.h., beim Weiterzählen lässt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

In ersten Umlauf werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 991.
Der zweite Umlauf erbringt als erste markierte Zahl die Zahl $991 + 15 - 1000 = 6$; anschließend werden folglich im zweiten Umlauf genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen. Die letzte dieser Zahlen ist 996.
Entsprechend werden im dritten Umlauf markiert: zuerst die Zahl $996+15-1000 = 11$, dann alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, und als letzte die Zahl 986.
Eine weitere Fortsetzung würde die Zahl $986+15-1000 = 1$ und daher nur noch bereits markierte Zahlen erreichen, so dass der Vorgang beendet, ist.

Also werden genau diejenigen der Zahlen markiert, die bei Division durch 15 einen der Reste 1, 6, 11 lassen. Das sind genau diejenigen der Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, d.h. genau die Zahlen $1, 1 \cdot 5 + 1 = 6$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, ..., $199 \cdot 5 + 1 = 996$.

Ihre Anzahl (wie diese Aufzählung zeigt, zu erhalten als die Anzahl der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... 199) beträgt 200. Also sind genau $1000 - 200 = 800$ Zahlen ohne Markierung geblieben.

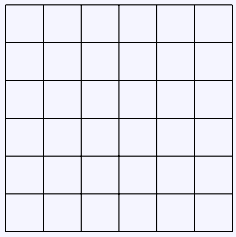
Lösungen der III. Runde 1989 übernommen aus [5]

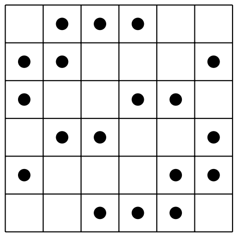
4.31 XXIX. Olympiade 1989

4.31.1 I. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290711

Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, dass jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.
Gib eine derartige Verteilung an!
Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft.
Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.





Eine mögliche Verteilung zeigt die Abbildung.

Aufgabe 2 - 290712
Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Platzierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.
(2) Uwe wurde nicht Zweiter.
(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.
Untersuche, ob sich hieraus ermitteln lässt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Fall so gib die Platzierung an!

Wäre (3) die wahre Aussage, dann folgte, da (3) wahr und (2) falsch wäre, dass sowohl Volker als auch Uwe den zweiten Platz belegt hätten; im Widerspruch zum Aufgabentext.
Wäre (2) die wahre Aussage, dann folgte, da (2) wahr und (1), (3) falsch wären, dass keiner der drei Schüler den zweiten Platz belegt hätte; ebenfalls im Widerspruch zum Aufgabentext.
Somit kann nur (1) wahr sein. Da folglich (2) falsch ist, ergibt sich: Uwe wurde Zweiter. Hiernach und da (1) wahr ist, folgt: Thomas wurde Dritter, Volker wurde Erster.
Hiermit ist auch gezeigt, dass sich diese Platzierung aus den Bedingungen des Aufgabentextes ermitteln lässt.

Aufgabe 3 - 290713
Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989:
"Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche."
Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

I. Wenn Rolfs Aussage zutrifft, dann folgt:
Wäre Rolf vor dem Jahr 1900 geboren, dann müsste die Quersumme seines Geburtsjahres, da sie gleich seinem Alter ist, größer als 89 sein, was für keine Jahreszahl vor 1900 zutrifft. Also wurde Rolf in einem

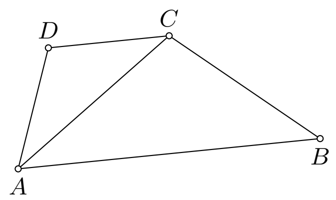
Jahr mit einer Zifferndarstellung $19xy$ geboren. Die Quersumme $1+9+x+y$ ist zugleich Rolfs Alter im Jahr 1989; d.h., es gilt

$$1+9+x+y = 1989 - (1900+10x+y) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{79-2y}{11}$$

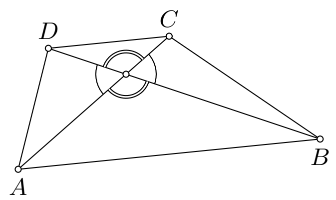
Da x eine natürliche Zahl ist, muss $79 - 2y$ durch 11 teilbar sein. Wie z.B. ein Durchprobieren aller natürlichen Zahlen y mit $0 \leq y \leq 9$ zeigt, ist das nur für $y = 1$ der Fall. Damit ergibt sich $x = 7$.
Also kann Rolfs Aussage nur dann zutreffen, wenn er im Jahr 1971 geboren wurde.

II. Bei diesem Geburtsjahr trifft die Aussage in der Tat zu; denn im Jahr 1989 ist Rolf dann 18 Jahre alt, und $1 + 9 + 7 + 1 = 18$ ist auch die Quersumme der Jahreszahl 1971. Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr, für das seine Aussage zutrifft, nämlich das Jahr 1971.

Aufgabe 4 - 290714
Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit: Klaus behauptet:
"Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke 180°. Folglich muss im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen."
Anja entgegnet: "Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muss folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!



Klaus hat recht. Wie die erste Abbildung zeigt, sind sämtliche Innenwinkel der Dreiecke ABC und ADC auch Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln des Vierecks $ABCD$.
Außerdem gibt es keine Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln dieses Vierecks, die nicht Innenwinkel der genannten Dreiecke sind.



Anja hat dagegen nicht recht, wie die zweite Abbildung zeigt, liegen nämlich vier der Innenwinkel der durch die beiden Diagonalen entstandenen Dreiecke innerhalb des Vierecks $ABCD$ und bilden zusammen einen Vollwinkel. Folglich hätte Anja von den erhaltenen 720° noch 360° subtrahieren müssen, was als Innenwinkelsumme dann die von Klaus ermittelten 360° ergeben hätte.

Lösungen der I. Runde 1989 übernommen aus [5]

4.31.2 II. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290721
Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte.
Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

Da von dem Restbetrag, den Susi wieder mit nach Hause brachte, die Hälfte genau 1,05 M war, ergibt sich, dass dieser Restbetrag selbst 2,10 M betragen hat. Doppelt so viel, also 4,20 M, gab Susi beim Bäcker aus.
Nach dem Einkauf im Fleischer-, Milch- und Gemüseladen hatte sie also noch 4,20 M + 2,10 M = 6,30 M. Im Fleischerladen gab sie 30% des Betrages aus, den ihr die Mutter ursprünglich mitgegeben hatte; im Gemüseladen vier Fünftel von diesen 30%, das sind also 24% des ursprünglichen Betrages.
Im Milchladen gab sie ein Viertel, d.h. 25% des ursprünglichen Betrages aus. Daher gab Susi in diesen drei Läden zusammen $30\% + 25\% + 24\% = 79\%$ des ursprünglichen Betrages aus; folglich waren die 6,30 M, die ihr nach diesen drei Einkäufen verblieben waren, 21% des ursprünglichen Betrages. War G dieser Betrag, so gilt also $G = 6{,}30 \cdot \frac{100}{21}$ M = 30 M.

Aufgabe 2 - 290722
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluss aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, dass dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluss aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben.
Weise nach, dass bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus.
Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

a) Jede Mannschaft erhält in jedem Spiel 2 Punkte. Sie spielt im Turnier insgesamt 13 Spiele. Die Summe aller Punkte, die sie im Turnier erhält, beträgt daher $2 \cdot 13 = 26$.

b) Da nach a) jede der 14 Mannschaften 26 Punkte erhält, werden im Turnier insgesamt $14 \cdot 26$ Punkte vergeben. Von diesen sind genau die Hälfte Gewinnpunkte, da dies für jedes einzelne Spiel zutrifft, gleichgültig welches Ergebnis es hatte. Bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse beträgt die Summe aller Gewinnpunkte daher $\frac{14 \cdot 26}{2} = 14 \cdot 13 = 182$.

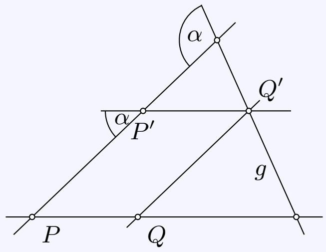
c) War x die Anzahl der Mannschaften, so erhält analog zu a) jede Mannschaft $2 \cdot (x-1)$ Punkte. Die Summe aller Gewinnpunkte beträgt analog zu b) daher $\frac{x \cdot 2 \cdot (x-1)}{2} = x \cdot (x-1)$. Sie kann also nur dann 432 betragen, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, für die $x \cdot (x-1) = 432$ gilt.

Alle Zerlegungen von 432 in zwei Faktoren, die natürliche Zahlen sind, lauten

$$432 = 1 \cdot 432 = 2 \cdot 216 = 3 \cdot 144 = 4 \cdot 108 = 6 \cdot 72 = 8 \cdot 54 = 9 \cdot 48 = 12 \cdot 36 = 16 \cdot 27 = 18 \cdot 24$$

In keiner dieser Zerlegungen haben die Faktoren die Differenz 1. Als Summe aller Gewinnpunkte kann 432 nicht auftreten.

Aufgabe 3 - 290723



Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.
Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

Ist S der Scheitel des gekennzeichneten Winkels der Größe β, so $\angle SP'Q'$ ist der Scheitelwinkel des gekennzeichneten Winkels der Größe α. Daher ist auch $\angle SP'Q' = \alpha$.
Nach den Eigenschaften jeder Verschiebung ist die Gerade durch P', Q' parallel zur Geraden durch P, Q. Daher gilt nach dem Stufenwinkelsatz $\angle P'Q'S = \gamma$. Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf Dreieck $P'Q'S$, folgt daher $\alpha + \gamma = \beta$ und somit $\gamma = \beta - \alpha$.

Aufgabe 4 - 290724
a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, dass die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!
b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!
d) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

a) Die Quersumme von 331 beträgt $3 + 3 + 1 = 7$. Durch Anfügen einer vierten Ziffer entsteht genau dann eine Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, wenn diese Ziffer 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet.
Nach der Teilbarkeitsregel, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, ist damit bewiesen: alle gesuchten Möglichkeiten für die anzufügende vierte Ziffer sind 2, 5, 8.

b) Da 6 durch 3 teilbar ist, entsteht aus der Quersumme 7 durch ein- oder mehrmaliges Addieren von 6 stets wieder eine Summe, die ebenso wie 7 nicht durch 3 teilbar ist. Also kann man durch Anfügen von einer Ziffer 6 oder von mehreren Ziffern 6 an die Zahl 331 keine durch 3 teilbare Zahl erhalten.

c) Wegen $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ entsteht aus einer Zahl durch Anfügen von vier Ziffern 7 dann eine durch 3 teilbare Zahl, wenn die Quersumme der Zahl, an die die vier Ziffern 7 angefügt wurden, 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet. Eine solche Zahl ist zum Beispiel 101, also ist 1017777 durch 3 teilbar.

Hat man eine derartige Zahl, wie 101 es war, so kann man eine weitere finden, indem man 3 addiert; denn für die Zahl mit den vier angehängten Ziffern 7 bedeutet das ein Addieren von 30 000, und dabei entsteht aus der bereits durch 3 teilbaren vorigen Zahl wieder eine solche. Addiert man zu 101 (mindestens) 250 mal 3, so erhält man (mindestens) $101 + 3 = 104$, $101 + 2 \cdot 3 = 107$, ..., $101 + 250 \cdot 3 = 851$.
Es gibt folglich mehr als 250 dreistellige Zahlen mit der in c) genannten Eigenschaft.

d) Für jede dreistellige Zahl liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. Fall: Die Quersumme der Zahl ist durch 3 teilbar.
In diesen Fall entsteht durch Anfügen von drei Ziffern 7 wieder eine durch 3 teilbare Zahl.

2. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen von zwei Ziffern 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 1 + 7 + 7 = 3n + 15$ durch 3 teilbar ist.

3. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n + 2$.
In diesem Fall entsteht durch Anfügen einer Ziffer 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n + 2 + 7 = 3n + 9$ durch 3 teilbar ist. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

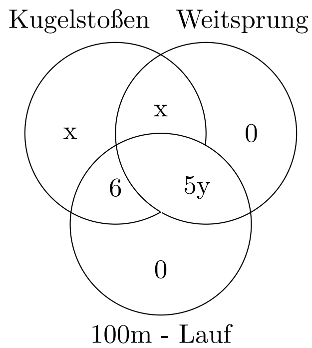
Lösungen der II. Runde 1989 übernommen aus [5]

4.31.3 III. Runde 1989, Klasse 7

Aufgabe 1 - 290731
28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.
(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

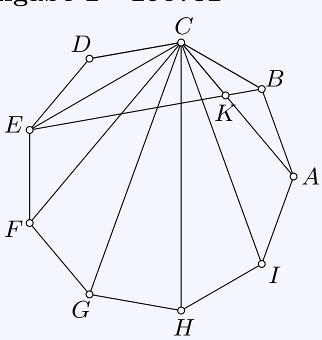


Die Anzahl der Schüler, die nur am Kugelstoßen beteiligt waren, sei x; nach (1) gilt $x \geq 2$. (5)
Die Anzahl der Schüler, die an allen drei Disziplinen teilnahmen, sei y, nach (2) gilt $y \geq 1$. (6)
Nach (1) ist x auch die Anzahl der Schüler, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen. Nach (2) ist $5y$ die Anzahl der Schüler, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.
Hiernach und nach (3), (4) ist $2x + 5y + 6$ die Anzahl aller aus der Klasse am Sportfest teilnehmenden Schüler (siehe auch das Mengendiagramm); d.h., es gilt

$$2x + 5y + 6 = 28 \qquad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt $5y \leq 28 - 4 - 6$, d.h. $y \leq 3$. (8)
Nach (7) ist y eine gerade Zahl; hieraus und aus (6), (8) folgt $y = 2$. Damit ergibt sich aus (7) $x = 6$, und es ist gezeigt, dass aus den Angaben eindeutig die nachstehenden Anzahlen ermittelt werden können:
Am Kugelstoßen beteiligten sich genau $2x + y + 6 = 20$ Schüler, am Weitsprung beteiligten sich genau $x + 0 + 5y = 16$ Schüler, am 100 m-Lauf beteiligten sich genau $6 + 5y + 0 = 16$ Schüler.

Aufgabe 2 - 290732



Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$.

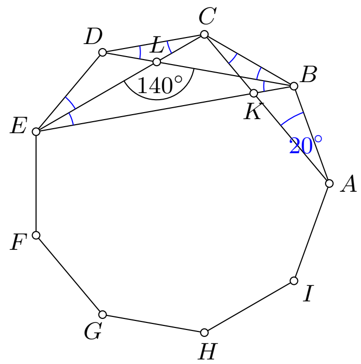
a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!
b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!
c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\angle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Von jeder Ecke des Neunecks gehen genau sechs Diagonalen aus. Addiert man diese (für jede der neun Ecken gebildeten) Anzahlen 6, so hat man in dem entstehenden Ergebnis $9 \cdot 6 = 54$ jede Diagonale genau zweimal erfasst. Also beträgt die Anzahl aller Diagonalen des Neunecks 27.

b) Durch die sechs von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das Neuneck in genau sieben Dreiecke zerlegt. In jedem dieser Dreiecke beträgt die Summe seiner Innenwinkel 180°.

Addiert man alle Innenwinkel in diesen Dreiecken, so ergibt sich die Summe aller Innenwinkel des Neunecks; diese Summe beträgt folglich $7 \cdot 180°$. Da alle neun Innenwinkel des Neunecks dieselbe Größe haben, hat jeder dieser Innenwinkel die Größe $\frac{7 \cdot 180°}{9} = 140°$.



c) Aus $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 140°$ (1) und $AB = BC = CD = DE$ folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

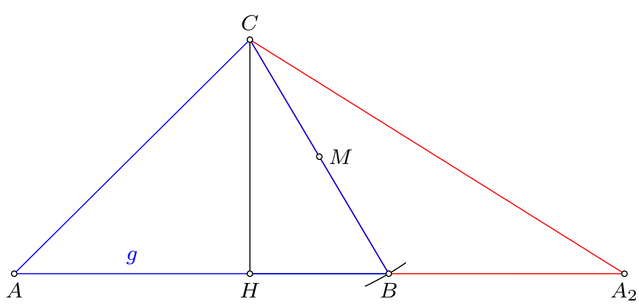
$$\angle CAB = \angle ACB = \angle DBC = \angle BDC = \angle ECD = \angle CED = 20° \quad (2)$$

sowie nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BCD = \triangle CDE$, also $BD = CE$. (3)
Ist L der Schnittpunkt von BD mit CE, so folgt ferner aus (2) nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $CL = DL$. Hieraus und aus (3) ergibt sich $BL = EL$. (4)
Nach dem Scheitelwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz sowie wegen (2) ist $\angle BLE = \angle CLD = 180° - 2 \cdot 20° = 140°$ Hieraus und aus (4) folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle BEL = \angle EBL = 20°$. (5)
Aus (1) und (2) folgt ferner $\angle KCE = 140° - 2 \cdot 20° = 100°$; daraus und aus (5) ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Winkelgröße $\angle CKE = 180° - 100° - 20° = 60°$.

Aufgabe 3 - 290733
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Stelle fest, ob durch diese Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

a) Analyse:
Wenn ein Dreieck die Forderungen erfüllt, so folgt:
Ist H der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe, so ist $CH = h_c = 4{,}3$ cm, und die Gerade durch A und B steht auf CH senkrecht und geht durch H. Ferner ist $BC = a = 5{,}0$ cm, also liegt B auf dem Kreis um C mit dem Radius 5,0 cm.
Ist M der Mittelpunkt der Strecke BC, so ist $AM = s_a = 6{,}0$ cm, also liegt A auf dem Kreis um M mit dem Radius 6,0 cm; ferner liegt A auf der Geraden durch A und B.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen erhalten werden kann:



b) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert eine Strecke CH der Länge 4,3 cm.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in H auf CH.
(3) Man konstruiert den Kreis k_1 um C mit dem Radius 5,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten; man wählt einen beliebigen von ihnen aus und bezeichnet ihn mit B.
(4) Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BC.
(5) Man konstruiert den Kreis k_2 um M mit dem Radius 6,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten A_1, A_2; einen von ihnen wählt man als A.

c) Beweis:
Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt:

Nach (3) ist $CB = a = 5{,}0$ cm. Nach (2) und (5) stehen CH und die Gerade durch A und B senkrecht aufeinander, also ist CH die auf AB senkrechte Höhe; nach (1) hat sie die Länge $CH = hc = 4{,}3$ cm. Nach (4) und (5) ist (für jede Wahlmöglichkeit von A_1 oder A_2 als A) AM die Seitenhalbierende der Seite BC; nach (5) hat sie die Länge $AM = s_a = 6{,}0$ cm. Also erfüllt jedes so konstruierte Dreieck ABC die gestellten Forderungen.

d) Konstruktion:
Für die in (1), (3), (5) erhaltenen Punkte B, A_1, A_2, H gilt:
B liegt zwischen A_1 und A_2, und es ist $B \neq H$. Daher haben die beiden Dreiecke A_1BC, A_2BC bei B Innenwinkel, die Nebenwinkel voneinander und verschieden von 90° sind. Also ist $\angle A1BC \neq \angle A2BC$.
Daher sind die Dreiecke A_1BC und A_2BC nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Durch die Forderungen ist ein Dreieck ABC nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 290734
Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!
(1) Es gilt $z_1 > z_2$.
(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

I. Wenn ein Paar $(z_1; z_2)$ zweistelliger natürlicher Zahlen die Bedingungen (1) , (2) und (3) erfüllt, dann folgt:
Sind a, b in dieser Reihenfolge die Ziffern von z_1 und c, d die von z_2, so ist $z_1 = 10a + b$, $z_2 = 10c + d$, $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq c \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$,
und aus (1), (2) und (3) folgt $10a + b - 10c - d = 59$, (4) $a + b - c - d = 14$ (5)
Subtrahiert man (5) von (4), so folgt $a - c = 5$; (6) hieraus und aus (5) folgt $b - d = 9$. (7)
Wegen $b \leq 9$, $d \geq 0$ ist (7) nur mit $b = 9$, $d = 0$ (8) möglich. Wegen $c \geq 1$ und (6) ist $a \geq 6$; hiernach und wegen (6) verbleiben für a und c nur die Möglichkeiten

$$a = 6, c = 1; a = 7, c = 2; a = 8, c = 3; a = 9, c = 4. \qquad (9)$$

Mit (8) und (9) ist gezeigt, dass nur die Paare $(z_1; z_2) = (69; 10)$, $(79; 20)$, $(89; 30)$, $(99; 40)$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, wie aus $69 > 10$, $79 > 20$, $89 > 30$, $99 > 40$, $69 - 10 = 79 - 20 = 89 - 30 = 99 - 40 = 59$, $(6 + 9) - (1 + 0) = (7 + 9) - (2 + 0) = (8 + 9) - (3 + 0) = (9 + 9) - (4 + 0) = 14$ ersichtlich ist.

Aufgabe 5 - 290735
Wir betrachten das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000.
Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

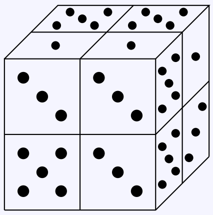
Die Anzahl der Nullen am Ende einer Zahl gibt an, wie oft in ihr der Faktor $10 = 2 \cdot 5$ enthalten ist. In dem betrachteten Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$$

ist der Faktor 2 in einer höheren Potenz enthalten als der Faktor 5. Deshalb endet dieses Produkt auf so viele Nullen wie die Anzahl der in diesem Produkt vorkommenden Faktoren 5.
Unter den Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau $1000 : 5 = 200$ Vielfache von 5. Von diesen sind genau $1000 : 25 = 40$ durch 25 teilbar, enthalten also je zwei Faktoren 5. Ferner enthalten genau $1000 : 125 = 8$ davon je drei Faktoren 5. Und genau eine Zahl (nämlich 625) enthält sogar vier Faktoren 5.

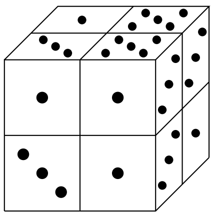
Deshalb enthält das genannte Produkt genau $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ Faktoren 5 und endet daher auf genau 249 Nullen.

Aufgabe 6 - 290736



Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt.
Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede genau auf einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.
Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie die Abbildung zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

(a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0{,}5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, dass alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!
(b) Beweise, dass in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!



a) Schrägbild und ein Beispiel für eine Eintragung der geforderten Art: siehe Abbildung.

b) Wenn in einer Eintragung alle zwölf sichtbaren Augenzahlen ungerade sind, dann sind auf demjenigen Spielwürfel, von dem drei Augenzahlen sichtbar sind, dies die Augenzahlen 1, 3 und 5.
Haben ferner von den übrigen sichtbaren Augenzahlen höchstens zwei den Wert 1, so haben mindestens sieben von ihnen einen Wert größer oder gleich 3; also beträgt die Summe der sichtbaren Augenzahlen dann mindestens $1 + 3 + 5 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 32$.

Wenn in einer Eintragung alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und die Summe 30 haben, so müssen folglich außer der 1 auf dem Spielwürfel mit drei sichtbaren Augenzahlen noch mindestens drei weitere sichtbare Augenzahlen 1 lauten.

Lösungen der III. Runde 1989 übernommen aus [5]

4.32 XXX. Olympiade 1990

4.32.1 I. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300711
Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen.
Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.
Jedes Mal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.
Wie war das möglich?

Der Spielleiter kann folgendermaßen überlegen:
Angenommen, ein Mitspieler hat in seiner rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen. Nach dem Verdoppeln erhält er eine gerade Zahl als Produkt, zu dem die gerade Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand addiert werden muss. Folglich ist die Summe eine gerade Zahl.
Befindet sich in der rechten Band des Mitspielers dagegen eine gerade Anzahl von Hölzchen, so ist das Doppelte davon ebenfalls eine gerade Zahl. Nach Addition mit der ungeraden Anzahl der Hölzchen der linken Hand ergibt sich eine ungerade Zahl als Summe.
Kennt der Mitspieler also eine gerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner linken Hand. Nennt er eine ungerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten Hand.

Aufgabe 2 - 300712
Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

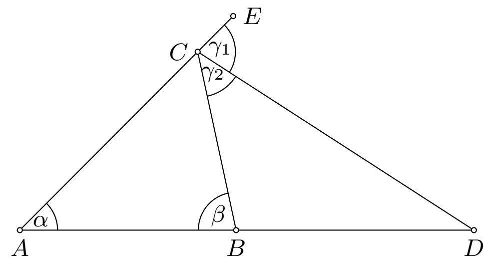
a) Wie viel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Wenn die fünf Schüler insgesamt x Kilogramm Altpapier zusammenbrachten, so hatten jeweils Marco $\frac{x}{4}$, Falk $\frac{x}{6}$, Matthias $\frac{x}{5}$, Steffen $\frac{x}{10}$ und Dirk $\frac{x}{4}+2$ Kilogramm beigetragen. Also gilt

$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{4} + 2 = \frac{58x}{60} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 60$$

a) Daher hatten Marco 15 kg, Falk 10 kg, Matthias 12 kg, Steffen 6 kg und Dirk 17 kg beigetragen.
b) Wegen $60 \cdot 30 = 1800$ wurden für das gesammelte Altpapier 18 M bezahlt.

Aufgabe 3 - 300713
Von drei Geraden wird vorausgesetzt, dass sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, dass sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, dass C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Winkel $\angle ECD$ und $\angle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\angle BCD$ und $\angle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

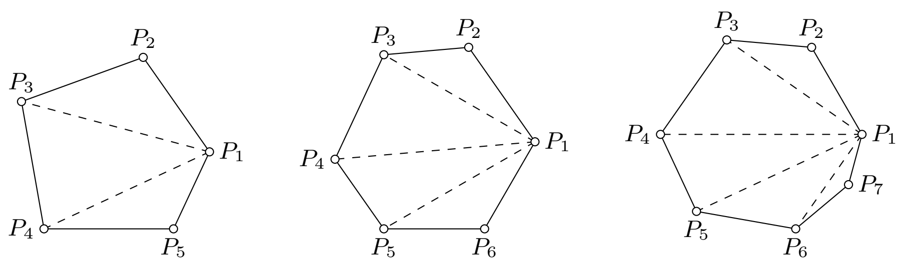


a) Die Abbildung zeigt vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E der geforderten Art.

b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ECD = \gamma_1$, $\angle BCD = \gamma_2$ gilt nach Voraussetzung $\gamma_1 = \beta$ (1).
Nach dem Außenwinkelsatz für das Dreieck ABC gilt ferner $\angle BCE = \alpha + \beta$, d.h. $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ (2)
Aus den Gleichungen (2) und (1) folgt durch Subtraktion $\gamma_2 = \alpha$.

Aufgabe 4 - 300714
In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miss die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d.h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, dass kein Innenwinkel gleich 180° ist.



a) Die erste Abbildung soll ein Fünfeck mit den Innenwinkelgrößen 120°, 130°, 80°, 120°, 90°, ein Sechseck mit den Innenwinkelgrößen 110°, 120°, 140°, 130°, 110°, 110° und ein Siebeneck mit den Innenwinkelgrößen 130°, 120°, 140°, 120°, 140°, 120°, 130° zeigen.

Vermutung: In jedem Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck beträgt die Innenwinkelsumme 540°, 720° bzw. 900°.

b) Jedes Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck lässt sich wie in Abbildung in drei, vier bzw. fünf Teildreiecke zerlegen, wobei durch Addition der Innenwinkelsummen dieser Teildreiecke die Innenwinkelsumme des betreffenden Fünf-, Sechs- bzw. Siebenecks entsteht. Daher beträgt diese Innenwinkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ bzw. $4 \cdot 180° = 720°$ bzw. $5 \cdot 180° = 900°$.

c) Jedes n-Eck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ wird durch die Diagonalen P_1P_3, ..., P_1P_{n-1} in die $n-2$ Teildreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ..., $P_1P_{n-1}P_n$ zerlegt. Durch Addition der Innenwinkelsumme dieser Teildreiecke entsteht die Innenwinkelsumme des n-Ecks. Diese beträgt daher $(n-2) \cdot 180°$.

Lösungen der I. Runde 1990 übernommen aus [5]

4.32.2 II. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300721
Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine
a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

a) Um eine möglichst kleine Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf möglichst viele Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen.
Das bedeutet: Genau 8 Schüler gehören sowohl einer Arbeitsgemeinschaft als auch einer Sportgemeinschaft an.
Dann folgt: Genau 2 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft an. Zusammen mit den in (3) genannten 5 Schülern ergibt das $8 + 2 + 5 = 15$ Schüler.

b) Um eine möglichst große Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, dass auf (möglichst wenige, also) keinen der Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das ergibt mit den in (1), (2) und (3) genannten Schülern insgesamt $10 + 8 + 5 = 23$ Schüler.

Aufgabe 2 - 300722
a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a lässt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung weglässt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

a) Für jede natürliche Zahl a, die die erste Teilaussage in (2) erfüllt, ist $a - 2$ ein Vielfaches von 11, also eine der Zahlen 0, 11, $2 \cdot 11$, $3 \cdot 11$, ...
Erfüllt a auch die zweite Teilaussage in (2), so ist $a - 2$ auch ein Vielfaches von 13, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen $0, 13 \cdot 11, 2 \cdot 13 \cdot 11, 3 \cdot 13 \cdot 11, ...$
Erfüllt a auch (3), so ist $a - 2$ eine ungerade Zahl, also verbleiben für $a - 2$ nur die Zahlen 143, $3 \cdot 143 = 429, 5 \cdot 153 = 715, 7 \cdot 143 = 1001, ...$
Von den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ erfüllen also nur die Zahlen $143+2 = 145$, $429+2 = 431$, $715 + 2 = 717$ die Bedingungen (2) und (3).

Wegen $145 = 5 \cdot 29$ hat 145 mehr als zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler, nämlich 1, 5, 29, 145. Entsprechendes gilt wegen $717 = 3 \cdot 239$ auch für 717. Dagegen ist 431 eine Primzahl. Also hat 431 genau die zwei natürlichen Zahlen 1 und 431 als Teiler.
Somit werden unter den natürlichen Zahlen a mit $100 < a < 1000$ die Bedingungen (1), (2), (3) genau von der Zahl $a = 431$ erfüllt.

b) Wie eben gezeigt, werden (2) und (3) außer von 431 beispielsweise auch von 145 erfüllt. Ferner werden (1) und (3) beispielsweise auch von der ungeraden Primzahl 101 erfüllt.
Lässt man also eine der Bedingungen (1) oder (2) weg, so ändert sich das Ergebnis von a).
Dagegen kann man (3) weglassen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern; denn jede natürliche Zahl, die (1) erfüllt, ist eine Primzahl, und wenn sie größer als 100 ist, scheidet die einzige gerade Primzahl 2 aus, d.h.: Für Zahlen a, die größer als 100 (und kleiner als 1000) sind, folgt (3) bereits aus (1).

Aufgabe 3 - 300723
a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, dass mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.
Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.
Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, dass der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

a) Einen Würfel kann man in gleichgroße Teilwürfel zerlegen, indem man eine natürliche Zahl $n > 1$ wählt, drei von einer Ecke ausgehende Kanten in je n gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Ebenen legt, die zu den Begrenzungsflächen des Würfels parallel verlaufen.

Der Würfel wird dadurch in n Schichten zerlegt, jede Schicht in $n \cdot n$ Teilwürfel. Die Anzahl A der entstehenden Teilwürfel beträgt also $A = n^3$.

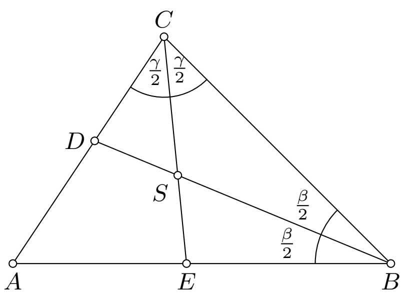
Die völlig ungefärbten Teilwürfel bilden einen im Innern des gesamten Holzwürfels enthaltenen kleineren Würfel. Damit die Anzahl seiner Teilwürfel $A = 40$ ist, muss für ihn $n \geq 4$ sein. Für den gesamten Holzwürfel ist dieses n durch $n + 2$ zu ersetzen.
Die kleinstmögliche Anzahl von Teilwürfeln, mit der die gestellte Forderung erfüllt wird, ist also die zu $n = 6$ gehörende Anzahl $A = 216$.

b) Wegen $3^3 = 27$ beträgt die Kantenlänge des ursprünglichen Holzwürfels 3 dm. Aus a) folgt nun, dass die Kantenlänge eines der 216 Teilwürfel 3 dm : 6 = 0,5 dm beträgt. Der Quader besteht aus 40 Würfeln dieser Kantenlänge.

Sein Volumen beträgt (unabhängig davon, wie dieser Quader aus den Würfeln zusammengesetzt wurde) daher $40 \cdot (0{,}5dm)^3 = 5dm^3$.

Aufgabe 4 - 300724
In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, dass der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, dass dann auch stets der Winkel $\angle BSE$ die Größe 60° hat!
b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\angle BAC$ die Größe des Winkels $\angle BSE$ ergibt!



a) Für $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt nach Voraussetzung $\angle CBS = \angle CBD = \frac{\beta}{2}$, $\angle BCS = \angle BCE = \frac{\gamma}{2}$. Nach den Außenwinkelsatz für $\triangle BCS$ folgt hieraus

$$\angle BSE = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ ist $\beta + \gamma = 180° - \alpha = 120°$; damit ergibt sich $\angle BSE = 60°$.

b) Diese Herleitung bleibt bis einschließlich zur Formel $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ für beliebig vorgegebenes α gültig; damit erhält man als gesuchte Formel

$$\angle BSE = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Lösungen der II. Runde übernommen aus [5]

4.32.3 III. Runde 1990, Klasse 7

Aufgabe 1 - 300731
In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
Mit wie viel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, dass der Hund der Spur des Fuchses folgt und dass beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Damit der Fuchs jeweils in der Zeit, in der der Hund $6 = 2 \cdot 3$ Sprünge macht, einen ebenso langen Weg wie der Hund zurücklegen könnte, müsste er $2 \cdot 7 = 14$ Sprünge machen. Da er aber in dieser Zeit nur 9 seiner Sprünge macht, verringert sich dabei sein Vorsprung jedesmal um 5 Fuchssprünge.
Wegen $60 : 5 = 12$ ist folglich genau dann, wenn das 12mal geschehen ist, der Vorsprung aufgebraucht, also nach $12 \cdot 6 = 72$ Sprüngen des Hundes.

Aufgabe 2 - 300732
200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.
Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.
Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, dass B eine andere Größe als A hat.
Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muss!

Es gibt genau die folgenden drei Möglichkeiten:

(1) A und B stehen in derselben Längsreihe.
In diesem Fall ist B größer als A, da B in der genannten Längsreihe möglichst groß und von anderer Größe als A ist.

(2) A und B stehen in derselben Querreihe.
Auch in diesem Fall ist B größer als A, da A in der genannten Querreihe möglichst klein und von anderer Größe als B ist.

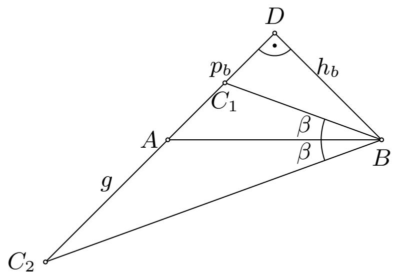
(3) A und B stehen weder in derselben Längsreihe noch in derselben Querreihe.
Es sei dann C derjenige Schüler, der in derselben Querreihe wie A und in derselben Längsreihe wie B steht. Für diesen Schüler gilt: B ist größer als C oder ebenso groß wie C, und C ist größer als A oder ebenso groß wie A. Da B nicht ebenso groß wie A ist, folgt wieder: B ist größer als A.
Somit ergibt sich in jedem Fall: Der größere von den beiden Schülern A und B muss B sein.

Aufgabe 3 - 300733
Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $BD = h_b$.
(2) Es gilt $AD = p_b$.
(3) Der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



a) Wenn ein Dreieck ABC mit der auf AC senkrechten Höhe BD die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann ist ABD ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Kathetenlängen BD, AD. Der Punkt C liegt so auf der Geraden durch A und D, dass BC mit BA einen Winkel der Größe β bildet.
Also kann ABC nach folgender Beschreibung konstruiert werden (siehe Abbildung):

b) 1. Man konstruiert einen rechten Winkel und trägt von seinem Scheitel D aus auf seinen Schenkeln die Strecken DB bzw. DA der Längen $h_b = 4{,}0$ cm bzw. $p_b = 4{,}0$ cm ab.
2. Man trägt in B an BA einen Winkel der Größe $\beta = 20°$ an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt C mit der Geraden g durch A und D.

c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann ist BD nach 1. (und 2.) die auf g (also auf AC) senkrechte Höhe, und es gilt (1) sowie (2). Nach 2. wird auch (3) erfüllt.

d) Der nach 2. zu konstruierende Winkel kann nach beiden Seiten von BA angetragen werden. Je nachdem, ob sein zweiter Schenkel auf derselben Seite von BA wie D liegt oder nicht, erhält man als C einen Punkt C_1 bzw. $C2$.
Wegen $\angle BAC1 < 90°$ und $\angle BAC2 > 90°$ sind die Dreiecke ABC_1, und ABC_2, nicht zueinander kongruent. Also ist ABC durch die Bedingungen (1), (2), (3) nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 300734
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 auswählen:

Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird. Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, dass folgendes gilt:
Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.
Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

1. War die erste Zahl eine 3 oder eine 6, so gilt:
Als weitere Zahlen kann man genau solche auswählen, die ebenfalls durch 3 teilbar sind; denn genau dann haben auch je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen eine durch 3 teilbare Summe. Da unter den Zahlen von 1 bis 1000 genau die Zahlen $1 \cdot 3 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, ..., $333 \cdot 3 = 999$ durch 3 teilbar sind, beträgt im Fall der Anfangszahlen 3, 6 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 333.

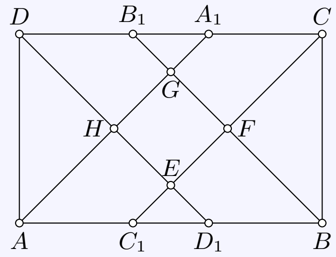
2. War die erste Zahl eine der Zahlen 1, 4; 2, 5, so gilt:
Diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2; d.h., sie sind mit einer natürlichen Zahl n von der Form $3n + 1$ bzw. $3n + 2$. Für die zweite Zahl gibt es dann jeweils genau die Möglichkeit, eine Zahl der Form $3m + 2$ bzw. $3m + 1$ zu wählen, da genau hierbei die Summe $3(m + n) + 3$ durch 3 teilbar wird.
Jede weitere Zahl würde diese Regel aber verletzen; sie wäre nämlich von einer der Formen $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, und dann wäre mit $h = n$ oder mit $h = m$ die betreffende der Summen

$$3h + 1 + 3k = 3(h + k) + 1, \qquad 3h + 1 + 3k + 1 = 3(h + k) + 2, \qquad 3h + 2 + 3k + 2 = 3(h + k + 1) + 1$$

nicht durch 3 teilbar.
Also beträgt im Fall der Anfangszahlen 1, 4; 2, 5 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 2.

Aufgabe 5 - 300735

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $AB = a$ und $BC = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, dass die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind.
Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.
Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

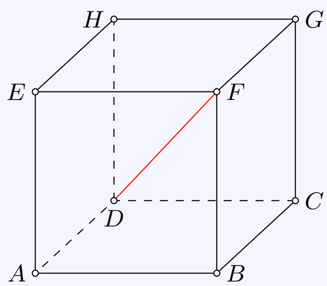


Da AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, die rechten Winkel bei A, B, C bzw. D halbieren, folgt:
Die Dreiecke $AA_1D, BB_1C, CC_1B, ADD_1$ haben jeweils zwei Innenwinkel der Größen 90°, 45°. Also hat auch jeweils der dritte Innenwinkel die Größe 45°; die Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge b.
Somit sind AD_1A_1D und C_1BCB_1 Quadrate der Seitenlänge b. Da ihre Diagonalen einander gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren, folgt $AH = A1H = BF = B1F = CF = C1F = DH = D1H$.

Ferner sind ADH, BCF sowie C_1D_1E und A_1B_1G Dreiecke mit zwei Innenwinkeln von je 45°, also ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklig.
Dabei ist $C_1D_1 = AB - BD_1 = a - 2(a - b) = 2b - a$, und die gleiche Länge hat A_1B_1; folglich ist $C_1E = D_1E = A_1G = B_1G$. Also ist $EFGH$ ein Viereck mit vier Innenwinkeln von 90° und mit $HE = HG = FE = FG$. d.h. ein Quadrat.
Seine Diagonalenlänge beträgt $d = HF = AC_1 = a - b = 3$ cm, da AH und C_1F einander gleichlang und parallel sind, also AC_1FH ein Parallelogramm ist. Da im Quadrat $EFGH$ die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, hat in jedem der beiden Dreiecke HFE, HFG die zu HF senkrechte Höhe die Länge $\frac{d}{2}$. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke, d.h. der gesuchte Flächeninhalt von $EFGH$, beträgt folglich

$$I = \frac{1}{2}d^2 = 4{,}5cm^2$$

Aufgabe 6 - 300736



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.
Beweise, dass die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

Die Dreiecke ADF, BFD, CDF, EFD, GFD und HDF werden jeweils durch die Raumdiagonale DF, je eine Körperkante (AD, BF, CD, EF, GF bzw. HD) und je eine Flächendiagonale (AF, BD, CF, ED, GD bzw. HF) des Würfels begrenzt. Sie stimmen also in ihren drei Seitenlängen überein und sind folglich nach (sss) sämtlich zueinander kongruent.
In jedem dieser Dreiecke ist der betreffende Abstand die Länge der Höhe auf der längsten Seite; demzufolge sind diese Abstände sämtlich einander gleich.

Lösungen der III. Runde 1990 übernommen aus [5]

4.33 XXXI. Olympiade 1991

4.33.1 I. Runde 1991, Klasse 7

Aufgabe 1 - 310711
Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück.
Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:
die Hälfte der roten Bälle, zwei Drittel der blauen Bälle und ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, dass danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.
Ermittle aus diesen Angaben,
a) wie viele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.
b) wie viele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

Die Anzahl der Bälle, die von jeder Farbe am Ende noch vorhanden waren, sei x. Nach den Angaben im Aufgabentext kam dies so zustande, dass

x rote Bälle verkauft wurden, also $2x$ geliefert worden waren,
$2x$ blaue Bälle verkauft wurden, also $3x$ geliefert worden waren, und
$3x$ grüne Bälle verkauft wurden, also $4x$ geliefert worden waren.

Mithin hatte die gesamte Lieferung aus $2x+3x+4x = 9x$ Bällen bestanden; daher gilt $9x = 675$, $x = 75$.
Es wurden somit genau 75 rote, 150 blaue und 225 grüne Bälle verkauft, und danach waren noch insgesamt $3 \cdot 75 = 225$ Bälle vorhanden.

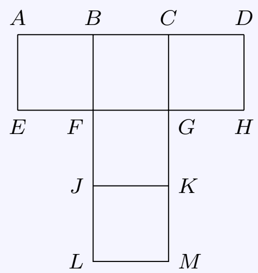
Aufgabe 2 - 310712
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.
(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

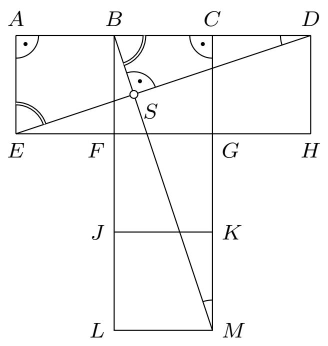
Wenn eine vierstellige natürliche Zahl die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) ist die Zahl durch 18, also auch durch 9 teilbar; daher ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Unter ihren Ziffern kommen nach (1) die Ziffern 0 und 1 mindestens je einmal vor, die Ziffer 4 also höchstens zweimal. Also ist die Quersumme größer als Null, aber nicht größer als $0+1+4+4 = 9$; somit muss sie gleich 9 sein.
Damit kann die Bedingung (1) nur so erfüllt werden, dass unter den Ziffern genau einmal die 0, einmal die 1 und zweimal die 4 ist.
Ferner ist die Zahl, da sie durch 18 teilbar ist, eine gerade Zahl. Also muss ihre Einerziffer gerade sein, d.h. eine 0 oder 4. Weiterhin muss (wie für jede vierstellige Zahl) die Tausenderziffer von 0 verschieden sein.
Nach den nun noch vorhandenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Ziffern muss die Zahl somit eine der Zahlen $1044, 4014, 1404, 4104, 1440, 4140, 4410$ (3) sein.
In der Tat erfüllen die Zahlen (3) die Bedingung (1), und sie erfüllen auch (2), da sie die Quersumme 9 und eine gerade Einerziffer haben, also durch 9 und durch 2 teilbar sind.

Aufgabe 3 - 310713

Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.



a) Zeichne eine solche Figur mit $AB = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle BSD$ auf!
b) Beweise diese Vermutung!

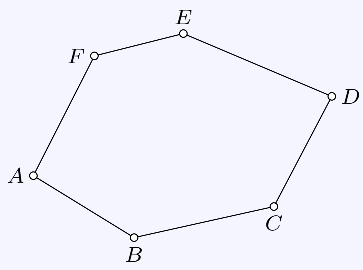


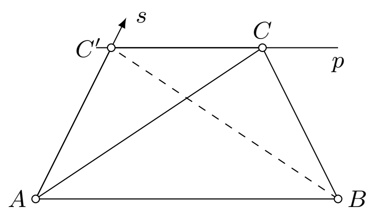
a) Zeichnung: siehe Abbildung; Vermutung: $\angle BSD = 90°$.

b) Beweis:
Es gilt: $EA = BC$ Seitenlänge kongruenter Quadrate, $AD = CM$ Dreifaches dieser Seitenlänge, $\angle EAD = \angle BCM = 90°$.
Nach dem Kongruenzsatz (sws) gilt also $\triangle EAD = \triangle BCM$ und daher $\angle AED = \angle CBM$. (1)
Wegen $\angle EAD = 90°$ gilt ferner $\angle EAD + \angle EDA = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck AED). (2)
Aus (1) und (2) folgt wegen $\angle CBM = \angle DBS$ und $\angle EDA = \angle SDB$ auch $\angle DBS + \angle SDB = 90°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck BSD folgt hieraus $\angle BSD = 90°$.

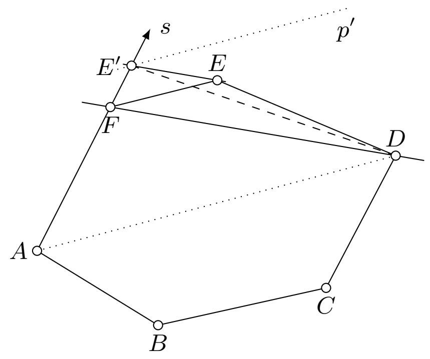
Aufgabe 4 - 310714
a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verlässt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!
Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, dass ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!





a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.



b) Konstruktion:
Beschreibung: Man konstruiert die Parallele p durch E zu FD und ihren Schnittpunkt E' mit der Verlängerung s von AF über F hinaus.a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

Beweis:
Es wird bewiesen, dass $ABCDE'$ ein zu $ABCDEF$ flächengleiches Fünfeck ist.
Da E' auf der Verlängerung von AF liegt, ist $ABCDE'$ ein Fünfeck. Da nach Konstruktion ferner $E'E \parallel FD$ gilt, haben in den Dreiecken FDE' und FDE die zu FD senkrechten Höhen einander gleiche Länge. Also haben die Dreiecke FDE' und FDE einander gleichen Flächeninhalt.

Addiert man hierzu den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDF$, so folgt die behauptete Flächengleichheit von $ABCDE'$ mit $ABCDEF$.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen aus [5]

4.33.2 II. Runde 1991, Klasse 7

Aufgabe 1 - 310721
Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem missglückten Torschuss zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.
Thomas: Ich war es nicht.
Frank: Ich auch nicht.
Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, dass mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.
Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

In der folgenden Tabelle wird für jede der vier Möglichkeiten des Täters angegeben, welche der vier Aussagen wahr (w) und welche falsch (f) sind:

Täter	Matthias	Thomas	Frank	Sven
Matthias	f	w	w	f
Thomas	w	f	w	f
Frank	w	w	f	w
Sven	f	w	w	f

Nur dann, wenn Frank der Täter war, sind mindestens drei der Aussagen wahr. Also ist durch diese Voraussetzung eindeutig bestimmt, dass nur Frank die Scheibe zerschlagen haben kann.

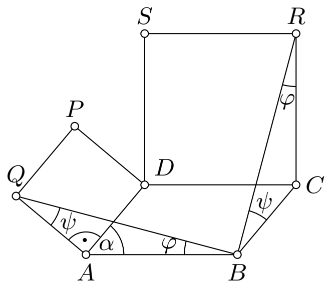
Aufgabe 2 - 310722
Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind.
Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?
b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t? Begründe deine Antworten!

s ist die Summe der Zahlen 1000, 1004, ..., 9996; t ist die Summe der Zahlen 1002, 1006, ..., 9998.
a) Aus jedem Summanden in s entsteht durch Vergrößerung um 2 ein Summand in t, und dabei entsteht jeder Summand in t genau einmal. Also enthalten beide Summen gleich viele Summanden.
Ferner ist jeder Summand in t größer als der entsprechende Summand in s. Daher ist t größer als s.

b) Der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Summanden beträgt in beiden Summen 8996, die Summanden folgen im Abstand 4 aufeinander. Die Anzahl der Summanden beträgt (in jeder der beiden Summen) daher $8996 : 4 + 1 = 2250$.
Hieraus und weil jeder Summand in t um 2 größer als der entsprechende Summand in s ist, folgt:
Die Differenz zwischen s und t hat den Betrag $2250 \cdot 2 = 4500$.

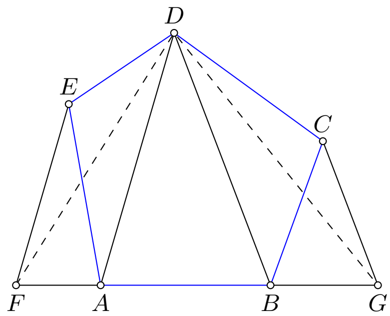
Aufgabe 3 - 310723
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm betragen und der Winkel $\angle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!
Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, dass diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!
b) Beweise, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\angle BAD$ kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Zeichnung.



b) Nach Voraussetzung gilt $AB = DC$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$) $= CR$ (Seiten im Quadrat $DCRS$) (1) und $AQ = DA$ (Seiten im Quadrat $ADPQ$) $= CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$). (2)
Für $\angle BAD = \alpha < 90°$ gelten die Gleichungen $\angle ABC = 180° - \alpha$ (3) und $\angle BCD = \alpha$ (Winkel im Parallelogramm), wegen $\angle QAD = \angle DCR = 90°$ (Winkel in Quadraten) also $\angle QAB = \angle BCR = 90° + \alpha$. (4)
Aus (1), (2), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\angle ABQ = \angle CRB$, also $BQ = RB$, (5) $\angle ABQ = \angle CRB = \varphi$, (6) $\angle AQB = \angle CBR = \psi$. (7)
Nach (4), (6), (7) folgt aus dem Innenwinkelsatz $\alpha + \varphi + \psi = 90°$; (8) aus (3), (6), (7) und (8) folgt $\angle QBR = 180° - \alpha - \varphi - \psi = 90$. (9) Mit dem Nachweis von (5) und (9) ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 310724
a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen $AB = 50$ mm, $BC = 45$ mm, $AE = 54$ mm betragen und die Innenwinkel $\angle BAE$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\rho = 114°$ haben!
b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, dass das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!
Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G! Beweise, dass von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!



Die Abbildung enthält ein zu konstruierendes Fünfeck $ABCDE$.

b) Die Abbildung enthält auch eine Konstruktion zweier Punkte F, G.
Beschreibung dieser Konstruktion:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A und B in F. (2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A und B in G.

Beweis, dass für die so auf der Geraden durch A und B konstruierten Punkte F, G das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat:
Nach (1) gilt $EF \parallel AD$. Daher haben in den Dreiecken ADE und ADF die zu AD senkrechten Höhen dieselbe Länge. Also haben diese Dreiecke einander gleichen Flächeninhalt. Ebenso folgt aus (2), dass die Dreiecke BDC und BDG einander gleichen Flächeninhalt haben. Damit ergibt sich

$$A(FGD) = A(ABD) + A(ADF) + A(BDG) = A(ABD) + A(ADE) + A(BDC) = A(ABCDE)$$

Lösungen der II. Runde 1991 übernommen aus [5]

4.33.3 III. Runde 1991, Klasse 7

Aufgabe 1 - 310731
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:
Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest, usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, dass jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt!
Überprüfe, dass für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aus den Angaben folgt: Das 1. Kind bekam $1+\frac{1}{10}(a-1) = \frac{a}{10}+\frac{9}{10}$ Bonbons, danach waren $a-\left(\frac{a}{10}-\frac{9}{10}\right) = \frac{9a}{10}-\frac{9}{10}$ Bonbons vorhanden.
Das 2. Kind bekam $2+\frac{1}{10}\left(\frac{9a}{10}-\frac{9}{10}-2\right) = \frac{9a}{100}+\frac{171}{100}$ Bonbons.
Da auch das 1. Kind diese Anzahl erhalten hatte, folgt

$$\frac{9a}{10}-\frac{9}{10} = \frac{9a}{100}+\frac{171}{100} \qquad \Rightarrow \qquad a = 81$$

und damit weiter

$$b = \frac{a}{10}+\frac{9}{10} = 9$$

Da jedes der k Kinder b Bonbons bekam, ist die Anzahl aller verteilten Bonbons $a = k \cdot b$; damit folgt $k = 81 : 9 = 9$.
Probe:

Nummer des Kindes	Anzahl der an dieses Kind ausgegebenen Bonbons	danach verbleibender Rest
1	1 + 80 : 10 = 9	81 - 9 = 72
2	2 + 70 : 10 = 9	72 - 9 = 63
...	...	...
8	8 + 10 : 10 = 9	18 - 9 = 9
9	9 + 0 : 10 = 9	9 - 9 = 0

Aufgabe 2 - 310732
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

"Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900+j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$."
Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aus der Bedeutung der Zahlen folgt $0 < m \leq 12$, $0 < t \leq 31$; (1) auch die Zahlen a und j, für die $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$ (2) gilt, sind folglich beide größer als Null.
Sie erfüllen ferner $a + j = 89$ (3) und sind daher beide kleiner als 89.
Wegen der Primfaktorzerlegung $105792 = 26 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$ hat 105792 unter den natürlichen Zahlen kleiner als 89 genau die folgenden Teiler: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 19, 24, 29, 32, 38, 48, 57, 58, 64, 76, 87.

Die einzigen Möglichkeiten, hieraus zwei Zahlen a, j mit (3) auszuwählen, sind

$$(a;j) = (2;87), (87;2), (32;57), (57,32).(4)$$

Von ihnen scheiden (2;87) und (87,2) aus; denn wegen (1) wäre für sie $a \cdot j \cdot m \cdot t \leq 2 \cdot 87 \cdot 12 \cdot 31 < 105792$, was (2) widerspricht.
Daher folgt nun aus (2), dass m und t die Bedingung

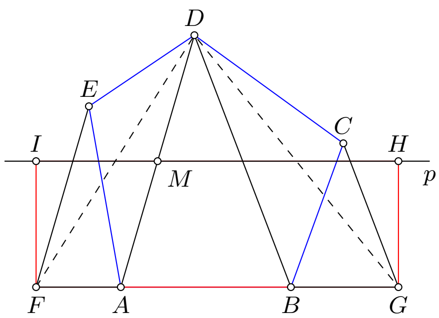
$$m \cdot t = \frac{105792}{32 \cdot 57} = 2 \cdot 29$$

erfüllen. Da 2 und 29 Primzahlen sind, ist das wegen (1) nur mit $m = 2$, $t = 29$ (5) möglich; d.h., der Geburtstag kann nur ein 29. Februar gewesen sein. Diese Datumsangabe ist mit $j = 57$, d.h. für das Jahr 1957, nicht möglich, da es kein Schaltjahr war.
Also verbleibt von (4) nur die Möglichkeit $a = 57$, $j = 32$. (6)
Damit ist gezeigt: Die Zahlen a, j, m, t sind durch die Angaben eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (5), (6) angegeben.

Aufgabe 3 - 310733
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!
b) Beweise, dass für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!
c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.



a) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt F.
(2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt G.
(3) Man konstruiert den Mittelpunkt M von AD und die Parallele P durch M zu FG.
(4) Man konstruiert die Senkrechten zu FG durch F und durch G, sie schneiden p in je einem Punkt J bzw. H.

b) Werden F, G, H, J nach dieser Beschreibung konstruiert, so folgt: Nach den Konstruktionsschritten (3), (4) ist $FGHJ$ ein Rechteck.
Ferner hat nach (1), (2) das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Nach (1) haben F und E gleichen Abstand von AD, also ist das Dreieck ADF flächeninhaltsgleich zum Dreieck ADE.
Nach (2) ist ebenso BDG flächeninhaltsgleich zu BDC. Addiert man noch den Flächeninhalt von ABD, so folgt die behauptete Flächeninhaltsgleichheit von FGD mit $ABCDE$.
Nach (3) und dem Strahlensatz hat M halb so großen Abstand von FG wie D; daher hat das Rechteck $FGHJ$ denselben Flächeninhalt wie das Dreieck FGD und folglich auch wie $ABCDE$.

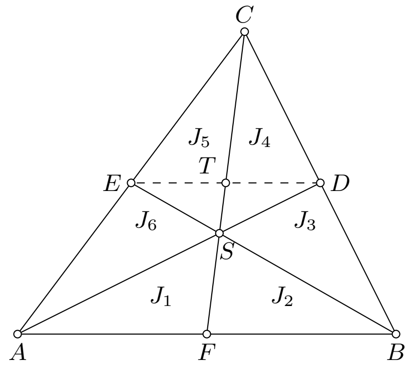
Aufgabe 4 - 310734
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, dass eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.
Beweise, dass für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Ist (p, q) ein Paar von Primzahlzwillingen mit $q > p > 3$, so folgt:
Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist p ungerade, also gilt $p = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n und daher $q = p + 2 = 2n + 3$. Also ist $p + q = (2n + 1) + (2n + 3) = 4(n + 1)$ durch 4 teilbar.

Da 3 die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist, sind p und q nicht durch 3 teilbar. Wenn ferner p bei Division durch 3 den Rest 1 lassen würde, d.h., wenn p $= 3n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n wäre, so ergäbe sich der Widerspruch, dass $q = p + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ durch 3 teilbar wäre. Also muss p bei Division durch 3 den Rest 2 lassen; d.h., es muss $p = 3n + 2$ mit einer natürlichen Zahl n gelten. Damit folgt $q = p + 2 = 3n + 4$; demnach ist $p + q = (3n + 2) + (3n + 4) = 3 \cdot (2n + 2)$ durch 3 teilbar.

Aus der Teilbarkeit von $p+q$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen 4 und 3 folgt: $p+q$ ist durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar.

Aufgabe 5 - 310735
Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.
Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!



In jedem Dreieck ABC haben die drei Seitenhalbierenden AD, BE und CF einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Die Flächeninhalte der Dreiecke AFS, FBS, BDS, DCS, CES und EAS seien J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 bzw. J_6.
Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke S von AFS, FBS gilt $J_1 = J_2$. Entsprechend folgt, dass $J_3 = J_4$ und $J_5 = J_6$ gelten.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke C von AFC, FBC gilt

$$J_1 + J_6 + J_5 = J_2 + J_3 + J_4$$

Hieraus und aus den vorangehenden Gleichungen folgt

$$J1 + 2 \cdot J_6 = J_1 + 2 \cdot J_3$$

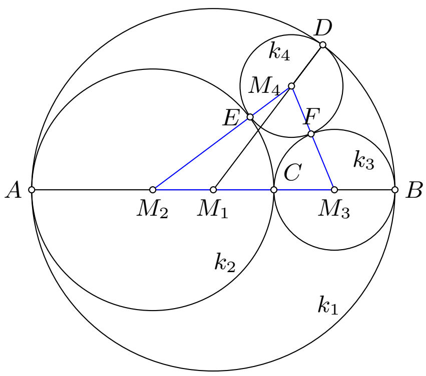
und daraus $J_6 = J_3$. Entsprechend folgt (z.B.) $J_2 = J_5$. Also gilt insgesamt $J1 = J2 = J3 = J4 = J5 = J6$, d.h.

$$F_1 : F_2 = (6J_1) : (4J_1) = 3 : 2$$

Aufgabe 6 - 310736
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.
(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.
(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!
b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4.
Zeige, dass eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!



Die in (1) genannte Gerade schneidet, da sie durch M_1 geht, den Kreis k_1 in einem Durchmesser.
Nach (2) liegen die Berührungspunkte A bzw. B, die k_1 mit k_2, bzw. mit k_3 hat, auf den Verlängerungen von M_1M_2, bzw. M_1M_3 über M_2 bzw. M_3 hinaus, sind also die Endpunkte dieses Durchmessers. Sie sind voneinander verschieden, da andernfalls einer der Kreise k_2, k_3 den anderen von innen berühren müsste.

Nach (2) und (3) gilt: Der Berührungspunkt D von k_4 mit k_1 liegt auf der Verlängerung von M_1M_4 über M_4 hinaus, die Berührungspunkte E, F von k_2 bzw. k_3 liegen zwischen M_2 und M_4 bzw. zwischen M_3 und M_4.

a) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= M_1M_4 + M_4M_2 + M_2M_1 && (4)\\ &= M_1M_4 + M_4E + M_2E + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_2A + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_1A && (5)\\ &= M_1M_4 + M_4F + M_1B = M_1M_4 + M_4F + M_3B + M_3M_1 = M_1M_4 + M_4F + M_3F + M_3M_1\\ &= M_1M_4 + M_4M_3 + M_3M_1 \end{aligned}$$

b) Mit (5) gilt

$$u = M_1M_4 + M_4E + M_1A = M_1M_4 + M_4D + M_1A = M_1D + M_1A = 2 \cdot r_1$$

Lösungen der III. Runde übernommen aus [5]

4.34 XXXII. Olympiade 1992

4.34.1 I. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320711
Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

(1) Norbert sammelte mehr als Mike.
(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.
(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.
Untersuche, ob aus diesen Angaben
a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,
b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze
hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Für die Sammelergebnisse K, L, M, N von Karsten, Lutz, Mike bzw. Norbert folgt aus den Angaben:
Nach (1) gilt $N > M$. (4)
Nach (2) gilt $K + L = M + L$, also $K = M$. (5) Nach (3) gilt $K + N < L + M$; hieraus und aus (5) folgt $N < L$. (6)
Mit (6), (4), (5), also $L > N > M = K$, ist gezeigt:
a) Aus den Angaben geht genau Lutz als Sammler der meisten Pilze hervor.
b) Aus den Angaben geht nicht genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze hervor (sondern jeder der beiden Jungen Mike und Karsten).

Aufgabe 2 - 320712
Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.
Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne dass es überläuft!

In das Aquarium passt oberhalb des Wasserspiegels noch ein Quader von 80 cm Länge, 40 cm Breite und 7 cm Höhe, also vom Volumen $80 \cdot 40 \cdot 7cm^3 = 22400cm^3 =$ 22,4 l.
Da dies mehr als 10 Liter sind, kann man 10 Liter in das Aquarium gießen, ohne dass es überläuft.

Aufgabe 3 - 320713
Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.
In wie viel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

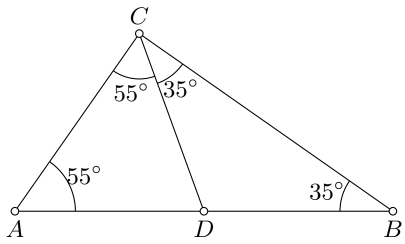
In einer Minute wird wegen 3 h = 180 min von der ersten Röhre $\frac{1}{180}$ des Behälters gefüllt, ebenso wegen 2 h = 120 min von der zweiten Röhre $\frac{1}{120}$ des Behälters. Also füllen beide Röhren zusammen in einer Minute

$$\frac{1}{180} + \frac{1}{120} = \frac{1}{72}$$

des Behälters. Daher ist der Behälter durch beide Röhren in 72 Minuten gefüllt.

Aufgabe 4 - 320714
In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\angle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Nach Voraussetzung ist $AD = BD = CD$ und (1) $\angle BCD = 35°$. (2) Da das Dreieck BCD wegen (1) gleichschenklig ist, folgt nach dem Basiswinkelsatz und (2) auch $\angle DBC = 35°$, d.h. (3) $\angle ABC = 35°$. (4)



Aus (2) und (3) folgt nach dem Außenwinkelsatz $\angle ADC = 70°$. (5) Wegen (1) ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig; nach dem Basiswinkelsatz gilt also $\angle CAD = \angle ACD$.
Hiermit und mit (5) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ACD = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55° \tag{6}$$

d.h., es gilt einerseits $\angle CAB = 55°$, (7) andererseits folgt aus (6) und (2)

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 55° + 35° = 90° \tag{8}$$

Mit (4), (7), (8) sind die gesuchten Innenwinkelgrößen ermittelt.

Lösungen der I. Runde 1992 übernommen aus [5]

4.34.2 II. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320721
In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.
b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.
c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a), b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, dass du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

a) Es gilt $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. (1)
3, 7 und 11 sind Primzahlen. Die Darstellung einer natürlichen Zahl als Produkt von Primzahlen ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. Also ist (1) die einzige in a) gesuchte Darstellung.

b) Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl $\neq 0$ sein, also entweder die Zahl 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt mehrerer Primzahlen. Da je zwei der Faktoren voneinander verschieden sein sollen, darf die Zahl 1 höchstens einmal als Faktor vorkommen.
Also kommen für b) außer der Darstellung (1) mit ihren drei Faktoren noch genau diejenigen Darstellungen hinzu, in denen ein Faktor 1 lautet, ein Faktor eine Primzahl ist und der dritte das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

$$231 = 1 \cdot 3 \cdot 77, \qquad 231 = 1 \cdot 7 \cdot 33, \qquad 231 = 1 \cdot 11 \cdot 21$$

c) Wegen der Zerlegung von 462 in die vier Primfaktoren 2, 3, 7 und 11 gibt es genau folgende in c) gesuchte Darstellungen: Wenn kein Faktor 1 lautet, sind zwei Faktoren Primzahlen, der dritte ist das Produkt der beiden anderen Primzahlen:

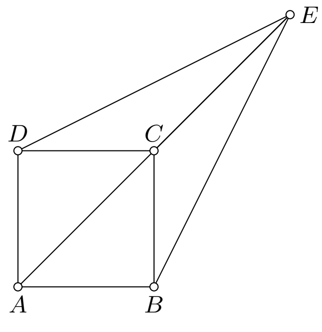
$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 77, \quad 462 = 2 \cdot 7 \cdot 33, \quad 462 = 2 \cdot 11 \cdot 21, \quad 462 = 3 \cdot 7 \cdot 22, \quad 462 = 3 \cdot 11 \cdot 14, \quad 462 = 7 \cdot 11 \cdot 6$$

Wenn ein Faktor 1 lautet, so gilt: Entweder ist ein weiterer Faktor eine Primzahl und der dritte das Produkt der drei anderen Primzahlen; oder jeder der Faktoren außer der 1 ist das Produkt aus zwei Primzahlen:

$$462 = 1 \cdot 2 \cdot 231, \qquad 462 = 1 \cdot 3 \cdot 154, \qquad 462 = 1 \cdot 7 \cdot 66, \qquad 462 = 1 \cdot 11 \cdot 42$$

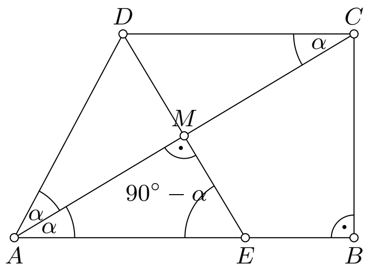
$$462 = 1 \cdot 6 \cdot 77, \qquad 462 = 1 \cdot 14 \cdot 33, \qquad 462 = 1 \cdot 22 \cdot 21$$

Aufgabe 2 - 320722
$ABCD$ sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage 25 cm^2. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonalen AC über C hinaus, dass die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist. Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks $ABED$!



Die Dreiecke AED und ACD haben D als gemeinsame Ecke, die der Seite AE bzw. der (in AE enthaltenen) Seite AC gegenüberliegt; sie haben also dieselbe zu diesen Seiten senkrechte Höhe.
Daher und wegen $AE = 2 \cdot AC$ hat AED doppelt so großen Flächeninhalt wie ACD. Ebenso (mit B statt D) folgt: AEB hat doppelt so großen Flächeninhalt wie ACB.
Damit erhält man: Der Flächeninhalt von $ABED$ ist das Zweifache des Flächeninhaltes von $ABCD$; somit beträgt er 50 cm^2.

Aufgabe 3 - 320723
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.
a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\angle MEA$ und $\angle MCB$ einander gleichgroß sind!
b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, dass AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann ein Trapez sein muss!



a) Mit $\angle BAC = \alpha$ gilt wegen $AM \perp ME$ bzw. $AB \perp BC$ nach dem Innenwinkelsatz, auf die Dreiecke AME bzw. ABC angewandt, $\angle MEA = \angle MCB = 90° - \alpha$.

b) Da AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert, ist $\angle DAC = \angle BAC$.
Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, gilt $AD = CD$. Nach dem Basiswinkelsatz ist also $\angle DCA = \angle DAC$.
Somit gilt $\angle BAC = \angle DCA$, und nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt $AB \parallel DC$. Damit ist $ABCD$ als ein Trapez nachgewiesen.

Aufgabe 4 - 320724
In einem Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.
Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen.
Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

Die Warmwasserleitung füllt das Becken in $12\frac{1}{2}$ Minuten, d.h. in $\frac{25}{2}$ Minuten, also füllt sie in einer Minute $\frac{2}{25}$ des Beckens.
Ebenso füllt die Kaltwasserleitung in einer Minute $\frac{1}{10}$ des Beckens. Somit wurden zunächst von beiden Leitungen zusammen in je einer Minute $\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{9}{50}$ des Beckens gefüllt; in $2\frac{1}{2}$ Minuten $\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{50} = \frac{9}{20}$ des Beckens.
Danach blieben somit als Rest noch $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ des Beckens zu füllen. Wegen $\frac{11}{20} : \frac{1}{10} = \frac{11}{2}$ war dieser Rest $\frac{11}{2}$ mal so groß wie $\frac{1}{10}$ 10 des Beckens, d.h. wie derjenige Teil des Beckens, der in einer Minute allein durch die Kaltwasserleitung gefüllt werden kann.
Also wurden für das Füllen des Restes noch $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ Minuten gebraucht.

Lösungen der II. Runde 1992 übernommen aus [5]

4.34.3 III. Runde 1992, Klasse 7

Aufgabe 1 - 320731
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, dass sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.
Wie viele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Nummerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wie viele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.
Wie viele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Jede mögliche Verteilung ist bereits durch die Anzahlen der in A befindlichen Kugeln eindeutig festgelegt.
a) Für diese Anzahlen gibt es genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

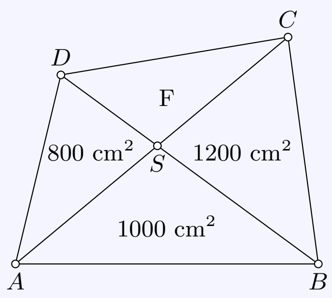
Verteilung Nr.	1	2	3	4	5	6
rot	0	1	1	2	2	3
gelb	2	1	2	0	1	0
blau	1	1	0	1	0	0

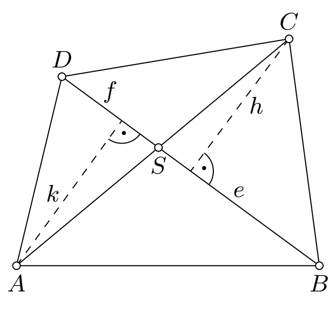
Das sind insgesamt 6 Verteilungen.

b) Jede nun zu ermittelnde Verteilung kann erhalten werden, indem man jeweils bei einer Verteilung aus a) feststellt, welche Nummern die Kugeln tragen können:
Verteilung Nr.1 führt so zu genau 1 Verteilung, da in A bereits die einzige blaue Kugel und alle gelben Kugeln liegen müssen.
Bei Verteilung Nr.2 kann jede der vier roten und jede der zwei gelben Kugeln in A liegen. Das führt zu genau $4 \cdot 2 = 8$ Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.3 müssen in A alle gelben Kugeln sein, jede der vier roten Kugeln kann in A liegen, das ergibt genau 4 Verteilungen.
Bei Verteilung Nr.4 liegt in A die einzige blaue Kugel, für die Nummern der roten Kugeln gibt es genau die Möglichkeiten (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4) 6 Verteilungen.
Verteilung Nr.5: In A kann jede dieser sechs Zusammenstellungen roter Kugeln und jede der zwei gelben Kugeln liegen, das führt auf genau $6 \cdot 2 = 12$ Verteilungen.
Verteilung Nr.6: Für die Kugeln in A ist genau eine der vier roten Kugeln wegzulassen, somit gibt es hierfür genau 4 Verteilungen.
Das sind insgesamt $1 + 8 + 4 + 6 + 12 + 4 = 35$ Verteilungen.

Aufgabe 2 - 320732

Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, dass die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm^2, 800 cm^2 bzw. 1200 cm^2 haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!





In den Dreiecken BCS bzw. DAS seien e bzw. f die Längen der Seiten BS bzw. DS, und h bzw. k seien die Längen der auf diesen Seiten senkrechten Höhen.
Dann sind k und h auch in den Dreiecken ABS bzw. CDS die Längen der zu den Seiten BS bzw. DS senkrechten Höhen. Also sind die vorausgesetzten Flächeninhalte bzw. der gesuchte Flächeninhalt

$$\frac{e \cdot k}{2} = 1000cm^2, \quad \frac{f \cdot k}{2} = 800cm^2, \quad \frac{e \cdot h}{2} = 1200cm^2, \quad \frac{f \cdot h}{2} = F$$

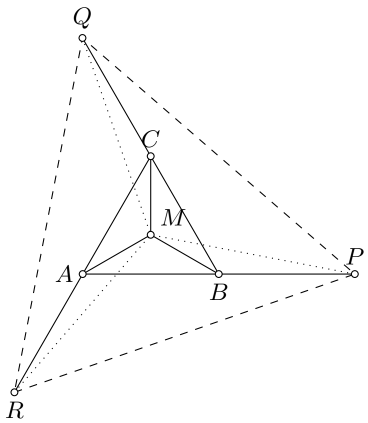
Daraus folgt

$$f : e = 800 : 1000 = 4 : 5, \qquad f = \frac{4e}{5}$$

d.h., durch die Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt

$$F = \frac{4e \cdot h}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5} \cdot 1200cm^2 = 960cm^2$$

Aufgabe 3 - 320733
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, dass $BP = 2$ cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $CQ = 2$ cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $AR = 2$ cm.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!
a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.
b) Es ist $MP = MQ = MR$.



a) Aus der Lage von P, Q, R auf den genannten Verlängerungen und aus den Voraussetzungen $AB = BC = CA$, (1) $BP = CQ = AR$ (2) folgt auch $AP = BQ = CR$. (3)
Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ABC betragen 60°, für ihre Nebenwinkel gilt daher $\angle PAR = \angle QBP = \angle RCQ = 120°$. (4)
Aus (2), (3), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ und damit $RP = PQ = QR$.

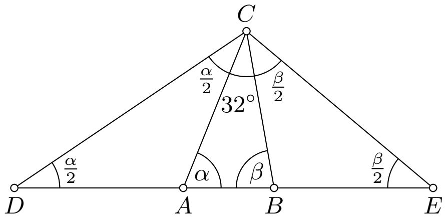
b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreismittelpunkt M zugleich Inkreismittelpunkt, d.h., AM, BM und CM halbieren die Innenwinkel des Dreiecks, also gilt $\angle MAP = \angle MBQ = \angle MCR = 30°$.

Daraus und aus (4) ergibt sich $\angle MAR = \angle MBP = \angle MCQ = 150°$. (5)
Aus (2),(5) und $MA = MB = MC$ (Radien des Umkreises) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle MAR = \triangle MBP = \triangle MCQ$ und damit die Behauptung $MR = MP = MQ$.

Aufgabe 4 - 320734
Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Eine natürliche Zahl n hat genau dann eine durch 9 teilbare Quersumme, wenn n selbst durch 9 teilbar ist.
Ferner ist n wegen der Teilerfremdheit von 5 und 9 genau dann durch 5 und 9 teilbar, wenn n durch 45 teilbar, d.h. mit einer natürlichen Zahl k von der Form $n = 45 \cdot k$ ist.
Wegen $45 \cdot 2222 = 99990, 45 \cdot 2223 = 100035$ sowie $45 \cdot 22222 = 999990$, $45 \cdot 22223 = 1000035$ sind die Zahlen $45 \cdot k$ mit natürlichen k genau für $k = 2223, ..., 22222$ sechsstellig.
Da dies $22222 - 2222 = 20000$ Werte k sind, ist damit die gesuchte Anzahl 20000 ermittelt.

Aufgabe 5 - 320735
Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, dass $AD = AC$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, dass $BE = BC$ gilt.
Beweise, dass durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\angle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!



Im Dreieck ABC seien α bzw. β die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B. Das Dreieck ACD ist mit $AD = AC$ gleichschenklig, nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz gilt daher $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle BCE = \angle BEC = \frac{\beta}{2}$. Folglich ist

$$\angle DCE = \angle ACB + \angle ACD + \angle BCE = 32° + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist aber $\alpha + \beta = 180° - 32° = 148°$. Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Winkelgröße $\angle DCE = 32° + \frac{148°}{2} = 32° + 74° = 106°$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 6 - 320736
Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:
Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.
Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

Wenn das Volumen des Beckens x Kubikmeter beträgt, so folgt aus den Angaben: In jeder Minute strömen aus der geöffneten ersten Leitung $\frac{x}{120}$ Kubikmeter, aus der zweiten $(\frac{x}{120} + 50)$ Kubikmeter. Das Volumen des Beckens, das durch beide Leitungen in 48 Minuten gefüllt wird, beträgt daher

$$48 \cdot \left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50 \right) \right)$$

Kubikmeter. Also muss die Gleichung

$$48 \cdot \left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50 \right) \right) = x$$

gelten. Durch Umformen wird $x = 12000$.
Somit ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Das Volumen des Beckens beträgt 12 000 Kubikmeter.

Lösungen der III. Runde 1992 übernommen aus [5]

4.35 XXXIII. Olympiade 1993

4.35.1 I. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330711
In einer Hühnerfarm wurden 2500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet. Um wie viele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

Das nach 14 Tagen vorhandene Futter hätte für 2500 Hühner noch 16 Tage gereicht. Für 500 Hühner würde es 5 mal so lange reichen, d.h. $5 \cdot 16$ Tage.
Für 2000 Hühner reicht es $\frac{1}{4}$ dieser $5 \cdot 16$ Tage, d.s. $5 \cdot 4 = 20$ Tage. Verglichen mit 16 Tagen reicht es also um 4 Tage länger.

Aufgabe 2 - 330712
Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern $3, a, 3, b, 2, c$ haben.
Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, dass die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Da 9 und 10 zueinander teilerfremd sind, ist die genannte Zahl genau dann durch 90 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 10 teilbar ist. Sie ist genau dann durch 10 teilbar, wenn $c = 0$ (1) ist. Sie ist, wenn (1) gilt, außerdem genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $3 + a + 3 + b + 2 + c = 8 + a + b$ durch 9 teilbar ist, d.h. genau dann, wenn $a + b$ bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ ist das genau für $a + b = 1$ und $a + b = 10$ der Fall. Hierfür gibt es genau die folgenden Möglichkeiten (2):

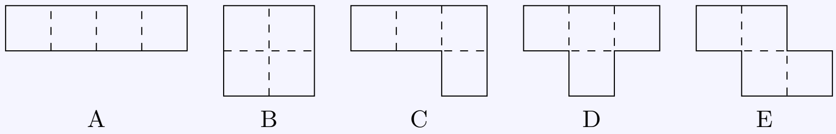
a	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

In (1) und (2) sind somit alle Möglichkeiten für die genannte Wahl von a, b, c angegeben.

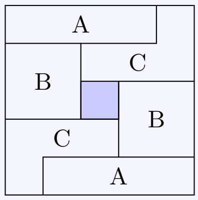
Aufgabe 3 - 330713
Anke berichtet, dass sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.
Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.
Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Ist c die Länge der Basis und $a = b$ die Länge der Schenkel des genannten Dreiecks, so gilt nach Anjas Angaben entweder $a = 3 \cdot c$ oder $c = 3 \cdot a$.
Da nach der Dreiecksungleichung $a + a > c$ gilt, scheidet jedoch der Fall $c = 3 \cdot a$ aus; also verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3 \cdot c$. (1) Nach den Angaben gilt ferner $2 \cdot a + c = 14$ cm. (2)
Aus (1) und (2) folgt $6 \cdot c + c = 14$ cm, also $c = 2$ cm und damit $a = b = 6$ cm.
Diese Längen erfüllen nicht nur die Forderung $a + a > c$, sondern auch die Forderung $a + c > a$ der Dreiecksungleichung. Also hat Beate recht; für die Längen gibt es genau die genannte Möglichkeit.

Aufgabe 4 - 330714
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne dass Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.
Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!

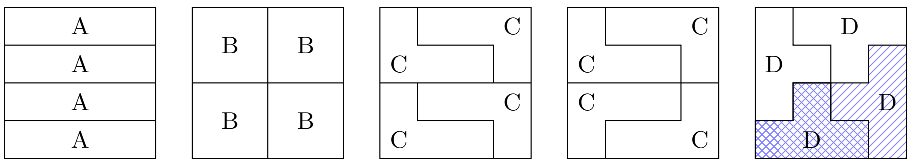


b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, dass drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

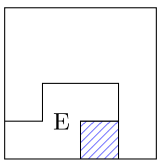
c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.
Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen "Oberseite" und "Unterseite" unterschieden; jeder Stein darf also auch "gewendet" werden.

a) Für die Formen A, B, C, D gibt es z.B. die in der Abbildung gezeigten Möglichkeiten:

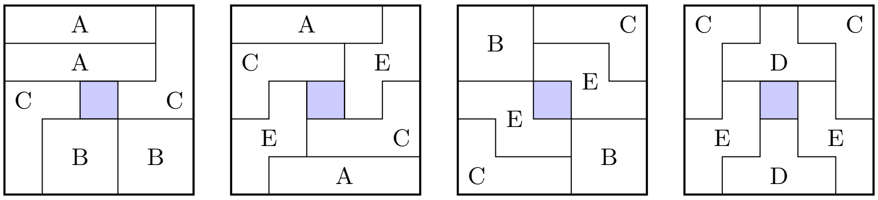


Für A gibt es (im Sinne des "Hinweises") keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein A bereits eine Länge von 4 cm einnimmt.
Für B gibt es ebenfalls keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein B Länge und Breite von 2 cm hat, also die Steine nur zu zweien neben- und untereinander gelegt werden können.
Auch für D gibt es keine weitere Möglichkeit; denn an eine Ecke (z.B. links unten) des zu bedeckenden Quadrats kann ein Stein D (bis auf Drehung und Spiegelung) nur so gelegt werden, wie die doppelt schraffierte Fläche angibt; das fehlende Teilfeld rechts unten erfordert die Lage der einfach schraffierten Fläche, worauf für die beiden letzten Steine D ebenso ihre Lage folgt.

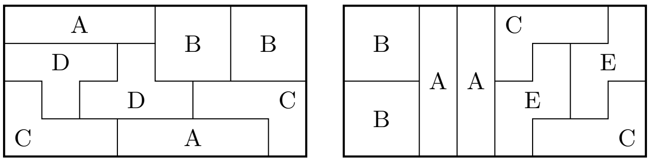


Für die Form E gibt es keine Möglichkeit; denn an eine Ecke könnte ein Stein E nur so gelegt werden, wie die obere Abbildung zeigt, und bei jeder Möglichkeit, das schraffierte Feld mit einem weiteren Stein E zu bedecken (ohne den vorigen zu überlappen), würde dieser über das Quadrat hinausragen.

b) Die Abbildung zeigt vier Beispiele der geforderten Art.



c) Die Abbildung zeigt (mit A, B, C, D bzw. A, B, C, E als verwendeten Sorten) zwei Beispiele der geforderten Art. (Auch andere Anordnungen der Legesteine sind möglich.)



Lösungen der I. Runde 1993 übernommen aus [5]

4.35.2 II. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330721
An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.
(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.
(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.
(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.
(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

I. Wenn die Aussagen zutreffen, so folgt:
Nach (2) ist Herr Schröter weder der Deutsch- noch der Englischlehrer, nach (3) auch nicht der Geschichtslehrer und nach (4) auch nicht der Mathematiklehrer. Da er zwei der sechs Fächer unterrichtet, verbleibt nur:

Herr Schröter unterrichtet Biologie und Geographie. (6)
Nach (1) ist Herr Berger nicht der Geschichtslehrer, nach (5) nicht der Deutschlehrer und nach (6) weder der Biologie- noch der Geographielehrer. Somit gilt:
Herr Berger unterrichtet Mathematik und Englisch. (7)
Schließlich verbleibt nach (6) und (7) nur: Herr Müller unterrichtet Deutsch und Geschichte. (8)

II. Bei der in (6), (7), (8) angegebenen Verteilung können die Aussagen (1) bis (5) zutreffen; denn bei dieser Verteilung ist Herr Berger weder der Geschichts- noch der Deutschlehrer (daher sind (1) und (5) möglich); und Herr Schröter ist keiner der Lehrer für Deutsch, Englisch, Geschichte oder Mathematik, außerdem sind der Deutsch- und der Englischlehrer voneinander verschieden (daher sind (2), (3) und (4) möglich).

Mit II. ist gezeigt, dass es eine Verteilung gibt, bei der die Aussagen (1) bis (5) zutreffen können, nach I. ist sie durch diese Aussagen eindeutig bestimmt. Sie lautet wie in (6), (7), (8) angegeben.

Aufgabe 2 - 330722
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn die Zahl z durch 3 und durch 8 teilbar ist; denn 3 und 8 sind zueinander teilerfremd, und es gilt $3 \cdot 8 = 24$.
Die Zahl z ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Zusammen mit Bedingung (2) ist das genau dann der Fall, wenn die vierte Ziffer von z eine 6 ist; denn unter den Zahlen von 130 bis 139 ist genau die Zahl 136 durch 8 teilbar.
Die Zahl z ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zusammen mit den bereits genannten Bedingungen ist das genau dann der Fall, wenn die erste Ziffer von z eine der drei Ziffern 2, 5, 8 ist; denn die Summe der letzten drei Ziffern 1, 3, 6 beträgt 10, und unter den (durch Addition einer weiteren Ziffer 1,... , 9 entstehenden) Summen von 11 bis 19 sind genau 12, 15 und 18 durch 3 teilbar.
Somit erfüllen genau die Zahlen 2136, 5136, 8136 die Bedingungen (1) und (2).

Aufgabe 3 - 330723
Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: "Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt."
Martin: "Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren."
Matthias: "Am ersten Tag wurden genau 5 16 und am vierten Tag genau 1 4 der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft."

Weise nach, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Am zweiten und am dritten Tag zusammen wurden nach Michaels Aussage 7 km und die zweifache Weglänge des dritten Tages gefahren. Da dies nach Martins Aussage 105 km waren, betrug die zweifache Weglänge des dritten Tages $(105 - 7)$ km $= 98$ km. Also wurden am dritten Tag 98 km : 2 = 49 km, am zweiten Tag $(49 + 7)$ km $= 56$ km gefahren.

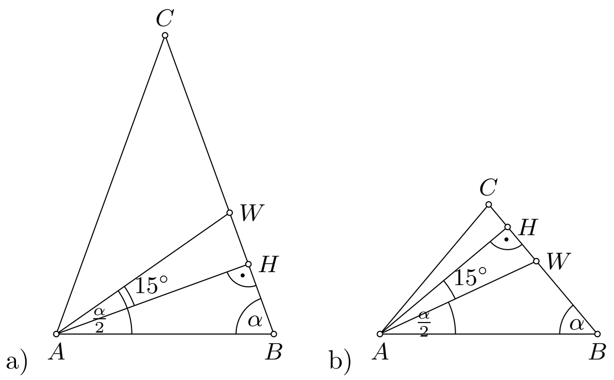
Am ersten und am vierten Tag zusammen wurden nach Matthias' Aussage $\frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$ der gesamten Weglänge gefahren. Die 105 km des zweiten und dritten Tages waren folglich die restlichen $\frac{7}{16}$ der gesamten Weglänge; diese betrug daher $\frac{7}{16} \cdot 105$ km $= 240$ km.

Also wurden am ersten Tag $\frac{5}{16} \cdot 240$ km $= 75$ km, am vierten Tag $\frac{1}{4} \cdot 240$ km $= 60$ km gefahren. Damit ist der geforderte Nachweis geführt, und die vier Weglängen der einzelnen Tage sind angegeben.

Aufgabe 4 - 330724
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Basiswinkel $\angle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?
b) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ haben, in dem ein Basiswinkel $\angle BAC$ die Größe 70° hat?
c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ möglich sind, bei dem der Winkel $\angle WAH$ die Größe 15° hat!

a) Aus der Voraussetzung $H = W$ folgt, dass das Dreieck ABC auch mit $AB = AC$ gleichschenklig, wegen der Voraussetzung $AC = BC$ also sogar gleichseitig ist. Daher gilt $\angle BAC = 60°$.



b) Siehe Abbildung a): Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt $\angle BAW = 35°$. (1)
Nach dem Basiswinkelsatz ist auch $\angle ABC = 70°$; nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist ferner $\angle BAH = 90° - \angle ABH = 20°$. (2)
Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 35° - 20° = 15°$.

c) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 15°$ ist, so folgt: Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (siehe Abbildungen a bzw. b).

In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen $\angle BAH = \angle BAW \mp \angle WAH$, mit $\alpha = \angle BAC$ also

$$\angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 15^\circ \tag{3}$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 15^\circ\right) + \alpha = 90^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60^\circ \pm 10^\circ \tag{4,5}$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 70^\circ$ als auch für $\alpha = 50^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90^\circ$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 15^\circ$. Damit ist gezeigt, dass genau die beiden Werte 70° und 50° als Basiswinkelgröße in einem Dreieck der in c) genannten Art möglich sind.

Lösungen der II. Runde 1993 übernommen aus [5]

4.35.3 III. Runde 1993, Klasse 7

Aufgabe 1 - 330731
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.
(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

I. Wenn eine vierstellige natürliche Zahl z die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (1) und wegen $48 = 2 \cdot 8 \cdot 3$ ist z auch durch 8 und durch 3 teilbar. Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die durch ihre letzten drei Ziffern dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist. Unter den Zahlen von 340 bis 349 ist nur die Zahl 344 durch 8 teilbar. Hiernach und wegen (2) können die letzten drei Ziffern von z nur 3, 4, 4 in dieser Reihenfolge lauten.

Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da die Summe der letzten drei Ziffern $3 + 4 + 4 = 11$ beträgt, kann hiermit und mit der ersten Ziffer nur dann eine durch 3 teilbare Quersumme entstehen, wenn die erste Ziffer 1 oder 4 oder 7 lautet.
Die Zahl 4344 ist (da die Division 4344 : 48 auf 90, Rest 24 führt) nicht durch 48 teilbar, also scheidet die 4 als erste Ziffer aus.

Somit können unter den vierstelligen natürlichen Zahlen nur die beiden Zahlen 1344 und 7344 die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

II. Diese beiden Zahlen erfüllen offensichtlich (2) und (wegen $1344 : 48 = 28$ sowie $7344 : 48 = 153$) auch (1).
Damit sind alle Zahlen der geforderten Art ermittelt: Es sind genau die beiden Zahlen 1344 und 7344.

Aufgabe 2 - 330732
In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.
Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht.
Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.
Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

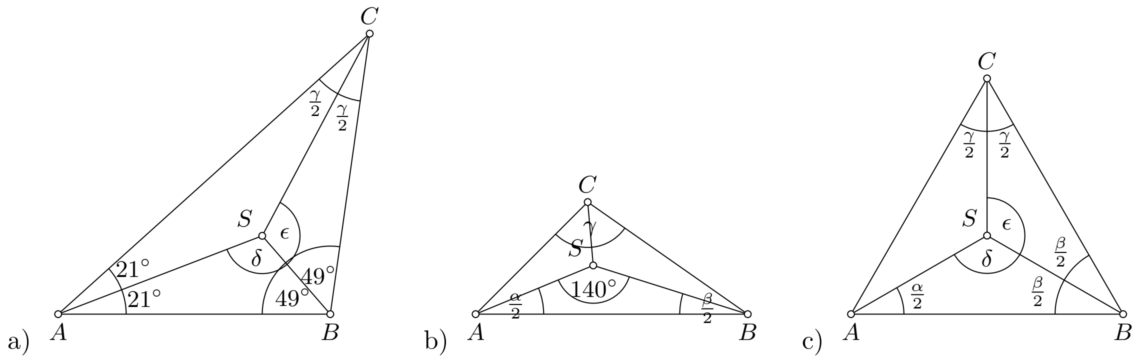
Wenn das Kaufhaus insgesamt x Beschäftigte hatte, so waren darunter $\frac{4}{5}x$ Frauen und $\frac{1}{5}x$ Männer.
Zu Beginn des Monats waren $\frac{12,5}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{10}x$ Frauen und $\frac{18,75}{100} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{3}{80}x$ Männer unverheiratet, das waren zusammen $\frac{1}{10}x + \frac{3}{80}x = \frac{11}{80}x$ unverheiratete Beschäftigte.

Nach der Heirat der 4 Paare waren noch $\frac{11}{80}x - 8$ Beschäftigte unverheiratet. Daher gilt

$$\frac{11}{80}x - 8 = 36 \qquad \Rightarrow \qquad x = 320$$

Das Kaufhaus hatte insgesamt 320 Beschäftigte.

Aufgabe 3 - 330733
Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ bzw. $\angle ACB$ bezeichnet.
a) Wie groß sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?
b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ die Größe 140° hat!
c) Beweise, dass jedes Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ und $\angle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!



Mit den Bezeichnungen $\delta = \angle ASB$, $\rho = \angle BSC$ gilt:

a) Wegen $\frac{\alpha}{2} = 21°$, $\frac{\beta}{2} = 49°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABS ist $21° + 49° + \delta = 180°$, also $\delta = 110°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist $42° + 98° + \gamma = 180°$, also $\gamma = 40°$; wegen $\frac{\beta}{2} = 49°$, $\frac{\gamma}{2} = 20°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck BCS ist $49° + 20° + \epsilon = 180°$, also $\epsilon = 111°$.

b) Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABS ist

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140° = 180°$$

also $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40°$, $\alpha + \beta = 80°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC folgt damit weiter $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 100°$.

c) Nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABS und BCS gilt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180°$ und $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \epsilon = 180°$.
Wegen der Voraussetzung $\delta = \epsilon$ folgt daher $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, also $\alpha = \gamma$.
Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist folglich das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AB = BC$.

Aufgabe 4 - 330734
Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, dass an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, dass dieser Gegenzug 120 m lang ist.
Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Die Strecke, die der Gegenzug in 4 Sekunden durchfährt, ergibt sich, wenn man seine Länge 120 m um die Länge derjenigen Strecke vermindert, die Ulrikes Zug selbst in diesen 4 Sekunden zurücklegt. Die letztgenannte Strecke beträgt wegen der Geschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von Ulrikes Zug

$$4s \cdot \frac{60 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{200}{3} m$$

Also durchfährt der Gegenzug in 4 Sekunden die Strecke 120 m $- \frac{200}{3}$ m $= \frac{160}{3}$ m; somit ist seine Geschwindigkeit eindeutig durch die Angaben bestimmt, sie beträgt $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 5 - 330735
Die Klassen 7a, 7b, 7c trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
7b	3:2	3:1
7a	3:1	2:2
7c	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wie viele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat!

Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, dass sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen musste.
Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, dass die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Klasse 7a hat wegen des Punktverhältnisses 2 : 2 entweder beide oder keines ihrer zwei Spiele unentschieden gespielt. Da ihr Torverhältnis 3 : 1 aber zwei unterschiedliche Zahlen aufweist, kann sie nicht beide Spiele unentschieden gespielt haben. Daher folgt:
Klasse 7a hat kein Spiel unentschieden gespielt. (1)

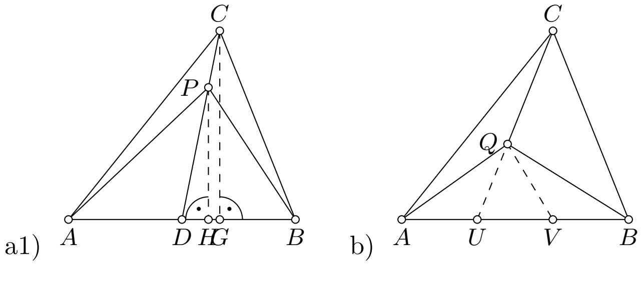
Da die Klassen 7b und 7c in ihren Punktverhältnissen ungerade Zahlen haben, aber gegen 7a nach (1) nicht unentschieden gespielt haben, folgt:
Das Spiel 7b gegen 7c ging unentschieden aus. (2)
Hätte dieses Spiel 0:0 oder 1:1 geendet, so müsste die Klasse 7b ihr Torverhältnis 3:2 so erreicht haben, dass ihr Spiel gegen 7a das Ergebnis 3:2 bzw. 2:1 gehabt hätte. Das ist aber nicht möglich, denn die Klasse 7a hat, wie aus ihrem Torverhältnis 3:1 ersichtlich ist, insgesamt nur ein Gegentor hinnehmen müssen.

Daher und weil Klasse 7c wegen des Torverhältnisses 2:5 insgesamt nur 2 Tore erzielt hat, verbleibt für (2) nur die Möglichkeit:
Das Spiel 7b gegen 7c endete 2:2. (3)
Damit folgt aus den Torverhältnissen von 7b und 7c weiter:
Das Spiel 7b gegen 7a endete 1:0, (4)
Das Spiel 7a gegen 7c endete 3:0. (5)
Durch die Angaben sind also für jedes Spiel die Anzahlen der erreichten Tore eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (3), (4), (5).

Aufgabe 6 - 330736
a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!
Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)
Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, dass die genannte Bedingung stets mit diesem - nach deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

a) Für jedes Dreieck ABC mit D als Mittelpunkt der Seite AB und für jeden auf DC gelegenen Punkt P gilt:
Die Dreiecke ACD und BCD haben senkrecht zu AD bzw. BD dieselbe Höhe, nämlich das Lot CG von C auf AB. Wegen $AD = BD$ haben sie also einander gleichgroßen Flächeninhalt. Ebenso haben ADP und BDP wegen gleicher Höhe PH und $AD = BD$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Durch Subtraktion ergibt sich somit: Die beiden Dreiecke ACP, BCP haben einander gleichgroßen Flächeninhalt.



b) Man teilt die Strecke AB durch zwei Punkte U, V in drei gleichlange Strecken AU, UV, VB. Dann wählt man Q als den Mittelpunkt der Strecke CU.
Hiernach haben die drei Dreiecke AUQ, UVQ, VBQ das Lot von Q auf AB als gemeinsame Höhe auf AU, UV bzw. VB und daher wegen $AU = UV = VB$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Wird dieser mit J bezeichnet, so hat also das Dreieck ABQ den Flächeninhalt $3J$.

Ferner haben die Dreiecke AUQ und ACQ das Lot von A auf CU als gemeinsame Höhe auf UQ bzw. CQ und daher wegen $UQ = CQ$ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d.h., das Dreieck ACQ hat ebenfalls den Flächeninhalt J.
Entsprechend haben die Dreiecke BUQ und BCQ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d.h., das Dreieck BCQ hat den Flächeninhalt $2J$. Wird also der Punkt Q nach der gegebenen Beschreibung gefunden, so erfüllt er die Bedingung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ, ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten.

Lösungen der III. Runde 1993 übernommen aus [5]

4.36 XXXIV. Olympiade 1994

4.36.1 I. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340711
Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.
Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Mit x Stäbchen der Länge 7 cm und y Stäbchen der Länge 12 cm lässt sich genau dann eine Strecke von 1 m Länge auslegen, wenn $7x + 12y = 100$ gilt.

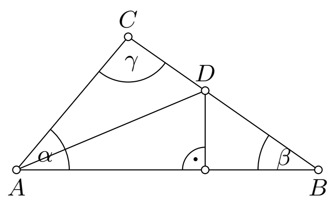
I. Wenn x und y zwei Anzahlen sind, die diese Bedingung erfüllen, so folgt:
Da 12 und 100 durch 4 teilbar sind, aber 7 zu 4 teilerfremd ist, muss x durch 4 teilbar sein. Wäre $x \geq 16$, so wäre $7x + 12y \geq 7 \cdot 16 > 100$. Also kann x nur eine der Zahlen 0, 4, 8, 12 sein.

Wäre $x = 0$, so folgte $12y = 100$; wäre $x = 8$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 8 = 44$; wäre $x = 12$, so folgte $12y = 100 - 7 \cdot 16$. In allen drei Fällen erhielte man für y keine ganze Zahl.
Also kann nur $x = 4$ und damit $12y = 100 - 7 \cdot 4 = 72$, also $y = 6$ sein.

II. Für $x = 4$ und $y = 6$ wird die Bedingung wegen $7 \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 28 + 72 = 100$ erfüllt.
Daher gibt es zum Auslegen der Strecke genau die Möglichkeit, 4 Stäbchen von 7 cm und 6 Stäbchen von 12 cm zusammenzustellen.

Aufgabe 2 - 340712
Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!
b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 50° hat!
c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 60° hat?

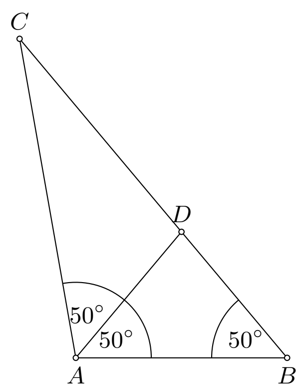


a) Für die Innenwinkelgrößen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt: Da D ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB ist, gilt $DA = DB$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt $\angle BAD = \angle ABD = \beta = 35°$.

Da AD den Innenwinkel bei A halbiert, folgt $\alpha = 2 \cdot \angle BAD = 2\beta = 70°$. Damit ergibt sich aus dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 75°$.

b) Die rechte Abbildung zeigt ein gesuchtes Dreieck.

c) Wenn es ein Dreieck der genannten Art gäbe, so würde wie in a) folgen, dass $\alpha = 2\beta = 120°$ wäre.
Damit wäre $\alpha + \beta + \gamma > \alpha + \beta = 120° + 60° = 180°$ im Widerspruch zum Innenwinkelsatz.



Aufgabe 3 - 340713
Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.
(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, dass es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

I. Wenn die Aussagen (1), (2) und (3) für eine natürliche Zahl z gelten, so folgt:
Nach (3) ist z gerade, hat also eine gerade Einerziffer.
Nach (1) ist folglich die Zehnerziffer ungerade. Durch Verdoppeln entsteht aus ihr nach (2) die Hunderterziffer, also eine Zahl kleiner als 10. Daher ist die Zehnerziffer kleiner als 5 und folglich eine der Zahlen 1; 3.
Wegen (1) und (2) folgt damit: Die letzten drei Ziffern von z können nur entweder 212 oder 634 sein.

Wären sie 212, so wäre die mit den letzten zwei Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar; also wäre z durch 4 teilbar und daher (sowie wegen $z > 4$) nicht das Doppelte einer Primzahl. Somit können die letzten drei Ziffern von z nur 634 sein.

Die erste Ziffer von z kann keine der Ziffern 2, 5, 8 sein; denn hierfür hätte z eine durch 3 teilbare Quersumme und wäre folglich durch 3 teilbar, könnte also (wegen $z > 6$) nicht das Doppelte einer Primzahl sein. Wäre die erste Ziffer von z eine der Zahlen 1, 3, 4, 6, 7, so würde ebenfalls die Aussage (3) nicht gelten, wie die folgenden Rechnungen zeigen:

z	Zerlegung von $z:2$
1634	$817 = 19 \cdot 43$
3634	$1817 = 23 \cdot 79$
4634	$2317 = 7 \cdot 331$
6634	$3317 = 31 \cdot 107$
7634	$3817 = 11 \cdot 347$

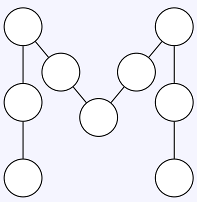
Damit verbleibt nur die Möglichkeit $z = 9634$.

II. Für $z = 9634$ sind (1) und (2) erfüllt, ferner gilt auch (3), da $z : 2 = 4817$ eine Primzahl ist, wie man folgendermaßen zeigen kann:
Wegen $4817 < 4900 = 70^2$ müsste die Zahl 4817, wenn sie zerlegbar wäre, einen Primfaktor kleiner als 70 enthalten. Man kann jedoch feststellen, dass 4817 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67 teilbar ist.

Mit I. und II. ist nachgewiesen, dass es genau eine vierstellige natürliche Zahl gibt, für die (1), (2) und (3) gelten, und diese Zahl ist als $z = 9634$ ermittelt.

Lösung übernommen aus [5]

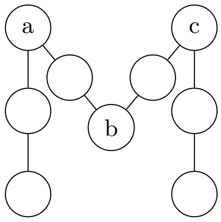
Aufgabe 4 - 340714



In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden:
Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.

a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt! Beweise, dass keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!
c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?



Für jede geforderte Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gilt:
Addiert man die vier im Aufgabentext genannten (einander gleichen) Summen, so werden dabei die Zahlen a, b, c (siehe Abbildung) je zweimal, die anderen Zahlen je einmal als Summanden herangezogen. Also gilt

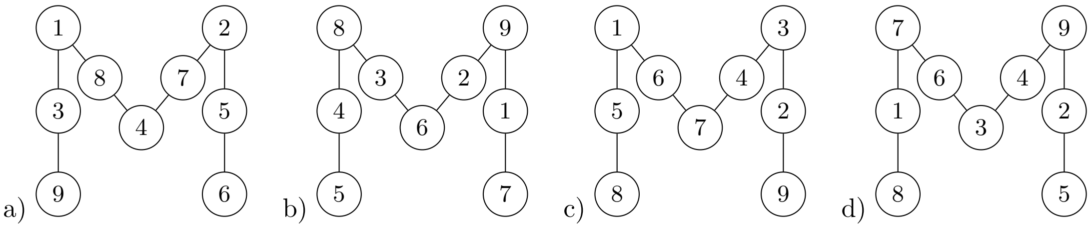
$$4s = 1 + 2 + ... + 9 + a + b + c \tag{1}$$

Die Summe s ist folglich für diejenigen Eintragungen am kleinsten bzw. am größten, für die $a + b + c$ am kleinsten bzw. am größten ist.

a) Die kleinstmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $1 + 2 + 3 = 6$. Wäre eine Eintragung mit diesen Zahlen als a, b, c möglich, so folgte aus (1) die Gleichung $4s = 45 + 6$, die mit ganzzahligem s nicht erfüllbar ist.
Die nächstgrößere Möglichkeit $1 + 2 + 4 = 7$ führt auf $4s = 45 + 7 = 52$, also $s = 13$. Wie Abbildung a zeigt, ist dieser Wert s durch eine Eintragung erreichbar. Damit ist also 13 als kleinster Wert s bewiesen, und eine zugehörige Eintragung ist angegeben.

b) Die größtmögliche Summe aus drei verschiedenen der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist $7 + 8 + 9 = 24$. Wieder ist eine Eintragung mit diesen a, b, c nicht möglich, da (1) auf $4s = 45 + 24$ führen würde. Die nächstkleinere Möglichkeit $6 + 8 + 9 = 23$ mit $45 = 45 + 23 = 68$, $s = 17$ ist durch eine Eintragung erreichbar; siehe z.B. Abbildung b.

c) Auch mit $s = 14$ und mit $s = 16$ sind Eintragungen möglich, wie Abbildungen c und d zeigen. Dagegen gibt es keine Eintragung mit $s = 15$.
Für eine solche müsste nach (1) nämlich $60 = 45 + a + b + c$, also auch $a + b + c = 5$ sein. In das Feld zwischen a und b müsste folglich wegen $s = 15$ wieder die Zahl c kommen, was der Verschiedenheit der einzutragenden Zahlen widerspricht.



Lösungen der I. Stufe 1994 übernommen aus [5]

4.36.2 II. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340721
Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten. Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse.
Katja, die beim Nachhausekommen nicht wusste, dass sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel.
Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.
Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Waren zu Beginn n Nüsse im Korb, so folgt:
Lars nahm $\frac{n}{3}$ Nüsse, danach blieben $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Katja $\frac{1}{3}\frac{2n}{3} = \frac{2n}{9}$ Nüsse, danach blieben $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse im Korb.
Davon nahm Markus $\frac{1}{3}\frac{4n}{9} = \frac{4n}{27}$ Nüsse, danach blieben $\frac{4n}{29} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse im Korb. Da dies 16 Nüsse waren, folgt $\frac{8n}{27} = 16$ und daraus $n = 54$.

Also waren zu Beginn 54 Nüsse im Korb.
Von ihnen nahm Lars 18 Nüsse, von den verbleibenden 36 Nüssen nahm Katja 12 Nüsse, von den verbleibenden 24 Nüssen nahm Markus 8 Nüsse.

Aufgabe 2 - 340722
a) Ein Wettspielgewinn von 1485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.
Wie viel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht.
Wie groß waren die drei Einsätze?

a) Die Teilnehmer sollen der Reihe nach 2 Teile, 3 Teile und 4 Teile des Gewinns erhalten, wobei alle diese Teile gleichgroß sein sollen und zusammen den gesamten Gewinn ausmachen sollen. Da es also $2 + 3 + 4 = 9$ Teile sein sollen, muss jedes Teil 1485 DM : 9 = 165 DM betragen. Also erhalten die Teilnehmer der Reihe nach

$$2 \cdot 165 \text{ DM} = 330 \text{ DM}, \qquad 3 \cdot 165 \text{ DM} = 495 \text{ DM}, \qquad 4 \cdot 165 \text{ DM} = 660 \text{ DM}$$

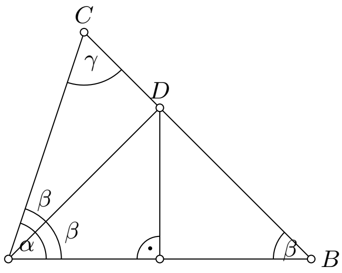
b) Da ein Fünftel des Gewinns 150 DM sind, beträgt der gesamte Gewinn $5 \cdot 150$ DM = 750 DM.
Die im Aufgabentext genannten beiden anderen Teilnehmer bekommen zusammen 750 DM - 150 DM = 600 DM. Zur Aufteilung dieses Betrages im Verhältnis 5 : 7 ergibt sich entsprechend wie in a) wegen $5+7 = 12$ und $600 : 12 = 50$: Die beiden anderen Teilnehmer erhalten der Reihe nach $5 \cdot 50$ DM = 250 DM; $7 \cdot 50$ DM = 350 DM.

c) Waren a, b, c die in DM gerechneten Einsätze von Anke, Bertram bzw. Claus, so gilt $a + b + c = 44$ und $a + 6 = 2c = b$.
Setzt man hieraus $a = 2c - 6$ und $b = 2c$ in die erste Gleichung ein, so folgt $2c - 6 + 2c + c = 44$, d.h. $c = 10$ und damit weiter $b = 20$, $a = 14$.
Also wurden folgende Beträge gesetzt: Anke: 14 DM, Bertram: 20 DM, Claus: 10 DM.

Aufgabe 3 - 340723

In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

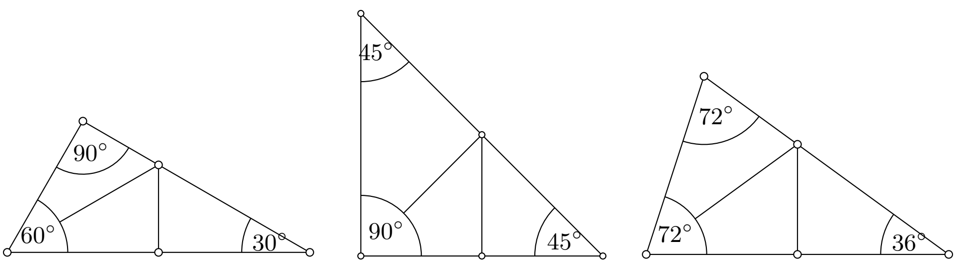
a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt! Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?
b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!
c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!



a) (siehe Abbildung) Da D auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $AD = BD$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt daraus $\angle BAD = \angle ABD = \beta$.
Da AD Winkelhalbierende ist, folgt weiter $a = 2\beta$ (1) und damit nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Formel $\gamma = 180° - 3\beta$. (2)

Weiterhin folgt
I. Für alle $\beta \geq 60°$ gibt es kein Dreieck der geforderten Art; denn gäbe es ein solches, so müsste, wie eben gezeigt wurde, (2) gelten. Das ist nicht möglich, da sich ein Wert $\gamma \leq 0$ ergäbe.

II. Für alle positiven $\beta < 60°$ gibt es dagegen ein Dreieck der geforderten Art.
Denn wählt man zu einem solchen β die Werte α und γ aus (1) und (2), so hat man drei positive Winkelgrößen α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Es gibt daher ein Dreieck ABC mit diesen Innenwinkelgrößen. Ist darin AD Winkelhalbierende, so ist das Dreieck ABD nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, also liegt D auch auf der Mittelsenkrechten von AB.



b) Mit $\beta = 90°$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht rechtwinklig sein; denn für diesen Wert β gibt es nach a) I. kein solches Dreieck.
Dagegen gibt es ein solches Dreieck, das mit $\alpha = 90°$ rechtwinklig ist; denn gemäß (1) kann man $\beta = 45°$ wählen und dann wie in a) II. vorgehen. Ebenso ist $\gamma = 90°$ gemäß (2) mit $\beta = 30°$ erreichbar.
Die in (b) gesuchten Werte sind also genau $\beta = 30°$ und $\beta = 45°$.

c) Mit $\alpha = \beta$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht gleichschenklig sein; denn nach (1) ergäbe sich $2\beta = \beta$, also $\beta = 0$ und damit kein Dreieck.
Dagegen ist $\beta = \gamma$ gemäß (2) mit $\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 45°$ erreichbar, ebenso $\alpha = \gamma$ gemäß (1) und (2) mit $2\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 36°$. Die in (c) gesuchten Werte sind folglich genau $\beta = 45°$ und $\beta = 36°$.

Aufgabe 4 - 340724
a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, dass ihre Summe 230 beträgt.
Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, dass die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.
Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

a) Fünf Zahlen der Form $n, n+1, ..., n+4$ erfüllen genau dann die Forderung $n+n+1+...+n+4 = 230$, wenn $5n + 10 = 230$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste dieser Zahlen $n = 44$ ist.
b) Für jede natürliche Zahl n ist die betrachtete Summe $5n+10$ durch 5 teilbar. Sie ist genau dann auch, wie gefordert, durch 23 teilbar, wenn sie durch $5 \cdot 23 = 115$ teilbar ist; denn 5 und 23 sind zueinander teilerfremd.
Den kleinsten durch 115 teilbaren Wert erreicht $5n + 10$, wenn $5n + 10 = 115$ gilt. Das trifft genau dann zu, wenn die erste der fünf Zahlen $n = 21$ ist.

Lösungen der II. Runde 1994 übernommen aus [5]

4.36.3 III. Runde 1994, Klasse 7

Aufgabe 1 - 340731
Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1000000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk: (1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.
Evelyn: (1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.
Franziska: (1) Die gesuchte Zahl lautet 91809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, dass die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Wenn die Bedingungen der Aufgabe von einer natürlichen Zahl n erfüllt werden, so folgt:
Wäre Evelyns Aussage (2) falsch, also n durch 27 teilbar, so wäre n auch durch 9 teilbar, d.h. auch Evelyns Aussage (1) falsch. Das widerspricht den Bedingungen der Aufgabe. Also ist Evelyns Aussage (2) wahr und (nochmals nach den Bedingungen der Aufgabe) ihre Aussage (1) falsch.
Das besagt: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.

Wäre Franziskas Aussage (1) wahr, so wäre wegen $91809 : 101 = 909$ auch Franziskas Aussage (2) wahr. Wieder kann dies nach den Bedingungen der Aufgabe nicht sein, sondern es folgt: Aussage (1) ist falsch, Aussage (2) wahr, also lautet n nicht 91809, ist aber durch 101 teilbar.
Damit ist gezeigt: Zerlegt man n in Primfaktoren, so kommt in dieser Zerlegung die Primzahl 3 genau zweimal und die Primzahl 101 mindestens einmal vor. Also ist n mindestens dreistellig und daher Dirks Aussage (1) falsch. Somit ist Dirks Aussage (2) wahr.

Außer den Primzahlen 3 und 101 kommt bei der Zerlegung von n in Primfaktoren daher keine weitere Primzahl vor. Käme 101 genau zweimal vor, so wäre $n = 3^2 \cdot 1012 = 91809$, was bereits widerlegt ist; käme 101 mehr als zweimal vor, so wäre $n \geq 3^2 \cdot 1013 > 1003$, also läge n nicht zwischen 1 und 1000000. Also kommt 101 genau einmal vor; es gilt $n = 3^2 \cdot 101 = 909$.
Somit ist die gesuchte Zahl durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt, sie lautet 909.

Aufgabe 2 - 340732
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, dass eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.
a) Wie viel Stellen hat z?
b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, dass die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.
Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

a) Die Zahl z hat ihre Ziffern aus den 9 einstelligen Zahlen 1, ..., 9, den 90 zweistelligen Zahlen 10, ..., 99 und der dreistelligen Zahl 100. Also hat sie $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ Stellen.

b) Von den 192 Ziffern der Zahl z sollen in z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in z auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streicht man diese, so sind insgesamt bereits $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern entfernt; aus der danach verbleibenden Zahl

$$99999505152535455565758596 0...9899100$$

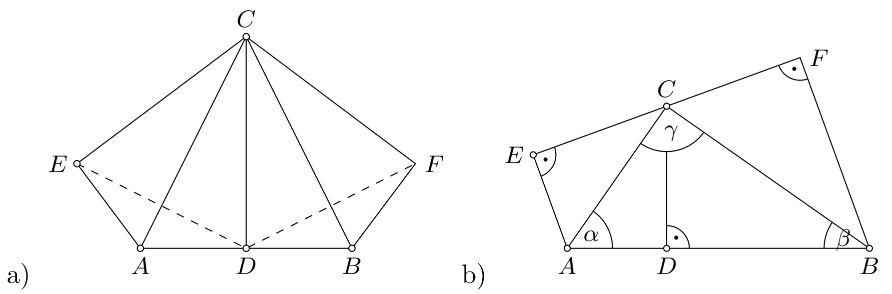
sind noch genau 16 Ziffern zu streichen.
Das können nicht die 19 Ziffern bis zur ersten auf den Anfang 99999 folgenden Neun und auch nicht die 17 Ziffern bis zur ersten auf 99999 folgenden Acht sein. Von je zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 99999

beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist stets diejenige die größere, die an der sechsten Stelle die größere Ziffer hat.
Die größte Möglichkeit hierfür ist somit, durch Streichen der ersten auf 99999 folgenden 15 Ziffern den Anfang 999997 zu erreichen. Danach ist noch genau eine Ziffer zu streichen.

Von den beiden Möglichkeiten, die auf den Anfang 999997 folgende Fünf zu streichen oder stehenzulassen (und eine später stehende Ziffer zu streichen), liefert das Streichen der Fünf die größere Zahl.
Damit ist gefunden, welche 100 Ziffern aus z zu streichen sind, um eine möglichst große Zahl z' zu erhalten. Die ersten zehn Ziffern dieser Zahl lauten 9999978596.

Aufgabe 3 - 340733
Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $AB = 7$ cm und $CD = 4$ cm vorausgesetzt wird.
b) Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, dass es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?
Beweise auch, dass aus dieser Voraussetzung folgt, dass das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!



(a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$ (siehe Abbildung a).

Daher ist der Flächeninhalt von $ABFCE$ doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung $1\ 2AB \cdot CD = 14$ cm^2, also hat $ABFCE$ den Flächeninhalt 28 cm^2.
Ferner folgt $AE = AD$ und $BF = BD$, also $AE + BF = AB$, sowie $CE = CF = CD$. Damit ergibt sich für den Umfang von $ABFCE$ der Wert $2 \cdot AB + 2CD = 22$ cm.

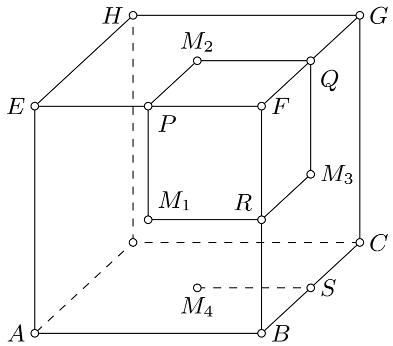
(b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen $\angle ACE = \angle ACD = 90° - \alpha$ und $\angle BCF = \angle BCD = 90° - \beta$.
Für $\angle ACB = \gamma$ gilt wegen der Voraussetzung $\angle ECF = 180°$ (siehe Abbildung b) daher $90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°$.
Wegen $180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$. Ferner sind wegen $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$, also $\angle AEC = \angle BFC = 90°$ die Strecken AE und BF beide auf EF senkrecht und somit zueinander parallel. Damit ist $ABFE$ als Trapez nachgewiesen.

Aufgabe 4 - 340734
Ein Viereck heißt genau dann konvex, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.
Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Man kann für jeden der 1995 Eckpunkte des 1995-Ecks die Verbindungsstrecke zu jedem der 1994 anderen Eckpunkte betrachten. Damit hat man jede der insgesamt vorhandenen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Eckpunkten genau zweimal betrachtet.
Also gibt es genau $1995 \cdot 1994 : 2 = 1995 \cdot 997$ solche Verbindungsstrecken. Von ihnen sind genau 1995 keine Diagonalen, sondern Seiten des 1995-Ecks.
Die Anzahl der Diagonalen beträgt folglich $1995 \cdot 997 - 1995 = 1995 \cdot 996 = 1987020$.

Aufgabe 5 - 340735
In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."
Daniel sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks."
Beweise, dass beide Aussagen wahr sind!



Für jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a gilt (wie etwa mit den Bezeichnungen der Seitenfläche $ABFE$ in der Abbildung ausgedrückt sei): Die Verbindungsstrecke des Quadratmittelpunktes M_1 mit dem Mittelpunkt P der Strecke EF ist parallel zu BF, also senkrecht auf allen Geraden in der Ebene des Quadrates $EFGH$, und es gilt $M_1P = \frac{a}{2}$.

Wendet man auch die entsprechenden Aussagen für M_2P an, so folgt: Das Dreieck M_1PM_2, ist mit $M_1P = M_2P = \frac{a}{2}$ gleichschenklig und bei P rechtwinklig. Entsprechendes gilt für die Dreiecke M_1RM_3 und M_2QM_3.

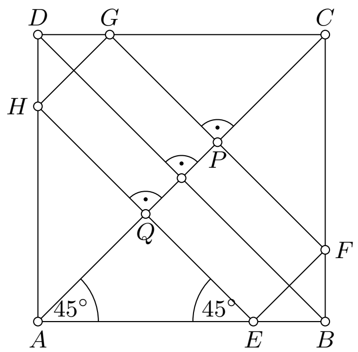
Daraus folgt Alexandras Aussage $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$.
Ferner folgt $\angle M_2M_3Q = \angle M_4M_3S = 45°$ und damit Daniels Aussage $\angle M_2M_3M_4 = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

Aufgabe 6 - 340736
Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $AC = 10$ cm. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, dass jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!
b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!

a) Da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, gilt wegen $FG \parallel BD$ auch $FG \perp AC$ (siehe Abbildung).
Da die Diagonalen die Innenwinkel des Quadrates halbieren, gilt für den Schnittpunkt P von FG mit AC ferner $\angle FCP = \angle GCP$. Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sww, dass $\triangle FCP = \triangle GCP$, also $FC = GC$ gilt.
Wegen $BC = DC$ folgt dann auch $BF = DG$. Damit und mit entsprechenden Schlussfolgerungen aus $EF \parallel AC$ und $HG \parallel AC$ erhält man $EB = BF = HD = DG$; hiernach und wegen $\angle EBF = \angle HDG = 90°$ ist $\triangle EBF = \triangle HDG$, also $EF = HG$.

Also sind im Viereck $EFGH$ die Seiten EF und HG einander gleichlang und parallel, daher ist es ein Parallelogramm. Da außerdem FG auf AC und damit auch auf EF senkrecht steht, ist $EFGH$ als Rechteck nachgewiesen.



b) Für den Schnittpunkt Q von EH mit AC ist wegen $EF \parallel AC$ auch $EFPQ$ ein Rechteck, also gilt $EF = QP$ und $EQ = FP$. Damit und mit $\angle AQE = \angle CPF = \angle CPG = 90°$ sowie $\angle AEQ = \angle CFP = \angle CGP = 45°$ erweisen sich AEQ, CFP und CGP als zueinander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, und es ergibt sich $AQ = CP = FP = GP$.

Insgesamt hat man nun $EF + FP + GP = QP + AQ + CP = AC$; d.h., der halbe Umfang des Rechtecks $EFGH$ ist gleich der Länge von AC, der Umfang beträgt also für jedes derartige Rechteck 20 cm.

Lösungen der III. Runde 1994 übernommen aus [5]

5 Klassenstufe 8

5.1 Vorolympiade 1960

5.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 8

Aufgabe 1 - V00801
Zwei Brigaden einer Spulenfabrik fertigen zusammen 8200 Transformatorspulen. Bei der Gütekontrolle müssen von den durch das erste Kollektiv gefertigten Spulen 2%, von denen des zweiten Kollektivs 3% wegen mangelhafter Isolation ausgeschieden werden.
Insgesamt sind 216 Spulen unbrauchbar. Wie viel einwandfreie Spulen werden von jedem Kollektiv hergestellt?

x sei die Produktion der ersten Brigade, y der zweiten Brigade. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 8200 \qquad ; \qquad 0{,}02 \cdot x + 0{,}03 \cdot y = 216$$

Das System hat die Lösung $x = 3000, y = 5200$. Nach Abzug der mangelhaften Spulen ($0{,}02 \cdot x = 60$, $0{,}03 \cdot y = 156$) ergibt sich, dass die erste Brigade 2940 und die zweite Brigade 5044 einwandfreie Spulen hergestellt haben.

Aufgabe 2 - V00802
Auf das Heft von Fritz ist Wasser gespritzt. Viele Ziffern sind nicht mehr leserlich. Wie muss die wiederhergestellte Aufgabe lauten?
(Jeder Punkt in der Waagerechten bedeutet eine Ziffer.)

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & . & . & . & : & . & . & 7 & = & . & . & . \\
. & . & . & 4 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & 2 & 6 & 7 & . & & & & & & & & & \\
 & . & . & . & . & & & & & & & & & \\ \hline
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\
 & & . & . & . & . & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & - & & & & & & & &
\end{array}$$

Die unbekannten Ziffern seien mit Variablen a bis r belegt, die alle im Bereich von 0 bis 9 liegen müssen:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & a & b & c & : & d & e & 7 & = & f & g & h \\
i & j & k & 4 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & 2 & 6 & 7 & b & & & & & & & & & \\
 & l & m & n & o & & & & & & & & & \\ \hline
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Dann folgt aus $7 \cdot fgh = ijk4$, dass $f = 2$ gilt. Aus der Subtraktion $154a - ijk4 = 267$ ergeben sich dann von hinten nach vorn $a = 1$, $k = 7$, $j = 2$ und $i = 1$:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 5 & 4 & 1 & b & c & : & d & e & 7 & = & 2 & g & h \\
1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & 2 & 6 & 7 & b & & & & & & & & & \\
 & l & m & n & o & & & & & & & & & \\ \hline
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\
 & & p & q & r & c & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

Aus $1274 = de7 \cdot 2$ ergeben sich $d = 6, e = 3$. Ein Vielfaches von 637, dass unmittelbar kleiner oder gleich $267b$ ist, kann nur das Vierfache sein, womit $g = 4$ wird und $lmno = 2548$ ist. p wird somit, da größer als Null, gleich 1. q kann dann nur 2 oder 3 sein, wobei 3 entfällt, da das Vielfache (das Doppelte, $h = 2$) von 637 gleich 1274 ist.
Rückrechnen ergibt dann noch die fehlenden Stellen $b = 5$ und $c = 4$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 4: & 6 & 3 & 7 & = & 2 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & & & \\
\hline
 & 2 & 6 & 7 & 5 & & & & & & & & \\
 & 2 & 5 & 4 & 8 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 7 & 4 & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 3 - V00803
Ich lasse einen Ball fallen. Er springt bis zu $\frac{2}{3}$ seiner Fallhöhe. Er fällt von neuem und springt das zweite Mal $\frac{5}{8}$ der ersten Sprunghöhe.
Berechne, von welcher Höhe ich den Ball fallen ließ, wenn er das zweite Mal 45 cm weniger hoch sprang als das erste Mal!

Wenn x die Fallhöhe ist, ergibt sich die lineare Gleichung

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}x + 45 = \frac{2}{3}x$$

mit der Lösung $x = 180$. Der Ball fiel aus einer Höhe von 180 cm.

Aufgabe 4 - V00804
Wir haben zwei Gefäße. In beide Gefäße gießen wir Wasser, und zwar in das erste $\frac{2}{5}$ seines Fassungsvermögens, in das zweite $\frac{3}{8}$ seines Fassungsvermögens.
Wenn wir die beiden Wassermengen zusammengießen, erhalten wir 8,5 Liter. Wir wissen noch, dass $\frac{4}{5}$ des Fassungsvermögens des ersten Gefäßes um 6,2 Liter größer ist als $\frac{3}{4}$ des Fassungsvermögens des zweiten Gefäßes.
Berechnet die Fassungsvermögen der beiden Gefäße!

Das Fassungsvermögen der Gefäße sei x und y. Als Gleichungssystem ergibt sich

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{8}y = 8{,}5 \qquad ; \qquad \frac{4}{5}x - 6{,}2 = \frac{3}{4}y$$

Das System hat die Lösungen $x = 14{,}5$ und $y = 7{,}2$. Das erste Gefäß hat ein Fassungsvermögen von 14,5 l, das zweite von 7,2 l.

Aufgabe 5 - V00805
Peter ist ein eifriger Lottospieler. Die Gesamtsumme seiner fünf Lottozahlen beträgt 167. Die erste Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die vierte Zahl.
Das Doppelte der ersten Zahl ergibt die zweite Zahl, die verstellt (Einer gegen Zehner vertauscht) gleich der dritten ist. Multipliziert man die zweite mit der dritten Zahl und die zweite mit der vierten Zahl, so ergibt die halbe Differenz beider Produkte die fünfte Zahl.
Wie lauten Peters Lottozahlen?
Hinweis: Beim damals üblichen Lotto wurden 5 Zahlen aus 90 möglichen getippt.

Die Lottozahlen seien a, b, c, d und e. Die zweite Zahl habe die Form $b = 10x + y$ mit $1 \leq x{,}y \leq 9$. Nach der Aufgabenstellung ergeben sich die Gleichungen

$$a + b + c + d + e = 167 \qquad (1)$$
$$a^2 = d \qquad (2)$$
$$2a = b = 10x + y \qquad (3)$$
$$10y + x = c \qquad (4)$$
$$|b \cdot c - b \cdot d| = 2e \qquad (5)$$

Da d nach (2) Quadratzahl von a ist und 90 Zahlen zur Verfügung stehen, gilt für a: $1 \leq a \leq 9$. Nach (3) muss das Doppelte von a größergleich 10 sein und da nicht nur b sondern auch c echt zweistellig sein soll, sogar $a > 10$.

Damit verbleiben die Möglichkeiten der nachfolgenden Tabelle:

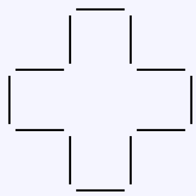
a	b	c	d	e	Summe
6	12	21	36	90	173
7	14	41	49	56	167
8	16	61	64	24	173
9	18	81	81	-	

$a = 9$ entfällt, da dann $c = d$ gelten würde. Von den drei verbleibenden Fällen ergibt nur $a = 7$ als Summe der Zahlen 167. Peters Lottozahlen sind 7, 14, 41, 49 und 56.

Aufgabe 6 - V00806
Fritz hat seinen Fuß auf ein 0,1 mm starkes Blatt Papier gestellt und überlegt, wie hoch er wohl stehen würde, faltete er es fünfzigmal.
Könnt ihr es ihm sagen?

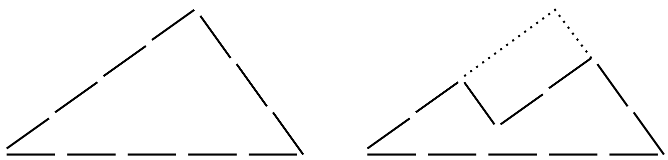
Faltet er 50 mal, so würde das gefaltete Stapel theoretisch $2^{50} \cdot 0{,}1$ mm ≈ 112000000 km hoch sein. Dies ist aber nicht möglich. Im Allgemeinen kann man ein Blatt maximal 8 Mal falten. Der Weltrekord mit Spezialfolie liegt bei 11 Mal.

Aufgabe 7 - V00807



Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht.
Die Streichhölzer sind so umzulegen, dass eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht!
(Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)

Legt man die Streichhölzer wie im linken Bild um, so entsteht ein Dreieck mit der Fläche $F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Einheiten. Verschiebt man 3 Streichhölzer wie im rechten Bild, ergibt sich $F = 6 - 2 = 4$ Einheiten, d. h. die gesuchte Figur.



Aufgabe 8 - V00808
Knobel Knifflig erzählt: Ich bin dem Riesen aus Prag begegnet. Sein Kopf und Hals sind zusammen 30 cm lang. Seine Beine sind doppelt so lang wie Kopf, Hals und halber Rumpf, und der ganze Kerl ist genau ein Meter länger als Kopf, Hals und Beine zusammen.
Wie groß ist er?

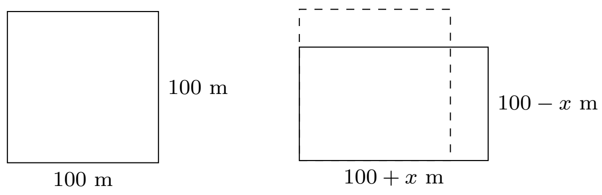
Die Länge von Kopf, Hals, Rumpf und Beine seien k, h, r, b. Dann ergibt sich das Gleichungssystem (Längen in cm)

$$k + h = 30 \quad (1) \qquad ; \qquad b = 2\left(k + h + \frac{1}{2}r\right) \quad (2)$$

$$k + h + r + b = 100 + k + h + b \qquad (3)$$

Aus (3) folgt sofort $r = 100$. Setzt man (1) und den Wert für r in (2) ein, wird $b = 160$. Damit wird $k + h + r + b = 30 + 100 + 160 = 290$. Der Riese ist 2,90 m groß.

Aufgabe 9 - V00809
Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung.
Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.
Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?



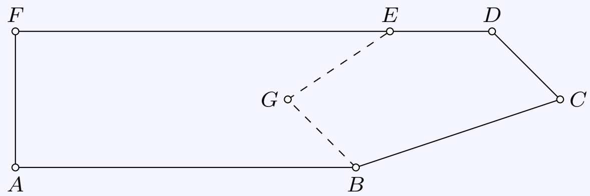
Wird mit den 400 m Zaun ein Quadrat abgegrenzt, so hat jede Quadratseite die Länge 100 m und damit das Quadrat den Flächeninhalt $F_Q = 100^2 = 10000$ m^2.

Um ein Rechteck zu umzäunen, das kein Quadrat ist, müssen zwei Seiten des Quadrates um x verlängert und zwei Seiten um x verkürzt werden. (rechte Abbildung)

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist damit $F_R = (100 - x) \cdot (100 + x) = 10000 - x^2$ m^2. Für jedes $x > 0$ ist dieser Wert aber kleiner, d. h. $F_R < F_Q$, was zu zeigen war.

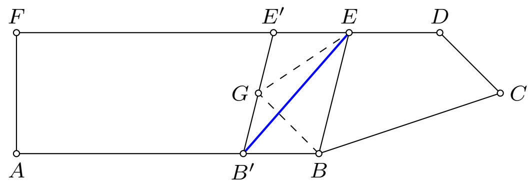
Wird ein Kreis umzäunt, so ergibt sich bei 400 m Umfang ein Radius $r = \frac{400\text{ m}}{2\pi}$ und somit eine Fläche von $F_K = \pi \left(\frac{400\text{ m}}{2\pi}\right)^2 \approx 12700$ m^2. Damit ist der Inhalt einer Kreisfläche größer als der Inhalt eines Quadrates mit dem gleichen Umfang.

Aufgabe 10 - V00810



Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (siehe Abbildung) einer LPG ist eine gebrochene Linie EGB. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen, ohne die Größe der Einzelfelder zu verändern.
Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!

Verschiebt man die Strecke EB parallel durch G, so entsteht ein Viereck $BEE'B'$. Dieses Viereck ist ein Parallelogramm, da AB und EF parallel sind und eine Parallelverschiebung von EB erfolgte.
Diese Parallelogramm kann durch eine Diagonale, z. B. EB', in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt werden.



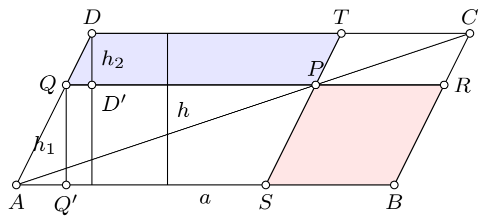
Beide Teilfelder verändern damit nicht ihren Flächeninhalt. Die Strecke EB' ist somit eine Möglichkeit für die neue Grenze zwischen beiden Feldern.

Aufgabe 11 - V00811
Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale.
Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme.
Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

Das Parallelogramm $ABCD$ habe die Grundseite a und die Höhe h. Das blaue und das rote Parallelogramm sind zu vergleichen.
Wenn P die Diagonale AB im Verhältnis x teilt, d. h.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = x$$

so ist die Strecke nach Strahlensatz $\overline{QP} = x \cdot \overline{AB} = x \cdot a$.
Daraus folgt für $\overline{PR} = \overline{SB} = (1 - x) \cdot a$.

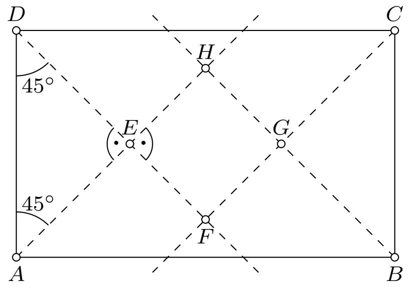


Ebenso nach Strahlensatz folgt für die Höhen $h_1 = x \cdot h$ und $h_2 = (1 - x) \cdot h$. Für die Flächen der zwei Teilparallelogramme wird

$$F_{SBRP} = (1 - x)a \cdot xh \qquad ; \qquad F_{QPTD} = xa \cdot (1 - x)h$$

Die Flächeninhalte beider Parallelogramm sind unabhängig von der Lage von P gleich, ihr Verhältnis ist 1:1.

Aufgabe 12 - V00812
Beweise, dass die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!



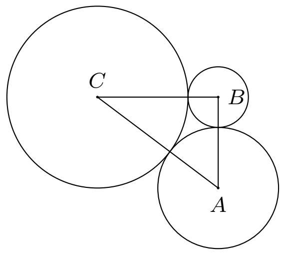
Anmerkung: Die Aufgabenstellung ist nicht exakt. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, bei dem sich die Winkelhalbierenden im Quadratmittelpunkt schneiden und kein Viereck bilden, muss vorausgesetzt, dass das Rechteck kein Quadrat ist.

Da die Innenwinkel eines Rechtecks rechte Winkel sind, bilden die Winkelhalbierenden die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke AED, ABH, BCG und CDF. Das Viereck $EFGH$ besitzt damit 4 rechte Innenwinkel und ist damit Rechteck.

Außerdem liegen dann E und G auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks sowie F und H auf der senkrechten. (Symmetrie des Rechtecks)

Beide Mittellinien stehen senkrecht zueinander, wodurch die Diagonalen ebenfalls senkrecht zueinander stehen. Ein Viereck mit rechten Innenwinkeln und senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen ist ein Quadrat. w. z. b. w.

Aufgabe 13 - V00813
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren.
Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

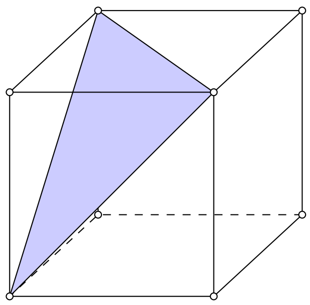


Für die Radien r_a, r_b, r_c der Kreise um die Punkte A, B und C wird dann

$$r_a + r_c = b = 6$$
$$r_a + r_b = c = 10$$
$$r_b + r_c = a = 8$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $r_a = 4$ cm, $r_b = 2$ cm und $r_c = 6$ cm.

Aufgabe 14 - V00814
Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muss der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!



Die Diagonalen dreier anliegender Würfelflächen bilden die Seiten des gleichseitigen Dreiecks.

Aufgaben der Vorolympiade 1960 gelöst von Steffen Polster

5.2 Vorolympiade 1961

5.2.1 I. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10811
Der neue Doppelstock-Gliederzug unserer Reichsbahn wiegt insgesamt 129 Mp (Leergewicht) und hat für 640 Reisende Sitzplätze. Ein D-Zug-Wagen alter Bauart wiegt 40 Mp und bietet 64 Reisenden Sitzplätze.
Um wie viel Prozent ist das "Sitzplatzgewicht" (Leergewicht je Sitzplatz) bei dem neuen Doppelstock-Gliederzug geringer als bei einem D-Zug alter Bauart?

Doppelstock-Gliederzug: Leergewicht je Sitzplatz $L_1 = \frac{129}{640} \approx 0{,}2016$
D-Zug-Wagen: Leergewicht je Sitzplatz $L_2 = \frac{40}{64} \approx 0{,}625$
L_1 ist gleich 33,22 % von L_2. Beim Doppelstockgliederzug ist das Sitzplatzgewicht somit um 67,75 Prozent niedriger als bei einem D-Zug alter Bauart.

Aufgabe 2 - V10812
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Das Volumen des Drahtes bleibt erhalten, d. h. es ist

$$\pi r_a^2 l_a = \pi r_e^2 l_e \Rightarrow l_e = \frac{r_a^2}{r_e^2} \cdot l_a$$

wobei r_a, l_a Radius und Länge am Anfang und r_e, l_e Radius und Länge des Endproduktes sind.
Einsetzen der Werte ergibt $l_e = 360$ Millionen mm = 360 km.

Aufgabe 3 - V10813

$$(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b)$$

a) Fasse zusammen!
b) Welcher Wert ergibt sich für $a = 2; b = 1{,}5; c = 7$?

$$\begin{aligned}(7{,}3a - 9{,}8c) - (2{,}1b + 7{,}2c) - (3{,}9a - 4{,}7b) &= 7{,}3a - 9{,}8c - 2{,}1b - 7{,}2c - 3{,}9a + 4{,}7b\\ &= 7{,}3a - 3{,}9a - 2{,}1b + 4{,}7b - 7{,}2c - 9{,}8c\\ &= 3{,}4a + 2{,}6b - 17c\end{aligned}$$

b) Einsetzen ergibt -108,3.

Aufgabe 4 - V10814
Denkaufgabe:
Fritz sagt: "Ich habe mich in meinem Leben erst dreimal geirrt."
Franz erwidert: "Dann hast du dich jetzt zum vierten Mal geirrt."
Weise nach, dass Franz mit dieser Behauptung unter allen Umständen unrecht hat!

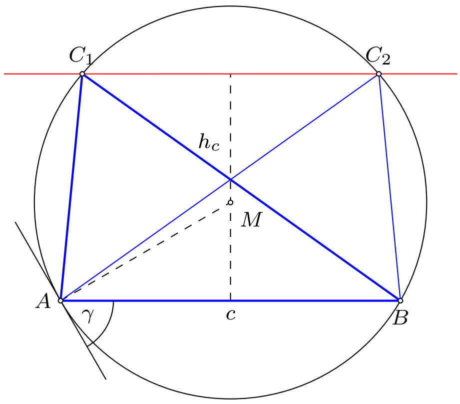
1. Fall:

Fritz hat sich wirklich erst dreimal geirrt. Dann hat er sich jetzt nicht geirrt, weil er ja die Wahrheit gesprochen hat. Franz hat also in diesem Falle unrecht.

2. Fall:

Fritz hat sich bisher nicht dreimal, sondern mehr (oder weniger) als dreimal geirrt. Dann hat er sich eben zwar geirrt, aber bestimmt nicht zum vierten Mal. Infolgedessen hat Franz auch in diesem Fall (und damit in jedem Fall) unrecht.

Aufgabe 5 - V10815
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)



Konstruktion:
Die Konstruktion ergibt sich aus dem Sehnentangentenwinkel - Peripheriewinkelsatz.
1. An die Strecke $\overline{AB} = c$ wird der Winkel γ angetragen.
2. Die Senkrechte zum freien Schenkel von γ und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich im Umkreismittelpunkt M des gesuchten Dreiecks ABC.
3. Die Parallele zu AB im Abstand h_c schneidet den Kreis in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem, wie viele Lösungen für den Punkt C existieren. Für die gegebenen Größen gibt es zwei Schnittpunkte C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 erfüllen die Anforderungen und sind zueinander kongruent.

Aufgaben der Vorolympiade 1961 I. Runde gelöst von Steffen Polster

5.2.2 II. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10821
In einer LPG werden Kartoffeln mit einer vierreihigen Legemaschine ausgelegt. In 10 Stunden können mit dieser modernen Maschine 3 Genossenschaftsbauern 5 ha Kartoffeln auslegen.
Früher, als die Bauern die Kartoffeln ohne Maschine auslegen mussten, konnte ein Bauer in 8 Stunden 0,5 ha schaffen. Außerdem benötigte er noch 2 Stunden für das Lockern des Ackers und das Zudecken der Kartoffeln.
Wie viel Stunden Arbeit (Arbeitskraftstunden) sind für 1 ha erforderlich
a) mit der Kartoffellegemaschine,
b) bei der Handarbeit?
c) Vergleiche die Zahlen durch Berechnung von Prozentwerten.

a) Die Verhältnisgleichung $3 \cdot 10 : 5 = x : 1$ hat die Lösung $x = 6$. Mit der Kartoffellegemaschine sind für 1 ha 6 Arbeitskräfte eine Stunde erforderlich.

b) Analog wird aus $10 : 0{,}5 = x : 1$ die Lösung $x = 20$. Bei Handarbeit sind für 1 ha 20 Arbeitskraftstunden notwendig.

c) Aus den Werten von a) und b) wird $6 : x = 20 : 100$, $x = 30$. Der Aufwand an Arbeitskräften beträgt mit der Legemaschine nur noch 30 Prozent.

Aufgabe 2 - V10822
Im VEB Glaswerk Stralau wurde die Wanne II mit folgenden Rohstoffen beschickt:
250 kg Scherben, 134 kg Pechstein, 7 kg Flussspat, 228 kg Sand, 82,5 kg Kalk, 17 kg Sulfat und 103 kg Soda.
Wie viel Kilogramm der anderen Rohstoffe benötigt man bei gleicher Zusammensetzung für 1 t Sand?

Das Verhältnis $1000 \text{ kg} : 228 \text{ kg} = x : 250$ ergibt für die Menge an Scherben $x = 1096{,}5$ kg. Für die anderen Rohstoffe wird die Gleichung entsprechend verändert und gelöst.
Es ergibt sich: Beim Verbrauch von 1 t Sand benötigt man 1096 kg Scherben, 590 kg Pechstein, 31 kg Flussspat, 362 kg Kalk, 75 kg Sulfat und 452 kg Soda.

Aufgabe 3 - V10823
In der Zahl .378. sind an die Stelle der beiden Punkte Ziffern zu setzen, so dass die entstehende Zahl durch 72 teilbar ist.
Wie hast du die fehlenden Ziffern ermittelt?

Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muss sie auch durch 8 und durch 9 teilbar sein, denn $8 \cdot 9 = 72$.
Um die fehlenden Ziffern zu ermitteln, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78. muss also durch 8 teilbar sein. $720 : 8 = 90$.
Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muss die letzte Ziffer 4 sein.

Um die erste Ziffer zu erhalten, wende ich die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Dies ist auch die fehlende Ziffer.
Die vollständige Zahl lautet 53784.

Aufgabe 4 - V10824
Fritz rechnet $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$ bzw. $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$.
Leite daraus eine Rechenregel ab und beweise sie allgemein!

a) $32 \cdot 38 = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8$

$$\begin{aligned}(30+2)(40-2) &= 30 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 30 - 2 \cdot 2 \\ &= 30 \cdot 40 + 2(40 - 30 - 2) = 30 \cdot 40 + 2 \cdot 8\end{aligned}$$

b) $73 \cdot 77 = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7$

$$\begin{aligned}(70+3)(80-3) &= 70 \cdot 80 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 70 - 3 \cdot 3 \\ &= 70 \cdot 80 + 3(80 - 70 - 3) = 70 \cdot 80 + 3 \cdot 7\end{aligned}$$

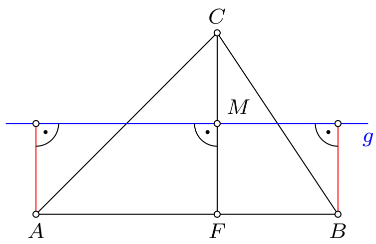
c) Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}(10a+b)(10a+10-b) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot 10 - 10ab + 10ab + 10b - b \cdot b \\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2 \\ &= 10a(10a+10) + b(10-b)\end{aligned}$$

Weitere Verallgemeinerung:
Man erhält das Produkt zweier zweistelliger (ganzer) Zahlen mit gleichen Zehnern und einander zu 10 ergänzenden Einem, indem man zuerst die Zehner mit dem nächsthöheren Zehner, dann die Einer miteinander multipliziert und die beiden Zwischenprodukte addiert.

$$(a+b)(a+10-b) = a(a+10) + b(10-b)$$

Aufgabe 5 - V10825
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wie viel solcher Geraden gibt es?



Konstruktion:
1. Konstruiere die Höhe h_c von C auf die Seite AB. Konstruiere den Mittelpunkt M dieser Höhe.
2. Zeichne eine Senkrechte zu h_c durch M, die somit parallel zu AB ist. Diese Senkrechte g ist eine Gerade, die den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Der Abstand der Punkte A und B von g ist $\frac{h_c}{2}$. Auf Grund der Konstruktion hat auch C den Abstand $\frac{h_c}{2}$ von g.

In einem Dreieck existieren stets 3 derartige Geraden, die mittels einer der Höhen h_a, h_b und h_c konstruiert werden können.

Aufgaben der Vorolympiade 1961 II. Runde gelöst von Steffen Polster

5.2.3 III. Runde V1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - V10831
Ein Radfahrer fährt an einem windstillen Tage auf einer geradlinig verlaufenden Landstraße nach einem 32 km entfernt liegenden Orte und sofort wieder zurück. Er benötigt für Hin- und Rückfahrt genau 4 Stunden, hat also eine Geschwindigkeit $v = 16\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Am nächsten Tage ist es windig. Es sei angenommen, dass die Geschwindigkeit des Radfahrers sich um 4 km je Stunde verringert, wenn er gegen den Wind fährt, und sich um 4 km je Stunde erhöht, wenn er mit dem Wind fährt.
Der Radfahrer nimmt an, dass er ebenfalls 4 Stunden für Hin- und Rückfahrt benötige, da ja die Verzögerung auf der Hinfahrt durch die Beschleunigung auf der Rückfahrt ausgeglichen wird.
Trifft das zu? Begründe deine Antwort!

Hinfahrt: In diesem Fall verringert sich die Geschwindigkeit auf $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{12}$ h.

Rückfahrt: In diesem Fall erhöht sich die Geschwindigkeit auf $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Für die 32 km benötigt er dann $t = \frac{s}{t} = \frac{32}{20}$ h.

In der Summe benötigt der Radfahrer $\frac{32}{12} + \frac{32}{20} = \frac{64}{15}$ h, das sind 4 Stunden und 16 Minuten. Es tritt kein Ausgleich der Verzögerung und Beschleunigung auf.

Aufgabe 2 - V10832
Beweise: Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets ungerade!

Jede ungerade Zahl lässt sich in der Form $2x + 1$, wobei x ein natürliche Zahl ist, darstellen. Es seien $a = 2m + 1, b = 2n + 1$, $m,n \in \mathbb{N}$. Dann wird für ihr Produkt

$$ab = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

Da $2mn + m + n$ eine natürliche Zahl ist, ist das Produkt ungerade. w.z.B.w.

Aufgabe 3 - V10833
In einem Eisenbahnabteil sitzen vier Schüler, die von einem Ferienaufenthalt zurückkehren. Ein Schüler wohnt in Berlin, einer in Dresden, einer in Leipzig und einer in Jena. Ihre Vornamen sind Anton, Bruno, Conrad und Dietrich. (Die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnorte.)
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Schüler, und zwar Anton und der Berliner, sind begeisterte Fußballspieler.
b) Zwei Schüler, und zwar Conrad und der Dresdner, spielen nicht Fußball.
c) Dietrich ist älter als der Berliner.
d) Conrad ist jünger als der Jenaer.
Wo wohnen Anton, Bruno, Conrad und Dietrich?
Wer von ihnen sind die Fußballspieler?
Wie hast du die Lösung gefunden?

Nach a) und b) sind Anton oder Conrad kein Berliner oder Dresdner.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno				
Conrad	-	-		
Dietrich				

Nach c) ist Dietrich kein Berliner, so dass Bruno Berliner sein muss sowie Dietrich aus Dresden kommt.

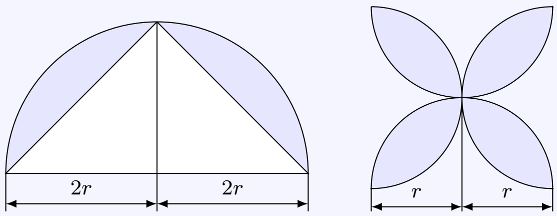
	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-		
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-		
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Nach d) ist Conrad als der Jenenser, muss also aus Leipzig kommen. Anton ist dann aus Jena.

	Berlin	Dresden	Leipzig	Jena
Anton	-	-	-	$\oplus$
Bruno	$\oplus$	-	-	-
Conrad	-	-	$\oplus$	-
Dietrich	-	$\oplus$	-	-

Anton wohnt in Jena, Bruno in Berlin, Conrad in Leipzig und Dietrich in Dresden. Anton und Bruno sind die Fußballspieler.

Aufgabe 4 - V10834



Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

Dreht man den Kreisabschnitt um die Spitze des Dreiecks, so entsteht eine von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche, die die gleiche Form wie ein Viertel der Rosette hat. Da der Kreis der linken Figur einen Radius $2r$ hat und die Rosette aus vier Kreiszweiecken besteht, sind beide farbigen Flächen gleich groß.

linke Figur: $A = 4\pi r^2 - 4r^2 = 4r^2(\pi - 1)$

eine Viertel der Rosette: $A = r^2 - 2r^2(1 - \frac{\pi}{4}) = r^2(\pi - 1)$

Aufgaben der Vorolympiade 1961 III. Runde gelöst von Steffen Polster

5.3 I. Olympiade 1961

5.3.1 I. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010811
Berechne:
$$\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right).$$

$$\begin{aligned}
&\left(1\frac{2}{3}cd + \frac{25}{4}dg - 2\frac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\frac{7}{2}mn - 1\frac{1}{4}ng + \frac{3}{4}n\right) : \left(-\frac{3}{8}n\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(1\frac{2}{3}c + \frac{25}{4}g - 2\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{7}{2}m - 1\frac{1}{4}g + \frac{3}{4}\right)\\
&= \left(\frac{5}{5\cdot 3}c + \frac{25}{5\cdot 4}g - \frac{5}{5\cdot 2}\right) + \left(\frac{8\cdot 7}{3\cdot 2}m - \frac{8\cdot 5}{3\cdot 4}g + \frac{8\cdot 3}{3\cdot 4}\right)\\
&= \left(\frac{1}{3}c + 1\frac{1}{4}g - \frac{1}{2}\right) + \left(9\frac{1}{3}m - 3\frac{1}{3}g + 2\right) = \frac{1}{3}c + 9\frac{1}{3}m - 2\frac{1}{12}g + 1\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 - 010812
In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, dass man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde auslegen könnte.
Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384000 km.)

Die Länge der Mondbahn ist der Kreisumfang mit dem Radius 384000 km, d. h. $2\pi \cdot 384000$ km $\approx$ 2413000000 m.
Er hat recht, die Länge der Mondbahn ist weniger als ein Drittel der Stoffbahn.

Aufgabe 3 - 010813
Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Beispiel: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Beweis: Die Summe von vier natürlichen Zahlen ist ungerade, wenn genau ein Summand gerade ist oder wenn genau drei Summanden gerade sind. Ist wenigstens ein Summand gerade, so wird das Produkt gerade.

Aufgabe 4 - 010814
Setze in ein "magisches Quadrat" mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, dass die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung:

6	11	4
5	7	9
10	3	8

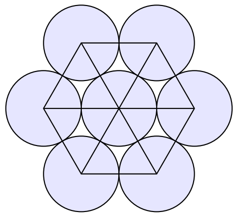
Es ist günstig die mittlere Zahl der Zahlen 3 bis 11, d. h. also die 7, in das Mittelfeld zu setzen. Dadurch ist gewährleistet, dass vier Paare gebildet werden können, deren Summe die noch notwendige 14 ergeben.

Die Zahlen 11 und 3 können nicht in den Eckfeldern stehen, da es nur zwei Möglichkeiten gibt, bei denen sie in Kombination mit einer anderen Zahl 21 in der Summe ergeben: $10 + 8 + 3 = 11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$.

Aufgabe 5 - 010815
Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, dass sie einander berühren.

a) Wie viel Adern braucht man?

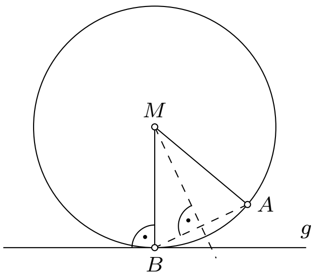
b) Beweise diese Behauptung!



Um einen Kreis können genau sechs Kreise gleichen Durchmessers so angeordnet werden, dass sie sich gegenseitig berühren.
Die Kreismittelpunkte der äußeren Kreise liegen dann auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks. Man benötigt mit der Mittelader genau 7 Adern.

Aufgabe 6 - 010816
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!



Berührt der Kreis die Gerade g, so muss der Kreismittelpunkt M auf dem Lot (Senkrechte) auf g in B liegen.

M muss aber auch, als Punkt der von A und B den gleichen Abstand hat, auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen.

Der Schnittpunkt der Senkrechten in B und der Mittelsenkrechten ist dann der gesuchte Kreismittelpunkt M.

Bearbeitete Lösungen der I. Runde 1961 übernommen aus [5]

5.3.2 II. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010821
Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Russland) auf etwa 1640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genau soviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Die Stahlerzeugung der UdSSR im Jahr 1960 entspricht 1640 Prozent der Jahresproduktion von 1913, d. h. der Produktion innerhalb von 365 Tagen. Die gesamte Jahresproduktion von 1913, also 100 Prozent, werden dann an $100 : 1640 \cdot 365$ Tagen ≈ 22 Tagen im Jahr 1960 erzeugt.

Aufgabe 2 - 010822
Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.)

Jeder der vier Stahlzylinder hat ein Gewicht $G = \frac{1}{4} \cdot 68$ Mp $= 17$ Mp. Für das Gewicht eines Zylinders gilt $G = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \pi r^2 h$, d. h. Wichte mal Zylindervolumen. Umstellen nach der Höhe h, Einsetzen und Ausrechnen ergibt:

$$h = \frac{G_1}{\gamma \pi r^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^7 \text{ p}}{(7{,}85 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}) \cdot \pi \cdot (25{,}6 \text{ cm})^2} = 1051{,}8 \text{ cm} \approx 10{,}5 \text{ m.}$$

Jede Führungssäule ist rund 10,5 m lang.

Aufgabe 3 - 010823
In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

Der Steuermann sagt: "Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist."

Der 1. Matrose sagt: "Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist."

Der 2. Matrose sagt: "Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert."

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Es empfiehlt sich, Bezeichnungen für das Alter der Beteiligten einzuführen:
k, s, m, m_1, m_2 und m_j seien das Alter des Kapitäns, des Steuermanns, des Maschinisten sowie des 1., 2. und des jüngsten Matrosen. Die Aussagen ergeben nun folgendes Gleichungssystem:

Steuermann:	$s = 2m_j = m + 6,$	(1)
1. Matrose:	$m_1 = m_2 + 4,$	(2)
1. Matrose:	$m_1 - m_j = m - m_1,$	(3)
2. Matrose:	$m_2 = 20,$	(4)
Durchschnitt:	$k + s + m + m_1 + m_2 + m_j = 6 \cdot 28 = 168.$	(5)

Aus (4) und (2) folgt $m_1 = 24$, daraus und aus (3) folgt $m_j = 2m_1 - m = 48 - m$, letzteres in (1) eingesetzt ergibt $m = 30$ und $s = 36$. Diese Ergebnisse schließlich in (5) eingesetzt, führt auf

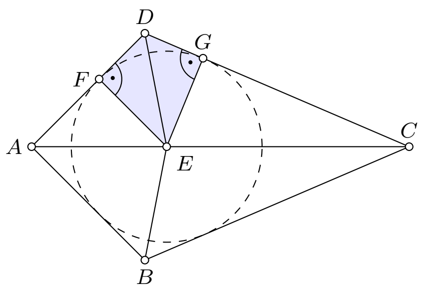
$$k + 36 + 30 + 24 + 20 + 18 = 168 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 40.$$

Der Kapitän ist somit 40 Jahre alt.

Aufgabe 4 - 010824
Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Beweis: Zwei Strecken, die sich schneiden, legen eindeutig ein Viereck fest, das diese Strecken als Diagonalen besitzt. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm. Ein in einen Kreis einbeschriebenes Parallelogramm ist stets ein Rechteck. Dessen Diagonalen wiederum sind Durchmesser des Kreises, also ist die Antwort: nein.

Aufgabe 5 - 010825
Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind?
Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, dass er die angegebene Eigenschaft hat!



Analysis und Konstruktion:

(Bild) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt E auf der Diagonalen AC des Drachenvierecks $ABCD$ liegen. Auf dieser ist es genau der Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ bzw. $\angle ABC$.

Beweis:
Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben von beiden Schenkeln des Winkels stets den gleichen senkrechten Abstand. Das zeigt man, indem zwei rechtwinklige Dreiecke DFE und DGE betrachtet werden:

die Winkelhalbierende DE als gemeinsame Seite, die gleichen Winkel $\angle FDE = \angle GDE$ sowie die ebenfalls gleichen rechten Winkel $\angle DFE = \angle DGE = 90°$. Damit sind auch die dritten Winkel gleich und die beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

Die Lote $\overline{EF} = \overline{EG}$ (die gleichzeitig die gesuchten Abstände sind) haben demzufolge die gleiche Länge. Somit ist Punkt E der Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks. □

Aufgaben der II. Runde 1961 gelöst von Carsten Balleier

5.3.3 III. Runde 1961, Klasse 8

Aufgabe 1 - 010831
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1350000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, dass dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150000 bzw. 290000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wie viel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?
b) Wie viel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

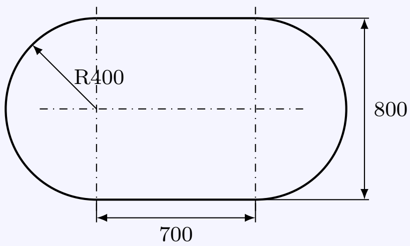
a) Der erste Betrieb hätte 20 % von 150000 Steinen mehr produzieren können, also 30000 Stück.

Der zweite Betrieb dagegen 13,8 % von 290000, also 40020 Stück.

Zusammen mit den $1350000 \cdot 1{,}001 = 1351350$ tatsächlich produzierten Mauersteinen wären es also 1421370 Mauersteine gewesen.

b) Die Planerfüllung hätte dann bei $\frac{1421370}{1350000} = 1{,}053 = 105{,}3$ Prozent gelegen.

Aufgabe 2 - 010832
Peter hat für seine Modelleisenbahn ein "Schienenoval" auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: "Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?" Peter antwortet: "Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!"
"Ja", sagt Peter, "das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müsste es umrechnen." Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?
b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

a) Für die tatsächliche Geschwindigkeit des Zuges benötigt man die Länge, die er auf dem Schienenoval zurücklegt. Das sind zwei Strecken und zwei Halbkreisbögen: $2 \cdot 700\text{mm} + 2\pi \cdot 400\text{mm} = 3{,}91\text{m}$.

Das ergibt eine Geschwindigkeit des Modelleisenbahnzuges von $35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1{,}28\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) 18,5 mm Spurweite auf der Modellbahn entsprechen 1435 mm Spurweite in der Wirklichkeit. Der Geschwindigkeit des Zuges entsprechen also in Realität

$$\frac{35{,}6\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 1435\text{mm}}{18{,}5\text{mm}} = 27{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aufgabe 3 - 010833
Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4?

Eine gerade Zahl kann stets als $2n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) geschrieben werden, die darauf folgende gerade Zahl ist dann $2n+2$. Damit ist $2n+(2n+2) = 4n+2$, also ist die Summe nicht durch vier teilbar, sondern lässt den Rest 2. $\square$

Aufgabe 4 - 010834
Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verlässt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Fritz hat den Ring.
	3.	Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.
Fritz:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
	3.	Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: "Ich muss nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat." Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Die Idee ist herauszufinden, welche Aussagen von Ewald und Fritz sich widersprechen, da dann eine davon falsch sein muss.

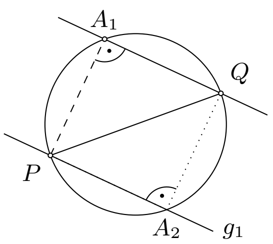
Da Fritz' Aussagen 1 und 2 gleichbedeutend sind, können sie nur gleichzeitig wahr oder falsch sein. Letzteres ist ausgeschlossen, da Fritz nur eine falsche Aussage macht. Also ist seine 3. Aussage falsch; weder er noch Erika haben den Ring.
Ewalds 2. Aussage widerspricht Fritz' erster (die wahr ist), also ist sie falsch.

Also muss Ewalds 1. Aussage stimmen, es bleibt nur noch Brigitte übrig. Folglich hat sie den Ring.

Aufgabe 5 - 010835
Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3$ cm haben!

Begründe die Konstruktion! Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?



I. Analyse:
(Bild) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck PQA, dessen Hypotenuse $PQ = 5$ cm und dessen Kathete $AP = 3$ cm beträgt. Eine der Parallelen, etwa g_2, geht dann durch A und Q, die andere, $g_1 \parallel g_2$, geht durch Punkt P.

II. Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen den Thales-Kreis über dem Durchmesser PQ und schlagen anschließend mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a um P. Damit erhalten wir zwei mögliche Punkte A_1 bzw. A_2.

III. Beweis:
Der (stets senkrechte) Abstand beider Parallelen g_1 und g_2 ist durch die Strecke a nach obiger Konstruktion gegeben; P und Q haben ebenfalls den geforderten Abstand.

Beide Paare von Parallelen erfüllen somit die Bedingungen der Aufgabenstellung. $\square$

Aufgaben der III. Runde 1961 gelöst von Carsten Balleier

5.4 II. Olympiade 1962

5.4.1 I. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020811
Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein?
Die Antwort ist zu begründen!

Die Summe von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$. Sie ist also durch 3 teilbar, aber verschieden von 3 wegen $n \geq 1$. Damit ist die Summe keine Primzahl.

Aufgabe 2 - 020812
Für den Zusammenbau von 1000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.
a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?
b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Die Arbeitszeit verringerte sich um $11 : 27\frac{1}{2} \cdot 100\% = 40\%$.
Die Produktivität betrug vorher $36\frac{4}{11}\text{h}^{-1}$, jetzt liegt sie bei $60\frac{20}{33}\text{h}^{-1}$. Sie ist also um $66\frac{2}{3}\%$ gestiegen.

Aufgabe 3 - 020813
Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt.
Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m^2, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je 6,37 m^2. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m.
Den oberen Abschluss der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m^2. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen: a) die Höhe der Fassade, b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Die Fassade ist $10m + 10 \cdot 2{,}74m + 1{,}52m + 10 \cdot 0{,}05m = 39{,}42m$ hoch.
Ihre Länge beträgt $2 \cdot (6{,}73 : 2{,}74)m + 24 \cdot (6{,}37 : 2{,}74)m + 25 \cdot 0{,}05m \approx 61{,}85m$.

Aufgabe 4 - 020814
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * *  : ? =  * * * * 8 * *
* * *
-----
    * * *
    * * *
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          * *
          * *
          ---
            * * *
            * * *
            -----
                0
```

Die einzige Ziffer, über die wir am Anfang verfügen, ist die 8. Man sieht, dass ihr Produkt mit dem Divisor zweistellig ist, also kann der Divisor nicht größer als 12 sein.

Da der Quotient aber zwei Stellen weniger hat als der Dividend, muss der Divisor wenigstens 11 sein. Da aber das Produkt der Einerstelle des Quotienten mit dem Divisor dreistellig ist, bleibt nur die 12 übrig – gleichzeitig muss die Einerstelle selbst 9 und die Zehnerstelle 0 sein. Das ist in der ersten Abbildung zu sehen.

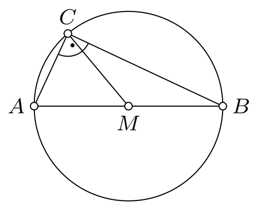
*	*	*	*	*	*	*	0	8	:	12	=	*	*	*	*	8	0	9
*	*	*																
		*	*	*														
		*	*	*														
			*	*	*													
			*	*	*													
					*	*												
					9	6												
						1	0	8										
						1	0	8										
								0										

Dann addiert man nach oben, bekommt eine 97 in der fünften Zeile von unten, die 7 überträgt man in die Hunderterstelle des Dividenden. Die nächsthöhere Zeile ist wieder dreistellig, also 108. Also wieder nach oben addieren, die nächste Zeile ist wieder 108, u.s.w.

Die Aufgabe lautet also $109197708 : 12 = 9099809$.

*	*	*	*	*	7	7	0	8	:	12	=	*	*	*	9	8	0	9
*	*	*																
		*	*	*														
		1	0	8														
			1	1	7													
			1	0	8													
					9	7												
					9	6												
						1	0	8										
						1	0	8										
								0										

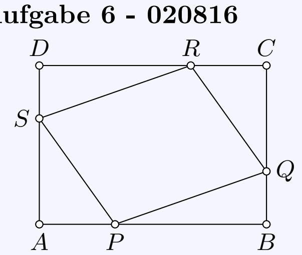
Aufgabe 5 - 020815
Beweise folgenden Satz:
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!



Der Umkreismittelpunkt hat zu den drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand. Daher ist er – wenn er auf einer der Seiten liegt – Mittelpunkt dieser Seite; umgekehrt ist diese Seite dann Durchmesser des Kreises.

Der Winkel am verbleibenden Eckpunkt ist dann nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 6 - 020816

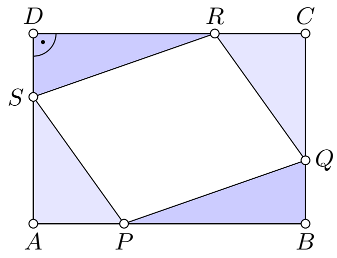


Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1 : 2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.

a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB = 10$ cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)



a) Siehe nebenstehendes Bild (nicht maßstabsgerecht).

b) *Behauptung:* $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

Beweis: Wegen $AB = CD$, $BC = DA$ und gleicher Teilungsverhältnisse auf den Seiten gilt $AS = CQ$, $AP = CR$, $BP = DR$ sowie $BQ = DS$. Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle APS \cong \triangle CRQ$ und $\triangle BQP \cong \triangle DSR$. Also ist $PQ = RS$, $QR = SP$ und somit $PQRS$ ein Parallelogramm. □

c) Mit $a \equiv AB = CD$ und $b \equiv BC = DA$ ist $[APS] = [CRQ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{1}{9}ab$ sowie $[BQP] = [DSR] = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{1}{9}ab$, mithin

$$[PQRS] = [ABCD] - ([APS] + [CRQ] + [BQP] + [DSR]) = ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte beträgt somit stets $\frac{5}{9}$, unabhängig von den konkreten Abmessungen des Rechtecks.

Bearbeitete Lösungen der I. Runde 1962 übernommen aus [5]

5.4.2 II. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020821
Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen lässt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Man kann diesen Satz indirekt beweisen. Das bedeutet, dass man die äquivalente Umkehraussage beweist, also: Wenn $\frac{a}{b}$ kürzbar ist, dann ist auch $\frac{a-b}{a+b}$ kürzbar.

Die Voraussetzung bedeutet, dass a und b einen gemeinsamen Teiler haben, dieser sei m. Damit gilt $a = ma'$ und $b = mb'$, weiterhin
$$\frac{a}{b} = \frac{ma'}{mb'} = \frac{a'}{b'}.$$
Setzt man das in den Term der Behauptung ein, sieht man, dass er tatsächlich kürzbar ist:
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{ma'-mb'}{ma'+mb'} = \frac{m(a'-b')}{m(a'+b')} = \frac{a'-b'}{a'+b'}. \quad \square$$

Aufgabe 2 - 020822
Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

Es gilt, den Grundwert x zum Prozentwert 687 Millionen t, der 134 Prozent (mehr als 1960, wo es 100 Prozent waren) entspricht, zu berechnen. Also lautet die Beziehung $x : 687 \text{ Millionen t } = 100 : 134$.

Daraus erhält man 513 Millionen t geförderte Kohle im Jahr 1960.

Aufgabe 3 - 020823
Berechne:
$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

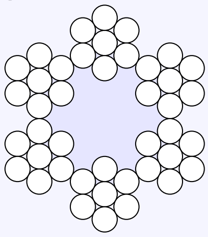
$$\frac{m^2-n^2}{m-n} + \frac{m^2+2mn+n^2}{m+n} = \frac{(m+n)(m-n)}{m-n} + \frac{(m+n)^2}{m+n} = m+n+m+n = 2(m+n)$$

Aufgabe 4 - 020824
Welche x erfüllen die folgende Gleichung:
$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{2}{9} &= \frac{x^2}{4} - \frac{31x}{72} + \frac{1}{12} \\ \frac{5}{72}x &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Also ist $x = 2$, wovon man sich in der Probe noch einmal überzeugt.

Aufgabe 5 - 020825



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Eine wesentliche Eigenschaft von Kreisen ist, dass man sie in regelmäßige Sechsecke einbeschreiben kann, bei denen der Abstand gegenüberliegender Seiten gleich dem Kreisdurchmesser ist. Demzufolge kann man den grau gefärbten Innenbereich mit diesen Sechsecken "parkettieren"; der Rest ist dann eine Abzählaufgabe.

Der Durchmesser des Umkreises wird von 9 aneinanderliegenden Kugeln gebildet, er ist also 9 mm.

Aufgabe 6 - 020826

Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen.
Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Die Abschnitte zwischen dem ersten und zweiten bzw. zweiten und dritten Kilometerstein müssen gleich sein. Sei die Zahl auf dem ersten $10a + b$, auf dem zweiten $10b + a$ und auf dem dritten $100a + b$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Dann gilt $(10b + a) - (10a + b) = (100a + b) - (10b + a)$ oder umgeformt $108a = 18b$ oder $6a = b$.

Im vorgegebenen Bereich wird das bloß von $a = 1,\ b = 6$ erfüllt. Also stand auf den Kilometersteinen 16, 61 und 106 – Klaus legte also 90 km zurück. Da er 3 h gebraucht hat, war seine durchschnittliche Geschwindigkeit 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 7 - 020827

Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a + b = 10 \text{ cm}, \qquad \beta = 45°, \qquad \gamma = 60°$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Man konstruiere zuerst ein beliebiges Dreieck $A'B'C$ mit den angebenen Winkeln; dieses ist dem gesuchten dann ähnlich.

Dann verlängere man die Seite b' über den Punkt A' hinaus um die Seite a'; man erhält den Punkt D.

Nunmehr kann man eine Gerade durch C zeichnen, auf der man $a+b$ abtrage, der entstandene Endpunkt sei E. Zu beachten ist, dass CD und CE einen spitzen Winkel miteinander bilden. Die Parallele zu DE durch A' teilt (Strahlensatzkonstruktion!) $CE = a + b$ genau in a (Endpunkt E) und b (bei C).

Diese Seiten kann man in C antragen, womit man das Dreieck ABC bekommt.

Aufgabe 8 - 020828
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10$ cm! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie 2 : 3 verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

Man zeichne die Strecke AB. Diese teile man, z. B. per Strahlensatzkonstruktion, im Verhältnis 2 : 3. Im Teilungspunkt errichte man die Senkrechte, auf der die Höhe h_c liegt.

Den anderen Endpunkt der Höhe erhält man nach dem Satz des Thales: konstruiert werden muss der Kreis mit AB als Durchmesser. Sein Schnittpunkt mit der errichteten Senkrechten ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks. Damit kann man feststellen, dass die Länge von $h_c \approx 4{,}9$ cm beträgt.

Aufgabe 9 - 020829
Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, dass die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)

Man bezeichne die Mittelpunkte über den Seiten a, b, c und d in dieser Reihenfolge mit M_a, M_b, M_c und M_d. Dann kann man die Kongruenz von z. B. Dreieck AM_aM_d und BM_aM_b zeigen.

Es gilt

$AM_a = BM_a$ (halbe Diagonalen im gleichen Quadrat),

$AM_d = BM_b$ (halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten, da gegenüberliegende Parallelogrammseiten gleich lang sind) und

$\angle M_aAM_d = \angle M_aBM_b$.

Letzteres sieht man, indem man diese Winkel durch Teilwinkel ausdrückt, d. h. $\angle M_aAM_d = 2{\cdot}45°+\angle DAC$ und $\angle M_aBM_b = 2 \cdot 45° + (90° - \angle ABC)$. Da aber im Parallelogramm benachbarte Winkel zusammen 90° groß sind, sind letztere Ausdrücke gleich.

Aus der bewiesenen Kongruenz folgt $M_aM_d = M_aM_b$ und $\angle AM_aM_d = \angle BM_aM_b$.

Mit der zweiten Aussage gilt $\angle M_dM_aM_b = \angle AM_aB = 90°$.

Da man diesen Beweis analog für alle anderen Seitenpaare und Winkel des Vierecks $M_aM_bM_cM_d$ durchführen kann, sind alle Seiten gleich und Winkel 90° groß. □

Aufgaben der II. Runde 1962 gelöst von Carsten Balleier

5.4.3 III. Runde 1962, Klasse 8

Aufgabe 1 - 020831
Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wie viel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1000 kg Zink zu gewinnen?

Die 1000 kg Zink, die gewonnen werden sollen, sind 85% des Zinks, das in der Zinkblende enthalten ist, also sind 100% 1176,5 kg. Dies wiederum ist 65% der Gesamtmenge an Zinkblende, die demzufolge 1810 kg betragen muss.

Aufgabe 2 - 020832
Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 =?$	$18+7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Man kann das Produkt darstellen als $(10+a)(10+b)$ mit $1 \leq a,b \leq 9$. Es ist daher gleich

$$100 + 10a + 10b + ab = 10(10 + a + b) + ab.$$

Die Summe aus 10 und den beiden Einerstellen entspricht im Beispiel $18+7$, die Multiplikation mit 10 der angehängten Null und das Produkt der Einer der $7 \cdot 8$.

Aufgabe 3 - 020833
Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, dass einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.
Er stellt fest, dass die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.
Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wie viel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Von jeder Größe gibt es mindestens einen; und von der 38 mehr als von jeder anderen.

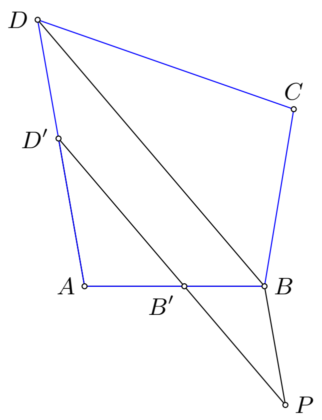
Gäbe es 2 von der 38, müsste es von einer anderen Größe auch 2 geben. Es dürfte eine andere Größe gar nicht vorhanden sein. Also muss die 38 dreimal, die anderen je einmal unter den Paaren vertreten sein.

Bei den rechten Schuhen geht man analog vor: es gibt nur drei Größen, insgesamt aber einen Schuh weniger als bei den Paaren. Rainer hat also 3 rechte 39-er und je einen 37-er und 40-er vor sich.

Bei den linken weiß man, dass es wenigstens einen Schuh der 37 gibt und dass die anderen häufiger (d. h. mind. 2-mal) vorkommen. Da es nur 8 linke gibt, ist die 40 dreimal, die 39 und 38 je zweimal und die 37 einmal vertreten.

Wenn man schaut, welche linken und rechten noch zu Paaren gebunden werden können, stellt man fest, dass 2 rechte 38-er, ein linker 39-er und 2 rechte 40-er beim Schuhmacher sein müssen.

Aufgabe 4 - 020834
Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm misst.



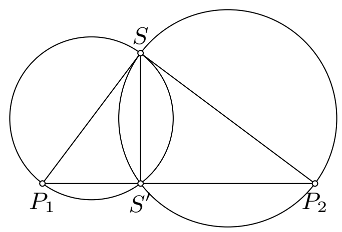
Die Konstruktion führt man in zwei wesentlichen Teilen durch.

(1) Man konstruiert ein Dreieck, welches der einen Hälfte des Drachenvierecks ähnlich ist.
Man zeichnet einen Winkel von 100° (der Scheitel sei A), auf dessen Schenkeln man zwei bzw. drei (beliebig wählbare) Einheiten abträgt. Die beiden Endpunkte (B' und D') verbindet man, die erhaltene Strecke e' entspricht der Diagonalen e von 7 cm. (2) Per Strahlensatzkonstruktion erzeugt man die richtige Größe. Auf der Geraden durch $D'B'$ wird Punkt P konstruiert, indem die Länge e von D' aus in Richtung B' abgetragen wird. Nun wird eine Gerade durch P parallel zu AD' konstruiert, die die Gerade durch AB' in B schneidet. Die Parallelverschiebung von $B'D'$ durch B erzeugt D als Schnittpunkt mit der Geraden durch AD'.

(3) Das Dreieck ABD wird an BD gespiegelt. Der Spiegelpunkt von A sei C. Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$, welches den geforderten Bedingungen entspricht.

Aufgabe 5 - 020835
Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

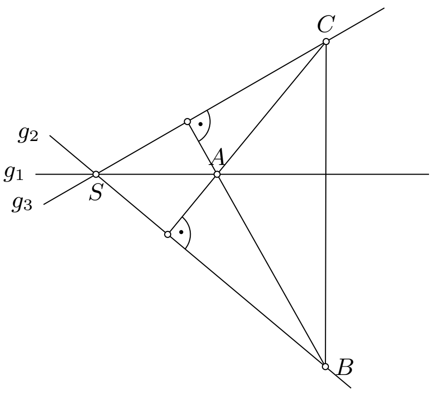


Beweis: Sei der erste Schnittpunkt S, der andere S' und heißen die anderen Endpunkte der Durchmesser P_1 und P_2.

Dann ist $\angle P_1S'S$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser P_1S, nach Satz des Thales also ein rechter Winkel. Ebenso gilt $\angle P_2S'S = 90°$. Damit schließen P_1S' und P_2S' einen Winkel von 180° ein; mit anderen Worten: P_1, S' und P_2 liegen wie behauptet auf einer Geraden.
$\square$

Aufgabe 6 - 020836
a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!



a) Man fällt die Lote von A auf g_2 und g_3. Diese verlängert man, so dass sie g_3 bzw. g_2 schneiden. Diese Schnittpunkte sind die anderen beiden Eckpunkte des Dreiecks.

b) Hier geht man ebenso vor. Falls A auf einer der beiden senkrecht zueinander stehenden Geraden liegt, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Liegt A aber auf der dritten Geraden, entsteht überhaupt kein Dreieck.

Aufgaben der III. Runde 1962 gelöst von Carsten Balleier

5.5 III. Olympiade 1963

5.5.1 I. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030811
Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge der Hochseefischerei 117291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.

a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?

b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

a) Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962 betrug rund 74445 t/1,44 $\approx$ 51700 t.

b) Die voraussichtliche Fangmenge beträgt $1{,}44 \cdot 117291$ t $\approx$ 168900 t.

Aufgabe 2 - 030812
Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, dass 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, dass die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.

Wie viel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

Anzahl der Schüler, die eine 3 geschrieben haben: x

Anzahl der Schüler: $n = 5 + 8 + 4 + x = 17 + x$

Durchschnittsnote: $d = 2{,}5 = (5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + x \cdot 3 + 4 \cdot 4)/n$

$$\begin{aligned}
2{,}5 &= (5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + x \cdot 3 + 4 \cdot 4)/(17 + x) \\
2{,}5 &= (5 + 16 + x \cdot 3 + 16)/(17 + x) \\
42{,}5 + 2{,}5 \cdot x &= 37 + x \cdot 3 \\
5{,}5 &= 0{,}5 \cdot x \\
11 &= x
\end{aligned}$$

$n = 17 + x = 17 + 11 = 28$. 28 Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben.

Aufgabe 3 - 030813
Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

Beweise, dass entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

Beweis: Fall 1:
Alle drei Zahlen lassen den gleichen Rest 1 bzw. 2 bei Division durch 3, dann lässt ihre Summe den Rest 3 bzw. 6, ist also durch 3 teilbar.

Fall 2:
Zwei Zahlen lassen den Rest 1 (bzw. 2) und die dritte den Rest 2 (bzw. 1), dann addiert man eine Zahl, die den Rest 1 lässt, und eine Zahl, die den Rest 2 lässt, und erhält wieder eine durch 3 teilbare Summe.

Da keine weiteren Fälle existieren, folgt somit die Behauptung.

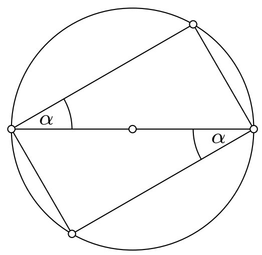
Aufgabe 4 - 030814
Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

Inge sei früher x Jahre alt gewesen, dann war Rolf damals $2x$ Jahre. Heute ist Inge also $2x$ Jahre und Rolf somit $3x$ Jahre. Beide zusammen sind heute $5x$ Jahre. Daraus erhält man $x = 9$.

Folglich ist Rolf 27 Jahre und Inge 18 Jahre alt.

Aufgabe 5 - 030815
In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.

Beweise, dass diese Sehnen stets gleichlang sind!

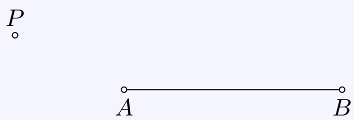


Beweis: Zusätzlich zur beschriebenen Konstruktion kann man noch die beiden Sehnen ziehen, die den Durchmesser und je eine Sehne zu einem Dreieck vervollständigt. Dann reicht es zu beweisen, dass beide Dreiecke kongruent sind.

Die beiden ursprünglichen Sehnen und der Durchmesser bilden Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (α).

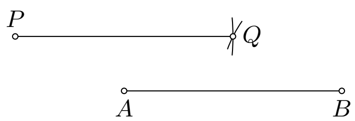
Nach dem Satz des Thales sind die beiden Dreiecke rechtwinklig; und sie haben eine Seite, den Durchmesser, gemeinsam. Aus Kongruenzsatz WSW folgt, dass beide Dreiecke kongruent und damit beide Sehnen gleich lang sind. □

Aufgabe 6 - 030816



Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abbildung).

Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist! Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!



Konstruktion: (Bild) Es ist ein Punkt Q gesucht mit $PQ \parallel AB$ und $PQ = AB$.

Das bedeutet, dass Q mit A, B und P ein Parallelogramm bilden muss. Der Punkt Q muss also von B den Abstand AP haben. Deshalb zeichnet man um B einen Kreisbogen mit Radius AP und um P einen mit Radius AB.

Man erhält zwei Schnittpunkte, es ist derjenige auszuwählen, für den $\angle BQP = \angle PAB$ gilt.

Bearbeitete Lösungen der I. Runde 1963 übernommen aus [5]

5.5.2 II. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030821
Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).
Wie viel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

a) Das Feld hat einen Flächeninhalt von 360 m $\cdot$ 220 m = 79200 m^2. Der Bestand hat also eine Masse von $\frac{58\text{kg}}{10\text{m}^2} \cdot 79200$ m^2 = 459360 kg = 4594 dt.
Da beide Mähhäcksler 210 dt jede Stunden ernten, benötigen sie damit $\frac{4594}{210} = 21{,}88 \approx 22$ Stunden.

Ein jeder Mähhäcksler erntet 3,5 t in 20 Minuten. Nimmt man an das Beladen und Hinfahrt genauso lange dauert wie Entladen und Rückfahrt, so benötigt jeder Häcksler zwei Hänger, insgesamt also 4.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 030822
Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Eine sechsstellige Zahl z, mit den ersten drei und letzten drei Ziffern a,b,c, kann man darstellen als:

$$z = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

$$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100a + 10b + a)$$

Da 1001 die Primteiler 7, 11 und 13 besitzt, wird $z = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + a)$.
Damit ist z durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 030823
In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wie viel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

r sei die Anzahl der Reihen und x die Anzahl der Stühle je Reihe. Dann ist zu Beginn $300 = r \cdot x$, d. h. $r = \frac{300}{x}$

Nach dem Umstellen der Stühle stehen $x-3$ Stühle in jeder, der nun $r+5$ Reihen, d. h. $300 = (r+5) \cdot (x-3)$.

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, wird

$$300 = \left(\frac{300}{x} + 5\right) \cdot (x - 3)$$

Umstellen ergibt die quadratische Gleichung $x^2 - 3x - 180 = 0$ und mit der Lösungsformel

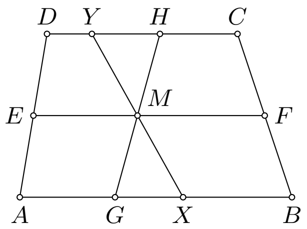
$$x_{1;2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 180} = \frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$$

Nur $x_1 = 15$ ist positiv und somit die Lösung. Folglich ist $r = \frac{300}{x} = \frac{300}{15} = 20$.
Am Anfang gab es 20 Reihen mit jeweils 15 Stühlen. Nach den Umstellen sind es 25 Reihen mit je 12 Stühlen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 030824
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, dass die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!



Der Schnittpunkt der Strecke XY mit der Mittellinie EF sei M. Man ziehe durch M die Parallele zu AD. Diese schneide AB in G und CD in H.

Nun wird die Kongruenz der Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ nachgewiesen:

$\angle MGX = \angle MHY$; Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\angle GMX = \angle HMY$; Scheitelwinkel, und $\overline{MG} = \overline{MH}$

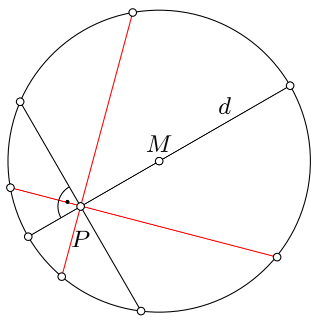
$\overline{MG} = \overline{MH}$ folgt aus der Tatsache, dass die Vierecke $AGME$ und $EMHD$ Parallelogramme sind mit einer gleichen Seite EM und $AE = ED$, da die Mittellinie die Trapezseite halbiert.

Wenn nun die beiden Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ kongruent sind, so sind auch ihre Seiten MX und MY gleich lang.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 030825
Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

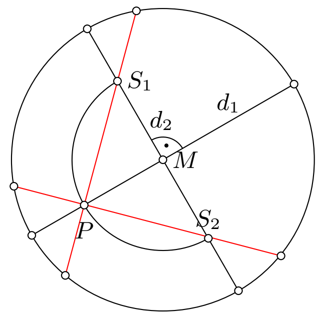


Da gleichlange Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkt M haben, müssen sie symmetrisch zu dem Durchmesser d durch P liegen.

Errichtet man in P auf PM die Senkrechte und halbiert die rechten Winkel, so erhält man die gesuchten Sehnen.

Alternative: Man errichtet den senkrechten Durchmesser d_2 auf d_1, welcher wiederum der Durchmesser durch P ist. Darauf werden im Abstand PM von M die Schnittpunkte S_1 und S_2 erzeugt, welche jeweils mit P verbunden auf den gesuchten Sehnen liegen.

Laut Konstruktion haben die Punkte S_1, P und S_2 den gleichen Abstand von M, liegen folglich auf einem Kreis um M, wobei S_1, M und S_2 auf einem Durchmesser dieses Kreises liegen. Folglich ist der Winkel $\angle S_1PS_2 = 90°$ nach dem Thalessatz.



Ferner gilt $PS_1 = PS_2$, da $PM \perp S_1S_2$. Die gesuchten Sehnen sind eine Vergrößerung der Strecken PS_1 und PS_2 um denselben Faktor (kleiner Kreis zu großem Kreis) und bleiben daher in ihrem Verhältnis zueinander identisch, also gleich groß.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

5.5.3 III. Runde 1963, Klasse 8

Aufgabe 1 - 030831
Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, dass es die kleinste derartige Zahl ist!

Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 9 und 4 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl der letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar ist.

Die Zahl soll aus 8 verschiedenen Ziffern bestehen, 10 Ziffern (0-9) gibt es. Es müssen also 2 Ziffern weggelassen werden, so dass die Summe der restlichen Ziffern durch 9 teilbar ist. Dafür kommen nur die Zahlenpaare (0;9), (1;8), (2;7), (3;6) und (4;5) in Frage. Damit gibt es folgende minimal mögliche Zahlen:

$$(0;9) - 12345678 \qquad (1;8) - 20345679 \qquad (2;7) - 10345689$$
$$(3;6) - 10245789 \qquad (4;5) - 10236789$$

Das Paar (4;5) ermöglicht die kleinste Zahl, allerdings müssen die Ziffern so angeordnet werden, dass die Zahl durch 4 teilbar ist. Damit die Zahl möglichst klein ist, sollte die größeren Ziffern weiter hinten stehen. Die durch 4 teilbare Zahl aus den größtmöglichen 2 Ziffern ist dann 96. Es müssen also nur noch die letzten 4 Ziffern umsortiert werden.

Dies ergibt dann die Zahl 10237896.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 030832
Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

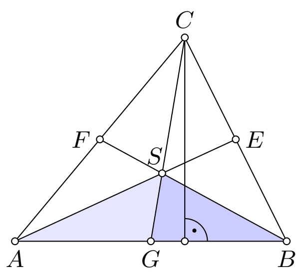
Beweis: Es gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 5(a-b)^2 + 4ab$. Der Summand $5(a-b)^2$ ist stets eine nichtnegative reelle Zahl, während $4ab$ unter den angegebenen Bedingungen eine positive reelle Zahl ist.

Also gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$. □

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 030833
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, dass diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!



Beweis: (Bild) Zuerst wird gezeigt, dass je zwei kleine Dreiecke, die an einer Seite des großen Dreiecks anliegen, den gleichen Flächeninhalt haben.
Dazu betrachte man z. B. AB: Die Dreiecke AGS und GBS (im Bild gekennzeichnet) haben eine Höhe gemeinsam, nämlich das Lot von S auf die Strecke AB. Außerdem gilt $AG = GB$ (nach Konstruktion der Seitenhalbierenden), d. h., dass die zur gemeinsamen Höhe gehörenden Grundseiten gleich lang sind.

Es folgt: $[AGS] = [GBS]$. Gleichermaßen lässt sich $[BES] = [ECS]$ und $[CFS] = [FAS]$ beweisen.
Nun muss gezeigt werden, dass $[GBS] = [BES]$ und die dazu analogen Beziehungen gelten. Dazu kann man wie folgt vorgehen:

Aus der Konstruktion folgt $[ABE] = [AEC]$. Das ist jedoch gleich bedeutend mit

$$[AGS] + [GBS] + [BES] = [FAS] + [CFS] + [ECS]$$

Setzt man das im ersten Teil erhaltene Resultat ein, erhält man $2[AGS] + [BES] = 2[FAS] + [BES]$, womit $[AGS] = [FAS]$ klar wird.

Jetzt kann man aus $[GCA] = [BCG]$ auch $[FAS] = [BES]$ beweisen, so dass tatsächlich alle sechs Dreiecke untereinander flächengleich sind. □

Anmerkung: Der zweite Teil kann auch unter Verwendung der Tatsache, dass S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt, durchgeführt werden.
Dann bekommt man als Zwischenschritt $[ABS] = 2[BES]$. Umgekehrt ist es möglich, die Gültigkeit der 2 : 1-Teilung aus der Flächengleichheit herzuleiten.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 4 - 030834
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{cccccc} & f & o & r & t & y \\ + & & & t & e & n \\ + & & & t & e & n \\ \hline & s & i & x & t & y \end{array}$$

Die Lösung lautet:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Zuerst erkennt man, dass n=0 ist, da die letzte Spalte addiert y ohne Übertrag ergibt. Dann ist klar, dass e=5 ist, da die vorletzte Spalte addiert t ergibt. In diesem Falle ergibt sich aber ein Übertrag von 1.

In der zweiten Spalte muss es einen Übertrag geben, damit sich die erste Spalte ändert. Die Addition in der zweite Spalte erfolgt nur mit dem Übertrag aus der dritten Spalte, der 1 oder 2 sein kann. Da 0 bereits vergeben ist, muss i damit 1 sein. Somit ist o dann 9, und es gab einen Übertrag von 2.

Jetzt müssen noch die Gleichungen $f + 1 = s$ (aus der 1. Spalte) und $r + 2 \cdot t + 1 = 20 + x$ (aus der 3. Spalte + Überträge) erfüllt werden. Gleicht man alle möglichen Zahlenkombinationen ab, bleibt nur eine mögliche übrig: f=2, s=3, r=7, t=8 und x=4.

Für y bleibt nur noch die 6 übrig.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 5 - 030835
Gegeben sind die Strecken $s - a = 3$ cm, $s - b = 2$ cm, $s - c = 1$ cm, wobei $2s = a + b + c$ der Umfang des Dreiecks ist.
a) Konstruiere das Dreieck!
b) Begründe die Konstruktion!

Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a + b + c - (b + c) = 2s - b - c = (s - b) + (s - c) \\ b &= a + b + c - (a + c) = 2s - a - c = (s - a) + (s - c) \\ c &= a + b + c - (a + b) = 2s - a - b = (s - a) + (s - b) \end{aligned}$$

Aus den so beschriebenen drei Seiten konstruiert man nun das Dreieck in der üblichen Weise.

Anmerkung: Es ergeben sich für a, b, c die Seitenlängen 3, 4 und 5 cm, was einem rechtwinkligen Dreieck entspricht.

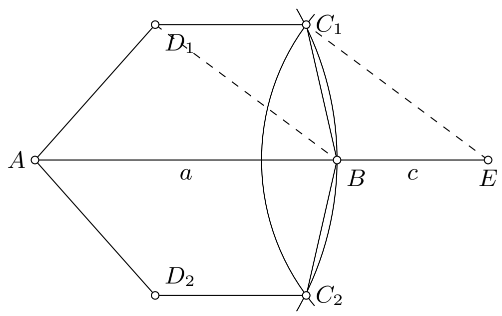
Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 030836
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = a = 8$ cm.
2. Trage auf der Geraden durch A und B über B hinaus E ab, so dass $\overline{BE} = c = 4$ cm ist.
3. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius $e = 8$ cm.
4. Zeichne einen Kreisbogen um E mit dem Radius $f = 6$ cm. Der Schnittpunkt der Kreisbögen sei C.
5.Konstruiere die Parallele g zu $\overline{BE}$ durch C.
6. Auf der Geraden g ist von C der Abstand $c = 4$ cm derart abzutragen und mit D zu bezeichnen, dass das entstehende Viereck $ABCD$ nicht entartet ist. D ist mit A zu verbinden.

Begründung:
Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt a mit (1). Laut Konstruktion ist $BECD$ ein Parallelogramm: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ mit (5) und $\overline{BE} = \overline{CD} = c$ mit (2) und (6).

Damit ist die Länge der Strecke $\overline{BD} = \overline{EC} = f$ mit (4).

Ferner hat $\overline{AC}$ laut Konstruktion die Länge von e mit (3).

Somit erfüllt jedes derart konstruierte Trapez die Forderungen der Aufgabenstellung.

5.6 IV. Olympiade 1964

5.6.1 I. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040811
Für ein Experiment werden 50 cm^3 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wie viel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

x sei die gesuchte Menge an 36%-iger Salzsäure

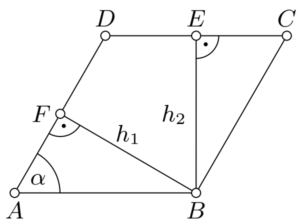
50 cm^3 an 10%-iger Salzsäure enthalten 5 cm^3 reiner Salzsäure (S). Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$S = \frac{36}{100} \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad x = S \cdot \frac{100}{36} = \frac{5\text{ cm}^3 \cdot 100}{36} = 13\frac{8}{9}\text{ cm}^3 \approx 13{,}9\text{ cm}^3$$

Man benötigt also $\approx 13{,}9$ cm^3 36%-iger Salzsäure und dementsprechend $50 - 13{,}9$ cm^3 $\approx 36{,}1$ cm^3 destilliertes Wasser.

Aufgabe 2 - 040812
Es ist zu beweisen, dass die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Die Dreiecke ABF und BCE sind kongruent nach WSW:



$$\begin{array}{rcll} \angle BAF & \simeq & \angle BCE & \text{(gegenüberliegende Winkel im Rhombus)} \\ \overline{AB} & \simeq & \overline{BC} & \text{(Seiten im Rhombus)} \\ \angle ABF & \simeq & \angle CBE & \text{(da bereits ein gleicher Winkel und ein rechter} \\ & & & \text{Winkel in den Dreiecken vorhanden ist, muss} \\ & & & \text{auch der dritte Winkel übereinstimmen)} \end{array}$$

Damit sind auch die restlichen Stücke in den beiden Dreiecken kongruent, insbesondere $h_1 = h_2$.

Aufgabe 3 - 040813
Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wie viel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Zur Abfahrtszeit befinden sich an der Anfangs- und an der Endstation je 2 Bahnen. Außerdem sind je 2 Bahnen 10 min, 20 min, 30 min und 40 min unterwegs. Also sind insgesamt 12 Straßenbahnen eingesetzt.

Aufgabe 4 - 040814
Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wie viel Lösungen gibt es?

Die Quersumme der bis jetzt vorhandenen Ziffern der Zahl $62 * *427$ beträgt 21. Da sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme ebenfalls durch 9 teilbar sein, somit kommen folgende Quersummen in Frage: 27 und 36.

Folgende Zahlen ergeben eine dieser Quersummen:

$$6215427, 6251427, 6224427, 6242427, 6233427, 6269427, 6296427, 6278427, 6287427$$

Nun muss überprüft werden, welche dieser Zahlen zusätzlich durch die Zahl 11 teilbar sind. Somit erhält man genau eine Zahl die durch 99 teilbar ist, und zwar: 6224427.

Aufgabe 5 - 040815
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Nach den Voraussetzungen des Satzes liegen die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, falls a_c die Seitenhalbierende ist.

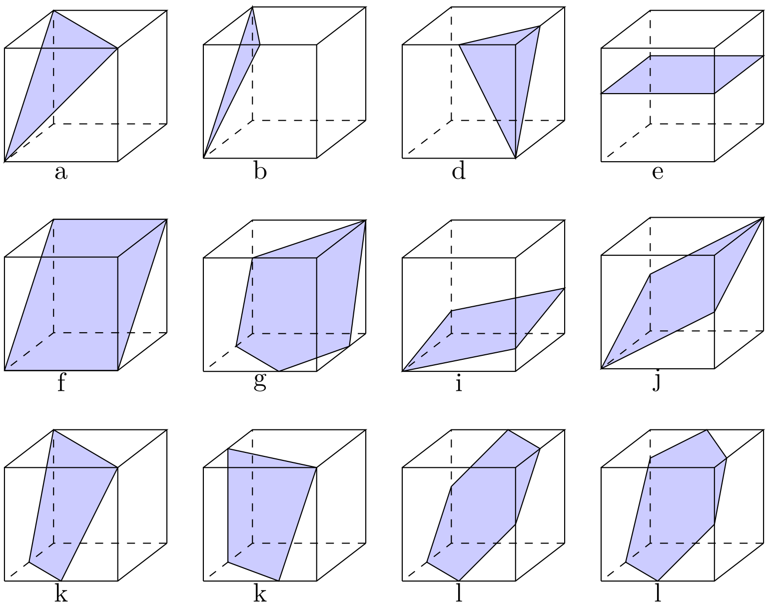
Aufgabe 6 - 040816
Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden. Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck	b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)
c) rechtwinkliges Dreieck	d) ungleichschenkliges Dreieck
e) Quadrat	f) Rechteck (nicht quadratisch)
g) Fünfeck	h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muß, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

Von den angegebenen Schnittfiguren sind folgende möglich (siehe Abbildung):



a, b und d nur für spitzwinklige Dreiecke; e, f, g (unregelmäßig mit 2 Paaren paralleler Seiten). Nicht möglich sind dagegen: c) und h).

In der Aufzählung fehlen:

i) Parallelogramm, die weder Rhombus- noch Rechteckform haben,

j) Rhombus,

k) Trapeze (gleichschenklig und ungleichschenklig)

l) Sechsecke (regelmäßige und solche mit 3 Paaren paralleler Seiten).

Bearbeitete Lösungen der I. Runde 1964 übernommen aus [5]

5.6.2 II. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040821
Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Man konstruiert das Rechteck aus der Mittellinie und der Höhe des Trapezes.

Aufgabe 2 - 040822
Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, dass die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Sind die Ziffern der dreistelligen Zahl a_2, a_1, a_0, so gilt:

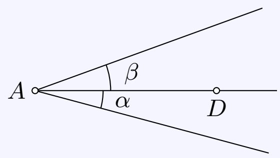
$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 - 100a_0 - 10a_1 - a_2 = 99a_2 - 99a_0 = 99(a_2 - a_0)$$

Da ein Faktor 99 ausgeklammert werden kann, ist die Differenz durch 99 teilbar.

Aufgabe 3 - 040823

Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).

a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, daß $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!
b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?



a) Man verlängert $\overline{AD}$ über D hinaus um sich selbst und erhält dadurch Punkt E. Dann konstruiert man das Parallelogramm $ABEC$

b) Genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt, ist $ABEC$ ein Rhombus und damit $\triangle ABC$ gleichschenklig. Das Dreieck ABC ist daher genau dann gleichseitig, wenn $\alpha = \beta = 30°$ gilt.

Aufgabe 4 - 040824
Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit.
Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden.
Es stellt sich heraus, dass er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wie viel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

Peter muss den Inhalt der gekauften Flaschen von dem Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Flaschen bezahlen. Wegen $180 : 21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Flaschen gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.

2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück.

Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n-5)$ statt nur $(n-6)$, was der Aufgabe widerspricht.

Lösungen der II. Runde 1964 übernommen von [5]

5.6.3 III. Runde 1964, Klasse 8

Aufgabe 1 - 040831
Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

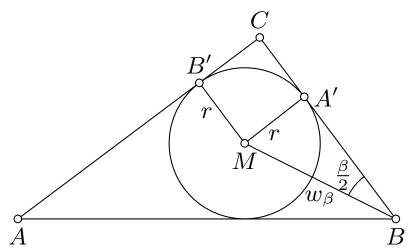
Es gilt

$$\frac{8}{3}(10x+y) = 10y+x \qquad ; \qquad 7x = 2y$$

Da x und y natürliche Zahlen kleiner als 10 sind, folgt $x = 2$ und $y = 7$. Die gesuchte Zahl ist demnach 27.

Aufgabe 2 - 040832
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?



Konstruktionsbeschreibung:

a) Ich zeichne a und erhalte C und B. Um C schlage ich mit r einen Kreisbogen und erhalte A' und auf der Senkrechten zu a in C B'. Um A' und B' schlage ich mit r die Kreisbögen und erhalte M.
$\overline{MB}$ ist Winkelhalbierende w_β. Ich konstruiere β in B und erhalte A.

b) Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn gilt $a > 2r$.

Aufgabe 3 - 040833
Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 Rad fahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und Rad fahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) Rad fahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und Rad fahren und Schlittschuh laufen können.

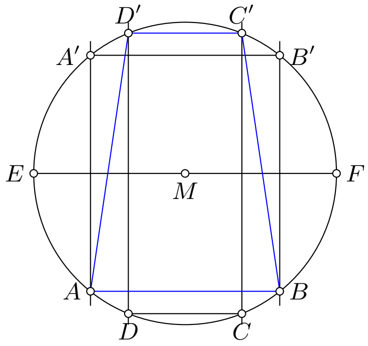
Wie viel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wie viel höchstens zur Verfügung?

Maximal stehen zur Verfügung

a) 21, da es nur 21 Schwimmer gibt, b) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, c) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt, d) 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt.

Minimal stehen zur Verfügung
a) 14 wegen 24+21-31=14, b) 9 wegen 21+19-31=9,
c) 12 wegen 24+19-31=12, d) 2 wegen 24+21+19-31-31=2.

Aufgabe 4 - 040834
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!
a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!
b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!



a) Angenommen, $ABCD$ sei eines der gesuchten Trapeze, wobei $\overline{AB} = p_2$ und $\overline{CD} = p_1$ ist. Dann gilt $p_2 \leq 2r$ als Bedingung für die Konstruktion.

b) *Konstruktionsbeschreibung:*

Wir zeichnen um M einen Kreis mit dem Radius r und dem Durchmesser $\overline{EF}$. Auf $\overline{EF}$ konstruieren wir zwei Strecken p_1 bzw. p_2 so, dass M sie halbiert. Durch die Endpunkte dieser Strecken zeichnen wir die Senkrechten zu $\overline{EF}$ und erhalten A und A' bzw. B und B' bzw. C und C' bzw. D und D'.

Die gesuchten Trapeze sind dann $ABCD$, $ABC'D'$, $A'B'CD$, $A'B'C'D'$, von denen je zwei kongruent sind. Für $p_2 = 2r$ entstehen nur zwei kongruente Trapeze.

Aufgabe 5 - 040835
Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!
b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Es seien die vier Zahlen a, b, c, d, dabei gilt $b = a + 1$, $c = a + 2$ und $d = a + 3$

a)
$$ac = a \cdot (a + 2) = a^2 + 2a \qquad ; \qquad bd = (a + 1) \cdot (a + 3) = a^2 + 4a + 3$$

Daraus folgt $a \cdot c < b \cdot d$, die Differenz beträgt $2a + 3$.

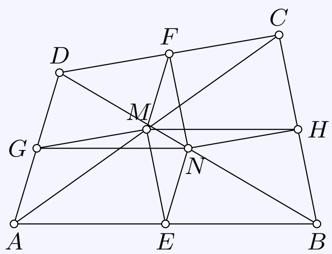
b)
$$bc = (a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2 \qquad ; \qquad ad = a \cdot (a + 3) = a^2 + 3a$$

Daraus folgt $b \cdot c > a \cdot d$, die Differenz beträgt 2.

Aufgabe 6 - 040836

Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.



Der Beweis stützt sich auf den Satz: "In einem Dreieck verläuft die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten Dreiecksseite."

Behauptung: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$ und $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Voraussetzung: E, F, G und H sind die Mittelpunkte der 4 Seiten des Vierecks. M und N sind die Mittelpunkte der beiden Diagonalen.

Beweis:
$\overline{GN} \parallel \overline{AB}$ im Dreieck ABD; $\overline{MH} \parallel \overline{AB}$ im im Dreieck ABC; folglich: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$

$\overline{GM} \parallel \overline{DC}$ im Dreieck ADC; $\overline{NH} \parallel \overline{DC}$ im im Dreieck BDC; folglich: $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Da im Viereck $GNHM$ die Gegenseiten zueinander parallel sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Aufgaben der III. Runde 1964 gelöst von Manuela Kugel

5.7 V. Olympiade 1965

5.7.1 I. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050811
Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Die Schüler der zweiten Gruppe haben die Prozentzahl korrekt berechnet und erhalten $\frac{60}{92} \cdot 100\% \approx 65{,}22\%$, während die anderen Schüler mit einem fehlerhaften Verfahren 65,53% erhalten. Die Differenz zwischen beiden Ergebnissen beträgt 0,31%.

Aufgabe 2 - 050812
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab} \quad \text{erfüllt?}$$

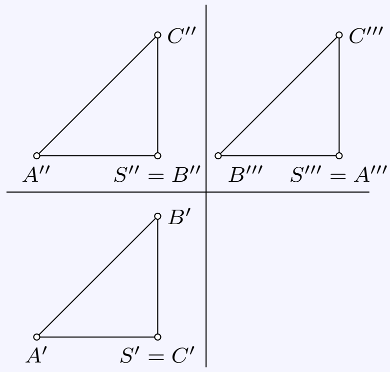
Weder a noch b dürfen Null sein. Dann ergibt sich

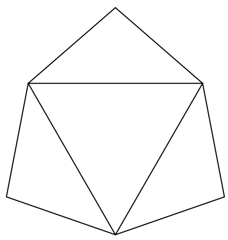
$$\frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab} \Rightarrow 0 = (a+b)\cdot(a-b) - (a+b) \Rightarrow (a+b)(a-b-1) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Damit muss $a+b=0$ oder $a-b=1$ gelten. Umgekehrt ist offensichtlich, dass die Gleichung erfüllt ist, wenn entweder $a=-b$ oder $a=b+1$ gilt.

Aufgabe 3 - 050813

a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriss besitzt (siehe Abbildung)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)
b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!





a) Ein Tetraeder, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt einen derartigen Grund-, Auf- und Seitenriss.
b) Körpernetz (siehe Abbildung)

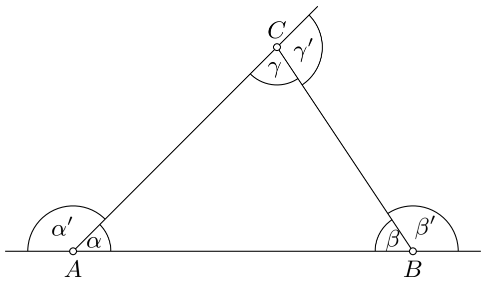
Aufgabe 4 - 050814
Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Die Umkehrung des Satzes ist: "Ist in einem Dreieck ABC die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig."

Hilfssatz: "Ist die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, so beträgt der dritte Innenwinkel 60°."



Beweis: Die beiden Außenwinkel, auf die die Voraussetzung zutrifft, seien o.B.d.A. α' und β', die zu ihnen anliegenden Innenwinkel des Dreiecks seien α und β, der dritte Innenwinkel sei γ, der dritte Außenwinkel γ' (siehe Abbildung).

Dann gilt nach Voraussetzung:
$$\alpha' + \beta' = 2(\alpha + \beta).$$

Außerdem gilt nach dem Satz, dass jeder Außenwinkel eines Dreiecke gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel ist:
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

Damit folgt: $\gamma' = 2\gamma$, womit, da die Summe zweier Nebenwinkel 180° beträgt, sofort $\gamma = 60°$ folgt.
Wendet man den Hilfssatz auf jeden Innenwinkel des Dreiecks ABC an, ergibt sich die Behauptung.

Bearbeitete Lösungen entnommen aus [5]

5.7.2 II. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050821
Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wie viel Schüler die Klasse hat und wie viel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:

(1) Wären 12 Schüler mehr dabei gewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.

(2) Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.

(3) Es soll vorausgesetzt werden, dass jeder Schüler die gleiche Anzahl von Kastanien sammelt.

a) Wie viel Schüler haben teilgenommen?
b) Wie viel Schüler hat die Klasse?

a) Die Anzahl der Schüler, die gesammelt haben, sei x. Wegen (1) und (3) gilt dann $(x + 12) : x = 175 : 100$, woraus sich $75x = 1200$ und $x = 16$ ergibt.

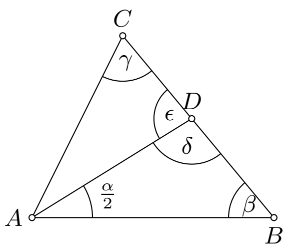
b) Wegen (2) und (3) gilt für die Anzahl a der Schüler in der Klasse

$$\frac{75}{100}a : x = 3 : 2 \qquad \Rightarrow \qquad a : x = 2 : 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

Folglich ist $a = 32$, und die Klasse hat genau 32 Schüler.

Aufgabe 2 - 050822
In dem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Winkelmaßen α, β und γ sei die Winkelhalbierende w_α eingezeichnet. Sie schneide die Seite BC in D. Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle ADC$ haben die Maße δ bzw. ϵ.

Beweise, dass $\delta - \epsilon = \gamma - \beta$ ist!



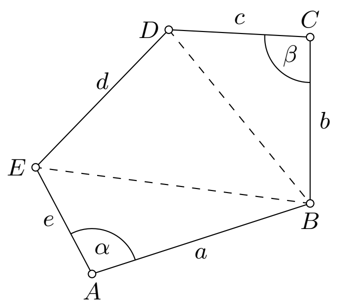
Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt (siehe Abbildung):

$$\begin{aligned} \delta &= \gamma + \frac{\alpha}{2} \\ \epsilon &= \beta + \frac{\alpha}{2} \\ \delta - \epsilon &= \gamma - \beta \end{aligned}$$

Aufgabe 3 - 050823
Die Seiten eines konvexen Fünfecks seien der Reihe nach a, b, c, d und e. Die Seite a sei 5,5 cm, b sei 4 cm, c sei 3,4 cm, d sei 4,6 cm und e sei 2,9 cm lang. Die Seiten a und e schließen einen Winkel mit dem Maß $\alpha = 100°$, die Seiten b und c einen Winkel mit dem Maß $\beta = 93°$ ein.

a) Konstruiere das Fünfeck aus diesen 7 Stücken!

b) Beschreibe die Konstruktion!



a) Konstruktion (siehe Abbildung)

b) Man konstruiert zunächst ein zu dem Teildreieck $\triangle BCD$ kongruentes Dreieck $\triangle B'C'D'$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Dann ist $\overline{B'D'} = \overline{BD}$. Nun konstruiert man in gleicher Weise das Teildreieck $\triangle ABE$. Die Punkte D bzw. C erhält man durch Konstruktion der Dreiecke $\triangle EBD$ und $\triangle DBC$ jeweils aus den drei Seiten.

Aufgabe 4 - 050824
Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

(1) D fing mehr als C.

(2) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

(3) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

Die Aussagen (1), (2) und (3) lassen sich folgendermaßen schreiben:

(1) $d > c$,

(2) $a + b = c + d$,

(3) $a + d < b + c$.

Aus (2) und (3) folgt (4) $b > d$,

aus (2) und (4) folgt (5) $c > a$ und

aus (4), (1) und (5) folgt schließlich $b > d > c > a$.

Aufgaben der II. Runde 1965 gelöst von Manuela Kugel

5.7.3 III. Runde 1965, Klasse 8

Aufgabe 1 - 050831
Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10000 und 99999, die wie z.B. 35453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller dreistelligen Zahlen, da sich aus jeder dreistelligen Zahl genau eine derartige Zahl ergibt, wenn man die ersten beiden Ziffern der Zahl in umgekehrter Reihenfolge hinter die Zahl schreibt und man umgekehrt jede derartige fünfstellige Zahl aus einer dreistelligen erhält.

Da es 900 dreistellige Zahlen gibt, beträgt die gesuchte Anzahl 900.

Aufgabe 2 - 050832
Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Die zur Seite AB gehörige Höhe CE des Dreiecks $\triangle ABC$ habe die Länge h_c, die Seite AB habe die Länge c. Dann beträgt der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Da die geforderten Dreiecke in der Seite AB mit dem Dreieck $\triangle ABC$ übereinstimmen, haben sie genau dann einen halb so großen Flächeninhalt, wenn die Länge der zu AB gehörigen Höhe bei diesen Dreiecken $\frac{h_c}{2}$ beträgt.
Das ist offensichtlich für alle Dreiecke $\triangle ABD$ der Fall, bei denen der Punkt D auf einer der beiden zu AB im Abstand $\frac{h_c}{2}$ gezogenen Parallelen liegt, und nur für diese. In jedem anderen Falle ist nämlich der Abstand des Punktes D von der Geraden durch A und B größer oder kleiner als $\frac{h_c}{2}$.

Die gesuchte Menge ist also die Menge aller Punkte der beiden im Abstand $\frac{h_c}{2}$ zu AB gezogenen Parallelen.

Aufgabe 3 - 050833
Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

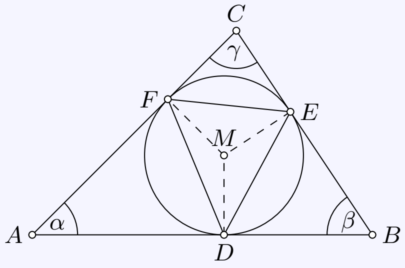
Bezeichnet man die Ziffern von z_1 mit a und b, die von z_2 mit c und d (in dieser Reihenfolge), dann gilt laut Aufgabe $(10a + b)(10c + d) = (a + 10b)(c + 10d)$, also $99ac = 99bd$, woraus sich $ac = bd$ ergibt.

Wegen $1 \leq a$, b, e, $d \leq 9$ (ganz) und wegen (4) sowie wegen (5) erhält man die folgenden 10 Zahlenquadrupel, für die (1) gilt:

$$\begin{array}{llllllll}
(12, & 63, & 21, & 36) & (14, & 82, & 41, & 28)\\
(12, & 84, & 21, & 48) & (23, & 64, & 32, & 46)\\
(24, & 63, & 42, & 36) & (23, & 96, & 32, & 69)\\
(13, & 62, & 31, & 26) & (34, & 86, & 43, & 68)\\
(26, & 93, & 62, & 39) & (36, & 84, & 63, & 48).
\end{array}$$

Umgekehrt erkennt man, dass jedes dieser Quadrupel den gestellten Bedingungen genügt.

Aufgabe 4 - 050834



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abbildung). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\angle DEF$, $\angle EFD$ und $\angle FDE$ des Dreiecks DEF!

Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, dann gilt: $\triangle CFM \cong \triangle CME$, da sie in 2 Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen.

Folglich gilt: $\overline{CF} = \overline{CE}$ und damit $CM \perp EF$, (1)

und wegen (1) und $ME \perp EG$ auch $\angle MEF \cong \angle MFE \cong \angle MCE$. (2)

Entsprechend erhält man $\angle MED \cong \angle MDE \cong \angle MBE$ (3)

und $\angle MDF \cong \angle MFD \cong \angle MAF$. (4)

Das Maß des Winkels $\angle MCE$ ist $\frac{\gamma}{2}$, das des Winkels $\angle MBE$ ist $\frac{\beta}{2}$ und das des Winkels $\angle MAF$ ist $\frac{\alpha}{2}$, da CM bzw. BM bzw. AM die Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle ABC$ sind. Bezeichnet man das Maß den Winkels $\angle DEF$ mit δ, das des Winkels $\angle EFD$ mit ϵ und das des Winkels $\angle FDE$ mit η, dann gilt wegen (2) und (3) $\delta = \frac{\gamma+\beta}{2}$, wegen (2) und (4) $\epsilon = \frac{\gamma+\alpha}{2}$ und wegen (3) und (4) $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Aufgabe 5 - 050835

Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt lässt?

Bezeichnet man die Masse der ersten Komponente mit m_1, die der zweiten mit m_2, die Temperatur der ersten Komponente mit t_1, die der zweiten mit t_2, so gilt für die Mischungstemperatur t_x unter den angegebenen Bedingungen:

$$t_x = \frac{m_1}{m_1+m_2}t_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}t_2.$$

Unter Verwendung der gegebenen Maßzahlen erhält man also, wenn x die Maßzahl von t_x bezeichnet,

$$x = \frac{9}{15}\cdot 30 + \frac{6}{15}\cdot 85, \quad \text{also}$$
$$x = 52.$$

Das Gemisch hat eine Temperatur von $t_x = 52°C$.

Aufgabe 6 - 050836

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a+b$, r und α gegeben sind!

Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\angle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

a) Für die Konstruktion:

Analyse:

Wie die Figur zeigt, sind von dem Teildreieck $\triangle MBC$ zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt. Daher lässt es sich konstruieren, wodurch gleichzeitig a bestimmt wird.

Damit ist aber, da $a + b$ gegeben ist, auch b bestimmt (wobei $a < a + b$ gelten muss), so daß die Konstruktion des Dreiecke $\triangle ABC$ auf die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel zurückgeführt ist.

b) Für die Beschreibung und Diskussion:

Beschreibung:

Man konstruiert das Teildreieck $\triangle MBC$. Dabei gibt es folgende Fälle:

(1) $\alpha < 90°$. Dann lässt sich das Dreieck aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle BMC$ (Winkelmaß 2α) konstruieren.

(2) $\alpha > 90°$. Dann gilt $2\alpha > 180°$. Das Teildreieck $\triangle MBC$ lässt sich in diesem Fall aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle CMB$ (Winkelmaß δ) konstruieren, wobei $\delta = 360° - 2\alpha$ gilt.

(3) Für $\alpha = 90°$ gilt $a = 2r$. In diesem Falle lässt sich das Dreieck $\triangle ABC$ sofort aus den Seiten BC (Länge $2r$), AC (Länge $a + b - a = b$) und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel $\angle BAC$ (Winkelmaß $\alpha = 90°$) konstruieren, wobei die Konstruktion für $b < 2r$, also $a+b < 4r$, und nur dann durchführbar ist. Das Dreieck ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.

In den Fällen (1) und (2) erhält man mit dem Teildreieck $\triangle MBC$ auch die Seite BC (Länge a) und damit auch die Länge b der Seite AC. Man schlägt den Umkreis um M mit dem Radius r und mit dem Radius b um C einen Kreisbogen, der den Umkreis im Falle $b < 2r$ in den Punkten A und A' schneidet.

Für $b = 2r$ haben beide Kreise genau einen Punkt, den Punkt A, gemeinsam, und für $b > 2r$ gibt es keine gemeinsamen Punkte beider Kreise.

Diskussion:

Im Falle $b = 2r$ gibt es genau ein Dreieck. Dieses wird durch die angegebene Konstruktion erhalten.

Wenn $b < 2r$ gilt, gibt es im Falle $\alpha < 90°$ für $b > a$ zwei zueinander inkongruente Dreiecke, für $b = a$ genau ein Dreieck (das andere artet zu einer Strecke aus) und für $b < a$ ebenfalls genau ein Dreieck, da wegen $2\alpha < 180°$ der Winkel $\angle BAC$ in derselben Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen muss.

Im Falle $90° < \alpha < 180°$ gibt es für $b \geq a$ kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt, und für $b < a$ genau ein Dreieck, da wegen $180° < 2\alpha < 360°$ der Winkel $\angle BAC$ nicht in der gleichen Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen kann. Im Falle $b > 2r$ gibt es kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt.

Die Entscheidung, welcher der drei Fälle eintritt, insbesondere also, ob es überhaupt ein solches Dreieck gibt, kann in den Fällen $\alpha \neq 90°$ auf geometrischem Wege erst nach der Konstruktion des stets konstruierbaren Hilfsdreiecks $\triangle BMC$ gefällt werden.

Aufgaben der III. Runde 1965 gelöst von Eckart Keller

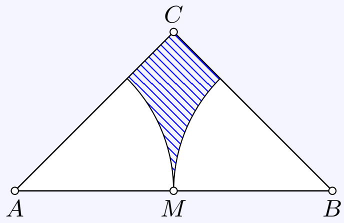
5.8 VI. Olympiade 1966

5.8.1 I. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060811

In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\angle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).

Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!



Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit I_{F_1}, die Flächeninhalte der im Innern des Dreiecks gelegenen Kreisausschnitte mit I_{F_2} und I_{F_3}, dann gilt für den gesuchten Flächeninhalt I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3})$$

Bezeichnet M den Mittelpunkt von AB, so hat das Dreieck $\triangle ABC$ die Höhe MC, ihre Länge beträgt $\frac{7}{2}$ cm. Daher gilt für I_{F_1}:

$$I_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2}\text{cm}^2 = \frac{49}{4}\text{cm}^2$$

Die beiden Kreisausschnitte mit den Flächeninhalten I_{F_2} und I_{F_3} lassen sich zu einem Viertelkreis zusammenlegen. Also gilt $I_{F_2} + I_{F_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{4}\pi\text{cm}^2$. Mithin gilt für I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3}) = \frac{49}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2 \approx 2{,}63\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche beträgt also $I_F \approx 2{,}63\text{cm}^2$.

Aufgabe 2 - 060812

Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, dass die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Aus x kg Milch erhält man $\frac{21}{100}x$ kg Rahm und daraus $\frac{23}{100} \cdot \frac{21}{100}x$ kg Butter.

Aus der Gleichung $\frac{23 \cdot 21}{100 \cdot 100}x = 1$ folgt $x = \frac{10000}{21 \cdot 23} = \frac{10000}{483}$.

Wegen $20{,}7 < \frac{10000}{483} < 20{,}8$ ist bei Berücksichtigung von genau einer Stelle nach dem Komma 20,8 kg Milch die kleinste Menge, die ausreicht, um mit dem angegebenen Verfahren 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 3 - 060813

Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wie viel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

B hat zunächst einen Vorsprung von 500 m. In der gleichen Zeit, in der A 500 m zurücklegt, legt B nur 450 m zurück. A holt bei also 50 m auf. Insgesamt muss er 500 m aufholen. Das schafft er unter den Bedingungen der Aufgabe in genau 5 Runden.

Die Gesamtlänge des Weges beträgt bei 5 Runden 5 km. Daher wird B von A in 6 Minuten eingeholt.

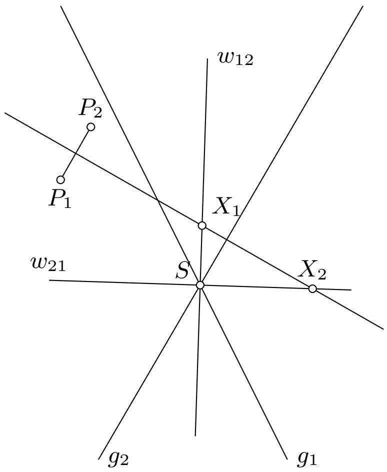
Aufgabe 4 - 060814
In der Ebene ϵ liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!



1. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S. Dann liegen die gesuchten Punkte X wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12}, zu P_1P_2 und wegen (2) auf einer der beiden Halbierenden w_{12} bzw. w_{21} der Schnittwinkel von g_1 und g_2. Für die Lage von s_{12} sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1.1: Es sei $s_{12} \parallel w_{12}$ oder $s_{12} \parallel w_{21}$.

Dann gibt es für $g_{12} \neq w_{12}$ bzw. für $s_{12} \neq w_{21}$ jeweils genau einen derartigen Punkt X, nämlich den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{21} bzw. den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{12}.
Für $s_{12} = w_{12}$ bzw. $s_{12} = w_{21}$ erfüllen alle Punkte von w_{12} bzw. von w_{21} und nur diese die Bedingungen (1) und (2).

Fall 1.2: Es sei s_{12} zu keiner der beiden Winkelhalbierenden parallel.

Dann schneidet s_{12} entweder beide Winkelhalbierenden im Punkt S, und genau S erfüllt (1) und (2), oder s_{12} hat mit w_{12} den Punkt X_1 und mit w_{21} den Punkt X_2 gemeinsam ($X_1 \neq X_2$), wobei X_1 und X_2 und nur diese Punkte die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

2. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 sind zueinander parallel. Die gesuchten Punkte X liegen dann wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12} zu P_1P_2 und wegen (2) auf der Mittelparallelen m_{12} zu g_1 und g_2. Verläuft s_{12} nicht parallel zu m_{12}, so gibt es genau einen Punkt X, den Schnittpunkt von s_{12} und m_{12}, der (1) und (2) erfüllt. Für $s_{12} \parallel m_{12}$ erfüllen alle Punkte der Mittelparallelen und nur diese (1) und (2), falls $s_{12} = m_{12}$ gilt. Andernfalls gibt es keinen derartigen Punkt.

Aufgaben der I. Runde 1986 gelöst von Manuela Kugel

5.8.2 II. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060821
Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

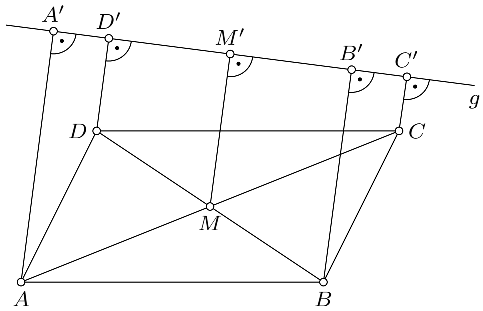
Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z.B. A) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten B eindeutig bestimmt ist. Der Kasten A kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten.

Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an:

	A	B	
1.	r r r	r s w w	Dabei bedeuten:
2.	r r s	r r w w	r - rote Kugel
3.	r r w	r r s w	s - schwarze Kugel
4.	r s w	r r r w	w - weiße Kugel
5.	r w w	r r r s	
6.	s w w	r r r r	

Aufgabe 2 - 060822
In der Ebene ϵ liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade g.

Beweise, dass die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!



Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie MM' gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie MM' ist nach einem bekannten Satz

(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken AA' und CC' und nach dem gleichen Satz

(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken BB' und DD'. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 3 - 060823
18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

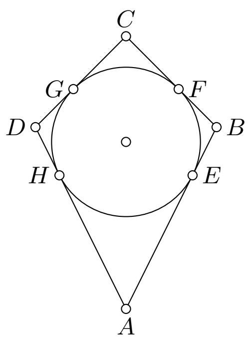
Ist x die erste Zahl und y die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung:

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100}$$

also $6x = 5y$. Daraus gewinnt man die Proportion $x : y = 5 : 6$.
Durch Rückschluss erkennt man, dass unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt ist.

Aufgabe 4 - 060824
Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.



Behauptung: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beweis:
Die Berührungspunkte an den Kreis seien E, F, G und H. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gleichlang sind, gilt:

$$\overline{AE} = \overline{AH} \qquad \overline{BE} = \overline{BF} \qquad \overline{CG} = \overline{CF} \qquad \overline{DG} = \overline{DH}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} &= \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}, \qquad \text{d.h.} \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{BC} + \overline{AD}. \end{aligned}$$

Lösungen der II. Runde 1966 übernommen aus [5]

5.8.3 III. Runde 1966, Klasse 8

Aufgabe 1 - 060831
Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

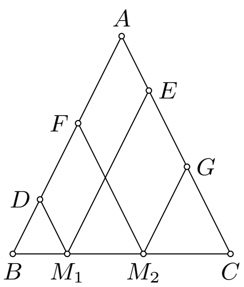
Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw. O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= 2 : 6 = 1 : 3 \\ O_1 : O_2 &= 6a_1^2 : 6a_2^2 = 24 : 216 = 1 : 9 \\ V_1 : V_2 &= a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 - 060832
Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, dass der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!



Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig, und es gilt:

$$\overline{BD} = \overline{M_1D} \tag{1}$$

Weiterhin gilt:

$$\overline{M_1E} = \overline{AD}, \tag{2}$$

da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Aus (1) und (2) folgt, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist.

Entsprechend zeigt man, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, dass die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

Aufgabe 3 - 060833
Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, dass genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wie viel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

In je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3000 g Lösung

$$30 \cdot 7{,}2 \text{ g} = 216 \text{ g}$$

Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind also auch in der neuen Lösung von 2400 g genau 216 g Kochsalz enthalten. Mithin enthält die neue Lösung in je 100 g eine Kochsalzmenge von genau 216 g : 24 = 9 g, d.h., die Lösung ist 9-prozentig.

Aufgabe 4 - 060834
Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, dass jeder Schlüssel zu genau einem Koffer passt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, dass er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, dass für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist
a) die kleinste
b) die größte
Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, dass genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

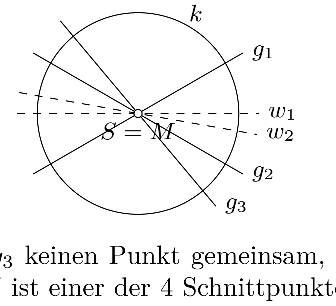
Nach Aufgabenstellung müssen an dem Koffer, an dem die erste Probe durchgeführt wurde, genau so viel Proben vorgenommen werden, bis zu ihm der passende Schlüssel ermittelt ist. Das ist frühestens nach einer Probe, spätestens nach 9 Proben der Fall.

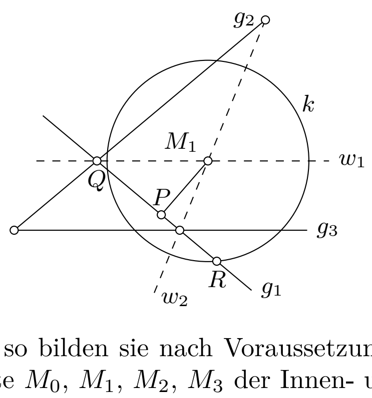
Sodann ist eine entsprechende Überlegung für die restlichen 9 Koffer und Schlüssel durchzuführen usw. bis zu 2 Koffern und Schlüsseln. Für diese sind mit genau einer Probe alle Zusammengehörigkeiten ermittelt. Also ist die kleinste Probenzahl der gesuchten Art $1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$, die größte Probenzahl der gesuchten Art $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$.

Aufgabe 5 - 060835
In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3.
   a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\angle(w,g_3) \cong \angle(g_1,w) \cong \angle(w,g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$. Somit ergibt sich $M = S$. (erste Abbildung)





   b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D, und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.

   Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$.
   b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q.

III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.

Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3 gleichweit entfernt ist.

IV. Die Konstruktion II ergibt a) genau einen Kreis, b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

Aufgabe 6 - 060836

Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.

b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a-b)(a+b)$ mit $a = 40$ und $1 \leq b \leq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als 2000^5.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} 2000^5 &= 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \\ &= 32 \cdot 1000000000000000 \end{aligned}$$

eine 17stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

Lösungen der III. Runde 1966 übernommen aus [5]

5.9 VII. Olympiade 1967

5.9.1 I. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070811
Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten musste, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

> ”Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter.”

Später stellte sich heraus, dass Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, dass alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Die drei Aussagen kann man mit der Schreibweise Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B) wie folgt darstellen:

$$T \neq 1 \quad (1) \qquad ; \qquad R \neq 2 \quad (2) \qquad ; \qquad B = 2 \quad (3)$$

Wenn Elke genau eine Aussage korrekt und genau zwei falsch gemacht hat, dann müssen folgende drei Fälle unterschieden werden:

1.Fall: (1) ist richtig und (2), (3) sind falsch: $T \neq 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*) und (2*) folgt (4*) $T = 3$. Daraus folgt (5*) $B = 1$. Alle drei Aussagen (1*), (2*), (3*) sind erfüllt.

2.Fall: (2) ist richtig und (1), (3) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R \neq 2 \quad (2*) \quad ; \quad B \neq 2 \quad (3*)$
Aus (1*), (2*) und (3*) folgt, dass niemand Zweiter sein kann. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.

3.Fall: (3) ist richtig und (1), (2) sind falsch: $T = 1 \quad (1*) \quad ; \quad R = 2 \quad (2*) \quad ; \quad B = 2 \quad (3*)$
Aus (2*) und (3*) folgt, dass es zwei Zweite gibt. Dies ist ein Widerspruch, daher ist der Fall nicht erfüllbar.
Demzufolge gibt es exakt eine Lösung: Bernd war Erster, Rainer Zweiter und Thomas Dritter.

Aufgabe 2 - 070812
Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Eine 10-, 30- und 25-%ige Salzlösung a, b und c der Menge 1 (Einheitsmenge) kann man wie folgt darstellen, wenn s der Anteil Salz und w der Anteil Wasser ist:

$$a = 0{,}1s + 0{,}9w \qquad ; \qquad b = 0{,}3s + 0{,}7w \qquad ; \qquad c = 0{,}25s + 0{,}75w$$

Wenn in der 25%igen Lösung c das Mischungsverhältnis aus k Teilen 10%iger und l Teilen 30%iger Salzlösung besteht, kann dies als Gleichung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} c &= k \cdot a + l \cdot b \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= k \cdot (0{,}1s + 0{,}9w) + l \cdot (0{,}3s + 0{,}7w) \\ 0{,}25s + 0{,}75w &= (0{,}1k + 0{,}3l) \cdot s + (0{,}9k + 0{,}7l) \cdot w \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich bedeutet dann:

$$0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}3l \qquad ; \qquad 0{,}75 = 0{,}9k + 0{,}7l$$

Dies ergibt nach Multiplizieren der ersten Gleichung mit 9 und anschließendem Abziehen der 2. Gleichung davon: $1{,}5 = 2l$ bzw. $l = 0{,}75$. Dies ergibt in der ersten Gleichung eingesetzt: $0{,}25 = 0{,}1k + 0{,}225$ bzw. $k = 0{,}25$.
Damit ergibt sich das gesuchte Verhältnis $k : l$ wie folgt: $0{,}25 : 0{,}75$ bzw. $1 : 3$.

Aufgabe 3 - 070813
Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, dass jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Es kann die Formel der konstanten Geschwindigkeit angewandt werden: $v = s : t$ bzw. umgestellt: $t = s : v$.

Betrachtet man den Zeitpunkt 1, an dem der 1. Läufer (a) ins Ziel kommt, dann gilt für den Zweiten (b) und Dritten (c): $t_1 = s_{b_1} : v_{b_1} = s_{c_1} : v_{c_1}$,
wobei $s_{b_1} = 100m - 10m = 90m$ und s_{c_1} die gesuchte Wegstrecke ist, die c zum Zeitpunkt 1 des Zieleinlaufes hinter sich gebracht hatte.

Zum Zeitpunkt 2, an dem der Zweite Läufer (b) das Ziel erreicht gilt analog: $t_2 = s_{b_2} : v_{b_2} = s_{c_2} : v_{c_2}$, wobei $s_{b_2} = 100$ m und $s_{c_2} = 100m - 10m = 90m$ sowie $v_b := v_{b_1} = v_{b_2}$ und $v_c := v_{c_1} = v_{c_2}$ gilt.

Nun werden die Gleichungen des 1. und 2. Zeitpunktes zusammengeführt:

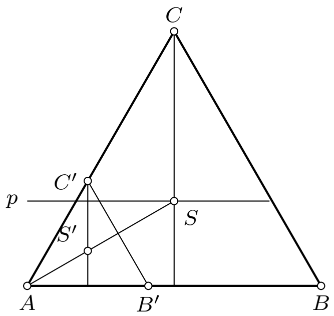
$$s_{c_1} \quad = \quad s_{b_1} \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{v_c}{v_b} = 90m \cdot \frac{s_{c2}}{s_{b_2}} = 90m \cdot \frac{90m}{100m} = 81m.$$

Demzufolge war der Dritte noch $100m - 81m = 19m$ vom Ziel entfernt als der Erste das Ziel erreicht hatte.

Aufgabe 4 - 070814
Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

I. Analyse:
In einem gleichseitigen Dreieck fallen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt zusammen, d.h. der Höhenschnittpunkt ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Ferner sind im gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel 60° groß.

Wenn man irgendein gleichseitiges Dreieck konstruiert ist dieses zum gesuchten Dreieck ähnlich. Dann kann man auf alle Seiten und den Inkreisradius den Strahlensatz anwenden.



II. Konstruktion:
(1) Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $AB'C'$, indem zwei Punkte A und B' festgelegt werden. Um beide Punkte wird ein Kreis mit dem Abstand AB' gezeichnet. Der Schnittpunkt beider Kreise werde C' genannt.

(2) Es wird ein Punkt S' konstruiert aus dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten für die Dreiecksseiten AB' und $B'C'$. Er sei S' genannt

(3) Eine Parallele zu AB' mit Abstand ρ wird in der Halbebene, in der C' liegt, konstruiert. Sie sei p genannt und schneidet die Gerade durch AS' in S.

(4) Die Senkrechte durch S auf der Geraden durch AB' schneidet die Gerade durch AC' im Punkt C.

(5) Zuletzt wird die Gerade durch $B'C'$ durch den Punkt C parallel verschoben und schneidet die Gerade durch AB' in B. Das Dreieck ABC ist das gesuchte gleichseitige Dreieck mit dem Inkreisradius ρ.

III. Beweis:
Das gesuchte Dreieck erfüllt die Bedingungen, dass es gleichseitig ist und einen Inkreisradius von ρ besitzt, denn:

Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle ABC$ zum Dreieck $\triangle AB'C'$ ähnlich mit dem gleichen Winkel $\angle BAC$

und nach Strahlensatz, da $B'C' \parallel BC$ und folglich $AC' : AC = AB' : AB = B'C' : BC$ ist. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig.

Da S' der Punkt im gleichseitigen Dreieck ist, der gleichzeitig Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist, so ist auch S' als Schnittpunkt der Höhe durch C sowie der Winkelhalbierenden von Winkel $\angle BAC$ derjenige Punkt, der im Dreieck $\triangle ABC$ Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist. Folglich ist der Abstand von S zu AB der Inkreisradius, der nach Konstruktion wiederum die Größe ρ hat.

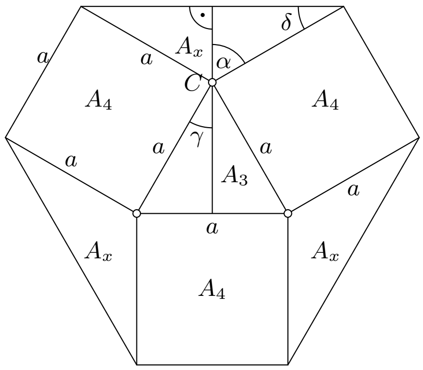
IV. Existenz und Eindeutigkeit:
Die Konstruktionsschritte (1), (2) und (3) sind eindeutig ausführbar. Da AC' nicht senkrecht auf AB' steht, gibt es genau einen Schnittpunkt C, der nach Schritt (4) konstruiert werden kann. Auch der Schritt (5) ist eindeutig durchführbar.

Aufgaben der I. Runde 1967 gelöst von Manuela Kugel

5.9.2 II. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070821
Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, dass die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.



In der nebenstehenden Zeichnung sieht man, dass sich der Flächeninhalt des Sechsecks A_6 wie folgt zusammensetzt (der Flächeninhalt A_x bezeichnet dabei die Fläche des Dreiecks zwischen den Quadraten wie in der Zeichnung ersichtlich):

$$A_6 = A_3 + 3 \cdot A_4 + 3 \cdot A_x \tag{1}$$

Die rot eingezeichneten Linien teilen die Dreiecke A_3 und A_x in sämtlich zueinander kongruente Dreiecke mit einem rechten Winkel, einer Hypotenuse der Größe a und einem weiteren gleichgroßen Winkel γ. Letzteres kann wie folgt begründet werden: um den Punkt C setzt sich der Vollwinkel ($= 360°$) aus zwei Winkeln zu je $90°$ (in den Quadraten) sowie je zwei Winkel $\gamma = 30°$ und α zusammen, d.h. $\alpha + \gamma = 90°$ bzw. in dem Dreieck mit α gilt demzufolge $\delta = \gamma$.

Damit und mit der Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks gilt:

$$A_3 = A_x = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \tag{2}$$

Ferner gilt für das Quadrat:

$$A_4 = a^2 \tag{3}$$

Mit (2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt sich: $A_6 = 4 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4$ woraus sich $n = 4$ und $m = 3$ als mögliche Lösung zeigt.

Aufgabe 2 - 070822
Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

(I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1') auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.

(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1') und (2).
Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Der Beweis folgt aus (I).

Aufgabe 3 - 070823
Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurf zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Die Augenzahl $3n + 4$ muss durch n teilbar sein.
$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse.

$n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann.
Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d.h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt.
Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d.h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt.
Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

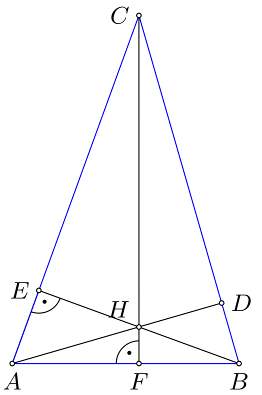
Aufgabe 4 - 070824
Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leq r \leq n - 1$, es gelte also $g = qn + r$ (q ganzzahlig).
Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Lösungen der II. Runde 1967 übernommen von [5]

5.9.3 III. Runde 1967, Klasse 8

Aufgabe 1 - 070831
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\angle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, dass der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck, die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt.
Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\angle AEB$ und dem Winkel $\angle BAE \cong \angle BAC$.
Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.
(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F.

Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.

(III) Der Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck ABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

Aufgabe 2 - 070832
Unter einer Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: z.B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000!

Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und $999 - a$ $(0 \leq a \leq 499)$ zu einem Paar zusammen. Es sei

$$a = \alpha \cdot 10^3 + \beta \cdot 10 + \gamma \qquad (*)$$

mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 9$ gilt.
Dann ist die Quersumme von a gleich $\alpha + \beta + \gamma$. Ferner ist

$$999 - a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma = (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma)$$

und wegen (*) gilt auch $0 \leq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leq 9$ und $9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma$ sind ganz.
Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann

$$(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27$$

Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfassten Zahlen $500 \cdot 27 = 13500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren.
Die gesuchte Summe beträgt mithin 13501.

Aufgabe 3 - 070833
Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$ ist.

(I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft, dann gilt

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

hieraus folgt $a^2 + ax = b^2 - bx$, also $(a+b)x = b^2 - a^2$. Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter

$$x = \frac{b^2 - a^2}{a+b} = b - a$$

Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.

(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, dass sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt.
Aus $x = b - a$ folgt $(a+b)x = b^2 - a^2$, hieraus $a(a+x) = b(b-x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x (= a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter

$$\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 4 - 070834
Es sei a eine positive ganze Zahl.

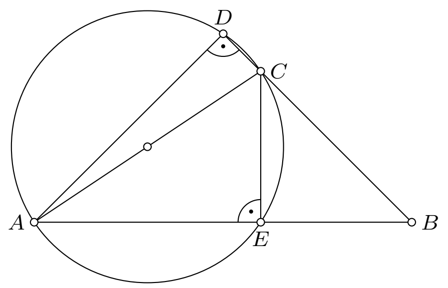
Zeige, dass der Bruch $\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

(I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade.
Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade.
Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)

(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Lässt a bei Division durch 3 den Rest 2, so lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht.

Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

Aufgabe 5 - 070835
Beweise:
Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.



In dem Dreieck $\triangle ABC$ seien o.B.d.A. A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte. Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D.
Folglich ist das Viereck $AECD$ ein Sehnenviereck.

Aufgabe 6 - 070836
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

(I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muss sie größer als 9 sein. Daraus folgt, dass ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muss als sie selbst.

Wegen der 2. Bedingung besagt dies, dass bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muss ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.

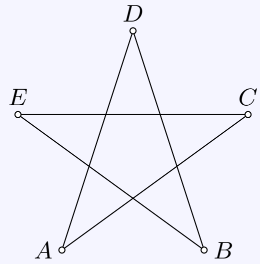
(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein.
Daraus ergibt sich, dass die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47.
Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

Lösungen der III. Runde 1967 übernommen von [5]

5.10 VIII. Olympiade 1968

5.10.1 I. Runde 1968, Klasse 8

Aufgabe 1 - 080811

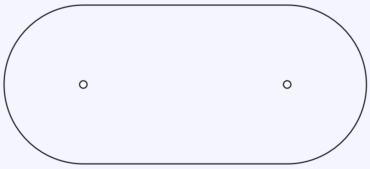


Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ACE$!

Es sei M der Umkreismittelpunkt des Fünfecks $ABCDE$. Der Winkel $\angle ACE$ ist ein Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AME$ und deshalb halb so groß wie dieser.
Weil das Fünfeck regelmäßig ist, ist dieser Zentriwinkel 72° groß. Also hat der Winkel $\angle ACE$ eine Größe von 36°.

Aufgabe 2 - 080812



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10000-m-Lauf beobachten wir, dass ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wie viel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Im Folgenden werden die Maßzahl des Kreisumfanges, die Maßzahl des Kreisdurchmessers und die Maßzahl des zurückgelegten Weges mit u, d bzw. s bezeichnet. Dann gilt

$$u = 400 - 180 = 220 \qquad (1)$$

Wegen $d = \frac{u}{\pi}$ ist $d \approx \frac{220 \cdot 7}{22} = 70$.
Ferner besteht die 2. Bahn aus zwei zu den Halbkreisen der 1. Bahn jeweils konzentrischen Halbkreisen von um 1 m größerem Radius sowie aus zwei Strecken von je 90 m Länge. Also gilt

$$s = 72 \cdot \pi + 2 \cdot 90 \quad ; \quad s \approx 226 + 180 = 406 \qquad (2)$$

Der Läufer legt daher während dieser Runde etwa 6 m mehr zurück.

Aufgabe 3 - 080813
Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und nummerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den "Stich" und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen "Stichen" ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei "Stiche" gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, dass jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Wir bezeichnen im folgenden die Karten durch die auf ihnen stehenden Zahlen. Es gibt insgesamt 20 Möglichkeiten, aus 6 Karten 3 verschiedene auszuwählen, nämlich:

1, 2, 3	1, 2, 4	1, 2, 5	1, 2, 6
	1, 3, 4	1, 3, 5	1, 3, 6
		1, 4, 5	1, 4, 6
			1, 5, 6
	2, 3, 4	2, 3, 5	2, 3, 6
		2, 4, 5	2, 4, 6
			2, 5, 6
		3, 4, 5	3, 4, 6
			3, 5, 6
			4, 5, 6

Besitzt ein Spieler die Karten 5 und 6, dann erhält er stets (mindestens) 2 Stiche. Das gilt auch, wenn er die Karten 3, 4, 5 besitzt.
Ferner gewinnt er stets, wenn er die Karten 4 und 6, aber nicht 5 hat; denn hierzu braucht er z. B. nur zuerst die dritte Karte, die er außer 4 und 6 noch hat, aufzulegen. Auf diese Weise kann er stets erzwingen, dass entweder diese Karte oder seine 4 einen Stich gewinnt; ein weiterer Stich ist ihm durch die 6 sicher.
Schließlich gewinnen auch stets die Karten 2, 3, 6, da die 1 des Gegenspielers stete gestochen werden kann. Es muss nur so gespielt werden, dass das nicht mit der 6 geschieht, d. h., der Besitzer der 6 darf diese, wenn er auszuspielen beginnt, nicht als erste Karte ausspielen.

Verlieren muss auf jeden Fall daher der Spieler, der eine der folgenden Kartenzusammenstellungen besitzt:

$$1,2,3 \qquad 1,2,4 \qquad 1,2,5 \qquad 1,2,6 \qquad 1,3,4 \qquad 1,3,5 \qquad 1,4,5 \qquad 2,3,4 \qquad 2,3,5$$

Besitzt ein Spieler aber die Karten 1, 3, 6 bzw. 2, 4, 5, dann verliert er, wenn er zuerst ausspielen muss. Im 1. Fall sticht der Gegenspieler stets die 1, und zwar (wenn sie als erste Karte eines SStichesäusgespielt wird) mit der 2, während er mit einer der Karten 4 und 5 die 3 stechen kann. Im 2. Fall darf der Gegenspieler nur (mit der 3) stechen, falls der Anspielende die 2 anspielt; andernfalls gibt er den ersten Stich durch Zugeben der 1 ab und kann dann bei dem erneuten Anspiel stets mit der Karte stechen, die die ausgespielte Karte gerade noch sticht. Dadurch erhält er aber auch noch den letzten Stich.
Der zuerst Anspielende hat also nur genau 9 (von 20) Möglichkeiten, eine für ihn günstige Kartenzusammenstellung zu erhalten.
Daher ist es nicht günstig für Gerd, wenn er stets zuerst ausspielt.

Aufgabe 4 - 080814
Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a + b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a + 4b$ durch 7 teilbar!

Nach der Voraussetzung gilt $100a + b = 7k$ mit ganzem k. Um $4b$ zu erhalten, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit 4 und bekommt $400a + 4b = 4 \cdot 7k$.
Um auf den Term $a + 4b$ zu kommen, formt man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} 399a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ 7 \cdot 57a + a + 4b &= 4 \cdot 7k \\ a + 4b &= 7(4k - 57a) \end{aligned}$$

Dieser Term $7(4k - 57a)$ ist durch 7 teilbar. Also ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Lösungen der I. Runde 1968 übernommen von [5]

5.10.2 II. Runde 1968, Klasse 8

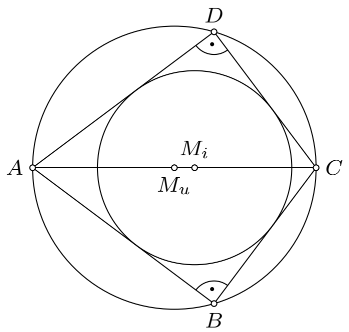
Aufgabe 1 - 080821

a) Beweise folgende Aussage:

Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, dass diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!



a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.

Beweis:
Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (sss). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i.
Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand.

Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.

Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$
In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.

2. Fall: $\angle BAD = \angle BCD = 90°$
In diesem Fall folgt aus

$$\angle ABC + \angle ADC = 360° - (\angle BAD + \angle BCD) = 180°$$

$\angle ABC = \angle ADC$ (dies wegen $\triangle ABC \cong \triangle ADC$), dass $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ gilt, also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.

b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, dass er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.

(Bemerkung: Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Vierecksseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)

c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels ABC und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d.h., M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 2 - 080822
Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer der ursprünglichen Zahl werde mit a, b bzw. c bezeichnet. Dann ist diese Zahl z_1 als $100a+10b+c$ und die zweite Zahl z_2 als $100c+10b+a$ darstellbar. Für die Differenz $d = z_1 - z_2$ ergibt sich

$$d = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Genau die folgenden natürlichen Zahlen sind also Teiler von d:
(1) Alle natürlichen Teiler von 99, d.s. 1, 3, 9, 11, 33, 99,
(2) alle natürlichen Teiler von $|a - c|$,
(3) alle Produkte aus je einer unter (1) genannten mit je einer unter (2) genannten Zahl.

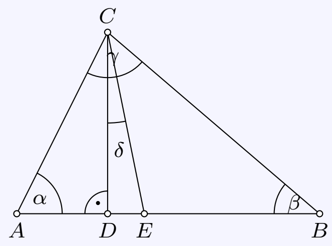
Ausführliche Aufzählung:
Für $|a - c|$ kommen (wegen $0 < a \leq 9$; $0 < c \leq 9$; a, c ganzzahlig) nur die Werte $0, ..., 8$ in Frage; man erhält:

$\|a-c\|$	natürliche Teiler von d
0	alle natürlichen Zahlen
1	1,3,9,11,33,99
2	1,2,3,6,9,11,18,22,33,66,99,198
3	1,3,9,11,27,33,99,297
4	1,2,3,4,6,9,11,12,18,22,33,36,44,66,99,132,198,396
5	1,3,5,9,11,15,33,45,55,99,165,495
6	1,2,3,6,9,11,18,22,27,33,54,66,99,198,297,594
7	1,3,7,9,11,21,33,63,77,99,231,693
8	1,2,3,4,6,8,9,11,12,18,22,24,33,36,44,66,72,88,99,132,198,264,396,792

Aufgabe 3 - 080823

Beweise folgenden Satz:

Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d.h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.



Es sei o.B.d.A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\triangle ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben.
Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig.

Sein nun $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\angle DEC \cong \angle AEC$, d.h. $90° - \delta = 180° - (\alpha + \frac{\gamma}{2}$, also

$$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90° = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Aufgabe 4 - 080824
Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{km}{h}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

In der Zeit $t_i = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte.
Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\frac{km}{h}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x+25)\frac{km}{h}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann: $x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}$.

Daraus erhält man $x = \frac{5 \cdot 55}{60} = 45\frac{5}{6}$.

a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\frac{km}{h}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\frac{km}{h}$.

b) Wegen

$$\frac{5 \cdot 55}{60} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$$

beträgt die durchgefahrene Wegstrecke $s \approx 64{,}9$ km.

Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wie eine Probe zeigt.

Lösungen der II. Runde 1968 übernommen von [5]

5.10.3 III. Runde 1968, Klasse 8

Aufgabe 1 - 080831
Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

Es genügt zu beweisen, dass in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreiecksseite liegt. Das trifft auf den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.

Beweis:

(1) Ein größter Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ liege o.B.d.A bei C.

Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade g durch A und B gefällten Lotes sei D.

(2) Wir nehmen (o.B.d.A) an, D liege auf g außerhalb der Seite AB auf der anderen Seite von B bezüglich A oder in A.

Dann ist der Winkel $\angle BAC$ als Außenwinkel im Dreieck $\triangle DCA$ oder als rechter Winkel $\angle BDC$ nicht spitz.

Wegen (1) kann aber keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht. Annahme (2) ist folglich falsch. w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 080832
Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, dass in jedem Fall (d.h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Zum Beweis wird ein Verfahren angegeben, das nach drei Wägungen sicher zum Ziel führt:
Wir bezeichnen die Kugeln mit $K_1 ... K_5$.
Bei der ersten Wägung lege man je eine Kugel, etwa K_1 und K_2, auf eine Waagschale, bei der 2. Wägung nehme man zwei weitere, bisher nicht gewogene Kugeln, etwa K_3 und K_4. Dann können die ersten beiden Wägungen folgende Resultate haben (in der Übersicht ist Gleichgewicht mit Gl. und nicht Gleichgewicht mit n. Gl. symbolisiert):

	1. Wägung	2. Wägung
a)	Gl.	Gl.
b)	Gl.	n. Gl.
c)	n. Gl.	Gl.
d)	n. Gl.	n. Gl.

Im Fall a) vergleiche man in der 3. Wägung eine Kugel der 1. Wägung, etwa K_1 mit der 5. Kugel. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_3 und K_4 die gesuchten Kugeln, andernfalls sind es K_1 und K_2.

Die Fälle b) und c) lassen sich durch Umnummerierung aufeinander zurückführen. Es genügt also, einen dieser Fälle zu betrachten, es sei der Fall b).
Man vergleiche in der dritten Wägung eine der beiden Kugeln K_1 oder K_2 mit einer der Kugeln K_3 oder K_4.
Es werde z.B. K_1 mit K_3 verglichen. Herrscht Gleichgewicht, so sind K_4 und K_5 die gesuchten Kugeln, herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_3 und K_5.

Im Fall d) vergleiche man schließlich eine der gewogenen Kugeln, etwa K_1, mit der 5. Kugel. Es sei o.B.d.A. die Kugel K_1 leichter als K_2. Ebenso sei o.B.d.A. K_3 leichter als K_4.
Herrscht nun beim Vergleich mit K_5 Gleichgewicht, so sind K_2 und K_4 die gesuchten Kugeln; herrscht kein Gleichgewicht, so sind es K_1 und K_3. In jedem Falle (und andere Fälle gibt es nicht) hat man die beiden gesuchten Kugeln mit drei Wägungen ermittelt.

Aufgabe 3 - 080833
Es ist zu beweisen: Lässt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so lässt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, ... lassen bei Division durch 9 jeweils den Rest 1, weil der Vorgänger jeder dieser natürlichen Zahlen durch 9 teilbar ist; die Zahlen 2, 20, 200, 2000, ..., die sich als 1 + 1, 10 + 10, 100 + 100, ... schreiben lassen, ergeben jeweils den Rest 2; die Zahlen 3, 30, 300, ... den Rest 3 usw., die Zahlen 8, 80, 800, ... den Rest 8, und 9, 90, 900, ... schließlich den Rest 0.

Nun lässt sich jede natürliche Zahl z in der Form

$$z = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_n \cdot 10n$$

schreiben (mit ganzen Zahlen a_i, für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt). Die Quersumme dieser Zahl lautet dann

$$Q(z) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

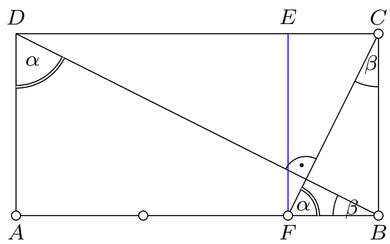
Bei Division durch 9 lässt nach dem Obigen $a_0 \cdot 10^0$ den gleichen Rest wie a_0, $a_1 \cdot 10^1$ den gleichen Rest wie a_1, ..., $a_n \cdot 10^n$ den gleichen Rest wir a_n.

Die Summe z der $a_i \cdot 10^i$ lässt daher bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Summe $Q(z)$ der a_i.

Aufgabe 4 - 080834
Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ ($b < a$) ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele. Dann gilt:
$ABCD \sim BCEF$ und damit auch: $\triangle ABD \sim \triangle BCF$. Daraus folgt: $\angle ABD \cong \angle BCF$.



II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion:
Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\angle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.

III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt:
$AD : BF = AB : BC$ und mithin $ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\angle ABD$ zwischen 0° und 90° liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\triangle CFB$. Wegen (III) gilt

$$\frac{BC}{BF} = \frac{a}{b} > 1$$

also $BC > BF$, und F liegt zwischen A und B.

Aufgabe 5 - 080835
Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: "Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

a) Fritz sollte rechnen: $z \cdot z = z^2$. Er rechnete: $(z-5)(z+5) = z^2 - 25$. Sein Weg ist also falsch.

b) Der absolute Fehler beträgt in jedem Falle: -25.
Er ist also nicht je nach der Zahl z verschieden, sondern konstant.

Aufgabe 6 - 080836
Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

Wegen (1) gilt $b+d > b+c$, und weil $a+d < b+c$ ist, findet man $a+d < b+d$ und daraus $a < b$. (4)
Durch Subtraktion erhält man aus (2) und (3):

$$d - b < b - d \quad \rightarrow \quad 2d < 2b \quad \rightarrow \quad d < b \tag{5}$$

Aus (2) erhält man $b - d = c - a$, woraus sich wegen $b > d$ die Aussage (6) $c > a$ ergibt.
Wegen (4), (5) und (6) ist die gesuchte Reihenfolge $b > d > c > a$.

Lösungen der III. Runde 1968 übernommen von [5]

5.11 IX. Olympiade 1969

5.11.1 I. Runde 1969, Klasse 8

Aufgabe 1 - 090811
Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Die Formel für die Anzahl z der Diagonalen in einem konvexen n-Eck lautet: $z = \frac{n(n-3)}{2}$.

Begründung: Von jedem Eckpunkt geht je eine Diagonale zu denjenigen Eckpunkten, die von dem genannten Eckpunkt verschieden und auch nicht zu ihm benachbart sind. Daher gehen von jedem Eckpunkt genau $(n-3)$ Diagonalen aus.
Addiert man diese für alle n Eckpunkte gebildeten Anzahlen, so hat man jede Diagonale des n-Ecks genau 2 mal gezählt. Daher gilt $2z = n(n-3)$, woraus die behauptete Formel folgt.

a) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt: $z = 3n \to 3n = \frac{n(n-3)}{2} \to 9n = n^2$
Daraus folgt wegen $n \neq 0$: $n = 9$.
Umgekehrt: Für $n = 9$ ergibt sich $z = 27 = 3n$. Also haben alle 9ecke und nur diese die Eigenschaft a).

b) Angenommen, es gibt ein n-Eck der genannten Art. Dann gilt:

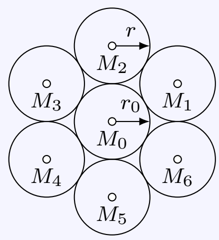
$$z = \frac{n}{3} \to \frac{n}{3} = \frac{n(n-3)}{2} \to 11n = 3n^2$$

Es gibt also kein n-Eck mit der Eigenschaft b), weil die letzte Bedingung für keine positive ganze Zahl n erfüllbar ist.

Aufgabe 2 - 090812

Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!



Angenommen, M_0 sei der Mittelpunkt und r der Radius eines Kreises k_0, zu dem 6 Kreise der gesuchten Art existieren; deren Mittelpunkte seien $M_1, M_2, ..., M_6$. Dann entstehen 6 kongruente gleichschenklige Dreiecke

$$\triangle M_1M_0M_2, \quad \triangle M_2M_0M_3, \quad ... \quad \triangle M_6M_0M_1 \tag{1}$$

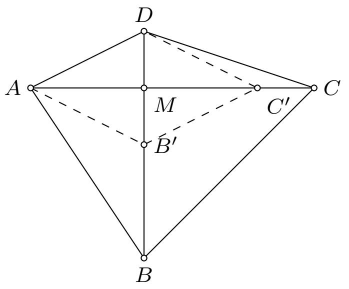
also wird $\angle M_1M_0M_2 \cong \angle M_2M_0M_3 \cong ... \cong \angle M_6M_0M_1$, und da die Summe dieser Winkel 360° beträgt, hat jeder von ihnen eine Größe von 60°. Die Dreiecke (1) sind somit gleichseitig, und es folgt $r_0 + r = 2r$, also $r_0 = r$.

Umgekehrt sind für $r_0 = r$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Denn wählt man $M_0, M_1, ..., M_6$ so, dass $\triangle M_1M_0M_2, \quad \triangle M_2M_0M_3, \quad ... \quad \triangle M_5M_0M_6$ gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $2r$ sind, so wird $\triangle M_6M_0M_1$ gleichschenklig, mit $\angle M_6M_0M_1 = 360° - 5 \cdot 60°$, also ebenfalls gleichseitig.
Daher berühren sich die Kreise um $M_0, M_1, ..., M_6$ mit dem Radius r in der vorgeschriebenen Weise.

Aufgabe 3 - 090813
a) Beweise folgenden Satz:
Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

a) Voraussetzung: $ABCD$ sei ein ebenes Viereck mit $AB = BC = CD = DA$.
Behauptung: $AC \perp DB$.
Beweis:
Wegen $AB = CB$ liegt B auf der Mittelsenkrechten von AC, wegen $AD = CD$ ebenso auch D. Daher ist die Gerade durch B und D die Mittelsenkrechte von AC, insbesondere gilt also $BD \perp AC$.

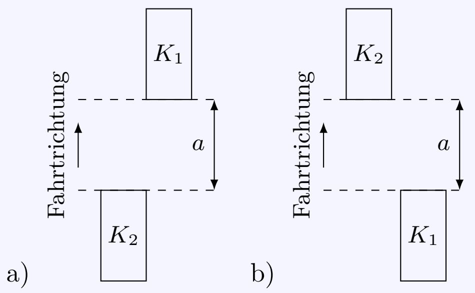


b) Die formale Umkehrung lautet: Wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann sind alle Seiten gleichlang (Rhombus).
Die formale Umkehrung ist kein (wahrer) Lehrsatz, wie z.B. das folgendermaßen gebildete Viereck $ABCD$ zeigt (siehe Abbildung). Es sei $AB'C'D$ ein Rhombus mit dem Mittelpunkt M. Ferner sei B ein von B' verschiedener Punkt auf dem von M durch B' gehenden Strahl. Schließlich sei C irgendein Punkt auf dem von M durch C' gehenden Strahl.
Dann ist $ABCD$ ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen; aber es gilt $AB \neq AD$. Denn wäre $AB = AD$, so folgte $\triangle ABM \cong \triangle ADM$ (ssw mit rechtem, also der größten Seite gegenüberliegendem Winkel), also $MB = MD = MB'$ im Widerspruch zu $B \neq B'$.

Aufgabe 4 - 090814
Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?



Da der Vorgang laut Aufgabe stattgefunden hat, existiert eine Lösung. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:
Geschwindigkeit von K_1 bzw. K_2: $v_1 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 70\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Weg der Vorderkante von K_1 bzw. K_2 während des Vorgangs: s_1, s_2
Zeitdauer des Vorgangs: t
Abstand der Vorderkanten voneinander zu Anfang bzw. am Ende des Vorgangs: $d_A = d_E = 24$ m
Summe dieser Abstände: $D = d_A + d_E = 48$ m
Angenommen nun, diese Größen seien die bei dem Vorgang der Aufgabenstellung auftretenden. Dann folgt $s_1 = v_1 t, \qquad s_2 = v_2 t, \qquad s_1 + D = s_2$. Daraus folgt weiter $v_1 t + D = v_2 t$, also

$$t = \frac{D}{v_2 - v_1} = \frac{0{,}048}{10}\text{h} = 17{,}28\text{s} \approx 17{,}3\text{s}$$

sowie

$$s_2 = v_2 t \left(= \frac{v_2 D}{v_2 - v_1} \right) = 336\text{m}$$

Lösungen der I. Runde 1969 übernommen von [5]

5.11.2 II. Runde 1969, Klasse 8

Aufgabe 1 - 090821
Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

Klaus meint, dass unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

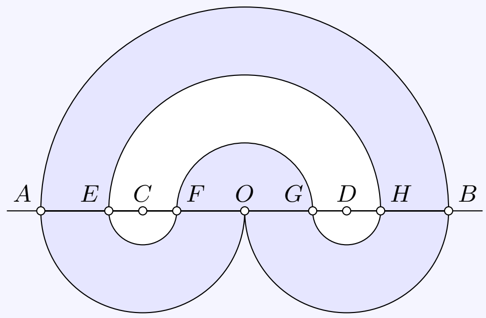
Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Ordnet man z.B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, dass in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt. (waagerecht ... großer Würfel, senkrecht ... kleiner Würfel):

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Aufgabe 2 - 090822
Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} &= 1 \text{ cm;} \\ \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} &= 0{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.

Berechne den Inhalt der farbigen Fläche!

Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $AB = 6$ cm, $FG = 2$ cm, $AO = OB = 3$ cm, $EH = 4$ cm, $EF = GH = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}(36 + 4 + 9 + 9 - 16 - 1 - 1) \text{ cm}^2 = 5\pi \text{ cm}^2$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt 5π cm^2, das sind angenähert 15,71 cm^2.

Aufgabe 3 - 090823

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

(I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung.
Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte.
Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird, durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln $0°, 90°, 180°, 270°$ entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt.
Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}$ h $= \frac{3}{11}$ h.
Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen.
Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}$ h (n ungerade), bei denen n die Ungleichung $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder gleichbedeutend $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, das sind die Zeitpunkte

$$15 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 5\frac{5}{11} \text{ min} \qquad ; \qquad 17 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 38\frac{2}{11} \text{ min}$$

Aufgabe 4 - 090824
Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck $\triangle ABC$ teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

Voraussetzung: Dreieck mit Winkelhalbierender
Behauptung: Winkelhalbierende teilt gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anderen Seiten

Beweis: O.B.d.A. werde die Winkelhalbierende in C betrachtet, damit gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ (1). Zu zeigen bleibt hier $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.
Der Sinus von zwei sich zu 180^o ergänzenden Winkeln (Nebenwinkel) ist gleich groß. Deshalb gilt:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \qquad (2)$$

Wegen des Sinussatzes gilt: $\sin\alpha : \sin\gamma = a : c$. Daher gilt nun ebenfalls:

$$\sin\alpha_1 : \sin\gamma_1 = a_1 : c_1 \qquad (3) \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha_2 : \sin\gamma_2 = a_2 : c_2 \qquad (4)$$

Mit (3), (4), (1) und (2) gilt:

$$a_1 : a_2 = (\sin\alpha_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot c_1) : (\sin\gamma_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot c_2) = c_1 : c_2$$

Lösungen der II. Runde 1969 übernommen von [5]

5.11.3 III. Runde 1969, Klasse 8

Aufgabe 1 - 090831
Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Die Zerlegung von 44 950 in Primfaktoren lautet $44950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, 44950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (2 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 = 10 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31, \\
(2) & (2 \cdot 29) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31 = 58 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 31, \\
(3) & (2 \cdot 31) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 = 62 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29, \\
(4) & (5 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31 = 25 \cdot 2 \cdot 29 \cdot 31, \\
(5) & (5 \cdot 29) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31 = 145 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31, \\
(6) & (5 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29 = 155 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 29, \\
(7) & (29 \cdot 31) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 899 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5
\end{array}$$

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein. Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müsste die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben.
Somit verbleibt nur Möglichkeit (1); d.h., die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 090832
Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, dass die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

2. Wie üblich sei $BC = a, AC = b, AB = c$ gesetzt, AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$.
Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt. Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \qquad \text{also} \qquad F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c$$

Ebenso erhält man $F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot F_c + \frac{b^2}{c^2} \cdot F_c = F_c$$

d.h. $F_a + F_b = F_c$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 090833
Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:
Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.
Beispiel: 37528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37528 durch 8 teilbar.

Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so lässt sich diese in der Form

$$n = 1000d + 100c + 10b + a$$

mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl

$$m = 10c + b + \frac{1}{2}a$$

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c+b+\frac{1}{2}a = 4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt $20c + 2b + a = 8k$, also ist dann

$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b = 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 090834

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 \quad = \quad r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \qquad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Aus den Gleichungen für die Radien folgt $r_2 = 2r_1, r_3 = 3r_1, r_4 = 4r_1$.
Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt

$$A_1 = \pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes beträgt

$$A_2 = \pi \left[(2r_1)^2 - r_1^2\right] = 3\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi \left[(3r_1)^2 - (2r_1)^2\right] = 5\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi \left[(4r_1)^2 - (3r_1)^2\right] = 7\pi r_1^2$$

Daraus folgt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2 = 1 : 3 : 5 : 7$$

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie 1 : 3 : 5 : 7.

Aufgabe 5 - 090835

Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000 - x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100} \cdot 1000$$

also $77x + 87000 - 87x = 80000$, woraus man $x = 700$ erhält.

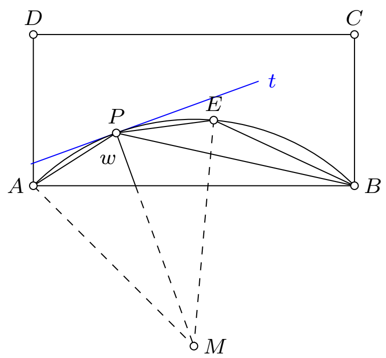
Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77-prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage.
Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.

Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

Aufgabe 6 - 090836
Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne dass bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

Es sei o.B.d.A. $AP \leq BP$. Der Kreis um P mit dem Radius PA schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E.



Wegen $AP \leq BP$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle APE$.

Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.

Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong \triangle UMP$ (sss), also $\angle APM \cong \angle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Lösungen der III. Runde 1969 übernommen von [5]

5.12 X. Olympiade 1970

5.12.1 I. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100811
Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Bezeichnet man die beiden fehlenden Ziffern der gesuchten Zahl mit x und y, so können sechsstellige Zahlen der angegebenen Art nur die folgenden Formen haben:

a) $\overline{xy1970}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
b) $\overline{x1970y}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$,
c) $\overline{1970xy}$ mit $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.

Alle diese Zahlen sind voneinander verschieden; denn gehören zwei von ihnen zu derselben mit a), b) oder c) bezeichneten Gruppe, so ist diejenige von ihnen die kleinere, in der auch die aus $\overline{x}$ und $\overline{y}$ gebildete zweistellige Zahl $\overline{xy}$ die kleinere ist; gehören sie dagegen zu verschiedenen Gruppen, so unterscheiden sie sich (z.B.) in ihrer dritten Ziffer.

In Gruppe a) und b) gibt es nun jeweils genau so viele Zahlen der geforderten Art, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $10 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind je genau 90 Zahlen, in Gruppe c) so viele, wie es Zahlen $\overline{xy}$ mit $0 \leq \overline{xy} \leq 99$ gibt, das sind genau 100 Zahlen.
Somit beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 90 + 100 = 280$.

Nach dem Vorherigen ist ferner jeweils die kleinste bzw. die größte Zahl
in Gruppe a) 101 970 bzw. 991 970,
in Gruppe b) 119 700 bzw. 919 709,
in Gruppe c) 197 000 bzw. 197 099.

Folglich ist die insgesamt kleinste der beschriebenen Zahlen 101970 und die insgesamt größte 991970.

Aufgabe 2 - 100812
Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2} + 1 + \frac{4}{x-2} \quad = \quad 2 + \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

Angenommen, die Gleichung hätte eine rationale Lösung x mit $x \neq 2$. Dann folgt aus der gegebenen Gleichung

$$3x + x - 2 + 4 = 2x - 4 + 3x + 3 + 1$$

Daraus folgt $x = 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 2$. Daher war die Annahme falsch, d.h., es gibt keine rationale Zahl x mit $x \neq 2$, die die gegebene Gleichung erfüllt.

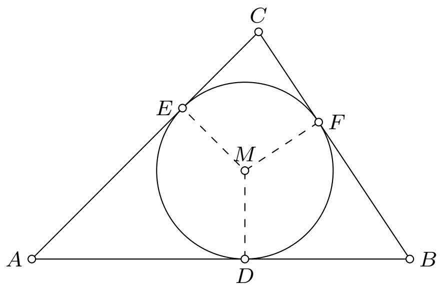
Aufgabe 3 - 100813
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Es sei E der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC, F der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite BC.
Dann gilt $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ je als Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis.

Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ ist also:

$$AB + BC + AC = 2AD + 2CF + 2BF$$



Daraus folgt:

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - (CF + BF)$$

Da $BF + CF = BC$ ist, folgt

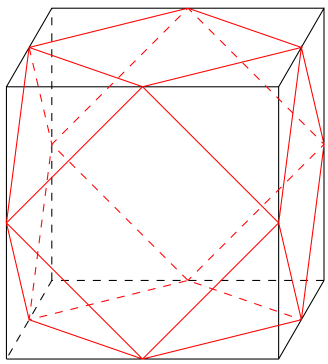
$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - BC$$

Aufgabe 4 - 100814
Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!



b) Die Eckpunkte des Restkörpers sind genau alle Mittelpunkte der Kanten des Würfels. Da der Würfel genau 12 Kanten hat, deren Mittelpunkte sämtlich voneinander verschieden sind, hat der Restkörper folglich genau 12 Eckpunkte.

Die Kanten des Restkörpers sind genau alle diejenigen Strecken, die die Mittelpunkte je zweier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten miteinander verbinden.
Jede dieser Verbindungsstrecken verläuft innerhalb einer Seitenfläche des Würfels, und zwar liegen in jeder der 6 Seitenflächen genau 4 verschiedene Verbindungsstrecken. Deren Anzahl beträgt folglich genau 24.

c) Die in jeder Seitenfläche des Würfels liegenden 4 Kanten des Restkörpers begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein Quadrat (da durch die Verbindungsstrecken von je zwei aufeinanderfolgenden Seitenmitten eines Quadrates wieder ein Quadrat begrenzt wird). Solche quadratischen Teilflächen gibt es folglich genau 6.

Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je dreier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein gleichseitiges Dreieck (da diese 3 Verbindungsstrecken als Seiten dreier kongruenter vorhin genannter Quadrate gleichlang sind). Solche gleichseitigen Dreiecke gibt es folglich genau 8.

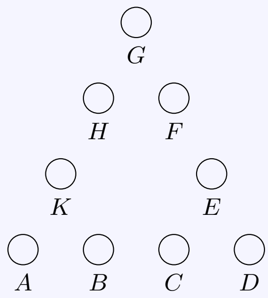
Diese 14 Teilflächen schließen sich bereits zur Oberfläche eines Körpers zusammen (wie man z.B. daran erkennt, dass sich um jeden Eckpunkt des Restkörpers 4 Teilflächen lückenlos zusammenschließen). Daher hat die Oberfläche des Restkörpers keine weiteren Teilflächen.

Lösungen der I. Runde 1970 übernommen von [5]

5.12.2 II. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100821

In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der nebenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, dass die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.



a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

Die in die Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ eingetragenen Zahlen seien $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ genannt. Dann gilt für

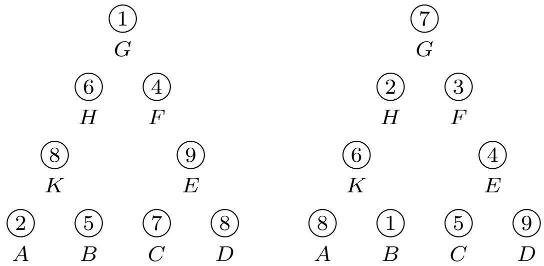
$$s_1 = a + b + c + d, \quad s_2 = d + e + f + g, \quad s_3 = g + h + k + a \tag{1}$$

laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ (2) und

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k = 45 \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g$.

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten); wenn jeweils dasselbe für die Summe $a+d+g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen $1, ..., 9$ gebildet werden kann, ist $1 + 2 + 3 = 6$ (bzw. $7 + 8 + 9 = 24$).
Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45 + 6) : 3 = 17$ sein (bzw. der größte nicht größer als $(45 + 24) : 3 = 23$).
Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, dass diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war.
Zwei solche Eintragungen sind z.B.:



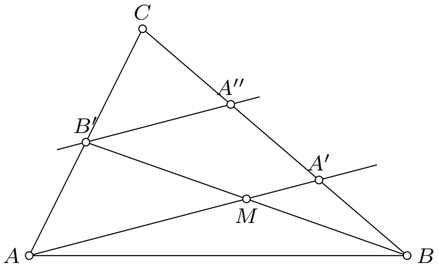
Aufgabe 2 - 100822

In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.

Man beweise, dass $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

Laut Aufgabe gilt: $AB' = B'C$ und $MB' = BM$.
Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

$$BA' : A'A'' = BM : MB' = 1 : 1 \tag{1}$$
$$A'A'' : A''C = AB' : B'C = 1 : 1 \tag{2}$$



Aus (1) und (2) folgt $BA' = A'A'' = A''C$ und daraus $BC = 3BA'$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 100823
Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen.
Bekannt ist, dass Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung! (Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils $(216 - x)$ kp.
Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}x$ kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}(216 - x)$ kp. Daher gilt:

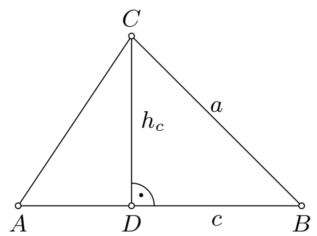
$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(216 - x) = 26$$

woraus man $7x + 9 \cdot (216 - x) = 63 \cdot 26$, also $x = 153$ erhält.
Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp - 153 kp = 63 kp betragen haben.
Wegen 153 : 216 ≈ 0,708 betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

Aufgabe 4 - 100824
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle CDB$, sofern es nicht mit $D = B$ entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\angle CDB$. Der Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle CDB$ aus $BC = a$, $CD = h_c$ und dem rechten Winkel $\angle CDB$. Der Entartungsfall $D = B$ tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c < a$ gilt.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.

(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so erhaltene Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

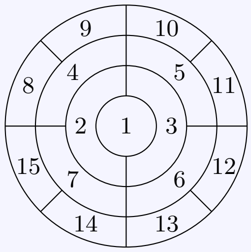
(IV) Wegen $h_c < a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium ssw eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c = a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.)

Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c < a$ bei (1) $D \neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2.
Da nun der wegen $h_c < a$ spitze Winkel $\angle DBC$ in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC'; \triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1,B,C bzw. A_2,B,C homologer Punkte).
Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

Lösungen der II. Runde übernommen von [5]

5.12.3 III. Runde 1970, Klasse 8

Aufgabe 1 - 100831



Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend nummeriert wurden.

Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.
Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$ betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion

$$\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1 : 3 : 7 : 15$$

und daraus wegen $r_i > 0$ $(i = 1{,}2{,}3{,}4)$ schließlich, dass

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$$

gelten muss, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

Aufgabe 2 - 100832

Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, dass beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Da P_1 das gesamte Becken in genau 4 h 30 min füllt, wurde durch diese Pumpe in 30 min genau $\frac{1}{9}$ des Beckens gefüllt. In jeder Minute füllte P_1 mithin genau $\frac{1}{270}$ des Beckens.
Da P_2 das gesamte Becken in genau 6 h 45 min, also in 405 min füllt, füllte diese Pumpe in jeder Minute $\frac{1}{405}$ des Beckens.
In der Zeit, in der beide Pumpen zusammen arbeiteten, füllten sie mithin in jeder Minute wegen

$$\frac{1}{270} + \frac{1}{405} = \frac{15}{2430} = \frac{1}{162}$$

genau $\frac{1}{162}$ des Beckens. Insgesamt wurden von beiden Pumpen gemeinsam $\frac{8}{9}$ des Beckens gefüllt.
Wegen $\frac{8}{9} = \frac{144}{162}$ geschah das in genau 144 min. Infolgedessen wurde das Becken in der in der Aufgabe angegebenen Weise in genau 174 min, das sind 2 h 54 min, gefüllt.

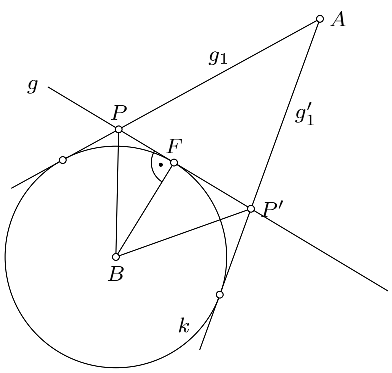
Aufgabe 3 - 100833

Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, dass der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

(I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k.
Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F \neq B$ und $F \neq A$, da A und B nicht auf g liegen. Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k.
Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k.
Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1, als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.
Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

Aufgabe 4 - 100834
Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so dass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Wegen $a > b$ gilt $a^2 - b^2 > 0$. Wegen $(a-b) \geq (a+b)$ ist $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ genau dann Primzahl, wenn $a - b = 1$ und $a + b$ Primzahl ist.

Aufgabe 5 - 100835
Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:
(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.
(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.
(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.
(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.
(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.
(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.
Brigitte entgegnet darauf: "Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

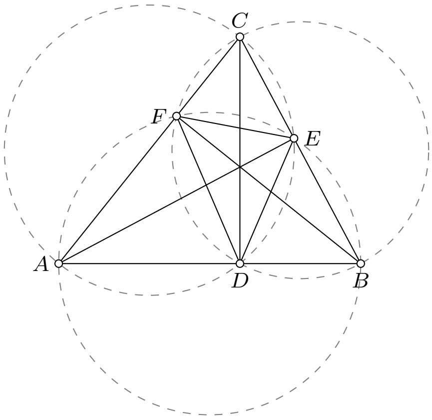
Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Angenommen, die Aussagen (1), (2), (3), (4), (5), (6) wären sämtlich wahr. Dann hätte wegen (3) und (4) jedes Ehepaar wenigstens 1 Mädchen.
Wegen (1), (4), (5) und (6) müsste folglich die Anzahl der Jungen kleiner sein als die Anzahl der Ehepaare und damit erst recht kleiner als die Anzahl der Mädchen, im Widerspruch zu (2).
Brigitte hat also mit ihrem Einwand recht.

Aufgabe 6 - 100836
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\angle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\angle EFD$ zu führen.)



Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.
Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zwei der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben. Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\angle EFD$.

Nun gilt $\angle AEB \cong \angle BDC$ (rechte Winkel), $\angle ABE \cong \angle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck $\angle BAE \cong \angle BCD$. (1)
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:
$\angle BAE \cong \angle BFE$ (Bogen $\overparen{BE}$) sowie $\angle BCD \cong \angle BFC$ (Bogen $\overparen{BD}$). Hieraus sowie aus (1) folgt $\angle BFE \cong \angle BFD$, d.h. BF halbiert $\angle EFD$.

Lösungen der III. Runde übernommen von [5]

5.13 XI. Olympiade 1971

5.13.1 I. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110811
a) Berechne die Zahl
$$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen lässt!

$$x = -\left\{-\left[-(-2)\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\} = -\left\{-\left[2\right]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[\frac{1}{8}\right]^2\right\} = -\left\{-4\right\}^3 \cdot \left\{-\frac{1}{64}\right\} = -1$$

b) Da als Potenz einer natürlichen Zahl niemals eine negative Zahl auftritt, kann x nicht Potenz einer natürlichen Zahl sein.

Aufgabe 2 - 110812
Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:

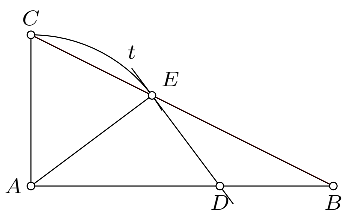
Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

Addiert man 33 zu einer Zahl x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man $\frac{x+33}{2}$. Das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl ist $2 \cdot (-x)$. Daher hat eine Zahl x genau dann die genannte Eigenschaft, wenn sie die Gleichung
$$\frac{x+33}{2} = -2x$$
erfüllt.
Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $x + 33 = -4x$ gilt. Das ist äquivalent mit $5x = -33$ und dies mit $x = -\frac{33}{5}$. Daher hat genau diese Zahl die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 3 - 110813
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC} < \overline{AB}$ (1). Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.

Beweise, dass $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

Das Dreieck $\triangle AEC$ ist laut Konstruktion gleichschenklig mit $AC = AE$. Folglich sind die Winkel $\angle ACE$ und $\angle AEC$ als Basiswinkel gleich groß.



Der Winkel $\angle ACE$ wird vom Winkel $\angle ABC$ und der Winkel $\angle AEC$ vom Winkel $\angle BED$ jeweils zu einem rechten Winkel ergänzt. Daher sind auch $\angle ABC$ und $\angle BED$ gleich groß, also ist $\triangle DBE$ gleichschenklig, und es gilt: $ED = DB$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 110814
Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e > 0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren lässt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

(I) Angenommen, ABC_1D_1 sei ein Parallelogramm, wie es konstruiert werden soll. Dann stimmt es mit $ABCD$ im Flächeninhalt und in der Seite AC überein. Daher muss es mit $ABCD$ auch in der zu AB gehörigen Höhe übereinstimmen. Also müssen C_1 und D_1 auf der Geraden durch C und D liegen.

(II) Daher kann ein Parallelogramm ABC_1D_1 nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

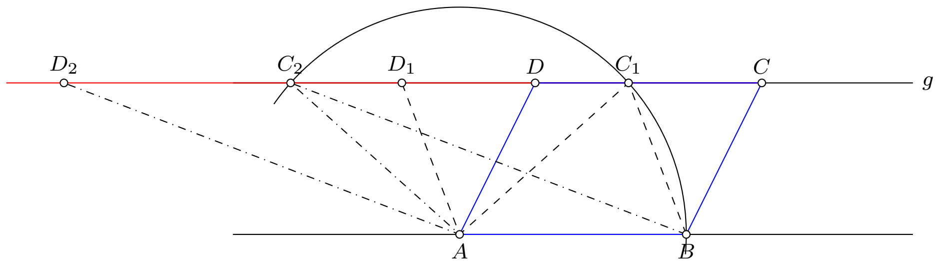
(1) Man zeichnet die Gerade g durch C und D.

(2) Man schlägt den Kreis um A mit e. Schneidet er g, so sei einer der Schnittpunkte C_1 genannt.

(3) Man zieht die Parallele zu BC_1 durch A. Ihr Schnittpunkt mit g sei D_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jedes so erhaltene Parallelogramm ABC_1D_1 den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich aus (II) und der Umkehrbarkeit der Schlüsse in (I).

(IV) Der Abstand der Seite AB von der Seite CD sei mit h bezeichnet. Dann erhält man für $e < h$ keinen Schnittpunkt C_1. Die Aufgabe hat in diesem Falle keine Lösung.
Im Falle $e = h$ gibt es genau einen Schnittpunkt C_1 (Berührungspunkt) und mithin genau eine Lösung, im Falle $e > h$ dagegen zwei Schnittpunkte C_1 und C_2 und damit zwei verschiedene Parallelogramme ABC_1D_1 und ABC_2D_2 als Lösungen.



Lösungen der I. Runde 1971 übernommen von [5]

5.13.2 II. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110821
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Vorüberlegungen:
Definition Primzahl: Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Teilbarkeitssatz: Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar.

Man muss also beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, um zu beweisen, dass entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar ist.

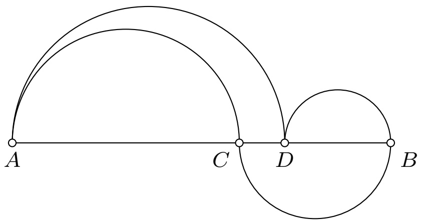
Teilbarkeit durch 2:
p ist eine Primzahl und größer als 3, darf demnach nicht durch 2 teilbar sein, da eine Primzahl nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Da jedoch jede zweite Zahl durch 2 teilbar ist, müssen die Nachbarzahlen von p ($p-1$ und $p+1$) beide durch 2 teilbar sein.

Teilbarkeit durch 3:
p kann nach der Definition von Primzahlen (s. oben) nicht durch 3 teilbar sein, da p eine Primzahl ist. Geht man davon aus, dass $p-1$ auch nicht durch 3 teilbar ist, muss $p+1$ aber durch 3 teilbar sein, da jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist. Dies gilt auch für $p-1$, wenn $p+1$ nicht durch 3 teilbar ist. Es ist also entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar.

$\Rightarrow$ Da $p-1$ und $p+1$ durch 2 und entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar sind, ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 2 - 110822
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

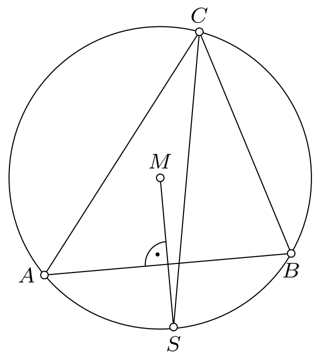


Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $AC \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $AD \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt $DB \cdot \frac{\pi}{2}$ und die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt $CB \cdot \frac{\pi}{2}$.
Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s = (AC + AD + DB + CB) \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot AB \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \pi$$

Aufgabe 3 - 110823
Beweise, dass für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.



Der Mittelpunkt des Umkreises sei M. Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt: $\angle AMS \cong \angle SMB$ und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $AM = SM = BM$.
Daher gilt: $\triangle AMS \cong \triangle SMB$ (sws), woraus $AS = SB$ folgt. Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Aufgabe 4 - 110824
In einer Ebene ϵ seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, dass dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, dass es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt $QP = QP'$ (1).
Liegt P nicht auf g, so ist $P' \neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $SP = SP'$. Wenn nun $S = Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt.
Wenn aber $S \neq Q$ ist, so erhält man $\triangle QSP = \triangle QSP'$ (sws) und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P' = P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft.
Ist $P' \neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit PQ, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen.

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit PQ. Das steht im Widerspruch zur Behauptung.
Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

Lösungen der II. Runde 1971 übernommen von [5]

5.13.3 III. Runde 1971, Klasse 8

Aufgabe 1 - 110831
In ein leeres Gefäß (ohne Abfluss) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x, dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau $(40 - x)$ Sekunden vergangen, und es gilt:

$$30x + (40 - x) \cdot 15 = 1000$$

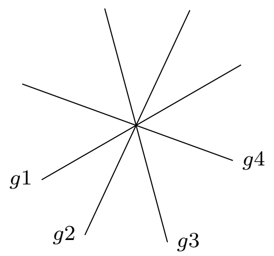
also $15x = 400$, woraus man $x = \frac{80}{3}$ erhält.
Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3} \cdot 30$ l, das sind 800 1 Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

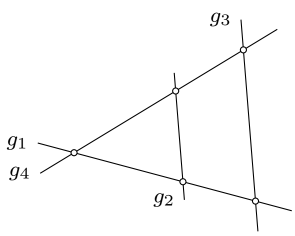
Aufgabe 2 - 110832
Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, dass kein Schnittpunkt, der zweite so, dass genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, dass genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, dass genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, dass genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, dass genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, dass genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, dass ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht: denn es gibt z.B. folgende Lösungen:





Der dritte Schüler hat recht.

Beweis: Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, dass genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein.
O.B.d.A. mögen sich die Geraden g und g_2 im Punkt A schneiden. Von den beiden anderen Geraden muss mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte.
Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B.

Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte. Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_1 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3.
Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig $A = A'$ und $B = B'$ sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf.

Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

Aufgabe 3 - 110833
Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$\begin{array}{cccccc} (1) & a > 0 & (4) & a < b + c & (2) & b > 0 \\ (5) & b < a + c & (3) & c > 0 & (6) & c < a + b \end{array}$$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ gilt. Die Bedingung $a = b$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 3x + 20$, also mit $x = -1$.
Daraus ergibt sich $a = b = 17$ und $c = 12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $a = c$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 4x + 16$, also mit $x = -\frac{4}{9}$. Daraus ergibt sich $a = c = \frac{128}{8}$ und $b = \frac{56}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $b = c$ ist gleichbedeutend mit $3x + 20 = 4x + 16$, also mit $x = 4$. Daraus ergibt sich $b = c = 32$ und $a - 8$, d.h. (1) ist nicht erfüllt.
Mithin gibt es genau für $x = -1$ und $x = -4$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

Aufgabe 4 - 110834
Beweise, dass für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Wegen $a > 2$, $b > 2$ ist $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$, also $\frac{a+b}{ab} < 1$ und folglich wegen $ab > 0$ auch $a + b < ab$.

Aufgabe 5 - 110835
Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> ”Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuss und dann dem zweiten, dem dritten u.s.w. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?”

Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x. Dann würde der erste Pionier $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Davon würde der zweite Pionier $\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 3)$.

Davon würde der dritte Pionier $\frac{1}{8}(x - 3) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben $\frac{1}{8}(x - 3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 7)$.

Davon würde der vierte Pionier $\frac{1}{16}(x - 7) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{16}(x - 7) - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x - 15)$$

Davon würde der fünfte Pionier $\frac{1}{32}(x - 15) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{32}(x - 15) - \frac{1}{2} = \frac{1}{32}(x - 31)$$

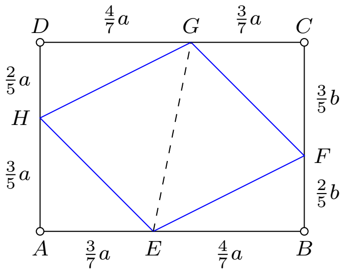
Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x = 31$. Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:
Der 1. Pionier 16 Nüsse, der 2. Pionier 8 Nüsse, der 3. Pionier 4 Nüsse, der 4. Pionier 2 Nüsse und der 5.Pionier 1 Nuss.

Aufgabe 6 - 110836
Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, dass die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

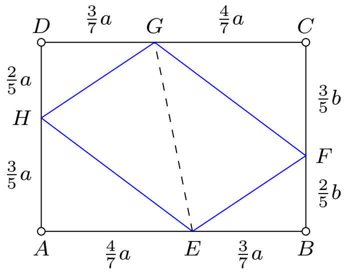
Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

Laut Aufgabe ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Daraus folgt: $HE = GF$, $HG = EF$, $\angle HEG \cong \angle FGE$ und $\angle AEG \cong \angle CGE$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\angle AEH \cong \angle CGF$. Mithin ist $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (sww). Analog lässt sich zeigen, dass $\triangle BEF \cong \triangle DGH$ gilt.

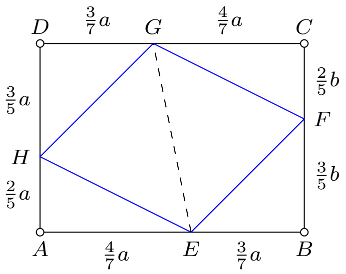
Folglich gilt: $AE = CG$, $BE = DG$, $AH = CF$, $DH = BF$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck $ABCD$ ein Parallelogramm $EFGH$ in der geforderten Weise einzubeschreiben (siehe Abbildungen).
Dabei kann man Figur 3 durch eine Spiegelung der Figur 1 und Figur 4 durch eine Spiegelung der Figur 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:



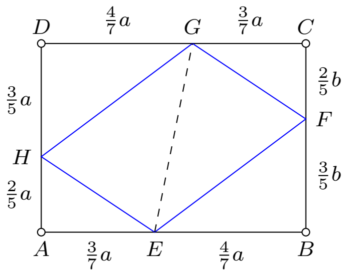
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Fall 1:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 3 : 4$.
Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms $EFGH$ gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$. Also gilt

$$\begin{aligned} A_P &= ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) \\ &= ab - \left(\frac{9}{35}ab + \frac{8}{35}ab\right) = \frac{18}{35}ab \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 18$.

Fall 2:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 4 : 3$.
Analog wie im Fall 1 erhält man dann

$$A_P = ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) = ab - \left(\frac{12}{35}ab + \frac{6}{35}ab\right) = \frac{17}{35}ab$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 17$.

Lösungen der III. Runde 1971 übernommen von [5]

5.14 XII. Olympiade 1972

5.14.1 I. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120811
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

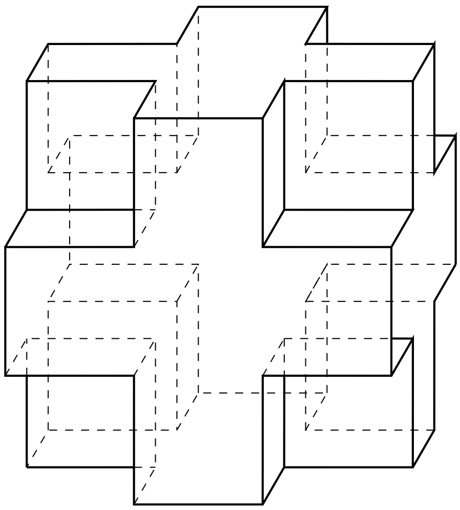
(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Die Hunderterziffer der gesuchten Zahl z kann nur eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein.
Ermittelt man nach (2) dazu jeweils die beiden anderen Ziffern, so erhält man genau die Zahlen 105, 210, 315, 420, 525, 630, 735, 840, 945.
Von ihnen haben genau die Zahlen 525 und 840 die Quersumme 12, erfüllen somit auch (1) und sind damit die sämtlichen Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 120812
Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3$ cm! ($\alpha = 60°$, 1 : 3)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt. Ermittle diesen Wert!



b) Das Volumen des großen Würfels sei mit V, das eines der herausgeschnittenen Würfel mit V_A bezeichnet. Dann gilt: $V_R = V_W - 8V_A$.

Also hat b genau dann den gesuchten Wert, wenn $217 \text{ cm}^3 = 729 \text{ cm}^3 - 8b^3$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $8b^3 = 512 \text{ cm}^3 \rightarrow b = 4$ cm, und es gilt $4 \text{ cm} < 3 \text{ cm} = a$.

Aufgabe 3 - 120813
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300001. Stelle?

Es gibt 9 einstellige, $99 - 9 = 90$ zweistellige, $999 - 99 = 900$ dreistellige, $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

Die ersten neun Stellen der Ziffernfolge nehmen die einstelligen Zahlen, die nächsten 180 Stellen ($2 \cdot 90 = 180$) die zweistelligen, die nächsten 2700 Stellen ($3 \cdot 900 = 2700$) die dreistelligen ein. 36000 Stellen benötigen die vier- und 450000 Stellen die fünfstelligen Zahlen.

Da die ein- bis vierstelligen Zahlen zusammen also 38889 Stellen einnehmen, ist die uns interessierende Ziffer eine solche einer mindestens fünfstelligen Zahl.
Wegen $300001 - 38889 = 261112 < 450000$ und $261112 : 5 = 52222$ Rest 2 ist die zu ermittelnde Ziffer die zweite Ziffer der 52223. fünfstelligen Zahl. Da die fünfstelligen Zahlen mit 10000 beginnen, ist es die zweite Ziffer der Zahl 62222.
An der 300001. Stelle steht mithin die Ziffer 2.

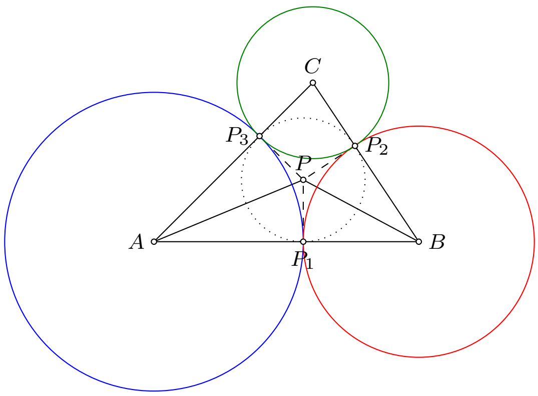
Aufgabe 4 - 120814
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, dass die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

(I) Angenommen, es gibt drei derartige Kreise. Ihre Berührungspunkte seien P_1, P_2, P_3 genannt. Da der Berührungspunkt je zweier Kreise stets auf der Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte liegt, liegen die drei genannten Punkte auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, dass P_1 auf AB, P_2 auf BC und P_3 auf AC liegt. Dann gilt:

$$(1) \quad P_1B = BP_2, \qquad (2) \quad P_2C = CP_3, \qquad (3) \quad P_3A = AP_1$$

Die Senkrechten auf AB bzw. BC im Punkte P_1 bzw. P_2 schneiden einander in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann sind PP_1 und PP_2 Tangentenabschnitte auf den von einem Punkt an denselben Kreis gezogenen Tangenten, und es gilt: (4) $\quad PP_1 = PP_2$.
Analog erhält man $PP_1 = PP_3$. Folglich ist P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.



(II) Daraus ergibt sich, dass drei Kreise nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert den Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$.
(2) Man fällt von P auf die drei Seiten des Dreiecks die Lote. Ihre Endpunkte seien mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet.
(3) Man schlägt um A den Kreis mit dem Radius AP_1, um B den Kreis mit dem Radius BP_1 und um C den Kreis mit dem Radius CP_2.

(III) Da jeder der Schlüsse in (I) umkehrbar ist, ergibt sich ein Beweis, dass die so konstruierten Kreise den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, aus der Umkehrung der Schlusskette in (I).

(IV) Der in (II) beschriebene Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da somit stets genau ein Punkt P existiert, sind aus bekannten Gründen auch die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.

Lösungen der I. Runde 1972 übernommen von [5]

5.14.2 II. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120821
Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

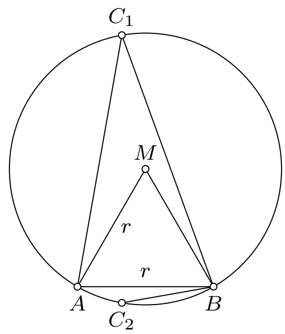
(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müsste.
Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter.
Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müsste Axel im Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle.
Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin: Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

Aufgabe 2 - 120822
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\angle BCA$!



Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $AB = AM = r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu $\overset{\frown}{AB}$ gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\angle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\triangle AC1B$ eine Größe von 30°.

Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegende Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\angle AC_2B$ eine Größe von $180° - 30° = 150°$.

Aufgabe 3 - 120823
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!
b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

a) Unter allen 1972stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17748$.

Da hiernach die erste Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 17748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d.i. 36.
Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d.i. 11.

b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2999.
Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, dass die aus den vorangehenden $1972 - 333 = 1639$ Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1\underbrace{0...0}_{1637}1\underbrace{9...9}_{1637}$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

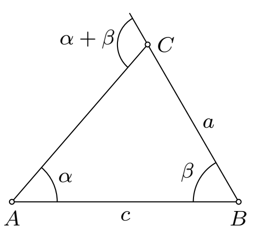
Ist nun g irgendeine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

Wegen $\frac{g}{9} \geq \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer ≥ 2. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$.
Damit ist A als kleinste unter allen 1972stelligen Zahlen nachgewiesen, die irgendeine Zahl mit der Quersumme 29 als Quersumme haben, d.h. aber, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

Aufgabe 4 - 120824
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es lässt, sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180° - 120° = 60°$.
Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\angle ACB = 60°$, $BC = a = 6{,}5$ cm, $AB = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.

(III) Beweis, dass jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha + \beta = 180° - \angle ACB = 120°$ und nach Konstruktion $AB = c = 7{,}5$ cm sowie $BC = a = 6{,}5$ cm.

(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der II. Runde 1972 übernommen von [5]

5.14.3 III. Runde 1972, Klasse 8

Aufgabe 1 - 120831
Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tipp darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tippscheine auswerte, stellte sich heraus, dass ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tipps genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tippschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tipp Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Im folgenden seien die Namen der auf den Tippzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben.
Da A, B und C die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage: (1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.

Nun lässt sich in einer Tabelle angeben, wie viele Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tippverteilungen hätten vergeben werden können:

1. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 4mal	0+0+0	0+4+0	0+0+0	0+0+4
Tipp CAB 3mal	0+0+0	0+0+3	3+3+3	3+0+0
Summe	5	7	14	7

2. Möglichkeit der Tippverteilung

Platzverteilung	ABC	ACB	CAB	CBA
Tipp BAC 5mal	0+0+5	0+0+0	0+5+0	0+0+0
Tipp BCA 3mal	0+0+0	0+3+0	0+0+0	0+0+3
Tipp CAB 4mal	0+0+0	0+0+4	4+4+4	4+0+0
Summe	5	7	17	7

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3mal abgegeben wurde.

Aufgabe 2 - 120832
Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zwei dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden. Es lasse o.B.d.A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2. Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$a = 3m \quad ; \quad b = 3n + 1 \quad ; \quad c = 3s + 2$$

mit natürlichen Zahlen m, n, s. Nun gilt:

$$a + b + c = 3m + 3n + 1 + 3s + 2 = 3(m + n + s + 1)$$

d.h. $3|(a + b + c)$.

Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o.B.d.A. die Zahlen a und b.
Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

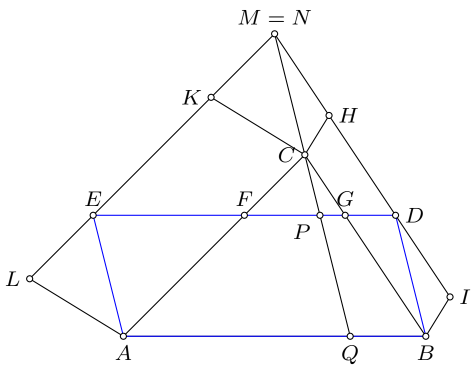
$$a = 3m + r \qquad ; \qquad b = 3n + r$$

mit natürlichen Zahlen m, n, r, wobei $0 \leq r \leq 2$ gilt. Nun gilt:

$$a - b = 3m + r - (3n + r) = 3(m - n) \qquad \text{d.h.} \qquad 3|(a - b)$$

Aufgabe 3 - 120833
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, dass dessen Seite DE mit auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, dass dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und dass außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, dass D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, dass dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!



Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:
Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkt M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkt N.

Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme, und es gilt $EA = MC$ sowie $BD = NC$, woraus wegen $EA = BD$ folgt, dass $M = N$ ist.

Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich: einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$, andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.
Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, w.z.b.w.

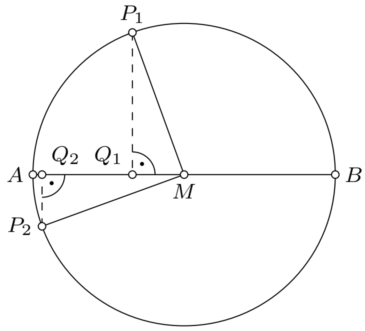
Aufgabe 4 - 120834
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\angle AMP_2$!

Für jede Lage des Punktes P_1, auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist P_2 so gelegen, dass $\angle AMP_2 = \frac{1}{4} AMP_1 < \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$ gilt.

Umgekehrt nimmt die Größe des $\angle AMP_2$ während der beschriebene Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Fußpunkte der von P_1 bzw. P_2 auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn gilt:



$$P_1Q_1 = P_2Q_2 \tag{1}$$

Im Falle $\angle AMP_1 < 90°$ ist

$$\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < \angle AMP_1 = \angle Q_1MP_1$$

und daher $P_2Q_2 < P_1Q_1$.
Im Fall $\angle AMP_1 = 90°$ ist $\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < 90°$ und daher ebenfalls $P_2Q_2 < (MP_2 = MP_1 =)P_1Q_1$. Also kann (1) in den Fällen $\angle AMP_1 \leq 90°$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\angle AMP_1 > 90°$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn

$$\angle BMP_1 = \angle Q_1MP_1 = \angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 \tag{2}$$

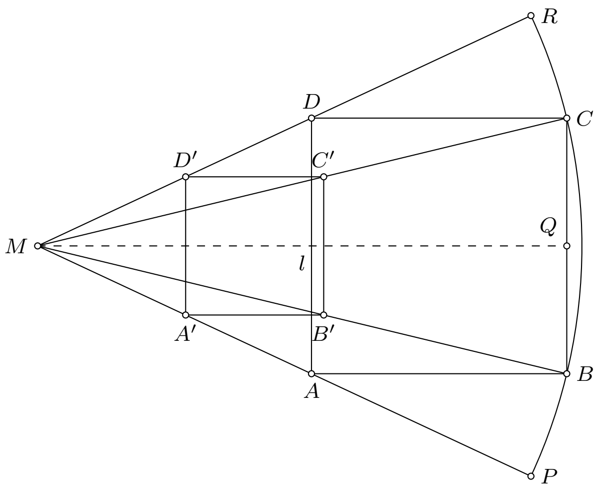
gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180° - 4 \cdot \angle AMP_2 = AMP_2$ und dies mit $\angle AMP_2 = 36°$.
Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\angle AMP_2$ die Größe 36° hat.

Aufgabe 5 - 120835
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\angle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, dass A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A' ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes l von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (ssw), also ist l die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $MA = MD$.

Die Parallele durch A' zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, der D' genannt sei. Die Parallelen durch B' zu BC und durch D' zu DC mögen sich im Punkt C' schneiden.
Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $MA = MD$ auch $MA' = MD'$ gilt. Da das Quadrat

$ABCD$ nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt A'.

(2) Man schlägt den Kreis um M mit MA'. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser D' genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.

(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch B' bzw. C'. Schneiden sie den Bogen PR, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte l von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $MA' = MD'$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\angle B'MC'$.
Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also l auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen.
Daher ist $ABCD$ ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

Aufgabe 6 - 120836
Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die gilt:

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142 \qquad (1)$$

Dann gilt auch

$$100x - 8a = 5x + 1136 \qquad \text{bzw.} \qquad 95x = 1136 + 8a, \qquad \text{also} \qquad x = \frac{1136 + 8a}{95} \qquad (2)$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt.
Da 1136 bei Division durch 95 den Rest 91 lässt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a = 4$, sie lautet also $a = \frac{1}{2}$.

Für sie ergibt sich nach (2) $x = 12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x = 12$ zusammen mit $a = \frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.

Lösungen der III. Runde 1972 übernommen von [5]

5.15 XIII. Olympiade 1973

5.15.1 I. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130811
Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, dass sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.
(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21 mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.
(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

Sind a, b, c, d in dieser Reihenfolge die Ziffern einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften, so gilt wegen (3) $a < d$ sowie $b > c$. Ferner gilt $1 \leq a,b,c,d \leq 9$ und somit wegen (1)

$$b \cdot c \leq 8 \cdot 9 = 72 \qquad \text{und} \qquad a \cdot d \geq 1 \cdot 2 = 2$$

Wäre $a \cdot d \geq 4$, so folgte nach (2) $b \cdot c = 21 \cdot a \cdot d \geq 84$. Also ist $2 \leq a \cdot d \leq 3$.

Da wegen $a < d$ im Falle $a \cdot d = 2$ nur $d = 2$ sein könnte, damit aber a gerade wäre, kann nur $a \cdot d = 3$ sein, was auf $a = 1$ und $d = 3$ führt. Dann gilt $b \cdot c = 63$, wegen $b > c$ also $b = 9$ und $c = 7$.

Daher kann nur die Zahl $z = 1973$ die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat sie tatsächlich; denn sie ist ungerade, sie besteht aus vier verschiedenen Ziffern, das Produkt $9 \cdot 7$ ist 21 mal so groß wie das Produkt $1 \cdot 3$, und die kleinste ihrer Ziffern, 1, steht an erster, die größte, 9, an zweiter Stelle.

Aufgabe 2 - 130812
In $** \cdot\ 9\ * = ***$ ist jedes Sternchen $*$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, dass eine richtige Gleichung entsteht.

Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

Angenommen, es gibt eine Lösung der Aufgabe. Dann muss das erste Sternchen durch 1 ersetzt werden; denn anderenfalls entstünde als Produkt eine vierstellige Zahl.
Ferner ist das zweite Sternchen durch 0 oder durch 1 zu ersetzen; denn sonst entstünde ebenfalls (da bereits $12 \cdot 90 = 1080$ vierstellig ist) eine vierstellige Zahl.

Wird für das zweite Sternchen 0 eingesetzt, dann kann für das dritte Sternchen jede der Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Wird dagegen für das zweite Sternchen 1 eingesetzt, so muss das dritte Sternchen durch 0 ersetzt werden; denn sonst entstünde ein Produkt, das mindestens gleich $11 \cdot 91 = 1001$, also vierstellig, wäre.

Die somit verbliebenen Möglichkeiten für die ersten drei Sternchen führen in der Tat zu je genau einer Lösung, nämlich zu

$$\begin{array}{llll} 10 \cdot 90 = 900, & 10 \cdot 91 = 910, & 10 \cdot 92 = 920, & 10 \cdot 93 = 930, \\ 10 \cdot 94 = 940, & 10 \cdot 95 = 950, & 10 \cdot 96 = 960, & 10 \cdot 97 = 970, \\ 10 \cdot 98 = 980, & 10 \cdot 99 = 990, & 11 \cdot 90 = 990. & \end{array}$$

Aufgabe 3 - 130813
Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift "alpha" erhielten drei Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris	(2) Eva, Elke, Uwe	(3) Roland, Marion, Bernd
(4) Iris, Heike, Uwe	(5) Roland, Heike, Bernd	(6) Eva, Marion, Christian
(7) Christian, Eva, Elke.		

Es stellte sich heraus, dass in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

Zunächst folgt aus der Aufgabe, dass in der restlichen Antwort genau zwei Namen richtig angegeben waren. Daher sind in einer Antwort genau dann alle drei Vornamen richtig angegeben, wenn in genau zwei weiteren Antworten genau einer dieser Vornamen und in genau einer weiteren Antwort genau zwei dieser Vornamen vorkommen.

Das trifft nicht für
(1) zu; denn in den drei Antworten (2), (6), (7) tritt je genau einer der Namen aus (1) auf,

(2) zu; denn in den drei Antworten (1), (4), (6) tritt je genau einer der Namen aus (2) auf,

(6) zu; denn in den drei Antworten (1), (2), (3) tritt je genau einer der Namen aus (6) auf,

(3) zu; denn nur in der Antwort (6) tritt genau einer der Namen aus (3) auf,

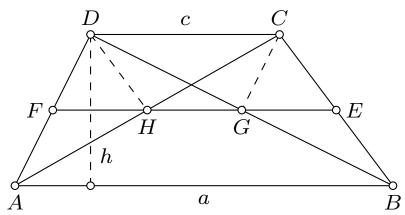
(5) zu; denn nur in der Antwort (4) tritt genau einer der Namen aus (5) auf,

(7) zu; denn nur in der Antwort (1) tritt genau einer der Namen aus (7) auf.

Daher kann nur die Antwort (4) richtig sein; die Vornamen der Preisträger lauten mithin Iris, Heike und Uwe.

Aufgabe 4 - 130814
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G.

Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!



Der Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$ ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AHF und BEG.

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDA gleich dem des Dreiecks CDB, nämlich gleich $\frac{c \cdot h}{2}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks CDH ist gleich dem des Dreiecks CDG, nämlich halb so groß wie der des Dreiecks CDA, also gleich $\frac{c \cdot h}{4}$.

Genau so groß ist dann aber auch der Flächeninhalt jedes der Dreiecke DAH und BCG.
Schließlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks AHF und ebenso der des Dreiecks BEG (wegen $AF = FD$ bzw. $BE = EC$) halb so groß wie der des Dreiecks DAH, also gleich $\frac{c \cdot h}{8}$.
Der Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ beträgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2} + a\right) \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{8}(3a + c)$$

Folglich erhält man für den Flächeninhalt des Trapezes $ABGH$

$$A_T = \frac{h}{8}(3a + c) - 2 \cdot \frac{c \cdot h}{8} = \frac{h}{8}(3a - c)$$

Lösungen der I. Runde 1973 übernommen von [5]

5.15.2 II. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130821

In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

a	b	c	$\cdot$	b	a	c
	$*$	$*$	$*$	b		
			$*$	$*$	a	
			$*$	$*$	$*$	$*$
	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt:
Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a < b$. Wäre nun $a \geq 3$, so wäre daher $b \geq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe.
Das Produkt aus abc und a endet auf a. Wäre $a = 1$, so folgte, dass dieses Produkt auf c enden würde, im Widerspruch zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a = 2$.

Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endet, muss auch das Doppelte von c auf 2 enden. Das gilt nur für $c = 1$ oder $c = 6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$. Also gilt $c = 6$.

Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten $1, 3, 5, 7, 8, 9$ erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, dass das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endet. Daher gilt $b = 8$.

Somit kann nur die Eintragung

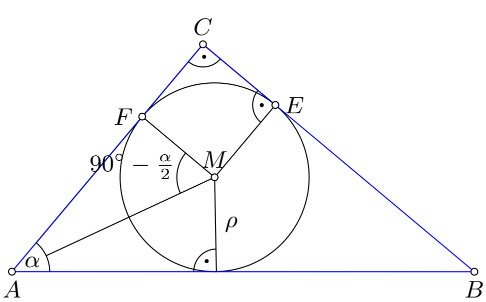
2	8	6	$\cdot$	2	8	6
	2	2	8	8		
			5	7	2	
			1	7	1	6
	2	3	6	2	3	6

den Anforderungen genügen. Da sie eine, richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 130822

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\rho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d.h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD.
Dann hat das Viereck $CFME$ rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $ME = MF = \rho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ρ.

Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\angle FMA = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E, auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$.
Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir konstruieren das Quadrat $CFME$ mit der Seitenlänge ρ.
2. Wir zeichnen den Strahl C durch F.
3. Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
4. Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.
5. Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ρ. Da ferner nach Konstruktion

$$\angle CAM = \angle FAM = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \angle MAB = \angle CAB - \angle CAM = \frac{\alpha}{2}$$

ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ρ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0° < 90° - \frac{\alpha}{2} < 90°$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0° < \alpha < 90°$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar.
Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 - 130823
Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{3-r}{4+r} = \frac{3}{8}$$

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$$\frac{3 - \frac{12}{11}}{4 + \frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8}$$

d.h., $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

Aufgabe 4 - 130824
Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden.
Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, dass g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, dass ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und dass dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, dass dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachsen dieser beiden Sehnenpaare.

Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_2$). Durch Spiegelung an s_1 geht CE in AB und durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so dass $CE \parallel DF$ folgt.

Somit ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $CD = EF$, w.z.b.w.

Lösungen der II. Runde 1973 übernommen von [5]

5.15.3 III. Runde 1973, Klasse 8

Aufgabe 1 - 130831
Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluss aller Spiele stellte man fest:

(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.

(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.

(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}z$ aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z = 12n$; hieraus folgt $z = 15n$.
Von den $15n$ Spielen gewann nach (1) Cathrin genau $6n$, Daja genau $4n$, Eva genau $3n$ Spiele.

Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau $2n$ aller Spiele. Daraus folgt, dass Eva wegen $6n > 4n > 3n > 2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl $3n$ von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n = 1$.

Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

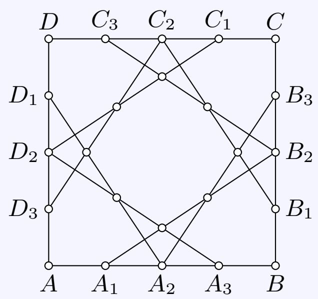
Aufgabe 2 - 130832
Zeige, dass für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$ ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p > 5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ durch 5 teilbar.

Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen $p-1$ und $p+1$ gerade, und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen $p-2$ und $p+1$ oder die beiden Zahlen $p-1$ und $p+2$ jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt durch 9 teilbar.

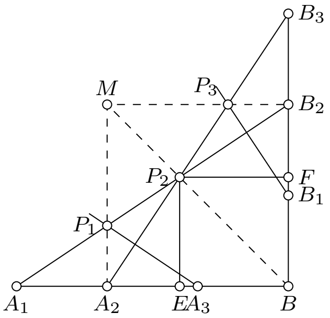
Aus all dem folgt, dass das Produkt $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ teilbar ist, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 130833
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch die Punkte B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch die Punkte D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in der Abbildung bezeichnet.



Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Man kann den Flächeninhalt A_n des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.
Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat.



Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes

$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \left(\frac{3}{4}a - x\right) : x$$

woraus man $\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}a - x$ und mithin $\frac{5}{2}x = \frac{3}{4}a$ bzw. $x = \frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $P_1A_2 = y$, so gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y \qquad \text{also} \qquad \frac{3}{2}y = \frac{1}{4}a \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{6}a$$

Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks

$$A_8 = a^2 - 4\frac{\frac{1}{6}a + \frac{3}{10}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) \cdot 2 + \frac{9}{100}a^2 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2$$

Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.

Aufgabe 4 - 130834

Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3a-2}{a+1} < 0$$

Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl a mit $3a - 2 > 0$ und $a + 1 < 0$. Dann folgte aus $3a - 2 > 0$ einerseits $a > \frac{2}{3}$ und aus $a + 1 < 0$ andererseits $a < -1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als 3 und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

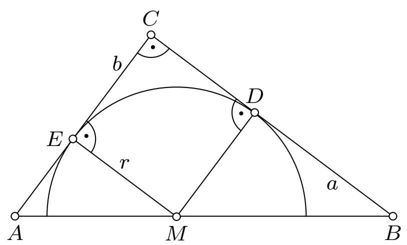
Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a - 2 < 0$ und $a + 1 > 0$ gilt. Nun ist $3a - 2 < 0$ gleichbedeutend mit $a < \frac{2}{3}$ und $a + 1 > 0$ mit $a > -1$.
Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1 < a < 1$ gilt.

Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1 < a < \frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichungen.

Aufgabe 5 - 130835

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, dass die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesem Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.

Beweise, dass für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!



Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt:

$MD = r$ und $MD \parallel AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und $ME = r$ und $ME \parallel BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C). Folglich ist $MDCE$ ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Nach dem Strahlensatz gilt nun:

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{b-r} \qquad \text{also} \qquad ab = br + ar$$

Daraus erhält man durch Division mit abr: $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, w.z.b.w.

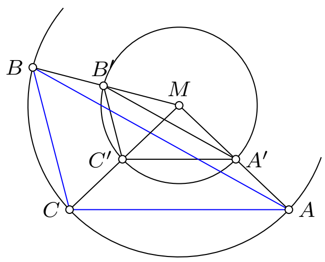
Aufgabe 6 - 130836
Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4$ cm genügt!

Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck $A'B'C'$, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $A'B' = 4$ cm beträgt.

Dabei gilt weiter $A'C' = 3$ cm, $B'C' = 2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm, $c' = 4$ cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.



(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $B'C' = 2$ cm, $C'A' = 3$ cm, $A'B' = 4$ cm sowie dessen Umkreismittelpunkt M.
(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.
(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle A'B'C'$ hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen $2 : 3 : 4$. Ebenso gilt laut Konstruktion $AM = BM = CM = r$, d.h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2 + 3 > 4$; $2 + 4 > 3$ und $3 + 4 > 2$ ein Dreieck $A'B'C'$ mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der III. Runde 1973 übernommen von [5]

5.16 XIV. Olympiade 1974

5.16.1 I. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140811

$$\begin{array}{ccccccccc} A & B & C & - & D & E & = & A & F & G \\ & : & & & & - & & & - & \\ & & H & \cdot & H & A & = & & C & H \\ \hline & B & J & + & A & J & = & A & A & C \end{array}$$

Ermittle sämtliche Lösungen des Kryptogramms, d.h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

(I) Angenommen, bei einer Angabe von Ziffern für die Buchstaben $A, ..., J$ seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann folgt:
Da AJ und BJ je zweistellig, also kleiner als 100 sind, ist ihre Summe kleiner als 200. Da sie dreistellig ist, hat sie die erste Ziffer $A = 1$. (1)
Da somit $AJ < 20$ und $AAC \geq 110$ ist, folgt $BJ > 90$, also $B = 9$. (2)
Wegen $A = 1$ ist $ABC < 200$; wegen $ABC : H = BJ$ gilt daher $H < 200 : 90 < 3$. Da andererseits H Anfangsziffer ist, also $H \neq 0$ gilt, und da $H \neq A = 1$ ist, folgt $H = 2$. (3)

Damit ergibt sich $CH = H \cdot HA = 2 \cdot 21 = 42$, also $C = 4$. (4)
Weiter folgt $BJ = ABC : H = 194 : 2 = 97$, also $J = 7$. (5)
Sodann erhält man $DE = HA + AJ = 21 + 17 = 38$, also $D = 3$ (6) und $E = 9$. (7)
Schließlich ergibt sich $AFG = ABC - DE = 194 - 38 = 156$, also $F = 5$ (8) und $G = 6$ (9). Daher kann nur (10):

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 9 & 4 & - & 3 & 8 & = & 1 & 5 & 6 \\ & : & & & & - & & & - & \\ & & 2 & \cdot & 2 & 1 & = & & 4 & 2 \\ \hline & 9 & 7 & + & 1 & 7 & = & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

Lösung des Kryptogramms sein.

(II) Da die Angaben (1) bis (9) den verschiedenen Buchstaben A, ..., J verschiedene Ziffern zuordnen, die, wie aus (10) ersichtlich ist, alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben des Kryptogramms richtig lösen, hat dieses somit genau die angegebene Lösung.

Aufgabe 2 - 140812
Ermittle alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

(I) Angenommen, $(x; y)$ sei eines der gesuchten Paare. Dann gilt

$$y = \frac{82 - 13x}{5} \qquad \text{also} \qquad 2y = \frac{164 - 26x}{5} = 32 - 5x + \frac{4 - x}{5}$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, folgt hieraus $5|4 - x$, d.h., es gibt eine ganze Zahl n mit $4 - x = 5n$, also $x = 4 - 5n$. Daraus folgt

$$y = \frac{82 - 13(4 - 5n)}{5} = 6 + 13n$$

Wegen $x \geq 0$ folgt $4 - 5n \geq 0$, also $n \leq \frac{4}{5}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \leq 0$.
Wegen $y \geq 0$ folgt $6 + 13n > 0$, also $n \geq -\frac{6}{13}$ und, da n ganzzahlig ist, somit $n \geq 0$.
Daher ergibt sich $n = 0$, also $x = 4, y = 6$. Somit kann höchstens das Paar (4;6) die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Tatsächlich ist $(4;6)$ ein Paar natürlicher Zahlen, und es gilt $13 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 52 + 30 = 82$. Das Paar $(4;6)$ erfüllt daher als einziges die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 3 - 140813
Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, dass die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.

Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

Der Flächeninhalt A_1 der Kreisfläche des Kreises k_1 beträgt $A_1 = \pi r_1^2$, der Inhalt A_R einer Kreisringfläche zwischen k_1 und einem Kreis k_2 mit dem Radius r_2 und dem Mittelpunkt M ist

$$A_R = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

Daher ist die in der Aufgabenstellung geforderte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $3\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $4r_1^2 = r_2^2$ und dies wegen $r_1 > 0, r_2 > 0$ mit $2r_1 = r_2$.

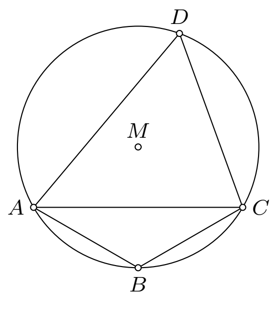
Der Kreis k_2 hat somit genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sein Radius doppelt so groß ist wie der des Kreises k_1.

Aufgabe 4 - 140814
Für zwei Sehnen AB und BC $(A \neq C)$ eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Es ist zu beweisen, dass die Gerade durch D und B den Winkel $\angle ADC$ halbiert!

Um den Peripheriewinkelsatz anwenden zu können, beweisen wir zunächst, dass D und C auf demselben von A und B begrenzten Bogen von k liegen.

Würden D und C auf verschiedenen von A und B begrenzten Bögen von k liegen, dann müsste die Sehne AB die Sehne DC schneiden. Nun liegen laut Aufgabe D und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C. Wegen $A \neq C$ liegen daher auch DC und AB auf verschiedenen Seiten dieser Geraden und können sich mithin nicht schneiden.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt nun

$$(1) \quad \angle ADB = \angle ACB \qquad ; \qquad (2) \quad \angle BDC = \angle BAC$$

Da ABC gleichschenklig mit $AB = BC$ ist, gilt (3) $\angle ACB = \angle BAC$. Aus (1), (2), (3) folgt $\angle ADB = \angle BDC$, w.z.b.w.

Lösungen der I. Runde 1974 übernommen von [5]

5.16.2 II. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140821
Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.

Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

Die Anzahl aller von den Schülern der Stadt B bei dieser Kreisspartakiade errungenen Goldmedaillen sei g, die der Silbermedaillen s und die der Bronzemedaillen b. Dann gilt laut Aufgabe:

$$g + s + b = 42 \quad (1); \qquad s = \frac{63}{3} = 21 \quad (2); \qquad 10 < b < 12 \quad (3)$$

Daraus folgt, da b ganzzahlig ist, $b = 11$ und somit wegen (1) und (2) $g = 42 - 21 - 11 = 10$.
Die Schüler der Stadt B errangen 10 Gold-, 21 Silber- und 11 Bronzemedaillen.

Aufgabe 2 - 140822
Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{km}{h}$ und B mit 40 $\frac{km}{h}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müsste C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{km}{h}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

Angenommen, A habe die in der Aufgabe genannte Strecke in t Stunden zurückgelegt. Dann benötigte B für dieselbe Strecke $(t + 2)$ Stunden. Daher gilt $56t = 40(t + 2)$, woraus man $t = 5$ erhält.
A legte mithin die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $km \cdot h^{-1}$ in 5 Stunden zurück. Die Strecke war daher 280 km lang.

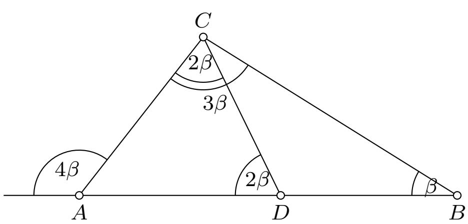
Wegen $280 : 35 = 8$ würde D für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 35 $km \cdot h^{-1}$ genau 8 Stunden brauchen. Da C erst 4 Stunden später als D abfahren soll, müsste er die gesamte Strecke in genau 4 Stunden zurücklegen, wenn er gleichzeitig mit D am Ziel eintreffen will. Wegen $280 : 4 = 70$ müsste er dabei eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 $km \cdot h^{-1}$ einhalten.

Aufgabe 3 - 140823
Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, dass für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!



Es sei $\angle ABC = \beta$, Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\angle ACB$ somit 3β, also gilt $\angle ACB > \angle ABC$.

Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seite gegenüberliegt, $AB > AC$.

Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $AD = AC$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt $\angle ADC = \angle ACD = 2\beta$.

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art

$$\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 3\beta - 2\beta = \beta = \angle DBC$$

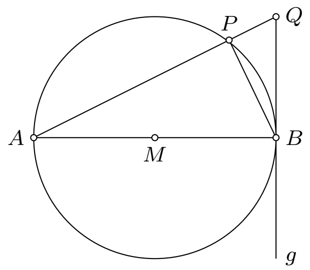
also ist $\triangle CDB$ gleichschenklig mit $DB = DC$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 140824
Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:

Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, dass $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

(I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\angle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\angle BPQ$ ebenfalls ein rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius PQ.
Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.
Daraus folgt, dass ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II)
(1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.
(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.
(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.
(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.
(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BQ = 6$ cm und $PQ = 3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$).
Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
(3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten.
Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar.

Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der II. Runde 1974 übernommen von [5]

5.16.3 III. Runde 1974, Klasse 8

Aufgabe 1 - 140831
Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Namen der Schüler dem Alter nach ordnen.
Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira.
(2) Berta ist jünger als Christine.
(3) Dieter ist jünger als Anton.
(4) Elvira ist älter als Christine.
(5) Anton ist jünger als Christine.
(6) Elvira ist älter als Dieter.
(7) Christine ist jünger als Dieter.

Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Namen der Schüler dem Alter nach (beginnend mit dem Jüngsten)!

Das Alter eines jeden Schülers sei mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet. Angenommen, (5) wäre wahr. Dann folgte erstens, dass (1) und (4) nicht beide wahr sein könnten; zweitens folgte auch, dass (7) und (3) nicht beide wahr sein könnten.

Es gäbe also unter den Aussagen (1) bis (7) mehr als eine falsche. Damit ist die Annahme, (5) wäre wahr, widerlegt; d.h., (5) ist die falsche Aussage, und (1), (2), (3), (4), (6) und (7) sind wahr.
Aus (2) folgt $B < C$, aus (7) folgt $C < D$, aus (6) folgt $D < E$, aus (1) folgt $E < A$.
Die verlangte Reihenfolge der Schüler lautet mithin: Berta, Christine, Dieter, Elvira, Anton.

Aufgabe 2 - 140832
Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

a) Ihre Summe ist eine Primzahl.
b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

Angenommen, zwei Primzahlen P_1, P_2 haben die verlangten Eigenschaften. Eine der Primzahlen P_1 und P_2 muss wegen (a) 2 sein, da die Summe ungerader Primzahlen stets größer als 2 und durch 2 teilbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_1 = 2$.

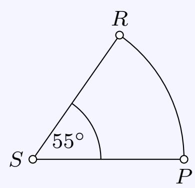
Wegen (b) gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$(2 + P_2) \cdot 2P_2 = 10n \qquad \text{also} \qquad (2 + P_2)P_2 = 5n$$

ist. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren gilt entweder $2+P_2 = 5$, d.h. $P_2 = 3$ oder $P_2 = 5$.

Also erfüllen höchstens die Primzahlen $(2; 3)$ und $(2; 5)$ die Bedingungen. In der Tat haben sie die verlangten Eigenschaften; denn ihre Summen $P_1 + P_2$ sind 5 bzw. 7, jeweils also eine Primzahl.
Die Produkte $(P_1 + P_2)P_1P_2$ sind 30 bzw. 70, jeweils also durch 10 teilbar.

Aufgabe 3 - 140833
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\angle PSR$ der Größe 55° (siehe Abbildung).



Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d.h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, dass k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

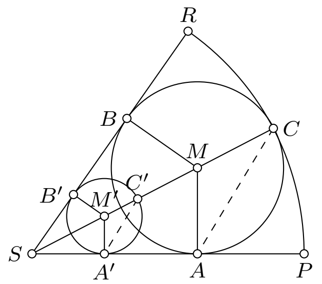
(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.

A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\overparen{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle MBS$ wegen $SM = SM$, $MA = MB$ (Radius von k) und $\angle MAS = \angle MBS = 90°$.

Daher ist $\angle MSA = \angle MSB$, so dass s den Winkel $\angle PSR$ halbiert. Wegen $MA = MC$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit $\angle ACM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle AMS$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt.

Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $M'A'$, so ist $\angle A'M'S = \angle AMS$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\angle ASM = \angle A'SM'$ und $\angle SAM = \angle SA'M' = 90°$.

Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\overparen{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\overparen{PR}$ sei C.
(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot $M'A'$ auf SP.
(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $M'A'$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.
(4) Man zeichnet die Parallele zu $A'C'$ durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.
(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.
(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MA.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Da gemäß (5) $\angle MAS = 90°$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR.

Wegen $CA \parallel C'A'$ (nach (4)) gilt $\angle SCA = \angle SC'A'$ und wegen $MA \parallel M'A'$ (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)), $\angle CMA = \angle C'M'A'$.

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $M'A' = M'C'$ ist $MA = MC$. Daher berührt k den Bogen $\overparen{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, PR und der Zentralen durch M und S.

(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:

(2) Für den Fußpunkt A' des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P gilt $SA' < SM' < SC = SP$, also liegt A' auf SP wegen $\angle CSP < 90°$:
(4) Weil M' auf SC' liegt, gilt $SA' < SC'$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P $SA < SC = SP$, also liegt wegen $\angle CSP < 90°$ der Punkt A auf SP.
(5) Der Schnittpunkt M mit der Geraden durch S und C gilt nach dem Strahlensatz, und weil M' auf SC' liegt,

$$SM = \frac{SM'}{SC'} \cdot SC < SC$$

woraus, weil A auf SP liegt und $\angle CSP < 90°$ ist, folgt, dass M auf SC liegt.

Aufgabe 4 - 140834
Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden ein Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

- Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.
- Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
- Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt. Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

Es wurden genau je 2 Spiele der folgenden Zusammenstellung gespielt: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Daher wurden insgesamt 12 Partien gespielt und mithin 12 Punkte vergeben.

Wenn nun bei einer Punktverteilung, die den Angaben entspricht, Achim, Bernd, Christian und Detlef in dieser Reihenfolge a, b, c, d Punkte erzielten, so gilt:

$$a + d + 1 = b + c \qquad (1)$$
$$c + d = 7 \qquad (2)$$
$$b + d = a + c + 5 \qquad (3)$$

Weil 12 Punkte insgesamt vergeben wurden, d.h. $a+b+c+d = 12$ gilt, kann man aus dem entstandenen Gleichungssystem von 4 Gleichungen der Reihe nach die Unbekannten zu eliminieren und dann der Reihe ermitteln.

Es ergibt sich $a = 1$, $d = 4{,}5$, $b = 4$ und $c = 2{,}5$. Daher kann nur die Antwort, Achim erhielt 1 Punkt, Bernd 4 Punkte, Christian 2,5 Punkte und Detlef 4,5 Punkte, den Angaben entsprechen.

In der Tat erfüllt diese Antwort alle Bedingungen der Aufgabe. Denn wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es Beispiele für eine Verteilung der Partieausgänge, bei der die in der Antwort genannte Punktverteilung entsteht.

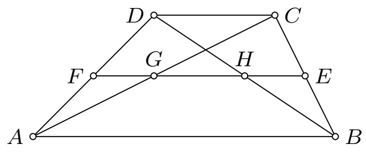
	A	B	C	D	
A	-	1	0	0	1
B	1	-	2	1	4
C	2	0	-	0,5	2,5
D	2	1	1,5	-	4,5

Ferner erhielten bei ihr Bernd und Christian zusammen 6,5 Punkte, also genau einen Punkt mehr als die 5,5 Punkte von Achim und Detlef. Weiterhin erhielten Christian und Detlef zusammen genau 7 Punkte. Schließlich erreichten Achim und Christian zusammen 3,5 Punkte, also genau 5 Punkte weniger als die 8,5 Punkte von Bernd und Detlef.

In jedem Fall steht die Anzahl der Punkte, die der in der jeweiligen Zeile stehende Spieler beim Spiel gegen den in der entsprechenden Spalte stehenden Spieler erzielte.

Aufgabe 5 - 140835
Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der zwei parallelen Seiten.



Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez $ABCD$ die Punkte G und H auf FE. Man wähle die Bezeichnung so, dass $AB \geq CD$ ist.

Behauptung: $GH = \frac{1}{2}(AB - CD)$
Beweis:
Aus dem Satz, dass in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt (1) $FH = \frac{1}{2}AB$ sowie (2) $FG = \frac{1}{2}CD$. Aus (1) und (2) folgt $FH - FG = \frac{1}{2}/AB - CD)$.

Aufgabe 6 - 140836
Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d.h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d.h. die Zahl $x : y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

a) In x kg der 25prozentigen Lösung befinden sich $\frac{25x}{100}$ kg des gelösten Stoffes, in y kg der 60prozentigen Lösung entsprechend $\frac{60y}{100}$ kg. Somit hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wert, wenn sich in den durch Zusammengießen erhaltenen $(x + y)$ kg genau $\frac{35(x+y)}{100}$ kg des gelösten Stoffes befinden, d.h. genau dann, wenn
$$\frac{25x}{100} + \frac{60y}{100} = \frac{35(x + y)}{100}$$
gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit $25x + 60y = 35x + 35y$, $25y = 10x$, $\frac{5}{2} = \frac{x}{y}$.
Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt somit 5 : 2.

b) Mit analoger Begründung wie in a) hat $x : y$ genau dann den gesuchten Wort, wenn
$$\frac{p_1}{100}x + \frac{p_2}{100}y = \frac{p}{100}(x + y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{y} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}$$

Das gesuchte Mischungsverhältnis lautet: $\frac{p_2 - p}{p - p_1}$

Lösungen der III. Runde 1974 übernommen von [5]

5.17 XV. Olympiade 1975

5.17.1 I. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150811
Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet:

> "Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf bezahlt. Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen."

Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

Peter muss im Gemüseladen mindestens 4,11 M bezahlt haben. Hätte er 4,12 M oder mehr entrichtet, so hätte er im Schreibwarengeschäft 4,13 M oder mehr, beim Bäcker 8,26 M oder mehr, beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, hätte daher höchstens 1,97 M wiederbringen können. Daher hat er im Gemüseladen genau 4,11 M bezahlt.

Im Schreibwarengeschäft musste er folglich mindestens 4,12 M bezahlen. Er kann aber auch nicht 4,14 M oder mehr bezahlt haben; denn sonst hätte er beim Bäcker 8,26 M oder mehr und beim Konsum 16,52 M oder mehr, insgesamt also 33,03 M oder mehr bezahlt, was nicht möglich ist.

Folglich hat er im Schreibwarengeschäft genau 4,12 M bezahlt. Beim Bäcker musste er dann laut Aufgabe mindestens 8,25 M bezahlt haben. Er kann aber auch nicht 8,27 M oder mehr bezahlt haben; denn in diesem Falle hätte er beim Konsum 16,51 M oder mehr, insgesamt also 33,01 M oder mehr zu zahlen gehabt, was ebenfalls nicht möglich ist.

Folglich hat er beim Bäcker genau 8,25 M bezahlt. Wegen 4,11 M + 4,12 M + 8,25 M = 16,48 M und da Peter genau 2,00 M zurückbrachte, hat er beim Konsum genau 16,52 M bezahlt.

Aufgabe 2 - 150812

a) Ermittle alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
$$a < 4 \quad (1) \qquad ; \qquad a - b > 0 \quad (2) \qquad ; \qquad a + b > 2 \quad (3)$$

b) Beweise, dass es keine geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a < 0$ oder $b < 0$ ist!

a) I. Wenn ein Paar (a,b) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt,so ist a wegen(1) eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

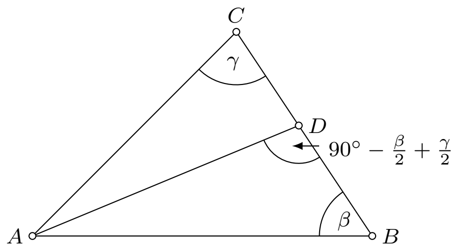
Wäre $a = 0$, so folgte aus (2) der Widerspruch $b < 0$ gegen die Eigenschaft von b, natürliche Zahl zu sein.
Wäre $a = 1$, so folgte aus (2) zunächst $b = 0$ und damit $a + b = 1$ im Widerspruch gegen (3).
Für $a = 2$ folgt aus (2), (3) einerseits $b < 2$, andererseits $b > 0$, also $b = 1$.
Für $a = 3$ folgt aus (2) die Ungleichung $b < 3$.

Daher können nur die Paare $(2,1), (3,0), (3,1), (3,2)$ (4) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen.

II. Für alle diese Paare ist in der Tat $a < 4$; ferner hat $a - b$ für sie die Werte 1, 3, 2, 1, die alle größer als 0 sind; schließlich hat $a + b$ die Werte 3, 3, 4, 5, die alle größer als 2 sind.
Also sind die Paare (4) alle in Aufgabe a) zu ermittelnden.

b) Gäbe es ein Paar (a,b) ganzer Zahlen mit (1), (2), (3) und $a < 0$, so folgte aus (2) auch $b < 0$ und damit $a + b < 0$ im Widerspruch gegen (3).
Gäbe es ein Paar mit (1), (2), (3) und $b < 0$, so folgte $b \leq -1$, aus (1) aber $a \leq 3$ und damit $a + b \leq 2$ im Widerspruch gegen (3).

Aufgabe 3 - 150813
Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\angle BDA$ die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$.



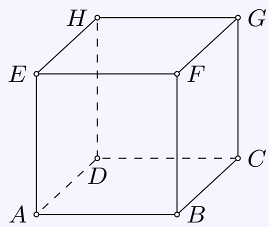
Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABD hat $\angle BAD$ die Größe

$$180° - \beta - (90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}) = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABC hat $\angle BAC$ die Größe $180° - \beta - \gamma$, er ist also doppelt so groß wie $\angle BAD$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 150814

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Abbildung).
Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrisstafel als auch parallel zur Aufrisstafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend der Abbildung zu benennen.



Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!

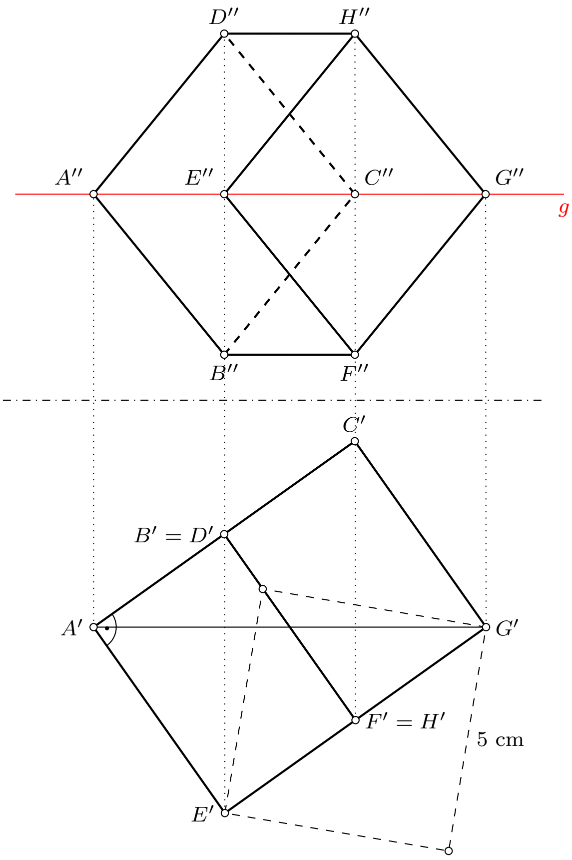
Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

Eine Möglichkeit, die Forderung der Aufgabe zu erfüllen, ist die folgende:
Man legt die Ebene ϵ, in der das Rechteck $AEGC$ liegt, parallel zur Grundrisstafel. Als Grundriss $A'E'G'C'$ erscheint $AEGC$ dann in wahrer Größe.
Wählt man seine Lage insbesondere so, dass $A'G'$ parallel zur Achse verläuft, so ist die in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt. Bei dieser Lage lassen sich Grund- und Aufriss durch folgende Konstruktion finden:

Man konstruiert ein Quadrat mit der gegebenen Kantenlänge 5 cm. Ist d seine Diagonalenlänge, so konstruiert man ein Rechteck $A'E'G'C'$ mit der Kantenlänge $A'E' = 5$ cm und $A'C' = d$.

Die Achse der Zweitafelprojektion wählt man parallel zu $A'G'$. Die Strecken BD und FH schneiden die Strecken AC bzw. EG in ihren Mittelpunkten und stehen senkrecht auf der Ebene ϵ. Also ist der Mittelpunkt von $A'C'$ der gemeinsame Grundriss $B' = D'$ der Punkte B und D.
Ebenso ist der Mittelpunkt von $E'G'$ der gemeinsame Grundriss $F' = H'$ von F und H.
Als von oben sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A'E'$, $E'G'$, $G'C'$, $C'A'$ sowie die Strecke $D'H'$, (von der die Strecke $B'H'$ verdeckt wird, wenn angenommen wird, dass $A'E'G'H'$ von oben gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen ist und folglich DH oberhalb BF liegt).

Die Aufrisse A'', E'', G'', C'' liegen auf einer Parallelen g zur Achse sowie auf den Ordnungslinien durch A', E', G' bzw. C'. Zur Bestimmung von B'' und D'' schneide man zunächst g mit der Ordnungslinie durch $B' = D'$.



Da die Strecke BD mit ihrem in ϵ liegenden Mittelpunkt im Aufriss in wahrer Größe erscheint, findet man B'' und D'', indem man nun von dem Schnittpunkt (E'') aus auf der Ordnungslinie nach beiden Seiten die Länge $\frac{d}{2}$ abträgt.
Ebenso findet man F'' und H'' auf der Ordnungslinie durch F' von deren Schnittpunkt (C'') mit g aus im Abstand $\frac{d}{2}$. Dabei sind B'', F'' unterhalb, D'', H'' oberhalb g zu zeichnen.

Als von vorn sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A''B''$, $B''F''$, $F''G''$, $G''H''$, $H''D''$, $D''A''$ sowie die vom Aufriss E'' des Punktes E ausgehenden Kanten $E''A''$, $E''F''$, $E''H''$; denn an der Lage des Grundrisses E' ist E als der am weitesten vorn gelegene Punkt zu ersehen.
Entsprechend werden die von C'' ausgehenden Kanten $C''G''$, $C''D''$, $C''B''$ als verdeckte Kanten gezeichnet.

Lösungen der I. Runde 1975 übernommen von [5]

5.17.2 II. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150821
Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

Die von der Gesamtmasse 2000 g genommenen 12 %, das sind $\frac{12}{100} \cdot 2000$ g $= 240$ g, sind laut Aufgabe genau 20 %, d.h. ein Fünftel der Masse des Wassers. Wegen 240 g $\cdot 5 = 1200$ g enthielt das Gefäß also 1200 g Wasser. Mithin beträgt die Masse des leeren Gefäßes 800 g.

Aufgabe 2 - 150822
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

Wenn bereits das Doppelte der kleinsten der sechs Zahlen $(n+1)$ die größte $(n+6)$ übertrifft, also $2(n+1) > (n+6)$ und mithin $n > 4$ gilt, kann aus den sechs Zahlen sicher kein geordnetes Paar mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften gefunden werden.

Da aus $n > 4$ stets auch $2(n+1) > (n+6)$ folgt, kann n höchstens gleich $1, 2, 3, 4$ sein. Analog stellt man fest, dass höchstens für $n = 1$ eine der sechs Zahlen das Dreifache einer anderen sein kann und dass das Vierfache wegen $4(n+1) \geq (n+7) > (n+6)$ nicht auftreten kann. Aus analogen Gründen sind höhere Vielfache erst recht nicht möglich.

Es sei $n = 1$.
Unter den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7 gilt $2|4$, $2|6$ und $3|6$. Weitere Teilbarkeitsbeziehungen treten nicht auf. Folglich erhalten wir in diesem Fall genau die Zahlenpaare $(2;4), (2;6), (3;6)$.

Es sei $n = 2$.
Unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8 treten genau die Teilbarkeitsbeziehungen $3|6$ und $4|8$ auf. Man erhält mithin genau die Paare $(3;6), (4;8)$.

Es sei $n = 3$.
Dann erhält man aus den Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau das Paar $(4;8)$.

Es sei $n = 4$.
Aus den Zahlen 5, 6, 7, 8, 9, 10 erhält man genau das Paar (5;10). Damit sind alle gesuchten Paare ermittelt.

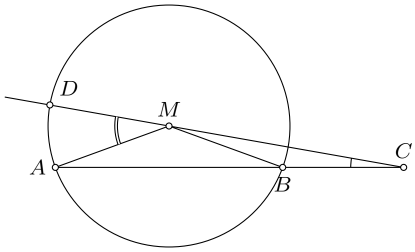
Aufgabe 3 - 150823
Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, dass dann $\overline{\angle AMD} = 3 \cdot \overline{\angle ACM}$ gilt!

Der Winkel $\angle AMD$ ist Außenwinkel des Dreiecks ACM. Folglich gilt: $\angle AMD 0 \angle ACM + \angle MAC$.
Nun gilt: $AM = BM = BC = r$. Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenklig. Daher gilt:

$$(\angle MAC =) \angle MAB = \angle MBA \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle BMC = \angle BCM (= \angle ACM) \quad (2)$$

Der Winkel $\angle MBA$ ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\angle ACM$.

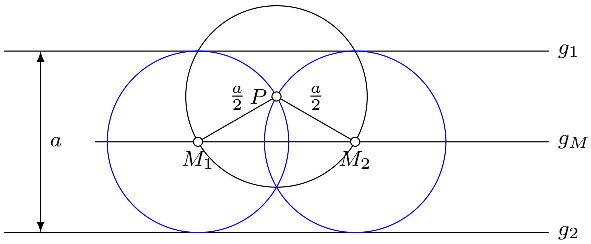


Folglich ist wegen (1) $\angle MAC$ doppelt so groß wie $\angle ACM$ und mithin $\angle AMD$ dreimal so groß wie $\angle ACM$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 150824
Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. (siehe Abbildung). Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit den Radius $\frac{a}{2}$.
Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2.
(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M, so sei M einer der Schnittpunkte.
(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k. Ferner gilt auch nach Konstruktion $MT = \frac{a}{2}$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt, ist der Abstand von P zu g_M gut kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_M mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$. Es entstehen somit stets genau zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

Lösungen der II. Runde 1975 übernommen von [5]

5.17.3 III. Runde 1975, Klasse 8

Aufgabe 1 - 150831
Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger:

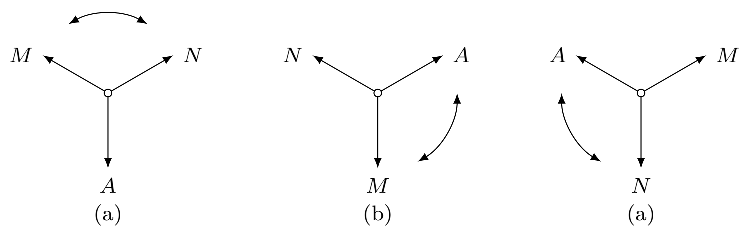
> "Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen. Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet worden sind."

Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf mit Sicherheit ermitteln konnte!

Nach den Erklärungen des Ortskundigen würden alle drei Richtungsschilder auf den richtigen Weg weisen, wenn die beiden falschen Schilder miteinander ausgetauscht würden, da genau zwei der drei Schilder falsch und folglich genau eines richtig beschriftet waren. Weil der Wanderer aus Altdorf kam, konnte er leicht feststellen, ob das Richtungsschild, das nach Altdorf wies, richtig oder falsch beschriftet war.

Wenn es richtig beschriftet war (a), mußten die beiden anderen falsch sein, und er ging den Weg, auf welchen das Schild "Mittendorf" wies.



Wenn es aber falsch beschriftet war (b), (c), konnte er sich dieses Schild mit dem Richtungsschild "Altdorf" vertauscht denken, und dann wiesen alle drei Schilder - auch das nach Neudorf - in die richtige Richtung.

Aufgabe 2 - 150832
Beweise, dass sich alle Primzahlen $p > 3$ in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

Jede Primzahl $p > 3$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar und daher von keiner der Formen

$$6n = 2 \cdot 3n; \qquad 6n + 2 = 2(3n + 1); \qquad 6n + 3 = 3(2n + 1); \qquad 6n + 4 = 2(3n + 2)$$

mit ganzzahligem n. Da sie aber wie jede ganze Zahl von einer der Formen $6n + r$ mit ganzzahligen n, r und $0 \leq r \leq 5$ ist, gilt entweder (1) $p = 6n + 1$ (n ganzzahlig) oder $p = 6m + 5 = 6(m + 1) - 1$ (m ganzzahlig), also mit $n = m + 1$ und (2) $p = 6n - 1$ (n ganzzahlig).

Wäre $n \leq 0$ in (1) oder (2), so ergäbe sich der Widerspruch $p \leq 1$ bzw. $p \leq -1$. Daher ist in beiden Fällen die ganze Zahl $n \geq 1$, w.z.b.w.

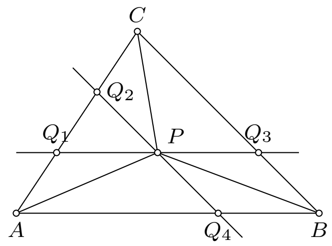
Aufgabe 3 - 150833
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so dass die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

Angenommen, P sei ein Punkt, wie er nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat das Dreieck ABP ein Drittel des Flächeninhalts von ABC als Flächeninhalt. Sind h_c, h'_c die Längen der Höhen

auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP, so ist folglich $h'_c = \frac{1}{3}h_c$.
Also liegt P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h_c$, und zwar, da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, auf derjenigen Parallelen p_1, die auf derselben Seite der Geraden durch A und B verläuft, auf der auch C liegt.
Diese Parallele p_1 schneidet AC in einem Punkt Q_1, für den $AQ_1 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
Ebenso liegt P auf der Parallelen p_2 zu BC durch denjenigen Punkt Q_2 auf AC, für den $CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt. Somit entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man konstruiert die Punkte Q_1 und Q_2 auf AC, für die $AQ_1 = CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
(2) Man zieht die Parallele p_1 zu AB durch Q_1 und die Parallele p_2 zu BC durch Q_2.
(3) Schneiden sich p_1 und p_2, so sei P ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C. Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A. Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3, der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3, und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B.
Damit ist gezeigt, dass P im Innern von $\triangle ABC$ liegt.

Sind ferner h_c, h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP und sind h_a, h'_a die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC, PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für $\triangle ACP$; denn da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, setzt sich $\triangle ABC$ aus den Dreiecken ABP, PBC, ACP zusammen.

IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 4 - 150834
Eine Pioniergruppe wandert von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, dass sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

Die Entfernung von A nach B betrage s km. Die Pioniergruppe hat beim Anstellen ihrer Überlegung bereits 3 km zurückgelegt, muss also noch $(s-3)$ km bewältigen. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Zeit der Quotient aus Weg und Geschwindigkeit.

Bei beiden Geschwindigkeiten $v_1 = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ bzw. $v_2 = 4\frac{\text{km}}{\text{h}} >$ ist die Zeit t vom Beginn der Geschwindigkeitserhöhung bis zur Abfahrt des Zuges gleich. Diese Zeit in Stunden beträgt somit

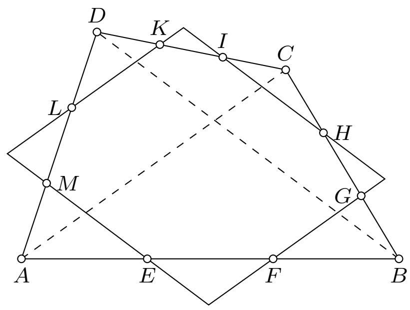
$$t = \frac{s-3}{v_1} - \frac{2}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad t = \frac{s-3}{v_2} - \frac{3}{4}$$

Nach Einsetzen der Werte für v_1 bzw. v_2 erhält man daraus $4s - 12 - 8 = 3s - 9 + 9$, also $s = 20$. Die Länge des Weges von A nach B beträgt somit 20 km.

Aufgabe 5 - 150835
Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$

auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, dass $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und
auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C Liegen, dass $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und
auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, dass $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und
auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, dass $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt,

so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.



Nach Voraussetzung gilt: $AM : AD = 1 : 3 = AE : AB$.
Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.

Da ferner $ABCD$ konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von $\triangle ABD$, während ME innerhalb $\triangle ABD$ liegt. Also sind die Gerade durch M, E und die Gerade durch I, H zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F, G und die Gerade durch L, K. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 - 150836
Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, dass die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, dass die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll.

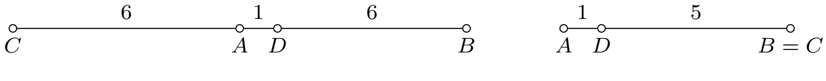
Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, dass für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d.h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Es sei $BC = b$, $CD = c$, $AC = e$, $BD = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD, ABC und ACD, gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)

$$5 < f < 7 \tag{1}$$
$$6 - e < b < 6 + e \tag{2}$$
$$e - 1 < c < e + 1 \tag{3}$$

Aus (1) und $e + f = 11$ folgt $4 < e < 6$ (4). Aus (2), (3) und (4) folgt $5 < b + c < 2e + 7 < 19$. Hieraus und aus $u = b + c + 7$ folgt $12 < u < 26$. Wie die Abbildung zeigt, treten diese Längen $x = 12$ (cm) und $y = 26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leq u \leq 26$.



Lösungen der III. Runde 1975 übernommen von [5]

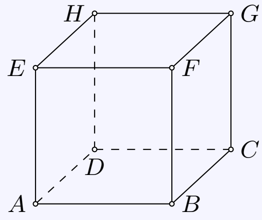
5.18 XVI. Olympiade 1976

5.18.1 I. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160811

Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.

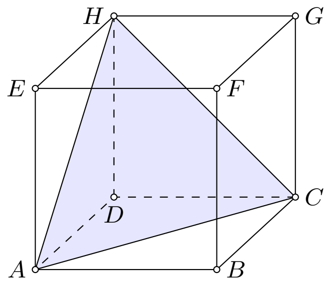
Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!



Angenommen, zwei Ecken einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Körperdiagonalen. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AG haben, was nicht möglich ist.

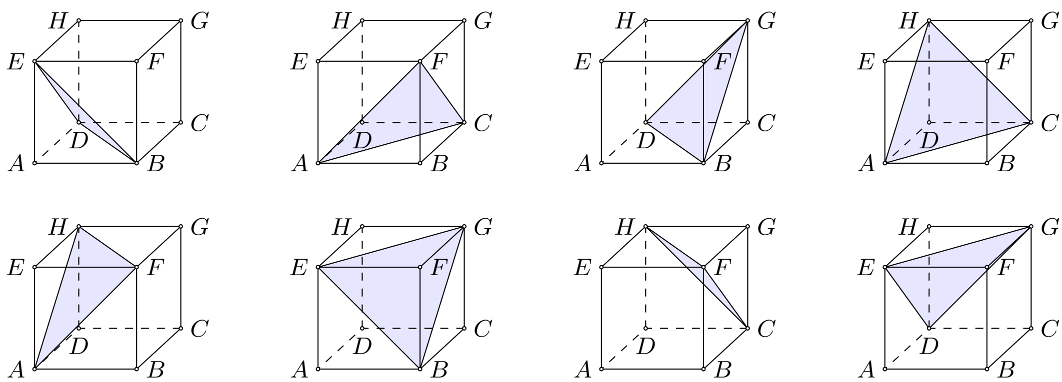
Angenommen, zwei Eckpunkte einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Würfelkante. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AB haben, was für keinen Eckpunkt des Würfels zutrifft.

Also kann nur dann ein der Aufgabe entsprechendes Schnittdreieck vorliegen, wenn es drei Flächendiagonalen des Würfels als seine drei Seiten hat. Jedes solche Dreieck ist gleichseitig, da alle Flächendiagonalen des Würfels einander gleich lang sind, also entspricht jede derartige Schnittfigur den Bedingungen.



Die Ecken jedes solchen Dreiecks sind Endpunkte der drei von einer und derselben Würfelecke ausgehenden Würfelkanten. Durch diese Eigenschaft ist jedem Eckpunkt genau ein Dreieck und umgekehrt jedem derartigen Dreieck genau ein Eckpunkt zugeordnet.

Mithin gibt es genau 8 gleichseitige Dreiecke der geforderten Art, nämlich die Dreiecke BDE, ACF, BDG, ACH, AFH, BEG, CFH, DEG.



Aufgabe 2 - 160812
In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen. Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1.11.1976 (Montag) bis 27.11.1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.

Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:

(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13.11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6.11. oder vom 18. bis 20.11.76 oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24.11.76 zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.

Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen!
Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

Wir fertigen eine Tabelle an, in der alle Zeiten, in denen eine Teilnahme am Lehrgang nicht erfolgen kann, durch ein x gekennzeichnet werden. Die Kenn-Nr. bezeichnet an erster Stelle die Woche, an zweiter Stelle die Wochenhälfte. Die Namen der Arbeiter werden nur mit dem Anfangsbuchstaben angegeben.

Kenn-Nr.	Zeit vom	A	B	D	F	G	H	K	L	Teilnehmer
1.1.	1.bis 3.11.		x	x	(e)	x	x			Funke
1.2.	4.bis 6.11.		(d)				x		x	Bauer
2.1.	8.bis 10.11.	(h)	x	x		x	x	x		Arnold
2.2.	11.bis 13.11.		x				(c)	x	x	Hansen
3.1.	15.bis 17.11.	x	x	x	x	x	x	x	(a)	Lehmann
3.2.	18.bis 20.11.	x		(b)	x			x	x	Donath
4.1.	22.bis 24.11.		x	x	x	x	x	(f)		Krause
4.2.	25.bis 27.11.		x		x	(g)	x	x	x	Große

Die Spalte D ergibt sich aus (8). Da L nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen kann, kann D zu diesem Zeitpunkt nicht eingesetzt werden.

(a) Aus Zeile 3.1. ergibt sich, dass L nur vom 15. bis 17.11. eingesetzt werden kann. In Spalte L sind somit alle leeren Felder zu streichen.
(b) Damit wird nach (3) D vom 18. bis 20.11. abgeordnet. In Zeile 3.2. und Spalte D werden nun alle leeren Felder gestrichen.

Unter Fortsetzung dieses Verfahrens: Aufsuchen der einzigen Leerstelle in der jeweiligen Spalte bzw. Zeile und anschließendes Streichen der Leerstellen in der dazugehörigen Zeile bzw. Spalte ergibt sich:

(c) H nimmt vom 11. bis 13.11. teil, und für F entfällt nach (6) der 8. bis 10.11.
(d) Bauer nimmt vom 4. bis 6.11.,
(e) Funke vom 1. bis 3.11.,
(f) Krause vom 22. bis 24.11.,
(g) Große vom 25. bis 27.11.,
(h) Arnold nimmt vom 8. bis 10.11.1976 teil.

Es ist also möglich, und zwar genau auf eine Weise, in der vorgegebenen Zeit jeweils einen Arbeiter zu qualifizieren. Die Reihenfolge der Belegung ergibt sich aus der Tabelle.

Aufgabe 3 - 160813
Beweise den folgenden Satz:

Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

Die kleinste der drei Zahlen ist von der Form $2n$ mit natürlichem n. Von den Zahlen $n, n+1$ ist eine gerade, also ist $n(n+1)$ gerade; folglich ist das zu untersuchende Produkt

$$p = 2n(2n+1)(2n+2) = 2 \cdot 2 \cdot n(n+1)(2n+1)$$

durch 8 teilbar. Von den drei (in p als Faktoren auftretenden) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist eine durch 3 teilbar; dies gilt somit auch für p. Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist p folglich auch durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 160814
Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:

> "Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!"

Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:

> "Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe."

Stimmt diese Behauptung von Fritz?

Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

Ist d der Erddurchmesser und u (in m) der Umfang des gegebenen kleineren Kreises, so gilt $\pi \cdot d = u$. Ist x der in Peters Aufgabe gesuchte Abstand, so ist der Durchmesser des zweiten (größeren) Kreises $d + 2x$. Andererseits ist dessen Umfang $u + 1 = \pi d + 1$; also gilt $\pi(d + 2x) = \pi d + 1$, woraus $2\pi x = 1$, $x = \frac{1}{2\pi}$ folgt.

Analoge Schlüsse gelten aber auch für die Aufgabe von Fritz, wenn d (= 1 mm) = 0,001 m ist, da nämlich der erhaltene Wert $x = \frac{1}{2\pi}$ nicht von d abhängt. Somit stimmt die Behauptung von Fritz. Der gesuchte Abstand beträgt in beiden Fällen $\frac{1}{2\pi}$ (in m), das sind etwa 16 cm.

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen von [5]

5.18.2 II. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160821
Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0,50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wie viel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M.
Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wären. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig.
Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.

Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Widerspruch zur Aufgabe.
Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, dass man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

Aufgabe 2 - 160822
Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.

Um wie viel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt $A_1 = a_1 \cdot b_1$. Er entspricht 100 %.
Die um 25 % verkleinerte Seite habe die Länge a_2, dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1$$

Die um 20 % verlängerte Seite habe die Länge b_2, dann gilt entsprechend $b_2 = \frac{6}{5}b_1$.
Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$A_2 = a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}A_1$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10 % verkleinert.

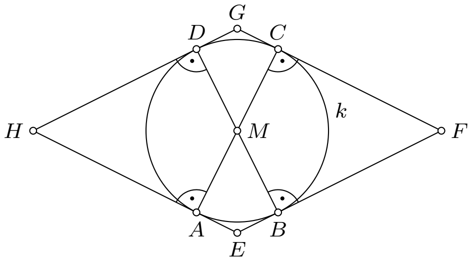
Aufgabe 3 - 160823
In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, dass die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BC sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in der Abbildung bezeichnet, dann gilt: $AM = MC = BM = MD$.
Folglich gilt $\triangle MBP \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s, rechter Winkel).

Hieraus folgt $EP = CP$, $\angle BMF = \angle CMF = \frac{1}{2}\angle BMC$, weil B und C auf verschiedenen Seiten der

Geraden durch M und F liegen, und entsprechend $DH = AH$, $\angle DMH = \angle AMH = \frac{1}{2}\angle DMA$.



Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\angle BMC = \angle DMA$ gilt, folgt $\angle BMF = \angle DMH$ und damit $\triangle MBF \cong \triangle MDH$ (sww), also

$$BF = CF = DH = AH \qquad (1)$$

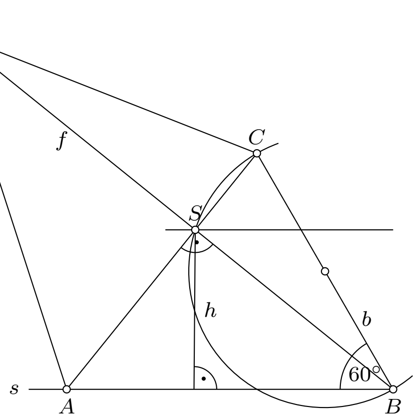
Entsprechend erhält man $BE = AE = DG = GG$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $EH = EF = GF = GH$, d.h., $EFGH$ ist ein Rhombus.

Im Viereck $AMDH$ sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\angle AMD$ und $\angle AHD$ zu 180°. Laut Voraussetzung ist $\angle AMD$ kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle AHD$ kein rechter Winkel und $EFGH$ mithin kein Quadrat.

Aufgabe 4 - 160824
Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Größe β des Innenwinkels $\angle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°.
- Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm.
- Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
- Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm.
- Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.

Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s, der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S. Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.
Daraus folgt, dass ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b.
(2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an. Sein freier Schenkel sei s.
(3) Wir zeichnen den Kreis k, der BC als Durchmesser hat.
(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h.
(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S.

(7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f. Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei $ABCD$ ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\angle ABC$ die Größe $\beta = 60°$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12{,}5$ cm.

Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3{,}5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90°, wie es verlangt war.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3), (4) sind ausführbar und - bis auf Kongruenz - eindeutig ausführbar.
Bei den gegebenen Werten für β, b, h schneidet genau eine der beiden in (4) konstruierten Parallelen den Kreis k, und zwar in 2 Punkten. Für genau einen von diesen führt (5) zu einem Punkt A.
Sodann ist Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar, und in (7) ergeben sich genau 2 Schnittpunkte von g mit dem Kreis um B mit f. Von den beiden entstehenden Vierecken hat genau eines den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel (das andere hat bei B einen Innenwinkel der Größe 300°).

Das Viereck $ABCD$ ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der II. Runde 1976 übernommen von [5]

5.18.3 III. Runde 1976, Klasse 8

Aufgabe 1 - 160831
Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, dass er diese Summe nicht "passend" hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Wenn eine Möglichkeit für derartige Anzahlen von Münzen vorliegt, so gilt:

1) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, eine 10-Mark-Münze gewesen, so folgte der Widerspruch, dass die übrigen Münzen zusammen genau 31 M ergeben hätten.

2) Wäre keine 10-Mark-Münze, aber eine 5-Mark-Münze dabei gewesen, so ließen sich die restlichen 36 M nicht nur aus 20-Mark-Münzen zusammenstellen; mindestens 16 M müssten in 5-M-, 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.

a) Wäre unter diesen eine weitere 5-M-Münze, so ergäbe sie zusammen mit der zuvor genannten 5-M-Münze 10 M, und es folgte wie in 1) ein Widerspruch.

b) Wären es aber nur 2-M- und 1-M-Münzen, so wären es entweder mindestens fünf 2-M-Münzen, womit wieder 10 M zusammenkämen, oder es wären höchstens vier 2-M-Münzen, also mindestens acht 1-M-Münzen. Aus fünf von ihnen und der 5-M-Münze erhielte man ebenfalls 10 M, so dass wiederum ein Widerspruch vorliegt.

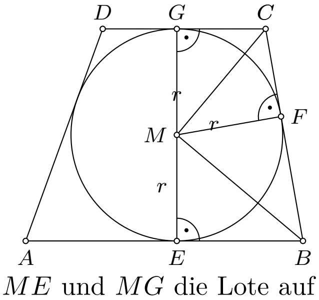
3) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, keine 10-M- und keine 5-M-Münze, aber eine 2-M-Münze oder zwei 1-M-Münzen gewesen, so ließen sich die restlichen 39 M nicht nur aus 20-M-Münzen zusammenstellen; mindestens 19 M müssten in 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.
Darunter wären entweder mindestens fünf 2-M-Münzen oder aber höchstens vier 2-M-Münzen und dann folglich mindestens elf 1-M-Münzen, womit in jedem Falle wiederum 10 M zusammengestellt werden könnten.

4) Also hatte Uwe höchstens eine 1-M-Münze und sonst nur 20-M-Münzen bei sich. Unter diesen Bedingungen lassen sich aber 41 M nur so zusammensetzen, dass genau eine 1-M-Münze und genau zwei 20-M-Münzen vorliegen.

Diese Zusammensetzungsmöglichkeit erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da sich aus diesen Münzen nur die Beträge 1 M, 20 M, 21 M, 40 M und 41 M zusammenstellen lassen, also nicht 31 M.

Aufgabe 2 - 160832
Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, dass jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, dass dann $\overline{\angle BMC} = 90°$ ist!



Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC, CD seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bezeichnet.
Wegen $MB = MB, ME = MF = r$ sowie $\angle BEM = \angle BFM = 90°$ (Berührungsradius) gilt $\triangle BME \cong \triangle BMF$ nach dem Kongruenzsatz (ssw). Analog lässt sich $\triangle CMG \cong \triangle CMF$ zeigen. Folglich gilt:

$$\angle GMC = \angle CMF \qquad \text{sowie} \qquad \angle FMB = \angle BME$$

Da ME und MG die Lote auf die Parallelen AB und CD von dem zwischen ihnen liegenden Punkt M aus sind, ist $\angle GME = 180°$. Wegen

$$\angle BME + \angle FMB + \angle CMF + \angle MGC = \angle GME = 180° \qquad \text{d.h.} \qquad 2 \cdot \angle FMB + 2 \cdot \angle CMF = 180°$$

gilt somit $\angle BMC = \angle FMB + \angle CMF = 90°$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 160833
In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Wenn die Kantenlängen a, b, c (in cm) des quaderförmigen Innern des Kastens den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen, so gilt o.B.d.A.

$$a \cdot b \cdot 2 = 600 \quad (1) \qquad ; \qquad a \cdot c \cdot 3 = 600 \quad (2) \qquad ; \qquad b \cdot c \cdot 4 = 600 \quad (3)$$

Dividiert man (1) durch (3), so erhält man $\frac{a}{2c} = 1$ bzw.(4) $a = 2c$. Setzt man (4) in (2) ein, so folgt $6c^2 = 600$, und daraus wegen $c > 0$ (5) $c = 10$.

Wegen (5) folgt aus (4) $a = 20$ und aus (1) oder (3) $b = 15$.
Also können nur 10 cm, 15 cm, 20 cm als Innenmaße des Kastens und mithin nur der Wert 3000 cm^3 für sein Fassungsvermögen den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen.

Aufgabe 4 - 160834
Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z.B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1)	Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern	$7 \cdot 2 = 14$
(2)	Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.)	1414
(3)	Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern	$49 + 4 = 53$
(4)	Man hängt an das Ergebnis eine Null an	530
(5)	Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt	$1414 + 530 = 1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Sind a und b die beiden Ziffern, so sind die zu multiplizierenden Zahlen $10a + b$ und $10b + a$. Ihr Produkt ist

$$(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab$$

In Rechenschritt (1) ergibt sich nun ab, in Rechenschritt (2) demnach $100ab + ab$. In Rechenschritt (3) ergibt sich $a^2 + b^2$, in (4) also $10(a^2 + b^2)$.
Somit führt Rechenschritt (5) auf $100ab + ab + 10(a^2 + b^2)$, also, wie behauptet, auf das zu berechnende Produkt.

Aufgabe 5 - 160835
Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

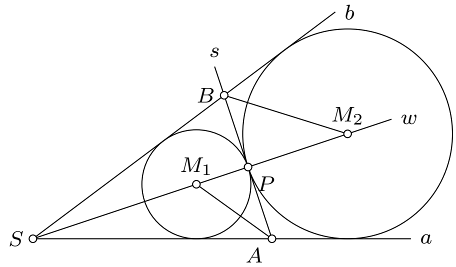
Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

I. Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt dieser Kreis k in dem gegebenen Winkel; sein Mittelpunkt M hat gleiche Abstände zu a und b und liegt folglich auf w. Daher steht die Senkrechte s zu w durch P senkrecht auf einem Durchmesser von k; sie ist also die Tangente in P an k.

Folglich hat M auch gleiche Abstände zu a und s und liegt demnach auf der halbierenden Geraden eines Winkels, den s mit a bildet. Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

II. (1) Man konstruiert in P die Senkrechte s auf w. Schneidet sie a, so sei der Schnittpunkt A genannt.



(2) Man konstruiert die halbierende Gerade eines Winkels, den s mit a bildet. Schneidet sie w in einem Punkt, so sei dieser M genannt.
(3) Man zeichnet den Kreis k um M mit dem Radius MP.

III. Jeder so konstruierte Kreis genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion geht k durch P. Ferner berührt k die Gerade s in P, da M auf w liegt und da sich w und s in P rechtwinklig schneiden. Weiterhin liegt M (auf w, also) in dem gegebenen Winkel sowie auf einer winkelhalbierenden Geraden von a und s; hiernach hat M gleiche Abstände zu a und s.

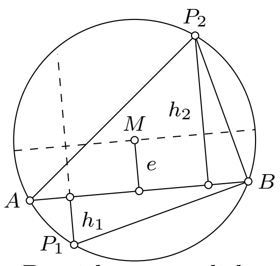
Endlich hat M auch gleiche Abstände zu a und b, da M auf w liegt, also berührt k außer der Geraden s auch die Strahlen a und b.

IV. Die Konstruktion von s nach (1) ist eindeutig ausführbar. Da w mit a einen spitzen Winkel bildet und auf s senkrecht steht, schneiden sich a und s; also ist auch A eindeutig bestimmt.

Die in (2) zu konstruierenden winkelhalbierende Geraden, von denen es genau zwei gibt, schneiden beide w; denn die eine halbiert den Innenwinkel bei A im Dreieck SAP, schneidet also dessen Seite SP zwischen S und P; die andere steht senkrecht auf der ersten, also bildet ein Strahl von ihr mit dem auf s liegenden Strahl aus A durch P einen spitzen Winkel, während w auf s senkrecht steht. Also entstehen in (2) genau zwei verschiedene Schnittpunkte M_1, M_2; es gibt mithin zwei Kreise k_1 und k_2, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 6 - 160836
Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, dass es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.
b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!



a) Der Flächeninhalt von Viereck AP_1BP_2 ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AP_1B und ABP_2. Deren Flächeninhalte sind jeweils am größten, wenn die Längen der Lote von P_1 bzw. P_2 auf die Gerade g durch A und B am größten sind.

Das ist genau dann der Fall, wenn P_1, P_2 die Schnittpunkte von k mit der Mittelsenkrechten von AB sind, d.h. der zu g senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt M von k.

Beweis: Bezeichnen nämlich e, h_1, h_2 die Abstände von M, P_1 bzw. P_2 zu g und sind die Bezeichnungen so gewählt, dass M und P_2 in derselben von g begrenzten Halbebene liegen, so kann man zunächst zu allen Punkten P_2, für die $h_2 < e$ ist, auch Punkte P_2 finden für die $h_2 > e$ gilt, und dann ist stets $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ der Abstand von P_1 bzw. P_2 zu dem zu g parallelen Durchmesser von k; d.h., $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ ist die halbe Länge der durch P_1 bzw. P_2 gehenden auf AB senkrechten Sehne.

Unter allen zu AB senkrechten Sehnen ist aber diejenige am längsten, die durch M geht. Also nehmen auch h_1 und h_2 für diese Lage von P_1, P_2 ihre größten Werte an.

b) Für diese gilt $h_1 + h_2 = 2r$; der größtmögliche Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 ist mithin

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ar.$$

Lösungen der III. Runde 1976 übernommen von [5]

5.19 XVII. Olympiade 1977

5.19.1 I. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170811
Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wie viel Prozent des Anfangspreises müsste eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wie viel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

a) Eine Ware, die anfangs 100 M kostete, kostete nach der

1. Preissenkung um $\frac{5\cdot 100}{100}$ M = 5 M weniger, also 95,- M,
2. Preissenkung um $\frac{5\cdot 95}{100}$ M = 4,75 M weniger, also 90,25 M,
3. Preissenkung um $\frac{5\cdot 90{,}25}{100}$ M = 4,5125 M $\approx$ 4,51 M weniger, also 85,74 M

d.h., bei einer einmaligen Preissenkung auf diesen Endpreis wäre die Ware 100 M - 85,74 M = 14,26 M billiger geworden. Daher müsste die einmalige Preissenkung 14,26 % des Anfangspreises betragen, um denselben Endpreis zu erreichen.

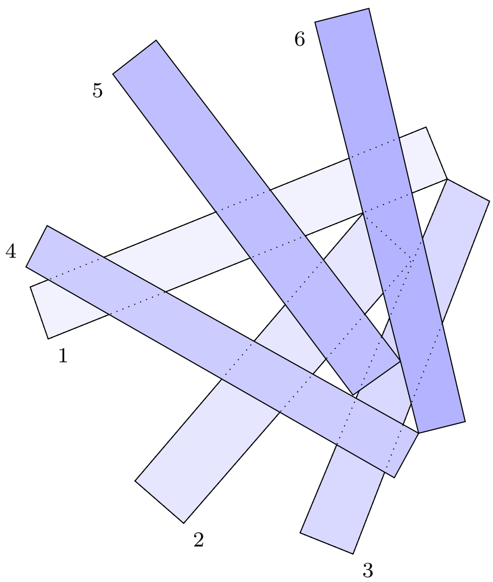
b) Vom Endpreis (85,74 M) als Grundwert ist bei dem gesuchten Prozentsatz x der Anfangspreis (100 M) der Prozentwert. Folglich gilt:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{100}{85{,}74} \qquad ; \qquad x = \frac{10000}{85{,}74}\% \approx 116{,}63\%$$

Der Anfangspreis beträgt somit 116,63 % des Endpreises.

Aufgabe 2 - 170812
Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, dass jedes Stück alle fünf anderen berührt.

Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!



Aufgabe 3 - 170813
Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

Die dem ersten Buchstaben des gesuchten Namens zugeordnete Zahl sei x. Dann lautet wegen

(1) die dem zweiten Buchstaben zugeordnete Zahl $(26 - x)$,
(2) die dem dritten Buchstaben zugeordnete Zahl $(17 - x)$,
(3) die dem vierten Buchstaben zugeordnete Zahl $(10 - x)$,
(4) die dem fünften Buchstaben zugeordnete Zahl $(23 - x)$.

Wegen (5) erhält man mithin

$$x + (26 - x) + (17 - x) + (10 - x) + (23 - x) = 61$$

woraus sich $x = 5$ ergibt.
Die den fünf Buchstaben des gesuchten Namens zugeordneten Zahlen lauten daher der Reihe nach 5, 21, 12, 5, 18. Ihre Ersetzung durch die ihnen zugeordneten Buchstaben des Alphabets ergibt:
E, U, L, E, R. Der gesuchte Name des Mathematikers ist Euler.

Aufgabe 4 - 170814
Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. Uwe dagegen meint, dass nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

Wenn es ein Dreieck ABC gibt, das sich in zwei kongruente Dreiecke zerlegen lässt, so geschieht dies durch ein Stück einer Geraden (zerlegende Strecke); denn sonst entstünden Teilstücke, deren Begrenzung entweder nicht nur geradlinig wäre oder mehr als drei Ecken aufwiese. Die zerlegende Strecke muss von einer der Ecken A, B, C ausgehen, da sonst das Dreieck ABC in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt würde.

O.B.d.A. gehe die zerlegende Strecke von A aus, ihr anderer auf BC gelegener Endpunkt sei F. Dann ist jeder der Winkel $\angle CAF$ und $\angle ACF$ kleiner als $\angle AFB$, da nach dem Außenwinkelsatz ihre Summe so groß wie $\angle AFB$ ist.
Folglich sind die Dreiecke ABF und ACF höchstens dann kongruent, wenn $\angle AFB$ genau so groß ist wie der dritte Winkel $\angle AFC$ des Dreiecks ACF; d.h. wenn jeder von ihnen $90°$ beträgt, da sie Nebenwinkel sind. Dann sind AB und AC als Hypotenusen in kongruenten rechtwinkligen Dreiecken gleichlang, also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Somit hat Uwe recht; denn eine Zerlegung in zwei kongruente Dreiecke ist nur bei gleichschenkligen Dreiecken möglich.

Lösungen der I. Runde 1977 übernommen von [5]

5.19.2 II. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170821
Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z.B. Dirk, verlässt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

Anja:	Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit:	Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.
Christoph:	Ich habe den Fingerhut nicht.

Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte! Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

(1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.

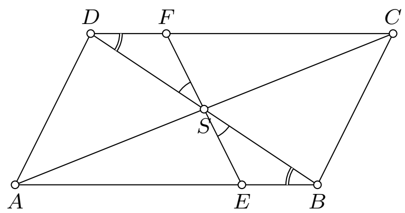
(2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.

(3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen vor. Birgit und Christoph sind wahr.

Also steht eindeutig fest, dass Anja den Fingerhut an sich genommen hatte.

Aufgabe 2 - 170822
Beweise folgenden Satz:

Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

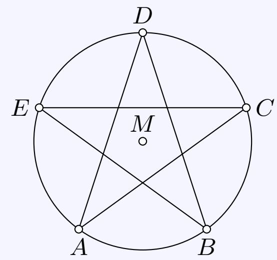


Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, dass die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.

Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms $ABCD$. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $BS = SD$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren.
Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E = B$ folgte wie eben auch $F = D$), und es gilt:

$\angle BSE = \angle DSF$ als Scheitelwinkel und $\angle EBS = \angle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.
Daraus folgt $ES = SF$, d.h., die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

Aufgabe 3 - 170823



Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ADB$!

Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises; dessen Mittelpunkt sei M.
Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so dass jeder dieser Winkel $360° : 5 = 72°$ beträgt.
Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 72° = 36°$$

Aufgabe 4 - 170824
Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

> "Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21. Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre. Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

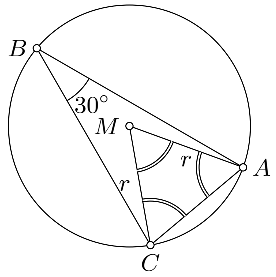
Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre. Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt. Alle zusammen sind wegen $36+6+12+33 = 87$ mithin 87 Jahre, wie es verlangt war.
Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

Lösungen der II. Runde 1977 übernommen von [5]

5.19.3 III. Runde 1977, Klasse 8

Aufgabe 1 - 170831
Es ist zu beweisen:

Wenn der Winkel $\angle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe $30°$ hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks!



Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k.
Der Winkel $\angle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe $60°$. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $AM = MC = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle MCA = \angle MAC = 60°$, d.h., das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $AC = CM = MA = r$, w.z.b.w.

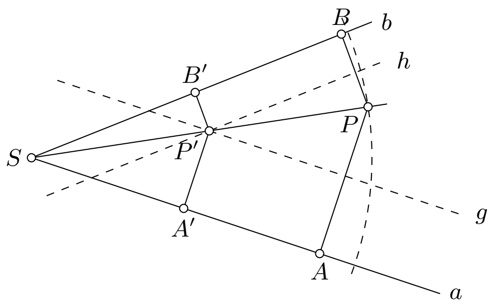
Aufgabe 2 - 170832
Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.

Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!



I. Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $PA = 2PB$, d.h. $PA : PB = 2 : 1$.

Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P'. Die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann $P'A' : PA = SP' : SP$ und $P'B' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.
Hieraus folgt $P'A' : P'B' = PA : PB : 2 : 1$.

Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.

II. Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
(2) Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt. Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
(3) Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach Konstruktion gilt $P'A' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.

Hieraus folgt $PA : PB = P'A' : P'B' = 2 : 1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels. Hierauf ist auch Konstruktionsschritt (3) eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 3 - 170833
Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.

Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{y}{13}$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit $0 < x < 7$ und $0 < y < 13$ sind. Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher $13x - 7y = 9$ uns somit $y = \frac{13x-9}{7}$.

Wir erhalten für $x = 1, ..., 6$:

x	$13x$	$13x - 9$	x	$13x$	$13x - 9$
1	13	4	2	26	17
3	39	30	4	42	43
5	65	56	6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar $y = 8$.
Somit kann nur die Darstellung

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13} \qquad (1)$$

den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt (1).

Aufgabe 4 - 170834
Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wie viel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wie viel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau $(x + 1)$ Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(13x + 6)$ kg.
Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau $(y + 1)$ Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(10y + 5)$ kg.

Nach (3) gilt somit $13x + 6 = 10y + 5$, also $y = \frac{13x+1}{10}$ (*).
$13x + 1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Zifferndarstellung der) Zahl $13x$ auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.

Aus (4) folgt $100 < 2(13x + 6) < 600$ und daraus $44 < 13x < 294$.

Dies wird weder von $x = 3$ noch von den Zahlen $x = 23$ erfüllt, da hierfür $13x = 39$ bzw. $13x = 299$ gilt. Also ist $x = 13$.
Nach (*) ergibt sich daraus $y = 17$. Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.

b) Brigade A sammelte $(13 \cdot 13 + 6)$ kg = 175 kg und Brigade B $(17 \cdot 10 + 5)$ kg = 175 kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.
Wegen $350 \cdot 0{,}15$ M = 52,50 M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.

Aufgabe 5 - 170835
Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1; P_2; P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung genügen:

$$P_1(P_2 + P_3) = 165$$

Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.

1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2)
Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein.
Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel $[3; 53; 2]$ eine Lösung.

2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$. (3)
Analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel $[5; 31; 2]$ ebenfalls eine Lösung.

3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$: (4)
Analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel $[11; 13; 2]$ die Gleichung (1).
Somit sind genau die drei Tripel $[3; 53; 2]$, $[5; 31; 2]$, $[11; 13; 2]$ Lösung von (1).

Aufgabe 6 - 170836
Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wie viel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichenplatte	Stahlplatte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ρ_E	ρ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreiecksfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

$$(1) \quad m_E = A_E \cdot h \cdot \rho_E \qquad , \qquad (2) \quad m_S = A_S \cdot h \cdot \rho_S$$

sowie nach Voraussetzung (3) $\rho_E = \frac{1}{10}\rho_S$ und (4) $A_E = \frac{120}{100}A_S$. Die Masse der Stahlplatte sei x % der Masse der Eichenplatte. Dann gilt $M_s = \frac{x}{100} = m_E$.

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_s}{m_E}100 = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{A_E \cdot h \cdot \rho_E} = \frac{A_S \cdot h \cdot \rho_S \cdot 100}{\frac{120}{100}A_S \cdot h \cdot \frac{1}{10}\rho_S} = 833\frac{1}{3}$$

Die Masse der Stahlplatte ist um $(833\frac{1}{3} - 100)\% = 733\frac{1}{3}\%$ größer als die der Eichenplatte.

Lösungen der III. Runde 1977 übernommen von [5]

5.20 XVIII. Olympiade 1978

5.20.1 I. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180811
Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.

Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluss des Laufes zeigte sich, dass in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der 2. Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

I. Wenn eine Platzreihenfolge den Bedingungen entspricht, dann folgt für sie: A belegte nicht den 1. und E nicht den 5. Platz, da in der 2. Voraussage für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben war.

Ferner folgt: Da in der 1. Voraussage für genau drei Läufer die Plätze richtig angegeben und keine zwei dieser Plätze zueinander benachbart waren, belegte B den 2. Platz, D den 4. Platz und F den 6. Platz.
E und A belegten daher weder den 2. noch den 4. noch den 6.Platz. Damit sind für alle in der 3. Voraussage angegebenen Plätze mit Ausnahme des ersten die Läufer falsch angegeben.
Mithin belegte C den 1. Platz, da genau eine Platzangabe der 3. Voraussage richtig war. Da E infolgedessen nicht den 1. Platz belegte, verbleibt für E nur noch der 3. Platz und danach für A der 5. Platz. Daher kann nur die Reihenfolge C, B, E, D, A (*) sämtlichen Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

II. Sie entspricht in der Tat diesen Bedingungen; denn in der 1. Voraussage sind genau für B, D, F die erreichten Plätze richtig angegeben; dies sind der 2., 4. und 6. Platz, keine zwei von ihnen sind also zueinander benachbart.
In der 2. Voraussage ist für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben; in der 3. Voraussage ist für einen Platz, nämlich den 1., derjenige Läufer (in diesem Falle C) richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.
Also entspricht genau die Platzreihenfolge (*) allen Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 180812
Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:

- Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil.
- Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125.
- Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note "5".
- Die Anzahl der "Zweien" war eine ungerade Zahl und größer als 12.
- Die Anzahl der "Dreien" war genau so groß wie die der "Zweien".

a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note "1"?

a) Wegen $2{,}3125 = \frac{23125}{10000} = \frac{37}{16}$ und da 37 zu 16 teilerfremd ist, muss die Anzahl der Teilnehmer durch 16 teilbar sein. Die einzige (natürliche) Zahl, die (ganzzahliges) Vielfaches von 16 ist und zwischen 20 und 40 liegt, ist 32. Es waren also 32 Schüler an dieser Klassenarbeit beteiligt.

b) Die Summe der Zensuren ergibt 74, da $\frac{37}{16} \cdot 32 = 74$ ist.
Die Anzahl der "Zweien" ist nicht größer als die Hälfte der Anzahl aller Schüler, sie kann also laut Aufgabe nur 13 oder 15 betragen haben. Falls 15 "Zweien" und damit laut Aufgabe auch 15 "Dreien" geschrieben worden wären, erhielte man als Summe dieser Zensuren 75, im Widerspruch zur oben ermittelten Summe 74.

Es wurden mithin 13 "Zweien" und 13 "Dreien" geschrieben. Folglich erhielten die restlichen 6 Schüler entweder eine "1" oder eine "4".
Da das arithmetische Mittel aller Zensuren weniger als 2,5 betrug, muss die Anzahl der "Einsen" größer gewesen sein als die der "Vieren". Damit verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten:

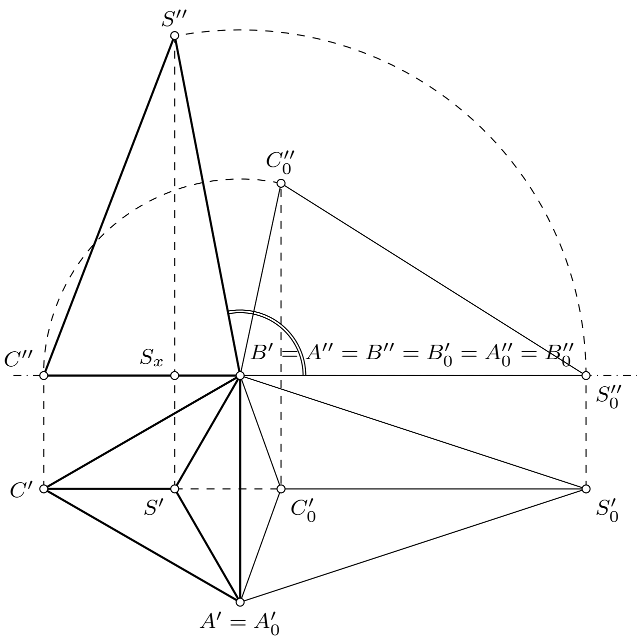
1	2	3	4
6	13	13	0
5	13	13	1
4	13	13	2

Von ihnen ergibt nur der zweite Fall das angegebene arithmetische Mittel. Also erhielten 5 Schüler bei dieser Arbeit die Note "1".

Aufgabe 3 - 180813
Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, dass das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und dass FS die Länge 6 cm hat.

Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, dass die Seitenfläche ABS in der Grundrisstafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.

Bemerkung: Beschreibung und Begründung der Konstruktion werden nicht verlangt. Man kann z.B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrisstafel liegt.



Man wählt zunächst eine solche Lage der Pyramide, dass ihre Grundfläche ABC in der Grundrisstafel liegt, dass dabei die Seite AB senkrecht zur Rissachse verläuft, B auf der Rissachse und S oberhalb der Grundrisstafel liegt.

Dreieck ABC wird dann im Grundriss in wahrer Größe abgebildet als $\triangle A'B'C'$. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Symmetrieachsen und gleichzeitig der Grundriss S' der Pyramidenspitze S.

Man zeichnet also ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ mit der Seitenlänge 4 cm so, dass $A'B'$ senkrecht zur Rissachse verläuft und B' auf derselben liegt. Dann zeichnet man zwei Symmetrieachsen dieses Dreiecks und erhält als Schnittpunkt S'. Die Ordnungslinien durch A', C' und S' schneiden die Rissachse in $A'' = B'' = B'$, C'' bzw. S:

Da die Körperhöhe im Aufriss in wahrer Größe erscheint, verlängert man $S'S_x$ über S_x hinaus und trägt $S_xS'' = 6$ cm auf ihr ab. Nun werde die Pyramide $ABCS$ um die Seite AB geklappt, bis die Seitenfläche ABS in die Grundrissebene gelangt. Die so entstandene Pyramide $A_0B_0C_0S_0$ erfüllt die Forderung der Aufgabe. Ihr Grund- und Aufriss ergibt sich folgendermaßen:

Als Punkte der Drehachse bleiben A und B fest, also gilt $A' = A'_0$ und $A'' = B' = B'' = A''_0 = B'_0 = B''_0$.

Bei der Umklappung beschreiben S und C Kreisbögen, die sich im Aufriss als solche, im Grundriss als Parallele zur Rissachse abbilden.

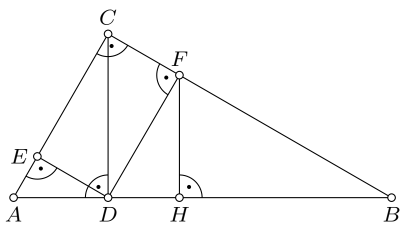
Das Bild S''_0 des Punktes S liegt also erstens auf der Rissachse und zweites auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''S''$ als Radius. Das Grundrissbild S'_0 liegt dann erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch S' und zweitens auf der Ordnungslinie von S''_0.
Da bei der Umklappung der Drehwinkel für alle Punkte der Pyramide der gleiche ist, liegt C''_0 erstens auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''C''$ als Radius und zweitens auf dem freien Schenkel des in A'' an $A''C''$ angetragenen Winkels der Größe $\angle S''A''S''_0$.

Verbindet man nun C''_0 mit A'' sowie mit S''_0, so erhält man den gesuchten Aufriss der Pyramide.
Im Grundriss liegt C'_0 erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch C' und zweitens auf der Ordnungslinie durch C''_0. Verbindet man C'_0 mit $A'_=$, B'_0 und S'_0, sowie S'_0 mit A'_0 und B'_0, so erhält man das geforderte Grundrissbild der Pyramide; sämtliche Seitenkanten der Pyramide sind im Grundriss als sichtbare Kanten wiederzugeben.

Aufgabe 4 - 180814
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\angle CAB$ die Größe 60° hat.
Fälle von C aus das Lot CD auf AB, danach von D aus die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!

Weise nach, dass $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

Die Dreiecke ABC, ACD, ADE, DFH sind rechtwinklig (bei C, D, E bzw. H) und haben je einen Innenwinkel der Größe 60° (bei A bzw. D). Daher gilt



$$AC = \frac{1}{2}AB, \quad AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AB$$

$$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{8}AB, \quad DH = \frac{1}{2}DF$$

Ferner ist $CDEF$ ein Rechteck, also gilt $DF = CE = AC - AE = \frac{3}{8}AB$ und somit $DH = \frac{3}{16}AB$. Daraus folgt einerseits

$$HB = AB - AD - DH = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

andererseits

$$HA + AE = AD + DH + AE = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen von [5]

5.20.2 II. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180821
Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!

(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?

(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.

Wenn die Angaben (1) bis (5) zutreffen, so folgt:

aus (1): $a < e < b$, aus (2): $a < d < b$ aus (3): $E < D < A$, aus (4): $D < B < b$

Aus (1) und (2) folgt, dass Alfred der jüngste, Benno der älteste Schüler ist. Aus (3) und (4) folgt, dass Erbe der jüngste, Dürer der zweitjüngste Schüler ist.

Der jüngste Schüler heißt folglich Alfred Erbe. Da ferner Benno der älteste Schüler ist und er nicht Erbe oder Dürer und wegen (4) nicht Baumbach heißen kann, muss er Ampler heißen.
Aus (5) folgt nunmehr: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Somit heißt der vierte Schüler Egon Baumbach. Daher können nur die Namen Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach und Benno Ampler, in dieser Reihenfolge aufgezählt, die Fragen (a), (b) in Übereinstimmung mit den Angaben (1) bis (5) beantworten.

Umgekehrt zeigt sich: Wenn diese Aufzählung die Namen und die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter angibt, so treffen die Angaben (1) bis (5) zu. Also sind mit dieser Aufzählung die eindeutigen Antworten auf die Fragen (a), (b) ermittelt.

Aufgabe 2 - 180822
Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:

Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

Werden die Größen der Innen- bzw. Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A mit α bzw. α', bei B mit β bzw. β' und bei C mit γ bzw. γ' bezeichnet, so sind die zwischen ihnen einerseits allgemein gültigen und andererseits vorausgesetzten Beziehungen beschrieben durch

$$\alpha' = 180° - \alpha = \gamma' + 16° = 180° - \gamma + 16°$$
$$\beta' = 180° - \beta = \gamma' - 49° = 180° - \gamma - 49°$$

woraus folgt: $\alpha = \gamma - 16°$ und $\beta = \gamma + 49°$, und mit Hilfe des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180° = 3\gamma + 33°$.
Daraus erhält man $\gamma = 49°, \alpha = 49° - 16° = 33°$ und $\beta = 49° + 49° = 98°$.

Tatsächlich existiert wegen $49° + 33° + 98° = 180°$ ein solches Dreieck ABC, und es besitzt außerdem Außenwinkel folgender Größen:

bei C mit $\gamma' = 180° - 49° = 131°$,
bei A mit $\alpha' = 180° - 33° = 147° = 131° + 16° = \gamma' + 216°$ und
bei B mit $\beta' = 180° - 98° = 82° = 131° - 49° = \gamma' - 49°$.

Aufgabe 3 - 180823
Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Angenommen, es gibt eine derartige Zahl. Dann hat sie die Form $10x + y$, wobei x und y natürliche Zahlen mit $x,y \leq 9$ sind. Für diese gilt:

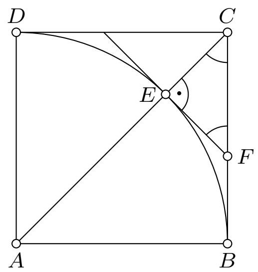
$$10x + y + 2 = 3(10y + x) \qquad \text{somit} \qquad y = \frac{7x + 2}{29}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, ist $7x + 2$ ein Vielfaches von 29. Wegen $0 < x \leq 9$ ist $2 < 7x + 2 \leq 65$; deshalb kommen nur die Fälle $7x + 2 = 29$ und $7x + 2 = 58$ in Frage.
$7x + 2 = 29$ ist nicht in natürlichen Zahlen lösbar. Aus $7x + 2 = 58$ folgt $x = 8$; für y erhält man dann 2.

Also kann höchstens die Zahl 82 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn es gilt $82 + 2 = 84 = 3 \cdot 28$.

Aufgabe 4 - 180824
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.

Beweise, daß die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!



(1) Der Winkel $\angle BCA$ ist 45° groß; denn die Diagonale halbiert den rechten Winkel bei C.
(2) Der Winkel $\angle CEF$ ist 90° groß; denn Berührungsradius und Tangente stehen senkrecht aufeinander.
(3) Aus den Aussagen (1) und (2) ergibt sich: Der Winkel $\angle EFC$ ist 45° groß, und aus den Aussagen (1) und (3) folgt $EF = EC$.

Ferner gilt $\triangle AFE \cong \triangle AFB$ (Übereinstimmung in AF, in $AE = AB$ und in $\angle AEF < \angle ABF$, wobei diese Winkel 90° betragen, also jeweils der längsten Dreiecksseite gegenüberliegen). Daher ist $FB = FE = EC$, w.z.b.w.

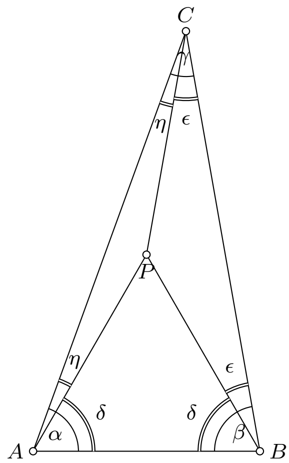
Lösungen der II. Runde 1978 übernommen von [5]

5.20.3 III. Runde 1978, Klasse 8

Aufgabe 1 - 180831
Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, dass $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\angle PAB$, $\angle PAB$ bzw. $\angle PAC$ seien mit δ, ϵ bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ϵ und η für den Fall, dass $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ϵ und eine Formel für η!



a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 30°$. Folglich gilt

$$\delta = \frac{1}{2}(70° + 80° - 30°) = 60° \quad ; \quad \epsilon = \frac{1}{2}(80° + 30° - 70°) = 20°$$

$$\eta = \frac{1}{2}(30° + 70° - 80°) = 10°$$

b) Da die Dreiecke ABP, BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenklig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$$\angle PBA = \angle PAB = \delta \quad , \quad \angle PCB = \angle PBC = \epsilon$$

$$\angle PAC = \angle PCA = \eta$$

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

$$\alpha = \delta + \eta \quad , \quad \beta = \delta + \epsilon \quad , \quad \gamma = \epsilon + \eta$$

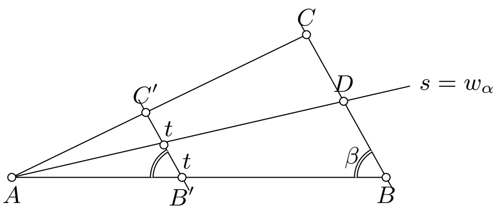
also $\alpha + \beta - \gamma = 2\delta$,

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)$$

Aufgabe 2 - 180832
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\angle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\angle ABC$ die Beziehungen $a : c = 2 : 3$; $w_\alpha = 6$ cm; $\beta = 35°$ gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, dass jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.



a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB', deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.
(2) In B' trägt man an den Strahl aus B' durch A einen Winkel der Größe 35° an.
(3) Auf seinem freien Schenkel trägt man von B' aus diejenige Strecke $B'C'$ ab, deren Länge das Zweifache von t ist.
(4) Man konstruiert den Strahl s, der den Winkel $\angle B'AC'$ halbiert.

(5) Auf s trägt man von A aus die Strecke AD der Länge 6 cm ab.
(6) Man konstruiert die Parallele durch D zu $B'C'$. Sie schneidet den Strahl aus A durch B' in einem Punkt B und den Strahl aus A durch C' in einem Punkt C.

b) Ist $\triangle ABC$ auf diese Weise konstruiert, so folgt:
Nach (6) ist $BC \parallel B'C'$, also $\angle ABC = \angle AB'C'$ (Stufenwinkel an Parallelen) und $\alpha = 35°$ (nach (2)).
Nach (4) ist AD Halbierende des Winkels $\angle B'AC'$, der wegen (6) mit dem $\angle BAC$ zusammenfällt.

Ferner hat AD nach (5) die Länge 6 cm. Nach einem Teil des Strahlensatzes gilt wegen $BC \parallel B'C'$

$$BC : AB = B'C' : AB' = 2t : 3t = 2 : 3$$

Damit sind alle geforderten Eigenschaften für $\triangle ABC$ nachgewiesen.

Aufgabe 3 - 180833
Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede der leere Flaschen) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, dass er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wie viel Geld er dann zurückerhielt!

Jürgen habe x leere Flaschen mitgenommen, er habe y Pfennig zurückerhalten. Somit bezahlte Jürgen einen Betrag von $30x - y$, und er erhielt dafür $x - 7$ volle Flaschen zu 0,51 M. Es gilt folglich:

$$(1) \quad 30x - y = 51(x - 7) \qquad \text{mit } 0 < y < 51$$

da Jürgen im Falle $y = 51$ noch weitere Flaschen erhalten könnte und im Falle $y = 0$ kein Geld herausbekäme.
Aus (1) erhält man:

$$y = 357 - 21y = 7(51 - 3x)$$

also $0 < 51 - 3x < \frac{51}{7}$. Aus $0 < 51 - 3x$ folgt $x < 17$. Aus $51 - 3x < \frac{51}{7}$ folgt $3x > \frac{6 \cdot 51}{7}$, also $x > \frac{102}{7} > 14$.

Daher verbleiben nur die Möglichkeiten $x = 15$ und $x = 16$. Für $x = 15$ gilt $y = 42$, und für $x = 16$ folgt $y = 21$.

1. Möglichkeit: Jürgen hatte 15 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,50 M Pfandgeld. Er kaufte $15 - 7 = 8$ Flaschen Brause und musste dafür 4,08 M bezahlen. Er erhielt 0,42 M zurück, wofür er keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

2. Möglichkeit: Jürgen hatte 16 leere Flaschen mitgenommen, das entspricht 4,80 M Pfandgeld. Er kaufte $16 - 7 = 9$ Flaschen Brause und musste dafür 4,59 M bezahlen. Er erhielt 0,21 M zurück, wofür er ebenfalls keine weitere Flasche Brause kaufen konnte.

Aufgabe 4 - 180834
Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p - 1)(p + 1)$ durch 24 teilbar.

Die natürlichen Zahlen $p - 1, p, p + 1$ sind drei aufeinanderfolgende Zahlen. Von diesen ist genau eine durch 3 teilbar.
Die Zahl p kann dies als eine Primzahl $p > 3$ nicht sein, also muss es eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ sein. Folglich ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ durch 3 teilbar.

Da p eine Primzahl und größer als 3 ist, ist p ungerade; $p-1$ und $p+1$ sind daher zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von diesen Zahlen ist stets genau eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Folglich ist das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar.

Da 3 und 8 teilerfremd sind, ist somit $(p - 1)(p + 1)$ durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, w.z.b.w.

Aufgabe 5 - 180835
Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%iger Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

Angenommen, beim Zusetzen von x Litern 42%iger Salzlösung zu den 2 Litern 10%iger Salzlösung bilden die entstehenden $(x + 2)$ l eine 30%ige Salzlösung. Es gilt dann:

2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 l Salz,
x Liter 42%ige Salzlösung enthalten $0{,}42x$ l Salz,
$(x + 2)$ Liter 30%ige Salzlösung enthalten $0{,}30(x + 2)$ l Salz.

Da die Salzmenge im Lösungsgemisch stets gleich der Summe der Salzmengen in den gemischten Lösungen ist, muss gelten:

$$0{,}20 + 0{,}42x = 0{,}30(x + 2) \Rightarrow 20 + 42x = 30x + 60 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

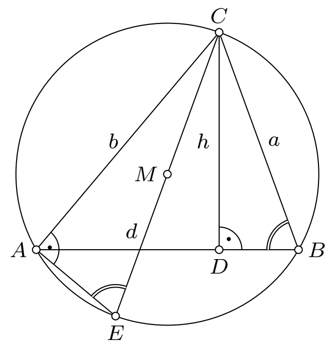
Man muss also $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung zusetzen, um die geforderte 30%ige Salzlösung zu erhalten.

Probe: Man erhält als Mischung 2 Liter + $\frac{10}{3}$ Liter = $\frac{16}{3}$ Liter einer Lösung mit folgendem Salzgehalt:
2 Liter 10%ige Salzlösung enthalten 0,20 Liter Salz, $\frac{10}{3}$ Liter 42%ige Salzlösung enthalten 1,40 Liter Salz.
Das sind zusammen 1,60 Liter Salz.
Von $\frac{16}{3}$ Litern Gesamtflüssigkeit sind diese 1,60 Liter Salz aber $1{,}60 : \frac{16}{3} \cdot 100\% = 30\%$, wie es verlangt war.

Aufgabe 6 - 180836
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

Beweise, dass dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises, D der Fußpunkt der auf AB senkrecht stehenden Höhe und E der Schnittpunkt der Verlängerung von CM über M hinaus mit dem Kreis k.



Da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegt D zwischen A und B, und E ist von A und B verschieden. Die Dreiecke CBD und CEA sind einander ähnlich, da sie in den rechten Winkeln $\angle CDB$ und $\angle CAE$ (Satz des Thales) sowie in den Winkeln $\angle ABC$ und $\angle CEA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen) übereinstimmen.

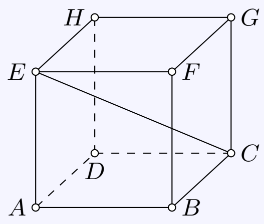
Ähnliche Dreiecke stimmen in den Verhältnissen gleichliegender Seiten überein, deshalb ist $d : a = b : h$, also $d = \frac{a \cdot b}{h}$.

Lösungen der III. Runde 1978 übernommen von [5]

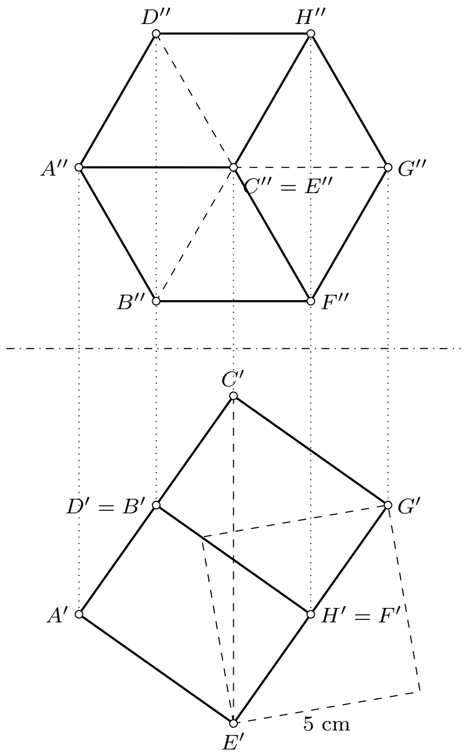
5.21 XIX. Olympiade 1979

5.21.1 I. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190811
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrisstafel und senkrecht zur Aufrisstafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.



Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.



Aufgabe 2 - 190812
Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!
Dabei werde
a) vorausgesetzt, dass die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,
b) vorausgesetzt, dass die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

Die genannten siebenstelligen Zahlen müssen in ihrer Zifferndarstellung jede der gegebenen Ziffern genau einmal enthalten.

Im Fall a) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 7 Möglichkeiten. Bei jeder von ihnen verbleiben für die Besetzung der zweiten Stelle genau 6 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt für die Besetzung der ersten beiden Stellen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten.
So fortfahrend erhält man für die Besetzung aller 7 Stellen insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ Möglichkeiten.

Im Fall b) hat man für die Besetzung der ersten Stelle genau 6 Möglichkeiten: die weiteren Überlegungen verlaufen wie im Fall a). Daher erhält man hier insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320$ Möglichkeiten.
Die gesuchten Anzahlen sind also a) 5040; b) 4320.

Aufgabe 3 - 190813
Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0{,}\overline{3456}..., \qquad q = 0{,}3\overline{456}..., \qquad r = 0{,}34\overline{56}..., \qquad s = 0{,}345\overline{6}.$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt: In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt: In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer!

a) Für $n = 1, 2, 3$ (1) gilt die genannte Aussage. Wenn sie für eine natürliche Zahl

$$n = 4 + k \qquad \text{mit } k \geq 0$$

gilt, so folgt: In der n-ten Stelle nach dem Komma hat s die Ziffer 6. Diese Ziffer kommt aber in p bzw. q nur dann an der $(4 + k)$-ten Stelle vor, wenn k durch 4 bzw. 3 teilbar ist. Also ist k durch die Zahlen 4 und 3 und folglich durch deren kgV 12 teilbar. Somit können (außer den Zahlen (1)) nur die Zahlen

$$n = 4 + 12g \qquad (g = 0{,}1{,}2{,}...) \tag{2}$$

die zu betrachtende Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn da $12g$ durch 4, 3 und 2 teilbar ist, steht an der $(4 + 12g)$-ten Stelle in p, q und r wie in s die Ziffer 6.
Also erfüllen genau die Zahlen (1), (2) die in Aufgabe a) geforderte Bedingung.

b) Für $m = 1{,}2{,}3$ ist die genannte Aussage falsch. An der vierten Stelle beginnt bei allen Dezimalbrüchen p,q,r,s eine Periode mit der Ziffer 6. Nach dem in a) Gezeigten wiederholt sich dies nach jeweils 12 weiteren Stellen. Daher genügt es, die zwölf Zahlen

$$m = 4, 5, ..., 15 \tag{3}$$

zu überprüfen. Was dabei für einen der Werte (3) (über die zu untersuchende Eigenschaft) festgestellt wurde, gilt dann auch für alle diejenigen Werte m, die aus dem betreffenden Wert durch Addition beliebiger ganzzahliger Vielfacher von 12 hervorgehen. (In der folgenden Tabelle ist das Vorkommen gleicher Ziffern durch Einrahmen gekennzeichnet. 1.Spalte = m-te Stelle in ...)

m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	6	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5
q	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5
r	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5
s	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

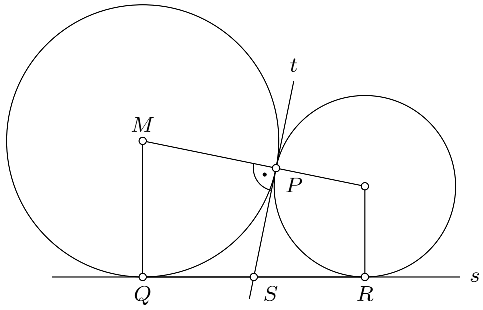
Es ergibt sich, dass unter den Zahlen (3) genau $m = 5$ die zu betrachtende Eigenschaft hat. Damit sind genau die Zahlen

$$m = 5 + 12h \qquad (h = 0, 1, 2...)$$

die in Aufgabe b) gesuchten.

Aufgabe 4 - 190814
Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, dass sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!



Der Mittelpunkt des von s in Q berührten Kreises sei M. Dann gilt $\triangle SQM \cong \triangle SPM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $SM = SN$, $MQ = MP$ und in der Größe $\angle SQM = \angle SPM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt.
Daher ist $SQ = SP$ (1) (entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken).
Ebenso folgt $SR = SP$. (2)
Aus (1) und (2) folgt die Behauptung $SQ = SR$.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen von [5]

5.21.2 II. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190821
Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.
(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.
(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine "2".
(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine "2".
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine "2".

Ermittle aus diesen Angaben, wie viel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wie viel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11 - 1 - 4 - 2 = 4$, dass genau 4 Schüler genau in Mathematik die Zensur 2 haben.
Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19 - 1 - 7 - 2 = 9$, dass genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur 2 haben.
Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, dass wegen $23 - 1 - 4 - 7 = 11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine "2" haben.
Wegen $4 + 9 + 11 = 24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur 2.
Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine 2 haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24 + 13 + 1 = 38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur 2. Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur 2.

Aufgabe 2 - 190822
In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

"Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.

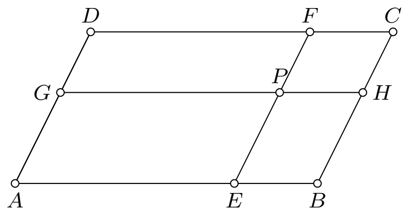
Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!"

Die Anzahl der Mitglieder. dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x. Dann nahmen im Juli $3x$, im Februar $2x$, im Januar $3x - 3$ und im August $x + 1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x - 2)$ Personen.

Nun gilt $20 < 10x - 2 < 35$, also $22 < 10x < 37$.
Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x = 3$. Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

Aufgabe 3 - 190823
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, dass die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!



Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeninhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme $ABCD$, $AEPG$ und $PHCF$ an, so erhält man:

Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_3 genannt.
Daher ergibt sich, dass sowohl das Parallelogramm $EBHP$ als auch das Parallelogramm $GPFD$ den Flächeninhalt $A_1 - A_2 - A_3$ haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 190824
Klaus sagt:

> "Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120.
>
> Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte ?"

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und n die erste Zahl ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4} + 2 = \frac{n}{4} + 3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.

Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n \leq 12$, so wären $\frac{n}{2} + 2$ und $\frac{n}{4} + 3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2} + 2 < 8$ und $\frac{n}{4} + 3 < 6$, also wäre ihr Produkt

$$n \cdot \left(\frac{n}{2} + 2\right) \cdot \left(\frac{n}{4} + 3\right) \leq 12 \cdot 8 \cdot 6 = 576$$

und daher kleiner als 1120. Wäre $n \geq 20$, so wäre $\frac{n}{2} + 2 > 12$ und $\frac{n}{4} + 3 > 8$, also das Produkt ≥ 1920, und daher größer als 1120.
Also kommt als erste Zahl nur $n = 16$, als zweite nur $\frac{n}{2} + 2 = 10$ und als dritte nur $\frac{n}{4} + 3 = 7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigenschaften wie die Probe zeigt.
Also kann die Frage von Klaus eindeutig beantwortet werden. Er hat sich als erste Zahl 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Lösungen der II. Runde 1979 übernommen von [5]

5.21.3 III. Runde 1979, Klasse 8

Aufgabe 1 - 190831
Klaus erzählt:

"Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück"

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wie viel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.
Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müsste die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.
Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.
Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

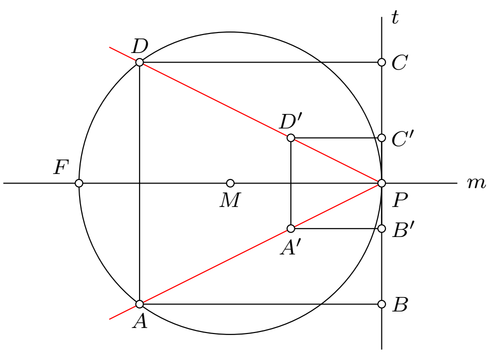
Aufgabe 2 - 190832
Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

I. Angenommen, ein Quadrat $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt M wegen $MA = MD$ auf der Mittelsenkrechten m von AD. Ferner berührt die Gerade t durch B, C den Kreis k in P, also ist t senkrecht zur Geraden durch M, P.
Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf AD senkrecht und ist daher die Gerade m; damit ist gezeigt, dass m durch P geht.
Da m auch Mittelsenkrechte von BC ist, ist folglich P der Mittelpunkt von BC. Wendet man auf $ABCD$ eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum P an, so entsteht ein Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Ecken B', C' auf t liegen und dessen Seite $B'C'$ den Mittelpunkt P hat.



II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(3) Man zieht durch M eine Gerade, die m genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit k bezeichne man mit P.
(4) Man konstruiert die Senkrechte t in P auf m.
(5) Auf t wählt man einen beliebigen Punkt $B' \neq P$ und verlängert die Strecke $B'P$ über P hinaus um ihre eigene Länge bis C'.
(6) Auf $B'C'$ errichtet man das Quadrat $A'B'C'D'$ (nach der Seite von t hin, auf der k liegt).

(7) Die Strahlen aus P durch A' bzw. durch D' schneiden k in A bzw. D.
(8) Man fällt die Lote AB bzw. DC von A bzw. D auf t.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:

Nach Konstruktion liegen A und D auf k, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade t, auf der B und C liegen, den Kreis k in P. Nach Konstruktion ist m die Mittelsenkrechte von $B'C'$ und damit auch von $A'D'$.
Daher liegen die Geraden durch P, A' bzw. durch P, B' symmetrisch zu m; dasselbe gilt für k und folglich für A und D. Somit ist $AD \perp m$, also $AD \parallel A'D'$. Da nach Konstruktion auch $AB \parallel A'B'$ und $DC \parallel D'C'$ ist, geht $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor.
Folglich ist auch $ABCD$ ein Quadrat, und die Seite BC wird von k in ihrem Mittelpunkt P berührt, so dass (2) insgesamt erfüllt ist.

IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat $A'B'C'D'$, aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d.h. durch (k und) P eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für A, D und nach (8) für B, C.

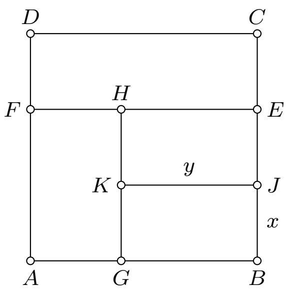
Also gibt es (zu k) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 3 - 190833
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!



a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$. Daraus folgt

$$DP = \frac{a^2}{4} : CD = \frac{a}{4} \quad ; \quad AF = \frac{3}{4}a$$
$$FH = \frac{a^2}{4} : AF = \frac{a^2}{4} : \frac{3}{4}a = \frac{a}{3} \quad ; \quad EH = \frac{2}{3}a$$
$$EJ = \frac{a^2}{4} : EH = \frac{a^2}{4} : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Also ist der gesuchte Umfang $2EH = 2EJ = \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{3}{8}a$.

b) Wir setzen $BJ = x$, $KJ = y$. Da die Rechtecke $GBJK$ und $KJEH$ umfangsgleich sind, ist $2(x + y) = 2(JE + y)$, also $JE = x$.
Da $AGHF$, $GBJK$ und $FECD$ umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von $AGHF$ und $GBJK$ gleich dem Umfang von $FECD$, also $FA + AG + GB + BJ = 2(CD + CE)$, d.h.

$$3x + a = 2(a + a - 2x)$$

Daraus folgt $x = \frac{3}{7}a$. Da $AGHF$ und $GBJK$ umfangsgleich sind, gilt $FA + AG = GB + BJ$, d.h.

$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a$$

Daraus folgt $y = \frac{5}{7}a$. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $xy = \frac{15}{49}a^2$.

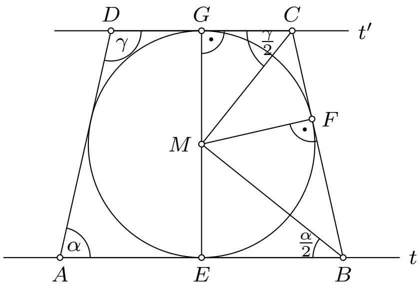
Aufgabe 4 - 190834
Beweise, dass das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!

Ist x die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, x und $x+1$. Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+x=x^3-x+x=x^3$$

Aufgabe 5 - 190835
Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, dass E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2=\frac{ac}{4}$ gilt!



Der Mittelpunkt von k sei M. Bei Spiegelung an der Geraden durch E,G geht k in sich über. Ebenso t und t', und die Punkte A,B werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von A und B an k gelegten Tangenten und somit falls für D und C.

Daher ist G der Mittelpunkt der Strecke CD. Ferner folgt, dass im Trapez $ABCD$ die Innenwinkel bei A und B beide dieselbe Größe α und die Innenwinkel bei C und D beide die Größe $\gamma=180°-\alpha$ haben (Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Berührt k die Gerade durch B,C in F, so gilt $\triangle BEM\cong\triangle BFM$ (ssw), also $\angle EBM<\angle FBM=\frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle GCM=\frac{\gamma}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}$, also $\angle GMC=\frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CGM). Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BME und MCG einander ähnlich, und es folgt $BE:EM=MG:GC$, also $\frac{a}{2}:r=r:\frac{c}{2}$ und somit $r^2=\frac{1}{4}ac$, w.z.b.w.

Aufgabe 6 - 190836
Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

a) Bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30\cdot\frac{1}{6}$ km $=5$ km zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}$ h $=\frac{1}{10}$ h $=6$ min benötigt.

Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4}\cdot 10=12{,}5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.

b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{12{,}5}{30}$ h $=\frac{5}{12}$ h $=25$ min benötigt.

Lösungen der III. Runde 1979 übernommen von [5]

5.22 XX. Olympiade 1980

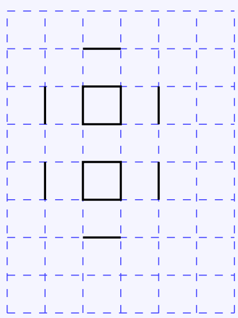
5.22.1 I. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200811
Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

a	a	c	$-$	d	e	$=$	f	f	e
	$:$				$+$			$-$	
	g	b	$*$	g	f	$=$	d	b	a
	h	e	$+$	i	g	$=$	k	g	f

8	4	0	$-$	6	5	$=$	7	7	5
	$:$				$+$			$-$	
	2	4	$*$	2	5	$=$	6	4	8
	3	5	$+$	9	2	$=$	1	2	7

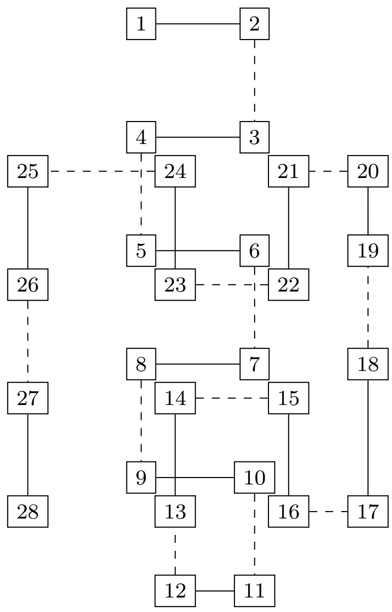
Aufgabe 2 - 200812



Ulrike fertigt gern Stickarbeiten an.
In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde.

Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, dass der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand a hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.

Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, dass eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!



Eine Möglichkeit für die Wahl der Reihenfolge der Kreuzungspunkte und den Fadenverlauf auf der Vorder- und Rückseite ist in der Abbildung angegeben. (gestrichelte Linie ... Faden auf der Rückseite, durchgezogene Linie ... Faden auf der Vorderseite)

Dabei beträgt die Fadenlänge $27a$. Da das verlangte Muster aus 14 Strecken der Länge a besteht, muss der Fadenverlauf auf der Rückseite mindestens 13 Strecken aufweisen. Jede dieser Strecken soll mindestens die Länge a haben.
Also kann es keine kürzere Fadenlänge als $27a$ geben, wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden sollen.

Aufgabe 3 - 200813
Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: "im Preis um 20% herabgesetzt."

Auf dem Heimweg sagte Heinz: "Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart." Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: "Stimmt das?".

Dieser erklärte ihm darauf: "Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}$% des von mir gezahlten Preises eingespart."

Beweise, dass diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

War P der Preis vor der Preisherabsetzung, so sind 20% hiervon $\frac{1}{5}P$. Daher beträgt der vom Vater gezahlte Preis $G = \frac{4}{5}P$.

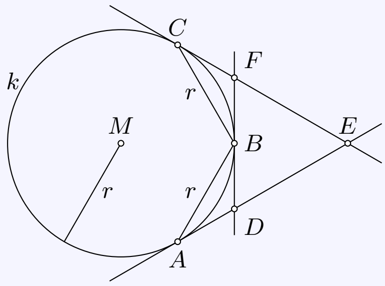
Die eingesparte Summe ist somit $\frac{1}{5}P = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}P = \frac{1}{4}G$, also 25% von G, wie behauptet.

Wäre der Preis nur um 10% , also um $\frac{1}{10}P$ herabgesetzt worden, hätte der vom Vater gezahlte Preis $G' = \frac{9}{10}P$ betragen, und die eingesparte Summe wäre $\frac{1}{10}P = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10}P = \frac{1}{9}G'$, also $11\frac{1}{9}$% von G' gewesen, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 200814

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r. AB und BC seien zwei Sehnen der Länge r. In A, B und C seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte D, E und F, wie im Bild angegeben.

Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist!



Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach Voraussetzung $MB \perp FD$. Ferner sind die Dreiecke ABM und BCM gleichseitig. Daher ist $\angle MBC = \angle MBA = 60°$.
Folglich gilt $\angle CBF = \angle ABD = 30°$.
Da $MC \perp EC$ und $\angle MCB = 60°$ gilt, folgt $\angle BCF = 30°$. Entsprechend erhält man $\angle BAD = 30°$.

Daraus folgt sowohl $\angle DFE = 60°$ (1) als auch $\angle FDE = 60°$ (2) als Außenwinkel der Dreiecke CBF bzw. ADB.
Aus (1) und (2) folgt, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist; w.z.b.w.

Lösungen der I. Runde 1980 übernommen von [5]

5.22.2 II. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200821
Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er musste sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark.

Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wie viel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

War der frühere Kaufpreis des ersten Hundes x Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{120}{100}x$ Mark $= \frac{6}{5}$ Mark. Daher gilt

$$\frac{6}{5}x = 180 \qquad \text{also} \qquad x = 150$$

War der frühere Kaufpreis des zweiten Hundes y Mark, so erhielt Herr Schäfer beim Verkauf dieses Hundes $\frac{80}{100}y$ Mark $= \frac{4}{5}y$ 57 Mark. Daher gilt $y = 225$.
Somit hatte der frühere Kaufpreis 150 M + 225 M = 375 M betragen. Da Herr Schäfer die Hunde für insgesamt 360 Mark weiterverkaufte, erlitt er insgesamt einen Verlust von 15 Mark.

Aufgabe 2 - 200822
Ermittle alle Paare $(a;\ b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:

Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

Wenn $(a; b)$ ein Paar natürlicher Zahlen mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:
24 ist ein Teiler sowohl von a als auch von b, also gibt es natürliche Zahlen p, q mit $a = 24p$, $b = 24q$.
Da 24 sogar der größte gemeinsame Teiler von a und b ist, folgt ferner: p und q sind zueinander teilerfremd. (1)
Aus $a < b$ folgt weiter $24p < 24q$, also $p < q$; (2)
aus $a + b = 192$ folgt $24p + 24q = 192$, also $p + q = 8$. (3)

Nun werden die Forderungen (2) und (3) nur durch folgende natürliche Zahlen p,q erfüllt:

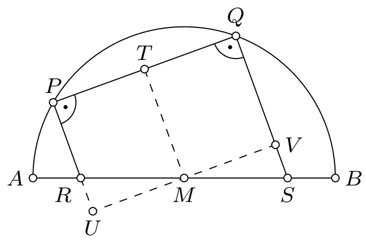
p	q
0	8
1	7
2	6
3	5

Forderung (1) ist hierbei nur für $p = 1, q = 7$ und für $p = 3, q = 5$ erfüllt. Daher können nur die Paare $(24; 168), (72; 120)$ die geforderten Eigenschaften besitzen.

Sie besitzen diese Eigenschaften; denn es gilt:
$24 < 168$, $72 < 120$; $\qquad 24 + 168 = 192$, $72 + 120 = 192$.
Wegen $168 = 7 \cdot 24$ ist 24 der ggT. von 24 und 168, wegen $72 = 3 \cdot 24$ und $120 = 5 \cdot 24$ ist 24 der ggT. von 72 und 120, da 3 und 5 teilerfremd sind.

Aufgabe 3 - 200823
Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.

Beweise, dass dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!



Da die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, schneidet die Mittelsenkrechte auf PQ den Durchmesser AB in M.
Sie verläuft außerdem parallel zu PR und QS und ist somit Mittellinie des Trapezes $PQSH$. Folglich halbiert sie die Trapezseite RS in M, d.h., es gilt $RM = SM$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 200824
Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

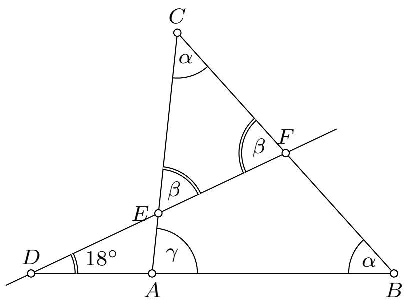
(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\angle EDA$ hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle ABC$, die Größe β des Winkels $\angle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\angle CAB$!



(I) Da der Winkel $\angle DFC$ Außenwinkel des Dreiecks DBF ist, gilt $\beta + \alpha = 18°$.

(II) Im Dreieck EFC gilt, da es gleichschenklig mit $CE = CF$ ist, $\angle CEF = \angle EFC = \beta$, mithin nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf das Dreieck EFC, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, und wegen (I)

$$\alpha + \alpha + 18° + \alpha + 18° = 180°$$

woraus man $\alpha = 48°$ erhält.

(III) Aus $\alpha = 48°$ und $\beta = \alpha + 18°$ folgt $\beta = 66°$.

(IV) Im Dreieck ABC ist nun nach dem Satz über die Winkelsumme $\gamma = 180° - 2\alpha$ mithin $\gamma = 84°$.

Lösungen der II. Runde 1980 übernommen von [5]

5.22.3 III. Runde 1980, Klasse 8

Aufgabe 1 - 200831
Uwe erzählt:

> "In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt."

Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, dass Uwes Aussagen zutreffen!

Treffen Uwes Aussagen für eine Angabe von Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder zu und ist dabei m die Anzahl der teilnehmenden Männer, so ergibt sich:
Die Anzahl der teilnehmenden Frauen ist $m+3$, die Anzahl der Erwachsenen also $2m+3$; es gilt $2m+3 \geq 20$ (1)
und die Anzahl der Kinder ist $2m + 3 - 20$.

Somit ist $m + m + 3 + 2m + 3 - 20 = 4m - 14$ die Gesamtzahl aller Teilnehmer. Daher gilt einerseits $4m - 14 \leq 80$ (2)
andererseits ist $4m-14$ durch 7 teilbar. Das gilt folglich auch für $4m$; somit ist wegen der Teilerfremdheit von 4 und 7 m durch 7 teilbar. (3)
Wäre $m \leq 7$, so wäre $2m + 3 \leq 17$, im Widerspruch zu (1); wäre $m \geq 28$, so wäre $4m - 14 \geq 98$, im Widerspruch zu (2).
Daher können (1), (2), (3) nur erfüllt sein, wenn $m = 14$ oder $m = 21$ ist. Somit können nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Personenzahlen mit Uwes Angaben übereinstimmen. Aus der Tabelle ist zugleich ersichtlich, dass sie tatsächlich mit diesen Angaben übereinstimmen:

Männer	Frauen	Erwachsene	Kinder	Teilnehmer
m	$m+3$	$2m+3$	$2m-17$	$4m-14$
14	17	31	11	42
21	24	45	25	70

Aufgabe 2 - 200832
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

Wenn eine dreistellige natürliche Zahl n die geforderte Eigenschaft hat, so gilt für ihre drei Ziffern, in irgendeiner Reihenfolge mit a, b, c bezeichnet,

$$abc = 5(a + b + c) \qquad (1)$$

Wäre eine der Ziffern a, b, c gleich 0, so folgte $abc = 0$, nach (1) also $a + b + c = 0$, und hieraus wegen $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ weiter $a = b = c = 0$, im Widerspruch dazu, dass n dreistellig ist. Also gilt

$$1 \leq a \leq 9, \qquad 1 \leq b \leq 9, \qquad 1 \leq c \leq 9 \qquad (2)$$

Nach (1) ist die Primzahl 5 ein Teiler von abc, also von (mindestens) einer der Ziffern a, b, c. Wegen (2) ist diese Ziffer gleich 5; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $c = 5$ angenommen werden. Hiernach folgt aus (1)

$$ab = a + b + 5 \qquad (3)$$

Aus (3) folgt

$$ab - a - b + 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad (a - 1)(b - 1) = 6 \qquad (4)$$

Nach (2) sind auch $a - 1$ und $b - 1$ natürliche Zahlen; wegen der beliebigen Wahl der Reihenfolge kann etwa $a \leq b$ angenommen werden, wonach es für (4) nur die beiden Möglichkeiten gibt, dass entweder
$a - 1 = 1$, $b - 1 = 6$, also $a = 2$, $b = 7$ (5) oder
$a - 1 = 2$, $b - 1 = 3$, also $a = 3$, $b = 4$ (6)

gilt. Berücksichtigt man nun noch alle Möglichkeiten der Reihenfolge von a, b, c, so ergibt sich, dass nur die Zahlen

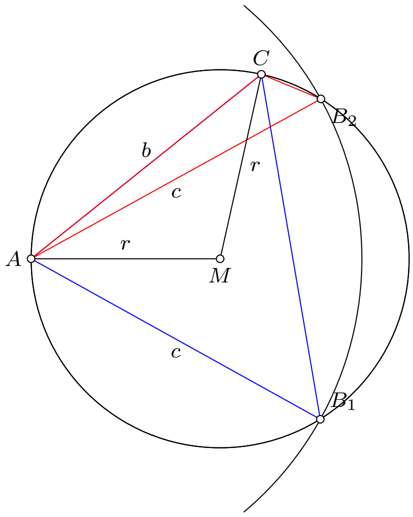
$$257, 275, 527, 572, 725, 752, 345, 354, 435, 453, 534, 543$$

die geforderten Eigenschaften haben können. Sie haben diese, wie die Probe zeigt.

Aufgabe 3 - 200833

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 4$; $b = 6$ und $c = 7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Sein Umkreis sei mit k, sein Mittelpunkt mit M bezeichnet. Dann ist das Dreieck ACM nach dem Kongruenzsatz sss eindeutig bestimmt. Der Punkt B liegt einerseits auf k und andererseits auf dem Kreis um A mit dem Radius c.

(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

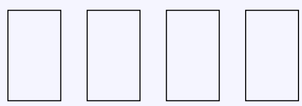
(1) Man konstruiere ein Dreieck ACM aus $AC = b$, $AM = CM = r$.
(2) Um A zeichne man den Kreis k' mit dem Radius c. Man wähle einen der Schnittpunkte von k mit k' und bezeichne ihn mit B.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion haben b, c und r die geforderten Längen, und k ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

(IV) Der Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b < c < 2r$ entstehen beim Konstruktionsschritt (2) genau zwei Schnittpunkte, die sich so mit B_1 bzw. B_2 bezeichnen lassen, dass M im Innern des Dreiecks AB_1C, aber außerhalb des Dreiecks AB_2C liegt. Daher ist das Dreieck AB_1C spitzwinklig, das Dreieck AB_2C aber stumpfwinklig; somit sind diese beiden Dreiecke nicht zueinander kongruent.
Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck ABC daher nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 200834

Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleichgroßen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Abbildung).



Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein Ass, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:

(1) Die Dame ist weiter vom Ass entfernt als das Ass vom König.

(2) Der Bube liegt näher am Ass als der König.

(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.

(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.

(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.

Beweise, dass aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

Bube, Dame, König, Ass seien mit B, D, K bzw. A bezeichnet, die Kreuz-, Pik-, Herz-, Karokarte mit Kr, Pk, Hz bzw. Ka.
Wenn eine Reihenfolge von Karten den Angaben entspricht, so folgt: Zwischen K und A liegt wegen (2) mindestens eine Karte; denn sonst könnte der Abstand zwischen B und A nicht kleiner sein als der zwischen A und K. Aus (1) folgt daher:
Zwischen D und A liegen (mindestens zwei, also genau) die beiden anderen Karten, d.h., die Reihenfolge ist eine der vier in (6), (7) genannten:

$$DBKA, \quad DKBA, \quad (6) \qquad ; \qquad ABKD, \quad AKBD \quad (7)$$

Die in (6) genannten weisen links von D keine Karte auf, widersprechen also (5) und scheiden daher aus. Von den in (7) genannten Reihenfolgen entspricht nur

$$ABKD \qquad (8)$$

der Bedingung (2).
Weiter folgt: Zwischen Ka und Hz liegt wegen (4) mindestens eine Karte, zwischen Kr und Hz wegen (3) daher die beiden anderen Karten, d.h., die Reihenfolge ist eine der vier in (9), (10) genannten:

$$KrPkKaHz, HzPkKaKr, \quad (9) \qquad ; \qquad KrKaPkHz, HzKaPkKr \quad (10)$$

Davon entsprechen nur die in (10) genannten Reihenfolgen der auf (8) angewandten Bedingung (5). Von den Reihenfolgen (10) entspricht nur

$$KrKaPkHz$$

der Bedingung (4). Damit ist bewiesen, dass aus den Angaben eindeutig hervorgeht: Auf dem Tisch liegen die Karten Kreuz-Ass, Karo-Bube, Pik-König, Herz-Dame von links nach rechts in dieser Reihenfolge.

Aufgabe 5 - 200835
Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB} = 5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

Der Flächeninhalt des Dreiecks SBD beträgt $\frac{SB \cdot SD}{2} = \frac{5\text{cm} \cdot SD}{2}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks SAC beträgt $\frac{SA \cdot SC}{2}$.

Nach Voraussetzung sind das 36 % des Flächeninhalts des Dreiecks SBD. Daher gilt

$$SA \cdot SC = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm} \qquad (1)$$

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes $SC : SD = SA : 5$ cm, also

$$SC = \frac{SA \cdot SD}{5\text{cm}} \qquad (2)$$

Setzt man SC aus (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{SA^2 \cdot SD}{5\text{cm}} = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm}$$

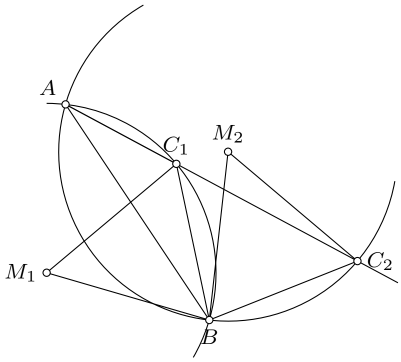
und daraus $SA^2 = 9$ cm^2 und mithin $SA = 3$ cm.

Aufgabe 6 - 200836
Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

$$(1) \quad \overline{\angle C_1AB} = \overline{\angle C_2AB} \qquad ; \qquad (2) \quad \overline{BC_1} = \overline{BC_2} \qquad ; \qquad (3) \quad \overline{AC_1} < \overline{AC_2}$$

Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 sei M_1, der des Dreiecks ABC_2 sei M_2. Die Winkel $\angle C_1AB$ und $\angle C_2AB$ sind jeweils Peripheriewinkel in den Umkreisen.



Wegen (1) sind sie gleichgroß; die zugehörigen Zentriwinkel $\angle C_1M_1E$ und $\angle C_2M_2B$ sind daher nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel ebenfalls gleichgroß.

Da die Dreiecke C_1M_1D und C_2M_2B beide gleichschenklig sind, in der Größe des Winkels an der Spitze und damit auch in der Größe ihrer Basiswinkel übereinstimmen, sind sie wegen (2) nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent.
Folglich gilt $M_1B = M_2B$, d.h. die Radien der beiden Umkreise sind einander gleich, w.z.b.w.

Lösungen der III. Runde 1980 übernommen von [5]

5.23 XXI. Olympiade 1981

5.23.1 I. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210811

In nebenstehender Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, dass in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist!

Gib eine derartige Ersetzung an!

X X X X X X X X X
X X X X X X X X
X X X X X X X
X X X X X X
X X X X X
X X X X
X X X
X X
X

Beispiele:

3 9 8 1 9 8 1 7 6
6 1 7 8 1 7 6 1
5 6 1 7 6 1 5
1 5 6 1 5 4
4 1 5 4 1
3 4 1 3
1 3 2
2 1
1

6 1 9 8 1 9 8 1 7
5 8 1 7 8 1 7 6
3 7 6 1 7 6 1
4 1 5 6 1 5
3 4 1 5 4
1 3 4 1
2 1 3
1 2
1

Aufgabe 2 - 210812

Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heiko je 5 Schuss ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10. Weiterhin ist bekannt:

(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuss.

(2) Falk schoss die 9.

Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?

a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?

b) Welcher der beiden Jungen schoss die 10?

a) Da die Treffer 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 erzielt wurden, konnte die Summe der Ringe bei vier Schüssen höchstens $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ (*) betragen haben.
Hätte Falk mit seinem ersten Schuss eine 5 (oder eine höhere Ringzahl erzielt, dann hätte die Summe der vier anderen Ringzahlen wegen (1) gleich (oder größer als) 45 sein müssen, was im Widerspruch zu (*) steht.
Falk muss also mit seinem ersten Schuss die Ringzahl 3 erzielt haben, er erreichte somit 30 Ringe. Heiko war wegen $3 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 = 66$ und $66 - 30 = 36$ mit seiner Ringzahl von 36 der bessere Schütze von beiden.

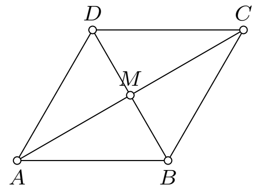
b) Falk schoss nach a) die 3 und wegen (2) die 9. Hätte er auch die 10 geschossen, müssten sich die restlichen $30 - 3 - 9 - 10 = 8$ Ringe als Summe zweier Treffer aus Ringzahlen $5, 5, 6, 6, 7, 7, 8$ darstellen lassen.
Dies ist jedoch nicht möglich (die beiden kleinsten ergeben bereits 10). Folglich schoss Heiko die 10.

Aufgabe 3 - 210813

a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecke aufeinander senkrecht.

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

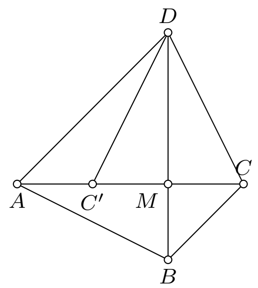
a) Zu beweisen ist: Wenn $ABCD$ ein Viereck ist mit $AB = BC = CD = DA$, dann folgt $AC \perp BD$.



Beweis: Es sei M der Mittelpunkt von AC. Dann ist BM Seitenhalbierende in dem gleichschenkligen Dreieck ABC, also auch Höhe, d.h., es gilt $AC \perp BM$. Ebenso folgt $AC \perp DM$. Daher enthält die Senkrechte in M auf AC beide Strecken BM und DM, d.h., es gilt $AC \perp BD$.

b) Die Umkehrung lautet: Wenn die Diagonalen eines Vierecks aufeinander senkrecht stehen, dann haben alle vier Seiten des Vierecks gleiche Länge.

Diese Umkehrung gilt nicht, wie z.B. ein folgendermaßen zu erhaltendes Viereck zeigt:



Auf einer Geraden g wähle man drei Punkte A,M,C in dieser Reihenfolge mit $AM > MC$. Auf der Senkrechten in M auf AC wähle man zwei Punkte B,D (so, dass M zwischen B und D liegt).
Dann ist $ABCD$ ein Viereck mit $AC \perp BD$. Wegen $AM > MC$ gilt aber $DA > DC$.

Aufgabe 4 - 210814
Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Messgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.

Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeiter 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.

Wie viel Messgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

Wenn man alle diejenigen Geräte, die die neun jungen Arbeiter fertigstellten, und dazu 9 von den Geräten, die der Brigadier fertigstellte, gleichmäßig auf die neun jungen Arbeiter verteilt, so entfällt auf jedes der zehn Brigademitglieder der genannte Durchschnitt, das sind also für jedes Mitglied gleich viele Geräte.
Da hierbei auf jeden der neun jungen Arbeiter genau 16 Geräte entfallen, so folgt wegen $10 \cdot 16 = 160$.
Es wurden an diesem Tag insgesamt 160 Geräte fertiggestellt.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen von [5]

5.23.2 II. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210821
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$ gilt!

I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt:

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3} \tag{1,2}$$

Aus (1) folgt $a + 12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich $4 < a$. Aus (2) folgt $3a < a + 12$, also $2a < 12$, folglich $a < 6$.
Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

Sie erfüllt diese Ungleichung, wie die Probe zeigt.

2. Lösungsweg:

Bildet man $\frac{a}{a+12}$ für zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen $a = n$ und $a = n + 1$, so erhält man die Zahlen $\frac{n}{n+12}$ und $\frac{n+1}{n+13}$.
Bringt man sie auf den gemeinsamen Nenner $(n + 12)(n + 13)$, so lauten sie

$$\frac{n(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13n}{(n+12)(n+13)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{(n+1)(n+13)}{(n+12)(n+13)} = \frac{n^2+13+12}{(n+12)(n+13)}$$

Daher gilt stets $\frac{n}{n+12} < \frac{n+1}{n+13}$, d.h. die für $a = 0, 1, 2, ...$ gebildeten Zahlen erfüllen die Ungleichungen

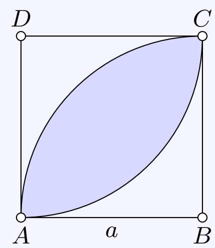
$$0 < \frac{1}{13} < \frac{2}{14} < \frac{3}{15} < \frac{4}{16} < \frac{5}{17} < \frac{6}{18} < \frac{7}{19} < ...$$

Wegen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ und $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ erfüllt somit genau die natürliche Zahl $a = 5$ die geforderte Ungleichung.

Aufgabe 2 - 210822
Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild blau) einschließen.

a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!



a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert.
Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d.h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5^2 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}5^2\right) \text{cm}^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 3{,}5^2 \text{ cm}^2 \approx 6{,}98 \text{ cm}^2$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2$$

Aufgabe 3 - 210823

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt: Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel 60°, jeder Außenwinkel also $180° - 60° = 120°$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin 240°, die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt 120°. Da 240° das Doppelte von 120° ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A,B,C gehörenden Innenwinkelgrößen seien α, β bzw. γ; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180° - \alpha$, $180° - \beta$ bzw. $180° - \gamma$.
In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, dass die drei Gleichungen

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 2(\alpha + \beta) \qquad (1)$$
$$(180° - \beta) + (180° - \gamma) = 2(\beta + \gamma) \qquad (2)$$
$$(180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 2(\gamma + \alpha) \qquad (3)$$

gelten. Aus (1) folgt $360° - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360°$ und daher (und aus (2) und (3) ebenso)

$$\alpha + \beta = 120° \quad ; \quad \beta + \gamma = 120° \quad ; \quad \gamma + \alpha = 120° \qquad (4,5,6)$$

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$ (7), aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$ (8).
Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Damit ist bewiesen, dass auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

Aufgabe 4 - 210824
Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

- Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.
- Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.
- Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.
- Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.
- Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.
- Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.
- Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.
- Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so dass alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt:

Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{5}, \quad \frac{3}{7}x, \quad \frac{2}{9}x \tag{1}$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfasst, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen:

Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80$$

Durch Subtraktion von $22 + x$ und Multiplikation mit 315 folgt

$$105x + 63x + 135x + 70x - 315x = 18270 \qquad \Rightarrow \qquad x = 315$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und 22, 105, 63, 135, 70 die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

II. Werden umgekehrt diese Mitgliederzahlen für die Sektionen erreicht und wird zusätzlich erreicht, dass genau 72 Mitglieder zu je mindestens zwei Sektionen gehören und von diesen genau 8 zu je genau drei Sektionen, so beträgt die Mitgliederzahl der BSG wegen $22 + 105 + 63 + 135 + 70 - 72 - 8 = 315$ dann 315.
Also treffen damit auch die Aussagen zu, dass die Mitgliederzahlen 105, 63, 135, 70 dasselbe sind wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}$ bzw. $\frac{2}{9}$ der Mitgliederzahl der BSG.

Aus I. und II. folgt: Es gibt eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen der BSG und der Sektionen so, dass alle genannten Aussagen zutreffen. Sie ist durch die Aussagen eindeutig bestimmt und lautet:

BSG: 315; Sektionen: 22, 105, 63, 135, 70.

Lösungen der II. Runde 1981 übernommen von [5]

5.23.3 III. Runde 1981, Klasse 8

Aufgabe 1 - 210831
In dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A & B & B & C & - & D & C & E & = & F & B & E & G \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & C & D & \cdot & & H & E & = & J & D & A & F \\
\hline
 & J & F & K & + & D & D & A & = & J & J & F & C
\end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ... , 9) ersetzt werden, dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

I. Wenn eine Ersetzung die gestellten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Summe zweier dreistelliger Zahlen stets kleiner als 2000 ist, folgt aus der dritten Zeile

$$J = 1 \qquad (1)$$

Ferner folgt: Wäre $D \leq 8$, so wäre $JFK + DDA < 200 + 900$ im Widerspruch zu $JFC \geq 1000$. Also ist

$$D = 9 \qquad (2)$$

Demnach ist $B < 9$; folglich muss in der dritten Spalte die Anfangsziffer F des Minuenden sowohl um die Anfangsziffer $J = 1$ des Subtrahenden als auch um einen Übertrag 1 vermindert werden, um die Anfangsziffer $J = 1$ der Differenz zu erhalten. Daraus folgt

$$F = 3 \qquad (3)$$

Aus Zeile 1 folgt, dass die Anfangsziffer A des vierstelligen Minuenden nur deshalb von der Anfangsziffer $F = 3$ der vierstelligen Differenz verschieden sein kann, weil sie um den Übertrag 1 vermindert wurde; denn der Subtrahend in dieser Zeile ist nur dreistellig. Also ist

$$A = 4 \qquad (4)$$

Aus der zweiten Zeile und der Primfaktorzerlegung $1943 = 29 \cdot 67$ folgt unter Berücksichtigung von (2)

$$C = 2, \quad H = 6, \quad E = 7 \qquad (5)$$

Damit ergibt die dritte Zeile

$$K = 8 \qquad (6)$$

und die dritte Spalte

$$B = 0, \quad G = 5 \qquad (7)$$

Folglich kann nur die in (1) bis (7) genannte Ersetzung die Forderungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die Buchstaben werden dabei so durch Ziffern ersetzt, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und dass alle waagerechten und senkrechten Aufgaben des Schemas

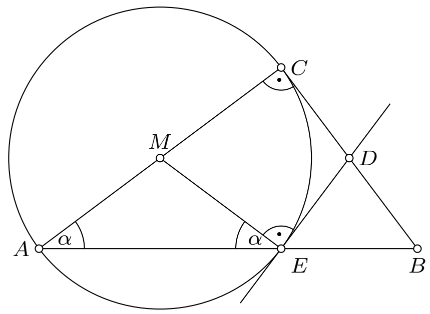
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & 0 & 0 & 2 & - & 9 & 2 & 7 & = & 3 & 0 & 7 & 5 \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & 2 & 9 & \cdot & & 6 & 7 & = & 1 & 9 & 4 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 8 & + & 9 & 9 & 4 & = & 1 & 1 & 3 & 2
\end{array}$$

richtig gerechnet sind, insbesondere 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftritt.

Also erfüllt genau die Ersetzung (1) bis (7) alle Forderungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 210832
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!



Die Größe des Winkels $\angle CAB$ sei mit α bezeichnet. Das Dreieck AEM ist wegen $AM = EM$ gleichschenklig, und es gilt $\angle AEM = \alpha$. Der Winkel $\angle MED$ ist ein rechter Winkel, da die Tangente stets senkrecht auf dem Berührungsradius steht. Mithin ist

$$\angle DEB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$$

Im Dreieck ABC ist wegen des Winkelsummensatzes $\angle ABC = 90° - \alpha$. Da also $\angle ABC = \angle DEB$ ist, und beide Winkel Innenwinkel des Dreiecks EBD sind, ist dieses gleichschenklig, w.z.b.w.

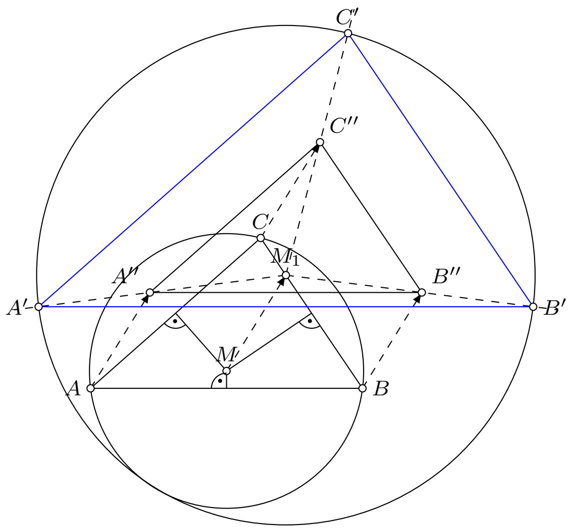
2. Lösungsweg: Aus $ME = MC$ und $\angle MCD = \angle MED = 90°$ folgt: $MECD$ ist ein Drachenviereck, also gilt $ED = DC$ sowie $CE \perp MD$.
Da nach dem Satz von Thales, angewandt auf das Dreieck AEC, auch $CE \perp AE$ gilt, folgt $MD \parallel AB$. Hieraus und aus $AM = MC$ erhält man nach dem Strahlensatz $BD = DC$. Damit ist $ED = BD$ gezeigt.

Aufgabe 3 - 210833
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$ und beweise, dass es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine "Analyse" (Schlussfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine "Determination" (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.



I. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.

(2) Man wendet auf A, B und C die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_1}$ an. Die erhaltenen Bildpunkte von A, B, C seien A'', B'' bzw. C''.
(3) Man verlängert M_1A'', M_1B'', M_1C'' jeweils über A'', B'' bzw. C'' hinaus bis zum Schnitt mit k_1. Die Schnittpunkte seien A', B' bzw. C'.

II. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $A'B'C'$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach Konstruktionsschritt (3) liegen A', B' und C' auf k_1, also gilt:

$$M_1A' = M_1B' = M_1C' \qquad (*)$$

Ferner ist der in (1) konstruierte Punkt M Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC. Geht k bei der in (2) durchgeführten Verschiebung in k'' über, so ist folglich M_1 der Mittelpunkt von k'' und k'' der Umkreis des Dreiecks $A''B''C''$. Hiernach gilt

$$M_1A'' = M_1B'' = M_1C'' \qquad (**)$$

Wegen (3), (*) und (**) gehen A'', B'', C'' aus A', B', C' durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M_1 hervor. Also entsteht das Dreieck $A'B'C'$ aus dem Dreieck ABC dadurch, dass erst eine Verschiebung und dann eine Streckung ausgeführt wird; somit sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC einander ähnlich.

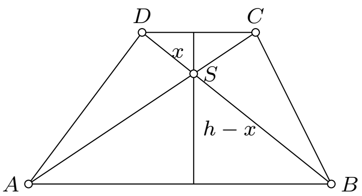
2. Lösungsweg:

I. (1) Man wählt einen beliebigen Punkt A' auf k_1.
(2) An M_1A' trägt man in M_1 nach einer Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ACB$ und nach der anderen Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABC$ an. Der freie Schenkel des erstgenannten Winkels schneide k_1 in B', der freie Schenkel des anderen Winkels schneide k_1 in C'.

II. Nach (1) und (2) liegen A', B', C' auf k_1. Nach dem Peripheriewinkelsatz und (2) ist ferner $\angle A'C'B' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'B' = \angle ACB$ sowie $\angle A'B'C' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'C' = \angle ABC$.
Daher sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz.

Aufgabe 4 - 210834
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = 2{,}5$ cm gilt.

Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!



Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$; sein Diagonalenschnittpunkt sei S. Der Abstand zwischen den Parallelen AB und CD betrage h, der Abstand des Punktes S von CD sei x. Dann ist $h-x$ sein Abstand von AB. Nach dem Strahlensatz gilt

$$x : (h-x) = SC : SA = CD : AB = 1 : 2, \qquad \text{also} \qquad 2x = h - x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}h$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS beträgt

$$\frac{1}{2}AB \cdot (h-x) = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}AB \cdot h$$

der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ beträgt

$$\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}AB \cdot h = \frac{3}{4}AB \cdot h$$

Daher ist das gesuchte Verhältnis eindeutig bestimmt; es beträgt $\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = 4 : 9$.

Aufgabe 5 - 210835
Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.

Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

Angenommen, es wurden x Zwanzigmarkscheine und y Fünfzigmarkscheine ausgezahlt. Dann wurden $(x-1)$ Zehnmarkscheine ausgezahlt, und es gilt:

$$(x-1)+x+y=29, \quad \text{also} \quad 2x+y=30 \quad \text{sowie} \quad 2x<y<3x$$

Aus $2x+y=30$ und $2x<y$ folgt $4x<30$, also $x \leq 7$. (1)
Aus $2x+y=30$ und $3x>y$ folgt $5x>30$, also $x>6$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $x=7$, also $y=16$.
Somit wurden 6 Zehnmarkscheine, 7 Zwanzigmarkscheine, und 16 Fünfzigmarkscheine, also ein Betrag von 1000 M, ausgezahlt.

Aufgabe 6 - 210836
Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

I. Wenn eine sechsstellige natürliche Zahl z die geforderte Eigenschaft hat, so folgt: Ist x die erste Ziffer von z, so ist $z=100000x+y$ mit einer natürlichen Zahl y, für die $y<100000$ gilt, sowie $z'=10y+x$, und es gilt

$$(100000x+y)\cdot 3=10y+x, \qquad \text{also} \qquad 42857x=y$$

Wäre $x \geq 3$, so wäre $y \geq 42857\cdot 3$ im Widerspruch zu $y<100000$.
Daher (und weil x als erste Ziffer einer mehrstelligen Zahl größer als 0 ist) kann nur entweder $x=1, y=42857$ oder $x=2, y=42857\cdot 2=85714$ sein.

Also können höchstens die Zahlen $z=142857$ und $z=285714$ die geforderte Eigenschaft haben.
Sie haben diese Eigenschaft; denn es gilt $3\cdot 142857=428571$ und $3\cdot 285714=857142$.
Daher haben genau diese beiden sechsstelligen natürlichen Zahlen die geforderte Eigenschaft.

Lösungen der III. Runde 1981 übernommen von [5]

5.24 XXII. Olympiade 1982

5.24.1 I. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220811
Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.
(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.
(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a)Beweise, dass Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!
b) Beweise, dass sich aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!
c) Beweise, dass sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln lässt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

a) Aus (1) und (2) folgt, dass Herr Bäcker nicht dieselbe Person sein kann wie der Bruder von Herrn X. Also kann Herr X nicht Bäcker heißen.

b) Nach (3) sind die vier Berufe so auf die vier Männer außer Herrn X verteilt, dass die beiden Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F von Herrn Bäcker und Herrn Müller ausgeübt werden.
Nach (1) hat daher auch der Beruf von Herrn X den Anfangsbuchstaben F. Also heißt Herr X nach (3) weder Fischer noch Förster. Hieraus und aus a) folgt eindeutig: Herr X heißt Müller.

Ferner ist eindeutig ermittelt:
Herr X und sein Bruder, der somit ebenfalls Müller heißt, haben die zwei Berufe mit dem Anfangsbuchstaben F, also Fischer und Förster.
Wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es mehr als eine Möglichkeit, alle Angaben aus der Aufgabenstellung zu erfüllen:
Es gibt noch weitere Möglichkeiten; dies wird hier nicht benötigt. In diesen beiden genannten Verteilungen kommen für Herrn X zwei verschiedene Berufe vor. Ferner ist in den beiden Verteilungen der Beruf Bäcker bei zwei Männern verschiedenen Namens angegeben.

Name	Beruf, 1. Möglichkeit	Beruf, 2. Möglichkeit
Bäcker	Fischer	Förster
Fischer	Müller	Bäcker
Förster	Bäcker	Müller
Müller	Förster	Fischer
Herr X	Fischer	Förster

Daher lässt sich weder der Beruf von Herrn X noch der Name des Bäckers eindeutig aus den Angaben ermitteln.

Aufgabe 2 - 220812
Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert:

z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, dass es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

I. Wenn eine Zahl uz die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Es gibt eine 21stellige Zahl x mit $z = 10x + 7$, und für sie gilt

$$7 \cdot 10^{21} + x = 7 \cdot (10x + 7)$$

Daraus folgt

$$69x = 7 \cdot 10^{21} - 49$$
$$x = \frac{7 \cdot 10^{21} - 49}{69} = \frac{6999999999999999999951}{69} = 1014492753623188405797$$

Die Probe bestätigt die Lösung.

Aufgabe 3 - 220813

Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wie viel Minuten muss der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

a) Die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungepostens und der Marschkolonne seien mit v_R bzw. v_M bezeichnet.
Sie verhalten sich wie die in gleicher Zeit zurückgelegten Wege. Der vom Regulierungsposten zunächst zurückgelegte Weg $s_0 = 5{,}6$ km setzt sich zusammen aus der Länge $s_1 = 3{,}2$ km der Marschkolonne und demjenigen Weg s_2, den die Marschkolonne während der Vorbeifahrt des Regulierungspostens zurücklegte. Dieser Weg hat folglich eine Länge von $s_2 = s_0 - s_1 = 2{,}4$ km. Somit gilt

$$v_R : v_M = s_0 : s_2 = 5{,}6 : 2{,}4 = 7 : 3$$

b) Der Zeitpunkt, an dem der Regulierungsposten die Spitze der Marschkolonne verlässt, sei T_0 genannt. Von diesem Zeitpunkt an legt der Regulierungsposten noch den Weg $s = v_R \cdot 6$ min zurück.
Denselben Weg hat die Spitze der Marschkolonne in der Zeit t vom Zeitpunkt T_0 an bis zum Eintreffen an der Kreuzung zurückzulegen. Also gilt $s = v_M \cdot t$. Daraus folgt

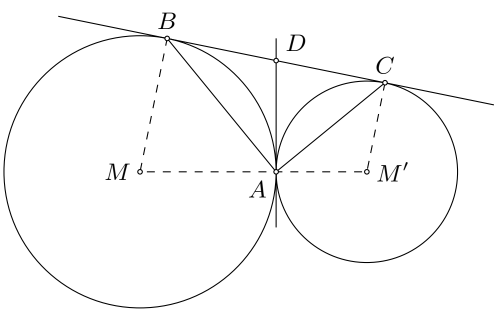
$$t = \frac{v_R}{v_M} \cdot 6 \text{ min}$$

nach a) also $t = \frac{7}{3} \cdot 6$ min $= 14$ min. Diese Zeit $t = 14$ min,setzt sich zusammen aus der vom Zeitpunkt T_0 an benötigten Fahrzeit 6 min und der gesuchten Wartezeit des Regulierungspostens an der Kreuzung. Diese Wartezeit beträgt daher 8 min.

Aufgabe 4 - 220814

In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist!



Die gemeinsame innere (also durch A gehende) Tangente von k_1 und K_2 schneide die durch E und C gehende Tangente in D. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt dann

$$DB = DA = DC$$

Daher liegt A auf dem Kreis mit BC als Durchmesser. Nach dem Satz des Thales ist somit $\angle BAC$ ein rechter Winkel.

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen von [5]

5.24.2 II. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220821
Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht

(1) Anke fährt an die Ostsee.
(2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.
Untersuche

a) für das Jahr 1981 b) für das Jahr 1982,

für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln lässt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form "A oder B" ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

a) Für das Jahr 1981 gilt: Da (1) wahr ist, folgt: Anke fährt an die Ostsee. (3)
Da (2) falsch ist, folgt: Christine fährt nicht in den Thüringer Wald. Daraus und aus (3) ergibt sich: Christine fährt in die Sächsische Schweiz. (4)
Nach (3) und (4) verbleibt nur noch: Birgit fährt in den Thüringer Wald. (5)
Damit ist bewiesen, dass sich für 1981 die Reiseziele aller drei Schülerinnen eindeutig ermitteln lassen. Sie lauten wie in (3), (4),(5) angegeben.

b) Für das Jahr 1982 gilt:
Da (1) falsch ist, fährt Anke nicht an die Ostsee. Würde sie in den Thüringer Wald fahren, so könnte Christine nicht dorthin und Anke nicht in die Sächsische Schweiz fahren, also wäre (2) dann falsch.
Damit ist gezeigt: Anke fährt in die Sächsische Schweiz. (6)

Bereits mit (6) ist erreicht, dass (1) falsch und (2) wahr ist. Dies gilt daher bei jeder der beiden nach (6) noch möglichen Verteilungen der Reiseziele (Birgit an die Ostsee, Christine in den Thüringer Wald oder umgekehrt). Damit ist für 1982 bewiesen:
Die Reiseziele von Birgit und Christine lassen sich nicht eindeutig ermitteln; das Reiseziel von Anke lässt sich dagegen eindeutig ermitteln, es lautet, wie in (6) angegeben.

Aufgabe 2 - 220822
In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

		Ja	Nein
(A)	Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	o	o
(B)	Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	o	o
(C)	Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	o	o

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(a) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,

b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,

c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,

d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

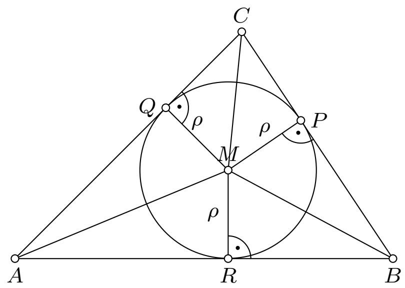
Die gesuchten Eintragungen können durch folgende Rechenschritte gefunden werden:

Angabe Nr.	Gesuchte Antworten	Folgerung aus Angaben Nr.	Berechnung der Anzahl
8	(A)Ja, (B)Ja, (C)Nein	4,7	8-3 = 5
9	(A)Ja, (B)Nein, (C)Ja	6,7	10-3 = 7
10	(A)Nein, (B)Ja, (C)Ja	5,7	12-3 = 9
11	(A)Ja, (B)Nein, (C)Nein	1,7,8,9	20-3-5-7 = 5
12	(A)Nein, (B)Ja, (C)Nein	2,7,8,10	25-3-5-9 = 8
13	(A)Nein, (B)Nein, (C)Ja	3,7,9,10	30-3-7-9 = 11
Aufgabe			
a)	Keinmal Ja	7,...,13	50-3-5-7-9-5-8-11=2
b)	Genau einmal Ja	11,12,13	5+8+11 = 24
c)	(A)Ja und (B)Nein	9,11	7+5 = 12
d)	(A)Ja oder (C)Ja oder beides	7,...,11,13	3+5+7+9+5+11 = 40

Aufgabe 3 - 220823
Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in P, Q bzw. R.



Dann ist $BC + CA + AB = u$ und $MP = MQ = MR = \rho$. Ferner gilt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Die Dreiecke BCM, CAM bzw. ABM haben folglich die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}BC \cdot MP, \qquad \frac{1}{2}CA \cdot MQ, \qquad \frac{1}{2}AB \cdot MR$$

Andererseits ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich F; daher gilt

$$F = \frac{1}{2}BC \cdot \rho + \frac{1}{2}CA \cdot \rho + \frac{1}{2}AB \cdot \rho = \frac{1}{2}u \cdot \rho$$

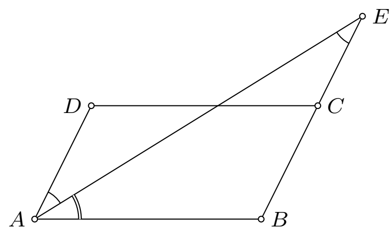
Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung $\rho = \frac{2F}{u}$.

Aufgabe 4 - 220824
Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.

(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, dass die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!



Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, so folgt:
Da AE nach (2) Halbierende des Winkels $\angle BAD$ ist, gilt

$$\angle BAE = \angle EAD \qquad (3)$$

Ferner sind $\angle EAD$ und $\angle BEA$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\angle EAD = \angle BEA \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\angle BAE = \angle BEA$; also ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit $BE = AB = a$.
Aus (2) folgt somit $a = BE = BC + CE = b + 3$ cm, d.h. $a - b = 3$ cm. (5)
Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin $a + b = 18$ cm. (6)
Aus (5) und (6) folgt durch Addition $2a = 21$ cm, also $a = 10{,}5$ cm und damit aus (5) $b = (10{,}5 - 3)$ cm $= 7{,}5$ cm.
Somit ist bewiesen, dass durch (1), (2) die Seitenlängen a,b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen $a = 10{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm.

Lösungen der II. Runde 1982 übernommen von [5]

5.24.3 III. Runde 1982, Klasse 8

Aufgabe 1 - 220831
Cathrin fragt an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete:

> ”Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl.”

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11 sondern 1911.

I. Wenn die Angaben für ein Geburtsjahr zutreffen, so folgt:
Da der Großvater an einem Tag des Jahres 1981 älter als 65 Jahre und jünger als 100 Jahre war, ist er vor dem entsprechenden Datum des Jahres 1916 und nach dem entsprechenden Datum des Jahres 1881 geboren.
Die Jahreszahl seiner Geburt ist also eine der Zahlen 1881, 1882, ..., 1916.
Von diesen sind nur die folgenden weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar:

$$1883, 1889, 1891, 1897, 1901, 1903, 1907, 1909, 1913$$

Diese Zahlen lassen bei Division durch 60 folgende Reste: 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53.
Hiervon ist nur 49 keine Primzahl. Daher können die Angaben nur für das Geburtsjahr 1909 zutreffen.

II. Sie treffen hierfür zu; denn wenn der Großvater 1909 geboren wurde, so war er an einem Tag des Jahres 1981 entweder 71 oder 72 Jahre alt, also älter als 65 und jünger als 100 Jahre; ferner ist 1909 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar und lässt bei Division durch 60 den Rest 49, der keine Primzahl ist.

Aus I. und II. folgt: Die Angaben können insgesamt zutreffen, und sie legen das Geburtsjahr eindeutig fest. Es lautet 1909.

Aufgabe 2 - 220832

a) Beweise, dass für $n = 2, 3, 4$ und 5 der folgende Satz gilt:

Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n = 2, 3, 4, 5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

Man kann n unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen stets mit jeweils einer geeigneten natürlichen Zahl m

für $n = 2$ in der Form $2m - 1, 2m + 1$,
für $n = 3$ in der Form $2m - 1, 2m + 1, 2m + 3$,
für $n = 4$ in der Form $2m - 3, 2m - 1, 2m + 1, 2m + 3$,
für $n = 5$ in der Form $2m - 3, 2m - 1, .2m + 1, 2m + 3, 2m + 5$

darstellen. Das arithmetische Mittel q dieser Zahlen ist

für $n = 2$ die Zahl $q = \frac{1}{2} \cdot 4m = 2m$,
für $n = 3$ die Zahl $q = \frac{1}{3} \cdot (6m + 3) = 2m + 1$,
für $n = 4$ die Zahl $q = \frac{1}{4} \cdot 8m = 2m$,
für $n = 5$ die Zahl $q = \frac{1}{5} \cdot (10m + 5) = 2m + 1$,

Wie m sind auch $2m$ und $2m + 1$ natürliche Zahlen; damit ist der in a) geforderte Beweis erbracht.
Ferner ist q genau in den Fällen mit $q = 2m$ gerade; also sind genau $n = 2$ und $n = 4$ die in b) zu ermittelnden Zahlen.

Aufgabe 3 - 220833
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm. Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:

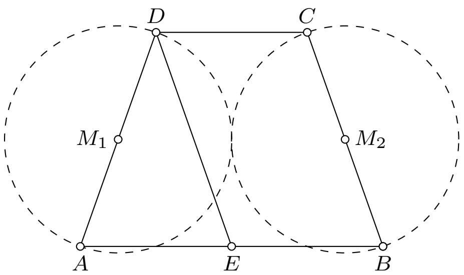
(1) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.
(2) Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.
(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

I. Wenn ein Trapez $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat (siehe Abbildung) und E,M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte von AB, AD bzw. BC sind, so folgt:
Wegen $AB \parallel DC$ ist $EB \parallel DC$; nach (2) ist $AE = EB = DC$. Daher ist $EBCD$ ein Parallelogramm; es gilt $ED = BC$; hiernach und nach (1) ist $AD = ED = b$.

Ferner ist M_1M_2 nach (3) gleich der Summe der Radien der genannten Kreise, also wegen (1) gleich $AD = BC = b$. Andererseits ist M_1M_2 die Mittelparallele des Trapezes $ABCD$; hieraus und aus (2) folgt

$$b = M_1M_2 = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{3}{2}DC = \frac{3}{2}AE \qquad ; \qquad AE = \frac{2}{3}b$$



II. Daher ist ein Viereck $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(*) Man konstruiert ein Dreieck AED mit $AD = ED = b$ und $AE = 2$
(**) Man verlängert die Strecke AE über E hinaus um ihre eigene Länge bis B.
(***) Man konstruiert die Parallele durch D zu AB und die Parallele durch B zu ED; beide schneiden sich in C.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (***) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$. Ferner ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus folgt einerseits $ED = BC$, nach (*) also $AD = BC = b$, andererseits $EB = DC$, nach (**) also $AB : DC = 2 : 1$, und zwar nach (*) $DC = EB = AE = 4b$, $AB = 4b$.

Folglich hat die Mittelparallele M_1M_2 des Trapezes $ABCD$ die Länge

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b + \frac{4}{3}b\right) = b = AD = BC$$

Die Mittelpunkte M_1, M_2 der Kreise mit den Durchmessern AB bzw. BC haben als Abstand voneinander also die Summe der Radien dieser Kreise. Daher berühren sich diese Kreise.

IV. Konstruktionsschritt (*) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da die Seitenlängen b, b und $\frac{2}{3}b$ alle Dreiecksungleichungen erfüllen.
Die Konstruktionsschritte (**) und (***) sind dann eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 220834
Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

Die gesuchte Länge betrage x Kilometer, die Zeiten für den Hin- bzw. Rückflug seien t_1 Stunden bzw. t_2 Stunden. Dann gilt $x = 250t_1$ und $x = 200t_2$, also

$$t_1 = \frac{x}{250} \qquad ; \qquad t_2 = \frac{x}{200} \tag{1}$$

Vom Start in A bis zur Ankunft in A vergingen $7\frac{1}{4}$ Stunden; nach Abzug der Wartezeit verbleibt somit eine Flugzeit von

$$(t_1 + t_2) \text{ Stunden } = 6\frac{3}{4} \text{ Stunden} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

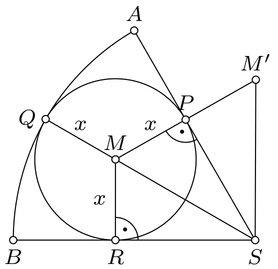
$$\frac{x}{250} + \frac{x}{200} = \frac{27}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x = 750$$

Also beträgt die gesuchte Länge 750 km.

Aufgabe 5 - 220835

Der Zentriwinkel $\angle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60°. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von innen berührt.

Wie viel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?



Es sei $r = AS = BS$. Der Mittelpunkt von k sei M, der Radius von k sei x. Die Berührungspunkte von k mit AS, BS bzw. $\overset{\frown}{AB}$ seien P, R bzw. Q. Dann liegt Q auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte S, M, und es gilt

$$SM + x = r. \qquad (1)$$

Ferner sind die Radien MP bzw. MR von k senkrecht auf AS bzw. BS. Wegen $MP = MR = x$ hat also M gleiche Abstände zu AS und BS und liegt folglich auf der Halbierenden des Winkels $\angle ASB$.

Also ist $\angle PSM = 30°$. Daher und wegen $\angle MPS = 90°$ gilt nach dem Winkelsummensatz $\angle PMS = 60°$. Hat M bei der Spiegelung an der Geraden durch A,S das Bild M', so ist folglich SMM' ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Höhe SP zugleich Seitenhalbierende, also gilt $SM = MM' = 2 \cdot MP$, d.h.

$$SM = 2x \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $3x = r$, der Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt also

$$A_s = \frac{\pi r^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3\pi x^2}{2}$$

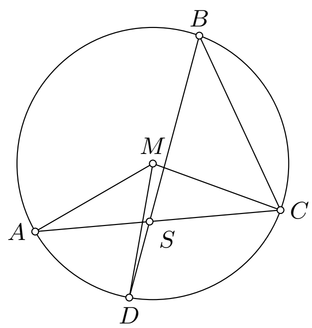
Der Flächeninhalt des Kreises k ist $Ak = \pi x^2 = \frac{2}{3} A_s$, d.h., A_k beträgt $66\frac{2}{3}\%$ von A_s.

Aufgabe 6 - 220836

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.
(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle ASD} = \frac{1}{2}\left(\overline{\angle AMB} + \overline{\angle CMD}\right)$ gilt!



Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel gilt:

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \qquad \text{und} \qquad \angle CBD = \frac{1}{2}\angle CMD$$

Durch Addition folgt

$$\angle ACB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) \qquad \text{d.h.}$$

$$\angle SCB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck BCS, gilt $\angle ASD = \angle SCB + \angle CBS$. Daher folgt

$$\angle ASD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Lösungen der III. Runde 1982 übernommen von [5]

5.25 XXIII. Olympiade 1983

5.25.1 I. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230811
Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g.

Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

Der Quader habe die Kantenlängen a, b, c; sein Volumen beträgt mithin $V = abc$.
Ein Quader mit den vierfachen Kantenlängen $4a, 4b, 4c$ hat dann das Volumen

$$V' = 4a \cdot 4b \cdot 4c \cdot = 64abc = 64V$$

Da bei gleichem Material die Masse dem Volumen proportional ist, beträgt die Masse des zweiten Holzblockes $64 \cdot 25$ g $= 1600$ g.

Aufgabe 2 - 230812
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d.h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

Aus (2) folgt:
Für die Hunderterziffer der gesuchten Zahl n kommen nur $3, 4, ..., 9$ in Frage, für n hiernach nur die Zahlen $312; 416; 520; 624; 728; 832; 936$.
Die entsprechenden Quersummen sind: $6; 11; 7; 12; 17; 13; 18$.
Daraus ist ersichtlich, dass genau die Zahl 728 beide Bedingungen (1), (2) erfüllt.

Aufgabe 3 - 230813
Auf einer 22,5 km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage 18 $\frac{km}{h}$. Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr an einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wie viel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wie viel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

a) Da die Strecke zwischen den beiden Endhaltestellen $s = 22{,}5$ km beträgt und mit der Geschwindigkeit $v = 18\frac{km}{h}$ durchfahren wird, benötigt ein Wagenzug hierfür die Zeit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{22{,}5}{18}h = 1{,}25h = 1h14min$$

Der Wagenzug, der um 8.00 Uhr von einer Endhaltestelle abfuhr, erreicht die andere Endhaltestelle folglich um 9.15 Uhr.

Von dort hat er planmäßig zu einer Uhrzeit abzufahren, die ein ganzzahliges Vielfaches von 10 Minuten ist, wegen der Pausenregelung also um 9.30 Uhr. Entsprechend hat er von der ersten Endhaltestelle nochmals 1 Stunden später, also um 11.00 Uhr abzufahren.

b) Von der zweiten Endhaltestelle müssen zu den Abfahrtszeiten 8.00, 8.10, 8.20, 8.30, 8.40, 8.50, 9.00, 9.10, 9.20 Uhr Wagenzüge zur Verfügung stehen, das sind 9 Wagenzüge.
Ebenso viele werden zur Abfahrt an der ersten Endhaltestelle zu denselben Zeiten benötigt. Von 9.30 Uhr ab ist die Fortsetzung des geplanten Ablaufs mit den bereits aufgezählten Wagenzügen möglich. Daher reichen insgesamt 18 Wagenzüge aus.

c) Der erstgenannte Wagenzug sei Z_0; der erste bzw. der zweite ihm begegnende Wagenzug sei Z_1 bzw. Z_2.
Während der Fahrt haben Z_1 und Z_2 einen gleichbleibenden Abstand so voneinander; dies ist auch zum Zeitpunkt von Z_0 und Z_1 der Abstand zwischen Z_0 und Z_2. Da der Wagenzug Z_2 an einer Stelle jeweils 10 Minuten später als Z_1 eintrifft, benötigt er zum Durchfahren von so genau 10 Minuten.

Durch die Bewegung der Wagenzüge Z_0 und Z_2 gegeneinander verringert sich ihr Abstand mit einer doppelt so großen Geschwindigkeit wie die Fahrgeschwindigkeit jedes einzelnen Wagenzuges. Also wird dieser Abstand in der halben Zeit, die ein einzelner Wagenzug zum Durchfahren von so benötigen würde, auf 0 verringert. Das besagt:
Bis zum Zeitpunkt der Begegnung von Z_0 mit Z_2 vergeht die Hälfte von 10 Minuten, das sind 5 Minuten.

Aufgabe 4 - 230814

a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm.

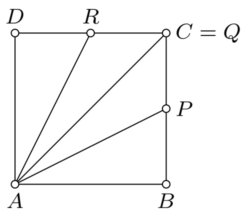
Gesucht sind drei Punkte F, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrates liegen, dass die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, dass sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so dass die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

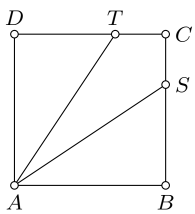
a) Sei P der Mittelpunkt der Seite BC, sei Q gleich dem Eckpunkt C und sei R der Mittelpunkt der Seite CD des Quadrats $ABCD$. Dann gilt $BP = PQ = QR = RD$.



Da die Dreiecke BPA und PQA (wegen $\angle ABP = \angle ABQ = 90°$) die Höhe AB gemeinsam haben, da die Dreiecke QRA und RDA die Höhe AD gemeinsam haben und da $AB = AD$ (Seitenlängen eines Quadrats) gilt, stimmen die genannten vier Dreiecke in der Länge einer Grundseite und der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind daher inhaltsgleich.

Damit ist nachgewiesen, dass die angegebenen Punkte P, Q, R die geforderte Eigenschaft haben.

b) Sei S derjenige Punkt auf der Strecke BC, für den $BS = 8$ cm gilt. Sei T derjenige Punkt auf der Strecke CD, für den $TD = 8$ cm gilt.



Wegen $AB = AD = 12$ cm haben dann die beiden rechtwinkligen Dreiecke BSA und TDA den gleichen Flächeninhalt von 48 cm^2. Der Inhalt des Quadrate $ABCD$ ist wegen $AB = 12$ cm gleich 144 cm^2.

Wegen $144 - 2 \cdot 48 = 48$ hat daher die Fläche $ASCT$ den gleichen Inhalt wie jedes der beiden Dreiecke ABS und ATD. Damit ist nachgewiesen, dass S und T die geforderte Eigenschaft haben.

c) Wir unterscheiden die beiden Fälle, dass n eine gerade bzw. eine ungerade natürliche Zahl ist.

c1) Sei $n = 2k$ mit $k = 1,2,3,...$.
Wir zerlegen die Seite BC und die Seite CD des Quadrats $ABCD$ (mit der Seitenlänge a) durch die Punkte $P_1,P_2,...,P_{k-1}$ bzw. $R_1,R_2,...,R_{k-1}$ jeweils in k kongruente Teilstrecken mit der gemeinsamen Länge $\frac{a}{k}$.

Verbindet man A mit diesen Punkten sowie mit C, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke zerlegt. Genau k von diesen Teildreiecken haben die Höhe AB gemeinsam, die restlichen k Teildreiecke haben die Höhe AD gemeinsam; ferner gilt $AB = AD$.
Folglich stimmen alle diese $2k$ Teildreiecke in der Länge einer Grundseite sowie in der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind somit inhaltsgleich.

Damit ist gezeigt, dass auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrate in $2k$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

c2) Sei $n = 2k + 1$ mit $k = 1,2,3,...$.
Wir wählen auf der Seite BC die Punkte $S_1,S_2,...,S_k$ so, dass

$$AS_1 = S_1S_2 = ... = S_{k-1}S_k = \frac{2a}{2k+1} \qquad \text{und} \qquad S_kC = \frac{a}{2k+1}$$

gilt. Dies ist wegen $BC = a$ und

$$k \cdot \frac{2a}{2k+1} + \frac{a}{2k+1} = \frac{(2k+1)a}{2k+1} = a$$

möglich. Analog wählen wir auf der Seite DC die Punkte $T_1,T_2,...;T_k$ so, dass $T_kC = \frac{a}{2k+1}$ gilt.

Verbindet man A mit diesen Punkten, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke und das Viereck AS_kCT_k zerlegt.
Wie oben kann man zeigen, dass diese $2k$ Dreiecke inhaltsgleich sind. Laut Inhaltsformel beträgt dieser gemeinsame Inhalt

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{2k+1} \cdot a = \frac{a^2}{2k+1}$$

Da die Summe der Inhalte der $2k$ Dreiecke und des Vierecks gleich dem Inhalt des Quadrats sein muss, erhält man für den Inhalt des Vierecks

$$A_\square = a^2 - 2k \cdot \frac{a^2}{2k+1} = \frac{a^2}{2k+1}$$

Damit ist gezeigt, dass auch das Viereck AS_kCT_k den gleichen Inhalt hat wie jedes der $2k$ Dreiecke und dass daher auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrats in $2k + 1$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen von [5]

5.25.2 II. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230821
Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

Für die ersten beiden Stellen von z kommen wegen (1) nur die Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81 in Frage. Von diesen entfallen wegen (3) die Zahlen 25 und 49, da es keine zweistelligen Quadratzahlen mit der Anfangsziffer 5 bzw. 9 gibt.
Geht man von den verbliebenen Zahlen 16, 36, 64 bzw. 81 aus, dann können bei z an der dritten Stelle wegen (3) nur die Ziffern 4, 4, 9 bzw. 6 und an der vierten Stelle wegen (2) nur die Ziffern 6, 6, 4 bzw. 1 stehen.
Folglich können nur die vier Zahlen 1646, 3646, 6494 und 8161 alle geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften, da (für die ersten beiden Ziffern sowie ebenfalls für die erste und vierte Ziffer) 16, 36, 64, 31 und (für die zweite und dritte Ziffer) 64, 64, 49 und 16 sämtliche Quadratzahlen sind.

Aufgabe 2 - 230822
Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, dass die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.

Weise nach, dass man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

Bezeichnet man die Anzahl der Brigaden mit x, so sind in jeder Brigade $(x+2)$ Schüler, und der Klasse gehören $x(x+2)$ Schüler an.
Hätte man eine Brigade weniger gebildet, wären es $(x-1)$ Brigaden mit je $(x+4)$ Schülern gewesen. Daraus ergibt sich die Schülerzahl zu $(x-1)(x+4)$. Folglich gilt

$$x(x+2) = (x-1)(x+4) \qquad \Rightarrow \qquad x = 4$$

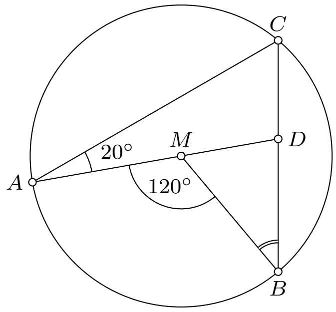
Es wurden mithin 4 Brigaden zu je 6 Schülern gebildet. Daher befinden sich insgesamt 24 Schüler in dieser Klasse.

Aufgabe 3 - 230823
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, dass der Punkt M im Innern des Dreiecke ABC liegt. Ferner sei $\overline{\angle CAM} = 20°$ und $\overline{\angle AMB} = 120°$.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle CBM$!

Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt: $\angle BCA = 120° : 2 = 60°$.
D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt aufgrund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\angle ADB = 20° + 60° = 80° \tag{1}$$



Ferner ist $\angle BMD$ Nebenwinkel zu $\angle AMB$, und somit gilt:

$$\angle BMD = 180° - 120° = 60° \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck DMB:

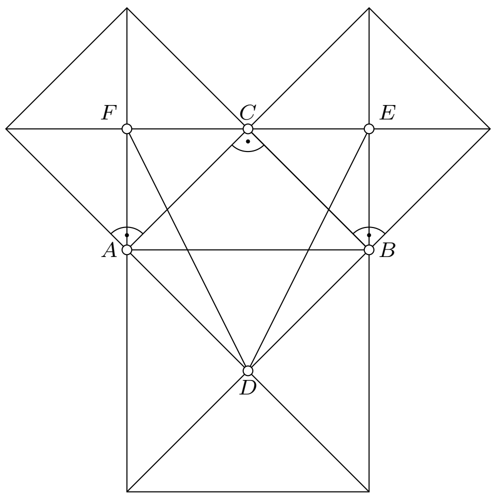
$$\angle DBM (= \angle CBM) = 180° - (60° + 80°) = 40°$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel $\angle CBM = 40°$.

Aufgabe 4 - 230824
Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, B und F bezeichnet.

Beweise, dass der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

Wegen $\angle BCE = \angle ACF = 45°$ und $\angle ACB = 90°$ ist $\angle ECF = 180°$, also liegt C auf EF.
Wegen $\angle BAC = \angle CAF = 45°$, also $\angle BAF = 90°$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\angle AFC = \angle CEB = 90°$ gilt, ist $ABEF$ ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $AB = EF$.



Das Viereck $ADBC$ ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2} AB \cdot CD$; denn je eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe.

Die Diagonale CD des Quadrats $ADBC$ steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} FE \cdot CD = \frac{1}{2} AB \cdot CD = A_Q$$

Lösungen der II. Runde 1983 übernommen von [5]

5.25.3 III. Runde 1983, Klasse 8

Aufgabe 1 - 230831
Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflusshahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

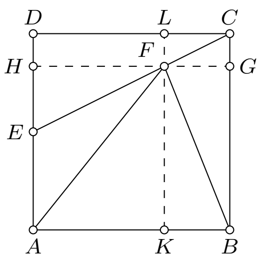
Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, dass aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

Ist nur der große Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60}$ des Beckeninhalts aus; ist nur der kleine Hahn geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{180}$ des Beckeninhalts aus.
Sind nun beide Hähne gleichzeitig geöffnet, so läuft in jeder Minute $\frac{1}{60}+\frac{1}{180}=\frac{4}{180}=\frac{1}{45}$ des Beckeninhalts aus. Somit ist das Becken nach genau 45 Minuten leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind.

Aufgabe 2 - 230832
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF}:\overline{FE}=1:2$ gilt.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!



a) Die Parallele durch F zu DC schneide AD in H und BC in G. Da sie auf BC und AD senkrecht steht, ist FG bzw. FH im Dreieck BCF bzw. AEF die zu BC bzw. AE senkrechte Höhe.

Für die Flächeninhalte $J(BCD)$, $J(AEP)$ dieser Dreiecke gilt also

$$J(BCF)=\frac{1}{2}BC\cdot FG \qquad ; \qquad J(AEF)=\frac{1}{2}AE\cdot FH \tag{1}$$

Wegen $BC \parallel AD$ folgt ferner nach dem Strahlensatz $FG:FH=FC:CE=1:2$, also $FG=\frac{1}{2}FH \quad (2)$.

Da E der Mittelpunkt von AD ist und $BC=AD$ ist, gilt

$$BC=2\cdot AE \tag{3}$$

Aus (1),(2),(3) folgt $J(BCF)=J(AEF)$, w.z.b.w.

b) Aus $FE=2\cdot CF$ (und $CF+FE=CE$) folgt $CF=\frac{1}{3}CE$.
Die Parallele durch F zu BC schneide AB in K und DC in L. Nach dem Strahlensatz gilt dann

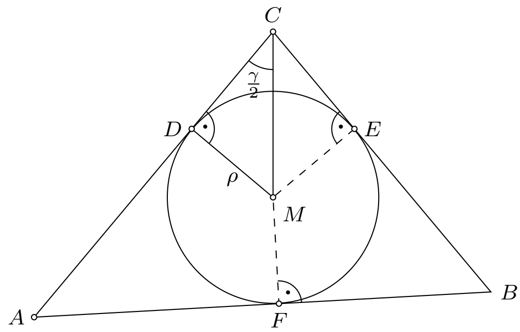
$$FL:ED=CF:CE=1:3$$

also $FL=\frac{1}{3}ED=\frac{1}{6}a$. Daher hat im Dreieck ABF die auf AB senkrechte Höhe die Länge $KF=KL-FL=\frac{5}{6}a$. Folglich hat das Dreieck ABF den Flächeninhalt

$$J(ABF)=\frac{1}{2}AB\cdot KF=\frac{5}{12}a^2$$

Aufgabe 3 - 230833
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b=7cm$, $\rho=2cm$ und $\gamma=80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M; der Inkreis berühre die Seite AC in D. Dann ist $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und, da M auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt, $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$.

Ferner liegt A auf der Verlängerung von CD über D hinaus im Abstand $CA = b$ von C. Schließlich ist die Gerade durch A,B die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von A an den Inkreis, und die Gerade durch C,B ist die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von C an den Inkreis.

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck CDM aus $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$. (2) Man zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius CM.
(3) Man spiegelt den Punkt D an der Geraden durch C und M und erhält den Berührungspunkte E einer Tangente durch C an den Inkreis.
(4) Die Gerade durch C und D verlängert man auf $b = 7$ cm und erhält den Punkt A.
(5) Von A konstruiere man eine von CA verschiedene Tangente an den Kreis. Der Berührungspunkt sei der Punkt F.
(5) Diese Tangente und die Verlängerung von CE über E hinaus schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkte ist B.

III. Jeder Konstruktionsschritt ist eindeutig ausführbar, womit das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig ist.

Aufgabe 4 - 230834
Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:
Durchläuft man die natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 der Reihe nach, so ist dabei immer wieder genau jede n-te Zahl durch n teilbar. Daraus folgt:
Die Anzahl der durch n teilbaren unter den Zahlen von 1 bis 1984 ergibt sich bei der Division von 1984 durch n mit Rest als dabei auftretender Quotient. Dies wird im folgenden wiederholt angewendet:

Wegen 1984 : 5 = 396, Rest 4, gibt es unter den Zahlen von 1 bis 1984 genau 396 Zahlen, die durch 5 teilbar sind.
Unter ihnen sind aber auch solche Zahlen, die außer durch 5 auch durch 7 und mithin (da 5 und 7 teilerfremd sind) durch 35 teilbar sind. Wegen 1984 : 35 = 56, Rest 24, sind das genau 56 Zahlen.
Ferner wurden bei den durch 5 teilbaren Zahlen alle diejenigen mitgezählt, die außer durch 5 auch durch 11 und mithin (da 5 und 11 teilerfremd sind) durch 55 teilbar.sind. Wegen 1984 : 55 = 35, Rest 4, sind das genau 36 Zahlen.

Subtrahiert man nun von der Anzahl 396 die anschließend soeben ermittelten Anzahlen 56 und 36, so werden diejenigen Zahlen zweimal erfasst, die sowohl durch 5 als auch durch 7 als auch durch 11 und mithin (wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 5, 7 und 11) durch 385 teilbar sind. Wegen 1984 : 385 = 5, Rest 59, sind das genau 5 Zahlen.

Folglich gibt es wegen 396 - 56 - 36 + 5 = 309 unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1984 genau 309 Zahlen, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind.

Aufgabe 5 - 230835
a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat.
Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wie viel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat.
Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wie viel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

a) Hat K den Radius r und Q die Seitenlänge a, so ist nach Voraussetzung $4a = 2\pi r$, also $a = \frac{\pi}{2}r$. Der Flächeninhalt von K ist $J(K) = \pi r^2$.
Der Flächeninhalt von Q ist $J(Q) = a^2 = \frac{\pi}{4}r^2$, er beträgt also das $\frac{\pi}{4}$fache, das sind 25 $pi\% \approx 78{,}5\%$ von $J(K)$.
Der Flächeninhalt von Q ist also kleiner als der von K.

b) Hat k den Radius ρ und q die Seitenlänge s, so ist nach Voraussetzung $s^2 = \pi\rho^2$, also $s = \sqrt{\pi}\rho$.
Der Umfang von k ist $2\pi\rho$. Der Umfang von q ist $4s = 4\sqrt{\pi}\rho$, er beträgt also das $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$fache, das sind $\approx 112{,}8\%$ des Umfangs von k.
Der Umfang von q ist also größer als der von k.

Aufgabe 6 - 230836
Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

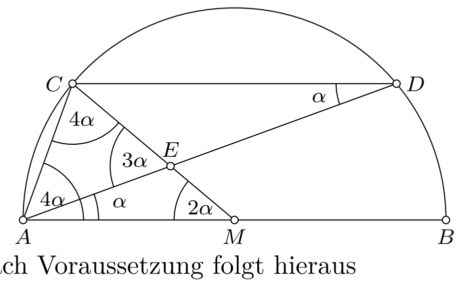
M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;

die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;

es gilt $AB \parallel CD$;

die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!



Es sei $\alpha = \angle DAB$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gilt $\angle CDA = \angle DAB = \alpha$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz folgt hieraus: $\angle AMC = 2\angle CDA = 2\alpha$.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt (da $\angle AEC$ Außenwinkel des Dreiecks AME ist)

$$\angle AEC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus

$$\angle EAC = \angle AEC = 3\alpha$$

und somit $\angle MAC = 4\alpha$. Wegen $AM = CM$ ist auch $\triangle AMC$ gleichschenklig, und es folgt

$$\angle ACM = 4\alpha$$

Somit ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz (angewandt auf $\triangle AMC$)

$$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180° \qquad \text{also} \qquad \alpha = 18°$$

und somit $\angle ACM = 72°$.
Die gesuchte Winkelgröße ist folglich durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt; sie beträgt 72°.

Lösungen der III. Runde 1983 übernommen von [5]

5.26 XXIV. Olympiade 1984

5.26.1 I. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240811
An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengenommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

Nach den genannten Feststellungen heben die Klassenstufen 8, 9 und 10 zusammen

$$100\% - 21\% - 30\% - 28\% = 21$$

des Gesamtergebnisses geliefert. Das waren andererseits Altstoffe im Wert von

$$42M + 42M + 2 \cdot (42M + 42M) = 252M$$

Wegen 252 : 21 = 12 sind 12 M somit 1% des Gesamtergebnisses; dieses beträgt daher 1200 M.

Aufgabe 2 - 240812
Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft "Mathematik" folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen. Wie viel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

Sind F, G, K, T die Gewichte von Flasche, Glas, Krug bzw. Teller, so gilt

$$F + G = K \qquad (1)$$
$$F = G + T \qquad (2)$$
$$3T = 2K \qquad (3)$$

Aus (2) folgt $3F = 3G + 3T$. Setzt man hierin (3) ein, so ergibt sich

$$3F = 3G + 2K \qquad (4)$$

Aus (1) folgt $2K = 2F + 2G$, Setzt man dies in (4) ein, so erhält man $3F = 3G + 2F + 2G$ und daraus $F = 5G$.
Also wiegen fünf Gläser so viel wie die Flasche.

Aufgabe 3 - 240813
Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, dass sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

Wenn eine Zerlegung den Bedingungen (1) und (2) genügt und wenn dabei x das viermal in (2) genannte Ergebnis ist, so sind

$$x-4, \quad x+4, \quad \frac{x}{4}, \quad 4x$$

die vier Summanden, also gilt

$$x-4+x+4+\frac{x}{4}+4x=500 \qquad \Rightarrow \quad x=80$$

folglich kann nur die Zerlegung in die Summanden 76, 84, 20, 320 die geforderten Eigenschaften haben. Sie hat diese Eigenschaften; denn die Summanden sind natürliche Zahlen und erfüllen die Probe.

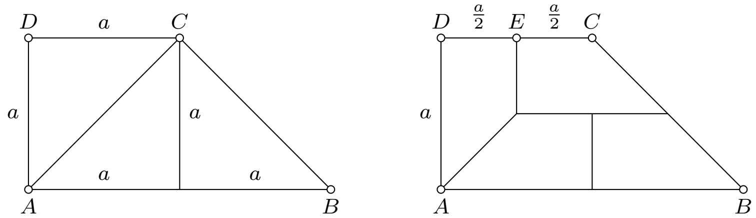
Aufgabe 4 - 240814
Aus drei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a lässt sich ein Trapez zusammensetzen.

a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez lässt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Parallelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a!

Mögliche Lösungen zu (a) und (b) zeigt die Abbildung:



(c) Jedes der drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit der Schenkellänge a hat den Flächeninhalt $\frac{1}{a}a^2$. Das aus diesen drei Dreiecken zusammengesetzte Trapez hat folglich den Flächeninhalt $\frac{3}{2}a^2$.

Jedes der vier (untereinander kongruenten, also auch flächengleichen) Teiltrapeze hat demnach den Flächeninhalt $\frac{3}{8}a^2$.
Ist $ABCD$ wie in der rechten Abbildung das zusammengesetzte Trapez und E der Mittelpunkt von CD, so sind DA und EC jeweils eine Parallelseite in einem der Teiltrapeze, und DE ist die Höhe in einem Teiltrapez.
Daher sind die gesuchten Längen dar Parallelseiten $DA=a$ und $EC=\frac{a}{2}$ und die gesuchte Länge der Höhe ist $DE=\frac{a}{2}$.

Der gesuchte Flächeninhalt F kann auch aus diesen Längen gefunden werden:

$$F=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}=\frac{3}{8}a^2$$

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen von [5]

5.26.2 II. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240821
Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.
(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.
(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.
(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln lässt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war,
y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war,
z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.

Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), dass jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x+y+z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$y+z=7, \qquad x+z=5, \qquad x+y=6$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2\cdot(x+y+z)=18$, also $x+y+z=9$. Die gesuchte Anzahl lässt sich also eindeutig ermitteln; sie beträgt 9.

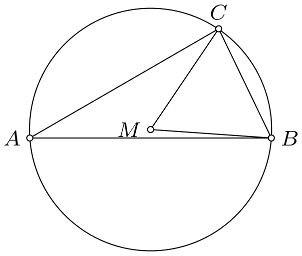
Weiter folgt $x=9-7=2$, $y=9-5=4$, $z=9-6=3$ und damit für die Wetterverteilung:
An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig,
an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch,
an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.

Wie eine Oberprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z.B. in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

Aufgabe 2 - 240822
Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\angle BAC$ betrage $30°$.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!



Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\angle BAC$ Peripheriewinkel über der Sehne BC und $\angle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\angle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2\cdot 30° = 60°$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BCM$, gilt also

$$\angle BMC + \angle MCB = 120° \qquad (1)$$

Ferner ist wegen $CM = BM = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

$$\angle MBC = \angle MCB \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\angle MBC = \angle MCB = 60°$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $BC = r$ bewiesen ist.

Aufgabe 3 - 240823
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad \text{erfüllen!}$$

Die geforderte Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die zwei Ungleichungen

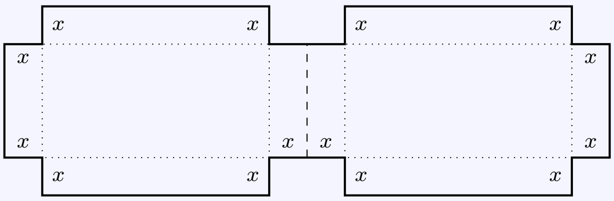
$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} \quad (1) \qquad ; \qquad \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad (2)$$

erfüllt sind.
Für natürliche Zahlen x gilt (1) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$, d.h. auch) x positiv ist und die Ungleichung $11x < 105$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $0 < x < \frac{105}{11}$, was wegen $\frac{105}{11} = 9\frac{6}{11}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $0 < x \leq 9$ erfüllt wird.

Für natürliche Zahlen x gilt (2) genau dann, wenn ($\frac{7}{x}$ existiert, d. h.) $x > 0$ ist und die Ungleichung $15x > 77$ erfüllt. Dies gilt genau dann, wenn $x > \frac{77}{15}$ ist, was wegen $\frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen x mit $x \geq 6$ erfüllt wird.

Also ist die Gültigkeit von (1) und (2) für natürliche Zahlen x gleichbedeutend mit $6 \leq x \leq 9$ (d.h., die gesuchten Zahlen sind genau die Zahlen 6, 7, 8 und 9).

Aufgabe 4 - 240824
Eine Blechtafel hat die in der Abbildung ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.



1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!

3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben.

Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

1. Jedes der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, b = 120 mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind.

   Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm. Daher ist sein Volumen

   $$V = 130\text{mm} \cdot 70\text{mm} \cdot 25\text{mm} = 227500\text{mm}^3$$

2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich $V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x$.

3. Als Längenangabe muss x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d.h. genau dann, wenn außer der Ungleichung $x > 0$ auch die Ungleichungen

   $$\frac{a}{2} - 2x > 0 \qquad \text{und} \qquad b - 2x > 0$$

   gelten. Diese sind äquivalent mit $x < \frac{a}{4}$ und $x < \frac{b}{2}$

   Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}, \frac{b}{2}$.

Lösungen der II. Runde 1984 übernommen von [5]

5.26.3 III. Runde 1984, Klasse 8

Aufgabe 1 - 240831
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
a^6 ist siebenstellig, also gilt $1000000 \leq a^6 \leq 9999999$.
Wegen $15^6 = (225 \cdot 15)^> 3300^2 > 9999999$ folgt hieraus $10 \leq a \leq 14$.
Da 10^6 auf die Ziffer 0 endet, 11^6 auf die Ziffer 1 sowie 14^2 und daher auch $14^6 = (14^2)^3$ auf die Ziffer 6, kann a nur eine der Zahlen $12, 13$ sein.
Da $13^3 = 169 \cdot 13$ auf die Ziffernfolge ...97 und somit $13^6 = (13^3)^2$ auf die Ziffernfolge ...09 endet, verbleibt nur die Möglichkeit $a = 12$.

II. In der Tat ist $12^6 = 2985984$, woraus ersichtlich ist, dass die Zahl 12 alle geforderten Eigenschaften hat.

Aufgabe 2 - 240832
Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, dass der Reifen auf dem Hinterrad nach 15000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, dass zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht. Ermittle diese Kilometerzahl!
b) Nach wie viel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, dass sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

Würde man sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad jeden Reifen erst nach seiner vollständigen Abnutzung durch einen neuen Reifen ersetzen, so müsste ein solcher Reifenwechsel auf dem Vorderrad nach 25000 km, 50000 km, 75000 km, ... usw. und auf dem Hinterrad nach 15000 km, 30000 km, 45000 km, 60000 km, 75000 km, ... usw. erfolgen.

Daher würden bei diesem Vorgehen erstmals nach 75000 km Vorderradreifen und Hinterradreifen gleichzeitig gewechselt, und bis dahin wären drei Vorderradreifen und fünf Hinterradreifen, also insgesamt acht Reifen verbraucht.

Wenn man mit acht Reifen insgesamt 75000 km fahren kann, dann kann man mit zwei Reifen insgesamt $\frac{75000}{4}$ km = 18750 km zurücklegen.
Dabei muss jeder der beiden Reifen die gleiche Strecke als Vorder- wie als Hinterradreifen zurücklegen, damit beide Reifen denselben Abnutzungsbedingungen unterworfen sind. D.h., die Reifen müssen nach $\frac{18750}{2}$ km = 9375 km ausgetauscht werden.

Die in a) bzw. b) gesuchten Kilometerangaben lauten also 9375 km bzw. 18750 km.

Aufgabe 3 - 240833
Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.
(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.
(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.
(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.
(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Stecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, dass jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, dass jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

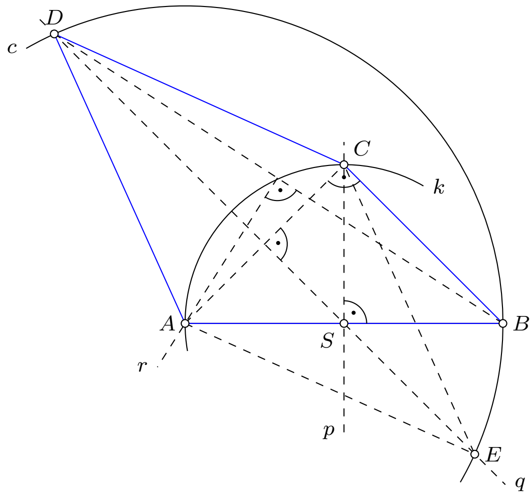
Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann "nicht überschlagen", wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Nach (V) und (II) ist S derjenige Punkt der Strecke AB, der auf der Mittelsenkrechten p von AB liegt, also der Mittelpunkt von AB.

Ferner liegt S nach (V) und (III) auf der Mittelsenkrechten von AC, also gilt $CS = AS$.
Außerdem liegt C nach (II) auf der Mittelsenkrechten p von AB.

Nach (IV) und (I) gilt $AD = AB = a$; außerdem liegt D nach (III) auf der Mittelsenkrechten q von AC. Ferner liegt D so, dass die Strecke CD die Strecke AB nicht schneidet.

Daher kann ein Viereck $ABCD$ nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn es folgendermaßen konstruiert werden kann:



II. (1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man konstruiert den Mittelpunkt S und die Mittelsenkrechte p der Strecke AB.
(3) Man konstruiert den Kreis k um S mit AS und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte q von AC.
(5) Man konstruiert den Kreis c um A mit AB.
Die Konstruktion ergibt: Für (genau) einen der Schnittpunkte von q und c schneidet seine Verbindungsstrecke mit C die Strecke AB nicht; diesen Schnittpunkt bezeichnet man mit D.

III. Beweis, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) gilt $AB = a$. Nach (2) und (3) liegt C auf der Mittelsenkrechten p von AB. Nach (4) und (5) liegt D auf der Mittelsenkrechten q von AC. Nach (5) gilt $AD = AB$, also liegt A auf der Mittelsenkrechten von BD.

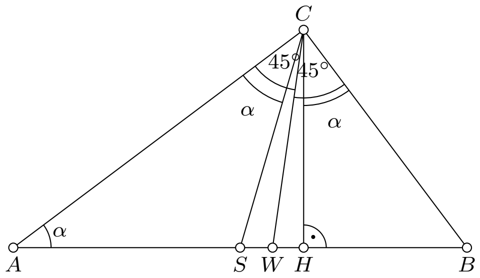
Da S nach (2) der Mittelpunkt von AB ist, liegt S auf der Mittelsenkrechten p von AB. Da nach (2) und (3) ferner, $CS = AS$ ist, liegt S auch auf der Mittelsenkrechten q von AC. Also schneiden sich p und q in dem auf AB liegenden Punkt S.

Ferner ergibt die Konstruktion: Für den in (5) konstruierten und ausgewählten Punkt D, für den sich AB und CD nicht schneiden, schneiden sich auch BC und AD nicht. Daher ist $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck.

Aufgabe 4 - 240834
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ und CH die Höhe auf AB.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle SCW} = \overline{\angle WCH}$ gilt!

Es sei o.B.d.A. $BC \leq AC$, also $\alpha = \angle BAC \leq \angle ABC = 90° - \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck ABC) und daher $\alpha \leq 45°$.
Dann ist $\angle BCH = 90° - \angle ABC$ (Winkelsumme im Dreieck BCH), also $\angle BCH = \alpha$.



Ferner liegt C nach der Umkehrung des Thalessatzes auf dem Kreis mit AB als Durchmesser. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist S; daher gilt $AS = CS$ und folglich $\angle ACS = \angle CAS = \alpha$ (Basiswinkel im Dreieck ACS).

Weiterhin ist $\angle ACW = \angle BCW = 45°$, da CW Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Aus den somit gezeigten Beziehungen

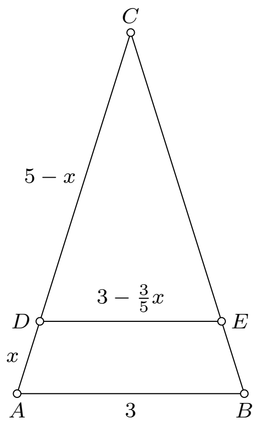
$$\angle ACS = \alpha \leq 45° = \angle ACW$$

$$\angle BCH = \alpha \leq 45° = \angle BCW$$

folgt $\angle SCW = 45° - \alpha = \angle HCW$, w.z.b.w.

Aufgabe 5 - 240835
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!



Nach Voraussetzung gilt $AC = BC$ und $AC + BC + AB = 13$ cm sowie $AB = 3$ cm. Hieraus folgt $2 \cdot AC + 3$ cm $= 13$ cm, also $AC = 5$ cm.

Wegen $AC = BC$ gilt $\angle CAB = \angle CBA$. Da nach Voraussetzung $DE \parallel AB$ gilt (und D auf AC sowie E auf BC liegt), ist $ABED$ ein gleichschenkliges Trapez.
Hieraus folgt: Ist $AD = x$ cm die gesuchte Länge, so ist auch $BE = AD = x$ cm, und es gilt $CD = (5 - x)$ cm.

Wegen $DE \parallel AB$ folgt nach dem Strahlensatz $DE : AB = CD : CA$. Hieraus erhält man

$$DE = \frac{3(5-x)}{5}\text{cm} = \left(3 - \frac{3}{5}x\right) \text{cm}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $AB + BE + DE + AD = 7{,}4$ cm, also

$$3 + x + \left(3 - \frac{3}{5}x\right) + x = 7{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $AD = 1$ cm.

Aufgabe 6 - 240836
Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.

Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

Bezeichnet man die Rastzeit von A mit a und die von B mit b, so ist bei A die (reine) Fahrzeit $2b$ und bei B entsprechend $3a$. Da die Summen von Fahrzeit und Rastzeit für jeden der beiden Fahrer gleich sind, gilt

$$a + 2b = b + 3a \qquad \text{also} \qquad b = 2a > a$$

Der Fahrer B hatte mithin die längere Rastzeit.

Lösungen der III. Runde 1984 übernommen von [5]

5.27 XXV. Olympiade 1985

5.27.1 I. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250811

a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl 30 um 50% vergrößert.

Um wie viel Prozent muss diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?

b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft!

a) Vergrößert man die Zahl 30 um 50%, so erhält $b = 30 + 15 = 45$.
Die Zahl b muss um 15 verkleinert werden, um erneut 30 zu erhalten. Dieser Wert 15 ist $\frac{1}{3}$ von 45, also lautet die gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

b) Für jede positive Zahl a gilt: Vergrößert man a um 50%, so erhält man

$$b = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

Diese Zahl muss um $\frac{a}{2}$ verkleinert werden, um erneut a zu erhalten; $\frac{a}{2}$ ist aber ein Drittel von $\frac{3}{2}a$.
Also lautet auch für jede beliebige positive Zahl a die - bei gleicher Aufgabenstellung wie in Aufgabe a) gesuchte Prozentangabe $33\frac{1}{3}\%$.

Aufgabe 2 - 250812
In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitig Aufgaben. Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

$$\begin{array}{cccccccc}
* & * & * & 2 & 7 & \cdot & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * & * & 5 \\
 & & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & * & * & * & * & 9 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, dass eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, dass es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.

Hat er damit recht? Begründe deine Antwort!

Angenommen, es gäbe eine Lösung der Aufgabe.
Dann folgte: Da das erste Teilprodukt (2. Zeile) auf 5 endet, könnte die letzte Ziffer des zweistelligen Faktors nur 5 sein, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 5 = 35$ auf die Ziffer 5 endet.
Die vorletzte Ziffer des ersten Teilproduktes kann wegen $5 \cdot 2 + 3 = 13$ nur 3 sein. Also müsste das Addieren von 3 zur letzten Ziffer des zweiten Teilproduktes (3. Zeile) auf 9 führen; daher müsste das zweite Teilprodukt auf die Ziffer 6 enden.

Demzufolge ist die Zehnerziffer des zweistelligen Faktors gleich 8, da (unter allen Produkten von 7 mit einer einstelligen Zahl) nur das Produkt $7 \cdot 8 = 56$ auf die Ziffer 6 endet.
Damit wäre das Achtfache des fünfstelligen Faktors fünfstellig und das Fünffache (2. Zeile) der gleichen Zahl sechsstellig.

Das ist ein Widerspruch, also hat Günter recht.

Aufgabe 3 - 250813
Beweise folgenden Satz: Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.

Für jede natürliche Zahl n gilt:
Entweder ist n durch 3 teilbar oder n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Gleichwertig hiermit ist jeweils die Aussage, dass es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k$ bzw. $n = 3k+1$ bzw. $n = 3k+2$ gibt.

Es sei nun n die kleinere von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind. Dann folgt:
Da n nicht durch 3 teilbar ist, gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 3k+1$ oder $n3k+2$. Wäre $n = 3k+2$, so wäre die auf n folgende Zahl $n+1 = 3k+3 = 3 \cdot (k+1)$ durch 3 teilbar; denn da k eine natürliche Zahl ist, ist auch $k+1$ eine natürliche Zahl.

Also verbleibt nur die Möglichkeit $n = 3k+1$. Die Summe der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen ist somit

$$n+n+1 = 3k+1+3k+2 \cdot 6k+3 = 3 \cdot (2k+1)$$

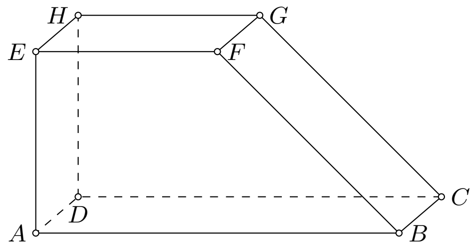
Da k eine natürliche Zahl ist, ist es auch $2k+1$; somit ist der verlangte Beweis geführt, dass die genannte Summe durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4 - 250814
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.

a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!

b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!

c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!



b) Bezeichnet man den Flächeninhalt der Grundfläche des Restkörpers mit A_G und seine Höhenlänge mit $h = \frac{a}{2}$, dann gilt für das Volumen V_R des Restkörpers

$$V_R = A_G \cdot h$$

Da die Grundfläche trapezförmig (mit a und $2a$ als Längen der parallelen Seiten und mit a als Höhenlänge) ist, beträgt der Flächeninhalt der Grundfläche

$$A_G = \frac{a+2a}{2} \cdot a = \frac{3}{2}a^2$$

Mithin ist

$$V_R = \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a^2$$

c) Das Volumen V_Q des Quaders ist $V_Q = 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = a^3$. Damit ist das gesuchte Verhältnis $V_R : V_Q = 3 : 4$.

Lösungen der I. Runde 1985 übernommen von [5]

5.27.2 II. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250821
Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, dass die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

Es sei x die kleinste der zwölf Zahlen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6+x+7+x+8+x+9 = x+10+x+11$$

$$10x+45 = 2x+21 \qquad \Rightarrow \qquad x=-3$$

Tatsächlich ist die Summe der zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von -3 bis 6 gleich der Summe der beiden darauffolgenden Zahlen 7 und 8.
Die Bedingungen der Aufgabe werden also genau von den Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 erfüllt.

Aufgabe 2 - 250822
Beweise folgenden Satz:

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, lässt bei Division durch 9 stets den Rest 2!

Jede nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist von einer der Formen $3k+1$, $3k+2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Hat eine solche Zahl die Eigenschaft, dass auch ihr Nachfolger nicht durch 3 teilbar ist, so muss sie von der Form $3k+1$ sein, da $3k+2$ die durch 3 teilbare Zahl $3k+3$ als Nachfolger hat. Der Nachfolger einer Zahl $3k+1$ ist $3k+2$, und das Produkt beider Zahlen ist

$$(3k+1)\cdot(3k+2) = 9k^2+3k+6k+2 = 9(k^2+k)+2$$

Da k eine natürliche Zahl ist, ist auch k^2+k eine natürliche Zahl und $9\cdot(k^2+k)$ das Neunfache einer natürlichen Zahl, also durch 9 teilbar. $9\cdot(k^2+k)+2$ lässt mithin bei der Division durch 9 den Rest 2, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 250823
Ein Sicherheitsschloss besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) lässt sich das Schloss öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, dass in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?

b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muss?

a) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 4, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf. Da x nicht mit den Ziffern 1, 4, 6 identisch ist, gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten.
Weil x sowohl an der 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle der Einstellungsfolge stehen kann, gibt es für die Reihenfolge 1, 4, 6 somit insgesamt $4\cdot 6 = 24$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei den weiteren fünf möglichen Reihenfolgen 1, 6, 4; 4, 1, 6; 4, 6, 1; 6, 1, 4; 6, 4, 1. Im ungünstigsten Falle sind also $6\cdot 24 = 144$ Einstellungen auszuführen.

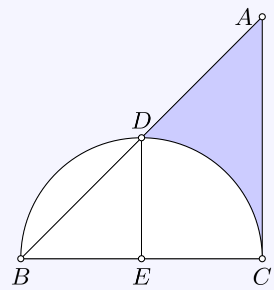
b) Man beginne mit denjenigen Zahlenkombinationen, bei denen die Ziffern 1, 6 in dieser Reihenfolge auftreten. Außer ihnen und der Ziffer 4 tritt noch jeweils eine nicht bekannte Ziffer x auf.

Wieder gibt es für x insgesamt sechs Möglichkeiten. Weil für x genau diejenigen drei Plätze in der Einstellungsfolge frei sind, an denen die Ziffer 4 nicht steht, gibt es für die Reihenfolge 1, 6 somit insgesamt $3 \cdot 6 = 18$ Möglichkeiten.

Analog verfährt man bei der anderen Reihenfolge 6, 1. Somit wären unter den Bedingungen der Aufgabe b) höchstens $2 \cdot 18 = 36$ Einstellungen nötig.

Aufgabe 4 - 250824

Es sei ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Abbildung).



a) Beweise, dass die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.

Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

a) Da BC Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von BC auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $EB = ED$.
Daraus folgt $\angle DBE = \angle BDE$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE).

Andererseits ist $\angle DBE = \angle ABC = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$\angle BED = 180° - (\angle DBE + \angle BDE) = 90°$$

d.h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\angle BED = \angle BCA = 90°$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck $ACED$ ist daher ein Trapez.
Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r = EC$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $ED = r$ und $CA = BC = 2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC lässt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes $ACED$ und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J = \frac{r+2r}{2}r - \frac{\pi}{4}r^2 = \frac{r^2}{6}(6-\pi)$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p = \frac{100J}{F} = \frac{25r^2(6-\pi)}{2r^2} = 12{,}5(6-\pi)$$

Aus $\pi \approx 3{,}142$ ergibt auf eine Dezimalstelle genau $p \approx 35{,}7$. Also sind 35,7% der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Lösungen der II. Runde 1985 übernommen von [5]

5.27.3 III. Runde 1985, Klasse 8

Aufgabe 1 - 250831
Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Ist n eine natürliche Zahl, so gilt entweder $n = 3k$ oder $n = 3k+1$ oder $n = 3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Ist nun $n = 3k$, so ist $n^2 = 9k^2$ durch 3 teilbar.
Ist, jedoch $n = 3k + 1$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ bei Division durch 3 den Rest 1.
Ist schließlich $n = 3k + 2$, so lässt $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1.

In den betrachteten Fällen sind die Quadrate aller natürlichen Zahlen erfasst. Der Rest 2 tritt also bei Division von Quadratzahlen durch 3 nicht auf, w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 250832
Brigade Schulz spielt im "Tele-Lotto (5aus 35)" nach einem sogenannten "vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2, ... , 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tipp abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tipp mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tipp mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tipp mit fünf richtig getippten Zahlen 3000M.

Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

Hinweis: Die Kosten, d.h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

a) In der Menge der sechs von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau sechs verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen; diese Teilmengen entstehen nämlich, indem man jeweils eine der sechs Zahlen weglässt.

Genau zwei der sechs Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die beiden folgenden Sorten (1), (2):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit den beiden Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau zwei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der beiden anderen Zahlen stehen.
Von der Sorte (2) sind folglich genau die vier anderen Tipps des Systems. Somit ergibt sich der Gewinn $2 \cdot 400M + 4 \cdot 20M = 880M$.

b) In der Menge der sieben von der Brigade verwendeten Zahlen gibt es genau 21 verschiedene Teilmengen aus je fünf Elementen.
Diese entstehen nämlich, indem man jeweils genau zwei der sieben Zahlen weglässt, und das kann

- entweder die erste der sieben Zahlen und eine der sechs übrigen sein (sechs Möglichkeiten)
- oder die zweite und eine der fünf von der ersten und zweiten verschiedenen Zahlen (fünf Möglichkeiten)
- oder die dritte und eine der vier von der ersten bis dritten verschiedenen Zahlen (vier Möglichkeiten)
- oder die vierte und eine der drei von der ersten bis vierten verschiedenen Zahlen (drei Möglichkeiten)
- oder die fünfte und eine der zwei von der ersten bis fünften verschiedenen Zahlen (zwei Möglichkeiten)
- oder die sechste und die siebente Zahl (eine Möglichkeit);

die Anzahl dieser Teilmengen ist somit $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Genau drei der sieben Zahlen sind nicht Gewinnzahlen. Daher gibt es unter den von der Brigade abgegebenen Tipps genau die drei folgenden Sorten (1), (2), (3):

(1) Tipps mit genau einer Zahl, die nicht Gewinnzahl ist,
(2) Tipps mit genau zwei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind,
(3) Tipps mit den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind.

Von der Sorte (1) gibt es genau drei Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen die vier Gewinnzahlen und eine der drei anderen Zahlen stehen. Von der Sorte (3) gibt es genau sechs Tipps, nämlich genau diejenigen, in denen außer den drei Zahlen, die nicht Gewinnzahl sind, noch zwei der vier Gewinnzahlen stehen, und das sind entweder die erste und eine der drei anderen Gewinnzahlen (drei Möglichkeiten) oder die zweite und eine der beiden von der ersten und zweiten verschiedenen Gewinnzahlen (zwei Möglichkeiten) oder die dritte und vierte Gewinnzahl (eine Möglichkeit).

Von der Sorte (2) sind folglich genau die $21 - 3 - 6 = 12$ anderen Tipps des Systems.
Somit ergibt sich der Gewinn $3 \cdot 400M + 12 \cdot 20M = 1440M$.

Aufgabe 3 - 250833
Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A und B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6cm$.

a) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6cm$) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, dass alle verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

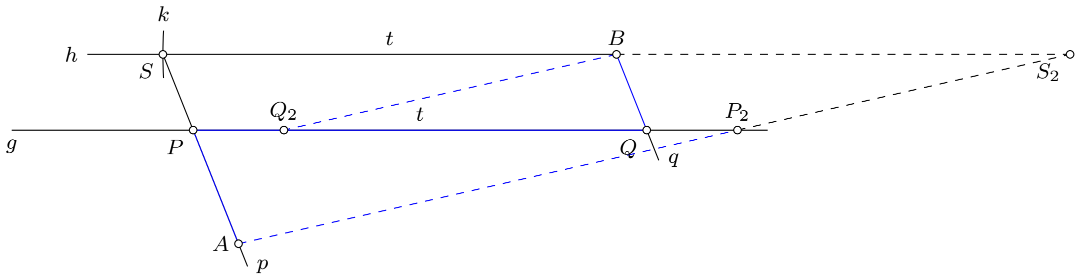
Wenn ein Streckenzug $APQB$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Die Gerade p durch A und P ist nach (1) und den Voraussetzungen über g,A nicht parallel zu g; sie schneidet daher die Parallele h durch B zu g in einem Punkt S.
Für diesen gilt $SB \parallel PQ$ und nach (2) auch $PS \parallel QB$. Also ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus (3) folgt $SB = PQ = t$.

Somit liegt S auf dem Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm.
Ferner folgt, dass P auf g und auf AS liegt und dass Q auf g und der Parallelen q durch B zu AS liegt.

Damit ist bewiesen, dass jeder Streckenzug $APQB$, der (1), (2), (3) erfüllt, durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

b) [1] Man konstruiert die Parallele h durch B zu g.
[2] Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm und bezeichnet einen Schnittpunkt von h und k mit S,

[3] Man konstruiert die Gerade p durch A und S und bezeichnet den Schnittpunkt von p und g mit P.
[4] Man konstruiert die Parallele q durch B zu p und bezeichnet den Schnittpunkt von q und g mit Q.



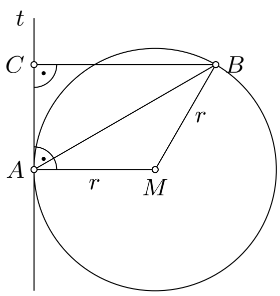
c) Für jeden Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:
Nach [3] und [4] liegen P und Q auf g; d.h., (1) ist erfüllt. Nach [3] und [4] gilt ferner $p \parallel q$; A und P liegen auf p; B und Q liegen auf q; also ist (2) erfüllt.

Nach [1], [3] und [4] ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus [2] folgt $PQ = BS = 6$ cm; d.h., (3) ist erfüllt.

d) Gefordert wird eine Konstruktion, die (wegen der Möglichkeit, in Konstruktionsschritt [2] jeden der beiden Schnittpunkte S_1, S_2 von h und k mit S zu bezeichnen) genau zwei Streckenzüge ergibt. Die beiden Streckenzüge sind nicht zueinander kongruent. (siehe Abbildung)

Aufgabe 4 - 250834
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\angle CBM$ halbiert!



Der Berührungsradius MA steht senkrecht auf t. Deshalb und nach Voraussetzung stehen AM und CB senkrecht auf t und sind nach Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen parallel zueinander.
Da $\angle MAB$ und $\angle ABC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle ABC = \angle MAB$. (1)

Andererseits ist das Dreieck AMB gleichschenklig mit $AM = MB$ (Radius), und es gilt $\angle MAB = \angle ABM$ (Basiswinkel). (2)
Aus (1) und (2) folgt unmittelbar $\angle ABC = \angle ABM$ und damit ist gezeigt, dass AB den Winkel $\angle CBM$ halbiert.

Aufgabe 5 - 250835
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wie viel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, dass jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und dass diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Wenn am ersten Tag x Schnitter bei der Arbeit waren, so gilt:

Das Mähen der zweiten Wiese ist die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von einem Schnitter. Das Mähen der ersten Wiese ist eine doppelt so große Leistung; es ist also die Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern, vermehrt um die Tagesleistung von zwei Schnittern.

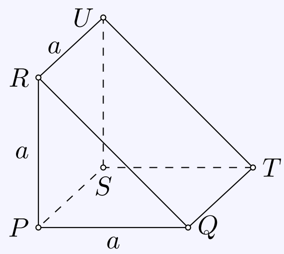
Andererseits war das Mähen der ersten Wiese die halbe Tagesleistung von x Schnittern, vermehrt um die halbe Tagesleistung von $\frac{x}{2}$ Schnittern.

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = 8$$

Folglich waren am ersten Tag acht Schnitter bei der Arbeit.

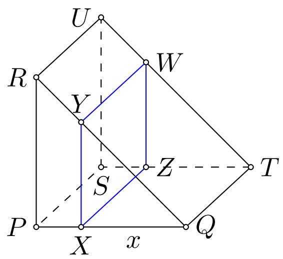
Aufgabe 6 - 250836

Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge a des Dreiecks PQR.



Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!



Für jede Ebene, die (o.B.d.A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSRU$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWTZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen der, gleichen Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY. Dabei ist wegen $XY \parallel PR$, also (Stufenwinkel) $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ und $\angle XQY = \angle PQR = 45°$, auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = X$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$. Somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\begin{aligned} 16(a^2 - x^2) &= 9x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 16x^2 = 9(a^2 - x^2) \\ 16a^2 &= 25x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 25x^2 = 9a^2 \end{aligned}$$

und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit

$$x = \frac{4}{5}a \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{3}{5}a$$

Somit haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}a$$

die geforderte Eigenschaft.

Lösungen der III. Runde 1985 übernommen von [5]

5.28 XXVI. Olympiade 1986

5.28.1 I. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260811
In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, dass für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und dass alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{cccccccccc} A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\ & : & & & & - & & & - & \\ & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\ \hline & K & C & + & C & K & = & & D & D \end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, dass sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Um eine in (a) geforderte Eintragung (siehe unten) zu finden, kann man mit Überlegungen zu Aufgabe b) beginnen, indem man folgende Schlüsse zieht: Wenn eine Eintragung allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, so folgt: Nach der Gleichung in der 1. Zeile hat die Summe aus der Einerziffer C der rechten Seite und der Einerziffer B wieder die Einerziffer C. Daher muss $B = 0$ sein.
Danach folgt durch Betrachtung der Zehnerziffern weiter $C + D = 10$.

Aus der 2. Spalte folgt $K + H = 10$ und dann weiter $2C + 1 = D$. Setzt man dies in $C + D = 10$ ein, so ergibt sich $3C + 1 = 10$, also $C = 3$ und damit $D = 7$.

Hiernach ergibt sich aus der 3. Zeile	K	$=$	4
und damit (wegen $K + H = 10$)	H	$=$	6.
Aus der 3. Spalte folgt nun	I	$=$	5, $E = 8$
und damit aus der 1. Zeile	A	$=$	9
und aus der 1. Spalte	F	$=$	2, $G = 1$.

Als Eintragung, die zu a) anzugeben ist, wurde so

```
903 - 70 = 833
 :     -    -
 21 * 36 = 756
--------------
 43 + 34 =  77
```

gefunden, und als Antwort zu b) hat sich ergeben, dass es keine anderen Möglichkeiten geben kann, die Bedingungen zu erfüllen. Zur vollständigen Bearbeitung der Aufgabe a) ist dann noch festzustellen, dass die gefundene Eintragung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern verwendet und dass bei dieser Eintragung alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Daher erfüllt genau die angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen.

Aufgabe 2 - 260812
Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45679091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1234570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45679091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, dass 37 ein Teiler von 45679091 ist?

Nein, der Schluss ist nicht möglich. Obwohl nämlich der SR1 für $z = 45679091 : 37$ das gerundete Ergebnis 1234570 anzeigte, hatte er dennoch einen genaueren Näherungswert gespeichert. Das kannst du feststellen, indem du nach folgendem Ablaufplan rechnest:

$\boxed{45679091}$ $\boxed{:}$ $\boxed{37}$ $\boxed{=}$ Anzeige: 1234570 $\boxed{-}$ $\boxed{1234570}$ $\boxed{=}$ (*)

Nun zeigt der Rechner nicht 0, sondern 0.03 als Ergebnis. Er hat also als Divisionsergebnis von $z = 45679091 : 37$ den Wert 1234570,03 gespeichert.

Uwe hatte folgendermaßen gerechnet:

$\boxed{45679091}$ $\boxed{:}$ $\boxed{37}$ $\boxed{=}$ Anzeige: 1234570 $\boxed{\cdot}$ $\boxed{37}$ $\boxed{=}$ (**)

Das danach angezeigt Ergebnis 45679091 ist somit (näherungsweise) das Produkt aus dem gespeicherten Wert 1234570,03 und 37; es ist nicht - wie Uwe gemeint hat - das Produkt aus dem angezeigten Wert 1234570 und 37. Deshalb ist Uwes Schlussweise falsch.

Weitere Hinweise: Um zu sehen, dass diese falsche Schlussweise hier auch tatsächlich zu einem falschen Ergebnis führt, gibt es mehrere Möglichkeiten:

A. Man kann sofort - ohne nochmalige Rechnerbenutzung - erkennen, dass 45679091 : 37 nicht genau gleich 1234570 sein kann; denn $1234570 \cdot 37$ ist eine (ganze) Zahl mit der letzten Ziffer 0.

B. Man kann 45679091 : 37 schriftlich berechnen und daraus entnehmen, dass das Ergebnis keine ganze Zahl ist.

C. Die richtige Antwort auf die Frage, ob 37 ein Teiler von 45679091 ist, kann man erhalten, indem man anstelle der Fortsetzung in (**), die Uwe zur Kontrolle gewählt hat, neu eintippt:

   $\boxed{1234570}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{37}$ $\boxed{=}$

   Danach zeigt der Rechner 45679090 an. (Das ist in der Tat, wie in A bemerkt, eine ganze Zahl mit der letzten Ziffer 0. Da diese Rechnung (***) bei der Rechengenauigkeit des SR1 nicht nur einen Näherungswert, sondern das genaue Produkt liefert, folgt:

   Die Zahl 45679091 ist nicht durch 37 teilbar, sondern lässt bei Division durch 37 den Rest 1.

Aufgabe 3 - 260813

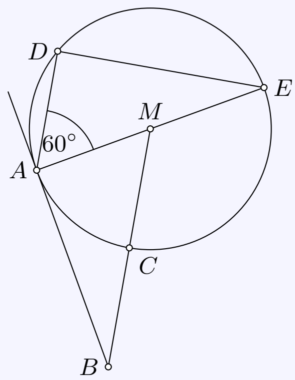
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\angle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.

Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!



Die Strecken AB und DE sind Seiten der Dreiecke MAB bzw. ADE. Kann man zeigen, dass diese beiden Dreiecke kongruent sind, so folgt $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Der Radius von k sei r. Nach Voraussetzung (1) ist AE ein Durchmesser von k, also gilt $\overline{AE} = 2r$. Als Radius von k ist auch $\overline{MC} = r$. Nach (3) folgt hieraus $\overline{MB} = 2r$. Somit gilt

$$\overline{MB} = \overline{AE}. \tag{4}$$

Nach dem Satz von Thales gilt $\angle ADE = 90°$. Da die Tangente senkrecht auf dem Berührungsradius steht, gilt $\angle MAB = 90°$, also ist

$$\angle MAB = \angle ADE. \tag{5}$$

Da A und D auf k liegen, ist das Dreieck MAD gleichschenklig mit $\overline{MA} = \overline{MD}$. Für den Basiswinkel folgt aus (2) daher $\angle MDA = \angle MAD = 60°$, nach dem Innenwinkelsatz also $\angle AMD = 60°$. Also ist das Dreieck MAD sogar gleichseitig, und es gilt

$$\overline{MA} = \overline{AD}. \tag{6}$$

In den Dreiecken MAB bzw. ADE liegt der in (5) genannte Winkel als rechter Winkel der größten Seite gegenüber, die in (4) genannt ist. Nach dem Kongruenzsatz sSW folgt somit $\triangle MAB \cong \triangle ADE$ und damit $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Anderer Lösungsweg: Wie oben zeigt man (4) und (5). Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt nun A auf dem Kreis mit dem Durchmesser BM, der nach (3) als Mittelpunkt C hat. Somit ist $\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{AM}$, also das Dreieck ACM gleichseitig, und es folgt

$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle CMA} = 60°,$$

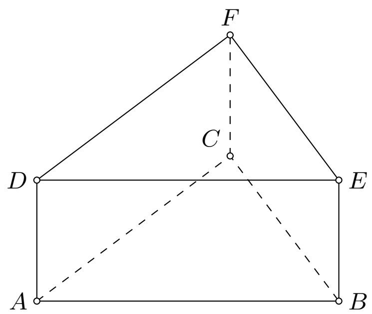
nach (2) also weiter

$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle MAD} = \overline{\angle EAD}. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (7) folgt nach dem Kongruenzsatz wws, dass $\triangle MAB \cong \triangle ADE$, also $\overline{AB} = \overline{DE}$ gilt.

Aufgabe 4 - 260814
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!



Die Seitenflächen des Prismas sind Rechtecke, haben also gleichlange Gegenseiten. Mithin gilt

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$$

sowie für die gesuchten Längen

$$a = \overline{BC} = \overline{EF}, \qquad b = \overline{CA} = \overline{FD}, \qquad c = \overline{AB} = \overline{DE}.$$

Aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen untereinander folgt somit

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h \tag{1}$$

und aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen mit der Grund- oder Deckfläche folgt

$$2a + 2h = a + b + c \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich damit $a = b = c$ und daher aus (2) $2a + 2h = 3h$, also $a = 2h$.

Die gesuchten Längen lauten mithin $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = 2h$.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen von [5]

5.28.2 II. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260821
In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: "Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können."

(2) Ilka: "Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will."

(3) Katrin: "Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können."

(4) Susann: "Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können."

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Wie der nachfolgende Öffnungsplan zeigt, muss das Gespräch der Freundinnen entweder am Mittwoch oder am Freitag stattgefunden haben, da nur an diesen beiden Tagen die vier genannten Geschäfte gleichzeitig geöffnet hatten (x bedeutet geschlossen):

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Fleischer	x						x
Haushaltwaren		x					x
Schuhmacher				x			x
Optiker		x		x		x	x

Wegen (1) kann das Gespräch nicht an einem Freitag stattgefunden haben, denn alle Besorgungen, die Anja und Susann am Freitag hätten machen können, wären auch am Mittwoch zu erledigen gewesen. Also fand das Gespräch an einem Mittwoch statt, und es folgt weiter:
Wegen (4) muss Susann zum Fleischer gegangen sein, wegen (3) Katrin zum Schuhmacher. Hiernach und wegen (2) war Ilka beim Optiker und folglich Anja im Haushaltwarengeschäft, und bei dieser Verteilung ist auch (1) erfüllt.

Daher sind die Angaben miteinander vereinbar, und aus ihnen folgt eindeutig:
(a) Anja war im Haushaltwarengeschäft, Ilka beim Optiker, Katrin beim Schuhmacher, Susann beim Fleischer.
(b) Das Gespräch fand am Mittwoch statt.

Aufgabe 2 - 260822
Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, dass C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\angle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\angle ACD$!

Das Dreieck EDB ist wegen (1) gleichschenklig, also ist $\overline{\angle EDB} = \overline{\angle BED}$.

Die Winkel $\angle ABD$ und $\angle ACD$ sind Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\widehat{AD}$, also ist $\overline{\angle ABD} = \overline{\angle ACD} = \alpha$.
Der Winkel $\angle ABD$ ist Außenwinkel des Dreiecks EDB. Also ist

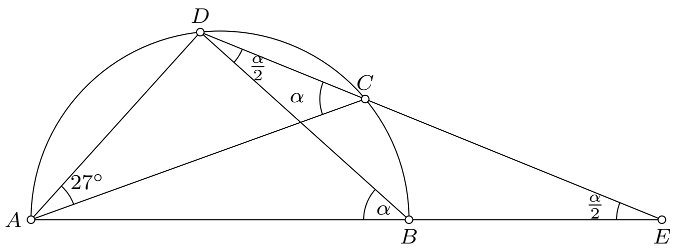
$$\overline{\angle BED} + \overline{\angle EDB} = \overline{\angle ABD}$$

und wegen (3)

$$\overline{\angle BED} = \overline{\angle EDB} = \frac{\alpha}{2}$$

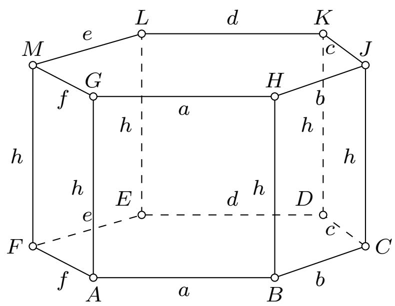
Der Winkel $\angle BDA$ ist als Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel. Im Dreieck ACD gilt nach dem Innenwinkelsatz und wegen (2):

$$27° + \alpha + \frac{\alpha}{2} + 90° = 180° \qquad \text{also} \qquad \alpha = 42°$$



Aufgabe 3 - 260823
Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!



Da die Seitenflächen jedes geraden Prismas Rechtecke sind, also jeweils gleichlange Gegenseiten haben, ist die gegebene Länge

$$h = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CJ} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FM}$$

und für die gesuchten Längen gilt

$$a = \overline{AB} = \overline{GH}, b = \overline{BC} = \overline{HJ}, c = \overline{CD} = \overline{JK}, d = \overline{DE} = \overline{KL}, e = \overline{EF} = \overline{LM}, f = \overline{FA} = \overline{MG}$$

Aus der Umfangsgleichheit aller sechs Seitenflächen folgt

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h = 2d + 2h = 2e + 2h = 2f + 2h \qquad \text{also} \qquad a = b = c = d = e = f$$

und aus der Umfangsgleichheit der Grundfläche mit jeder Seitenfläche folgt somit $6a = 2a + 2h$, also $a = \frac{h}{2}$.
Daher sind die gesuchten Längen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = \frac{h}{2}$.

Aufgabe 4 - 260824

a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29 mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29 mal so groß ist wie z''.

a) Wenn z zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffer a die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so gilt $100a + z = 29z$, also $z = \frac{25a}{7}$ (1),

ferner ist z eine natürliche Zahl, also $25a$ durch 7 teilbar. Da 25 zu 7 teilerfremd ist, muss a durch 7 teilbar sein. Außerdem gilt $a \neq 0$ (denn aus $a = 0$ ergäbe sich $z = 0$ im Widerspruch zur Zweistelligkeit von z). Die einzige von 0 verschiedene durch 7 teilbare Ziffer ist aber $a = 7$.

Damit folgt aus (1), dass nur $z = 25$ den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen kann, und zwar zusammen mit der davorzusetzenden Ziffer $a = 7$.

In der Tat werden damit diese Bedingungen erfüllt; denn es gilt $725 = 29 \cdot 25$

b) Man kann Zahlen z' mit der geforderten Eigenschaft z.B. dadurch bilden, dass man an die eben gefundene Zahl 25 eine beliebige Anzahl Nullen anhängt; denn es gilt $72500...0 = 29 \cdot 2500...0$.

c) Wenn z'' zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffernfolge, die für sich genommen die natürliche Zahl b darstellt, die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt und wenn z'' eine n-stellige natürliche Zahl ist, so gilt

$$10^n + b + z'' = 29z'' \qquad \Rightarrow \qquad z'' = \frac{10^n \cdot b}{28} \tag{2}$$

Ferner ist z'' eine natürliche Zahl, also $10^n \cdot b$ durch (28 und folglich durch) 7 teilbar. Da 10^n zu 7 teilerfremd ist, muss b durch 7 teilbar sein. Ferner ist $b \neq 0$; denn aus $b = 0$ ergäbe sich $z'' = 0$ im Widerspruch zu der in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingung, dass z'' nicht durch 10 teilbar sein soll.

Daraus, dass z'' eine n-stellige Zahl ist, folgt $z'' < 10^n$; hieraus und aus (2) ergibt sich $\frac{b}{28} < 1$, also $b < 28$.

Somit muss b eine der Zahlen 7, 14, 21 sein. In diesen drei Fällen ergibt sich

$$z'' = \frac{10^n}{4} = 10^{n-1} \cdot 25 \quad \text{bzw.} \quad z'' = \frac{10^n}{2} = 10^{n-1} \cdot 5 \quad \text{bzw.} z'' = \frac{10^n \cdot 3}{4} = 10^{n-2} \cdot 75$$

Das ist jeweils nur dann eine nicht durch 10 teilbare natürliche Zahl, wenn $n = 2$ bzw. $n = 1$ bzw. $n = 2$ gilt. Dies führt jeweils auf $z'' = 25$ bzw. $z'' = 5$ bzw. $z'' = 75$

Also können nur diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, und zwar nur zusammen mit der davorzusetzenden Ziffernfolge $b = 7$ bzw. $b = 14$ bzw. $b = 21$.

In der Tat werden damit die Bedingungen erfüllt, denn die genannten Zahlen z'' sind nicht durch 10 teilbar, und es gilt

$725 = 29 \cdot 25$ bzw. $145 = 29 \cdot 5$ bzw. $2175 = 29 \cdot 75$.

Lösungen der II. Runde 1986 übernommen von [5]

5.28.3 III. Runde 1986, Klasse 8

Aufgabe 1 - 260831
Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: "Der Vorrat reicht dafür, dass jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."

(I) Weise nach, dass es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!

(II) Weise nach, dass für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

(I) Wenn die Aussagen des Pionierleiters bei einem Vorrat von x Losen zutreffen, so kann jedes der Mädchen so viele Lose kaufen, wie die folgende Tabelle angibt. Ferner ist dort angegeben, wie viele Lose dann jeweils noch vorhanden sind.

	Anzahl der Lose, die das Mädchen kaufen kann	Anzahl der Lose, die danach noch vorhanden sind
1. Mädchen	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$x-(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$
2. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$	$(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})-(\frac{x}{4}+\frac{1}{4})=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$
3. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$	$(\frac{x}{4}-\frac{3}{4})-(\frac{x}{8}+\frac{1}{8})=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$
4. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})+\frac{1}{2}=\frac{x}{16}+\frac{1}{16}$	$(\frac{x}{8}-\frac{7}{8})-(\frac{x}{16}+\frac{1}{16})=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$
5. Mädchen	$\frac{1}{2}(\frac{x}{16}-\frac{15}{16})+\frac{1}{2}=\frac{x}{32}+\frac{1}{32}$	

Da das 5. Mädchen alle noch vorhandenen Lose gekauft hat, gilt

$$\frac{x}{32}+\frac{1}{32}=\frac{x}{16}-\frac{15}{16} \qquad \text{also} \qquad x=31$$

Als Vorrat an Losen kann daher höchstens die Zahl $x=31$ die Eigenschaft haben, dass die Aussagen des Pionierleiters zutreffen.

(II) Für diese Anzahl als Vorrat gilt in der Tat:

Das 1. Mädchen kann $\frac{31}{2}+\frac{1}{2}=16$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 15 Losen kann das 2. Mädchen $\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=8$ Lose kaufen.

Von den dann vorhandenen 7 Losen kann das 3. Mädchen $\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$ Lose kaufen. Von den dann vorhandenen 3 Losen kann das 4. Mädchen $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ Lose kaufen.

Von dem dann vorhandenen 1 Los kann das 5. Mädchen $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ Los kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.

Für den Vorrat von 31 Losen treffen somit die Aussagen des Pionierleiters zu; die einzelnen Mädchen können nach diesen Aussagen der Reihe nach 16, 8, 4, 2, 1 Lose kaufen.

2. Lösungsweg:

Wenn die Aussagen des Pionierleiters zutreffen, so folgt:
Nachdem die ersten vier Mädchen gekauft haben, wie angegeben, kann das 5. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kaufen, und danach bleibt kein Los übrig.
Also war das eben genannte halbe Los die andere Hälfte der noch vorhandenen Lose; d.h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 1 betragen.

Also bleibt, wenn das 4. Mädchen die Hälfte der noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft, danach noch genau dieses eine Los übrig. Somit war dieses Los und das halbe Los zusammen die andere Hälfte der zuvor noch vorhandenen Lose; d.h. die Anzahl der noch vorhandenen Lose hatte 3 betragen.

Entsprechend schließt man:

Für das 3. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $3\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 7 betragen; für das 2. Mädchen hatte die Hälfte der Anzahl der zuvor noch vorhandenen Lose $7\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 15 betragen; die Hälfte der Anzahl der ganz zu Beginn vorhandenen Lose hatte $15\frac{1}{2}$, diese Anzahl selbst also 31 betragen.

(II) wie im 1. Lösungsweg.

Aufgabe 2 - 260832
Ermittle alle diejenigen Paare $(p;\ q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.

(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

I. Wenn ein Paar $(p; q)$ von Primzahlen zusammen mit einer natürlichen Zahl n die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:

   Nach (2) gilt $p+q = n^2$, nach (3) gilt $n+p+q = 42$, wegen der vorigen Gleichung also $n+n^2 = 42$, d.h. $n(n + 1) = 42$ (4).

   Die einzigen Möglichkeiten, 42 als Produkt zweier natürlicher Zahlen darzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) $42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$.

   Von diesen Darstellungen enthält nur $6 \cdot 7$ zwei Faktoren der Gestalt n und $n + 1$, d.h. aus (4) (für natürliche Zahlen n) folgt $n = 6$.

   Nach (2) gilt somit $p+q = 36$. Also ist p eine der Primzahlen kleiner als 36, d.h. eine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, und q ist jeweils die entsprechende der Zahlen 34, 33, 31, 29, 25, 23, 19, 17, 13, 7, 5.

   Von diesen Möglichkeiten scheiden alle außer $p = 17$, $q = 19$ aus, da für sie entweder $q - p \geq 10$ oder $q-p < 0$ wird, also (1) nicht erfüllt ist (einige auch deswegen, weil bei ihnen q keine Primzahl ist).

   Also kann nur das Paar $(p; q) = (17; 19)$ alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 17 und 19 sind Primzahlen, es gilt $0 < 19 - 17 < 10$, $17 + 19 = 36 = 6^2$ und $6 + 17 + 19 = 42$. Also erfüllt genau das Paar $(17; 19)$ die Bedingungen der Aufgabe.

Andere Möglichkeiten, von (4) auf $n = 6$ zu schließen:

1. Für alle natürlichen Zahlen $n < 6$ ist $n(n + 1) < 6 \cdot 7$, für $n > 6$ ist $n(n + 1) > 6 \cdot 7$.

   Also kann unter den natürlichen Zahlen n nur $n = 6$ die Gleichung $n(n + 1) = 42$ erfüllen.

2. Bei Kenntnis der Lösungsformel quadratischer Gleichungen (oder nach Herleitung, etwa vermittels $(n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 42$) erhält man:

   Von den beiden Lösungen
$$n_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 42} = \frac{1}{2}(-1 \pm 13)$$
   der quadratischen Gleichung $n^2 + n - 42 = 0$ ist nur $n_1 = 6$ eine natürliche Zahl.

Aufgabe 3 - 260833
Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

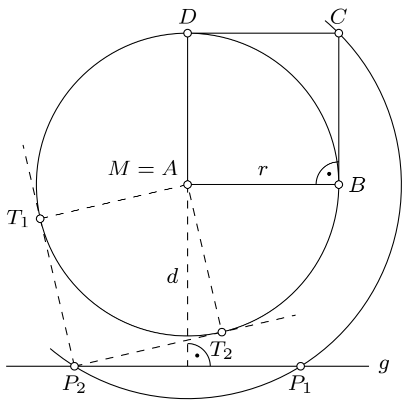
(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

(b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann lässt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.

(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge r.

(2) Man konstruiert den Kreis c um M mit dem Radius $\overline{AC}$. Die Schnittpunkte P_1, P_2, die c mit g hat, sind dann alle zu konstruierenden Punkte P.

Beweis zu (I): Es sei P ein Punkt, der (a) und (b) erfüllt; die Berührungspunkte der von P an k gelegten Tangenten seien T_1 und T_2 (siehe Abbildung).
Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt dann

$$\overline{\angle MT_1P} = 90° \qquad , \qquad \overline{\angle MT_2P} = 90°$$

nach (b) gilt $\overline{\angle T_1PT_2} = 90°$. Also ist MT_1PT_2 ein Rechteck. Wegen $\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r$ ist dieses Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge r und folglich kongruent zu dem in (1) konstruierten Quadrat $ABCD$. Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{AC}$; also liegt P auf dem in (2) konstruierten Kreis c. Wegen (a) liegt P auch auf g. Also ist P einer der in (2) erhaltenen Schnittpunkte P_1, P_2, w.z.b.w.

Beweis zu (II): Es sei P ein Punkt, der nach der angegebenen Beschreibung konstruiert ist. Nach (2) liegt dann P auf g, erfüllt also die Bedingung (a). Nach (2) gilt ferner $\overline{AC} = \overline{MP}$.

Da g größeren Abstand als r zu M hat und somit k meidet, gibt es zwei von P an k gelegte Tangenten. Sind T_1 und T_2 ihre Berührungspunkte, so folgt: Nach (1) gilt $\overline{AB} = \overline{MT_1}$, nach (1) und dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt $\overline{\angle ABC} = \overline{\angle MT_1P}$, zugleich sind die hier genannten Winkel als rechte Winkel die größten Innenwinkel in $\triangle ABC$ bzw. $\triangle MT_1P$.

Nach dem Kongruenzsatz sSW ergibt sich damit $\triangle ABC \cong \triangle MT_1P$. Ebenso folgt $\triangle ADC \cong \triangle MT_2P$.

Also sind die Vierecke $ABCD$ und MT_1PT_2 zueinander kongruent. Da nach (1) nun $\overline{\angle BCD} = 90°$ ist, gilt auch $\overline{\angle T_1PT_2} = 90°$; d.h., auch (b) ist erfüllt, w.z.b.w.

Hinweis: Hat man im Konstruktionsschritt (1) $A = M$ gewählt, so kann zum Beweis (II) auch ausgeführt werden, dass es nach (2) eine Drehung um M gibt, die C in P überführt. Bei dieser Drehung gehen die tangentialen Strecken CB, CD in tangentiale Strecken PT_1, PT_2 über; und ihr rechter Winkel bleibt erhalten.

Aufgabe 4 - 260834
In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.

(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Die drei in (2) genannten Punkte, die auf der in (1) genannten Geraden liegen, seien P_{98}, P_{99}, P_{100}, die übrigen der 100 Punkte seien P_1, P_2, ... , P_{97} genannt.

Eine Gerade geht genau dann durch mehr als einen der 100 Punkte, wenn sie

(a) entweder ein Paar verschiedener Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} miteinander verbindet

(b) oder einen der Punkte P_1, P_2, ... ,P_{97} mit einem der Punkte P_{98}, P_{99}, P_{100} verbindet

(c) oder die Gerade durch P_{98}, P_{99}, P_{100} ist.

Jede in (a) genannte Gerade ist von jeder in (b) genannten Geraden verschieden. Ferner gilt: Jede in (a) genannte Gerade und jede in (b) genannte Gerade ist von der in (c) genannten Geraden verschieden.

Die Anzahl der in (a) genannten Geraden lässt sich folgendermaßen ermitteln:
Man kann jeden der 97 Punkte P_1, P_2, ... , P_{97} mit jedem der 96 anderen unter diesen Punkten durch eine Gerade verbinden. Dabei hat man jede in (a) genannte Gerade genau zweimal erfasst. Also beträgt deren Anzahl

$$\frac{97 \cdot 96}{2} = 97 \cdot 48$$

Die Anzahl der in (b) genannten Geraden beträgt $97 \cdot 3$. Also ist die gesuchte Anzahl $97 \cdot 48 + 97 \cdot 3 + 1 = 4948$.

Hinweis: Man kann auch eine schrittweise Überlegung durchführen:
Für 3 Punkte, die (1) und (2) (mit der Anzahl 3 statt 100) erfüllen, gibt es genau eine gesuchte Gerade. Jeder Punkt, der dann noch so hinzugefügt wird, dass (1) und (2) (mit der jeweils neuen Anzahl n der Punkte) erfüllt bleiben, erbringt genau $n-1$ neue Geraden hinzu. So kommt man auf die gesuchte Anzahl $1 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 = 1 + (3 + 99) + (4 + 98) + ... + (50 + 52) + 51 = 1 + 48 \cdot 102 + 51 = 4948$.

Aufgabe 5 - 260835
Beweise folgende Sätze:

I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

(I) Wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$ (1) gilt und CD die Seitenhalbierende von AB ist, d.h. D (auf AB liegt und) $\overline{AD} = \overline{BD}$ (2) erfüllt, so folgt aus (1), (2) und $\overline{CD} = \overline{DC}$ (3) nach dem Kongruenzsatz sss, dass $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ und damit $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ gilt. Also ist CD auch die Winkelhalbierende von $\angle ACB$, w.z.b.w.

(Man kann auch CD als Winkelhalbierende voraussetzen und dann aus $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$, (1), (3) mit dem Kongruenzsatz sws auf (2) schließen.)

(II) In einem Dreieck ABC sei die Strecke CD (mit D auf AB) sowohl Seitenhalbierende als auch Winkelhalbierende; d.h. es werde $\overline{AD} = \overline{BD}$ (4) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ (5) vorausgesetzt.

Es sei E derjenige Punkt, für den D der Mittelpunkt von CE ist. Dann halbieren in dem Viereck $AEBC$ die Diagonalen einander gegenseitig, also ist es ein Parallelogramm.

Daher gilt $\overline{AC} = \overline{BE}$ (6) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BED}$ (7) (Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen AC, BE).

Aus (5) und (7) folgt $\overline{\angle BCD} = \overline{\angle BED}$ und daraus nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $\overline{BC} = \overline{BE}$ (8). Aus (6) und (8) folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, w.z.b.w.

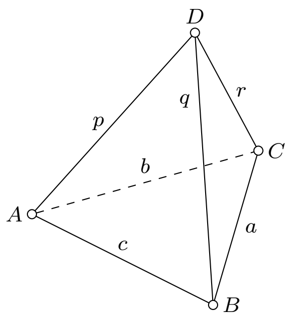
Aufgabe 6 - 260836
Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, dass die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.

Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \qquad \overline{BD} = q, \qquad \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!



Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ABD gilt $a + b + c = p + q + c$ (1).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ACD gilt $a + b + c = p + b + r$ (2).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und BCD gilt $a + b + c = a + q + r$ (3).
Behauptung: Hieraus folgt: a, b, c sind eindeutig bestimmt und zwar gilt $a = p$, $b = q$, $c = r$.

1. Beweismöglichkeit hierzu:

   Aus (1) folgt $a + b = p + q$ (4), aus (3) und (2) folgt $a + q + r = p + b + r$ und daraus $a + q = p + b$. (5)

   Addiert man (4) und (5), so ergibt sich $2a + b + q = 2p + b + q$ und daraus $a = p$.

   Setzt man dies in (1) bzw. in (2) ein, so ergibt sich $b = q$ bzw. $c = r$.

2. Beweismöglichkeit:

   Addition von (1), (2), (3) ergibt

   $$3(a + b + c) = a + b + c + 2(p + q + r)$$

   also $a + b + c = p + q + r$ (6).

   Aus (6) zusammen mit (1) bzw. mit (2) bzw. mit (3) folgt $c = r$ bzw. $b = q$ bzw. $a = p$.

Lösungen der III. Runde 1987 übernommen von [5]

5.29 XXVII. Olympiade 1987

5.29.1 I. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270811
Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

"Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
Schreibe des Ergebnis auf!"

Es stellte sich heraus, dass alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Die Schüler müssen sich nicht unbedingt die gleiche Zahl gedacht haben. Man stellt fest, dass aus zwei verschiedenen Anfangszahlen dasselbe Ergebnis entsteht. So genügen zum Beweis z.B. folgende Feststellungen:

Die Anfangszahl 1 führt der Reihe nach auf die Zahlen $1 \cdot 2 = 2, 2 + 30 = 32, 32 : 2 = 16, 16 - 1 = 15$.
Die Anfangszahl 2 führt der Reihe nach auf die Zahlen $2 \cdot 2 = 4, 4 + 30 = 34, 34 : 2 = 17, 17 - 2 = 15$.

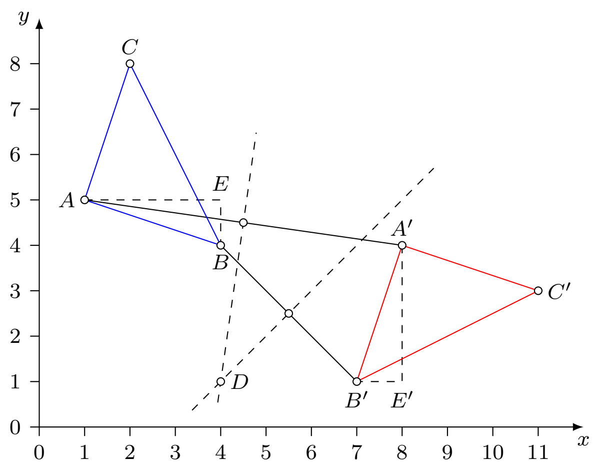
Andere Beweismöglichkeit: Man beweist, dass aus jeder Anfangszahl a dasselbe Ergebnis entsteht, nämlich vermittels der Zahlen

$$a \cdot 2; \quad a \cdot 2 + 30; \quad (a \cdot 2 + 30) : 2 = a + 15; \quad a + 15 - a = 15$$

Aufgabe 2 - 270812
In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, dass es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann lässt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.



Das Einzeichnen von Punkten wie E,E' oder von Dreiecken wie ABC, ABE, $A'B'C'$, $A'B'E'$, die zur Verdeutlichung der nachstehenden Hinweise dienen, wird nicht gefordert.

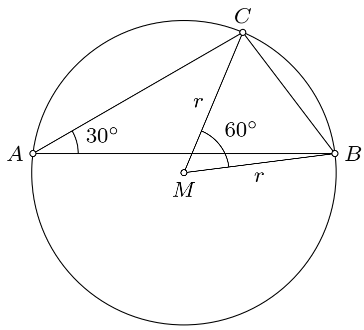
Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Mittelsenkrechte g von AA'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechte h von BB'.
Der Schnittpunkt D von g und h ist das gesuchte Drehzentrum.

Beweis: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, so muss $DA = DA'$ gelten. Also muss D auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen (denn diese ist die Menge aller derjenigen Punkte, deren Entfernung zu A gleich ihrer Entfernung zu A' ist).
Ebenso folgt, dass D auf der Mittelsenkrechten von BB' liegen muss. Daher kann nur derjenige Punkt D das gesuchte Drehzentrum sein, der durch die Konstruktion (1), (2) erhalten werden kann.

Zur Kontrolle: Es muss sich der Punkt $D(4,1)$ ergeben.

Aufgabe 3 - 270813
Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe 30° hat.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!



Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC. Dann gilt nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC$.
Wegen $\angle BAC = 30°$ (nach Voraussetzung) folgt hieraus $\angle BMC = 60°$. (1)

Aus $MB = MC = r$ (als Radien eines Kreises) folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle CBM = \angle MCB$. (2)
Wendet man den Innenwinkelsatz auf das Dreieck BCM an, dann folgt aus (1) und (2)

$$\angle CBM + \angle MCB + 60° = 180° \quad ; \quad 2\angle CBM = 120° \quad ; \quad \angle CBM = \angle MCB = 60° \qquad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt dann, dass das Dreieck BCM gleichseitig ist. Folglich gilt: $BC = MB = r$. w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 270814
Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine "Division mit Rest" durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rast notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!

b) Nun kann man vermuten, dass diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

Beweise diese Vermutung!

a) Unter den zu bildenden Beispielen könnten etwa die folgenden auftreten:

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ lässt bei Division durch 4 den Rest 1
$2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$ lässt bei Division durch 4 den Rest 0,
$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ lässt bei Division durch 4 den Rest 2.

Unter den natürlichen Zahlen kleiner als 4, d.h. den Zahlen 0,1,2,3 trat in diesen drei Beispielen nur die Zahl 3 nicht als Rest auf.

b) Wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen a und b durch 4 dividiert wird, so gibt es nur die folgenden drei Möglichkeiten: (vollständige Fallunterscheidung)

1. a und b sind gerade.

   Dann gibt es natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m$ und $b = 2n$ gilt, und es folgt:

   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2)$$

   ist durch 4 teilbar, lässt also bei Division durch 4 den Rest 0.

2. a und b sind ungerade.

   Dann gibt es, natürliche Zahlen m, n, mit denen $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$ gilt, und es folgt:

   $$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$$

   lässt bei Division durch 4 den Rest 2.

3. Von den Zahlen a, b ist eine gerade und eine ungerade.

   Wegen $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ genügt es, den Fall zu betrachten, dass a gerade und b ungerade ist. Mit $a = 2m$ und $b = 2n + 1$ folgt:

   $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 + n) + 1$$

   lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

Damit ist bewiesen, dass bei der genannten Division niemals der Rest 3 auftritt.

Lösungen der I. Runde 1987 übernommen von [5]

5.29.2 II. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270821
Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird:

> "Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!"

Lässt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln? Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

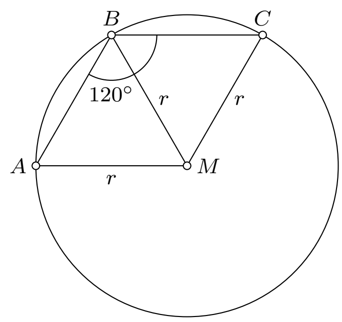
Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x, dann werden durch die genannte Rechnung der Reihe nach die Zahlen

$$x + 5 \quad ; \quad (x + 5) \cdot 16 = 16x + 80$$
$$16x + 80 - 6x = 10x + 80 \quad ; \quad (10x + 80) : 10 = x + 8$$

gebildet. Subtrahiert man hiervon die Zahl 8, so erhält man die Zahl x.
Damit wird bewiesen: Die gedachte Zahl lässt sich aus dem zu nennenden Ergebnis ermitteln, indem man von diesem Ergebnis 8 subtrahiert.

Aufgabe 2 - 270822
Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und dass der Winkel $\angle ABC$ die Größe 120° hat.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!



Wegen $MA = MB = MC = r$ und $AB = BC$ sind die Dreiecke ABM und CBM gleichschenklig und zueinander kongruent (Kongruenzsatz sss). Also ist $\angle ABM = \angle CBM$.
Hieraus, und da nach Voraussetzung $\angle ABM + \angle CBM = \angle ABC = 120°$ ist, folgt $\angle ABM = \angle CBM = 60°$.
Daher sind die Dreiecke ABM und CBM sogar gleichseitig; insbesondere gilt $AB = MA = r$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 270823
Über ein Turnier in einer AG "Schach" wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

Wenn ein solches Turnier möglich ist, müssen in jeder Runde gleich viele Partien gespielt werden; daher muss die Anzahl der Partien einer Runde ein Teiler von 112 sein, d. h. eine der Zahlen

$$1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112$$

Die folgende Tabelle zeigt eine Ermittlung von Werten für die Anzahl der Partien einer Runde. Jeweils zu einer Teilnehmerzahl wird diese Partienzahl folgendermaßen gefunden:

Sind es drei Teilnehmer A, B, C, so ergeben sich drei Partien AB, AC, BC. Bei jeder Vergrößerung der Teilnehmerzahl um eins kommen so viele Partien hinzu, wie die vorhergehende Teilnehmerzahl angibt (da der neue Teilnehmer gegen alle vorigen zu spielen hat).

Teilnehmer	Partien	Teilnehmer	Partien
3	3	10	36+9=45
4	3+3=6	11	45+10=55
5	64+=10	12	55+11=66
6	10+5=15	13	66+12=78
7	15+6=21	14	78+13=91
8	21+7=28	15	91+14=105
9	28+8=36	16	105+15=120

Bei weiterer Fortsetzung der Tabelle ergeben sich nur noch größere Partienzahlen.
Als einzige Partienzahl, die ein Teiler von 112 ist, verbleibt daher 28. Damit und wegen $112 : 28 = 4$ ist bewiesen:

Ein Turnier der genannten Art ist möglich; aus den Angaben folgt eindeutig: Es wurden genau vier Runden gespielt; es nahmen genau acht AG-Mitglieder teil.

Aufgabe 4 - 270824
Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S. Ermittle das Verhältnis $A : S$

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist!

(c) Es gilt $A = 6a^2$. Ferner hat W das Volumen a^3; daraus folgt:
Jeder Teilwürfel hat das Volumen $\frac{a^3}{n^3}$, also die Kantenlänge $\frac{a}{n}$ und folglich den Oberflächeninhalt $6\frac{a^2}{n^2}$. Daher ist

$$S = n^3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{n^2} = 6na^2$$

Somit ergibt sich

$$A : S = 6a^2 : (6na^2) = 1 : n$$

Wählt man hierin $n = 2$, so erhält man (wegen $2^3 = 8$) als Ergebnis sowohl zu (a) als auch zu (b) das Verhältnis $A : S = 1 : 2$.

Lösungen der II. Runde 1987 übernommen von [5]

5.29.3 III. Runde 1987, Klasse 8

Aufgabe 1 - 270831
Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man "Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> "Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z.B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche Überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Für jedes Geburtsdatum mit Tageszahl x und Monatszahl y gilt:
Die geforderte Rechnung führt der Reihe nach auf die Zahlen

$$2x, \qquad 2x+7, \qquad (2x+7)\cdot 50 = 100x+350$$

also auf das Ergebnis $100x + 350 + y$.
Aus diesem Ergebnis kann man die gesuchten Zahlen x und y folgendermaßen finden:

Man subtrahiert 350 und erhält die Zahl $100x + y$. Da y als Monatszahl kleiner als 100 ist, muss y die aus der Zehner- und Einerziffer von $100x + y$ gebildete Zahl sein (wobei, falls die Zehnerziffer 0 lautet, diese wegzulassen ist); und lässt man umgekehrt aus $100x + y$ die Zehner- und Einerziffer weg, so bleibt die (Zifferndarstellung der) Zahl x übrig.

Aufgabe 2 - 270832
Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern erreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

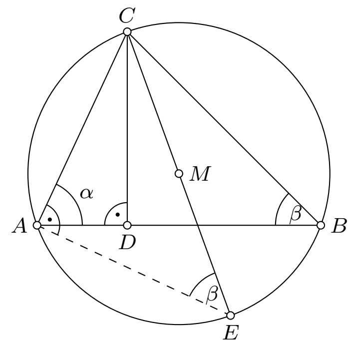
Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass Bernd höchstens 6 Punkte erreicht hat; denn entweder hat der Sieger des Turniers alle seine sieben Partien gewonnen, also auch die gegen den Zweitplazierten Bernd, oder der Sieger hat höchstens 6 Punkte erreicht und Bernd aus diesem Grunde (als Zweitplazierter mit davon verschiedener Punktzahl) höchstens 6 Punkte.

Daher haben nach Voraussetzung die vier Letztplazierten zusammen ebenfalls höchstens 6 Punkte erreicht. Sie haben aber unter sich bereits 6 Partien gespielt und müssen daher bereits in diesen Partien zusammen 6 Punkte erhalten haben.
Also haben sie alle ihre Spiele gegen die ersten vier verloren. Insbesondere hat der Siebente gegen den Dritten verloren; d.h., es folgt eindeutig; dass Gerd seine Partei gegen Uwe gewann.

Aufgabe 3 - 270833
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\angle BAC$, $\angle ABC$ vorausgesetzt werde, dass $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\angle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!



Nach Voraussetzung ist CE ein Durchmesser des Kreises k, und A liegt auf k. Nach dem Satz des Thales folgt hieraus $\angle EAC = 90°$.
Nach Voraussetzung sind $\angle AEC$ und $\angle ABC$ Peripheriewinkel über gleichem Bogen, also gilt $\angle = \angle ABC = \beta$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck AEC folgt hieraus

$$\angle ACE = 90° - \beta \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $\angle DAC = \angle BAC = \alpha$ und $\angle ADC = 90°$. Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ADC folgt hieraus

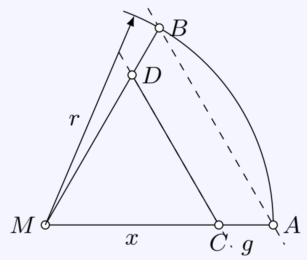
$$\angle ACD = 90° - \alpha \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich $\alpha > \beta$; wegen (1) und (2) folgt hieraus $\angle ACE > \angle ACD$ und damit, wie behauptet,

$$\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$$

Aufgabe 4 - 270834

Es sei $\overset{\frown}{AB}M$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\angle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, dass der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{AB}DC$ ist (siehe Abbildung).



a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, dass auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.

Beweise, dass man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

a) Wegen $\angle AMB = 60° = \frac{360°}{6}$ hat $\overset{\frown}{AB}$ die Bogenlänge

$$b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi \cdot r \tag{1}$$

Da Dreieck MAB mit $MA = MB$ gleichschenklig ist, gilt für die Basiswinkel $\angle MAB = \angle MBA$ sowie nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAB + \angle MBA = 180° - 60°$; daraus folgt $\angle MAB = \angle MBA = 60°$.
Wegen $CD \parallel AB$ gilt daher auch $\angle MCD = \angle MAB = 60°$ (Stufenwinkel) und ebenso $\angle MDC = 60°$. Also ist Dreieck MCD gleichseitig, d.h., es ist

$$MC = MD = CD = x \tag{2}$$

Aus (2) folgt $u_1 = 3x$ und $CA = DB = r - x$; hieraus und aus (1) folgt $u_2 = x + 2(r - x) + \frac{1}{3}\pi r$.

Daher besagt die Voraussetzung $u_1 = u_2$

$$3x = x + 2r - 2x + \frac{1}{3}\pi r$$
$$4x = \left(2 + \frac{\pi}{3}\right) r = \frac{6+\pi}{12} r$$
$$x = \frac{6+\pi}{12} r$$

b) Aus den Genauigkeitsvoraussetzungen ergibt sich nach (3), dass die Maßzahl von x als eine untere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}135}{12} \cdot 6{,}65 = 5{,}0623125$$

und als eine obere Schranke die Zahl

$$\frac{6 + 3{,}145}{12} \cdot 6{,}75 = 5{,}1440625$$

hat. Damit ist bewiesen, dass auf eine Dezimale nach dem Komma genau $x = 5{,}1$ cm gilt.

Aufgabe 5 - 270835
Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, dass die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, dass diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Für jede Eintragung, die die Voraussetzungen (1), (2.) erfüllt, gilt:

Wegen (1) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in der Eintragung genau 15 mal vor.
Wegen (2) kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 außerhalb der von d durchquerten Felder in einer geraden Anzahl vor, da diese Felder stets mit der Symmetrie bezüglich d - zu zweien gekoppelt auftreten.

Also kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 in den von d durchquerten Feldern in einer ungeraden Anzahl und somit mindestens einmal vor. Da für diese 15 Zahlen aber nur 15 von d durchquerte Felder zur Verfügung stehen, kann jede dieser Zahlen auch nicht mehr als einmal vorkommen.

Damit ist bewiesen: In den von d durchquerten Feldern kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 15 genau einmal vor; ihre Summe ist somit eindeutig bestimmt, sie beträgt $1 + 2 + ... + 15 = 120$.

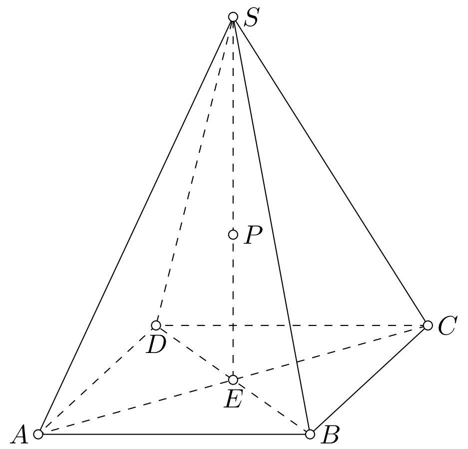
Aufgabe 6 - 270836
Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.

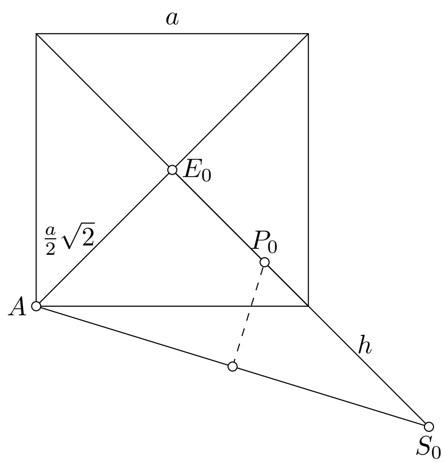
I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden lässt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!





a) und b) siehe Abbildung
b) Man kann das Dreieck AES in wahrer Größe als Dreieck $A_0E_0S_0$ konstruieren, indem man $E_0S_0 = h$, $\angle A_0E_0S_0 = 90°$ und A_0E_0 als halbe Diagonalenlänge eines Quadrates der Seitenlänge a verwendet.
Dem Punkt P entsprechend ist dann derjenige Punkt P_0 auf E_0S_0 zu ermitteln, für den $A_0P_0 = S_0P_0$ gilt. Da (in der Zeichenebene) alle Punkte X mit $A_0X = S_0X$ auf der Mittelsenkrechten von A_0S_0 liegen, kann man P_0 konstruieren, indem man $E_0S_=$ mit dieser Mittelsenkrechten zum Schnitt bringt.

In der Pyramide $ABCDS$ liegt dann der gesuchte Punkt P so auf ES, dass $EP = E_0P_0$ gilt. Da nun auf dem in a) hergestellten Bild die Strecke ES mit ihren Teilstrecken in wahrer Länge erscheint, kann man den Bildpunkt von P konstruieren, indem man auf der Bildstrecke ES von E aus die Länge E_0P_0 abträgt.

c) In der Pyramide mit den Maßen a, h lässt sich genau dann ein Punkt P auf ES finden, der $AP = SP$ erfüllt, wenn eine nach der Beschreibung in b) durchgeführte Konstruktion zu einem Schnittpunkt P_0 von E_0S_0 mit der Mittelsenkrechten von A_0S_0 führt.
Das ist genau dann der Fall, wenn $E_0S_0 \geq A_0E_0$ gilt, d.h. genau für alle $h \geq \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Lösungen der III. Runde 1987 übernommen von [5]

5.30 XXVIII. Olympiade 1988

5.30.1 I. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280811
In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie.

Es soll nun - mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht - die leichtere Kugel ermittelt werden.

Zeige, dass sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d.h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, dass nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

Es gilt $500 = 167 + 167 + 166$.
Legt man in einer 1. Wägung in jede Waagschale 167 Kugeln und ergibt sich Gleichgewicht, so muss die leichtere Kugel unter den restlichen 166 Kugeln sein; anderenfalls muss sie unter den 167 Kugeln auf der leichteren Waagschale sein.

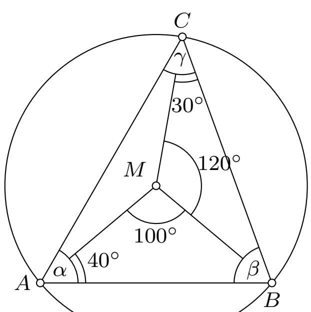
Entsprechend kann man fortsetzen: Wenn man von einer Menge der Kugeln schon weiß, dass die leichtere Kugel in dieser Menge ist, so kann man diese Menge in drei Teilmengen zerlegen, von denen zwei gleich groß sind und die dritte sich von ihnen um höchstens eine Kugel unterscheidet.
Damit hat man für die nächsten Wägungen die durch Unterstreichen gekennzeichneten Möglichkeiten:

2. Wägung: $166 = 55 + 55 + 56$ oder $167 = 56 + 56 + 55$,
3. Wägung: $55 = 18 + 18 + 19$ oder $56 = 19 + 19 + 18$,
4. Wägung: $18 = 6 + 6 + 6$ oder $19 = +6 + 7$,
5. Wägung: $6 = 2 + 2 + 2$ oder $7 = 2 + 2 + 3$,
6. Wägung: $2 = 1 + 1 + 0$ oder $3 = 1 + 1 + 1$

Die 6. Wägung bei diesem Verfahren bringt somit stets das Ergebnis; dass die leichtere Kugel eindeutig feststeht. Damit ist der verlangte Nachweis geführt.

Aufgabe 2 - 280812
Es sei M der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\angle BAM$ betrage $40°$ und die des Winkels $\angle BCM$ sei $30°$.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!



Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt M innerhalb des Dreiecks. Da M Umkreismittelpunkt des Dreiecks ist, folgt ferner $AM = BM = CM$.

Somit sind die Dreiecke ABM, BCM und CAM gleichschenklig, und es gilt nach dem Basiswinkelsatz sowie nach dem Innenwinkelsatz

$$\beta = \angle CBA = \angle CBM + \angle ABM = \angle BCM + \angle BAM = 70°$$
$$\angle AMB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$
$$\angle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$$

Also ist $\angle AMC = 360° - 100° - 120° = 140°$ (Ergänzung zum Vollwinkel), und es folgt weiter nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle CAM = \angle ACM = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$.

Damit erhalten wir

$$\alpha = \angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = 60° \qquad \text{und} \qquad \gamma = \angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = 50°$$

Die Größen der Innenwinkel bei A,B,C sind somit $\alpha = 60°, \beta = 70°$ und $\gamma = 50°$.

Aufgabe 3 - 280813
Beweise die folgende Aussage!

Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

Für jede natürliche Zahl gilt, dass sie entweder durch 5 teilbar ist oder bei der Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3 oder 4 lässt; d.h., es gilt, dass sie eine der Formen $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ oder $5n+4$ hat, wobei n eine natürliche Zahl ist.

a) Ist nun von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste k von der Form $k = 5n$, so ist sie durch 5 teilbar, und die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4, sind also nicht durch 5 teilbar.

b) Ist die kleinste der fünf Zahlen von der Form $k = 5n+1$, so ist die größte der Zahlen von der Form $5n+1+4 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar. Die übrigen vier Zahlen lassen bei der Division durch 5 wiederum der Reihe nach die Reste 1, 2, 3 und 4.

c) Ist k von der Form $k = 5n+2$, so ist die vierte der Zahlen von der Form $5n+2+3 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 2, 3, 4 und 1 lassen.

d) Ist k von der Form $k = 5n+3$, so ist die dritte der Zahlen von der Form $5n+3+2 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die vier übrigen Zahlen der Reihe nach bei der Division durch 5 die Reste 3, 4, 1 und 2 lassen.

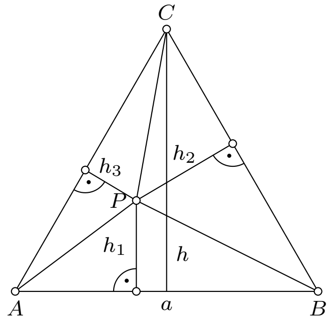
e) Ist k schließlich von der Form $k = 5n+4$, so ist die zweite der Zahlen von der Form $5n+4+1 = 5n+5 = 5(n+1)$, also durch 5 teilbar, während die übrigen vier Zahlen bei Division durch 5 der Reihe nach die Reste 4,1, 2 und 3 lassen.

Damit ist in jedem möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 280814
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.

a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miss die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.



a) Konstruktion siehe Abbildung
b) Vermutung: Die Summe der Längen der drei Lote ist gleich der Länge der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

c) Die Seitenlänge des Dreiecks sei mit a bezeichnet, die Längen der Lote von P auf AB, BC und AC in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2 und h_3; die Länge einer (also jeder) Höhe des Dreiecks ABC sei mit h bezeichnet.

Benennt man die Flächeninhalte der Teildreiecke ABP, BPC und APC in dieser Reihenfolge mit F_1, F_2 und F_3, sowie den Flächeninhalt des Dreiecke ABC mit F, dann gilt $F = F_l + F_2 + F_3$.

Andererseits gilt nach der Flächenformel für Dreiecke

$$F = \frac{1}{2}ah; \qquad F_1 = \frac{1}{2}ah_1; \qquad F_2 = \frac{1}{2}ah_2; \qquad F_3 = \frac{1}{2}ah_3$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3) \qquad \text{und damit} \qquad h = h_1 + h_2 + h_3$$

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen von [5]

5.30.2 II. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280821
Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.
Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

a) Wie viel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

a) Der Tanker legt an jedem Tage $\frac{1}{15}$ der Route zurück. Am Tage des Auslaufens des Frachters hat der Tanker bereits $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ des Weges zurückgelegt, der Abstand der beiden Schiffe beträgt zu diesem Zeitpunkt daher $\frac{3}{5}$ der Route.

Wegen $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{3}{20}$ nähern sich beide Schiffe täglich um $\frac{3}{20}$ der Route. Da $\frac{3}{5} : \frac{3}{20} = 4$ ist, treffen sich beide Schiffe 4 Tage nach Abfahrt des Frachters.

b) Der Frachter legt in 4 Tagen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ der Route zurück und der Tanker wegen $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (oder wegen seiner Fahrzeit von 10 Tagen und $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$) die restlichen $\frac{2}{3}$ der Route.

Aufgabe 2 - 280822
Beweise die folgende Aussage! Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

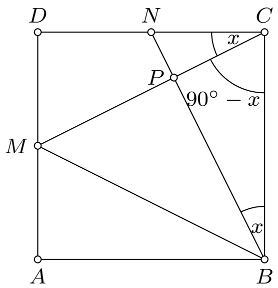
Nach dem Satz, dass es unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch 3 teilbare gibt, folgt erstens, dass es erst recht unter je fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine durch 3 teilbare Zahl gibt.

Ferner folgt, dass es unter je sechs, also erst recht unter fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen geben kann. Zu beiden Teilen der Aufgabenstellung ist damit der geforderte Beweis gebracht.

Aufgabe 3 - 280823
In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

a) Simone misst den Winkel $\angle BPM$ und stellt fest, dass die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank misst von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, dass diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!



a) Für jedes Quadrat $ABCD$ mit den genannten M, N, P gilt $BC = CD$ (Seitenlängen des Quadrates), $CN = DM$ (halbe Seitenlängen des Quadrates), $\angle BCN = \angle CDM$ (Innenwinkel des Quadrates), also $\triangle CBN \cong \triangle DCM$ (Kongruenzsatz sws) und daher $\angle NBC = \angle MCD$.
Die Größe dieser Winkel sei mit x bezeichnet. Somit gilt $\angle BCM = 90° - x$, und aus dem Innenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt

$$\angle CPB = 180° - x - (90° - x) = 180° - x - 90° + x = 90°$$

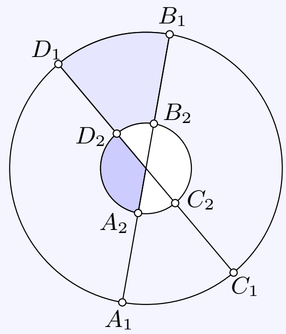
Also stehen die Strecken CM und BN senkrecht aufeinander.
b) Analog zu a) kann man $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ zeigen. Die Dreiecks ABM, DCM und CBN haben somit den gleichen Flächeninhalt, dieser sei mit F bezeichnet. Ist a die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$, so

gilt $F = \frac{1}{4}a^2$.

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DCM und CBN beträgt $\frac{1}{2}a^2$. Der Flächeninhalt des Fünfecks $DCBPM$ ist jedoch kleiner als $\frac{1}{2}a^2$, da sich die genannten Dreiecke im Dreieck NCP überlappen.

Somit ist die Quadratrestfläche $ABPM$ größer als $\frac{1}{2}a^2$. Hieraus und wegen (1) folgt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BPM größer als $\frac{1}{4}a^2$ sein muss.
Demzufolge sind die beiden Dreiecke ABM und BPM nicht einander flächengleich.

Aufgabe 4 - 280824



Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie 3 : 1 verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie die Abbildung zeigt.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, dass $\angle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!

b) Wie hat man die Größe des Winkels $\angle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?

a) Es seien $A_1M = r_1$ und $A_2M = r_2$. Dann ist der Flächeninhalt F_1 des Kreisausschnittes A_2MD_2

$$F_1 = \frac{r_2^2\pi \cdot 90°}{360°} = \frac{r_2^2\pi}{4}$$

und der Flächeninhalt F_2 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$

$$F_2 = \frac{r_1^2\pi \cdot 90°}{360°} - \frac{r_2^2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt $F_2 = 2\pi r_2^2$. Das Verhältnis $F_1 : F_2$ beträgt demnach

$$F_1 : F_2 = \frac{r_2^2\pi}{4} : (2\pi r_2^2) = 1 : 8$$

b) Es seien $A_1M = r_1$; $A_2M = r_2$ und $\angle A_1MD_1 = \alpha$. Nun gilt für den Flächeninhalt F_3 des Kreisausschnittes A_2MD_2:

$$F_3 = \frac{r_2^2\pi \cdot \alpha}{360°}$$

Da $\angle B_1MD_1$ Nebenwinkel von $\angle A_1MD_1$ ist, beträgt seine Größe $180° - \alpha$. Für den Flächeninhalt F_4 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ergibt sich daraus:

$$F_4 = \frac{r_1^2\pi(180° - \alpha)}{360°} - \frac{r_2^2\pi(180° - \alpha)}{360°} = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360°}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt

$$F_4 = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360°} \cdot 8r_2^2$$

Um die Forderung $F_3 = F_4$ zu erfüllen, hat man folglich zu wählen, dass

$$\frac{r_2^2\pi\alpha}{360°} = \frac{\pi(180° - \alpha)}{360} \cdot 8r_2^2$$

gilt.
Aus dieser Gleichung folgt, nach Multiplikation mit 360° und Division durch $\pi \cdot r_2^2$

$$\alpha = 8 \cdot (180° - \alpha) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 160°$$

Für den Winkel $\angle A_1MD_1$ hat man also die Größe 160° zu wählen.

Lösungen der II. Runde 1988 übernommen von [5]

5.30.3 III. Runde 1988, Klasse 8

Aufgabe 1 - 280831
Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, dass jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, dass auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

a) Wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, so gilt für die Maßzahlen v_A, v_B der in $\frac{km}{h}$ gemessenen Geschwindigkeiten von A bzw. B:
Gehen A und B gemäß (1) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen $4\frac{1}{2}$ Stunden bzw. $2\frac{1}{2}$ Stunden, so legen sie dabei Strecken zurück, deren in km gemessene Länge $4\frac{1}{2} \cdot v_A$ bzw. $2\frac{1}{2} \cdot v_B$ beträgt. Daraus folgt

$$4\frac{1}{2} \cdot v_A + 2\frac{1}{2} \cdot V_B = 30 \qquad (3)$$

Gehen A und B aber gemäß (2) jeweils von ihrem Start bis zum Treffen 3 Stunden bzw. 5 Stunden, so folgt entsprechend

$$3 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 30 \qquad (4)$$

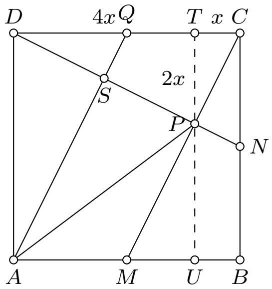
Aus (3) folgt $9 \cdot v_A + 5 \cdot v_B = 60$; hieraus und aus (4) folgt $6 \cdot vA = 30$, $v_A = 5$. Damit ergibt sich aus (4) $5 \cdot vB = 15$, $v_B = 3$.

Also sind die Marschgeschwindigkeiten, wenn (1) und (2) zutreffen, eindeutig bestimmt; sie betragen 5 $\frac{km}{h}$ bzw. 3 $\frac{km}{h}$.

II. Wenn A und B diese Geschwindigkeiten haben, so folgt:
In $4\frac{1}{2}$ Stunden legt A die Teilstrecke $22\frac{1}{2}$ km zurück und B in $2\frac{1}{2}$ Stunden die Teilstrecke $7\frac{1}{2}$ km. Wegen $22\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 30$ treffen sie sich dann, also gilt (1).
In 3 Stunden legt A die Teilstrecke 15 km zurück und B in 5 Stunden die Teilstrecke 15 km. Wegen $15 + 15 = 30$ treffen sie sich dann, also gilt auch (2).

Aufgabe 2 - 280832
Beweise den folgenden Satz!

Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.



Nach Voraussetzung gilt $BC = CD$ (Quadratseiten), $BM = BN$ (halbe Quadratseiten), $\angle CBM = \angle DCN =) =°$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle BCM \cong \triangle CDN$ und somit $\angle BCM = \angle CDN = \angle CDP$. (1)

Wegen $\angle BCM + \angle PCD = 90°$ gilt daher auch $\angle CDP + \angle PCD = 90°$. Daraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle CPD = 90°$, d.h. $CM \perp DN$. (2)

Es sei Q der Mittelpunkt von CD und S der Schnittpunkt der Strecken AQ und DN. Dann gilt: $DA = BC$ (Quadratseiten), $DQ = BM$ (halbe Quadratseiten), $\angle ADQ = \angle CBM = 90°$.

Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle DAQ \cong \triangle BCM$ und somit $AQ = CM$. Ferner ist $AM = CQ$ (halbe Quadratseiten); also ist $AMCQ$ ein Parallelogramm. Somit gilt $AQ \parallel CM$. (3)
Wegen (2) ergibt sich daher $AQ \perp DN$, d.h. $\angle ASD = \angle ASP = 90°$ (4)

Aus (3) folgt nach dem Strahlensatz $DS : SP = DQ : QC = 1 : 1$, also $DS = PS$. (5)

Aus (4), (5) und $AS = AS$ folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle ADS \cong \triangle APS$ und damit $AD = AP$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 280833
Beweise die folgende Aussage!

Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, dass das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das "Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

Sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind stets mit einer geeigneten natürlichen Zahl n von der Form n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$.
Für jede Einteilung in zwei Gruppen bezeichne P das Produkt der Zahlen einer Gruppe und Q das Produkt der Zahlen der anderen Gruppe.

Ist $n = 0$, so ist eines der Produkte P, Q gleich 0, das andere nicht, also gilt dann $P \neq Q$.
Ist $n > 0$, so muss eine der vier Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ durch eine Primzahl $p > 3$ teilbar sein. Wären nämlich diese vier Zahlen durch keine anderen Primzahlen als 2 und 3 teilbar, so ergäbe sich folgendermaßen ein Widerspruch:

Im Fall eines geraden $n > 0$ müssten $n+1$ und $n+3$ ungerade, also Potenzen von 3, und außerdem größer als 1 sein; im Fall eines ungeraden n müsste dies für $n+2$ und $n+4$ gelten; es gibt aber keine zwei Potenzen von 3, die größer als 1 sind und sich nur um die Differenz 2 unterscheiden.

Wegen $p \geq 5$ folgt nun weiter, dass unter den sechs Zahlen n, $n+1$, ..., $n+5$ keine andere als die genannte (der vier Zahlen $n+1, ..., n+4$) durch p teilbar ist. Also ist eines der Produkte P, Q durch p teilbar, das andere nicht; somit ist ebenfalls $P \neq Q$ bewiesen.

Aufgabe 4 - 280834
Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wie viel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

a) Um zunächst einen der sieben Schüler auszuwählen, hat man genau 7 Möglichkeiten.
Um dann einen zweiten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 7 genannten Möglichkeiten genau 6 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $7 \cdot 6$ Möglichkeiten führen aber je genau 2 zur gleichen Auswahl von zwei Schülern.
Also gibt es genau $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Möglichkeiten der Auswahl von zwei der sieben Schüler.

So kann man fortfahren. Um einen dritten Schüler auszuwählen, hat man zu jeder der 21 Möglichkeiten genau 5 Fortsetzungsmöglichkeiten. Von den so gefundenen $21 \cdot 5$ Möglichkeiten führen aber je genau 3 zur gleichen Auswahl; also gibt es genau 35 Möglichkeiten der Auswahl von drei der sieben Schüler.

Entsprechend findet man: Es gibt 35 Möglichkeiten der Auswahl von vier der sieben Schüler.

b) Sollen auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch eine Auswahl von zwei der restlichen fünf Schüler zu treffen. Wie in a) gibt es hierfür genau 10 Möglichkeiten der Auswahl.

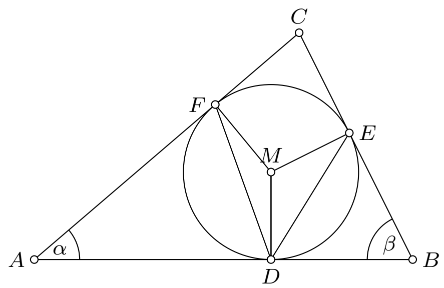
c) Sollen auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein, so hat man nur noch einen der restlichen vier Schüler auszuwählen. Für diese Auswahl gibt es genau 4 Möglichkeiten.

d) Um zunächst den als Ersten startenden unter den vier Schülern auszuwählen, hat man genau 4 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Auswahl des als Zweiten startenden Schülers genau 3 Möglichkeiten. In jeder der entstandenen 12 Möglichkeiten hat man für den Dritten genau 2 Möglichkeiten; der Vierte steht dann jeweils fest. Also gibt es genau 24 Möglichkeiten der Startreihenfolge einer Mannschaft.

Aufgabe 5 - 280835
Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.



Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, so sind DM und FM Radien. Die Geraden durch A und B bzw. durch A und C sind Tangenten an den Inkreis. Da Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\angle ADM = \angle AFM = 90° \qquad (1)$$

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Viereck gilt für das Viereck $ADMF$:

$$\angle BAC + \angle ADM + \angle DMF + \angle AFM = 360°$$

Unter Verwendung von (1) und nach Definition von α folgt daraus

$$\angle DMF = 180° - \alpha \qquad (2)$$

Durch analoge Oberlegungen im Viereck $DBEM$ erhält man

$$\angle DME = 180° - \beta \qquad (3)$$

Für die Größe des gesuchten Winkels $\angle FED$ gilt

$$\angle FDE = \angle MDF + \angle MDE \qquad (4)$$

Der Winkel $\angle MDF$ ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DMF; wegen (2) gilt somit

$$\angle MDF = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Analog folgt aus (3): $\angle MDE = \frac{\beta}{2}$. Somit erhält man aus (4): $\angle FDE = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

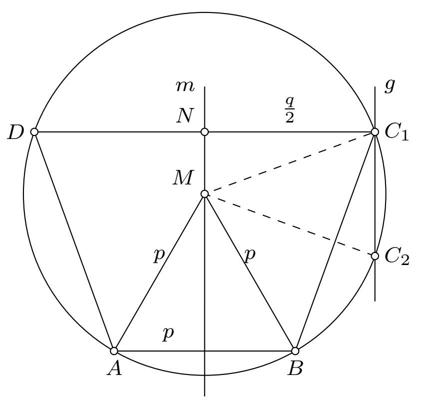
Aufgabe 6 - 280836
Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, dass ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so gilt:



Der Mittelpunkt des in (3) genannten Kreises sei M; dann ist ABM nach (2) und (3) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge p.
Die Mittelsenkrechte m von AB geht folglich durch M. Wegen (1) steht sie auch auf CD senkrecht. Wegen (2), und da das Lot vom Kreismittelpunkt auf eine Sehne diese halbiert, gilt $CN = \frac{q}{2}$ für den Schnittpunkt N von m und CD. Also hat C den Abstand von der Geraden m und liegt folglich auf einer Parallelen zu m im Abstand $\frac{q}{2}$.

Außerdem liegt C auf derselben Seite der Geraden m wie B. Damit ist bewiesen, dass ein Viereck $ABCD$, wenn es (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABM mit der Seitenlänge p.
2. Man konstruiert die Mittelsenkrechte m von AB.
3. Man konstruiert auf derselben Seite der Geraden m wie B die Parallele g zu m im Abstand $\frac{q}{2}$. Hat sie einen Punkt mit dem Kreis um M mit p gemeinsam, so sei C einer dieser Punkte.
4. Man fällt das Lot CN von C auf m und verlängert es über N hinaus um seine Länge bis D.

III. Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:

Nach den Konstruktionsschritten 2. und 4. sind AB und CD senkrecht auf m, also zueinander parallel; damit ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = p$, nach Konstruktionsschritt 4. ist $CD = q$; damit ist (2) erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1. und 3. liegen A, B und C auf dem Kreis um M mit p. Bei der Spiegelung an m geht dieser Kreis in sich über, da m durch den Mittelpunkt M des Kreises geht. Bei dieser Spiegelung geht C nach Konstruktionsschritt 4. in D über; also liegt auch D auf dem Kreis; damit ist (3) erfüllt.

IV. Die Konstruktionsschritte 1. und 2. sowie die Konstruktion von g in 3. sind stets bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar.
Ein gemeinsamer Punkt C von g mit dem Kreis existiert genau dann, wenn der Abstand zwischen m und g nicht größer als der Radius des Kreises ist, d.h., genau dann, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt. Ein solcher Punkt ist genau dann eindeutig bestimmt (nämlich Berührungspunkt von g mit dem Kreis), wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt, wenn dagegen $\frac{q}{2} < p$ ist, so gibt es genau zwei Schnittpunkte C_1, C_2, die man in 3. als C wählen kann.

Liegt ein so erhaltener Punkt C vor, so ist jeweils D durch Konstruktionsschritt 4. eindeutig bestimmt. Im Fall $\frac{q}{2} < p$ erhält man so zu C_1 bzw. C_2 jeweils D_1 bzw. D_2. Da hierzu verschieden große (nicht überstumpfe) Zentriwinkel $\angle BMC_1$, $\angle BMC_2$, also auch verschieden lange Sehnen BC_1, BC_2 gehören, sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 zueinander nicht kongruent. Damit ist bewiesen:

a) Genau dann existiert ein gesuchtes Viereck, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt,
b) genau dann ist es bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt.

Lösungen der III. Runde 1988 übernommen von [5]

5.31 XXIX. Olympiade 1989

5.31.1 I. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290811
Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40 prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: "Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig."

Stimmt das?

Der Inhalt dieser Flasche Essigessenz besteht aus $\frac{40}{100} \cdot 200$ ml = 80 ml Essigsäure und 200 ml - 80 ml = 120 ml Wasser.
Nach dem Vermischen mit den angegebenen 800 ml Wasser sind folglich insgesamt 920 ml Wasser und 80 ml Essigsäure vorhanden. Das sind 920 ml + 80 ml = 1000 ml Flüssigkeit und davon 80 ml Essigsäure. In 100 ml dieser Flüssigkeit sind folglich 8 ml Essigsäure; d.h., es liegt ein 8 prozentiger Speiseessig vor.

Aufgabe 2 - 290812
Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$.

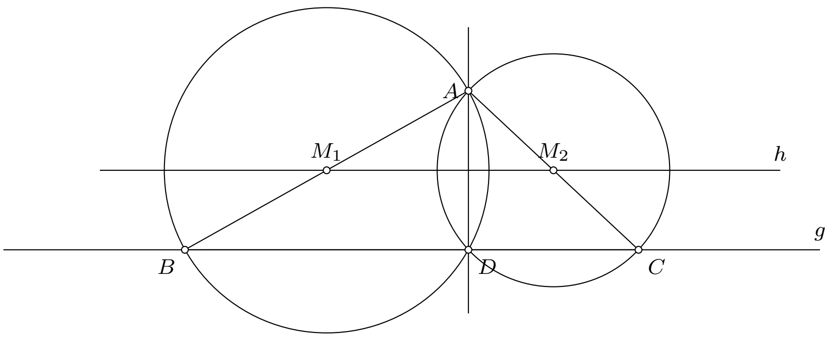
Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

Ein gerades Prisma ist ein Körper, dessen Grundfläche und Deckfläche parallelliegende kongruente Vielecke und dessen Seitenflächen Rechtecke sind.
Bei dem genannten Prisma ist die Summe der Längen der Deckkanten und der Grundkanten $6a$, also verbleibt $15a - 6a = 9a$ für die Summe der drei Seitenkantenlängen; jede Seitenkante hat daher die Länge $3a$.
Der Flächeninhalt A_M der Mantelfläche beträgt somit $A_M = 9a^2$.

Aufgabe 3 - 290813
Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, dass sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und dass ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.

a) Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muss!

b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!



a) Da D auf einem Halbkreis über AB als Durchmesser liegt, folgt nach dem Satz des Thales $\angle BDA = 90°$.
Ebenso folgt $\angle ADC = 90°$.
Da B und C (ebenso wie M_1 und M_2) auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen, folgt $\angle BCD = \angle BDA + \angle ADC = 180°$. Also liegen B, D, C auf einer gemeinsamen Geraden.

b) Vermutung: Unter den genannten Voraussetzungen ist stets $g \parallel h$.

1. Beweismöglichkeit:
Die Verbindungsgerade h der Kreismittelpunkte steht auf der Schnittsehne AD senkrecht. Nach a) steht auch g auf AD senkrecht. Also ist $g \parallel h$.

2. Beweismöglichkeit:
Nach einer Strahlensatz-Umkehrung folgt $g \parallel h$ aus $AM_1 : AB = AM_2 : AC = 1 : 2$.

Aufgabe 4 - 290814
Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechnen.

a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!
b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!
c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.
Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

a) Aus Beispielen wie etwa

$$110222 + 222071 = 332233 = 11 \cdot 30203$$
$$130333 + 333031 = 463364 = 11 \cdot 42124 = 2^2 \cdot 11 \cdot 10531$$
$$118862 + 268811 = 387673 = 11 \cdot 35243 = 11 \cdot 13 \cdot 2711$$

kann man zu der Vermutung gelangen:
Für jede sechsstellige natürliche Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, ist $n + n'$ durch 11 teilbar.

b) Beweis dieser Vermutung:
Sind a, b, c, d, e, f in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f \\ n' &= 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \qquad \text{also} \\ n + n' &= 100001a + 10010b + 1100c + 1100d + 10010e + 100001f \\ &= 11(9091(a + f) + 910(b + e) + 100(c + d)) \end{aligned}$$

durch 11 teilbar.

c) Es sei $k = 2m$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 1$, und es sei n eine beliebige k-stellige natürliche Zahl, deren Einerziffer von Null verschieden ist. Sind $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ in dieser Reihenfolge die Ziffern von n, so ist

$$\begin{aligned} n &= a_0 \cdot 10^{2m-1} + a_1 \cdot 10^{2m-2} + ... + a_{2m-2} \cdot 10 + a_{2m-1} \\ n' &= a_0 + a_1 \cdot 10 + ... + a_{2m-2} \cdot 10^{2m-2} + a_{2m-1} \cdot 10^{2m-1} \end{aligned}$$

Nach Addition und anschließendem Ausklammern von $a_0, a_1, ..., a_{2m-1}$ steht in $n + n'$

bei a_0 und bei a_{2m-1} der Faktor $10^{2m-1} + 1$,
bei a_1 und bei a_{2m-2} der Faktor $10^{2m-2} + 10 = 10(10^{2m-3} + 1)$, ...
bei a_{m-1} und bei a_m der Faktor $10^m + 10^{m-1} = 10^{m-1}(10 + 1)$.

Nun kann man beweisen, dass die hier auftretenden Zahlen $10 + 1$, $10^3 + 1$, ..., $10^{2m-3} + 1$, $10^{2m-1} + 1$ durch 11 teilbar sind:
Für $10 + 1$ ist das klar die weiteren Zahlen haben 1 als Anfangs- und Endziffer und dazwischen eine gerade Anzahl Ziffern 0. Subtrahiert man 11, so entsteht eine Zahl mit 0 als Endziffer und davor einer geraden Anzahl Ziffern 9.
Jede solche Zahl ist durch 11 teilbar; das ist damit auch für $n + n'$ bewiesen.

Lösungen der I. Runde 1989 übernommen von [5]

5.31.2 II. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290821
Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.

(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können Schlittschuh laufen.

(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können Ski laufen.

(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder Schlittschuh laufen noch Ski laufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln lässt!

Aus diesen Angaben lässt sich die Schülerzahl x nicht eindeutig ermitteln. Es gibt beispielsweise die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen kann genau 1 Schüler,
- nur Skilaufen können genau 4 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 8 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt diese Möglichkeit wegen $1+4+8+4=17$ die Aussage (1), wegen $1+8=9$ die Aussage (2), wegen $4+8=12$ die Aussage (3) sowie wegen der vierten Angabe auch (4).

2. Möglichkeit:
- nur Schlittschuhlaufen können genau 3 Schüler,
- nur Skilaufen können genau 6 Schüler,
- beide Sportarten beherrschen genau 6 Schüler,
- keine der beiden Sportarten beherrschen genau 4 Schüler.

In der Tat erfüllt auch diese Möglichkeit die Bedingungen (1) bis (4).

Aufgabe 2 - 290822 a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!
b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, dass die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

a) Wenn x eine Lösung der genannten Gleichung ist, dann folgt

$$\begin{aligned} 2x^2-\frac{7}{2}x+8x-14 &= 2x^2+\frac{x}{3}+1 \\ 48x-21x-2x &= 90 \\ 5x &= 18 \end{aligned}$$

Da dies von keiner natürlichen Zahl x erfüllt wird, hat die genannte Gleichung keine natürliche Zahl x als Lösung.

b) Die entstehende Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-r)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

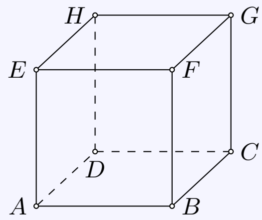
hat genau dann $x=1$ als eine Lösung, wenn $\left(\frac{1}{2}+2\right)(4-r)=2+\frac{1}{3}+1$ (1) gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{5}{2}\cdot(4-r)=\frac{10}{3} \qquad \Rightarrow \qquad r=\frac{8}{3}$$

gilt. Die genannte Forderung wird also genau von der rationalen Zahl $r=\frac{8}{3}$ erfüllt.

Aufgabe 3 - 290823

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Abbildung).



a) Ermittle die Größe des Winkels $\angle DEB$!

b) Beweise, dass die Winkel $\angle AHB$ und $\angle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!

a) Das Dreieck DBE ist gleichseitig, da DE, BE und BD Flächendiagonalen des Würfels und somit einander gleichlang sind. Der gesuchte Winkel ist Innenwinkel dieses Dreiecks, folglich gilt $\angle DEB = 60°$.

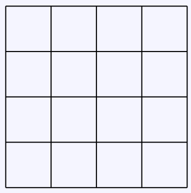
b) Die Dreiecke AHB und BEC sind nach dem Kongruenzsatz (sss) zueinander kongruent, da) $BC = AB$ (Kanten des Würfels), $BE = AH$ (Flächendiagonalen) und $CE = BH$ (Raumdiagonalen) gilt.
In diesen Dreiecken entsprechen die gesuchten Winkel einander, da sie jeweils von einer Flächen- und einer Raumdiagonale eingeschlossen werden. Somit gilt $\angle AHB = \angle BEC$, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 290824

Das 4×4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, dass folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.

(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, dass sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

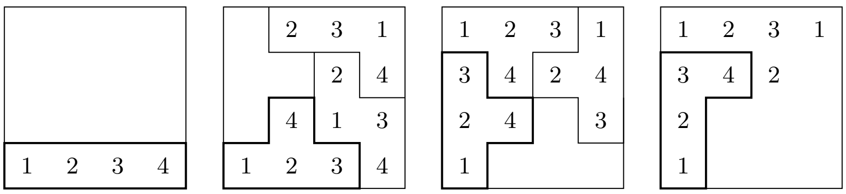


(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, dass es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

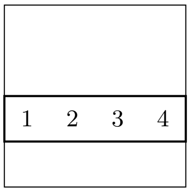
a4	b4	c4	d4
a3	b3	c3	d3
a2	b2	c2	d2
a1	b1	c1	d1

Die Felder seien wie in der Abbildung bezeichnet. Bei jeder Zerlegung der geforderten Art gilt:
Ein Teil muss das Feld a1 enthalten. In diesem Teil muss sich an a1 entweder b1 oder a2 anschließen, da in diesen beiden Feldern dieselbe Zahl 2 steht.
Die einzige Möglichkeit für ein Feld mit 3 ist dann c1 bzw. a3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten A, B, C, D in den entsprechenden, nachfolgenden Abbildungen A, B, C, D. Von ihnen scheidet D aus, da hierbei ein Teil die Felder a4, b4, c4 mit den Zahlen 1, 2, 3 enthalten müsste und sich daran kein Feld mit 4 anschließen könnte.

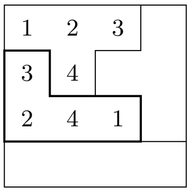


A B C D

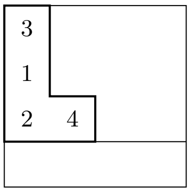
Im Fall C folgt, dass zwei weitere Teile a4, b4, c4, b3 und d4, d3, da, c3 lauten müssen, wonach als viertes Teil b1, c1, d1, c2 verbleibt.
Im Fall B folgt, dass zwei weitere Teile d1, d2, c2, c3 und d3, d4, c4, b4 lauten müssen, wonach als viertes Teil a2, a3, a4, b3 verbleibt.



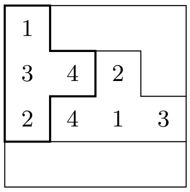
AA



AB

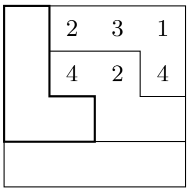


AC

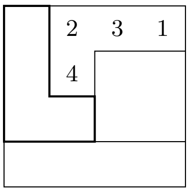


AD

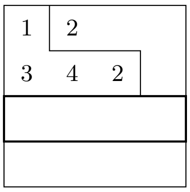
Im Fall A gilt: Ein Teil muss das Feld a2 enthalten. Die einzigen Möglichkeiten für ein Feld mit 1 in diesem Teil sind c2 und a4.
Gehört c2 dazu, so auch b2 mit 4, und für ein Feld mit 3 gibt es nur die Möglichkeiten AA, AB. Gehört aber a4 dazu, so auch a3 mit 3, und für ein Feld mit 4 gibt es nur die Möglichkeiten AC, AD.
Im Fall AD folgt, dass ein Teil b2, c2, d2, c3 lauten muss, wonach b4, c4, d4, d3 verbleibt.
Im Fall AB folgt, dass ein Teil a4, b4, c4, b3 lauten muss, wonach d2, d3, d4, c3 verbleibt.



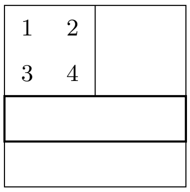
ACA



ACB



AAA



AAB

Im Fall AC muss ein Teil das Feld b3 enthalten, und daran muss sich entweder c3 oder b4 anschließen, da in beiden 2 steht. Schließt sich c3 an, so muss das vierte Teil b4, c4, d4, d3 lauten: ACA.
Schließt sich dagegen b4 an, so muss dieses Teil b3, b4, c4, d4 lauten: ACB.
Im Fall AA gehören a4 und b4 entweder zu verschiedenen Teilen oder nicht. Gehören sie zu verschiedenen Teilen, so muss ein Teil a4, a3, b3, c3 lauten: AAA.
Gehören sie zum gleichen Teil; so muss als Feld mit 4 darin b3 auftreten, es lautet also a4, b4, b3, a3: AAB.

Damit (und nach Oberprüfen der Forderungen auch zu den jeweils übriggebliebenen Teilen) ist bewiesen, dass die Forderungen genau von den acht Zerlegungen B, C, AB, AD, AAA, AAB, ACA, ACB erfüllt werden.

Lösungen der II. Runde 1989 übernommen von [5]

5.31.3 III. Runde 1989, Klasse 8

Aufgabe 1 - 290831
Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
Dabei stellte er fest, dass sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muss! Weise nach, dass bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

I. Wenn die Angaben mit der Anfangssumme x Pfund zutreffen, so folgt:
Da durch Hinzugewinn eines Drittels einer Summe stets vier Drittel dieser Summe entstehen, ergibt sich am Ende des dritten Jahres die Summe von

$$(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3} \text{ Pfund}$$

Also gilt nach der letzten Angabe des Aufgabentextes

$$(((x-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}=2x$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren aller Klammern und anschließendes Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned}((\frac{4}{3}x-\frac{400}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}&=2x\\ (\frac{16}{9}x-\frac{1600}{9}-\frac{400}{3}-100)\cdot\frac{4}{3}&=2x\\ \frac{64}{27}x-\frac{6400}{27}-\frac{1600}{9}-\frac{400}{3}&=2x\\ 64x-6400-4800-3600&=54x\\ x&=1480\end{aligned}$$

Die Anfangssumme muss folglich 1480 Pfund betragen haben.

Aus dieser Anfangssumme entsteht, im ersten Jahr durch Verbrauchen von 100 Pfund die Summe 1380 Pfund, durch Hinzugewinnen eines Drittels (460 Pfund) die Summe 1840 Pfund; im zweiten Jahr entsprechend 1740 Pfund + 580 Pfund = 2320 Pfund; im dritten Jahr 2220 Pfund + 740 Pfund = 2960 Pfund.
Da 2960 das Doppelte von 1480 ist, treffen bei der genannten Anfangssumme somit die Angaben des Aufgabentextes zu.

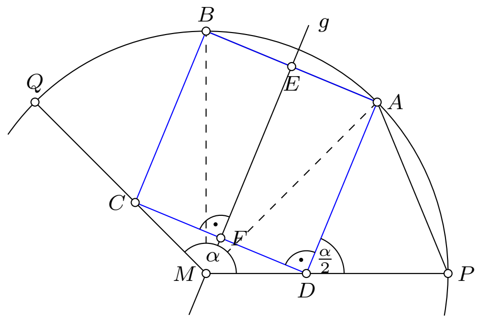
Aufgabe 2 - 290832
Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

Wenn die Bedingungen von einem Kreisausschnitt K mit dem Kreismittelpunkt M, den Radien MP, MQ und dem Zentriwinkel der Größe $\alpha = \angle PMQ$ sowie von einem Quadrat $ABCD$ erfüllt werden, wobei o.B.d.A. nach (1) die Punkte A und B so auf PQ liegen, dass PQ nach (2) in die gleichlangen Teilbögen $\overset{\frown}{PA}, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BQ}$ zerlegt wird, so folgt:



Bei der Spiegelung an der Geraden g durch die Mittelpunkte E, F von AB bzw. CD werden A und B miteinander vertauscht, ebenso C und D miteinander. Also muss der Kreisausschnitt K in einen kongruenten Kreisausschnitt K' übergehen, der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in den zu K' gehörenden Teilbogen $\overset{\frown}{BA}$, der folglich wegen der Kongruenz von K und K' mit $\overset{\frown}{AB}$ zusammenfällt; die Bögen $\overset{\frown}{PA}$ und $\overset{\frown}{QB}$ werden miteinander vertauscht, somit fällt K' mit K zusammen, g ist Symmetrieachse des Kreisausschnitts, geht durch M und halbiert den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$.

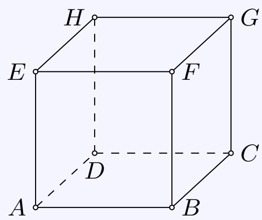
Da zu gleichlangen Bögen eines Kreises auch gleichlange Sehnen und gleichgroße Zentriwinkel gehören, gilt somit einerseits $\angle PME = \frac{\alpha}{2}$, wegen $g \parallel AD$ nach dem Stufenwinkelsatz also $\angle PDA = \frac{\alpha}{2}$ (3), andererseits $\angle PMA = \frac{\alpha}{3}$ und $PA = AB = AD$, nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz also

$$\angle PDA = \angle MPA = \angle MAP = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{\alpha}{3}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{6} \qquad (4)$$

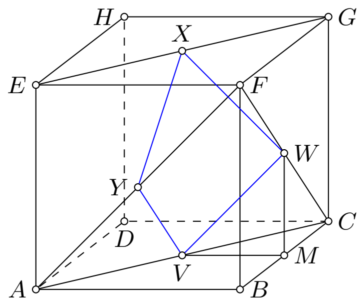
Aus (3) und (4) folgt $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{6}$, $\alpha = 135^\circ$. Daher ist die Größe des Zentriwinkels des Kreisausschnitts durch die Bedingungen eindeutig bestimmt; sie beträgt $\alpha = 135^\circ$.

Aufgabe 3 - 290833

In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.



Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!



Die Kantenlänge des Würfels sei a. Die Punkte V, W sind die Mittelpunkte dar Quadrate $ABCD$, $BCGF$, die die Kante BC gemeinsam haben (siehe Abbildung).
Ist M der Mittelpunkt von BC, so ist $VM \parallel AB$ und $VM = \frac{a}{2}$. Entsprechend folgt $WM \parallel FB$ und $WM = \frac{a}{2}$. Wegen $AB \perp FB$ ist folglich auch $VM \perp WM$; also ist VW die Hypotenuse in dem gleichschenklig- rechtwinkligen Dreieck VWM mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$.

Für jede der Strecken WX, XY, YV folgt ebenso, dass sie die Hypotenuse in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ sind, da ihre Endpunkte ebenfalls die Mittelpunkte jeweils zweier Quadrate sind, die eine Würfelkante gemeinsam haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 290834
Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

I. Wenn ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Mit (a,b,c) erfüllt auch (b,a,c) die Bedingungen (1), (2), (3). Daher kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, dass a,b,c außer (1), (2), (3) auch $a \geq b$ (4) erfüllen.

Wegen (1) und (2) gilt $c^3 + c = 130$. (5)
Wäre $c < 5$ oder $c > 5$, so wäre $c^3 + c < 125 + 5 = 130$ bzw. $c^3 + c > 130$, beides im Widerspruch zu (5). Als muss $c = 5$ (6) sein, und aus (2) folgt $a + b = 125$.(7)

Nach (3) gibt es eine ganze Zahl g mit $a - b = 19g$, also $a = 199 + b$ (8); wegen (4) ist dabei $g \geq 0$. (9)
Setzt man (8) in (7) ein, so folgt $19g + 2b = 125$. (10)
Wäre g gerade, so auch $19g + 2b$, im Widerspruch zu (10). Also ist g ungerade. Wäre $g \geq 7$, so folgte wegen $b \geq 0$, dass $199 + 2b \geq 19 \cdot 7 = 133$ wäre, ebenfalls im Widerspruch zu (10). Also ist g einer der Werte $g = 1,3,5$. (11)

Aus (10), also $b = \frac{125-19g}{2}$, ergibt sich jeweils hierzu $b = 53, 34, 15$ (12) und damit nach (7) jeweils $a = 72, 91, 110$. (13)

Daher und wegen (6) können (1), (2), (3), (4) nur von den Tripeln $(72, 53, 5)$, $(91, 34, 5)$, $(110, 15.5)$ erfüllt werden; wegen der Eingangsbemerkung über (b,a,c) können (1), (2), (3) zusätzlich nur noch von $(53, 72, 5)$, $(34, 91, 5)$, $(15, 110, 5)$ erfüllt werden.

II. Die (15) genannten Tripel erfüllen (1), (2), (3), wie die Probe zeigt. Damit ist bewiesen, dass (1), (2), (3) genau von den in (14) und (15) genannten Tripeln erfüllt werden.

Aufgabe 5 - 290835
Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, dass von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

a) Es gibt solche Zahlen. Um dies zu beweisen, genügt es, für ein Beispiel einer sechsstelligen Zahl n die Erreichbarkeit von 0 mit zwei der Rechenoperationen nachzuweisen.

Ein solches Beispiel ist etwa $n = 100000$ wegen $100000 : 500 = 200$, $200 - 200 = 0$.

b) Nach Voraussetzung sei n eine natürliche Zahl mit $100000 \leq n \leq 999000$. (1)
Für die ganze Zahl g mit $g < \frac{n}{999} \leq g + 1$ gilt

$$999 \cdot g < n \leq 999 \cdot g + 999 \qquad (2)$$

Hieraus und aus (1) folgt $999 \cdot g + 999 \geq n \geq 100000 > 999$ und $999 \cdot g < n \leq 999000$, also $g > 0$ und $g < 1000$, also ist g eine höchstens dreistellige natürliche Zahl.

Aus (2) folgt ferner

$$0 < n - 999 \cdot g \leq 999$$

also ist auch $n - 999 \cdot g$ eine höchstens dreistellige natürliche Zahl. Mit diesen Zahlen führen daher die drei Rechenoperationen

$$n - (n - 999 \cdot g) = 999 \cdot g \quad ; \quad 999 \cdot g : 999 = g \quad ; \quad g - g = 0$$

in der behaupteten Weise zum Ergebnis 0.

Aufgabe 6 - 290836
Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, dass es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$, $\epsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\angle DAB$ und, wenn S der Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ϵ die Größe des Winkels $\angle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

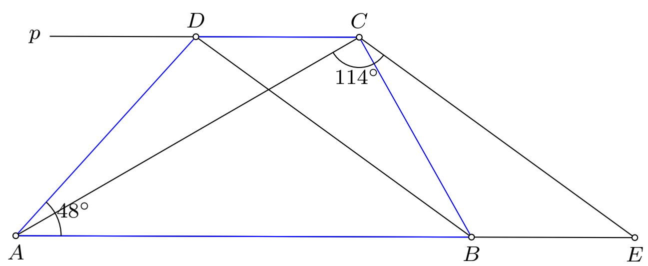
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, dass durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die Forderungen erfüllt, so folgt:
Es gilt $\angle DAB = \alpha = 48°$. Ist ferner E der Schnittpunkt der Geraden durch A, B mit der Parallelen durch C zu BD, so ist das Viereck $BECD$ wegen $BD \parallel EC$, $AB \parallel DC$ ein Parallelogramm.
Daher gilt $EC = BD = f = 6$ cm sowie nach dem Stufenwinkelsatz $\angle ACE = \angle ASB = \epsilon = 114°$. Ferner ist $AC = e = 7$ cm.
Daher kann das Viereck $ABCD$ durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen erhalten werden:

b) (1) Man konstruiert ein Dreieck ACE aus $AC = 7$ cm, $\angle ACE = 114°$, $EC = 6$ cm.
(2) Man konstruiert die Parallele p durch C zu AE.
(3) Man trägt in A an AE nach derjenigen Seite, auf der C liegt, den Winkel der Größe 48° an; sein zweiter Schenkel schneidet p in D.
(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EC; sie schneidet AE in B
Konstruktionszeichnung:



c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt: Nach (2) (und (3), (4)) ist $AB \parallel DC$, nach (1) ist $AC = e = 7$ cm, nach (3) (und (4)) ist $\angle DAB = \alpha = 48°$.
Nach (2) und (4) ist ferner $BECD$ ein Parallelogramm, daher und nach (1) folgt $BD = EC = f = 6$ cm, und nach dem Stufenwinkelsatz sowie (1) folgt, wenn S den Schnittpunkt der in (1) bzw. (4) erhaltenen Strecken AC, BD bezeichnet, auch $\angle ASB = \angle ACE = \epsilon = 114°$.
Also erfüllt jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die gestellten Forderungen.

d) Konstruktionsschritt (1) ergibt nach dem Kongruenzsatz sws ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck ACE.
Die Konstruktionsschritte (2), (3), (4) führen dann auf eindeutig bestimmte Punkte D und B. Damit (und wegen (a)) ist bewiesen:
Durch die Forderungen ist ein Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der III. Runde 1989 übernommen von [5]

5.32 XXX. Olympiade 1990

5.32.1 I. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300811
Axel lässt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne dass er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann:

"Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluss die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels. Wenn Du mir diese Summe nennst, kann ich Dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen."

a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!

b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

a) Werden als Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Würfels etwa 4, 1 bzw. 6 gewählt, so führt die Berechnung auf $(2 - 4 + 8) \cdot 50 = 800$, $(1 + 10) \cdot 10 = 110$ und damit auf die Summe $800 + 110 + 6 = 916$.

b) Die gewählten Augenzahlen des roten, blauen bzw. gelben Würfels sind:
Die um 5 verkleinerte Hunderterziffer, die Zehnerziffer, die Einerziffer.

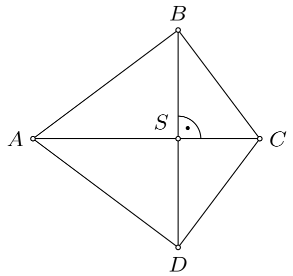
Dies erklärt sich folgendermaßen: Sind r, b, g die Augenzahlen, so führt die Berechnung auf $(2\cdot r+8)\cdot 50 = 100r + 400$, $(b + 10) \cdot 10 = 10b + 100$ und damit auf die summe

$$100r + 400 + 10b + 100 + g = 100r + 10b + g + 500$$

Verkleinert man in dieser Summe die Hunderterziffer um 5, d.h. subtrahiert man 500, so entsteht die Zahl $100r + 10b + g$, also die Zahl mit den Ziffern r, b, g.

Aufgabe 2 - 300812
Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt: $A = \frac{e\cdot f}{2}$. Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

Rolf behauptet, dass diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Hat er recht?



Für jedes Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen und die Längen $AC = e$, $BD = f$ haben, gilt:
Die Diagonale AC wird durch ihren Schnittpunkt S mit BD in zwei Teilstrecken AS und CS zerlegt. Sie sind in den Dreiecken BDA bzw. BDC jeweils die zur Grundlinie BD senkrechten Höhen.
Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BDA und BDC. Daher beträgt er

$$\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AS + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CS = \frac{1}{2} BD(AS + CS) = \frac{1}{2} ef$$

Rolf hat mithin recht.

Aufgabe 3 - 300813
In einer Ebene seien sieben Punkte so gegeben, dass keine drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

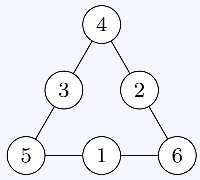
Ermittle die Anzahl aller derjenigen Dreiecke, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind!

Denkt man sich zu jedem der 7 Punkte je einen der anderen 6 aufgeschrieben und zu jedem der damit aufgeschriebenen $7 \cdot 6$ Paare je einen der anderen 5 Punkte, so erhält man $7 \cdot 6 \cdot 5$ Zusammenstellungen aus je 3,Punkten.
Jede solche Zusammenstellung gibt die Eckpunkte eines der gesuchten Dreiecke an. Dabei wird auch jedes dieser Dreiecke erfasst und zwar genau 6 mal.

Denn sind etwa A,B,C die Ecken eines gesuchten Dreiecks, so wird es genau mit den Zusammenstellungen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA erfasst.
Die Anzahl aller gesuchten Dreiecke ist daher ein Sechstel von $7 \cdot 6 \cdot 5$, d.h., sie beträgt $7 \cdot 5 = 35$.

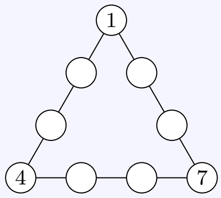
Aufgabe 4 - 300814

a) In das Schema des Bildes a) sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so einzutragen, dass jede der drei "Seitensummen" $5+1+6$, $6+2+4$, $4+3+5$ den Wert $S = 12$ hat.



Untersuche, ob eine solche Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auch mit $S = 9$ möglich ist, ebenso auch mit $S = 10$ und $S = 11$!
Gib jedes Mal, wenn das der Fall ist, je eine derartige Eintragung an!

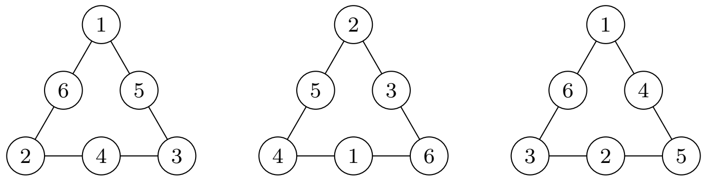
b) In das Schema des Bildes b) sollen außer den bereits eingetragenen "Eckenzahlen" 1, 4, 7 die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so eingetragen werden, dass jede der drei "Seitensummen" den Wert $S = 19$ hat.



Ermittle alle verschiedenen Eintragungen dieser Art! Dabei sollen zwei Eintragungen genau dann als verschieden gelten, wenn in einer dieser beiden Eintragungen mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 einer anderen Dreiecksseite angehört als in der anderen Eintragung.

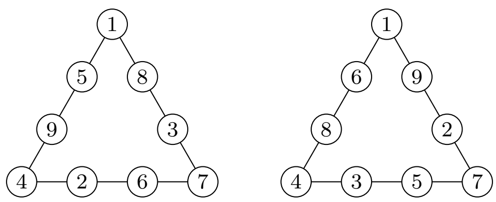
c) Im Bild b) beträgt die "Eckensumme" $E = 1 + 4 + 7 = 12$. Ermittle alle diejenigen Werte E, die als "Eckensumme" auftreten können, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in das Schema einträgt, dass die drei Seitensummen den Wert S haben! Begründe, dass es für andere Werte E keine solche Eintragung geben kann!

a) Je eine solche Eintragung ist möglich, wie z.B. die Eintragungen in der Abbildung zeigen.



b) Um $S = 19$ zu erreichen, müssen die Zahlen auf der Dreieckseite zwischen 1 und 4 die Summe 14 haben.
Hierfür gibt es unter Verwendung der vorgeschriebenen Zahlen nur die Möglichkeiten $14 = 5 + 9 = 6 + 8$.
Ebenso gibt es für die Zahlen zwischen 4 und 7 nur die Möglichkeiten $8 = 2 + 6 = 3 + 5$ und für die Zahlen zwischen 4 und 7 nur die Möglichkeiten $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 5 + 6$.

Je nachdem, ob man zwischen 1 und 4 die Möglichkeit 5+9 oder 6+8 gewählt hat, verbleiben nur die in der nachfolgenden Abbildung genannten Eintragungen.



Daher gibt es genau diese beiden verschiedenen Eintragungen der geforderten Art.

c) Für jede mögliche "Eckensumme" E gilt

$$1 + 2 + 3 \leq E \leq 7 + 8 + 9 \qquad \text{d.h.} \qquad 6 \leq E \leq 24$$

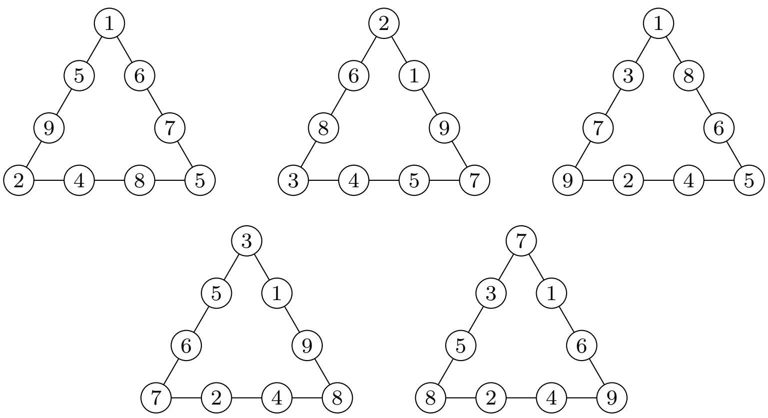
Addiert man die drei "Seitensummen", so wird jede "Eckenzahl" zweimal berücksichtigt. Also ergibt diese Addition den Wert $1 + 2 + ... + 9 + E$, d.h. den Wert $45 + E$.
Haben nun, wie gefordert, die drei "Seitensummen" einen einheitlichen Wert S, so gilt folglich $45+E = 3S$. Da 45 durch 3 teilbar ist, muss somit auch E durch 3 teilbar sein. Für jede Eintragung der geforderten Art ist also E eine der Zahlen 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

Wäre $E = 9$, also $S = 18$, so gäbe es für die drei "Eckenzahlen" nur die Möglichkeiten $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$.
Wäre $E = 21$, also $S = 22$, so gäbe es für die drei "Eckenzahlen" nur die Möglichkeiten $21 = 4 + 8 + 9 = 5 + 7 + 9 = 6 + 7 + 8$.

Zur Untersuchung dieser sechs Fälle wird in der nachfolgenden Tabelle angegeben, welche Möglichkeiten für die Zahlen zwischen den Ecken nur noch im einzelnen in Betracht kommen. Es zeigt sich jedes Mal, dass eine gleichzeitige Erfüllung der damit für eine Gesamtverteilung gestellten Bedingungen nicht möglich ist:

Zwischen 1 und 2: 15 = 7+8	Zwischen 2 und 6: 10 = 3+7
(Zwischen 6 und 1: 11 = 3+8 = 4+7)	Zwischen 1 und 3: 14 = 6+8
(Zwischen 3 und 5: 10 = 2+8 = 4+6)	Zwischen 5 und 1: 12 = 4+8
(Zwischen 2 und 3: 13 = 5+8 = 6+7)	Zwischen 3 und 4: 11 = 5+6
Zwischen 4 und 2: 12 = 5+7	Zwischen 4 und 8: 10 = 3+7
Zwischen 8 und 9: 5 = 2+3	(Zwischen 9 und 4: 9 = 2+7 = 3+6)
(Zwischen 5 und 7: 10 = 2+8 = 4+6	Zwischen 7 und 9: 6 = 2+4
Zwischen 9 und 5: 8 = 2+6	Zwischen 6 und 7: 9 = 4+5
(Zwischen 7 und 8: 7 = 2+5 = 3+4)	Zwischen 8 und 6: 8 = 3+5

(Die eingeklammerten Angaben sind entbehrlich.) Da folglich die Fälle mit $E = 9$ und $E = 21$ ausscheiden, kann als "Eckensumme" unter den geforderten Bedingungen nur einer der Werte 6, 12, 15, 18, 24 auftreten. Je ein Beispiel für diese Werte zeigt die Abbildung.



Lösungen der I. Runde 1990 übernommen von [5]

5.32.2 II. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300821
In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Fass so viele Liter Wasser in das zweite Fass, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Fass so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

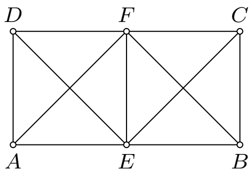
Wenn sich am Schluss in jedem der beiden Fässer 24 Liter befinden und mit dem zweiten Umfüllen die Wassermenge des ersten Fasses verdoppelt wurde, dann müssen sich wegen $24 : 2 = 12$ vor dem zweiten Umfüllen in diesem Fass 12 Liter Wasser befunden haben.
Da die gesamte in den Fässern vorhandene Wassermenge 48 Liter beträgt, waren wegen $48 - 12 = 36$ in dem zweiten Fass zu diesem Zeitpunkt 36 Liter. Ferner war mit dem ersten Umfüllen die Wassermenge im zweiten Fass verdoppelt worden.
Daraus ergibt sich, dass für die Wassermengen, die anfangs in den Fässern waren, eindeutig folgt: Wegen $36 : 2 = 18$ waren im zweiten Fass 18 Liter und wegen $48 - 18 = 30$ im ersten Fass 30 Liter.

Aufgabe 2 - 300822
Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie $1 : 2$ zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

a) Die Abbildung zeigt für ein Rechteck $ABCD$ eine mögliche Zerlegung der geforderten Art.



Beschreibung: Sind E, F die Mittelpunkte von AB bzw. CD, so entsteht die Zerlegung, indem die Strecken EF, AF, DE, BF und CE gezeichnet werden.

Begründung: Da $ABCD$ ein Rechteck ist und E, F die Strecken AB bzw. CD halbieren, folgt aus der Voraussetzung $AD : AB = 1 : 2$.
Die Strecken AE und DF sind gleichlang und parallel zueinander, die Strecken AE und AD sind gleichlang und senkrecht zueinander; also ist $AEFD$ ein Quadrat.
Ebenso folgt: $EBCF$ ist ein Quadrat. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichneten Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.

Da in jedem Quadrat die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, sind alle acht entstandenen Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig mit einander gleichen Kathetenlängen, also auch einander kongruent.

b) In Abhängigkeit von $a = AD$ hat das Quadrat $AEFD$ den Flächeninhalt a^2. Jedes seiner vier einander (kongruenten, also) flächeninhaltsgleichen Teildreiecke hat folglich den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$.

Ist x die gesuchte Kathetenlänge dieser Dreiecke. so ist andererseits der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2}x^2$. Daher gilt

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}a^2 \qquad ; \qquad x\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Aufgabe 3 - 300823
Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, dass keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

Hat man n Punkte wie angegeben gezeichnet, so kann man zu jedem dieser n Punkte einen der übrigen $n - 1$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n - 1)$ geordnete Paare von Punkten erhalten.
Ebenso kann man zu jedem dieser Paare einen der darin nicht vorkommenden $n - 2$ Punkte aufsuchen und damit genau $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$ geordnete Zusammenstellungen (Tripel) von je drei der n Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen wird die Eckenmenge jedes aufzufindenden Dreiecks erfasst, und zwar je 6 mal.
Sind nämlich A, B, C die Ecken eines solchen Dreiecks, so werden sie genau mit den 6 geordneten Zusammenstellungen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA erfasst. Daher lassen sich insgesamt $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n - 2)$ Dreiecke finden, deren sämtliche Ecken zu den n Punkten gehören.

Für $n = 10$ ist diese Anzahl 120, für $n < 10$ ist sie kleiner als 120. Die kleinste Anzahl n, für die es möglich ist, 120 derartige Dreiecke zu finden, beträgt daher $n = 10$.

Aufgabe 4 - 300824
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 9999 derart hintereinander aufgeschrieben, dass die Ziffern-darstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet z = 123456789101112131415...; beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z.B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

Unter den aufgeschriebenen Zahlen gibt es genau 9 einstellige, genau $99 - 9 = 90$ zweistellige, genau $999 - 99 = 900$ dreistellige, genau $9999 - 999 = 9000$ vierstellige und genau $99999 - 9999 = 90000$ fünfstellige Zahlen.

In der damit aufgeschriebenen Ziffernfolge für z nehmen die einstelligen Zahlen die ersten 9 Stellen ein, die zweistelligen Zahlen die nächsten $2 \cdot 90 = 180$ Stellen, die dreistelligen Zahlen die nächsten $3 \cdot 900 = 2700$ Stellen, die vierstelligen Zahlen die nächsten $4 \cdot 9000 = 36000$ Stellen und die fünfstelligen Zahlen die nächsten $5 \cdot 90000 = 450000$ Stellen.

Da somit die ein- bis vierstelligen Zahlen wegen $9 + 180 + 2700 + 36000 = 38889$ die ersten 38889 Stellen einnehmen, die ein- bis fünfstelligen Zahlen jedoch wegen $38889 + 450000 = 488889$ die Stellen bis zur 488889sten einnehmen, kommt die Ziffer an der 206788sten Stelle von z wegen $38889 < 206788 < 488889$ in einer der aufgeschriebenen fünfstelligen Zahlen vor.

Um festzustellen, in welcher, bilden wir die Differenz $206788 - 38889 = 167899$ und führen die Division von 167899 durch 5 mit Rest aus. Damit erhalten wir, dass $167899 = 5 \cdot 33579 + 4$ gilt, und es folgt:

Der gesuchten Ziffer gehen 33579 fünfstellige Zahlen voran, und sie ist in der dann folgenden, also 33580sten fünfstelligen Zahl die vierte Ziffer. Da die fünfstelligen Zahlen mit der Zahl 1000 beginnen, lautet die 33580ste von ihnen 43579. Ihre vierte Ziffer ist 7.
Somit steht an der 206788sten Stelle von z die Ziffer 7.

Lösungen der II. Runde 1990 übernommen von [5]

5.32.3 III. Runde 1990, Klasse 8

Aufgabe 1 - 300831
Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Jede natürliche Zahl, die jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal enthält, hat wegen $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ die Quersumme 45 und ist damit durch 9 teilbar.
Von diesen Zahlen sind folglich diejenigen, deren Anzahl gesucht ist, wegen $45 = 9 \cdot 5$ (sowie wegen der Teilerfremdheit von 9 und 5) genau die durch 5 teilbaren. Das sind genau diejenigen, deren letzte Ziffer 5 lautet, da die Ziffer 0 nach Aufgabenstellung nicht vorkommt.

Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, muss man somit untersuchen, wie viele verschiedene Anordnungen sich aus den restlichen acht Ziffern bilden lassen:

Unter Verwendung zweier Ziffern lassen sich genau zwei Anordnungen bilden (z.B. 12, 21).
Bei Hinzunahme einer dritten Ziffer kann diese an erster, zweiter oder dritter Stelle stehen. Folglich ergeben sich aus jeder der zwei Anordnungen (z.B. 12, 21) genau drei neue, insgesamt also $2 \cdot 3 = 6$ Anordnungen.
Nimmt man nun eine vierte Ziffer hinzu, kann diese wiederum an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle in jeder der schon ermittelten sechs Anordnungen aus drei Ziffern auftreten. Folglich sind bei vier Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Anordnungen möglich.

Setzt man diese Überlegung fort, kommt man zu dem Schluss, dass sich unter Verwendung von acht Ziffern genau $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ Anordnungen bilden lassen.
Die gesuchte Anzahl beträgt somit 40320.

Aufgabe 2 - 300832
Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von 0,3 g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von 1,5 g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von 7,0 g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, dass ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Bei jeder Auswahl von Kugeln A und B haben diese zusammen eine Masse m, die gemessen in Zehntelgramm eine durch 3 teilbare Maßzahl hat. Um hierzu eine der in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten zu erhalten, muss man also eine Anzahl z von Kugeln C so wählen, dass die Masse dieser Kugeln C eine derartige Masse m zu 100 g ergänzt.

Die kleinste Anzahl z, für die das zutrifft, ist $z = 1$, wie aus $100g - 1 \cdot 7g = 93{,}0g$ ersichtlich ist.
Weitere derartige Anzahlen z von Kugeln C ergeben sich erst wieder, wenn man die Anzahl 1 um Vielfache von 3 erhöht. So entstehen die Anzahlen

$$z = 4, 7, 10, ... \tag{1}$$

mit den für Kugeln A und B übrigbleibenden Massen

$$m = 93g, 72g, 51g, 30g, ... \tag{2}$$

Jede Anzahl $z = 13 + n$ mit $n \geq 0$ ergäbe eine Masse m von höchstens $100 - (13 + n) \cdot 7 < 9 - 6{,}9 \cdot n$ Gramm. Selbst wenn man sie nur mit Kugeln A zusammenstellen würde, gäbe dies nicht mehr als $30 - 23n$ Kugeln A, also insgesamt nicht mehr als

$$(30 - 23n) + 0 + (13 + n) = 43 - 22n$$

Kugeln; bei Mitverwendung von Kugeln B wären es noch weniger.

Da hiermit keine Gesamtzahl 100 erreicht wird, verbleiben nur die jeweils in (1) und (2) genannten vier Anfangswerte.

Hiervon scheiden der 1., 3. und 4. Wert aus; denn um diese Werte durch y Kugeln B und folglich $(100 - z - y)$ Kugeln A zu erreichen, müsste

$$\begin{aligned} &(99 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 93, \quad y \cdot 1{,}2 = 63{,}3 \quad \text{bzw.}\\ &(93 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 51, \quad y \cdot 1{,}2 = 23{,}1 \quad \text{bzw.}\\ &(90 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 30; \quad y \cdot 1{,}2 = 3 \end{aligned}$$

gelten. Da dies nicht mit ganzzahligen y möglich ist, verbleibt in (1) und (2) nur jeweils der 2. Wert. Für ihn werden die Forderungen der Aufgabe genau dann erfüllt, wenn

$$(96 - y) \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}5 = 72, \quad y \cdot 1{,}2 = 43{,}2, \quad y = 36, \quad 96 - y = 60$$

gilt. Damit ist bewiesen:
Es ist möglich, die Forderungen der Aufgabe zu erfüllen, und zwar werden sie genau mit 60 Kugeln A, 36 Kugeln 8, 4 Kugeln C erfüllt.

Aufgabe 3 - 300833
Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

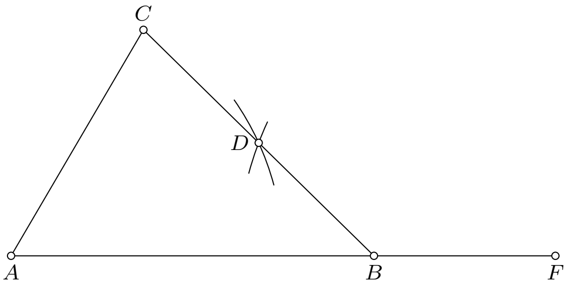
(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

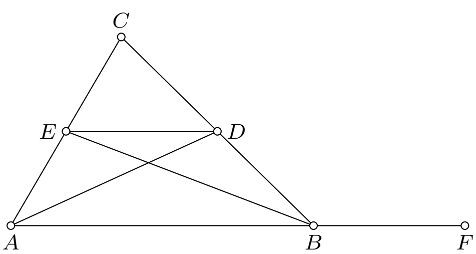
(a) Die Abbildung zeigt ein nach folgender Beschreibung konstruiertes Dreieck:



1. Man konstruiert eine Strecke AB der Länge c.
2. Man verlängert die Strecke AB über B hinaus um ihre halbe Länge bis zum Punkt F.
3. Man konstruiert den Kreis um A mit s_a den Kreis um F mit s_b und wählt einen Schnittpunkt dieser Kreise als D.
4. Man verlängert die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt C.

b) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (siehe Abbildung 2):
Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = c$, also (1) erfüllt. Nach 4. ist D der Mittelpunkt, also AD die Seitenhalbierende von BC, und nach 3. gilt $AD = s_a$; also ist (2) erfüllt.

Ist ferner E der Mittelpunkt, also BE die Seitenhalbierende von AC, so ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes $ED \parallel AB$, und nach dem Strahlensatz sowie nach 2. folgt $ED = \frac{1}{2}AB = BF$. Also ist $BFDE$ ein Parallelogramm; hieraus und aus 3. folgt $BE = FD = s_b$; d. h., auch (3) ist erfüllt.



Aufgabe 4 - 300834
Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Jede natürliche Zahl n ist mit einer geeigneten natürlichen Zahl k von einer der Formen $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.
Ist $n = 5k$, so ist n durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+1$, so ist $n-1 = 5k$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+2$, so ist $n^2+1 = 25k^2+20k+5 = 5(5k^2+4k+1)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+3$, so ist $n^2+1 = 25k^2+30k+10 = 5(5k^2+6k+2)$ durch 5 teilbar.
Ist $n = 5k+4$, so ist $n+1 = 5(k+1)$ durch 5 teilbar.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

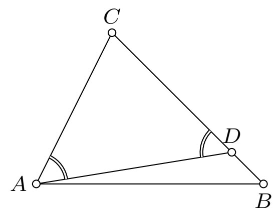
Aufgabe 5 - 300835

a) Beweise den folgenden Satz:

   In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

(a) In einem Dreieck ABC sei $BC > AC$ vorausgesetzt.
Dann gibt es zwischen B und C einen Punkt D mit $AC = DC$ (siehe Abbildung). Für ihn, gilt



$$\angle CAB > \angle CAD \tag{1}$$

Ferner folgt nach dem Basiswinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ADC \tag{2}$$

und nach dem Außenwinkelsatz

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD > \angle ABC \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $\angle CAB > \angle ABC$, w.z.b.w.

(b) Die Umkehrung lautet: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln stets auch die größere Seite gegenüber.

Auch diese Umkehrung gilt. Beweis:
In einem Dreieck ABC sei

$$\angle CAB > \angle ABC \tag{4}$$

vorausgesetzt. Wäre dann $BC = AC$, so folgte nach dem Basiswinkelsatz $\angle CAB = \angle ABC$; wäre $BC < AC$, so folgte nach dem unter (a) bewiesenen Satz $\angle CAB < \angle ABC$; beides im Widerspruch zu (4).
Damit ist bewiesen, dass aus (4) stets $BC > AC$ folgt.

Aufgabe 6 - 300836
Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, dass keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

Zu jedem der zwölf Punkte kann man einen der übrigen elf Punkte zusammenstellen und damit genau $12 \cdot 11$ geordnete Paare erhalten. Ebenso kann man genau $12 \cdot 11 \cdot 10$ bzw. $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ geordnete Zusammenstellungen von je 3 bzw. von je vier der zwölf Punkte erhalten.

Mit diesen Zusammenstellungen von je vier Punkten wird die Eckenmenge jedes der zu berücksichtigenden Tetraeders erfasst, und zwar je 24 mal. Sind nämlich A,B,C,D die Ecken eines der Tetraeder, so werden sie mit allen geordneten Zusammenstellungen dieser Punkte erfasst. Deren Anzahl kann man folgendermaßen ermitteln:

An den ersten Platz einer Zusammenstellung kann jeder der vier Punkte A,B,C,D gesetzt werden, bei jeder dieser Möglichkeiten bleibt für den zweiten Platz die Wahl unter drei der Punkte, und bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3$ Möglichkeiten bleibt für den dritten Platz die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, wonach in jeder der $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ erhaltenen Möglichkeiten auch der vierte Platz feststeht.
Die gesuchte Anzahl der Tetraeder beträgt somit

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

Lösungen der III. Runde 1990 übernommen von [5]

5.33 XXXI. Olympiade 1991

5.33.1 I. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310811
Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne dass die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln lässt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Da keine der Aufschriften zutrifft, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung (man findet sie z.B., indem man mit dem Aufstellen der einzigen Möglichkeiten beginnt, die Schachtel mit der Aufschrift "Zwei schwarze" anders als mit zwei schwarzen Kugeln zu füllen):

Aufschrift	Verteilung 1	Verteilung 2
"Zwei schwarze"	s,w	w,w
"Schwarz und weiß"	w,w	s,s
"Zwei weiße"	s,s	s,w

Nimmt man nun eine Kugel aus der Schachtel mit der Aufschrift "Schwarz und weiß", so lässt sich aus der Farbe dieser Kugel eindeutig ermitteln:
Ist die herausgenommene Kugel schwarz, so liegt die Verteilung 2 vor, ist sie weiß, so die Verteilung 1.

Aufgabe 2 - 310812
Rudolf macht folgende Aussage:

"Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

a) Beispiele einer Überprüfung der geforderten Art sind etwa:

3 aufeinanderfolgende Zahlen	$a \cdot b + b \cdot c$	$2 \cdot b^2$
3, 4, 5	$12 + 20 = 32$	$2 \cdot 16 = 32$
5, 6, 7	$30 + 42 = 72$	$2 \cdot 36 = 72$
...	...	...

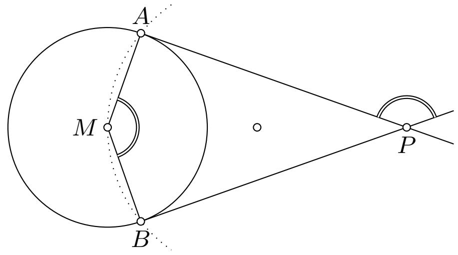
b) Je drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen lauten, wenn man die mittlere mit b bezeichnet, $b-1$, b, $b+1$. Die Summe der zu bildenden Produkte beträgt $(b-1)\cdot b + b\cdot(b+1)$, das doppelte Quadrat der mittleren Zahl beträgt $2\cdot b^2$. Da durch Umformen die Gleichung

$$(b-1)\cdot b + b\cdot(b+1) = b^2 - b + b^2 + b = 2\cdot b^2$$

folgt, ist Rudolfs Aussage bewiesen.

Aufgabe 3 - 310813
Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, dass der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!
b) Beweise, dass Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!



a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

b) Für je zwei (sich schneidende) Tangenten gilt mit den angegebenen Bezeichnungen $\angle MAP = \angle MBP = 90°$ (Tangenten und Berührungsradien), also $\angle AMB = 180° - \angle APB$ (Winkelsumme im Viereck).
Folglich hat der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe wie ein Nebenwinkel von $\angle APB$ und damit wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

Aufgabe 4 - 310814
Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

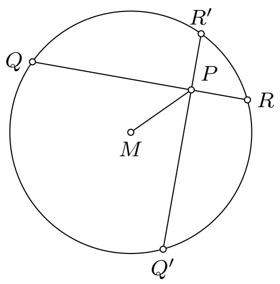
(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, dass zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!



a) Konstruktionsbeschreibung (siehe Abbildung):

[1] Man trägt an die Strecke PM in P einen Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den Kreis k in Q; die Gerade g durch Q und P schneidet k außerdem in R.
[2] Man trägt an PM in P nach der anderen Seite von PM als soeben in [1] den Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet k in Q'; die Gerade g' durch Q' und P schneidet k außerdem in R'.
Die Strecken QR und $Q'R'$ sind zwei Sehnen, die (1),(2),(3) erfüllen.

b) Beweis: Nach [1] und [2] sind QR und $Q'R'$ zwei durch P gehende Sehnen, d.h., (1) ist erfüllt. Ferner ist mit

$$\angle QPQ' = \angle QPM + \angle Q'PM = 45° + 45° = 90° \tag{4}$$

auch (2) erfüllt. Weiter gilt $MP = MP$ sowie $MQ = MQ'$ und $MR = MR'$ (Radien von k), $r > MP$ (da P innerhalb k ist),

$$\angle MPQ = \angle MPQ' = 45° \qquad , \qquad \angle MPR = \angle MPR' = 135°$$

also $\triangle MPQ \cong \triangle MPQ'$ und $\triangle MPR \cong \triangle MPR'$ (Kongruenzsatz Ssw), $PQ = PQ'$ und $PR = PR'$.

Damit folgt $QR = Q'R'$; d.h., auch (3) ist erfüllt.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

5.33.2 II. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310821
In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wie viele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

Ist x bzw. y die Anzahl der 13- bzw. 14-jährigen Schüler, so folgt

$$13x + 14y = 325 = 13 \cdot 25 \qquad (1)$$

Somit ist $14y$ durch 13 teilbar, also auch y durch 13 teilbar. Nach den Feststellungen im Aufgabentext ist ferner $y > 0$ sowie $x > 0$, wegen (1) also $14y < 325$ und folglich $14y < 14 \cdot 26$, $y < 26$.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $y = 13$ und aus (1), also $13 \cdot (x + 14) = 13 \cdot 25$; folgt $x + 14 = 25$, $x = 11$.
Also ist die Schülerzahl der Klasse eindeutig durch die Feststellungen bestimmt; sie beträgt $x + y = 24$.

Aufgabe 2 - 310822

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$ Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

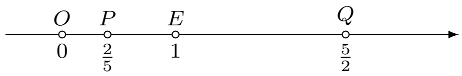
   Beweise, dass sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muss! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.

   Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4cm$ hat! Beweise, dass sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muss! Wie lautet sie?

a) Für natürliche Zahlen m, n mit $0 < m < n$ (1) folgt stets, indem man (1) durch m bzw. n dividiert, $1 < \frac{n}{m}$ bzw. $\frac{m}{n} < 1$. D.h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $p < 1 < q$. (2)

b) Zeichnung:



Aus (2) folgt: Die Strecke EP hat die Länge

$$EP = 1 - p = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$$

die Strecke EQ hat die Länge

$$EQ = q - 1 = \frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}$$

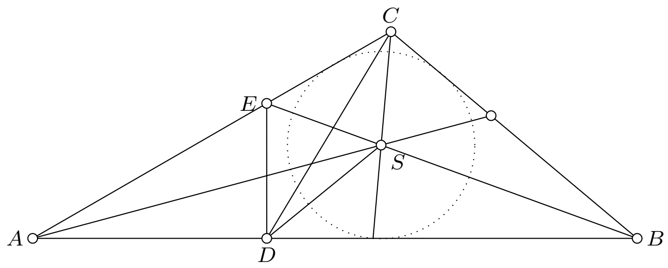
Nach (1) ist $n - m > 0$, hieraus und aus (1) folgt

$$\frac{n-m}{m} > \frac{n-m}{n}$$

d.h., es ergibt sich stets die Reihenfolge $EP < EQ$.

Aufgabe 3 - 310823
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\angle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30°$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!



Aus $\angle ACB = 90°$ und $\angle BAC = 30°$ folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle ABC = 60°$. (1)
Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt C auf einem Halbkreis über AB, also ist $DB = DC$ und daher nach dem Basiswinkelsatz $\angle DCB = \angle DBC$. (2)

Nach (1),(2) (und $\angle ABC = \angle DBC$) ist BCD ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Gerade durch B und S, die den Winkel $\angle DBC$ halbiert, zugleich die Mittelsenkrechte der Seite CD. Also erfüllt S, wie jeder Punkt dieser Mittelsenkrechten, die Bedingung $CS = DS$. w.z.b.w.

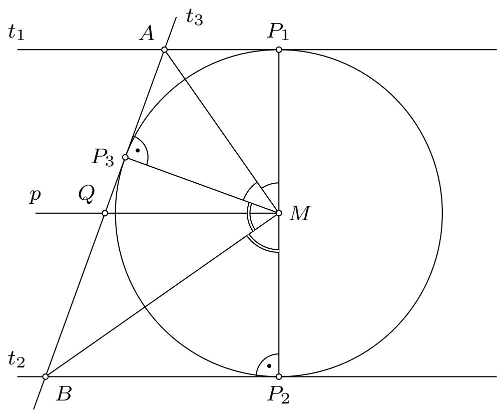
Aufgabe 4 - 310824

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis! Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle AMB$ auf!

b) Beweise, dass diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, dass dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion:



Vermutung: Es gilt $\angle AMB = 90°$.

b) Beweis: Ist P_1 der Berührungspunkt, von t_i ($i = 1,2,3$) so folgt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius:
Wegen $t_1 \parallel t_2$ sind MP_1 und MP_2 zueinander parallele Radien, was nur möglich ist, wenn sie einen Durchmesser P_1P_2 bilden, d.h. wenn

$$\angle P_1MP_2 = 180° \qquad (1)$$

ist. Aus ($MA = MA$ und) $\angle MP_1A = \angle MP_3A = 90°$, $MP_1 = MP_3$ (Radien des Kreises), $< MA$ (da MA Hypotenuse ist) folgt nun nach dem Kongruenzsatz Ssw $\triangle AMP_1 \cong \triangle AMP_3$, also halbiert MA den Winkel $\angle P_1MP_3$.

Ebenso folgt: MB halbiert $\angle P_2MP_3$. Wegen (1), d.h. $\angle P_1MP_3 + \angle P_2MP_3 = 180°$, ist folglich $\angle AMP_3 + \angle BMP_3 = 90°$, d.h.

$$\angle AMB = 90° \qquad (2)$$

c) Wegen $t_1 \parallel p \parallel t_2$ folgt aus $MP_1 = MP_2$ auch $QA = QB$.
Nach (2) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt M auf einem Halbkreis über AB; für dessen Radien gilt somit $AQ = MQ$.

Lösungen der II. Runde 1991 übernommen von [5]

5.33.3 III. Runde 1991, Klasse 8

Aufgabe 1 - 310831
Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Für die Anzahlen b bzw. r der blauen bzw. roten Kugeln gilt $r = \frac{15b}{17}$ also ist $15b$ durch 17 teilbar. Da 15 zu 17 teilerfremd ist, ist folglich auch b durch 17 teilbar; d.h., es gilt $b = 17n$ mit einer natürlichen Zahl n. Damit folgt weiter

$$r = \frac{15 \cdot 17n}{17} = 15n$$

Da $\frac{2b}{5}$ als (aus B entnehmbare) Anzahl vorausgesetzt wird, ist $2b$ durch 5 teilbar; wegen $2b = 2 \cdot 17n$ und der Teilerfremdheit von $2 \cdot 17$ zu 5 ist somit n durch 5 teilbar; d.h., mit einer natürlichen Zahl m gilt $n = 5m$, also

$$b = 17 \cdot 5m \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5m$$

Ebenso folgt aus der Voraussetzung von $\frac{3r}{7}$ als Anzahl sowie aus $3r = 3 \cdot 15 \cdot 5m$, dass m durch 7 teilbar ist. Mit einer natürlichen Zahl k gilt somit $m = 7k$,

$$b = 17 \cdot 5 \cdot 7k \qquad ; \qquad r = 15 \cdot 5 \cdot 7k$$

In B bzw. R befinden sich nach dem Herausnehmen von $\frac{2}{5}b$ bzw. von $\frac{3}{7}r$ noch $\frac{3}{5}b = 3 \cdot 17 \cdot 7k = 357k$ Kugeln bzw. noch $\frac{4}{7}r = 4 \cdot 15 \cdot 5k = 300k$ Kugeln. Für diese Anzahlen gilt nach Voraussetzung

$$357k > 1000 \qquad , \qquad 300k < 1000$$
$$k > \frac{1000}{357} > 2 \qquad , \qquad k < \frac{1000}{300} < 4$$

Damit ist eindeutig bestimmt: Es gilt $k = 3$, $b = 17 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1785$, $r = 15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 1575$.

Aufgabe 2 - 310832
Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluss des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, dass keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d.h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, dass für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, dass die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, dass es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Die größtmögliche für den Letztplazierten erreichbare Punktzahl beträgt 1.

Beweis:
a) Hätte der Letztplazierte 1,5 Punkte oder mehr erreichen können, so wären nach der Feststellung des Beobachters für die anderen Spieler der Reihe nach mindestens $2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4$ Punkte erreichbar.
Damit müssten in dem Turnier insgesamt mindestens $1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 = 16{,}5$ Punkte zu vergeben sein. Da aber jeder der 6 Spieler gegen 5 andere spielte und da in dem Produkt $6 \cdot 5 = 30$ jede Partie

zweimal erfasst ist, waren insgesamt nur 30 : 2 = 15 Partien zu spielen und folglich auch nur 15 Punkte zu vergeben.
Dieser Widerspruch beweist, dass eine größere Punktzahl als 1 für den Letztplazierten nicht möglich ist.

b) Ein Beispiel für Ergebnisse der einzelnen Spiele mit der Punktzahl 1 für den Letztplazierten zeigt die Tabelle

	A	B	C	D	E	F	Punktzahl
A	-	1	1	1	1	1	5
B	0	-	1	1	1	0	3
C	0	0	-	1	0,5	1	2,5
D	0	0	0	-	1	1	2
E	0	0	0,5	0	-	1	1,5
F	0	1	0	0	0	-	1

Aufgabe 3 - 310833
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

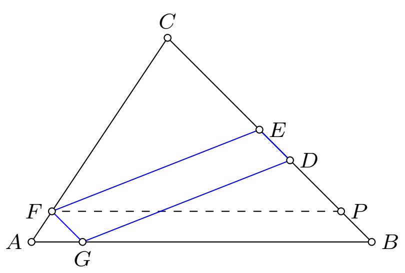
(1) F liegt auf AC.
(2) G liegt auf AB.
(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

a) Beweise, dass für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!



a) Wenn F und G (bei genannter Vorgabe von A,B,C,D,E) die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen, so folgt: Nach (3) gilt

$$GF = DE \tag{4}$$

und $GF \parallel DE$, also, da D und E auf BC liegen, auch

$$GF \parallel BC \tag{5}$$

Weiter folgt: Die Parallele durch F zu AB schneidet BC in einem Punkt P, da F nach (1) auf AC liegt. Für diesen Punkt P gilt

$$FP \parallel AB \quad (6) \qquad \text{als auch} \qquad FP \parallel GB \quad (7)$$

da G nach (2) auf AB liegt. Da ferner P auf BC (8) liegt, besagt (5) auch $GF \parallel BP$; hiernach und nach (7) folgt, dass $GBPF$ ein Parallelogramm ist. Also gilt $GF = BP$ und damit wegen (4) auch $BP = DE$ (9).

Mit (8),(9),(6),(5) ist bewiesen, dass F und G durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

b) [1] Man konstruiert denjenigen Punkt P auf BC, für den $BP = DE$ gilt.
[2] Man konstruiert die Parallele durch P zu AB; sie schneidet AC in einem Punkt F.
[3] Man konstruiert die Parallele durch F zu BC; sie schneidet AB in einem Punkt G.

c) Wenn F,G nach dieser Beschreibung konstruiert sind, so folgt:
Nach [2], [3] liegt F auf AC bzw. G auf AB; d.h., (1), (2) sind erfüllt.
Nach [2], [3] gilt ferner $FP \parallel AB$, $GF \parallel BC$. (10)

Da aber G auf AB und P nach [1] auf BC liegt, besagt (10) auch $FP \parallel GB$, $GF \parallel BP$; also ist $GBPF$

ein Parallelogramm. Folglich gilt $GF = BP$ und damit nach [1] auch $GF = DE$. (11)

Wegen (10) und weil D, E auf BC liegen, ist $GF \parallel DE$ (12); mit (11),(12) ist gezeigt:
$DEFG$ ist ein Parallelogramm; d.h., auch (3) ist erfüllt.

Aufgabe 4 - 310834
Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Für alle $a \geq 2$, $b \geq 2$ gilt

$$a - 1 \geq 1 \qquad , \qquad b - 1 \geq 1 \tag{1}$$

Da in beiden Beziehungen (1) die auf beiden Seiten stehenden Zahlen positiv sind, folgt durch Multiplikation

$$(a-1)(b-1) \geq 1 \tag{2}$$
$$ab - a - b + 1 \geq 1$$
$$ab \geq a + b \tag{3}$$

Gleichheit gilt in (3) genau dann, wenn sie in (2) gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn in beiden Beziehungen (1) Gleichheit gilt. Damit ist gezeigt:

Es gibt keine Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, für die das Produkt ab kleiner als die Summe $a + b$ wäre;

im Fall, dass beide Zahlen a, b gleich 2 sind, ist das Produkt ab gleich der Summe $a + b$;

für alle anderen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$ ist das Produkt ab größer als die Summe $a + b$.

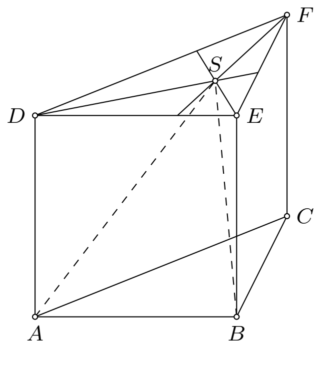
Aufgabe 5 - 310835
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

DA ES und DS nach Voraussetzung die Winkel $\angle DEF$ und $\angle EDF$ halbieren und da im rechtwinkligen Dreieck $\angle EDF < 90° = \angle DEF$ gilt, folgt

$$\angle EDS = \frac{1}{2}\angle EDF < \frac{1}{2}\angle DEF = \angle DES$$

Im Dreieck DES liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, also folgt weiter $ES < DS$. (1)
Da $ABCDEF$ ein gerades Prisma ist, stehen AD und BE auf der Deckfläche DEF senkrecht, daher gilt $\angle ADS = \angle BES = 90°$ (2).
Ferner gilt für die Seitenkanten $AD = BE$. (3)

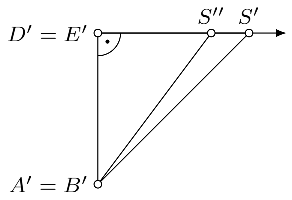


Aus (1), (2), (3) kann die Behauptung $BS < AS$ z.B. folgendermaßen erhalten werden:

Wegen (2) und (3) kann man in einer Ebene Punkte $A' = B'$, $D' = E'$, S' und S'' so wählen, dass S' und S'' auf demselben von D' ausgehenden Strahl liegen und

$$\triangle A'D'S' \cong \triangle ADS \qquad ; \qquad \triangle B'E'S'' \cong \triangle BES \tag{4}$$

gilt (siehe Abbildung).



Wegen (1) liegt dann S'' zwischen D' und S', ferner ist $\angle A'S''E' < 90°$, also $\angle A'S''S' > 90°$, und im Dreieck $A'S''S'$ daher $\angle A'S''S'$ der größte Winkel. Daraus und aus (4) folgt

$$BS = B'S'' < A'S' = AS$$

Aufgabe 6 - 310836
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845$ cm die Länge $h_a = \overline{AE} = 840$ cm der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780$ cm der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

Es gilt $a \cdot h_a = c \cdot h_c$; dies folgt aus den Gleichungen des Flächeninhalts von ABC ist (oder auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD, BAE). Somit ergibt sich

$$c = \frac{a \cdot h_a}{h_c} = 910 \text{ cm}$$

Wegen $\angle BDC = 90°$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BD = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 325 \text{ cm}$$

Je nachdem, ob D zwischen $A = A_1$ und B liegt oder B zwischen $A = A_2$ und D, erhält man weiter

$$A_1D = c - BD = 585 \text{ cm} \qquad \text{bzw.} \qquad A_2D = c + BD = 1235 \text{ cm}$$

Als gesuchte Seitenlänge b erhält man damit im 1.Fall

$$b_1 = A_1C = \sqrt{A_1D^2 + h_c^2} = 975 \text{ cm}$$

und im 2. Fall

$$b_2 = A_2C = \sqrt{A_2D^2 + h_c^2} = 1460{,}69 \text{ cm}$$

Lösungen der III. Runde 1991 übernommen von [5]

5.34 XXXII. Olympiade 1992

5.34.1 I. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320811

In die Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung) sollen die Zahlen

-0,5; 1; -2; 2,5; -3,5;
4; -5; 5,5; -6,5

<table><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>

so eingetragen werden, dass in jedes Feld genau eine dieser Zahlen kommt und dabei in allen drei Zeilen, in allen drei Spalten und in allen beiden Diagonalen die gleiche Summe entsteht.

a) Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Untersuche, ob es noch andere solche Eintragungen gibt, die sich nicht nur durch Drehung oder Spiegelung von einer gefundenen unterscheiden!

-2	5,5	-5
-3,5	-0,5	2,5
4	-6,5	1

a) Die Abbildung zeigt eine Eintragung der geforderten Art.

b) Ein Beweis, dass es bis auf Drehung oder Spiegelung keine weitere gibt (zugleich ein Weg zum Auffinden einer derartigen Eintragung) ist etwa der folgende:
Die Summe aller neun einzutragenden Zahlen beträgt -4,5 . Also muss in jeder der drei Zeilen die Summe -1,5 kommen.
Dies ist dann auch die Summe für jede Spalte und jede Diagonale.
Alle Möglichkeiten, aus den vorgegebenen Zahlen dreigliedrige Summen mit dem Wert -1,5 zusammenzustellen, sind (bis auf die Reihenfolge der Summanden):

-0,5 +1 -2 ; -0,5 +2,5 -3,5 ; -0,5 +4 -5 ; -0,5 +5,5 -6,5 ;
1 +2,5 -5 ; 1 +4 -6,5 ; -2 -3,5 +4 ; -2 -5 +5,5 .

Der einzige Summand, der in vier dieser Summen vorkommt, ist -0,5. Also muss diese Zahl in das Mittelfeld kommen; denn es ist Bestandteil von vier Reihen (eine Zeile, eine Spalte, zwei Diagonalen), in denen der vorgeschriebene Summenwert erreicht werden soll.
Außer -0,5 sind 1 ; -2 ; 4 ; -5 die einzigen Summanden, die jeweils in drei der Summen vorkommen. Diese Zahlen gehören folglich in die Eckfelder; auf eine Diagonale 1 und -2 , auf die andere 4 und -5 . Die Verteilung der übrigen Zahlen folgt dann eindeutig aus der Forderung an die Zeilen- und Spaltensummen.

Aufgabe 2 - 320812

Ein Holzwürfel wurde mit den drei Farben Rot, Gelb und Blau angestrichen, jedes der sechs Quadrate seiner Oberfläche mit einer dieser Farben. Dabei wurde jede der drei Farben mindestens einmal verwendet. Anschließend wurde der Würfel in 27 kleine Würfel zersägt. Auf keinem dieser 27 Würfel waren nun die beiden Farben Blau und Gelb vorhanden.

Ist durch diese Angaben die Verteilung der Farben auf die Oberfläche des ursprünglichen Würfels eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, beschreibe diese Verteilung!

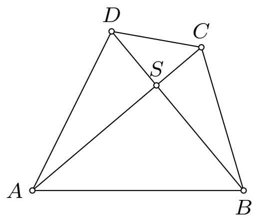
Aus den Angaben geht folgendermaßen eine eindeutig bestimmte Verteilung hervor:
Auf der Oberfläche des ursprünglichen Würfels war (mindestens) eines der sechs Quadrate blau angestrichen. Keines der vier benachbarten Quadrate war gelb angestrichen; denn sonst wäre beim Zersägen ein kleiner Würfel entstanden, auf dem Blau und Gelb vorhanden wären.
Da aber (mindestens) ein gelbes Quadrat vorkam, war es dasjenige, das dem genannten blauen Quadrat gegenüberlag. Für die vier anderen Quadrate, die ja nicht nur dem blauen, sondern auch dem gelben Quadrat benachbart waren, ist folglich auch die Farbe Blau auszuschließen.
Für diese Quadrate bleibt also nur die Farbe Rot übrig. Damit ist die Verteilung der Farben vollständig beschrieben.

Aufgabe 3 - 320813
Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Innenwinkel sämtlich kleiner als 180° sind.

Beweise, dass in jedem solchen Viereck die Summe der Längen der Diagonalen AC und BD stets

a) kleiner als der Umfang des Vierecks $ABCD$, aber

b) größer als der halbe Umfang des Vierecks $ABCD$ ist!



a) Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB (siehe Abbildung), gilt

$$AC < AB + BC \quad , BD < BC + CD \quad , AC < CD + DA \quad , BD < DA + AB$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2DA$$

und daraus die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

b) Ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks, so folgt aus der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS und DAS

$$AS + BS > AB \quad , \quad BS + CS > BC \quad , \quad CS + DS > CD \quad , \quad DS + AS > DA$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AS + 2CS + 2BS + 2DS > AB + BC + CD + DA$$

Wegen $AS + CS = AC$ und $BS + DS = BD$ ergibt sich damit die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

Aufgabe 4 - 320814
Alexander beobachtete zwei Kerzen, eine weiße und eine halb so lange rote. Beide wurden gleichzeitig angezündet; nach 2 Stunden war die weiße Kerze heruntergebrannt, die rote (da sie breiter war) erst nach 5 Stunden.

Wie lange nach dem Anzünden hatte es bis zu dem Zeitpunkt gedauert, an dem beide Kerzen einander genau gleichlang gewesen waren?

In jeder Stunde verringerte sich die Länge L der weißen Kerze, solange sie brannte, um $\frac{1}{2}L$, die Länge $\frac{L}{2}$ der roten Kerze dagegen um $\frac{1}{5} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{10}L$.
Jeweils nach x Stunden hat sich demnach die Länge der weißen Kerze um $\frac{x}{2}L$ auf $L - \frac{x}{2}L = (1 - \frac{x}{2})L$ verringert, die der roten Kerze um $\frac{x}{10}L$ auf $\frac{L}{2} - \frac{x}{10}L = (\frac{1}{2} - \frac{x}{10})L$.

Sind die Kerzen nach x Stunden einander gleichlang, so gilt folglich

$$1 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \qquad ; \qquad x = \frac{5}{4}$$

Also hatte es $\frac{5}{4}$ Stunden (= 75 Minuten) gedauert, bis die Kerzen einander gleichlang gewesen waren.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

5.34.2 II. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320821
Herr Schulz, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, dass er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

Ist a die Einer- und b die Zehnerziffer der Jahreszahl eines Jahres aus diesem Jahrhundert, so sind a und b natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$, die Jahreszahl lautet $1900 + 10b + a$, ihre Quersumme beträgt $1 + 9 + b + a$.

Ist ein solches Jahr das Geburtsjahr von Herrn Schulz, so erreicht er im Jahr 1992 ein Lebensalter von $1992 - (1900 + 10b + a)$ Jahren.
Wenn die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft, gilt daher

$$1992 - (1900 + 10b + a) = 4 \cdot (1 + 9 + b + a)$$

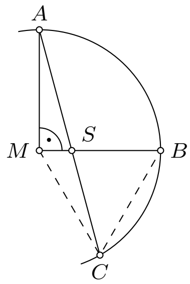
Hieraus folgt $92 - 10b - a = 40 + 4b + 4a$ und $52 - 14b = 5a$.

Wäre $b \geq 4$, so folgte $5a \leq 52 - 14 \cdot 4 < 0$ im Widerspruch zu $a \geq 0$. Wäre $b = 0$ oder $b = 1$ oder $b = 2$, so folgte $5a = 52$ bzw. $5a = 38$ bzw. $5a = 24$, was durch natürliche Zahlen a nicht erfüllbar ist.
Also kann nur $b = 3$ sein, wonach $5a = 10$, also $a = 2$ folgt.
Daher kann die Feststellung nur mit 1932 als Geburtsjahr zutreffen.

Sie trifft hiermit in der Tat zu; denn die Quersumme von 1932 ist $1 + 9 + 3 + 2 = 15$, und das im Jahr 1992 erreichte Lebensalter beträgt $1992 - 1932 = 60 = 4 \cdot 15$. Also gibt es genau ein Jahr, mit dem die Feststellung zutrifft; es ist das Jahr 1932.

Aufgabe 2 - 320822
Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A, B, C so gelegen, dass $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und dass sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe den Winkels $\angle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!



Als Radien von k haben MB und MC einander gleiche Länge; hiernach und wegen $BC = MB$ ist Dreieck MBC gleichseitig, also gilt $\angle BMC = 60°$.
Daraus und aus $MA \perp MB$ folgt $\angle AMC = 60° + 90° = 150°$.
Daher und weil Dreieck MAC mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, folgt aus dem Basis- und dem Innenwinkelsatz

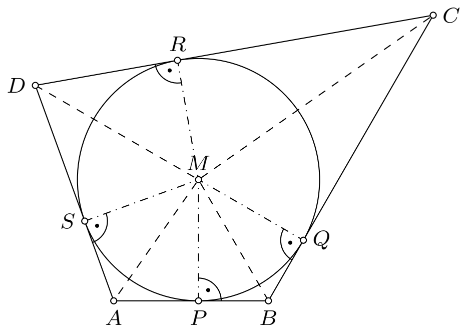
$$\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{2}(180° - \angle AMC) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$$

Aus $MA \perp MB$ und nochmals dem Innenwinkelsatz, auf Dreieck MAS angewandt, folgt damit $\angle MSA = 90° - \angle MAC = 75°$. Schließlich ergibt sich nach dem Scheitelwinkelsatz, dass auch $\angle BSC = 75°$ gilt.
Diese Winkelgröße ist damit durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 - 320823
Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.

Zeige, dass bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von $ABCD$ In einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der Inkreis von $ABCD$.



Nach Voraussetzung berührt ein Kreis k die Seiten AB,BC,CD,DA in Punkten P,Q,R bzw. S. Ist M der Mittelpunkt von k, so ist jeweils MP, MQ, MR bzw. MS senkrecht auf AB, BC, CD bzw. DA.

Mit $r = MP = MQ = MR = MS$ ist folglich jeweils $\frac{1}{2}AB \cdot r$, $\frac{1}{2}BC \cdot r$, $\frac{1}{2}CD \cdot r$. bzw. $\frac{1}{2}DA \cdot r$ der Flächeninhalt von ABM, BCM, CDM bzw. DAM.
Daraus folgt: Der Flächeninhalt F von $ABCD$ beträgt

$$F = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r + \frac{1}{2}DA \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) \cdot r = \frac{1}{2}u \cdot r$$

und ist so durch u und r eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 - 320824
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von Ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals Im Gleichgewicht?

Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Stunde Brenndauer verliert.
Dann hat jede der drei linken Kerzen die Masse $9m$, und die rechte Kerze hat die Masse $12m$. Nach x Stunden Brenndauer befindet sich folglich, solange $x \leq 9$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $3 \cdot (9 - x)m$ bzw. die Masse $(12 - x)m$.
Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn

$$3 \cdot (9 - x) = 12 - x$$

gilt. Die Lösung der Gleichung ist $x = 7\frac{1}{2}$.
Also ist die Waage erstmals $7\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Lösungen der II. Runde 1992 übernommen von [5]

5.34.3 III. Runde 1992, Klasse 8

Aufgabe 1 - 320831
Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffern einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so dass die Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ gilt!

I. Wenn a,b,c Ziffern der geforderten Art sind, so folgt:
Es kann nicht $b = 0$ sein, da hierfür $\overline{bc}$ nicht zweistellig wäre. Es kann nicht $b = 1$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b = \overline{bc}$ wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte.

Es kann nicht $b \geq 3$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b \geq 30^3$ mindestens fünfstellig wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte. Also muss $b = 2$ sein und somit $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ gelten.

Daher muss c die Einerziffer der Zahl c^2 sein. Wegen $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$ kann dies für $c = 2; 3; 4; 7; 8; 9$ nicht zutreffen, trifft also höchstens für $c = 0; 1; 5; 6$ zu.

Weiter ist an den Zehnerziffern von $20^2 = 400, 21^2 = 441, 26^2 = 676$ ersichtlich:
Die Zahl $\left(\overline{bc}\right)^2$ mit $b = 2$ hat für $c = 0; 1; 6$ nicht die durch $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ geforderte Zehnerziffer 2; sie kann dies (unter den Möglichkeiten $c = 0; 1; 5; 6$) also nur für $c = 5$ haben.
Hiermit führt schließlich $25^2 = 625$ auf $a = 6$.

II. Von $a = 6$, $b = 2$, $c = 5$ wird wegen $625 = 25^2$ die geforderte Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es sind genau $a = 6, b = 2, c = 5$ Ziffern der geforderten Art.

Aufgabe 2 - 320832
Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d.h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge. Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten. Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

Beim ersten Vorschlag seien n Röhren sowie eine Füllzeit von t Stunden vorgesehen. Jede Röhre füllt dann in jeder Stunde $\frac{1}{n \cdot t}$ des Behältervolumens.
Die $n - 2$ Röhren des zweiten Vorschlags füllen also in jeder Stunde $\frac{n-2}{n \cdot t}$ des Behältervolumens; der Behälter wird nach diesem Vorschlag somit in $\frac{n \cdot t}{n-2}$ Stunden gefüllt. Da dies 2 Stunden mehr als beim ersten Vorschlag sind, gilt

$$\frac{n \cdot t}{n-2} = t + 2 \qquad \text{und daher} \qquad t = n - 2 \tag{1}$$

Entsprechend folgt: Nach dem dritten Vorschlag wird der Behälter in $\frac{n \cdot t}{n+4}$ Stunden gefüllt, und es gilt

$$\frac{n \cdot t}{n+4} = t - 2 \qquad ; \qquad t = \frac{n}{2} + 2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $n - 2 = \frac{n}{2} + 2$ und damit nach (1) $n = 8$ und $t = 6$.
Also war beim ersten Vorschlag vorgesehen, mit 8 als Anzahl der Röhren eine Füllzeit von 6 Stunden zu erreichen.

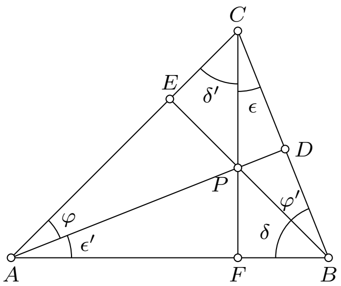
Aufgabe 3 - 320833
Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinkliges Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
$\angle PBA$	δ
$\angle PCA$	δ'

Winkel	Größe
$\angle PCB$	ϵ
$\angle PAB$	ϵ'

Winkel	Größe
$\angle PAC$	φ
$\angle PBC$	φ'

a) Wenn $\delta = \delta$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreieck ABC.
b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.



Die Verlängerung von AP schneide BC in D, die Verlängerung von BP schneide CA in E, die Verlängerung von CP schneide AB in F (siehe Abbildung).

(a) Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf die Dreiecke BFC und AFC, sowie aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt

$$\angle AFC = \delta + \varphi' + \epsilon = \delta' + \varphi + \epsilon' = \angle BFC$$

Ferner gilt, da $\angle AFC$, $\angle BFC$ Nebenwinkel voneinander sind, $\angle AFC + \angle BFC = 180°$; daher folgt $\angle AFC = \angle BFC = 90°$, also ist CF im Dreieck ABC die zu AB senkrechte Höhe. Entsprechend folgt, dass AD und BE die anderen Höhen sind und damit P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

(b) Die Dreiecke ABE und ACF stimmen in ihrem Innenwinkel bei A überein, ferner ist nach Voraussetzung $\angle AEB = \angle AFC = 90°$. Daher folgt nach dem Innenwinkelsatz: Es gilt auch $\delta = \delta'$.
Entsprechend folgen die anderen behaupteten Gleichungen.

Aufgabe 4 - 320834
Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{km}{h}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

Die gesuchte Geschwindigkeit der Radfahrer sei v. Die Zeit t_1, in der der erste Radfahrer auf der Brücke fuhr, bis er dem zweiten Radfahrer begegnete, ist genau so lang wie die anschließende Zeit t_2, bis der zweite Radfahrer die Brücke verließ (und dabei dem Auto begegnete); denn in beiden Zeiten t_1, t_2 war dieselbe Strecke mit der gleichen Geschwindigkeit v zu durchfahren.

Daher hat der erste Radfahrer in der Zeit t_2 weitere 40 m zurückgelegt und musste folglich in einer anschließenden Zeit t_3 noch $(100 - 2 \cdot 40)$ m = 20 m bis zum Ende der Brücke zurücklegen.
In dieser Zeit t_3 durchfuhr das Auto die Strecke 100 m, also eine 5 mal so lange Strecke wie der Radfahrer Daher war die Geschwindigkeit des Autos 5 mal so groß wie die des Radfahrers; d.h., es gilt

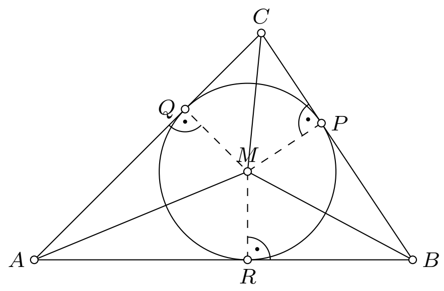
$$v = \frac{70}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Also beträgt die gesuchte Geschwindigkeit 14 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 5 - 320835
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als Inkreis eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von Innen berührt.



Die Seitenlängen des Dreiecks seien mit $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ bezeichnet, der Inkreis habe den Mittelpunkt M, er berühre die Seiten BC, CA, AB in P, Q bzw. R (siehe Abbildung).

Der Radius des Inkreises ist dann $r = MP = MQ = MR$, ferner gilt $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Daher haben die Dreiecke BCM, CAM, ABM die Flächeninhalte

$$F_1 = \frac{1}{2}ar, \qquad F_2 = \frac{1}{2}br, \qquad F_3 = \frac{1}{2}cr$$

Da M im Innern des Dreiecks ABC liegt, hat dieses somit den Flächeninhalt

$$F_D = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

der Inkreis hat den Flächeninhalt $F_K = \pi r^2$. Diese Flächeninhalte bilden also das Verhältnis

$$F_D : F_K = (a+b+c) : (2\pi r)$$

Damit ist die zu beweisende Aussage gezeigt; denn $a+b+c$ ist der Umfang des Dreiecks, und $2\pi r$ ist der Umfang des Inkreises.

Aufgabe 6 - 320836
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, dass jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen.

Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen,

von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten,

die zweite 63 Minuten,

die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Minute Brenndauer verliert.
Dann hat die linke Kerze die Masse $84m$, und die rechten Kerzen haben die Massen $70m$, $63m$ bzw. $35m$.

Nach x Minuten Brenndauer befindet sich, solange $x \leq 35$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84-x)m$ bzw. die Masse $(70-x+63-x+35-x)m = (168-3x)m$.
Aus $x \leq 35$ folgt aber $2x \leq 70$, also erst recht $2x < 84$ und daraus weiter $84 - x < 168 - 3x$. Daher ist während der Brenndauer bis 35 Minuten die linke Waagschale stets leichter als die rechte.

Von da an, also nach x Minuten Brenndauer mit $x > 35$, befindet sich, solange $x \leq 63$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84-x)m$ bzw. die Masse $(70-x+63-x)m = (133-2x)m$. Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn $84 - x = 133 - 2x$ oder, äquivalent hierzu, $x = 49$ gilt.

Also ist die Waage erstmals 49 Minuten nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Lösungen der III. Runde 1993 übernommen von [5]

5.35 XXXIII. Olympiade 1993

5.35.1 I. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330811
Nach dem Kauf eines neuen Autos muss man bekanntlich im Lauf der Zeit mit einem Wertverlust rechnen. Für diesen Wertverlust seien im Lauf des ersten Jahres 20%, im zweiten Jahr weitere 15% und im dritten Jahr nochmals weitere 15% gerechnet, wobei alle diese Prozentangaben vom ursprünglichen Kaufpreis verstanden werden. Der jeweils entstehende verminderte Wert wird als Zeitwert bezeichnet.

a) Frau Grübler bezahlte für ihren Neuwagen 23800 DM. Berechne den Zeitwert nach zwei Jahren!

b) Herr Bauer will sein Auto nach drei Jahren verkaufen. Zu diesem Zeitpunkt würde der Zeitwert des Wagens 16200 DM betragen. Um 10% dieses Wertes verringert sich jedoch aufgrund eines Unfalls der Zeitwert nochmals.
Wie viel Prozent des ursprünglichen Kaufpreises beträgt nun der so entstandene verringerte Zeitwert?

c) Herr Neumann kauft ein neues Auto für 43000 DM. Er möchte den Wagen nach vier Jahren zum Zeitwert verkaufen, den er als 18275 DM annimmt.
Welchen Prozentsatz (vom ursprünglichen Kaufpreis) hat er dabei für den Wertverlust im vierten Jahr zugrunde gelegt?

a) 20 % von 23800 DM sind 4760 DM, 15 % von 23800 DM sind 3570 DM.
Damit entsteht der Wertverlust 4760 DM + 3570 DM = 8330 DM.
Also beträgt der Zeitwert 23800 DM - 8330 DM = 15470 DM.
(Mit gleicher Begründung wie in b) kann man auch 100 % - (20 % + 15 %) = 65 % von 23800 DM berechnen.)

b) Da die Prozentangaben für die Wertverluste einheitlich vom Kaufpreis verstanden werden, beträgt die Summe der Wertverluste 20 % + 15 % + 15 % = 50 % des Kaufpreises. Daher sind 16200 DM die übrigen 50 % des Kaufpreises; dieser hatte somit 32400 DM betragen.

Die weitere Verringerung des Zeitwertes beträgt 10 % von 16200 DM , das sind 1620 DM. Als verringerter Zeitwert verbleiben 16200 DM - 1620 DM = 14580 DM. Wegen $14580 : 32400 \cdot 100 = 45$ sind das 45 % vom Kaufpreis.

c) 18275 DM sind 42,5 % von 43000 DM. Wieder wegen der einheitlichen Bezugnahme auf den Kaufpreis wurde somit für den Wertverlust im vierten Jahr ein Prozentsatz von 50 % - 42,5 % = 7,5 % zugrunde gelegt.

Aufgabe 2 - 330812

Ermittle alle Möglichkeiten, die leeren Felder im folgenden Rechenschema so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht!

```
_8_ • 4_2
---------
      7__
     3__
    ----
---------
    _____0
```

Da die Einerziffer des Produktes 0 ist und die Einerziffer des zweiten Faktors 2 ist, kann die Einerziffer des ersten Faktors nur entweder 0 oder 5 sein.

In beiden Fällen gilt für das erste Teilprodukt:
Seine Einerziffer ist 0, beim Berechnen der Zehnerziffer ist als Übertrag aus der Einerstelle nur 0 oder 1 möglich. Diese Berechnung führt also auf $2 \cdot 8 + 0 = 16$ oder auf $2 \cdot 8 + 1 = 17$, in beiden Fällen mit dem Übertrag 1 in die Hunderterstelle.

Also hat sich, als die Hunderterziffer h des ersten Faktors mit 2 multipliziert und dann dieser Übertrag 1 addiert wurde, die angegebene Hunderterziffer 7 des ersten Teilprodukts ergeben. Aus diesem Sachverhalt $2 \cdot h + 1 = 7$ folgt $h = 3$. Damit ist insgesamt gezeigt: Der erste Faktor lautet entweder 380 oder 385.

Das zweite Teilprodukt kann somit nur dann die angegebene Hunderterziffer 3 haben, wenn die Zehnerziffer des zweiten Faktors 1, dieser also insgesamt 412 lautet. Daher können nur die Eintragungen

```
380 • 422      385 • 412
---------      ---------
      760            770
     380            385
    1520           1540
---------      ---------
   156560         158620
```

den Forderungen der Aufgabe entsprechen. Beide führen in der Tat zu richtig gerechneten Multiplikationsaufgaben.

Aufgabe 3 - 330813

Sebastian betrachtet eine dreistellige natürliche Zahl und stellt fest:

(1) Setzt man vor diese dreistellige Zahl eine Ziffer 5, so ist die entstandene vierstellige Zahl eine Quadratzahl.

(2) Hängt man aber an die (ursprüngliche dreistellige) Zahl eine Ziffer 1 an, so ist die entstandene vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Weise nach, dass es genau eine dreistellige Zahl gibt, mit der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt werden; ermittle diese Zahl!

I. Wenn die Bedingungen (1),(2) mit einer dreistelligen natürlichen Zahl z erfüllt werden, so folgt:
Da z dreistellig ist, gilt $100 \leq z \leq 999$. Für die nach (1) entstehende Quadratzahl n^2 gilt also $5100 \leq n^2 \leq 5999$.

Daraus sowie aus $71^2 = 5041 < 5100$ und $5999 < 6084 = 78^2$ folgt $71 < n < 78$. Die Quadrate der Zahlen $n = 72, 73, 74, 75, 76, 77$ sind $n^2 = 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929$.
Also kann z nur eine der Zahlen $184, 329, 476, 625, 776, 929$ sein; durch Anfügen einer Ziffer 1 entstehen die Zahlen $1841, 3291, 4761, 6251, 7761, 9291$.

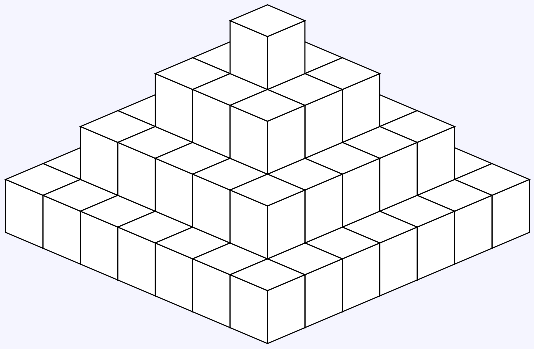
Von diesen ist nur 4761 eine Quadratzahl, wie sich z.B. durch

$$\begin{aligned} 42^2 = 1764 < 1841 < 1849 = 43^2 \quad &; \quad 57^2 = 3249 < 3291 < 3364 = 58^2 \\ 69^2 = 4761 \quad &; \quad 79^2 = 6241 < 6251 < 6400 = 80^2 \\ 88^2 = 7744 < 7761 < 7921 = 89^2 \quad &; \quad 96^2 = 9216 < 9291 < 9409 = 97^2 \end{aligned}$$

bestätigen lässt. Somit kann nur die Zahl $z = 761$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn sie ist dreistellig, und 5476 sowie 4761 sind Quadratzahlen.
Damit ist der geforderte Nachweis geführt und die gesuchte Zahl ermittelt; sie lautet 476.

Aufgabe 4 - 330814
Ria baut aus Würfeln der Kantenlänge 2 cm einen pyramidenartigen Körper. Er besteht aus Schichten, die jeweils eine Quadratfläche vollständig bedecken. Die Abbildung zeigt das Prinzip seines Aufbaues. Die Gesamthöhe dieses Körpers beträgt 10 cm.



Als "Sichtfläche" eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers sei die Gesamtheit aller von oben oder von den Seiten sichtbaren Teilflächen des Körpers verstanden. Zu dieser "Sichtfläche" gehören also keine Flächen, die - wie die Grundfläche des von Ria gebauten Körpern - nur von unten zugänglich sind.

a) Aus wie vielen Würfeln besteht dieser Körper?

b) Ria streicht die "Sichtfläche" dieses Körpers farbig an. In wie vielen der Würfel sind dann sechs, fünf, vier, drei bzw. zwei Flächen, eine bzw. keine Fläche farbig angestrichen?

c) Beate entfernt eine Anzahl derjenigen Teilwürfel, die mindestens eine farbig angestrichene Fläche haben. Sie wählt diese Teilwürfel so, dass der übrigbleibende Körper eine ebenso große "Sichtfläche" hat wie der ursprüngliche Körper. Unter Einhaltung dieser Bedingung wählt Beate die Anzahl der zu entfernenden Teilwürfel aber möglichst groß. Wie groß ist diese Anzahl?

d) An dem von Beate übriggelassenen Körper streicht Ria von neuem dessen "Sichtfläche" farbig an. Danach entfernt wiederum Beate nach denselben Bedingungen wie in c) eine möglichst große Anzahl von Teilwürfeln mit je mindestens einer farbigen Fläche. Wie groß ist diese Anzahl?

Hinweis: Zu b), c), d) werden nur Beschreibungen (gegebenenfalls auch Skizzen), aber keine Begründungen verlangt.

a) Wegen der Gesamthöhe 10 cm und der Kantenlänge 2 cm der Würfel besteht der Körper aus fünf Schichten. Die Seiten der Quadratflächen, die von den Schichten bedeckt werden, werden der Reihe nach durch 1, 3, 5, 7, 9 Würfel gebildet.
Also besteht der Körper aus $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ Würfeln.

b) In keinem Würfel beträgt die Anzahl der farbigen Flächen 6, 4 oder 1.
In genau 1 Würfel, nämlich im obersten, beträgt sie 5.
In den $4 \cdot 4 = 16$ Eckwürfeln der vier anderen Schichten beträgt sie 3.
In den übrigen $4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 64$ Kantenwürfeln dieser Schichten beträgt sie 2.
Die restlichen 84 Würfel haben keine farbige Fläche.

c) In den vier oberen Schichten sind von den Ecken- und Kantenwürfeln genau diejenigen stehenzulassen, die sich in den Kantenmitten befinden. Zu entfernen sind aus diesen Schichten die übrigen Ecken- und Kantenwürfel. Das sind, aufgezählt nach den Schichten in der Reihenfolge von oben nach unten, $4 \cdot (0 + 1 + 3 + 5) = 36$ Würfel.

d) In der zweiten bis vierten Schicht, von oben an gezählt, befinden sich nun außer den in c) als "stehenzulassen" bezeichneten Würfeln solche Teilschichten, die wieder je eine Quadratfläche bedecken.
Von diesen sind wieder die Ecken- und Kantenwürfel mit Ausnahme der Würfel an den Kantenmitten zu entfernen, das sind $4 \cdot (0 + 1 + 3) = 16$ Würfel.

Lösungen der I. Runde 1993 übernommen von [5]

5.35.2 II. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330821
Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wie viele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

Waren zu Beginn genau x Männer auf der Feier, so waren genau $4x$ Frauen auf der Feier. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, blieben genau $x-4$ Männer und $4x-4$ Frauen. Für diese Anzahlen gilt folglich

$$5\cdot(x-4)=4x-4 \qquad \text{also} \qquad x=16$$

Somit waren zu Beginn insgesamt 16 Männer und 64 Frauen, also 80 Personen auf der Feier gewesen.

Aufgabe 2 - 330822
Susann lässt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

Sind x,y,z die drei ursprünglich genannten Zahlen und ist $s=x+y+z$ (1) ihre Summe, so gilt

$$x\cdot s=240 \quad , \quad y\cdot s=270 \quad , \quad z\cdot s=390 \qquad (2)$$

Indem man (1) mit s multipliziert und dann (2) anwendet, folgt

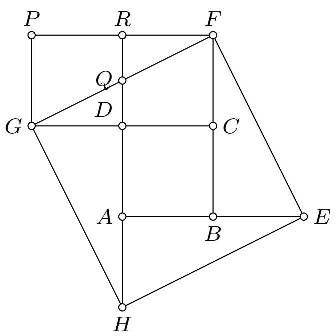
$$s^2=x\cdot s+y\cdot s+z\cdot s \quad ; \quad 240+270+390=900$$

Da s als Summe dreier natürlicher Zahlen selbst eine natürliche Zahl ist, ist hierdurch eindeutig bestimmt: Es gilt $s=30$ und damit nach (2) $x=8, y=9, z=13$.

Aufgabe 3 - 330823
Es sei $ABCD$ ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass $EFGH$ ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ in dem Flächeninhalt von $EFGH$ enthalten?



a) Nach den Voraussetzungen ist $BE=a=CF$, $BF=2a=CG$, ferner (als Nebenwinkel von Innenwinkeln des Quadrates $ABCD$) $\angle EBF=90°=\angle FCG$. (1)
Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BEF\cong\triangle CFG$, also $EF=FG$ (2) und $\angle EFB=\angle FGC$. (3)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck CFG sowie nach (1) ist ferner (siehe Abbildung) $\angle FGC+\angle CFG=90°$; hieraus und aus (3) folgt $\angle EFB+\angle CFG=90°$, d.h. $\angle EFG=90°$. (4)

Entsprechend zu (2) und (4) beweist man, dass im Viereck $EFGH$ alle Seiten einander gleiche Länge und alle Winkel die Größe 90° haben. Also ist es ein Quadrat.

b) Es sei P derjenige Punkt, für den $GCFP$ ein Rechteck ist. Die Verlängerung von AD über D hinaus schneide GF in Q und PF in R.

Dann sind $DCFR$ und $GDRP$ zwei Quadrate mit gleicher Seitenlänge a wie $ABCD$. In den Dreiecken GDQ und FRQ sind gleichgroße Winkel bei D, R (rechte Winkel) und Q (Scheitelwinkel), daher und wegen $GD = FR$ sind sie nach Kongruenzsatz sww einander kongruent.

Fügt man sie an das Viereck $DCFQ$ an, so folgt:
Das Dreieck GCF hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $DCFR$, also auch wie $ABCD$. Entsprechendes gilt für die Dreiecke HDG, EAH, FBE. Also ist der Flächeninhalt von $ABCD$ genau 5 mal in dem von $EFGH$ enthalten.

Aufgabe 4 - 330824
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

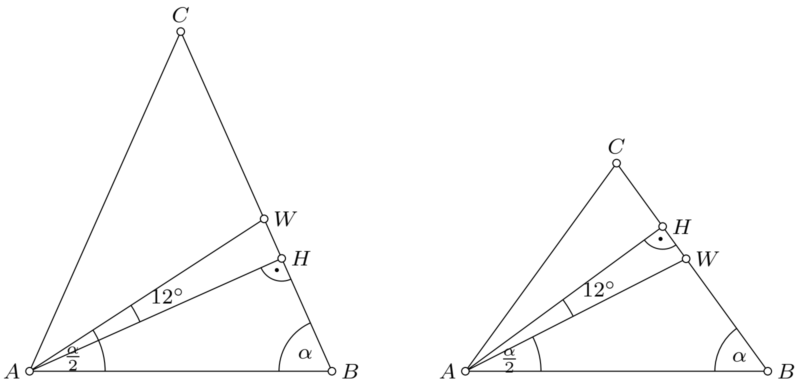
a) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 48° hat?

b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\angle WAH$

b) die Größe 12°,

c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem derartigen Dreieck möglich sind!



a) Nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz gilt (linke Abbildung)

$$2 \cdot \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ \qquad \text{also} \qquad \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$$

Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, gilt $\angle BAW = 33^\circ$. (1)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist

$$\angle BAH = 90^\circ - \angle ABH = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ \tag{2}$$

Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 33^\circ - 24^\circ = 9^\circ$.

b) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 12^\circ$ ist, so folgt:
Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW (linke Abbildung) oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (rechte Abbildung). In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen

$$\angle BAH = \angle BAW + \angle WAR \quad \text{mit } \alpha = \angle BAC \quad \text{also } \angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ \tag{3}$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

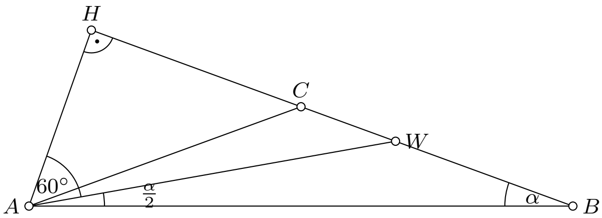
$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ \tag{4}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ \pm 12^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \pm 8^\circ$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 68°$ als auch für $\alpha = 52°$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90°$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 12°$.

c) Die gleiche Schlussweise wie in b) führt auf $\alpha = 60° \pm 40°$.
Von diesen beiden Werten scheidet $\alpha = 100°$ aus, da ein Basiswinkel nicht größer als $90°$ sein kann. Dagegen gibt es für $\alpha = 20°$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße.
Für diese Dreiecke gilt $\angle HAB = 70°$ und $\angle HAW = 60°$.



Damit ist gezeigt: Es gibt Dreiecke wie in c) genannt; als Basiswinkelgröße $\alpha = \angle BAC$ solcher Dreiecke ist genau der Wert $\alpha = 20°$ möglich.

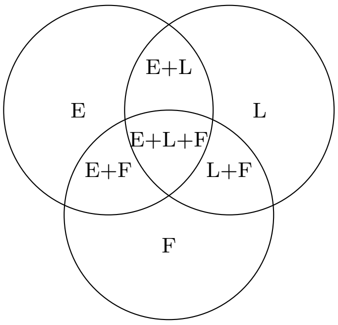
Lösungen der II. Runde 1983 übernommen von [5]

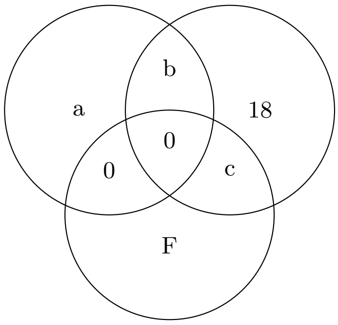
5.35.3 III. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330831
In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.
(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.
(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.
(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Französisch und Latein lernen.
(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wie viele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wie viele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!





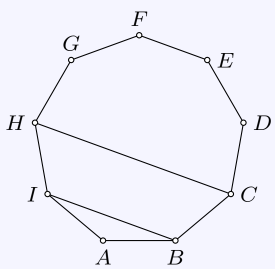
In der linken Abbildung sind die Schüler, die Englisch, Latein bzw. Französisch lernen, durch je einen Kreis zusammengefasst. Außerdem sind dort die möglichen Sprachenzusammenstellungen ersichtlich. Die Angaben in der rechten Abbildung bezeichnen die Schülerzahlen hierzu. Aus (3) und (5) folgen insbesondere die Eintragungen 18 und 0. Berücksichtigt man sie, so folgt weiter:

Wegen der Gesamtzahl 120 gilt $a + b + c + d + 18 = 120$ (6), wegen (1) gilt $a + b + d + 18 = 102$ (7), wegen (2) gilt $c + b + d + 18 = 75$ (8), wegen (4) gilt $b = 9 + d$ (9).
Aus (6) und (7) folgt $c = 18$ (10), aus (6) und (8) folgt $a = 45$ (11).

Damit erhält man aus (7) oder (8) $b + d = 39$.
Die gewünschten Zahlenangaben sind also eindeutig bestimmt; sie lauten:

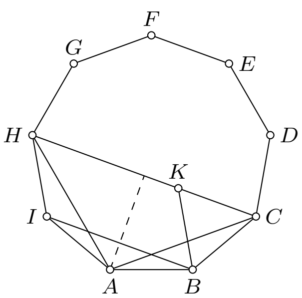
Genau eine der drei Sprachen lernen insgesamt $a + c + 18 = 81$ Schüler,
genau zwei der drei Sprachen lernen insgesamt $b + d = 39$ Schüler.

Aufgabe 2 - 330832



Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$, d.h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Beweise, dass die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!
b) Beweise, dass $CH - BI = BC$ gilt!



a) Nach Voraussetzung ist $AB = BC = AI = IH$ (1); ferner gilt für die Innenwinkel im regelmäßigen Neuneck $\angle ABC = \angle AIH = \angle IAB = 14°$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABC \cong \triangle AIH$ also $\angle BAC = \angle IAH$ (3) und $CA = HA$.
Im somit gleichschenkligen Dreieck CHA ist die Höhe auf CH zugleich Winkelhalbierende von $\angle CAH$. Wegen (3) halbiert sie auch $\angle BAI$ und ist daher auch im gleichschenkligen Dreieck BIA die Höhe auf BI.

Da BI und CH also auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind sie zueinander parallel.

b) Für den Schnittpunkt K von CH mit der Parallelen durch B zu IH gilt:
Im Parallelogramm $IBKH$ ist $KH = BI$ (4) und $BK = IH$, nach (1) also auch $BK = BC$. (5)
Nach dem Innenwinkelsatz für das gleichschenklige Dreieck BIA gilt wegen (2) ferner $\angle BIA = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$, also nochmals wegen (2) $\angle BIH = 140° - 20° = 120°$.
Als Gegenwinkel im Parallelogramm $IBKH$ hat dann auch $\angle BKH$ die Größe 120°, somit gilt $\angle BKC = 60°$. (6)

Nach (5) und (6) ist das Dreieck BCK gleichseitig. Damit und wegen (4) ergibt sich $BC = CK = CH - KH = CH - BI$, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 330833
Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u,
die Gerade durch B und C sei v,
die Gerade durch C und A sei w,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über, bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55°$ vorausgesetzt.

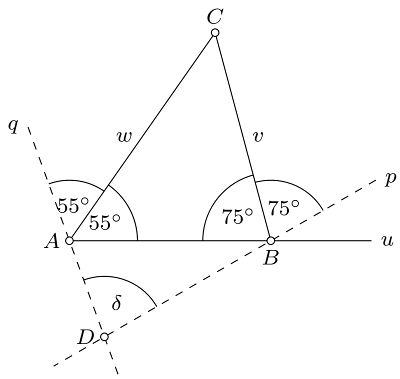
a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75°$ ist?

b) Wie groß muss β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, dass sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

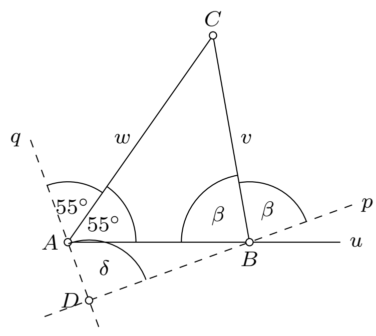
d),e) Stelle eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf der selben Seite der Geraden u liegt wie C; wähle dabei das Dreieck ABC
- d) mit spitzen Innenwinkel bei B.
- e) mit stumpfen Innenwinkel bei B.

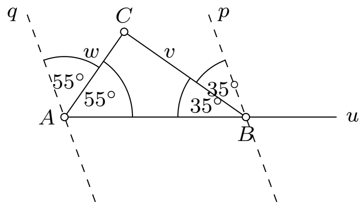
(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)



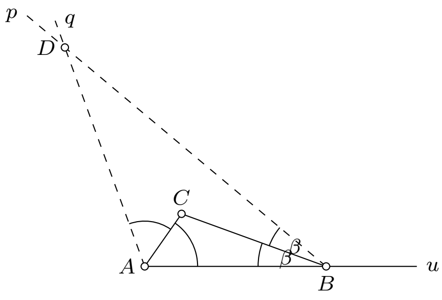
a) Man erhält p, indem man an die Strecke BC im Punkt B nach derjenigen Seite, auf der A nicht liegt, nochmals den Winkel der Größe $\beta = 75°$ anträgt.
Entsprechend erhält man q durch nochmaliges Antragen von 55° an AC (siehe Abbildung).
Für den Schnittpunkt D von p und q gilt damit $\angle ABD = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$ und $\angle BAD = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABD folgt: p und q schneiden sich unter einem Winkel der Größe $\delta = \angle ADB = 180° - 30° - 70° = 80°$.

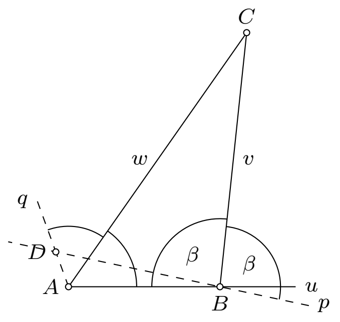
b) Wie in a) ergibt sich $\angle ABD = 180° - 2\beta$, $\angle BAD = 70°$, also $\delta = 180° - (180° - 2\beta) - 70°$ (siehe 2. Abbildung).
Da nun $\delta = 90°$ gefordert wird, folgt $2\beta = 90° + 70°$, also $\beta = 80°$.





c) Für $\beta = 35°$ bilden p und q jeweils nach der Seite hin, auf der C liegt, mit u Winkel der Größe $2 \cdot 35°$ bzw. $2 \cdot 55°$ (siehe 3. Abbildung). Da diese sich zu 180° ergänzen, sind p und q für den genannten Wert $\beta = 35°$ als zueinander parallel nachgewiesen.
d),e) Die Abbildungen zeigen je eine Zeichnung der verlangten Art.





Aufgabe 4 - 330834
Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B, ein zweiter Radfahrer Y von B nach A. Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, dass jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und dass die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die 7,5 km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

Da X in der Zeit $\frac{1}{2}$h bis zum ersten Treffen den Weg 11 km zurücklegte, fuhr X mit der Geschwindigkeit 15 $\frac{km}{h}$. Wären X und Y beim zweiten Treffen einander entgegengefahren, so hätte X zwischen dem ersten und zweiten Treffen B erreichen und dort die Richtung wechseln müssen, also wäre die Strecke vom ersten Treffpunkt bis B kürzer als 12 km.
Daher hätte Y eine kleinere Geschwindigkeit als X und hätte somit in der zweiten halben Stunde noch nicht einmal A erreichen, also erst recht nicht wenden und X begegnen können.
Daher gibt es nur zwei Möglichkeiten:

I. In der Zeit $\frac{1}{2}$ h vom ersten bis zum zweiten Treffen war X nochmals $\frac{15}{2}$ km in gleicher Richtung weitergefahren und wurde am Ende dieser Zeit von Y eingeholt (der zuvor A erreicht und dort die Richtung gewechselt hatte).
Das besagt: Y musste in dieser Zeit eine 3 mal so lange Strecke durchfahren und hat somit die Geschwindigkeit $45 \frac{km}{h}$.

Ferner folgt: Y hatte vom Start an bis zum ersten Treffen einen 3 mal so langen Weg wie X zurückgelegt. Also hat die Strecke AB insgesamt die Länge $4 \cdot \frac{15}{2}$ km = 30 km.

II. Zwischen dem ersten und zweiten Treffen ist X in B angekommen, hat dort die Richtung gewechselt und dann beim zweiten Treffen Y eingeholt.
Der Ablauf der Begegnungen ist wie im Fall I., nur mit vertauschten Rollen von X und Y. Also hat nun X eine 3 mal so große Geschwindigkeit wie Y, d.h.: Y hat die Geschwindigkeit 5 $\frac{km}{h}$. Dementsprechend ergibt sich auch, dass die Länge von AB im Fall I. einen 3 mal so großen Wert hatte wie im Fall II.; d.h., im Fall II. hat AB die Länge 10 km.

Aufgabe 5 - 330835
Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine "Spiegelzahl", wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser "Spiegelzahlen"! Welches ist der größte echte Teiler von s?

b) Beweise, dass für je drei Ziffern a, b, c von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern a, zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 111111 teilbar.

Hinweis: Als echter Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s, die (positiv und) kleiner als s sind.

a) Für die Anordnung der drei Ziffern 2, 5, 7 gibt es genau sechs Möglichkeiten; dementsprechend sind alle "Spiegelzahlen" der genannten Art die Zahlen 257752, 275572, 527725, 572275, 725527 und 752257. Als ihre Summe ergibt sich $s = 3111108$.

Die kleinste natürliche Zahl, die größer als 1 und Teiler von s ist, ist 2. Daher ist die Zahl $\frac{s}{2} = 1555554$ Teiler von s, kleiner als s und zugleich die größte Zahl mit diesen beiden Eigenschaften, also der größte echte Teiler von s.

b) Entsprechend gilt für je drei Ziffern a, b, c, von denen keine zwei einander gleich sind:
Um mit dem üblichen Additionsverfahren die Summe der im Aufgabentext genannten "Spiegelzahlen" zu bilden, hat man beim Addieren an allen sechs Stellen (Einer-, Zehner-, ..., Hunderttausenderstelle) die Zahl $z = 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$ zu bilden. Daher beträgt diese Summe

$$z + 10 \cdot z + 10^2 \cdot z + 10^3 \cdot z + 10^4 \cdot z + 10^5 \cdot z = 111111 \cdot z$$

und ist folglich durch 111111 teilbar.

Aufgabe 6 - 330836

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC, von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf AB senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf AC senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, dass es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf BC senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

a) Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt

$$F = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \qquad \text{also} \qquad b = \frac{c \cdot h_c}{h_b} = 15 \text{ cm}$$

b) Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck. Für seinen Flächeninhalt F müsste dann

$$F = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \qquad \text{also}$$

$$a = \frac{2F}{4 \text{ cm}} \quad ; \quad b = \frac{2F}{2 \text{ cm}} \quad ; \quad c = \frac{2F}{5 \text{ cm}}$$

gelten. Daraus folgte

$$a + c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{2F}{1 \text{ cm}} = \frac{9}{20} \cdot \frac{2F}{1 \text{ cm}} < \frac{2F}{2 \text{ cm}} = b$$

im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die eingangs gemachte Annahme als falsch nachgewiesen.

Lösungen der III. Runde 1993 übernommen von [5]

5.35.4 IV. Runde 1993, Klasse 8

Aufgabe 1 - 330841
Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl von Aufgaben durch. Sein Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

> "Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist."

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

Aus den Angaben folgt: Wenn Max x Aufgaben gelöst hat, so hat er $x - 22$ Aufgaben nicht gelöst; es gilt

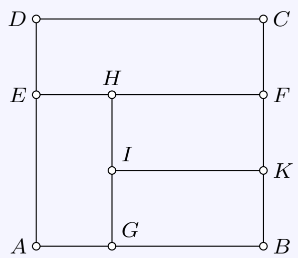
$$x + 3 \cdot (x - 22) < 60 \quad (1) \qquad x + \frac{1}{3} \cdot (x - 22) > 30 \quad (2)$$

$$x + 7 \cdot (x - 22) \text{ ist eine ganze Zahl} \qquad (3)$$

Aus (1) folgt $x + 3x - 66 < 60$ und $x < 31\frac{1}{2}$. Aus (2) folgt $x + 7x - 7 > 30$ und $x > 28$.
Daher ist x eine der Zahlen 29, 30, 31 und folglich $x - 22$ eine der Zahlen 7, 8, 9.

Die Bedingung (3) erfordert, dass $x - 22$ durch 3 teilbar ist; dies wird unter den genannten Zahlen nur von $x - 22 = 9$ erfüllt.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Max hat $x = 31$ Aufgaben gelöst von insgesamt 40 bearbeiteten Aufgaben.

Aufgabe 2 - 330842



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecke AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abbildung).

a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$ und $IKFH$ untereinander flächengleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!
b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ untereinander umfangsgleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

a) Wegen der zu erfüllenden Bedingung hat jedes der vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. Daraus folgt

$$ED = \frac{1}{4}a^2 : a = \frac{1}{4}a \quad ; \quad AE = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a \quad ; \quad AG = \frac{1}{4}a^2 : \frac{3}{4}a = \frac{1}{3}a$$

$$GB = IK = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \quad ; \quad GI = IH = \frac{1}{4}a^2 : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Der Umfang des Rechtecks $IKFH$ beträgt somit $2 \cdot (IK + IH) = \frac{25}{12}a$.

b) Für die Längen $ED = FC = x$ und $AG = y$ folgt aus der Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $AGHI$, dass $2 \cdot (a + x) = 2 \cdot (y + a - x)$, also $y = 2x$ gilt.
Wegen der Umfangsgleichheit von $GBKI$ mit $IKFH$ ist ferner $2 \cdot (IK + BK) = 2 \cdot (IK + KF)$, also $BK = KF = \frac{1}{2}(a - x)$.

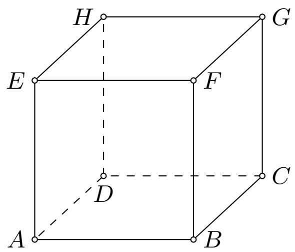
Die Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $GBKI$ ergibt daher die Gleichung

$$2 \cdot (a+x) = 2 \cdot \left(a - y + \frac{1}{2}(a-x)\right) \qquad \text{also} \qquad 7x = a$$

Somit erhält man $x = \frac{1}{7}a$, $y = \frac{2}{7}a$, $IK = a - y = \frac{5}{7}a$, $KF = \frac{1}{2}1(a-x) = \frac{3}{7}a$; das Rechteck $IKFH$ hat den Flächeninhalt $IK \cdot KF = \frac{15}{49}a^2$.

Aufgabe 3 - 330843
Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 g Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!



I. Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung mit A,B,C,D,E,F,G,H bezeichnet.
Der Anfangspunkt der abzuzählenden Wege sei A, der Endpunkt folglich G.
Von A aus kann eine erste Kante nur entweder nach B oder D oder E gegangen werden. Es genügt, eine dieser Möglichkeiten, etwa die nach B, zu betrachten und die Anzahl der hiermit beginnenden Wege mit 3 zu multiplizieren.

II. Von B aus kann eine zweite Kante nur entweder nach C oder F folgen. Es genügt, etwa die für die Fortsetzung nach C gefundene Anzahl mit 2 zu multiplizieren. Von C aus gibt es wieder genau zwei Fortsetzungsmöglichkeiten:

III. Setzt man von C aus nach G fort, so ist man bereits nach einem Weg von 3 cm Länge im Zielpunkt. Also hat man noch einen Weg der Länge 4 cm von G nach G anzuschließen. Das ist nur durch Umlaufen einer Seitenfläche möglich. Die einzige G enthaltende Seitenfläche, bei der dies ohne Wiederholung einer schon durchlaufenen Kante möglich ist, ist $GHEF$.
Daher kommt man (nach dem Beginn über C, G) genau zu den 2 Wegen $ABCGHEFG$ und $ABCGFEHG$.

IV. Von C aus nach D gibt es genau die beiden Fortsetzungen:

a) Anfangsweg $ABCDH$.
Von H aus dann sofort nach G zu gehen, wäre nicht möglich, da man danach auf einem Weg von 2 cm wieder nach G kommen müsste, was ohne Kantenwiederholung nicht möglich ist. Also verbleibt nur der Weg $ABCDHEFG$.

b) Anfangsweg $ABCDA$.
Von A aus geht es eindeutig nach E. Von dort aus ist auf einem Weg von 2 cm nach G zu gelangen. Hierzu gibt es genau zwei Möglichkeiten; so erhält man die beiden Wege $ABCDAEFG$ und $ABCDAEHG$.

Die Anzahl der in III. und IV. gefundenen fünf Wege ist nach I. und II. mit 3 und 2 zu multiplizieren. So ergibt sich: Die Anzahl der Wege, die unter den Bedingungen der Aufgabe möglich sind, beträgt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Aufgabe 4 - 330844
Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.
(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

Sind a, b, c mit $a \geq b \geq c$ die ganzzahligen Maßzahlen dreier Streckenlängen, so sind diese Längen genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn $a < b + c$ gilt.

Zusammen mit der Bedingung (2) besagt diese Ungleichung $2a < a + b + c = 50$, $a < 25$. Aus $a \geq b \geq c$ folgt andererseits $3a \geq a + b + c > 48$, $a > 16$. Daher kann a nur eine der Zahlen 17, 18, ..., 24 sein.

In der folgenden Tabelle werden zu jeder dieser Zahlen a alle diejenigen Paare (b,c) aufgesucht, mit denen die Gleichung $b + c = 50 - a$ und die Ungleichungen $a \geq b \geq c$gelten:

Man beginnt mit $b = a$ (und folglich $c = 50 - 2a$), dann stellt man fest, ob durch Verkleinern von b um 1 und gleichzeitiges Vergrößern von c um 1 ein weiteres derartiges Paar (b,c) entsteht; dies ist so lange der Fall, bis die Bedingung $b \geq c$ nicht mehr erfüllt wird.
Anschließend wird in der Tabelle die Anzahl der gefundenen Paare vermerkt.

a	$b + c = 50 - a$	Paare (b,c)	Anzahl
17	$b + c = 33$	(17,16)	1
18	$b + c = 32$	(18,14), (17,15), (16,16)	3
19	$b + c = 31$	(19,12), (18,13), (17,14), (16,15)	4
20	$b + c = 30$	(20,10), (19,11), ..., 16,14), (15,15)	6
21	$b + c = 29$	(21,8), (20,9), ..., (16,13), (15,14)	7
22	$b + c = 28$	(22,6), (21,7), ..., (15,13), (14)14)	9
23	$b + c = 27$	(23,4), (22,5), ..., (15,12), (14,13)	10
24	$b + c = 26$	(24,2), (23,3), ..., (14,12), (13,13)	12

Damit enthält die Tabelle für jedes Dreieck der geforderten Art die Maßzahlen seiner Seitenlängen a,b,c. Wie ersichtlich ist, gibt es unter diesen Angaben auch keine zwei, die (wegen Übereinstimmung in allen drei Zahlen a,b,c) zu kongruenten Dreiecken führen würden.

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 + 10 + 12 = 52$.

Aufgabe 5 - 330845
Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, dass für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt mit den eingeführten Bezeichnungen:
Jeder Punkt der Winkelhalbierenden des rechten Winkels, also auch der Punkt D, hat gleichgroße Abstände zu den beiden Katheten. Daher haben die beiden Dreiecke BCD und ACD die Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot t$ bzw. $\frac{1}{2}b \cdot t$.
Aus diesen beiden Dreiecken ist das Dreieck ABC zusammengesetzt. Da es rechtwinklig ist, also die Höhe auf einer Kathete die andere Kathete ist, ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot b$. Daher gilt $a \cdot t + b \cdot t = a \cdot b$; Division durch $a \cdot b \cdot t$ ergibt, wie behauptet

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$$

Aufgabe 6 - 330846
Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

Für natürliche Zahlen $x > 0$, $y > 0$ folgt aus der Bedingung $xy = 10 \cdot (x+y) \quad (1)$, dass $xy = 10 \cdot (x+y) > 10y$, also $x > 10$ gilt; ebenso folgt $y > 10$. Also ist (1) nur erfüllbar, wenn

$$x = 10 + u \qquad , \qquad y = 10 + v \tag{2}$$

mit natürlichen Zahlen $u > 0$, $v > 0$ gilt. Hierfür ist (1) gleichbedeutend mit

$$(10 + u)(10 + v) = 10 \cdot (20 + u + v) \qquad ; \qquad uv = 100$$

Dies gilt genau dann, wenn $(u; v)$ eines der Paare

$$(1; 100), (2; 50), (4; 25), (5; 20), (10; 10), (20; 5), (25; 4), (50; 2), (100; 1)$$

ist; also werden die Bedingungen der Aufgabe genau von den Paaren erfüllt:

$$(11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30), (20; 20), (30; 15), (35; 14), (60; 12), (110; 11)$$

Lösungen der IV. Runde 1993 übernommen von [5]

5.36 XXXIV. Olympiade 1994

5.36.1 I. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340811
Anja, Bernd und Christina haben am gleichen Tag Geburtstag.

An diesem Tag sagt Anja zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie $\frac{2}{3}$ meines Alters."

Bernd sagt zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie die Hälfte meines Alters."

Christina sagt: "Die Summe unserer drei Altersangaben in Jahren ausgedrückt, beträgt 58."

Zeige, dass durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie alt Anja, Bernd und Christina sind! Nenne diese drei Altersangaben!

Aus den Angaben folgt für das Alter a bzw. b bzw. c von Anja bzw. Bernd bzw. Christina:

$$\frac{3}{4}c = \frac{2}{3}a \quad (1) \qquad \frac{3}{4}c = \frac{1}{2}b \quad (2) \qquad a+b+c = 58 \quad (3)$$

Aus (1) folgt $9c = 8a$, also $a = \frac{9}{8}c$ (4), aus (2) folgt $3c = 2b$, also $b = \frac{3}{2}c$. (5)
Damit folgt aus (3)

$$\frac{9}{8}c + \frac{3}{2}c + c = 58 \qquad \Rightarrow \quad c = \frac{58 \cdot 8}{29} = 16$$

und dann nach (4), (5) weiter $a = 18$ und $b = 24$.
Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Anja ist 18 Jahre alt, Bernd ist 24 Jahre alt, Christina ist 16 Jahre alt.

Aufgabe 2 - 340812
Eine dreistellige natürliche Zahl werde genau dann "symmetrisch" genannt, wenn ihre Hunderterziffer gleich ihrer Einerziffer ist.

a) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, in denen nur Ziffern 0, 1, 2 vorkommen (jede eventuell auch mehrfach oder gar nicht)! Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und in denen nur die Ziffern 2, 5, 8 vorkommen! Beweise, dass genau die von Dir angegebenen Zahlen die geforderten sind!

c) Ermittle die Anzahl aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

d) Ermittle die Summe aller dreistelligen symmetrischen Zahlen!

a) 101, 111, 121, 202, 212, 222.

b) I. Wenn eine Zahl die genannten Forderungen erfüllt, so folgt:
Da die Zahl durch 6, also auch durch 2 teilbar ist, ist ihre Einerziffer gerade, also entweder 2 oder 8. Daher können höchstens die Zahlen $222, 252, 282, 828, 858, 888$ (1) die Forderungen erfüllen.

II. Sie erfüllen die Forderungen; denn sie sind gerade, ihre Quersumme beträgt 6, 9, 12, 18, 21, 24, ist also durch 3 teilbar; also sind diese Zahlen durch 3 und damit auch durch 6 teilbar. Nach I. und II. erfüllen genau die Zahlen (1) die Forderungen.

c) Die Hunderter- und Einerziffer einer dreistelligen symmetrischen Zahl ist eine der neun Ziffern 1, 2, ..., 9, die Zehnerziffer ist eine der zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9. Daher beträgt die Anzahl aller dieser Zahlen $9 \cdot 10 = 90$.

d) Jede der Hunderter- und Einerziffern 1, 2, ..., 9 kommt in den soeben aufgezählten Zahlen genau 10 mal vor, jede der Zehnerziffern 0, 1, 2, ..., 9 kommt genau 9 mal vor.
Zur insgesamt gesuchten Summe liefert daher die Summe der Einerziffern den Beitrag

$$10 \cdot (1 + 2 + ... + 9) = 450$$

die Summe der mit 10 multiplizierten Zehnerziffern liefert den Beitrag

$$9 \cdot 10(0 + 1 + 2 + ... + 9) = 4050$$

die Summe der mit 100 multiplizierten Hunderterziffern liefert den Beitrag

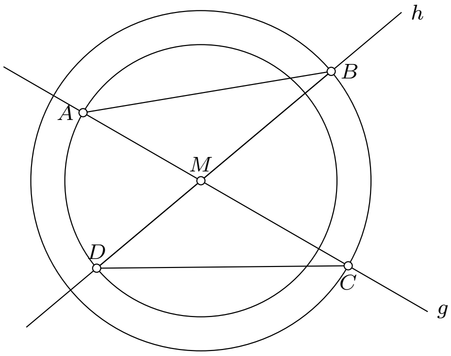
$$10 \cdot 100(1 + 2 + ... + 9) = 45000$$

Also ist die insgesamt gesuchte Summe $450 + 4050 + 45000 = 49500$.

Aufgabe 3 - 340813

Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt M! Zeichne dann zwei Geraden g und h, die durch M gehen! Einen der Schnittpunkte von k_1 mit g bezeichne mit A, einen der Schnittpunkte von k_2 mit h bezeichne mit B! Weiterhin bezeichne mit C denjenigen Schnittpunkt von k_2 mit g, für den M zwischen A und C liegt; und bezeichne mit D denjenigen Schnittpunkt von k_1 mit h, für den M zwischen B und D liegt!

Untersuche, ob für so konstruierte Punkte A, B, C, D stets eine der Aussagen $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt! Wenn das für eine dieser Aussagen der Fall ist, beweise dies!



Die Abbildung zeigt eine Zeichnung der verlangten Art.

Für so konstruierte Punkte A,B,C,D gilt stets $AB = CD$.
Beweis:
Da A und D auf k_1, liegen, gilt $MA = MD$ (1); da B und C auf k_2 liegen, gilt $MB = MC$. (2)
Aus der Lage von M zwischen A und C sowie zwischen B und D folgt, dass $\angle AMB$ und $\angle DMC$ Scheitelwinkel voneinander sind; daher gilt $\angle AMB = \angle DMC$. (3)

Aus (1),(2),(3) folgt $\angle ABC$ nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle AMB \cong \triangle DMC$.
In diesen Dreiecken sind AB und DC einander entsprechende Seiten; damit folgt die Behauptung $AB = CD$.

Aufgabe 4 - 340814

An einer Analog-Uhr (einer Uhr mit Minutenzeiger und Stundenzeiger) kann man den Winkel zwischen den Zeigern so messen, dass man die Gradzahl angibt, um die man den Minutenzeiger im Uhrzeigersinn drehen müsste, bis er den (hierbei unbeweglich gedachten) Stundenzeiger erreicht.
Neben einer solchen Uhr, von der wir voraussetzen, dass sie stets genau geht, denken wir eine Digitaluhr betrachtet, die ebenfalls genau geht, d.h.: Wir setzen voraus, dass sich ihre Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige stets zu Beginn jeder Sekunde auf die richtige Zahlenangabe einstellt.

a) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 9.30 Uhr und 12.30 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog- Uhr genau aufeinander zu liegen kommen?

b) Wie viele Minuten nach 9.30 Uhr bilden die beiden Zeiger der Analog-Uhr erstmals einen ebenso großen Winkel miteinander wie 9.30 Uhr?

Hinweis: Fällt ein Zusammenhang mit den Ergebnissen der Aufgabe a) auf?

c) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 3 Uhr und 6 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog-Uhr einen Winkel von 30° miteinander bilden?

Der Minutenzeiger bewegt sich in jeder Minute um 6 Grad vorwärts, der Stundenzeiger 12 mal so langsam, also in jeder Minute um $\frac{1}{2}$ Grad.

a) Um 9.30 Uhr zeigt der Minutenzeiger auf die "6", der Stundenzeiger auf die Mitte zwischen "9" und "10", also $(3+\frac{1}{2})\cdot 30$ Grad vor dem Minutenzeiger. Liegen die Zeiger nach x Minuten übereinander, so gilt folglich

$$x\cdot 6 = (3+\frac{1}{2})\cdot 30 + x\cdot\frac{1}{2} \qquad \to \qquad x = \frac{19}{11}$$

Da $\frac{1}{11}$ Minute wegen $\frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ dasselbe wie $5\frac{5}{11}$ Sekunden sind, zeigt die Digitaluhr zu dieser Zeit 09 : 49 : 05 Uhr. (1)

II. Vergehen bis zum nächsten Übereinanderliegen u Minuten, in denen der Minutenzeiger eine volle Umdrehung (360°) und zusätzlich denselben Winkel wie der Stundenzeiger zurücklegt, so gilt also

$$u\cdot 6 = 360 + u\cdot\frac{1}{2} \qquad \to \qquad u = 65\frac{5}{11}$$

Somit sind die nächsten gesuchten Zeitpunkte:
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $9.49\frac{1}{11}$ Uhr, d.i. $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, digital 10 : 54 : 32 Uhr, (2)
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, d.i. 12.00 Uhr, digital 12 : 00 : 00 Uhr (3)
Damit sind die gesuchten Anzeigen (1), (2), (3) gefunden.

b) Der Zeitraum von einer Zeigerstellung bis zur nächsten mit gleichem Winkel zwischen den Zeigern ist genau so lang wie der Zeitraum von einer Begegnung bis zur nächsten Begegnung, also $65\frac{5}{11}$ Minuten.

c) Bilden die Zeiger erstmals x Minuten nach 3 Uhr einen Winkel von 30°, so hat sich der Winkel, der um 3 Uhr noch 90° betragen hatte, um 60° verringert, indem nämlich der Minutenzeiger $x\cdot 6$ Grad zurücklegte, der Stundenzeiger aber nur $x\cdot\frac{1}{2}$ Grad. Daher gilt

$$x\cdot 6 = 60 + x\cdot\frac{1}{2} \qquad \to \qquad x = 10\frac{10}{11}$$

Der erste gesuchte Zeitpunkt ist also $3.10\frac{10}{11}$ Uhr, wegen $\frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$ digital 03 : 10 : 54 Uhr.

II. Die nächsten Zeitpunkte sind nach b) jeweils $65\frac{5}{11}$ Minuten später:
digital 04 : 16 : 21 Uhr bzw. 05 : 21 : 49 Uhr.

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen von [5]

5.36.2 II. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340821
Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann "symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, dass jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

(a) Man bestätigt zum Beispiel $3443 : 11 = 313$, $5555 : 11 = 505$, $9009 : 11 = 819$.

(b) Jede vierstellige symmetrische Zahl z ist mit zwei natürlichen Zahlen a, b von der Form

$$1000a + 100b + 10b + a = 11 \cdot (91a + 10b) \qquad (1)$$

also, da $91a + 10b$ eine natürliche Zahl ist, durch 11 teilbar.

(c) In (1) gibt es für die Ziffer a die 9 Möglichkeiten 1, 2, ..., 9 und, unabhängig hiervon, für die Ziffer b die 10 Möglichkeiten 0, 1, 2, ..., 9 . Also gibt es insgesamt $9 \cdot 10 = 90$ vierstellige symmetrische Zahlen.

(d) Da z genau dann gerade ist, wenn die Einerziffer a gerade ist, gibt es nun für a die 4 Möglichkeiten 2, 4, 6, 8. Für b hat man dieselben Möglichkeiten wie in (c). Also gibt es insgesamt $4 \cdot 10 = 40$ geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen.

Aufgabe 2 - 340822
Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, dass jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a = 13$ und $b = 26$ gewählt werden.

Beweise, dass es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, dass alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

I. Wenn die Bedingungen der Aufgabe von zwei natürlichen Zahlen c und d erfüllt werden, so folgt:
Wegen $a = 13$ und $b = 26$ folgt aus $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, dass $\frac{c}{d} = \frac{1}{2}$, also $2 - c = d$ (1) gilt.

Ferner folgt, dass in den Zifferndarstellungen von c und d nur die Ziffern 0, 4, 5, 7, 8, 9 vorkommen, jede insgesamt genau einmal.
Wäre c höchstens zweistellig, also d mindestens vierstellig, so wäre $c \leq 99$, $d \geq 1000$; wäre c mindestens vierstellig, d höchstens zweistellig, so wäre $c \geq 1000$, $d \leq 99$; beides im Widerspruch zu (1).
Also sind c und d beide dreistellig.

Die Hunderterziffer von c ist 4, da sonst d wegen (1) vierstellig wäre. Die Einerziffer von d ist wegen (1) gerade, also entweder 0 oder 8. Wäre sie 8, so müsste c wegen (1) (und da die 4 schon als Hunderterziffer von c vergeben ist) die Einerziffer 9 haben. Damit aber wäre die Hunderterziffer von d weder 8 noch 9, was wegen der Hunderterziffer 4 von c im Widerspruch zu (1) steht.

Daher hat d die Einerziffer 0 und folglich c die Einerziffer 5. Die Zehnerziffer von c ist weder 7 noch 9; denn wegen (1), also $2 \cdot 475 = 950$ bzw. $2 \cdot 495 = 980$, käme die Ziffer 5 bzw. 9 zweimal vor.
Hiernach und wegen (1) verbleibt nur die Möglichkeit $c = 485$, $d = 970$. (2)

II. Diese beiden Zahlen haben die geforderten Ziffern, und sie erfüllen auch (1), also $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau der mit den Zahlen (2) gebildete Bruch $\frac{485}{970}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 3 - 340823

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, dass sie korrekt geht, d.h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

(a) Da beide Zeiger mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten gehen, gilt:
Kommen im Verlauf von 24 Stunden (wobei etwa der Anfang dieser Zeitspanne mit dazugerechnet werde, aber nicht das Ende) die Zeiger genau n mal miteinander zur Deckung, so gibt es in dieser Zeitspanne auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° vor dem Stundenzeiger steht, und auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° hinter dem Stundenzeiger steht.

Diese Zahl n kann man folgendermaßen finden:
In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 vollständige Umläufe, der Stundenzeiger genau einen Umlauf. Also muss es in dieser Zeitspanne genau 11 Zeitpunkte geben, in denen der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt. In 24 Stunden sind es doppelt so viele Zeitpunkte; d.h., es gilt $n = 22$.
Also stehen die Zeiger im Verlauf von 24 Stunden insgesamt 44 mal aufeinander senkrecht.

(b) Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger 20 Teilstriche vor dem Minutenzeiger. Hat sich nach x Minuten dieser Abstand zum ersten Mal um 5 Teilstriche verringert, so deshalb, weil der Minutenzeiger um x Teilstriche vorgerückt ist, der Stundenzeiger aber nur um $\frac{x}{12}$ Teilstriche. Also gilt $x = 5 + \frac{x}{12}$.

Daraus folgt $12x = 60 + x$, $x = 5\frac{5}{11}$; d.h., der erste gesuchte Zeitpunkt ist $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 4 Uhr. Digital wird dieser Zeitpunkt als 04:05:27 angezeigt.

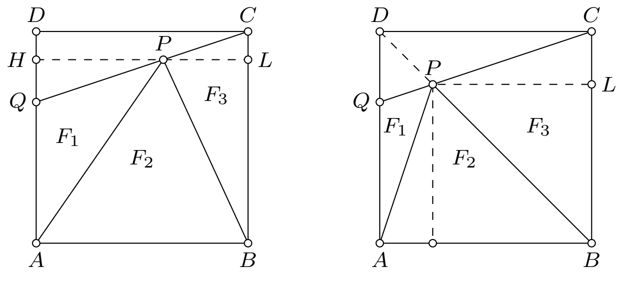
Hat aber y Minuten nach 4 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt, also den ursprünglichen Abstand von 20 Teilstrichen aufgebraucht und steht dann erstmals 15 Teilstriche vor dem Stundenzeiger, so gilt $y = 20 + 15 + \frac{y}{12}$ mit $y = 38\frac{2}{11}$. Für einen zweiten gesuchten Zeitpunkt erhält man die digitale Anzeige 04:38:10.

Aufgabe 4 - 340824
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ} = 4$ cm gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_3 = 7{,}5 cm^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_1 = F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, dass $F_2 = F_3$ gilt!



(a) (Siehe linke Abbildung) Wegen $PL \perp BC$ ist $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$, also $PL = 2F_3 : BC = 2{,}5$ cm.
Verlängert man LP über P hinaus bis zum Schnitt H mit AD, so ist $ABLH$ ein Rechteck, also gilt $LH = 6$ cm , $PH = 3{,}5$ cm; ferner ist PH die auf AQ senkrechte Höhe des Dreiecks APQ, also gilt

$F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH = 7\ \text{cm}^2$.

(b) Wegen $F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH$, $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$ (1) und $\frac{1}{2}AQ = 2$ cm, $\frac{1}{2}BC = 3$ cm sowie der Voraussetzung $F_1 = F_3$, gilt $2 \cdot PH = 3 \cdot PL$, also $PH = \frac{3}{2}PL$.
Hieraus und aus $PH + PL = 6$ cm folgt $(\frac{3}{2} + 1) \cdot PL = 6$ cm, also $PL = 6 : \frac{5}{3} = 2{,}4$ cm.

Nach (1) und (2) ist dann $F_3 = 7{,}2\ \text{cm}^2$, also auch $F_1 = 7{,}2\ \text{cm}^2$. Ferner hat das Dreieck CDQ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}CD \cdot DQ = 6\ \text{cm}^2$. Damit erhält man $F_2 = (36 - 2 \cdot 7{,}2 - 6) = 15{,}6\ \text{cm}^2$.

(c) Die Bedingung $F_2 = F_3$ wird wegen $AB = BC$ dann erfüllt, wenn die Dreiecke ABP und BCP in den Längen der auf AB bzw. BC senkrechten Höhen übereinstimmen, d.h. wenn P auf der Winkelhalbierenden des von AB und BC gebildeten Winkels liegt. Das ist die Diagonale BD.
Damit ist begründet: Die geforderte Bedingung wird erfüllt, wenn man P als Schnittpunkt der Strecken CQ und BD konstruiert (siehe rechte Abbildung).

Lösungen der II. Runde 1994 übernommen von [5]

5.36.3 III. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340831
Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Die Ziffern auf den von Anna gewählten Kärtchen seien so mit a, b, c bezeichnet, dass $a > b > c$ gilt. Dann hat Anna die Zahlen $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$ gelegt. Daher gilt Annas Aussage genau dann, wenn diese Ziffern die Gleichung

$$200a + 11 \cdot (b + c) = 1233 \qquad (1)$$

erfüllen.
I. Wenn (1) erfüllt wird, so folgt: Wegen $0 \leq < b \leq 8$ ist $1 \leq b + c \leq 15$, also

$$11 \leq 11 \cdot (b + c) \leq 165 \qquad ; \qquad 1233 - 165 \leq 1233 - 11 \cdot (b + c) \leq 1233 - 11$$

Aus (1) folgt daher $1068 \leq 200a \leq 1222$, wegen $1068 : 200 > 5$ und $1222 : 200 < 7$ also $a = 6$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $11 \cdot (b + c) = 1233 - 1200$, also $b + c = 3$.
Dies kann von den Ziffern b, c mit $b > c$ nur dadurch erfüllt werden, dass entweder $b = 3$, $c = 0$ oder $b = 2$, $c = 1$ (3) gilt.

II. Bei beiden in (2), (3) genannten Möglichkeiten für a, b, c wird (1) erfüllt.
Mit I. und II. ist gezeigt: Es gibt genau die beiden Möglichkeiten, dass Anna entweder die beiden Zahlen 630, 603 oder die beiden Zahlen 621, 612 gelegt hat.

Aufgabe 2 - 340832
Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: "Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften."

Michael meint: "Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften."

Jörg meint: "Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft."

Zeige, dass alle drei Meinungen falsch sind!

Sind genau x Schüler in allen drei Arbeitsgemeinschaften, genau y Schüler in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften und genau z Schüler in genau je einer Arbeitsgemeinschaft, so gilt:
Die Anzahl aller Meldungen auf die Fragen des Lehrers ist $3x + 2y + z$; daher gilt

$$3x + 2y + z = 10 + 8 + 7 = 25 \qquad (1)$$

Die Anzahl aller Schüler der Klasse ist $x + y + z + 6$; daher gilt

$$x + y + z = 26 - 6 = 20 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (2) von (1), so folgt $2x + y = 5$. Diese Gleichung hat in natürlichen Zahlen x, y nur die im folgenden angegebenen Lösungen, zu denen nach (2) nur die dazu

x	0	1	2
y	5	3	1
z	15	16	17

In keiner dieser Lösungen ist $x = 3$, also kann Uwes Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $y = 2$, also kann Michaels Meinung nicht zutreffen;
In keiner dieser Lösungen ist $z = 14$, also kann Jörgs Meinung nicht zutreffen.

Aufgabe 3 - 340833
Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1 \text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11 \text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

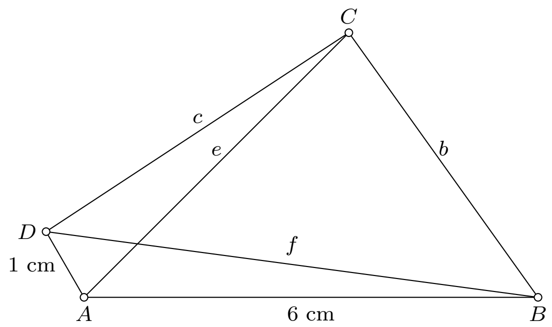
(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \leq y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, dass sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Für je vier Punkte A, B, C, D, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, gilt mit den Bezeichnungen b, c, e, f für die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen BC, CD, AC bzw. BD (siehe Abbildung)



Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABD ist $5 \leq f \leq 7$ (1,1')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABC ist $6 - e \leq b \leq 6 + e$ (2,2')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ACD ist $c - 1 \leq e \leq c + 1$ (3,3')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck BCD ist $b - c \leq f \leq b + c$ (2,2')

Aus (1',1) und der Voraussetzung $AC + BD = 11$ cm, d.h. $e + f = 11$, (5) folgt $4 < e < 6$. (6,6')
Aus (2) und (3') folgt $5 \leq b + c$, aus (2'), (3) und (6') folgt $b + c \leq 2e + 7 \leq 19$. (7)
Die somit gefundenen Ungleichungen $5 \leq b + c \leq 19$ besagen wegen $AB = 6$ cm, $AD = 1$ cm: Für je vier Punkte A, B, C, D, die die Voraussetzungen (*) erfüllen, gilt

$$12cm \leq AB + BC + CD + DA \leq 26cm$$

Wenn speziell 12 cm $= AB + BC + CD + DA$, also $b + c = 5$ gilt, so folgt nach (4'): Es gilt $f \leq 5$, nach (5) also $e \geq 6$. Zusammen mit (6') und nochmals (5) besagt dies $e = 6$, $f = 5$.
Damit hat man aus $AB = 6$ cm , $AD = 1$ cm, $f = 5$ bzw. aus $b + c = f$ die Schlussfolgerungen, dass D auf der Strecke AB, C auf der Strecke BD liegen muss.

Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden; es folgt sogar $B = C$.

Wenn aber speziell $AB + BC + CD + DA = 26$ cm, also $b + c = 19$ gilt, so folgt aus (7), dass $b + c = 2e + 7 = 19$, also $e = 6$ gilt. Nach (5) folgt $f = 5$.
Aus (4) erhält man damit $2b \leq b + c + f = 19 + 5$, also $b \leq 12$; aus (3) erhält man $b + c \leq b + e + 1$, also $19 \leq b + 7$, $12 < b$. Es folgt $b = 12$ und $c = 7$.

Damit hat man aus $AB = 6$ cm, $b = 12$, $e = 6$ bzw. aus $b = 12$, $c = 7$, $f = 5$ die Schlussfolgerungen, dass A auf der Strecke BC, D auf der Strecke BC liegen muss.
Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Die Bedingungen (1), (2) und (3) werden also von den Längen $x = 12$ cm und $y = 26$ cm erfüllt.

Aufgabe 4 - 340834
Ein Schachturnier wurde in "Runden" ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, dass in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und dass im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mussten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, dass daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: "Diese Anzahl ist nicht möglich." Gerd entgegnet: "Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben."

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Haben an dem Turnier außer Michael und Robert noch genau $2x$ Spieler teilgenommen, so hat von diesen jeder gegen jeden anderen genau eine Partie gespielt; das waren insgesamt

$$\frac{1}{2} \cdot 2x(2x-1) = x \cdot (2x-1)$$

Partien.
Wenn Michael und Robert in dem Turnier nicht gegeneinander gespielt haben, so haben sie in jeder der ersten 5 Runden zwei Partien gespielt. Dass zusammen mit diesen 10 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x-1) + 10 = 38$$

Partien gespielt wurden, ist möglich; denn diese Gleichung hat (wie die Probe zeigt) die Lösung $x = 4$. Also trifft Herberts Meinung nicht zu.

Ferner gilt: Hätten Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt, so hätten sie nur in 4 Runden je zwei Partien gespielt, in einer Runde dagegen nur die eine Partie gegeneinander. Dann wären, wenn die Gesamtzahl 38 der Partien die richtige ist, zusammen mit diesen 9 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x-1) + 9 = 38$$

Partien gespielt worden. Diese Gleichung hat aber keine natürliche Zahl x als Lösung, wie z.B. daraus folgt, dass für alle natürlichen Zahlen $x \leq 4$ sich $x(2x-1) + 9 \leq 4 \cdot 7 + 9 = 37$ ergibt, für alle $x > 5$ dagegen $x \cdot (2x-1) + 9 \geq 5 \cdot 9 + 9 = 54$.

Also scheidet die Möglichkeit aus, dass Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben könnten; d.h., aus den Angaben geht eindeutig hervor: Sie haben nicht gegeneinander gespielt; Gerts Meinung trifft zu.

Aufgabe 5 - 340835
Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, dass $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, dass $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, dass $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

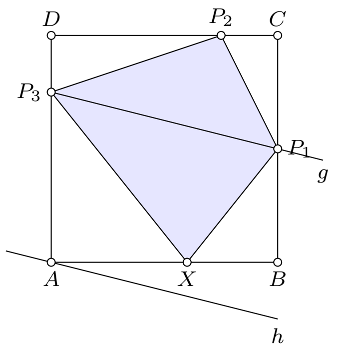
Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, dass es "zum Dreieck entartet", wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.



Das Viereck $XP_1P_2P_3$ setzt sich zusammen aus dem Dreieck XP_1P_3 und dem Dreieck $P_1P_2P_3$ bzw. es ist in den Fällen $X = P_1, X = P_3$ gleich dem letztgenannten Dreieck.
Daher ist sein Flächeninhalt genau in diesen beiden Fällen möglichst klein; und möglichst groß ist er genau dann, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks XP_1P_3 möglichst groß ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn der Abstand des Punktes X von der durch P_1 und P_3, gelegten Geraden g möglichst groß ist. Dies gilt genau für $X = A$.

Beweis (siehe Abbildung):
Die Parallele h durch A zu g hat wegen $P_3A > P_1B$ mit dem Quadrat $ABCD$, also auch mit dem gesamten Weg des Punktes X nur den Punkt A gemeinsam. Alle Punkte dieses Weges außer A liegen folglich in dem von g und h eingeschlossenen Parallelstreifen, näher an g als der Punkt A. Damit sind die in (a) und (b) gesuchten Punkte X gefunden.

Wegen $CD = a$ und $P_1C = \frac{1}{2}a$, $P_3D = \frac{1}{4}a$ hat das Trapez P_1CDP_3 den Flächeninhalt

$$F(P_1CDP_3) = a \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{8}a^2$$

da außerdem $P_2C = \frac{1}{4}a$ und $P_2D = \frac{3}{4}a$ gilt, ist weiter

$$F(P_1CP_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{16}a^2$$
$$F(P_2DP_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{3}{32}a^2$$

für die zu (a) gefundenen Punkte $X = P_1$ und $X = P_3$ ergibt sich damit als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$

$$F(P_1P_2P_3) = F(P_1CDP_3) - F(P_1CP_2) - F(P_2DP_3) = \frac{7}{32}a^2$$

Mit $AB = a$ und $BP_1 = \frac{1}{2}a$ erhält man $F(ABP_1) = \frac{1}{4}a^2$ und damit für den zu (b) gefundenen Punkt $X = A$ als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$:

$$F(P_1P_2P_3) = F(ABCD) - F(P_1CP_2) - F(P_2DP_3) - F(ABP_1) = \frac{19}{32}a^2$$

Aufgabe 6 - 340836

a) Beweise, dass für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, dass für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

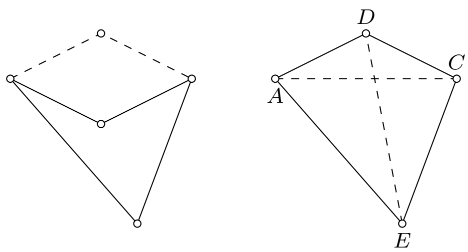
Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

$$\frac{(a+c) \cdot (b+d)}{4}.$$

Hinweis: Beachte, dass die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte "überschlagene" Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)

(a) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; die auf BC senkrechte Höhe habe den Fußpunkt D. Für $a = BC$, $b = AC$, $h = AD$ und den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt dann:
Ist $D = C$, so ist $h = b$; ist aber $D \neq C$ so ist ACD ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei D, also gilt dann $h < b$ (siehe Abbildung).
Damit folgt in jedem Fall $F = \frac{a \cdot h}{2} \leq \frac{a \cdot b}{2}$, w.z.b.w.

(b) Zu jedem Viereck mit einer einspringenden Ecke gibt es ein Viereck ohne einspringende Ecken, das dieselben Seitenlängen wie das ursprüngliche Viereck hat (siehe Abbildung); es hat größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche.



Daher genügt es, zum Beweis ein Viereck $ABCD$ ohne einspringende Ecken vorauszusetzen. Für den Flächeninhalt F des Vierecks $ABCD$ und die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB gilt $F = F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ sowie nach (a)

$$F_1 \leq \frac{ab}{2} \quad , \quad F_2 \leq \frac{bc}{2} \quad , \quad F_3 \leq \frac{cd}{2} \quad , \quad F_4 \leq \frac{da}{2}$$

Daraus folgt

$$2F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \geq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{da}{2}$$

also

$$F \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

w.z.b.w.

Lösungen der III. Runde 1994 übernommen von [5]

5.36.4 IV. Runde 1994, Klasse 8

Aufgabe 1 - 340841 = 340941
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$a1$	$b2$	$c3$	$d4$
$b3$	$a4$	$d1$	$c2$
$c4$	$d3$	$a2$	$b1$
$d2$	$c1$	$b4$	$a3$

Aufgabe 2 - 340842
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1) und (2) genügt, so folgt:
Nach (1) gibt es Primzahlen p, q, r mit $p > 10$, $q > 10$, $r > 10$, $p \neq q$, $p \neq r$, $q \neq r$ und $n = p \cdot q \cdot r$. Alle Darstellungen von n als Produkt zweier natürlicher Zahlen sind daher

$$n = 1 \cdot pqr = p \cdot qr = q \cdot pr = r \cdot pq$$

Nach (2) ist folglich eine der Zahlen $1 + pqr$, $p + qr$, $q + pr$, $r + pq$ gleich 600, eine andere gleich 240.

Sowohl 599 als auch 239 sind Primzahlen. Dies folgt wegen $25^2 > 599$ bzw. $16^2 > 239$ daraus, dass 599 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar ist bzw. 239 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13.
Damit scheidet sowohl das Vorliegen von $1 + pqr = 600$ als auch das von $1 + pqr = 240$ aus.

Also kann die Reihenfolge der Bezeichnungen p, q, r so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$p + qr = 600 \qquad , \qquad q + pr = 240 \tag{3}$$

gelten.
Daher gilt $pr < 240$, wegen der Voraussetzung $p \geq 11$ also $r < \frac{240}{11} < 22$ und wegen der Voraussetzung $r \geq 11$ ebenso $p < 22$. Folglich kommen für p und r nur die Primzahlen $11, 13, 17, 19$ in Frage.
Somit ist die Zahl $qr = 600 - p$ eine der Zahlen 589, 587, 583, 581. Von ihnen sind aber nur $589 = 19 \cdot 31$ und $583 = 11 \cdot 53$ das Produkt zweier Primzahlen größer als 10, während dies für die Primzahl 587 und für $581 = 7 \cdot 83$ nicht zutrifft.

Damit verbleiben nur die Möglichkeiten, dass

entweder $r = 19$, $q = 31$, $p = 600 - 589 = 11$, $n = 11 \cdot 31 \cdot 19 = 6479$
oder $r = 11$, $q = 53$, $p = 600 - 583 = 17$, $n = 17 \cdot 53 \cdot 11 = 9911$
gilt.

II. Für jede dieser beiden Zahlen n zeigt die angegebene Zerlegung, dass (1) erfüllt ist. Ferner zeigen die Proben, dass auch (2) erfüllt ist.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die beiden Zahlen $n = 6479$ und $n = 9911$ den Bedingungen (1) und (2) genügen.

Aufgabe 3 - 340843
Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

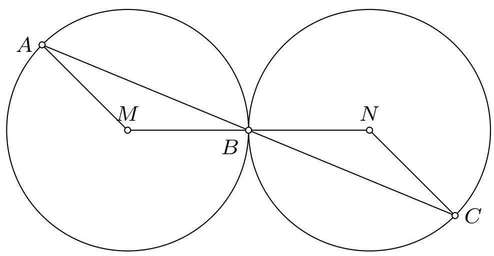
Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!



(a) Bei den folgenden Lagemöglichkeiten für A, B, C (mit $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$) gibt es keine Kreise der genannten Art:

(a1) Der Punkt B liegt auf einer Verlängerung der Strecke AC.
(a2) Der Punkt B liegt auf der Strecke AC, ist aber nicht ihr Mittelpunkt.

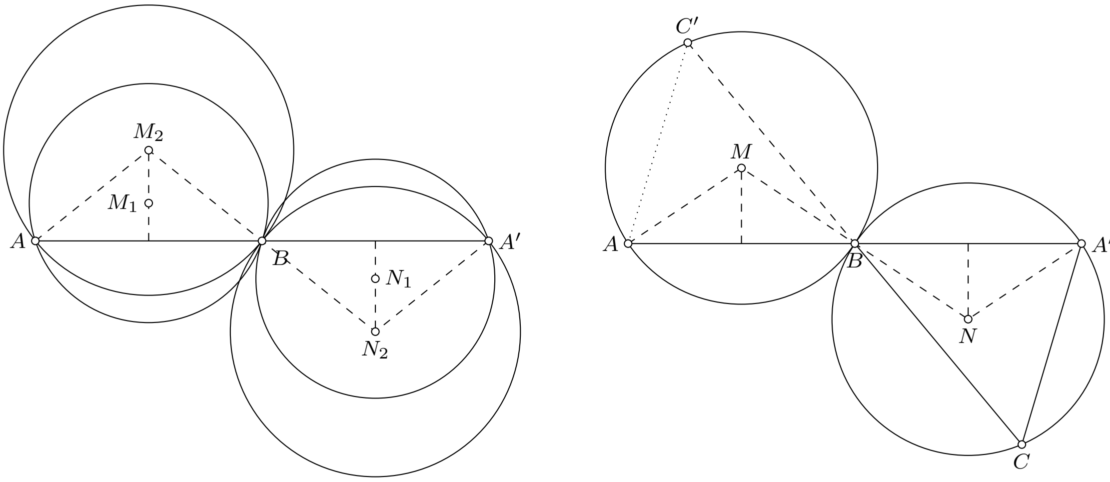
Berühren sich nämlich zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, so muss dies eine Berührung von außen sein.
Für jede Gerade durch den Berührungspunkt B, die die Kreise in je einem von B verschiedenen Punkt A bzw. C schneidet (siehe Abbildung), gilt aber:

B liegt zwischen A und C; also kann nicht (a1) vorliegen. Ferner gilt für jede solche Gerade: Sind M bzw. N die Mittelpunkte der beiden Kreise, so liegt B auf der Strecke MN, daher gilt $\angle ABM = \angle CBN$ (Scheitelwinkel), wegen $\angle ABM = \angle BAM$, $\angle CBN = \angle BCN$ (Basiswinkel) und $MB = NB$ nach Kongruenzsatz sww also $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, $AB = CB$, somit kann auch (a2) nicht vorliegen.

(b) Mehr als ein Paar von Kreisen der genannten Art gibt es, wenn B der Mittelpunkt der Strecke AC ist. Man erhält solche Kreise durch folgende Konstruktion:

Auf der Mittelsenkrechten von AB wählt man einen beliebigen Punkt M und bringt die Gerade durch M und B zum Schnitt N mit der Mittelsenkrechten von BC. Die Kreise um M und um N durch B gehen dann nämlich wegen $MA = MB$ und $NC = NB$ auch durch A bzw. C; sie berühren sich in B, da B auf MN liegt. Schließlich sind diese Kreise auch einander gleichgroß; denn wegen der Voraussetzung $AB = CB$ und wegen $\angle BAM = \angle ABM = \angle CBN = \angle BCN$ gilt $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, also $MB = NB$.

Die Abbildung zeigt zwei Kreispaare, die nach dieser Beschreibung bei den Wahlen $M = M_1$ und $M = M_2$ erhalten werden.



(c) Genau ein Kreispaar der genannten Art gibt es, wenn A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Man erhält es durch folgende Konstruktion (siehe dritte Abbildung):
Man verlängert die Strecken AB und CB jeweils über B hinaus um ihre eigene Länge bis A' bzw. C' und konstruiert die Umkreise der Dreiecke ABC' und $A'BC$ (die Umkreismittelpunkte M bzw. N sind in bekannter Weise als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten zu erhalten).

Diese Kreise haben die geforderten Eigenschaften; denn nach Konstruktion wird $\triangle ABC' \cong \triangle A'BC$, also sind die Umkreise einander gleichgroß.
Daher ist auch $\triangle ABM \cong \triangle A'BN$ (Kongruenzsatz sss), also sind die Winkel $\angle ABM$, $\angle A'BN$ einander gleichgroß und folglich Scheitelwinkel; d.h., B liegt auf MN, die Kreise berühren sich in B.

Dass dieses Kreispaar das einzige mit den geforderten Eigenschaften ist, kann so gezeigt werden:
Wenn vorausgesetzt wird, dass zwei Kreise diese Eigenschaften haben, so folgt wie in (a), aber mit A, B, A' und nochmals mit C, B, C' statt der dortigen A, B, C, dass die Kreise auch durch die hier konstruierten Punkte A' bzw. C' gehen.

Aufgabe 4 - 340844 = 340944
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	Ass
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: Ass offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

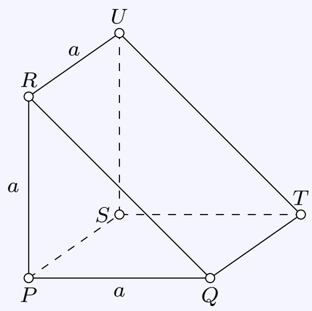
Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um

$1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel offen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

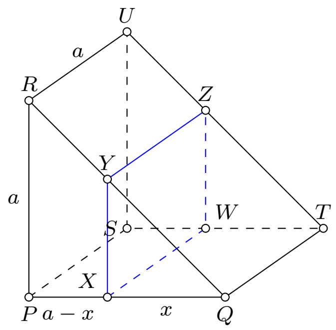
Aufgabe 5 - 340845



Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!



Für jede Ebene E, die (o.B.d.A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSUR$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWJZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen, beide mit der Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY.

Wegen $\angle XQY = \angle PQR = 45°$ und $XY \parallel PR$, also $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ (Stufenwinkel) ist auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.
Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = x$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$; somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $16a12 = 25x^2$ bzw. $25x^2 = 9a^2$ und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit $x = \frac{4}{5}a$ bzw. $x = \frac{3}{5}a$.
Also haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}x$$

die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 6 - 340846 = 340946
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?

Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a + b < 100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a = b = 0$.
Für $a = 0$, $b \neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b = 1$ bis $b = 99$. Analog gibt es für $a \neq 0$, $b = 0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a > 0$ und $b > 0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen $1,2,\ldots,99 - a$, also $99 - a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b \neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x - 30 = \pm a$ und unabhängig davon $y - 10 = \pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x - 30 = 0$ bzw. $y - 10 = 0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a = b = 0$, so erhält man genau $1 \cdot 1 = 1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99 \cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99 \cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

Lösungen der IV. Runde 1994 übernommen aus [5]

6 Klassenstufe 9

6.1 Vorolympiade 1960

6.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 9

Aufgabe 1 - V00901
Die Summe zweier Zahlen beträgt 20, die Summe ihrer Quadrate 202. Löse die Aufgabe rechnerisch.

x und y seien die zwei gesuchten Zahlen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$x + y = 20 \quad (1) \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = 202 \qquad (2)$$

Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt

$$x^2 + (20 - x)^2 = 202 \Rightarrow 2x^2 - 40x + 198 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 99 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung $x_1 = 9$ und $x_2 = 11$ mit $y_1 = 11$ und $y_2 = 9$.
Die gesuchten Zahlen sind 9 und 11. Sie erfüllen die Bedingungen der Aufgabenstellung, wie die Probe bestätigt.

Aufgabe 2 - V00902
Wie kommt es zu der Formel?

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel der Normalform der quadratischen Gleichung mit den Parametern p und q:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + px + q \\
0 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\
x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\
x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 - V00903
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

x sei die Länge der Lotosblume. Dann gilt $x^2 = (x - 4)^2 + 16^2$ mit $x = 34$. Da die Lotosblume 4 m aus dem Teich hervorragt, ist der Teich 30 m tief.

Aufgabe 4 - V00904
Für eine Reihe technischer Anwendungen, z.B. für des Rechnen mit elektronischen Rechenmaschinen, ist es erforderlich, die Zahlen im Zweiersystem (Dualsystem), also als Summe von Potenzen der Zahl 2, auszudrücken. Drücken Sie die Zahl 413 im Dualsystem aus!
Verwenden Sie folgende Anleitung!

$$\begin{array}{cccccccccc}
270 = & 1 \cdot 2^8 & +0 \cdot 2^7 & +0 \cdot 2^6 & +0 \cdot 2^5 & +0 \cdot 2^4 & +1 \cdot 2^3 & +1 \cdot 2^2 & +1 \cdot 2^1 & +0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & 0
\end{array}$$

Lösung: $413 = [110011101]_2$

Aufgabe 5 - V00905
An einem Stromkreis liegt eine Spannung von 120 V. Wird der Widerstand um 10 Ohm vergrößert, sinkt die Stromstärke um 1 Ampere.
Wie groß sind Stromstärke und Widerstand?

Es sei x der Werte Stromstärke I und y der Wert des Widerstandes. Dann wird mit der Gleichung zum Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$

$$xy = 120 \qquad \text{(I)}$$
$$(y+10)(x-1) = 120 \qquad \text{(2)}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = 4$ und $y = 30$, d. h. die Stromstärke beträgt 4 Ampere und der Widerstand 30 Ohm.

Aufgabe 6 - V00906
Wie tief taucht ein Würfel (a = 30 mm) aus Eisen (γ_{Fe} = 7,5 p·cm^{-3}) in Quecksilber (γ_{Hg} = 13,6 p·cm^{-3}) ein?

Es gilt für die Eintauchtiefe h des Körpers

$$\gamma_1 : \gamma_2 = h_{\text{Eintauchtiefe}} : h_{\text{Körper}}$$

Einsetzen der Werte ergibt $h_{\text{Eintauchtiefe}} \approx 16{,}54$, d. h. der Würfel taucht etwa 165 mm ein.

Aufgabe 7 - V00907
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Subtrahiert man von dieser Zahl die Zahl, die dieselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge enthält, so erhält man 54. Wie heißt die Zahl?

Die gesuchte Zahl z sei $z = 10a + b$. Dann wird für die Ziffern a und b

$$a + 5 = 12 \qquad \text{(I)}$$
$$(10a+5) - (10b+a) = 54 \qquad \text{(II)}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = 9$ und $b = 3$. Da $93 - 39 = 54$ die Probe besteht, ist 93 die gesuchte Zahl.

Aufgabe 8 - V00908
Zu entziffern ist:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}$$

Gleiche Buchstaben stellen gleiche Ziffern dar.

Die Gleichung wird, da $c > 0$ sein muss, zu

$$(10a + c) \cdot a \cdot c = 100c + 10c + c$$
$$(10a + c) \cdot a = 111 = 3 \cdot 37$$

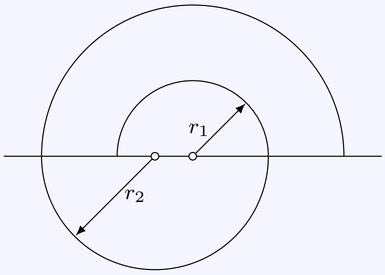
Da $a < 10$ ist, muss somit $a = 3$ sein. Damit ergibt sich $c = 7$. Es ergibt sich somit $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

Aufgabe 9 - V00909
Wie viel verschiedene Würfe lassen sich mit
a) zwei Würfeln,
b) drei Würfeln
machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der zwei bzw. drei Würfel bei einem Wurf andere Augenzahl zeigt, als beim anderen Wurf?
Wie wurde die Lösung gefunden?

Zeigt der 1. Würfel eine „1“, so kann der zweite 6 Werte anzeigen, zeigt der 1. Würfel eine „2“ verbleiben für den zweiten noch 5 Werte, usw. Damit gibt es bei 2 Würfeln genau 21 verschieden Würfe.
Bei drei Würfeln ergeben sich analog 56 verschiedene Würfe.

Aufgabe 10 - V00910

Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?



a) Es wird $r_{10} = 1 + 9 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$. Der 10.Radius ist 5,5 cm groß.

b) $(r_1 + r_2 + ... + r_{10}) \cdot \pi \approx 102{,}1$ cm.

Aufgabe 11 - V00911
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a?
Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Die Kugel ist für den Würfel die sogenannte Umkugel, bei der die Würfelpunkte auf der Kugel liegen. Damit ist der Radius r_u gleich der halben Länge der Raumdiagonale des Würfels, d. h.

$$\frac{\sqrt{3a^2}}{2} = r_u = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

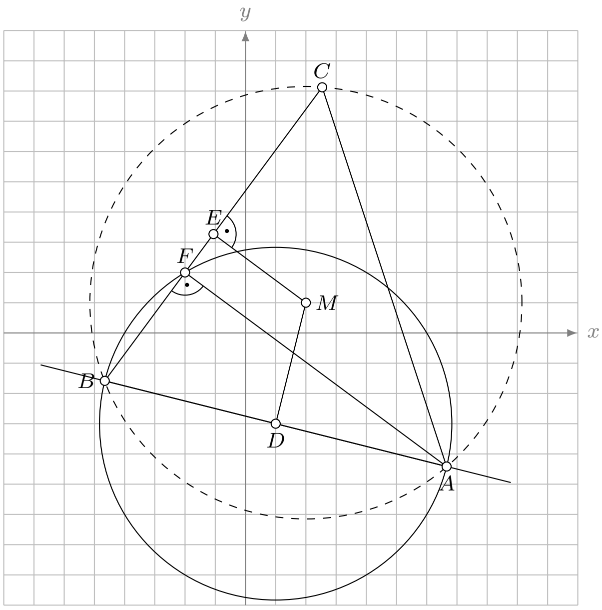
Der Durchmesser der Inkugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels, d. h.

$$r_i = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Aufgabe 12 - V00912
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2; +2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1; -3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2; +1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm $\cong$ 1 Einheit im Koordinatensystem)

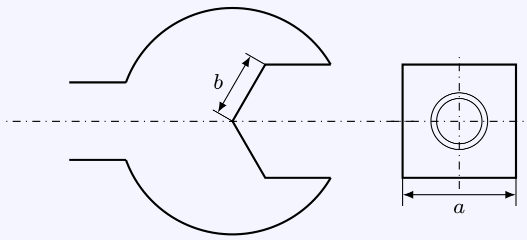
Konstruktion:
(1) Zeichne die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein.
(2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem Thaleskreis über AB, d. h. einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich DF. Zeichne diesen Kreis.
(3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von AB. Zeichne DM und konstruiere dazu eine Senkrechte s.
(4) Diese Senkrechte s schneidet den Thaleskreis über AB in den Punkten A und B. Konstruiere A und B.
(5) Verbinde A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruiere zu AF eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke BC. Da M auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, erhält man den Mittelpunkt E der Strecke BC indem man das Lot von M auf die Senkrechte durch F fällt. Der Lotfußpunkt ist E.
(6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E.

Dreiecksseiten: $c = 11{,}7$ cm, $a = 12{,}3$ cm, $b = 13{,}3$ cm.



Aufgabe 13 - V00913

Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?



b ist die Länge der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich a ist und dessen Basiswinkel 30° sind (Sechseck!). Damit wird

$$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{a}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$$

Aufgaben 1 bis 13 gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 14 - V00914
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Die kleinste Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$ch = ab \qquad ; \qquad h = \frac{ab}{c}$$

Für den Inkreisradius gilt

$$(a+b+c)r = ab \qquad ; \qquad r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Wir untersuchen zunächst die „rechte“ Ungleichung der Aufgabenstellung. Es soll gelten:

$$\frac{c}{a+b+c} < \tfrac{1}{2}; \qquad c < \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c; \qquad 2c < a+b+c; \qquad c < a+b$$

Dies ist die Dreiecksungleichung, womit diese Ungleichung erfüllt ist. Die „linke" Ungleichung lautet:

$$\tfrac{2}{5} < \frac{c}{a+b+c}$$

$$\tfrac{2}{5}(a+b) < \tfrac{3}{5}c$$

$$2(a+b) < 3\sqrt{a^2+b^2}$$

Beide Seiten quadrieren:

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 < 9a^2 + 9b^2$$

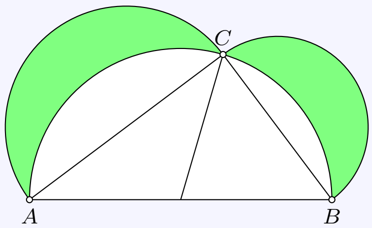
$$0 < 5a^2 - 8ab + 5b^2$$

$$0 < a^2 + 4(a-b)^2 + b^2$$

Da rechts nur positive Terme stehen, ist auch diese Ungleichung immer gültig. q. e. d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 15 - V00915



Beweisen Sie folgenden Satz:
„Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC." (Hippokrates, 440 v. u. Z. in Athen).

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

A_{Dreieck} : Flächeninhalt des Dreiecks ABC,
$A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}}$: Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete $b = \left|\overline{AC}\right|$,
$A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}}$: Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete $a = \left|\overline{BC}\right|$,
$A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}}$: Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse $c = \left|\overline{AB}\right|$,
$A_{\text{grün}}$: Flächeninhalt der grün markierten Mondsichel.

Es gilt

$$A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} + A_{\text{grün}}. \tag{1}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und somit

$$A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}}.$$

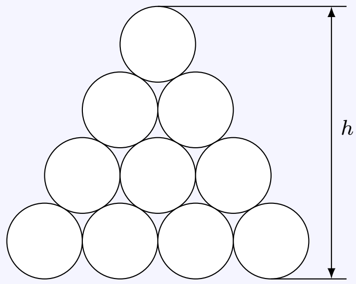
Damit folgt aus (1)

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{grün}},$$

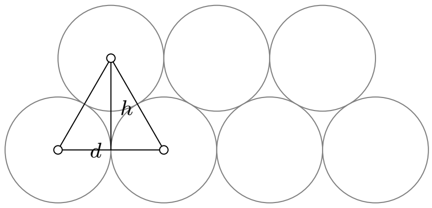
was die Behauptung beweist.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 16 - V00916



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?



Die Mittelpunkte der Grundkreise der untersten Lage liegen $\frac{d}{2}$ über der Grundfläche. Die zweite Lage Kreise befinden sich $\frac{d}{2} + h$ über dem Boden, wobei die Höhe h die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge d ist. Damit ergibt sich für die Gesamthöhe

$$\frac{d}{2} + 3 \cdot h + \frac{d}{2} = d + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 187 \text{ cm}$$

Allgemein gilt für n Schichten Fässer mit einem Durchmesser d für die Gesamthöhe H

$$H = d + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot d \cdot \sqrt{3}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 17 - V00917

In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

Es seien $d_a = 32$ mm, $d_i = 29$ mm, $l = 3$ m die Maße der ursprünglichen Rohre und $d'_a = 27$ mm, $d'_i = 25$ mm, $l' = x$ m der gezogenen Rohre. Da das Volumen der Rohre konstant bleibt, gilt

$$\left(\frac{\pi}{4} d_a^2 - \frac{\pi}{4} d_i^2\right) \cdot l = V = \left(\frac{\pi}{4} {d'}_a^2 - \frac{\pi}{4} {d'}_i^2\right) \cdot x$$
$$(d_a^2 - d_i^2) \cdot l = ({d'}_a^2 - {d'}_i^2) \cdot x$$
$$x = \frac{d_a^2 - d_i^2}{{d'}_a^2 - {d'}_i^2} \cdot l$$

Einsetzen der Werte ergibt $x \approx 5{,}28$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

6.2 Vorolympiade 1961

6.2.1 I. Runde V1961, Klasse 9

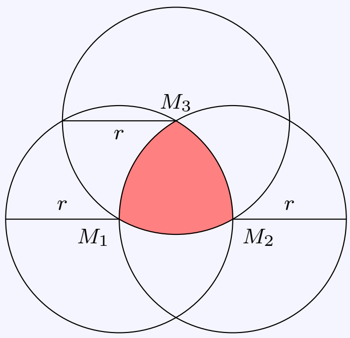
Aufgabe 1 - V10911
Das neue Turboprop-Flugzeug der Deutschen Lufthansa vom Typ IL 18 fliegt um 8.05 Uhr in Berlin-Schönefeld ab und landet um 13.00 Uhr in Moskau. Der Rückflug beginnt um 14.55 Uhr und endet am 16.10 Uhr (beachte: 12.00 Uhr Mitteleuropäische Zeit entspricht 14.00 Uhr Moskauer Zeit).
a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht die IL 18 auf dem Hin- bzw. Rückflug?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche Windgeschwindigkeit, wenn man annimmt, dass das Flugzeug auf dem Hinflug mit dem Winde, auf dem Rückflug aber gegen den Wind flog?
Die Flugstrecke beträgt 1630 km.

Berechnung der Flugzeiten: $2\frac{11}{12}$ bzw. $2\frac{1}{4}$ h.
Berechnung der Fluggeschwindigkeiten: 559 bzw. 502 km$\cdot$h^{-1}.
Die Windgeschwindigkeit beträgt damit rund 28,5 km$\cdot$h^{-1}.

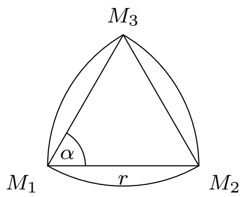
Aufgabe 2 - V10912
Wie viel zueinander verschiedene Stellungen können ein weißer und ein schwarzer Stein auf einem Schachbrett (64 Felder) einnehmen?

Zu jeder Stellung des schwarzen Steines gibt es 63 Möglichkeiten für die Stellung des weißen Steines. Der schwarze Stein kann 64 verschiedene Felder besetzen. Mithin gibt es $63 \cdot 64 = 4032$ zueinander verschiedene Stellungen.

Aufgabe 3 - V10913

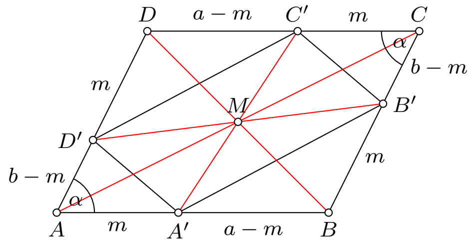


Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p$\cdot$cm^{-3}.



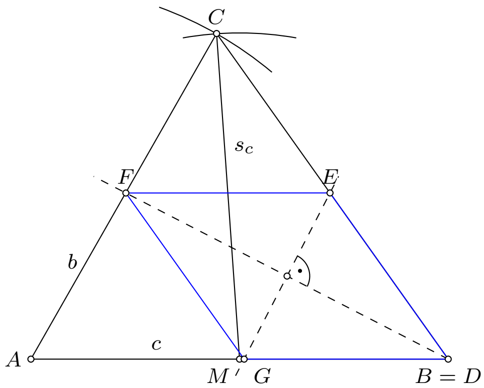
$$F = F_{\triangle M_1 M_2 M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0{,}845 cm^3$$
$$G \approx 6{,}6 p$$

Aufgabe 4 - V10914
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!



$A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm $ABCD$ bezüglich des Mittelpunktes M und die Konstruktion der Punkte A',B',C' und D' sind die Dreiecke $AA'D'$ und $B'CC'$ sowie $A'BB'$ und $C'DD'$ paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf M.
Damit sind $A'D'$ und $B'C'$ sowie $A'B'$ und $C'D'$ jeweils gleichlang und zueinander parallel. $A'B'C'D'$ ist somit ein Parallelogramm.

Aufgabe 5 - V10915
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)



Konstruktion des Dreiecks ABC:
(1) Zeichne die Strecke $AB = c$. Konstruiere den Mittelpunkt M von AB.
(2) Zeichne einen Kreisbogen um M mit dem Radius s_c. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius b. Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt C. Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von AB) erzeugt ein kongruentes Dreieck ABC_2.

Konstruktion des Rhombus $DEFG$:
(1) Der D gegenüberliegende Punkt F muss auf der Winkelhalbierenden von β liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit AC ist der Punkt F.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt von DF und errichte in ihm die Senkrechte zu DF. Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten BC und AC sind die gesuchten Punkte E und G. $DEFG$ ist der gesuchte Rhombus.

Aufgaben der I. Runde der Vorolympiade 1961 gelöst von Steffen Polster

6.2.2 II. Runde V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V10921
Der sowjetische Flieger K. Kokkinaki hat mit der einmotorigen Turbodüsenmaschine E 66 einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er flog 100 km in 170 s.
a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$?
b) Mit welchem möglichen Fehler ist dieser Wert behaftet, wenn die Entfernungsmessung genau war, die Zeitmessung aber mit einem Fehler von ±0,5 s behaftet war?

a1) Umrechnung von t: $170s = \frac{170}{3600}$h
a2) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100 \cdot 3600}{170} = 2117{,}6 \approx 2118$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 2118 km·h^{-1}.
b1) zeitliche Abweichung nach oben: $v = \frac{100 \cdot 3600}{170{,}5} = 2111{,}4 \approx 2111$.
b2) zeitliche Abweichung nach unten: $v = \frac{100 \cdot 3600}{169{,}5} = 2123{,}9 \approx 2124$. Bei einem Zweitfehler von ±0,5 s ist der Wert der mittleren Geschwindigkeit mit einem Fehler von etwa ±6 km·h^{-1} behaftet.

Aufgabe 2 - V10922
Gemäß unseres Siebenjahrplans wird sich die Industrieproduktion der Deutschen Demokratischen Republik stark erhöhen. Die gesamte Industrieproduktion wächst von 1958 bis 1965 um 88%. Die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für die Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) wächst um 95%, dagegen die Produktion von Konsumgütern (d.s. Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) um 77%.
Wie viel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahre 1958? Wie viel Prozent wird er 1965 betragen?

	1958	1965
Gesamte Industrieproduktion	100	188
Produktion von Produktionsmitteln	x	$\frac{195}{100}x$
Produktion von Konsumgütern	y	$\frac{177}{100}y$

Gesamte Industrieproduktion = Produktion von Produktionsmitteln + Produktion von Konsumgütern

$$100 = x + y \quad (1) \qquad 100 \cdot 108 = 195 \cdot x + 177 \cdot y \quad (2)$$

Aus (I)+(II) folgt: $195x + 177(100 - x) = 18800$, d. h. $x = 61{,}1$.
Im Jahre 1958 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln rund 61,1% der gesamten Produktion. Aus der aufgestellten Tabelle ergibt sich:
Sei p der gefragte Prozentsatz für die Produktionsmitteln im Jahre 1965, dann muss gelten:

$$188 : 100 = \frac{195}{100} \cdot 61{,}1 : p \Rightarrow p = 63{,}4$$

Im Jahre 1965 beträgt der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln 63,4 % der gesamten industriellen Produktion.

Aufgabe 3 - V10923
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Radius des kleinsten Kreises ist $r_1 = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_2, r_3, r_4 und r_5. Es ist gefordert, dass

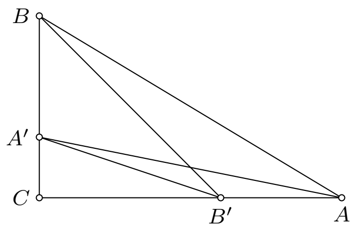
$$F_1 = \pi r_1^2 = F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) = F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) = F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2}$$
$$r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3}$$
$$r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4}$$
$$r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 \Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Aufgabe 4 - V10924
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Vierecksseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

I im Dreieck $A'B'C'$	$A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$
II im Dreieck $BB'C$	$BC^2 + B'C^2 = BB'^2$
III im Dreieck $AA'C$	$A'C^2 + AC^2 = AA'^2$
IV im Dreieck ABC	$BC^2 + AC^2 = AB^2$

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

Rechts steht kein Quadrat einer Vierecksseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.
Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

Aufgabe 5 - V10925
Wie kann man unter 9 gleichgroßen Kugeln, unter denen sich eine befindet, deren Gewicht mit dem der anderen nicht übereinstimmt, bei nur 3 Wägungen diese Kugel herausfinden und gleichzeitig feststellen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen Kugeln ist?

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6), bei Gleichheit
2. Wägung: Vergleich (7) und (8),
- bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als (8) und mit 3. Wägung Vergleich (7) und (1) ist bei Gleichheit (8) schwerer (leichter) als alle anderen Kugeln. Bei Ungleichheit ist (7) leichter (schwerer) als alle anderen Kugeln.
- bei Gleichheit der 2. Wägung folgt 3. Wägung: (9) und (1). Hiermit ergibt sich, ob (9) leichter oder schwerer als (1) und damit aller anderen Kugeln ist.

1. Wägung: Vergleich (1) (2) (3) mit (4) (5) (6) und Ungleichheit, d. h. (1) (2) (3) leichter (schwerer) als (4) (5) (6)
2. Wägung: (1) (2) (3) und (7) (8) (9)
bei Gleichheit 3. Wägung (4) und (5), bei Gleichheit ist (6) schwerer (leichter) als die anderen Kugeln.
Bei Ungleichheit von (1) (2) (3) und (7) (8) (9) folgt 3. Wägung (1) und (2).
Bei Gleichheit ist (3) leichter (schwerer) als die anderen, bei Ungleichheit, d. h. (1) leichter oder schwerer als (2) ergibt sich, welche dieser beiden leichter oder schwerer als die anderen ist.

Lösungen der II. Runde der Vorrunde 1961 übernommen von [6]

6.2.3 III. Runde V1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - V10931
Der 1945 verstorbene polnische Mathematiker Stefan Banach war im Jahre x^2 gerade x Jahre alt. Wann ist er geboren?

Die zwei größten Quadratzahlen bis 1945 sind $1936 = 44^2$ und $1849 = 43$.
Für $x = 44$ wäre Banach $1936 - 44 = 1892$ geboren worden, für $x = 43$ ergäbe sich $1849 - 43 = 1806$.
Banach wäre im zweiten Fall 139 Jahre alt geworden, d. h. diese Lösung entfällt.
Stefan Banach war 1936 44 Jahre alt.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - V10932
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4} d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V - V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

a) Die Volumina betragen $V = 229{,}336\text{cm}^3$ und $V' = 226.980\text{cm}^3$.
b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für d_1 und d_2 in die Gleichung für V ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12}\left((d+\delta)^2 + (d+\delta)(d-\delta) + (d-\delta)^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right) = \frac{\pi h}{4} d^2 + \frac{\pi h}{12}\delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12}\delta^2}{\frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall $\frac{3}{292}$, was den 1,03% von oben entspricht.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - V10933
Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Beweisen Sie diese Aussage!

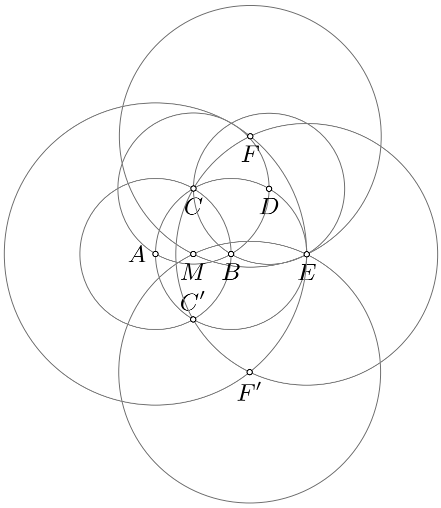
Da n eine ungerade ganze Zahl ist, gibt es eine ganze Zahl k so, dass $n = 2k + 1$ ist. Es gilt

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k\,(k+1)\,.$$

Da in dem Produkt die zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k+1$ auftauchen, ist genau eine davon auch durch 2 teilbar. Somit ist $n^2 - 1$ für alle ungeraden ganzen Zahlen n durch 8 teilbar.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V10934
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!



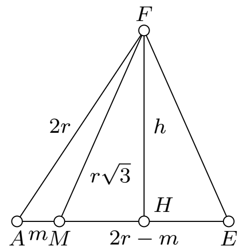
Es sei $AB = r$ der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege A im Koordinatenursprung und B bei $(r, 0)$.
Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

$$A(0,0) \quad ; \quad B(r,0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r,0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte C und E: $CE = \sqrt{3}r$, sowie $AE = 2r$. Für die Punkte F und F' wird mit der Konstruktion für das Dreieck AFE

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt M der Kreise um F und F' mit dem Radius EF liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke AE (1).



Für den Punkt $M(m; 0)$ ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken AHF und MFH für die Höhe h:

$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r-m}{2}\right)^2 \qquad ; \qquad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r-m}{2}\right)^2$$

Gleichsetzen und Auflösen nach m ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1) M Mittelpunkt der Strecke AB. w.z.b.w.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V10935
Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}? Begründen Sie das!

Es ist $2^{10} \pmod{10} = 1024 \pmod{10} = 4 \pmod{10}$. Damit ist $2^{20} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$.
Dann gilt $(2^{25} \pmod{10} = \big(\big(2^5 \pmod{10}\big) \cdot \big(2^{20} \pmod{10}\big)\big) \pmod{10} = 2 \pmod{10}$.
Damit folgt $2^{50} \pmod{10} = 4 \pmod{10}$ und somit $2^{100} \pmod{10} = 16 \pmod{10} = 6 \pmod{10}$.
Das bedeutet, dass die Zahl 2^{100} auf der Ziffer 6 endet.

Aufgabe gelöst von svrc

6.3 I. Olympiade 1961

6.3.1 I. Runde 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010911
Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right) = \frac{3}{5}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{3}{4}. \\
-\left(\frac{9}{10}m^4 + m^3 - 3\frac{3}{5}m^2\right) \\
\hline
\quad -m^3 + \frac{1}{72}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\
\quad -\left(-m^3 - 1\frac{1}{9}m^2 + 4m\right) \\
\hline
\qquad 1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2} \\
\qquad -\left(1\frac{1}{8}m^2 + 1\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aufgabe 2 - 010912
In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision" p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfasst man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_m = 0{,}5$ Prozent der Schussweite. Später wollen sie Werte von $p_m = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_m = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schussweite 12500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, dass der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

a) Der Wert p_m gibt den Prozentwert des Verhältnisses des Radius r_{20} des 20%-Kreises zur Schussweite an. Da für den Radius r_{100} des Kreises, in dem alle Treffer landen, $r_{100} = 4\frac{1}{2}r_{20}$ gilt, haben die Kreise für die angegebenen p_m die folgenden Radien:

p_m	0,5%	0,1%	0,05%
r_{20}	62,5 km	12,5 km	6,25 km
r_{100}	281,25 km	56,25 km	28,125 km

b) Ist $r_{100} < 1km$, so ist $r_{20} = \frac{2}{9}r_{100} < \frac{2}{9}km = 0{,}222km$. Somit ist das Verhältnis von r_{20} zur Schussweite kleiner als $\frac{0{,}222km}{12500km} \approx 0{,}000018$, also $p_m < 0{,}0018\%$.

Aufgabe 3 - 010913
Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm^3) und möglichst weichem Wasser (Dichte 1,0 g/cm^3) gekühlt. Die Mischung muss für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm^3, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,992 g/cm^3 haben. Wie viel Liter gefettetes Mineralöl und wie viel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Die Dichte ϱ eines Stoffes ist der Quotient aus Masse m und Volumen V einer bestimmten Menge dieses Stoffes. Da man es hier mit einer Mischung zweier Stoffe zu tun hat, muss die *Mischungsregel* beachtet werden. Danach gilt für die Dichte ϱ_E der Emulsion

$$\varrho_E = \frac{\varrho_{\ddot{O}l} \cdot V_{\ddot{O}l} + \varrho_W \cdot V_W}{V_{\ddot{O}l} + V_W},$$

wobei $\varrho_{\ddot{O}l}$, $V_{\ddot{O}l}$ Dichte und Volumen des verwendeten Öls sowie ϱ_W, V_W Dichte und Volumen des verwendeten Wassers sind. Da nach Aufgabenstellung das Gesamtvolumen $V = V_{\ddot{O}l} + V_W = 10l = 10000cm^3$ gegeben ist, können wir in (1) $V_{\ddot{O}l} = V - V_W$ ersetzen und erhalten nach Umstellen

$$V_W = \frac{\varrho_E - \varrho_{\ddot{O}l}}{\varrho_W - \varrho_{\ddot{O}l}} V.$$

Soll die Emulsion eine Dichte von 0,996 g/cm^3 haben, braucht man also 8 l Wasser und 2 l Öl. Für eine Emulsion mit einer Dichte von 0,992 g/cm^3 braucht man 6 l Wasser und 4 l Öl.

Aufgabe 4 - 010914

Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

OTTO	MAIS	OTTO	MAIS	OTTO
-ROSE	-SALZ	-SALZ	-ROSE	-MAIS
4709	2963	3497	4175	534

In der letzten Gleichung muss es beim Übergang von der 2. zur 1. Stelle einen Übertrag geben, da $M \neq 0$. Also ist $M + 1 = O$. Da die Subtraktion in der letzten Stelle der ersten Gleichung eine 9 ergibt, gilt $O + 1 = E$. Die Betrachtung der nachfolgenden Stelle ergibt $S + 1 = T$. Wegen $L \neq T$ gibt es in der 3. Gleichung beim Übergang von der 4. zur 3. Stelle keinen Übertrag, also gilt $T + 1 = L$ und $7 + Z \leq 9$. Also ist $Z \in \{0, 1, 2\}$. Wäre $Z = 2$, so ist $O = 7 + Z = 9$ und $E = O + 1 = 10$, was nicht möglich ist.
Wäre $Z = 1$, so wäre $O = 7 + Z = 8$, wegen der 2. Gleichung $S = 4$ und mit obigen Betrachtungen $T = 5$ und $L = 6$. Die 3. Gleichung hätte dann die Form

$$8558 - 4A61 = 3497$$

Dann gäbe es keine Möglichkeit für A. Damit bleibt für den Wert von Z nur 0 übrig. Dies führt zunächst zu $O = 7$, $S = 3$, $M = 6$, $E = 8$, $T = 4$ und $L = 5$ und die Gleichungen erhalten die Form

7447	6913	7447	6913	7447
-2738	-3950	-3950	-2738	-6913
4709	2963	3497	4175	534

Also gilt weiterhin $R = 2$, $I = 1$ und $A = 9$.

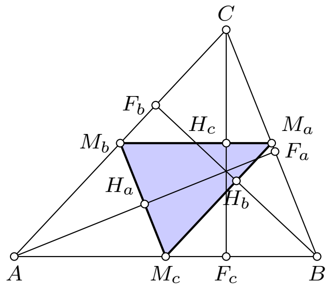
Aufgabe, 010911 bis 010914 gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 5 - 010915

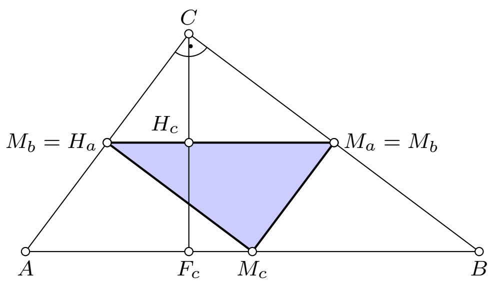
Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Das ist genau bei den rechtwinkligen Dreiecken der Fall (Bild b). In diesem Fall sind die beiden Katheten auch Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinie zwischen den Mitten der Katheten ist parallel zur Hypotenuse. Nach Strahlensatz wird die dritte Höhe auch in der Mitte geteilt.



a)



b)

Aufwändiger ist es zu zeigen, dass die Behauptung für andere Dreiecke nicht zutrifft. Betrachten wir zuerst spitzwinklige Dreiecke (Bild a); die Bezeichnung sei so gewählt, dass h_a die längste Höhe ist. Die Fußpunkte der Höhen seien F_a, F_b und F_c, deren Mittelpunkte H_a, H_b und H_c. Die Seiten haben die Mittelpunkte M_a, M_b und M_c.
Dann ist der senkrechte Abstand von M_b, M_c und H_a zur Seite a gleich.

Weiterhin gilt $h_c < b$ und $h_b < c$ (Kathete kürzer als Hypotenuse), woraus $\overline{BH_b} < \overline{BM_c}$ und $\overline{CH_c} < \overline{CM_b}$ folgen. Damit ist der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a geringer als der von H_a. Weil h_a aber zwischen H_b und H_c liegt, kann H_a nicht auf der Geraden H_bH_c liegen.

Für stumpfwinklige Dreiecke gilt Ähnliches, allerdings ist dann der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a größer als der von H_a.

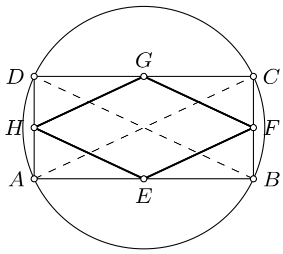
Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 6 - 010916
Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3cm$! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

Ein Parallelogramm kann man sich als zwei kongruente Dreiecke vorstellen, die an einer Seite zusammen gefügt sind. Es geht bei Drehung um 180° in sich selbst über. Dies muss auch dann so sein, wenn seine Eckpunkte auf einer Kreisperipherie liegen.

Damit die Diagonalen des Parallelogramms aber in sich selbst übergehen, müssen sie Durchmesser des Kreises sein. Daher kann ein zulässiges Parallelogramm nur ein Rechteck $ABCD$ sein. Die dem Rechteck einbeschriebene Figur ist dann ein Rhombus $EFGH$.



Nach dem zweiten Strahlensatz ist dessen Seitenlänge $\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{BD} = r$, sein Umfang also $4r = 12cm$.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

6.3.2 II. Runde 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010921
Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.
a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?
b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Ist x die Menge der Kohlevorräte der ganzen Welt in Billionen Tonnen, so lagern in der Sowjetunion $\frac{3}{5}x$ und in den USA $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{2}{15}x$. Die Kohlevorräte der übrigen Länder betragen dann

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{2}{15}\right) x = \frac{3}{5}x - 5$$

Umstellen der Gleichung ergibt, dass auf der ganzen Welt $x = 15$ Billionen Tonnen lagern, davon in der Sowjetunion 9 Billionen Tonnen und in den USA 2 Billionen Tonnen Kohle.

Aufgabe 2 - 010922
a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen.
Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?
b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp.
Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

a) Das Hanfseil hat eine Querschnittsfläche von $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 176{,}7$ mm^2, es wiegt also pro Meter 176,7 p. Somit kann es maximal

$$l_{max} = \frac{175000p}{176{,}7\frac{p}{m}} = 990{,}3m$$

lang sein, ohne unter seinem Eigengewicht zu reißen.

b) Für die maximale Länge des Dederonseils gilt hingegen: $l_{max} = 2829{,}4$ m.

Aufgabe 3 - 010923
Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so auch das Produkt. Lassen die beiden Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest, dann ist die Differenz durch 3 teilbar.
Lässt eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, dann ist die Summe der beiden Zahlen ein Vielfaches von 3. Andere Möglichkeiten für die Reste gibt es nicht.

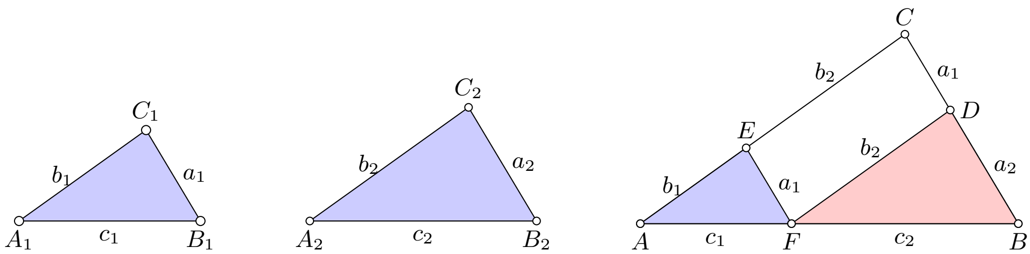
Aufgabe 4 - 010924
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93024.
Wie heißen die Zahlen?

Sei n die kleinste der vier Zahlen. Wegen $10^4 = 10000 < 93024$ und $20^4 = 160000 > 93024$ gilt $7 < n < 20$. Da 5 kein Teiler von 93024 ist, darf n bei Division durch 5 nur den Rest 1 lassen. Es kommt also nur $n = \{11, 16\}$ in Frage.
Wegen $93024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$ müssen 17 und 19 unter den Zahlen $n, n+1, n+2$ und $n+3$ vorkommen.
Damit ist $n = 16$.
Probe: $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$.

Aufgaben 010921 bis 010924 gelöst von Christiane Behns

Aufgabe 5 - 010925
Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2, b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$!
Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich?
Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

Das Dreieck aus den Seiten $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$ ist zu den beiden ursprünglichen Dreiecken ähnlich.



a) Geometrischer Beweis:
In linken Bild sind beide Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zu sehen, die, wenn sie ähnlich zueinander sein sollen, untereinander jeweils gleiche Innenwinkel haben müssen.
Im rechten Bild werden sie als $\triangle AFE$ und $\triangle FBD$ so aneinander gesetzt, dass A, F und B auf einer Geraden zu liegen kommen.
Werden nun die Strecken DF entlang FE und EF entlang FD parallel verschoben, so ist das entstehende Viereck $EFDC$ offenbar ein Parallelogramm, die Punkte A, E, C bzw. B, D, C liegen wegen gleicher Innenwinkel der Dreiecke AFE und FBD jeweils auf einer Geraden und es gilt:

$$\angle ACB = \angle ECD = \angle AEF = \angle FDB$$

Damit hat das Dreieck ABC die geforderten Seitenlängen $a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2$ und dieselben Innenwinkel wie die gegebenen Dreiecke.

b) Arithmetischer Beweis:
Nach Voraussetzung sind beide Dreiecke ähnlich, also gilt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

Nach Addition von 1 folgt daraus

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass auch das aus den Summen der Seitenlängen gebildete Dreieck diesen ähnlich ist.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

6.3.3 III. Runde 1961, Klasse 9

Aufgabe 1 - 010931
In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus.
Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.
Wie viel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich?
Wie viel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Ist x die italienische Stahlproduktion von 1959 in Tonnen, so wurden in der Sowjetunion in den $2\frac{1}{2}$ Jahren $1{,}13x$ Tonnen Stahl über den Plan produziert. Im einem Jahr beträgt die Überproduktion in der Sowjetunion dann $\frac{1}{2}x - 310000$ Tonnen. Also ist

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}x - 310000\right) = \frac{113}{100}x$$

also $x \approx 6500000$. Damit wurden 1959 in Italien ca. 6,5 Millionen Tonnen Stahl produziert und in den $2\frac{1}{2}$ Jahren in der Sowjetunion $1{,}13x = 7{,}3$ Millionen Tonnen Stahl über den Plan.

Aufgabe gelöst von Christiane Behns

Aufgabe 2 - 010932
Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.
Nach wie viel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Seien v_F, v_S und v_K die Geschwindigkeiten des Freundes, der Straßenbahn bzw. von Kurt. Zunächst bewegen sich Freund und Straßenbahn mit der Relativgeschwindigkeit $v_S + v_F$ auseinander.
Zum Zeitpunkt des Aussteigens nach $t = 1$ min sind beide die Strecke $s = \frac{v_S+v_F}{t}$ voneinander entfernt.
Anschließend holt Kurt seinen Freund mit der Relativgeschwindigkeit $v_K - v_F$ wieder ein.
Laut Aufgabenstellung ist ferner $v_K = 2v_F = \frac{1}{4}v_S$. Somit gilt für die zum Einholen benötigte Zeit:

$$t' = \frac{s}{v_K - v_F} = \frac{v_S + v_F}{v_K - v_F}t = \frac{8v_F + v_F}{2v_F - v_F}t = 9t = 9 \text{ min}$$

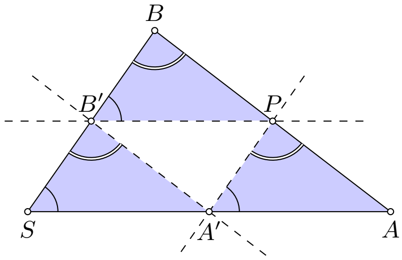
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 010933
Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!
Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, hat die Form $\frac{2n}{5n}$.
Die Summe $2n + 5n = 7n$ ist nur für $n = 7$ eine zweistellige Quadratzahl. Also ist der gesuchte Zähler gleich 14, der Nenner gleich 35.

Aufgabe gelöst von Christiane Behns

Aufgabe 4 - 010934
Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.
Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, dass $PA = PB$ wird!
Die Konstruktion ist zu begründen!



Konstruktion: Man ziehe die Parallelen zu beiden Schenkeln durch den Punkt P. Dadurch erhält man die Punkte A' und B' als Schnittpunkte mit den Schenkeln.
Verlängert man SA' und SB' über A' bzw. B' hinaus um ihre jeweilige eigene Länge, dann erhält man die Punkte A und B und damit die gesuchte Gerade.

Beweis:
Dass $PA = PB$ tatsächlich erfüllt ist, sieht man beim Vergleichen der Dreiecke $SA'B'$, $A'AP$ und $B'PB$. Es gilt nämlich
$\angle A'SB' = \angle AA'P = \angle PB'B$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SA \parallel B'P$),
$\angle A'B'S = \angle APA' = \angle PBB'$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SB \parallel A'P$) und
$\overline{SA'} = \overline{A'A}$ bzw. $\overline{SB'} = \overline{B'B}$ (per Konstruktion).
Damit sind die drei genannten Dreiecke kongruent, die Seiten PA und PB also gleich.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 010935
In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

(a) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
(b) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
(c) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
(d) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
(e) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
(f) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

a-c)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐		☐		☐	
Rostock	☐		☐		☐	
Schwerin	☐		☐		☐	
Cottbus						
Suhl						
Erfurt						

a-f)

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐	☐	☐		☐	
Rostock	☐		☐		☐	
Schwerin	☐	☐	☐		☐	☐
Cottbus	☐		☐			
Suhl			☐			
Erfurt						

	A	B	C	D	E	F
Berlin	☐	☐	☐	☐	☐	☒
Rostock	☐	☐	☒	☐	☐	☐
Schwerin	☐	☐	☐	☒	☐	☐
Cottbus	☐	☐	☐	☐	☒	☐
Suhl	☒	☐	☐	☐	☐	☐
Erfurt	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Wegen d) und f) kommt B weder aus Schwerin noch aus Berlin. Da er aber einen der drei Berufe aus a)–c) haben muss, kommt er aus Rostock.
Wegen b) und c) kommt C weder aus Rostock, noch aus Berlin oder Schwerin, wegen e) nicht aus Suhl und wegen f) nicht aus Cottbus. Also muss er aus Erfurt kommen.
A kommt wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Rostock oder Schwerin. Wegen e) kommt er nicht aus Cottbus und aus Erfurt kommt bereits C. Also kommt A aus Suhl.
Da E wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Schwerin kommt und alle übrigen Städte bereits zugeordnet sind, kommt er aus Cottbus.
Da alle 6 Personen in verschiedenen Städten wohnen, ergibt sich nun leicht die folgende Aufstellung: A ist Ingenieur aus Suhl, B ist Dreher aus Rostock, C ist Kranführer aus Erfurt, D ist Kranführer aus Schwerin, E ist Dreher aus Cottbus und F ist Ingenieur aus Berlin.

Aufgabe gelöst von Christiane Behns

6.4 II. Olympiade 1962

6.4.1 I. Runde 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020911
Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23m$ und der Höhe $h = 21m$.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wie viel Tonnen Erdöl fasst ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wie viel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

a) $V = \frac{\pi}{4}d^2 \cdot h \approx 8725 \text{ m}^3$

b) $m = \varrho \cdot V = 0{,}85 \text{ g/cm}^3 \cdot 8725 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \approx 7416 \text{ t}$

c) $t = \frac{10200 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} = 10{,}2 \text{ h} = 10 \text{ h } 12 \text{ min}$

d) $t = \frac{7416 \text{ t}}{4 \cdot 250 \text{ t/h}} \approx 7{,}4 \text{ h} = 7 \text{ h } 24 \text{ min}$

Aufgabe 2 - 020912
Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik ”Klement Gottwald” senkte eine Jugendabteilung die Ausschussquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschussquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3351,- M.

a) Wie viel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuss vorher?

b) Wie viel Prozent beträgt er jetzt?

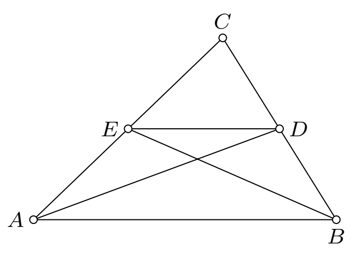
c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuss jetzt noch?

a) Aus der Gleichung $x - 6\% = \frac{2}{5}x$ erhalten wir $\frac{3}{5}x = 6\%$. Also betrug die Ausschussquote vorher 10 %.

b) Demzufolge hat der Ausschuss jetzt einen Anteil von 4 % an der Produktionsmenge.

c) Die eingesparten 3351,- M entsprechen 6 %. Also hat der jetzt noch produzierte Ausschuss einen Wert von 2234,- M.

Aufgabe 3 - 020913
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!



Sei $\triangle ABC$ ein solches Dreieck und seien o.B.d.A. A und B die beiden Punkte, von denen zwei gleichlange Seitenhalbierende ausgehen. Die Seitenhalbierende von A aus schneide die Strecke $\overline{BC}$ in D und die Seitenhalbierende von B aus schneide die Strecke $\overline{AC}$ in E.

Dann sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EDC$ ähnlich zueinander (SWS).

Mithin ist nach Strahlensatz $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. Das Viereck $ABDE$ ist daher ein Trapez.

Ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist gleichschenklig. Daher ist $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$ und damit wegen Seitenhalbierenden $|\overline{AC}| = 2|\overline{AE}| = 2|\overline{DB}| = |\overline{CB}|$. Das Dreieck ist also gleichschenklig. $\square$

Aufgabe 4 - 020914
Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, dass die Lösung vollständig ist!

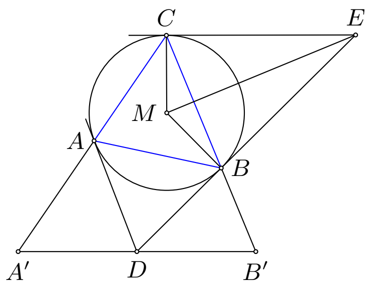
Die Ziffer y muss eine der Ziffern 1, 5 oder 6 sein, denn nur bei diesen Ziffern endet ihr Quadrat auf sich selbst ($1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 25$ und $6 \cdot 6 = 36$).

Ferner gilt als Obergrenze $xy \leq 31$, da $32^2 = 1024$ und damit vierstellig statt wie gefordert dreistellig.

Als Lösungen für die Aufgabe kommen daher nur die Zahlen 11,15,16,21,25,26 und 31 in Frage. zxy muss als Quadrat auch durch xy teilbar sein, d. h. z00 muss ebenfalls durch xy teilbar sein. Damit entfallen 11, 21, 26 und 31. Durch Ausprobieren der drei verbleibenden Zahlen 15, 16 und 25 erhält man die einige Lösung: 25.

Aufgabe 5 - 020915
Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.
Es ist zu beweisen, dass

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und
b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!



a) Der Schnittpunkt der Tangenten durch B und C sei E. Es gilt, dass die Dreiecke $\triangle MCE$ und MBE kongruent sind nach SSW:

(1) gemeinsame Seite $\overline{ME}$,

(2) $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ und

(3) $\angle MCE = \angle MBE = 90°$.

Mithin ist $\overline{CE} = \overline{BE}$ und daher ist das Dreieck $\triangle CBE$ gleichschenklig.

Es gilt $\angle CBE = \angle B'BD$, da dies Scheitelwinkel sind.

Ferner gilt: $\angle BDB' = \angle BEC$ wegen Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen.

Analog gilt $\angle ECB = \angle DB'B$.

Daraus resultiert, dass die beiden Winkel $\angle B'BD$ und $\angle DB'B$ gleichgroße Basiswinkel sind und das Dreieck $\triangle B'BD$ gleichschenklig ist.
Analog kann man den Beweis auf das Dreieck $\triangle DAA'$ übertragen.

b) Mit der gleichen Überlegung wie zu Beginn von a) kann man sehen, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ gleichlang sind.

Die Punkte A, A', B und B' haben so alle den gleichen Abstand vom Punkt D. Es existiert ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|\overline{AD}|$, der alle vier Punkte enthält.

Aufgabe 6 - 020916
Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * : * * * = * * * * *
  * * *
  -----
      * * * *
        * * *
      -------
        * * * *
        8 * * *
        -------
              0
```

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
\to & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aus der markierten Zeile und den beiden nächsten können wir schlussfolgern:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und daraus wiederum:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Für den Teiler kommen sind nur noch 333, 666 und 999 möglich. Wegen der eingetragenen 8 fallen die ersten beiden Möglichkeiten heraus.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & \ast & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und schließlich:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 8 & 1 & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-4}
 & & & 1 & 8 & 9 & 8 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe der I. Runde 1962 gelöst von André Lanka

6.4.2 II. Runde 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020921
Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41000 km) in rund 88 Minuten zurück.
Welchen Abstand müssten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Die beiden Raumschiffe haben eine Geschwindigkeit von

$$v = \frac{41000 \text{ km}}{88 \text{ min}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \approx 27955 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

was einen Zeitabstand von

$$t_\Delta = \frac{6{,}5 \text{ km}}{27955 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 0{,}0002325 \text{ h}$$

ergibt. Bei einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entspricht das einer Entfernung von $0{,}0002325 \text{ h} \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0{,}02325 \text{ km} = 23{,}25 \text{ m}$.

Aufgabe 2 - 020922
Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es wird gebremst.
a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ abnimmt?
b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

a) Aus der Formel $v = at$ erhält man

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{100}{3{,}5} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 5{,}56\text{s}$$

b) Das Auto legt in dieser Zeit einen Weg von $s = \frac{a}{2} t^2 \approx 77{,}3$ m zurück.

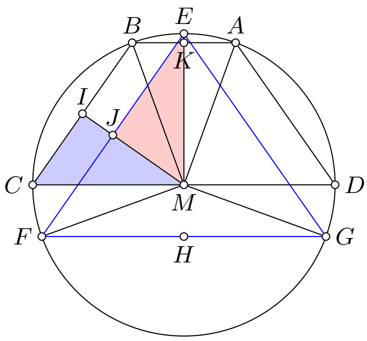
Aufgabe 3 - 020923
Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat.
Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.
Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Peter gewinnt. Er muss $2 \cdot 10000 = 20000$ Schritte gehen.
Jürgen dagegen muss $2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 150) = 2 \cdot 75 \cdot 150 = 22650$ Schritte gehen.

Aufgabe 4 - 020924
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

J sei der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MFE$ von Punkt M auf der Seite EF. Dann gilt $\triangle MFJ \cong \triangle MEJ$ nach SSW:

(1) $MF = ME = r$
(2) MJ in beiden Dreiecken enthalten
(3) $\angle MJF = \angle MJE = 90°$



Analog sei I der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MBC$ von Punkt M auf der Seite BC. Die Punkte M, I und J liegen auf einer Geraden, da die Winkel $\angle MJF$ und $\angle MIC$ gleich groß und die Strecken $EF \parallel BC$ sind.

Sei Winkel $\angle BCD := \alpha$. Dann gilt auch $\angle EFG = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Nach Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle EFH$ gilt dann für Winkel $\angle FEH = 90° - \alpha$ und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle MEJ : \angle JME = \alpha$. Demzufolge gilt $\triangle MEJ \cong \triangle MCI$ nach WWS:

(1) $ME = MC = r$
(2) $\angle JME = \angle MCB = \alpha$
(3) $\angle MJE = \angle MIC = 90°$

Damit hat man sogar 4 kongruente Dreiecke:

$$\triangle FMJ \cong \triangle MEJ \cong \triangle MCI \cong \triangle MBI$$

Nun bleibt zu zeigen, dass gilt: $\triangle FHM \cong \triangle MBK$, wobei H und K die Höhenfußpunkte in den Dreiecken $\triangle FGM$ und $\triangle MAB$ wie in der Zeichnung ersichtlich sind.
Dazu betrachte man zuerst Winkel

$$\angle MFG = 180° - \angle FHM - \angle MFE - \angle FEM = 180° - 90° - 2 \cdot \angle MFE$$

wobei $\angle MFE = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ im Dreieck $\triangle JFM$ gilt.
Damit ergibt sich $\angle MFG = 90° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$.
Als nächstes wird Winkel $\angle BMK$ betrachtet:

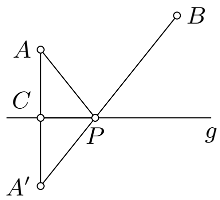
$$\angle BMK = 90° - \angle CMI - \angle CMI = 90° - 2 \cdot (180° - 90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$$

Beide Dreiecke $\triangle FHM$ und $\triangle MBK$ sind nach WWS kongruent:

(1) $MF = MB = r$
(2) $\angle MFG = \angle BMK = 2 \cdot \alpha - 90°$
(3) $\angle MHF = \angle BKM = 90°$

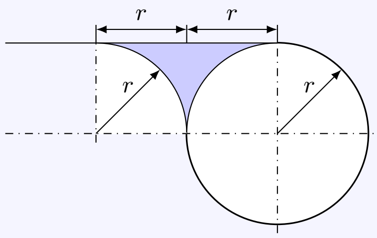
Mithin ist eine Hälfte des Dreiecks aus den Teilflächen $\triangle FHM, \triangle MFJ$ und $\triangle JME$ flächengleich zu einer Trapezhälfte, die aus den Teilflächen $\triangle MBK$, $\triangle BMI$ und $\triangle CMI$ besteht.

Aufgabe 5 - 020925
Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet!
Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!



Man spiegelt zuerst den Punkt A an der Geraden g und erhält den Punkt A'. Der Schnittpunkt von g mit AA' sei C. Der Schnittpunkt von g mit $A'B$ sei P.
Dann sind die beiden Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle A'CP$ wegen SWS kongruent zueinander. Demnach ist $\angle A'PC = \angle CPA$. Außerdem ist auch $\angle A'PC$ genauso groß wie der Winkel zwischen g und PB, weil es sich um Wechselwinkel handelt.
Der gefundene Punkt P erfüllt also die Anforderungen.

Aufgabe 6 - 020926



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.
a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

a) Die Gleislänge ist $2r + 2\pi r$.

b) Das Flächenstück beinhaltet einen Kreis mit der Fläche πr^2 und die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $2r$ und r abzüglich der Fläche der beiden Viertelkreise. Als eingeschlossene Fläche erhält man

$$\pi r^2 + 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

Aufgaben der II. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka

6.4.3 III. Runde 1962, Klasse 9

Aufgabe 1 - 020931
Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Sei n eine beliebige ganze, positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^3 + 1)(n^3 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) = (n^3 + 1)(n - 1)(n^3 + n^2 + n) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren bilden ganze Zahlen. Daher ist $n^7 - n$ ohne Rest durch $n^3 + n^2 + n$ teilbar.

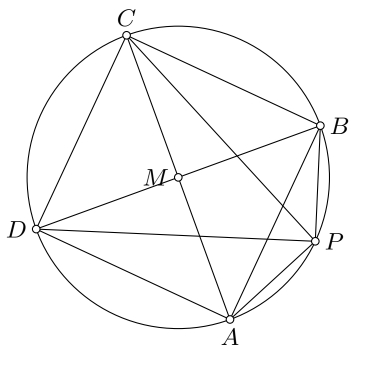
Aufgabe 2 - 020932
Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ 4 hinunter.
Nach wie viel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Sei x die Anzahl der Tage. Im Verlauf eines Tages (mit der Nacht) geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Ellen zu.
Gleichzeitig nähert sich die Katze $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Ellen. Insgesamt kommen sich Katze und Maus $\frac{13}{12}$ Ellen näher. Das ist aber nur bei den ersten $x-1$ Tagen so. Am letzten Tag darf die Nacht nicht mit eingerechnet werden.
An diesem letzten Tag geht die Maus auf die Katze $\frac{1}{2}$ Elle zu und die Katze auf die Maus 1 Elle. Daher muss gelten

$$\frac{13}{12}(x - a) + \frac{3}{2} \geq 60$$

was für $x \geq 55$ wahr ist. Am 55. Tag erreicht die Katze die Maus.

Aufgabe 3 - 020933
Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von 135° miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je 45°.
Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!



Der Peripheriewinkel $\angle CPA$ über der Strecke AC ist 90°. Damit ist nach Umkehrung des Thalessatzes AC ein Durchmesser des Kreises. Genauso ist BD ein Durchmesser. Beide Durchmesser schneiden sich im Punkt M, dem Mittelpunkt des Kreises. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind also gleich lang.
Der Peripheriewinkel $\angle CPD = 45°$. Der Zentriwinkel über BC ist also $\angle CMD = 90°$. Die beiden Diagonalen sind nicht nur gleich lang, sondern stehen auch senkrecht aufeinander.
Das Viereck $ABCD$ muss ein Quadrat sein.

Aufgabe 4 - 020934
Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Infolge Bauarbeiten muss der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erhöht.
Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Wir benutzen die Gleichung $s = v \cdot t$ und erhalten für die erste Weghälfte

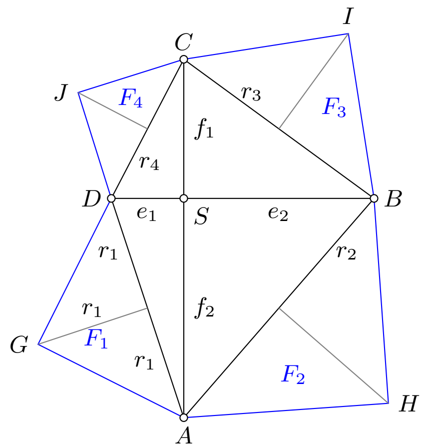
$$t_1 = \frac{60 \text{ km}}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{6}{5} \text{ h}$$

Für die zweite Weghälfte braucht der Zug

$$t_2 = \frac{60km}{70\frac{km}{h}} = \frac{6}{7}h$$

Insgesamt ergibt das eine Fahrzeit von $\frac{6}{5}$ h $+\frac{6}{7}$ h $= \frac{72}{35}$ h. Da $\frac{72}{35} > 2$ größer als 2 ist, kommt der Zug nicht pünktlich an.

Aufgabe 5 - 020935
Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.
Beweisen Sie, dass $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!



Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt als gegeben: e (bestehend aus den Abschnitten e_1 und e_2) steht senkrecht auf f (bestehend aus den Abschnitten f_1 und f_2). Jedes der Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3, F_4 ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Damit teilt die Höhe in den Punkten G, H, I, J die Grundseite in zwei längengleiche Stücke, die zudem der Länge der Höhe entsprechen (Radius des jeweiligen Thaleskreises). Damit sind die Angaben r_1, r_2, r_3, r_4 in der Abbildung erklärt.
Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ergibt sich dann als $F_i = r^2$ $(i \in 1, 2, 3, 4)$.
Gleichzeitig sind die Dreiecke $\triangle DAS, \triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS$ rechtwinklig, so dass hier der Satz des Pythagoras angewandt werden kann:

$$4r_1^2 = e_1^2 + f_1^2 \quad ; \quad 4r_2^2 = e_2^2 + f_2^2 \quad ; \quad 4r_3^2 = e_3^2 + f_3^2 \quad ; \quad 4r_4^2 = e_4^2 + f_4^2$$

Dies kann nun zur Berechnung der Flächeninhaltssumme herangezogen werden:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 = r_1^2 + r_3^2 &= \frac{1}{4}(e_1^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_2^2 + f_1^2) \\ &= \frac{1}{4}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_1^2 + f_1^2) \\ &= r_2^2 + r_4^2 = F_2 + F_4 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 6 - 020936
In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert.
Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.
Wie viel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wie viel in der ganzen Pyramide?

1. Schicht: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$
2. Schicht: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$
3. Schicht: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
4. Schicht: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$
6. Schicht: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$
7. Schicht: $3 + 2 + 1 = 6$
8. Schicht: $2 + 1 = 3$
9. Schicht: $1 = 1$

Insgesamt liegen in der Pyramide 120 Bälle.

Lösungen der III. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka

6.5 III. Olympiade 1963

6.5.1 I. Runde 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030911
Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6370$ km.)

a) Wie viel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, dass der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

a) Gegeben sind der mittlere Erdradius $R = 6370$ km, die durchschnittliche Flughöhe $h = 200$ km und die Anzahl n der Erdumkreisungen, $n = 48$. Die Umlaufbahn soll als kreisförmig angenommen werden, Start- und Landepunkt seien identisch.

Die zu ermittelnde Gesamtflugstrecke s setzt sich aus drei Teilstrecken zusammen: Der Startflugstrecke s_S zum Erreichen der Flughöhe nach dem Start, der Flugstrecke s_U, die während der Erdumkreisungen zurückgelegt wird, sowie der Landeflugstrecke s_L zum Verlassen der Flughöhe vor der Landung.

Wir wollen im folgenden vereinfachend annehmen, dass die Flughöhe bei Start und Landung senkrecht über dem Start- bzw. Landepunkt erreicht bzw. verlassen werde. Wie man schnell erkennt, gilt dann $s_S = s_L = h$.

Zur Berechnung der Strecke s_U ist es notwendig, den Umfang u des Umlaufkreises zu kennen – gilt doch offensichtlich $s_U = nu$. Der Umfang eines Kreises lässt sich aus seinem Radius r bestimmen; der Radius der Umlaufbahn ist natürlich die Summe aus Erdradius und Flughöhe, $r = R + h$.

Somit berechnet sich die Gesamtflugstrecke s wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= s_S + s_U + s_L = h + nu + h \\ &= 2h + 2n\pi r = 2h + 2n\pi(R + h) \\ &= 2 \cdot 200 \text{ km} + 2 \cdot 48\pi(6370 \text{ km} + 200 \text{ km}) = 1982000 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Der Flug begann am 16. Juni um 10:30 Uhr und endete am 19. Juni um 9:20 Uhr; er dauerte also 2 Tage, 22 Stunden und 50 Minuten. Die Flugzeit t beträgt somit 4250 Minuten.
Mit $s = 1982000$ km gemäß (a) ergibt sich die durchschnittliche Fluggeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1982000 \text{ km}}{4250 \text{ min}} = 466\frac{\text{km}}{\text{min}} = 27980\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7{,}77\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler

Aufgabe 2 - 030912
Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, dass dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Die beiden Züge bewegen sich aufeinander zu. Insbesondere bewegen sich dabei der Punkt, an dem Wolfgang seine Messungen durchführt, und das Ende des Gegenzuges aufeinander zu und reduzieren ihren Abstand in der Zeit $t = 3{,}0s$ um $s = s_W + s_G = 120$ m, wobei s_W den Anteil der Strecke beschreibt, den Wolfgangs Zug zurücklegt, und s_W für die vom Gegenzug bewältigte Strecke steht.
Weiterhin ist die Geschwindigkeit v_W bekannt, mit der Wolfgangs Zug fährt: $v_W = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die gesuchte Geschwindigkeit v_G des Gegenzuges berechnet sich damit wie folgt:

$$v_G = \frac{s_G}{t} = \frac{s - s_W}{t} = \frac{s - v_W t}{t} = \frac{s}{t} - v_W = \frac{120 \text{ m}}{3{,}0 \text{ s}} - 60\frac{\text{km}}{\text{h}} = 84\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler

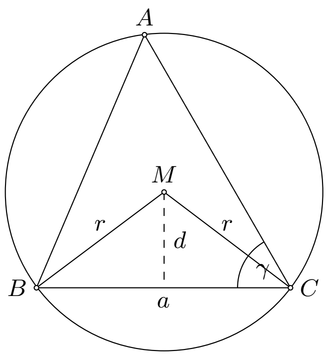
Aufgabe 3 - 030913

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!



a) s. Bild.
b) Man beginne mit der Seite a und bezeichne ihre Endpunkte mit B und C. Dann zeichne man Kreisbögen mit Radius r um die beiden Endpunkte von a, so dass ein Schnittpunkt entsteht. Dieser ist dann der Umkreismittelpunkt des gesuchten Dreiecks; er heiße M.

Dann konstruiere man den Kreis um M mit Radius r, auf ihm muss der Punkt A liegen. Letzterer ensteht, wenn der Winkel γ an a in C so angetragen wird, dass γ ein Innenwinkel des erhaltenen Dreiecks ABC ist.

c) Das Dreieck BCM ist gleichschenklig. Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann für die Höhe auf a, die gleichzeitig der gesuchte Abstand d ist: $d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} = 2{,}1cm$.

d) Das Dreieck BCM muss existieren, d. h. seine Dreiecksungleichung muss erfüllt sein: $2r \geq a$ oder $r \geq 2{,}8cm$.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 4 - 030914
Beweisen Sie, dass die Summe von 1000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe: $k + (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+999)$. Sie besteht aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen, ist also gerade.

Aufgabe gelöst von Burkhard Thiele

Aufgabe 5 - 030915
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Es ist zu beweisen: $a + b = d_U + d_I$

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreis berührt jede Seite des Dreiecks. Damit ist jede Seite des Dreiecks eine Tangente an den Inkreis, die Strecke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt steht somit senkrecht auf der jeweiligen Seite.

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann über das ganze Dreieck oder 3 Teildreiecke berechnet werden:

$$\begin{aligned}
A &= a \cdot \frac{b}{2} = a \cdot \frac{r_I}{2} + b \cdot \frac{r_I}{2} + c \cdot \frac{r_I}{2} \\
a \cdot b &= (a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot r_I \\
r_I &= \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Umkreis geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Die Katheten a und b bilden zusammen mit den Mittelsenkrechten ein Rechteck mit den Seitenlängen $a/2$ und $b/2$. Die Diagonale des Rechtecks beträgt r_U. Es gilt also:

$$r_U^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad r_U = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Und ferner:

$$\begin{aligned} a+b &= d_U + d_I = 2\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{(a+b)\cdot\sqrt{a^2+b^2} + a^2+b^2+2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{(a+b)\cdot\sqrt{a^2+b^2} + (a+b)^2}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{(a+b)\cdot(\sqrt{a^2+b^2} + a+b}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= a+b \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 6 - 030916

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wie viel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wie viel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

c) Es seien $P_i, i \in \{1, ..., n\}$ die n Punkte auf dem Kreisumfang. Jeder Punkt P_i kann mit $n-1$ Punkten $P_j, j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ verbunden werden. Somit ergibt sich $n(n-1)$ als Gesamtzahl möglicher gerichteter Punkt-zu-Punkt-Verbindungen.

Strecken sind keine gerichteten Verbindungen zweier Punkte. Daher besitzt ein Paar $(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_jP_i})$ entgegengesetzt gerichteter Verbindungen zweier Punkte nur eine zugehörige Strecke, $\overline{P_iP_j}$. Die Gesamtzahl möglicher Strecken ist somit die Hälfte der Gesamtzahl möglicher gerichteter Verbindungen, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

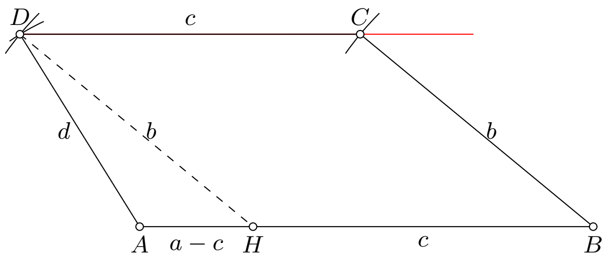
a) Mit c) ergibt sich für $n = 5$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ möglichen Strecken.

b) Mit c) ergibt sich für $n = 10$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 4$ möglichen Strecken.

Aufgabe gelöst von Sebastian Boesler

6.5.2 II. Runde 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030921
Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:
$AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 4{,}5$ cm, $DA = 3$ cm.
Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!



Planfigur: Sei $a > c$. Wählt man auf der Seite $|AB| = a$ einen Punkt H so, dass $|HB| = c$, erhält man durch die Verbindung $|HD|$ das Parallelogramm $HBCD$.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

1. Lege durch die Strecke $|AB| := a$ die Punkte A und B fest.
2. Trage auf $|AB|$ vom Startpunk B die Strecke c ab; Endpunkt sei H.
3. Beschreibe einen Kreis (H, b) um H vom Radius b. Beschreibe einen Kreis (A, d) um A vom Radius d. Schnittpunkt beider Kreise ist die Ecke D so dass, A,H,D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.
4. Lege durch D eine Parallele zu $|AB|$.
5. Beschreibe einen Kreis (B, b) um B vom Radius b. Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen ist die Ecke C.
6. Erhalte durch entsprechende Verbindung der Punkte A,B,C,D das Trapez $ABCD$.

Aufgabe 2 - 030922
Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt.
Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. $7, 7, 7, 9, 10$; 2. $7, 7, 8, 8, 10$; 3. $7, 7, 8, 9, 9$; 4. $7, 8, 8, 8, 9$
5. $8, 8, 8, 8, 8$

und nur diese.
Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.
2. und 3. analoge Überlegungen führen zu $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30$ Möglichkeiten.
4. wie 1.
5. 1 Möglichkeit.
Insgesamt gibt es $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$ Möglichkeiten.

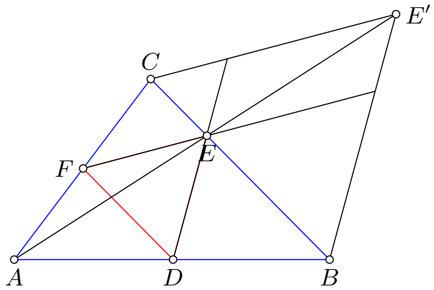
Aufgabe 3 - 030923
Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.
Begründen Sie die Konstruktion!

I. Analyse
Angenommen, D, E, F genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet E' den auf der anderen Seite von g_{BC} wie A gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite BC, dann ist E der Schnittpunkt von AE' mit g_{BC}.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $FD \parallel CB$ und $|\angle DFE| = 60°$, und nach Definition $|\angle BCE'| = 60°$. Da E und E' auf derselben Seite von g_{FD} liegen wie gCB, folgt $CD' \parallel FE$ und entsprechend $FE \parallel BE'$.
Die Gerade g_{AE} schneidet $g_{CE'}$ in einem Punkt, der P genannt sei, und die Gerade $g_{BE'}$ in einem Punkt, der Q genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|, \qquad |AD| : |AB| = |AE| : |AQ'|, \qquad |AF| : |AC| = |AE| : |AF|$$

Aus diesen Gleichungen folgt $|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|$, also $|AP| = |AQ|$ und damit $P = Q = E'$. Daher ist $\triangle CPB$ gleichseitig; denn jeder der Winkel $\angle BCP, \angle CBP$ hat entweder die Größe 60° oder 120°, und 120° kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck 180° beträgt.
Daher können E, F, D nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.



II. Konstruktion:
Man konstruiere über CB das gleichseitige Dreieck CBE', dessen Ecke E' nicht auf derselben Seite von g_{BC} wie A liegt. Dann schneidet die Strecke AE' die Gerade g_{BC} in einem Punkt E.
F sei der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu CE' durch E; D der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu BE' durch E.

III. Satz:
Wenn E, F, D gemäß II. konstruiert sind, genügt $\triangle EFD$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
a) Man überzeugt sich zunächst davon, dass E auf BC liegt: Da nach Voraussetzung $\triangle ABC$ spitz ist und A und E' auf verschiedenen Seiten von g_BC liegen, gilt

$$|\angle ABE'| = |\angle ABC| + |\angle CBE'| \leq 90° + 60° < 180°$$

und entsprechend $|\angle ACE'| < 180°$. Daher kann E nicht mit B oder C zusammenfallen.
Läge E nicht auf BC, so läge BC auf ein und derselben Seite von $g_{AE'}$. Dann wäre einer der beiden Winkel $\angle EBE'$ oder $\angle ECE'$ Außenwinkel zum Dreieck BCE'.
O.B.d.A. kann angenommen werden, dass dies der Winkel $\angle EBE'$ ist. Da A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{EC} liegen, läge B im Innern des Dreiecks $AE'C$ und es wäre

$$360° = |\angle ABE'| + |\angle E'BC| + |\angle CBA| \qquad \text{also}$$

$$|\angle CBA| = 360° - |\angle ABE'| - |\angle E'BC| > 360° - 180° - 60° = 120°$$

d. h. $\triangle ABC$ wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge F nicht auf AC, so lägen A und C auf derselben Seite von g_{EF}, und zwar wegen $g_{EF} \parallel g_{CE'}$ auf derselben Seite wie E', so dass AE' keinen Punkt mit g_{EF} gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil E auf AE' und g_{EF} liegt.

c) Entsprechend zeigt man, dass D auf AB liegt.

d) Wegen $g_{EF} \parallel g_{E'C}$ und $g_{ED} \parallel g_{E'B}$ folgt nun nach dem 1. Strahlensatz $|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$ und aus $|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$ nach Umkehrung des 1. Strahlensatzes $DF \parallel BC$.

e) Da EE' die Gerade g_{AC} nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von $g_{EE'}$ mit g_{AC} ist A, und A liegt nicht auf EE', weil E auf AE' liegt), liegen E und E' auf derselben Seite von g_{AC}.
Daher gilt $\angle AFE \cong \angle ACE'$, wegen $FE \parallel CE'$.
Entsprechend ergibt sich, da DB auf derselben Seite von g_{AC} liegt wie EE', $\angle AFD \cong \angle ACB$ und weiter $|\angle DFE| = |\angle BCE'| = 60°$.
Analog folgt, dass auch die anderen Innenwinkel von $\triangle DEF$ je die Größe 60° haben, so dass $\triangle DEF$ gleichseitig ist.

IV. Determination:
Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck DEF, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 4 - 030924
Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Ist (a, b) ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = a \cdot b \quad (1) \qquad a \cdot b = \frac{a}{b} \quad (2)$$

gilt, so folgt aus (2), dass $b \neq 0$ ist, und danach aus (1), dass $a \neq 0$, und aus (2), dass $b^2 = 1$ ist. Also gilt $b_1 = +1$ oder $b_2 = -1$.
Der 1. Fall führt zu $a + 1 = a$ und damit zu einem Widerspruch.
Der 2. Fall ergibt $a - 1 = -a$ und damit $a = \frac{1}{2}$ als einzig mögliche Lösung.
Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, dass $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 5 - 030925
a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.
b) Wie viel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

a) Bei der Verteilung der Kugeln auf die Säckchen kann man sich am Binärsystem orientieren, da man für jeden Sack nur 2 Möglichkeiten bei der Zusammenstellung einer Anzahl hat, man nimmt ihn, oder man nimmt ihn nicht.
Die Säckchen müssen damit den Zweierpotenzen entsprechen.
Das ergibt folgende Kugelverteilung:

$$1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512$$

b) Um nach demselben Verfahren Anzahlen bis 3000 darstellen zu können, müssen 2 weitere Säckchen hinzugenommen werden, gefüllt mit 1024 und 2048 Kugeln.

Lösungen der II. Runde 1963 übernommen von [5]

6.5.3 III. Runde 1963, Klasse 9

Aufgabe 1 - 030931
Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Die gesuchte Zahl z kann man aus ihren Ziffern wie folgt schreiben:

$$z = 100a + 10b + c \qquad \text{(mit } 0 \leq a, b, c \leq 9 \text{ sowie } a \neq 0)$$

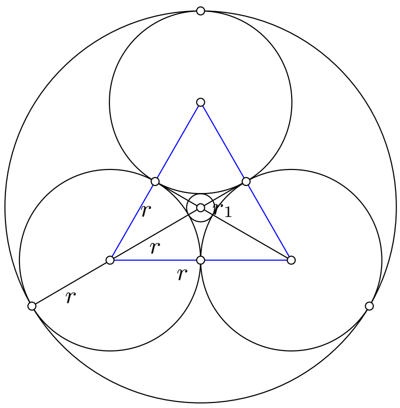
Jede zweistellige Zahl aus den Ziffern von z ergibt sich als $10x + y$ mit $x \in a, b, c, y \in a, b, c$ und $x \neq y$.
Die Gleichung lautet nun mit den 6 zweistelligen Zahlen aus den Ziffern von z:

$$2 \cdot z = 2 \cdot (100a + 10b + c) = (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)$$

Zusammengefasst ergibt sich: $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$ und weiter: $178a = 2b + 20c$ bzw. nach dem Kürzen: $89a = b + 10c$.
Schätzt man den rechten Term nach oben ab, d. h. setzt man $b = 9$ und $c = 9$, so kommt man auf die Ungleichung $89a \leq 99$ und mithin $a \leq 1$. Dies impliziert $a = 1$ und ergibt für die beiden restlichen Ziffern $b = 9$ sowie $c = 8$.
Die gesuchte Zahl lautet also $z = 198$ und ist die einzige Zahl, die den geforderten Bedingungen genügt.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 030932
Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.
a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!



Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man der Abbildung.
a) Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.
Daraus ergibt sich die Konstruktion.

b) Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen, ergibt sich:

$$r + r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} - r$$

oder $r_1 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right) \approx 0{,}15r$.
$r_2 = 2r + r_1$ oder $r_2 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \approx 2{,}15r$.

Aufgabe 3 - 030933
Welche Punkte $P(x; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$?
Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ($b > a$)

Es gilt: $|P_1P| = 2 \cdot |P_2P|$ sowie $|x - a| = 2 \cdot |x - b|$

1. Fall: $x \leq a < b$ tritt nicht auf, da P weiter von P_1 entfernt sein soll als von P_2.
2. Fall: $a \leq x \leq b$: $x - a = 2 \cdot (b - x) \Rightarrow x = a + (b - a) \cdot \frac{2}{3}$
3. Fall: $a < b \leq x$: $x - a = 2 \cdot (x - b) \Rightarrow x = 2 \cdot b - a$

Die Punkte $(a + \frac{2}{3}(b - a); 0)$ und $(2 \cdot b - a; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$.

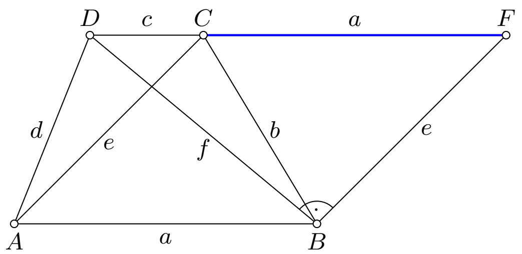
Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 4 - 030934
Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Die natürlichen Zahlen seien $n, n+1, n+2, n+3$.
Laut Voraussetzung ist $n(n+1)(n+2)(n+3) = 110355024$. Daraus folgt $n^4 < 111000000$, also $n < 104$. Andererseits gilt $(n+3)^4 > n(n+1)(n+2)(n+3) > 100000000$, somit $n+3 > 100$, also $n > 97$. Damit gilt $97 < n < 104$.
110355024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.
Dies trifft nur für $n = 101$ zu. Die gesuchten Zahlen lauten also $101, 102, 103, 104$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 030935
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).



Beweis: In einem Trapez $ABCD$ seien die einander parallelen Grundseiten $AB = a$ und $CD = c$ und die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$. Die Parallele zu AC durch B schneidet die Gerade CD in F. Dann ist $CF = a$, also $DF = a + c$ und $BF = e$.
Da das Dreieck $\triangle BFD$ rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras $e^2 + f^2 = (a+c)^2$.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 6 - 030936
Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.
(2) Brigitte hat den Ball nicht.
(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

1. Fall: Die 1. Aussage ist richtig, dann hat Anna den Ball. Brigitte kann also den Ball nicht haben, womit die 2. Aussage ebenfalls wahr ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Verabredung.

   Somit ist die Annahme, dass die 1. Aussage wahr ist, falsch.

2. Fall: Die 2. Aussage ist richtig, dann hat Brigitte den Ball nicht. Laut Verabredung sind die anderen beiden Aussagen falsch, also gilt deren Umkehrung: Anna hat den Ball nicht, sowie: Claudia hat die Schere.

   Wenn nun Anna und Brigitte den Ball nicht haben, muss ihn Claudia haben, was allerdings im Widerspruch zur Aussage, dass Claudia die Schere hat, steht. Damit ist auch die 2. Annahme falsch.

3. Fall: Die 3. Aussage ist richtig, dann hat Claudia die Schere nicht. Nun müssen die 1. und 2. Aussage umgekehrt werden, damit sie richtig sind: Anna hat den Ball nicht. Brigitte hat den Ball.

   Dies bedeutet, dass Anna die Schere und Claudia den Bleistift hat. Hierin steckt kein Widerspruch, weshalb dieser Fall die Lösung ist.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

6.6 IV. Olympiade 1964

6.6.1 I. Runde 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040911
Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

"Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt."

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

a seien die verflossene Tage, b die noch übrigen Tage, wobei $a+b = 365$ gilt, da kein Schaltahr angenommen wird. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = a \qquad \Rightarrow \qquad b = 1{,}5a$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $2{,}5a = 365$, also $a = 146$. Der 146. Tag des Jahres ist der 26. Mai.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 040912
Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge $CBAD$. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge $ADBC$. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Es gibt 6 Fälle zu untersuchen, wenn man die Erwartung des Sportlehrers zugrunde legt, da 2 Plätze stimmen. Die restlichen beiden Plätze entstehen nämlich, indem man die Erwartung des Sportlehrers dieser beiden Plätze vertauscht.

Fallunterscheidung:
1. ADCB - entfällt, da laut allgemeiner Erwartung die Reihenfolge AD nicht vorkommen kann.
2. ACBD - entfällt, da D dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
3. ABDC - entfällt, da B dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
4. CDBA - entfällt, da C dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
5. BDAC - entfällt, da A dann in der 1. Schätzung richtig wäre.
6. DABC - einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

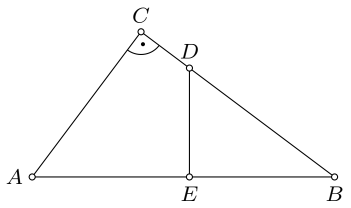
Aufgabe 3 - 040913
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Es gilt $u = \overline{EB} + \overline{BD} + \overline{DE}$ mit $\overline{BD} = 15$.

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DBE$ sind einander ähnlich mit 2 gleichen Winkeln:

$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ sowie $\measuredangle ACB = \measuredangle DEB = 90°$.



Damit gilt nun:

$$\overline{EB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} : \overline{AB} = 20 \cdot 15 : 25 = 12$$

sowie nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Dadurch ergibt sich in obiger Gleichung: $u = 12 + 15 + 9 = 36$. Der Umfang des Dreiecks $\triangle BDE$ beträgt also 36 mm.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 4 - 040914
Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, dass $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

a) Es ist $p < q$. Teilt man durch q (erlaubt, weil $Q < 0$ ist) ergibt sich $\frac{p}{q}$ <. Teilt man durch p wird $1 < \frac{q}{p}$ also

$$\Rightarrow \frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}$$

b) Aus $p < q$ wird $p(q-p) < q(q-p)$. Teilt man durch pq ergibt sich

$$1 - \frac{p}{q} \quad < \quad \frac{q}{p} - 1$$

Dies bedeutet, dass der Abstand von $\frac{p}{q}$ zu Eins kleiner als der Abstand von $\frac{q}{p}$ zu Eins ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 040915
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

a) Die Diagonalen des Rechtecks sind Durchmesser des Kreises und müssen sich somit im Mittelpunkt M des Kreises schneiden (Umkehrung des Satzes von Thales).

Die Dreiecke AMD und MBC sind gleichschenklig und kongruent (SSS: AD=BC, weil gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich groß sind und $AM = MD = BM = MC$, weil sich die Diagonalen (gleich lang) im Rechteck halbieren). Daraus folgt, dass die Winkel MAD, ADM, CBM und MCB gleich groß sind (Größe sei mit α bezeichnet).

Daraus wiederum folgt, da die Tangente jeweils senkrecht zu der Strecke zu M ist, dass die Winkel DAE, EDA, GBC und BCG 90° - α betragen und somit gleich groß sind. Also sind die Dreiecke EAD und BGC gleichschenklig und kongruent (WSW). Daraus folgt, dass $DE = EA = BG = GC$ ist.

Wenn man analog die Dreiecke ABM und DMC bzw. AFB und DCH betrachtet, folgt, dass $HD = AF = FB = CH$ ist.

Beide Gleichungen addiert ergibt: $DE + HD = EA + AF = BG + FB = GC + CH$ und somit: $HE = EF = FG = GH$.

Damit sind also die Seiten des Tangentenvierecks gleich lang - es ist also ein Rhombus.

b) Da in einem Rhombus, die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, gilt, dass die Winkel AED und CGB gleich groß sind.

Betrachtet man nun die Vierecke $AMDE$ und $BGCM$, so fällt auf, dass sie kongruent zueinander sind (Drei Winkel gemeinsam: zwei rechte Winkel und $AED = CGB$).

Somit sind also jeweils die vierten Winkel der Vierecke gleich groß, was bedeutet, dass sie gleichzeitig Scheitelwinkel sind und somit die Strecken AC und BD keine Dreiecke und gleichzeitig die Durchmesser des Kreises sind.

Durch den Satz des Thales folgt, dass die Winkel des Vierecks $ABCD$ alle rechtwinklig sind und es somit ein Rechteck ist.

Aufgabe gelöst von Kristin Steinberg

6.6.2 II. Runde 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040921
In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent.
Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wie viel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wie viel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,2 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p.
Daraus folgen: 60 % = 30 Arbeiter und 100 % = 50 Arbeiter. In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, lässt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern.

Aufgabe 2 - 040922
Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

1) Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$

2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92

3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$

4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Die beiden Faktoren seien $100 - a$ und $100 - b$, wobei gilt $0 < a < 10$ und $0 < b < 10$. Dann erhält man als Produkt

$$(100 - a)(100 - b) = 10000 - 100a - 100b + ab$$

Nach der Methode von Pataki erhält man schrittweise

$$100 - a + 100 - b = 200 - a - b \tag{1}$$

Wegen der Einschränkung für a und b hat diese Zahl an der Hunderterstelle eine Eins.

$$200 - a - b - 100 = 100 - a - b \tag{2}$$
$$ab \tag{3}$$
$$100(100 - a - b) + ab = 10000 - 100a - 100b + ab.$$

Also ist das Verfahren für derartige Faktoren gültig.

Aufgabe 3 - 040923
Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Man bezeichnet die drei Punkte mit A, B und C und fasst sie als die Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c auf. Die Radien der drei Kreise um A, B und C seien (in dieser Reihenfolge) x, y und z. Dann gilt:

$$x + y = c; \qquad y + z = a; \qquad z + x = b$$

Daraus folgen:

$$x = \frac{-a+b+c}{2}; \qquad y = \frac{a-b+c}{2}; \qquad z = \frac{a+b-c}{2}$$

Aufgabe 4 - 040924
Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.

(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.

(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.

(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.

(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.

(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.

(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.

(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

(9) Herr Drossel führt Aufsicht in Raum 48. (wegen (1) und (5))

(10) Jutta arbeitet in Raum 49. (wegen (1), (2) und (7))

(11) Günter arbeitet in Raum 50, Klaus in 48. (wegen (1), (10) und (6))

(12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel. (wegen (8), (9) und (11))

(13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär. (wegen (12) und (4))

(14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler. (wegen (12) und (13))

(15) Herr Adler führt Aufsicht in Raum 50. (wegen (3), (9), (10), (14))

(16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht in Raum 49. (wegen (4), (13) und (9) und (15)).

Lösungen der II. Runde 1964 übernommen von [5]

6.6.3 III. Runde 1964, Klasse 9

Aufgabe 1 - 040931
Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so dass es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.
In wie viel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seinen a und b, die herzustellende Gesamtmenge sei p. Dann gilt $12(a+b) = p$.
Die restlichen fünf Sechstel soll das Werk B in x Tagen schaffen. Da $a = 1{,}5b$ ist, gilt $12 \cdot 1{,}5b + 12b = p$. Daraus folgt $30b = p$.
Das heißt: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung.

Aufgabe 2 - 040932
Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.
Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5\cdot 7} + \frac{6}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \frac{6}{11\cdot 13} + ... + \frac{6}{31\cdot 33}$$

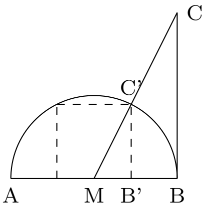
Man klammert zunächst 3 aus. Jeder der Summanden von der Form $\frac{2}{a(a+2)}$ lässt sich als Differenz zweier Brüche schreiben:

$$\frac{2}{a(a+2)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}$$

Daher lautet die zu berechnende Summe

$$x = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \pm ... - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right) = 3 \cdot \frac{28}{165} = \frac{28}{55}$$

Aufgabe 3 - 040933
Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!



$ABCD$ sei das geforderte Quadrat, M der Mittelpunkt des Halbkreises und E ein Endpunkt des Durchmessers. Es gilt $MB : BC = 1 : 2$.
Die Senkrechte zu AE in E schneidet die Verlängerung von MC im Punkt P. Dann gilt $\triangle MBC \sim \triangle MEF$. Daraus folgt:

$$ME : EF = MB : BC = 1 : 2$$

Also gilt $EF = 2ME$.

Konstruktion:
Man errichtet auf dem Durchmesser in E die Senkrechte und trägt auf ihr $EF = 2ME$ ab.
Man verbindet M mit F und erhält C als Schnittpunkt von MF mit dem Halbkreis. Danach ist das Quadrat leicht zu konstruieren.

2.Lösung:
Seien A, B die Ecken des Halbkreises und M der Mittelpunkt, Konstruiere in B eine Strecke der Länge $|AB| = 2r$ senkrecht zur Gerade AB mit Endpunkt C.
Der Schnittpunkt der Gerade MC und des Halbkreises ist eine Ecke des gesuchten Quadrats. Mittels Spiegelung und Lot erhalten wir die anderen 3 Ecken.
Wenn C' der so konstruierte Schnittpunkt der Gerade MC mit dem Halbkreis ist und B' der Fußpunkt des Lots durch C' auf der Strecke AB ist, dann ist MB' genau halb so groß wie $B'C'$ nach Strahlensatz und es entsteht das gesuchte Quadrat.

Aufgabe 4 - 040934
Ist die folgende Aussage richtig?
Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Bezeichnet man die erste Zahl mit n, so erhält man

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

d. h., das Produkt vier beliebiger aufeinander folgender Zahlen vermehrt um eins ist ein Produkt, also ist die Aussage wahr.

Aufgabe 5 - 040935
Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus: "Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."
Inge: "Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."
Günter: "Die Zahl ist kleiner als 3."
Monika: "Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."
Bärbel: "Die Zahl ist irrational."
Peter: "Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."
Ferner erfährt er, dass von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.
Wie heißt die Zahl?

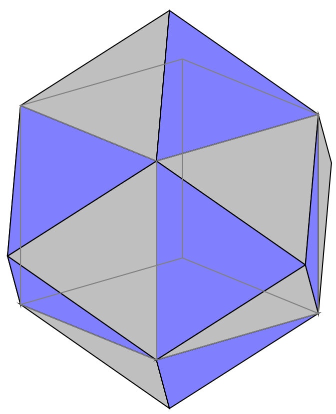
Wenn Peter die Wahrheit gesagt hätte, müsste Bärbels Feststellung falsch sein, da von beiden genau einer die Wahrheit gesagt haben soll.
Diese Annahme führt zum Widerspruch, da auch Peter die Zahl als irrational charakterisiert hat. Also hat Bärbel die Wahrheit gesagt.
Demnach ist die Aussage von Klaus falsch und Inges Angabe stimmt. Aus ihr folgt: $x = \frac{1}{\pi}$

Die Aussagen von Günter und Monika sind überflüssig.

Aufgabe 6 - 040936
Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

1. Wie viel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a, und die Dreiecke sind alle untereinander kongruent.



Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.
2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfel und
3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide. Seine Größe ist mithin $45° + 90° + 45° = 180°$.

Die beiden benachbarten Dreiecke liegen in also derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenklig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eine Rhombus. Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in einer Ebene. Die Rhomben sind untereinander kongruent.

Wir zeigen noch, dass die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben; wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe 45°; die Länge $\frac{a}{2}$.
Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2(\frac{a}{2})^2}$, d. h. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich a und $a\sqrt{2}$.

Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen $\frac{1}{3}(a^2\frac{a}{2})$, d. h. $\frac{a^3}{6}$.
Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen $2a^3$.

Lösungen der III. Runde 1964 übernommen aus [5] *und bearbeitet*

6.7 V. Olympiade 1965

6.7.1 I. Runde 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050911
Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müsste die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Für den Bau ohne Vorrichtung werden für x Werkstücke 30 min benötigt. Für den Bau mit Vorrichtung 20 min plus der 240 min für den Bau der Vorrichtung.
Ab welcher Werkstückanzahl lohnt sich der Bau der Vorrichtung?

$$30x > 20x + 240 \rightarrow x > 24$$

Werden mehr als 24 Werkstücke hergestellt, bringt der vorherige Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

Aufgabe 2 - 050912
Es ist zu beweisen, dass 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, dass jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müssten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also $77 \cdot 15$.

Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung von Telefon B zu Telefon A ist, müsste die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.
Das ist jedoch unmöglich, da $77 \cdot 15$ eine ungerade Zahl ergibt.

Aufgabe 3 - 050913
Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

Setzt man den Zähler von A gleich x und den Nenner von A gleich y, so erhält man

$$A = \frac{x}{y} \text{ und } B = \frac{x+1}{y+2}$$

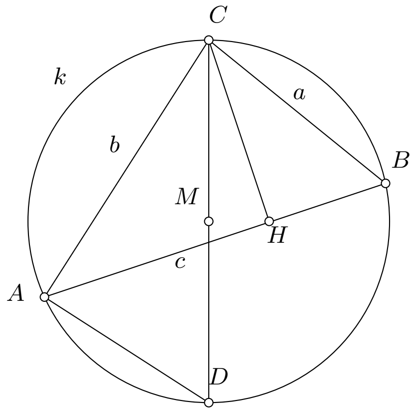
und weiter

$$A - B = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2x - y > 0$ und wegen $y > 0$ weiter $A - B > 0$. Es gilt also $A > B$.

Aufgabe 4 - 050914
Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.



Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit A, B und C, dass keiner der Dreieckswinkel größer als der bei C ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit a, b und c (siehe Bild). Dann ist AC nicht Durchmesser des Umkreises k, weil sonst der Winkel bei B ein rechter und daher größer als der bei C wäre. Ist CD Durchmesser des Umkreises k, so ist $D \notin g_{AC}$.

H sei der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Dann gilt, wenn r der Umkreisradius ist, $|CD| = 2r$ und für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC, wenn noch $|HC| = h_c$ gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \tag{1}$$

Nach Definition von H ist $|\angle BHC| = 90°$, und nach dem Satz von Thales gilt

$$|\angle DAC| = 90°. \tag{2}$$

Der Punkt B liegt auf derselben Seite von g_{AC} wie D, denn andernfalls lägen B und D nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Dann wäre $ABCD$ ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach folgendem Satz:

> $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, wenn also $|\angle ABC| + |\angle CDA| = 180°$ ist.

$$|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180°. \tag{3}$$

Wegen (2) ist $|\angle ADC| < 90°$ und folglich wäre wegen (3) $|\angle ABC| > 90°$ im Widerspruch dazu, dass $\angle ACB$ größter Winkel im Dreieck ABC ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle CBA \simeq \angle CDA$. Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle BCH \sim \triangle DCA$. Daraus folgt

$$a : h \quad = \quad 2r : b, \quad \text{d.h.} \quad h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

$$I \quad = \quad \frac{abc}{4r}.$$

Aufgaben der I. Runde 1965 gelöst von Manuela Kugel

6.7.2 II. Runde 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050921
Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Die Gleichung
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$
ist wegen
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$
$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab \cdot (a+b) = 0$$
$$ab \cdot (a+b) = 0$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

a) $a = 0$, b beliebig rational,

b) $b = 0$, a beliebig rational,

c) $a = -b$, b beliebig rational.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 050922
28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1.
Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.
Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.
Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten.
Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.
Wie viel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit y, und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit x, so müssen x und y der folgenden Gleichung genügen:
$$2x + 5y + 6 = 28, \quad \text{also} \quad 2x + 5y = 22 \tag{1}$$
Daher muss y gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung $y \neq 0$ und $x > 1$ gilt, ist (1) nur für $y = 2$ und $x = 6$ erfüllt. Die Anzahl der Teilnehmer betrug also:
Beim Kugelstoßen $2 \cdot 6 + 2 + 6 = 20$ Schüler, beim Weitsprung $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler und beim 100-m-Lauf $5 \cdot 2 + 6 = 16$ Schüler.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 050923
Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:
"Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ."

a) Wie alt war da die Schwester?
b) Wie viel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Größen: b = jetziges Alter des Bruders, s = jetziges Alter der Schwester, t = jetziges Alter der Tante.
"Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin" bedeutet

$$s - (t - (b + s)) = b \Rightarrow t = 2s$$

"Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ." ergibt

$$s - (t - s) = s - (2s - s) = s - s = 0$$

a) Die Schwester wurde gerade geboren.

b) Die Tante ist jetzt doppelt so alt wie die Schwester.

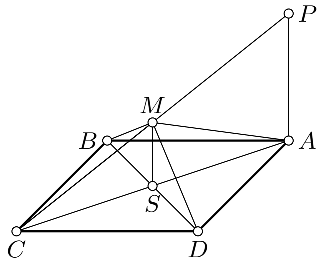
Aufgabe gelöst von Matthias Lösche

Aufgabe 4 - 050924
In einer Ebene ϵ ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ϵ durch A.
Es ist zu beweisen, dass die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser PC liegen.

Der Mittelpunkt M der Strecke PC ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser PC. Die Punkte A, B und D liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

ist (siehe Bild).



Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von M auf ϵ. Sein Fußpunkt S liegt wegen $MS \parallel PA$ auf AC.
Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen $|CM| = |MP|$

$$|CS| = |SA|$$

Also ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Die Dreiecke CSM, ASM, BSM und DSM sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent. Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

Die Punkte A, B, C, D und P liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{1}{2}|PC|$, also mit dem Durchmesser PC.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

6.7.3 III. Runde 1965, Klasse 9

Aufgabe 1 - 050931
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar).
n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und lässt sich daher schreiben als

$$n = 3m + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3m + 2$$

mit passend gewähltem ganzzahligem m. Dann ist

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \qquad \text{oder}$$

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

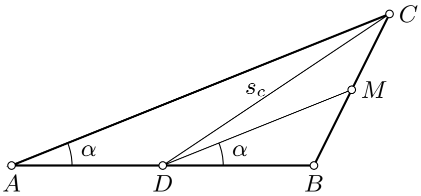
Aufgabe 2 - 050932

a) Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$, wenn α, a und s_c gegeben sind. Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\angle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

I. Analyse:
Angenommen, ABC sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen. Bezeichnet M den Mittelpunkt von BC und D der Mittelpunkt von AB, dann liegt D

1) auf dem Kreis k um C mit dem Radius s_c.
2) auf einem zu α gehörigen Ortskreisbogen $\overset{\frown}{\mathrm{b}}$ über BM.



Beweis:
1) gilt auf Grund der Definition des Kreises
2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt $DM \parallel AC$ und somit $\angle BDM \cong \angle BAC$ (als Stufenwinkel an Parallelen), so dass nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes D auf $\overset{\frown}{\mathrm{b}}$ liegt.
Der Punkt A liegt
1) auf dem von B ausgehenden Strahl durch D (ausschließlich B)
2) auf dem Kreis um D mit dem Radius $|BD|$.

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass D Mittelpunkt von AB ist. Daher können AmB, C nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion
Man zeichne die Strecke BC der gegebenen Länge a. Danach konstruiere man den Mittelpunkt M von BC. Um C schlage man den Kreis k mit dem gegebenen Radius s_c, und über BM errichte man einen zu α gehörigen Ortskreisbogen $\overset{\frown}{\mathrm{b}}$.

Ist D ein gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{b}$, so trage man auf dem von B ausgehenden Strahl durch D von D aus nach der B nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge $|BD|$ ab, deren zweiter Endpunkt A sei.

III. Satz:
Sind A, B, C gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $|BC| = a$, D Mittelpunkt von AB und $|CD| = s_c$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $|\angle BDM| = \alpha$ und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen $\angle BDM \cong \angle CAB$, so dass $|\angle CAB| = \alpha$ ist.

IV. Determination:
Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls D existiert, ausführbar.
Der Punkt D existiert, wenn

$$\begin{array}{lll} 1) & \alpha \geq 90^\circ; & \frac{a}{2} < s_c < a \\ 2) & \alpha < 90^\circ; & d - r \leq s_c < d + r \end{array}$$

In allen anderen Fällen existiert D nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 050933
Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).
Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in Bezug auf die Reihenfolge) endet!

Es sei

$$x = 100c + d, \qquad d = 10a + b$$

und a, b, c natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Dann gilt

$$(100c + d)^2 = 100e + d \qquad \text{, e natürliche Zahl}$$

$$10000c^2 + 200cd + d^3 = 100e + d$$
$$100e = 10000c^2 + 200cd + d^2 - d$$
$$e = 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100}$$

Es ist e genau dann ganzzahlig, wenn $d(d - 1)$ durch 100 teilbar ist. Da d und $d - 1$ nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muss einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen $d < 100$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür

d	$d-1$	$100\mid(d^3-d)$	d	$d-1$	$100\mid(d^3-d)$
0	-1	ja	1	0	ja
25	24	ja	26	25	nein
50	49	nein	51	50	nein
75	74	nein	76	75	ja

Folgende geordnete Paare (a,b) und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung: $(0; 0), (0; 1), (2; 5)$ und $(7; 6)$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 050934
Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} \qquad ; \qquad x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2}$$

Daraus folgt $|x_2| > |x_1|$ für $a > 0$ und $|x_1| > |x_2|$ für $a < 0$.

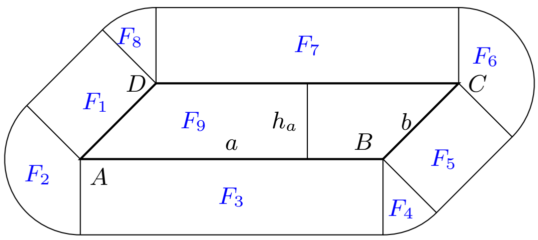
Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 050935
In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $(a > b)$ und $AE = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.
Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Für $2r \geq h_a$ wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen.
2. Für $2r < h_a$ wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn h_b die zur Seite BC gehörige Höhenlänge des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet, $ah_a = bh_b$, und somit, weil $a > b$ vorausgesetzt ist, $h_a < h_b$, und daher auch $2r < h_b$.

Im Fall 1) lässt sich überstrichene Fläche F in die Teilflächen F_1 bis F_9 zerlegen.



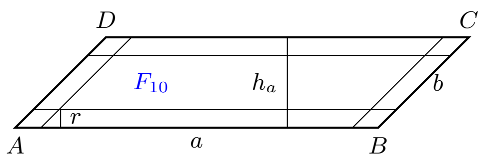
Dabei sind

- F_1 und F_5 Rechtecke mit den Seitenlängen a und r,
- F_3 und F_7 Rechtecke mit den Seitenlängen b und r,
- F_2, F_4, F_6 und F_7 Kreissektoren, die im Radius r übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe 360° ergänzen. Daher kann man die vier Kreissektoren zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

Also gilt für den Flächeninhalt $I(F)$ der überstrichenen Fläche

$$I(F) = 2(I(F_1) + I(F_3)) + I(F_9) + \pi r^2 = 2(ar + br) + \pi r^2 + ah_a$$

Im Fall 2 entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Fall 1. Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche F_{10} frei.



F_{10} ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge $(a - 2x)$ und der zugehörigen Höhe $(h_a - 2r)$, wobei x die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist.
Nach dem 2. Strahlensatz gilt $x : r = b : h_a$ und damit $x = \frac{br}{h_a}$.
Also gilt für den Inhalt $F(F')$ der überstrichenen Fläche im Fall 2

$$I(F') = I(F) - I(F_{10}) = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left(ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a}\right) =$$

$$= 4\left(ar + br - \frac{br^2}{h_a}\right) + \pi r^2$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 050936
Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, dass sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.
Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.
Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.
Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.
Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden.
Wie viel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit x, so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}$$

Renate nimmt

$$2 + \left(\frac{2x-2}{3} - 2\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9}$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{2x+10}{9} = \frac{4x-16}{9}$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4x-16}{27}$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9} - \frac{4x-16}{27} = \frac{8x-32}{27}$$

Laut Aufgabe gilt

$$x - \frac{8x-32}{27} = 42$$

und somit $x = 58$. Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

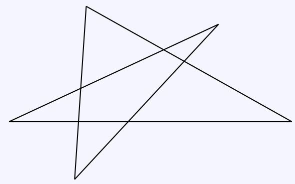
Übernommen aus [5]

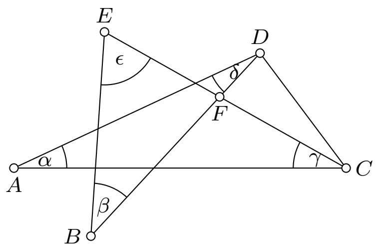
6.8 VI. Olympiade 1966

6.8.1 I. Runde 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060911

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.





Es seien: $\alpha = \angle CAD$; $\beta = \angle EBD$; $\gamma = ACE$; $\delta = \angle BDA$; $\epsilon = \angle BEC$. Im Dreieck $\triangle ACD$ gilt dann nach Innenwinkelsummensatz:

$$180° = \alpha + \gamma + \angle ECD + \angle CDB + \delta$$

Unter Nutzung des Innenwinkelsummensatzes in Dreieck $\triangle CDF$:

$$= \quad \alpha + \gamma + \delta + (180° - \angle CFD)$$

Ferner gilt: $\angle BFE = \angle CFD$, weil sie zueinander Scheitelwinkel sind. Ferner gilt der Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BFE$:

$$= \alpha + \gamma + \delta + 180° - \angle BFE = \alpha + \gamma + \delta + 180° - (180° - \beta - \epsilon) = \alpha + \gamma + \delta + \beta + \epsilon$$

Dies ist die Summe aller 5 Innenwinkel der Spitzen des fünfzackigen Sternes und beträgt somit 180°.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 060912

Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

Die erste Quersumme Q_n einer ein-, zwei- oder dreistelligen Zahl n kann maximal 27 sei, nämlich für eine Zahl ausschließlich bestehend aus der größten Ziffer 9 $\Rightarrow Q_{999} = 9 + 9 + 9 = 27$. Dies ist gleichzeitig die einzige Zahl, die diese Quersumme hat und ist eine der gesuchten Zahlen, da $Q_{27} = 9$.

Die nächstkleinere erste Quersumme, deren letzte Quersumme 9 ist, ist 18. Danach folgt nur noch die Quersumme 9, deren letzte Quersumme natürlich auch 9 ist. Wir müssen nun also noch alle Zahlen finden, deren Quersumme 9 oder 18 ist.

Im Bereich der ein- und zweistelligen Zahlen sind 9, 18, 27, ..., 81, 90 die einzigen Zahlen mit Quersumme 9 und 99 die einzige Zahle mit Quersumme 18. Dies sind in Summe 11 Zahlen.
Im Bereich 100 bis 199 kommen wir ebenfalls auf 11 solche Zahlen: 108, 117, 126, ..., 171, 180 mit Quersumme 9 sowie 189 und 198 mit Quersumme 18.

Diese Bildungsvorschrift setzt sich in jedem Hunderterbereich mit 11 Zahlen, deren Quersumme 9 oder 18 ist, fort.
Damit ergeben sich $10 \cdot 11 + 1$ Zahlen, deren Quersumme 9, 18 oder 27 und damit deren letzte Quersumme 9 ist.

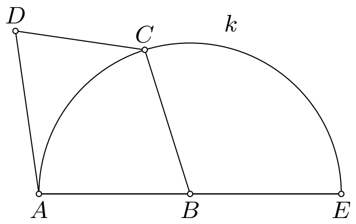
Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 060913

In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel $\angle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat
a) vier kongruente Winkel,
b) vier kongruente Seiten,
c) zwei Paare kongruenter Seiten,
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
e) zwei kongruente Winkel.



Aufgrund der Lage von A, B und E kann man feststellen, dass der Winkel $\angle ACE$ immer genau dann ein rechter Winkel ist, wenn sich C auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{AB}$ befindet. Die Lage von C ist daher definiert, aber nicht eindeutig. Gleichzeitig kann man sagen, dass die Lage von D unabhängig zu den anderen Viereckecken ist.

a) vier kongruente Winkel ⇒ falsch, da D beliebig
b) vier kongruente Seiten ⇒ falsch, da D beliebig
c) zwei Paare kongruenter Seiten ⇒ falsch, da D beliebig
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt ⇒ korrekt: gemeinsamer Punkt B und kongruente Seiten $\overline{AB} = \overline{BC}$ mit A und C auf dem Kreisbogen und B als Kreismittelpunkt
e) zwei kongruente Winkel ⇒ falsch, da D beliebig.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 4 - 060914
Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann).

Die vier Schachspieler, die die letzten 4 Plätze belegten, mussten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf.

Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl.

Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d.h. sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechsten Spieler besiegt.
Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z.B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

Übernommen aus [5]

6.8.2 II. Runde 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060921
Geben Sie vier verschiedene Paare (a,b) positiver, ganzer Zahlen an, so dass die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!
(Je zwei Paare (a,b) und (b,a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Durch die Aufgabenstellung ergibt sich folgende Gleichung:

$$105 = a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \qquad \text{3.Binomische Formel}$$

Nun wird substituiert: $x := a+b$ und $y := a-b$.
Damit gilt: $a = x - b = y + b$. Also ergibt sich:

$$b = \frac{x-y}{2} \tag{1}$$

sowie

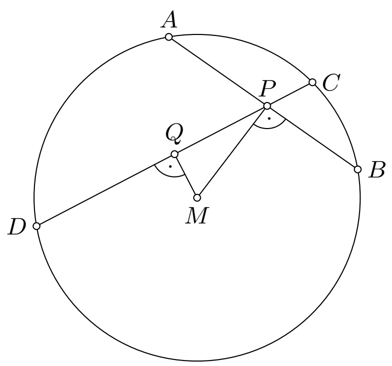
$$a = \frac{x+y}{2} \tag{2}$$

105 hat die Teiler: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Damit gibt es die folgenden möglichen Paare (x,y) mit $x \geq y$, da $a+b \geq a-b$, wenn $a,b \in N$: $(105,1),(35,3),(21,5),(15,7)$.
Nun wird wieder rücksubstituiert unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\text{Fall 1:} \quad & x = 105, y = 1 \Rightarrow a = 53, b = 52\\
\text{Fall 2:} \quad & x = 35, y = 3 \Rightarrow a = 19, b = 16\\
\text{Fall 3:} \quad & x = 21, y = 5 \Rightarrow a = 13, b = 8\\
\text{Fall 4:} \quad & x = 15, y = 7 \Rightarrow a = 11, b = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Felix Kaschura

Aufgabe 2 - 060922
Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!



Konstruktion:
Man verbindet P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu MP in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. AB ist die gesuchte Sehne.

Beweis:
Zum Nachweis, dass AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D. Dann ist der Abstand der Sehne CD von M kleiner als MP. Enthält CD den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke CD von M gleich Null. Enthält aber CD den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf CD und nennen seinen Fußpunkt Q.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MQP$ ist MP die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$. Nach dem Satz, dass von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$.
Da CD (durch P) beliebig angenommen wurde, muss AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch M und P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig. □

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 060923
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Es ist zu beweisen, dass die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müsste gelten:

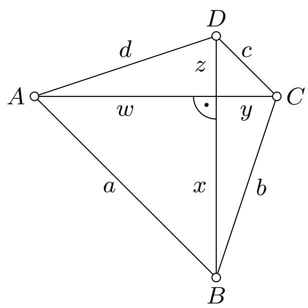
(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras:

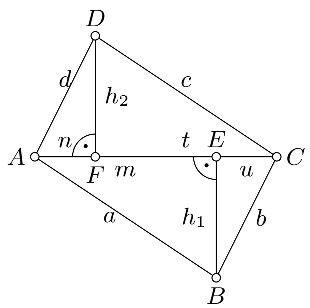
$$a^2 = x^2 + w^2 \quad , \quad b^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad c^2 = z^2 + y^2 \quad , \quad d^2 = w^2 + z^2$$

wobei x, w, z und y die Längen der Diagonalenabschnitte sind. Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$$

Also gilt (1). Ferner müsste gelten:





(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$. Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale AC eingezeichnet ist. Von den Punkten B und D werden die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien E und F.

Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur).

Dann gilt: (3) $m + u = n + t$. Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = m^2 + h_1^2 \quad , \quad c^2 = t^2 + h_2^2 \quad , \quad b^2 = u^2 + h_1^2 \quad , \quad d^2 = n^2 + h_2^2$$

also nach Voraussetzung

$$a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$$

Daraus folgt: (4) $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$ bzw. $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$, oder

$$(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$$

Wegen (3) folgt (5) $m - u = n - t$.

Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte E und F sind identisch, D, E $(= F)$ und B liegen auf derselben Gerade DB, die senkrecht zu AC verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig. □

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 060924
Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

5) Kurt, der weiß, dass Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, dass sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

Da Fred < Anton, und Anton < Eva, ist Fred < Eva. Daraus folgt das Paar Fred mit Monika. und Jürgen mit Dorothea. Aus Anton < Brigitte und Anton < Eva folgt, dass Christina mit Anton kein Paar bildet, d.h. Anton mit Inge.

Da Helmut < Anton < Eva und Helmut < Anton < Brigitte bildet Helmut mit Christina ein Paar.
Es verbleiben genau zwei Möglichkeiten für Günter, Kurt und Brigitte, Eva, und zwar die folgenden:

1. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

2. Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

6.8.3 III. Runde 1966, Klasse 9

Aufgabe 1 - 060931
Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweisen Sie, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. Also gilt

$$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$$

Da jede Primzahl > 3 eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar.
Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2 (= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zählen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist.
Da aber p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist p_2+1 durch 3 teilbar und damit $p_1+p_2 = 2(p_2+1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 060932
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Der Umfang sei u, die Seitenlängen seinen a, b, c, d, e, f, so dass

$$u = a + b + c = a + e + f = b + d + f = c + d + e$$

Addiere die ersten beiden Umfänge und ziehe die anderen beiden Umfänge ab, und wir erhalten:

$$0 = u + u - u - u = a + b + c + a + e + f - b - d - f - c - d - e = 2a - 2d$$

also $a = d$. Analog erhält man $b = e$ und $c = f$. Also haben alle vier Dreiecke Seiten mit Längen a, b und c. Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind bekanntlich kongruent.

Aufgabe gelöst von philippw

Aufgabe 3 - 060933
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit a,b bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit c. Dann ist $(a - b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$$

Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung $c \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 060934
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p+1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Sei $2p + 1 = a^3$. Dann ist a ungerade und es gilt

$$p = \frac{a^3 - 1}{2} = \frac{a - 1}{2}(a^2 + a + 1)$$

Da p prim, muss $\frac{a-1}{2} = 1$ oder $a^2 + a + 1 = 1$ gelten.
Da $a^2 + a + 1 > 1$ folgt $a = 3$ und somit $p = 13$. In der Tat ist 13 prim und es gilt $2 \cdot 13 + 1 = 3^3$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 5 - 060935
Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v1 \neq v_2$ ist.
Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also
$$\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24} \text{ m} = 280 \text{ m}$$
Das ist die Länge des Kreisumfangs.

b) Nach dem Gesagten ist
$$v_1 + v_2 = \frac{14 \text{ m}}{24 \text{ s}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$
Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit v_2 von v_1. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit
$$v_1 - v_2 = \frac{280 \text{ m}}{56 \text{ min}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$
Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ und $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Übernommen aus [5]

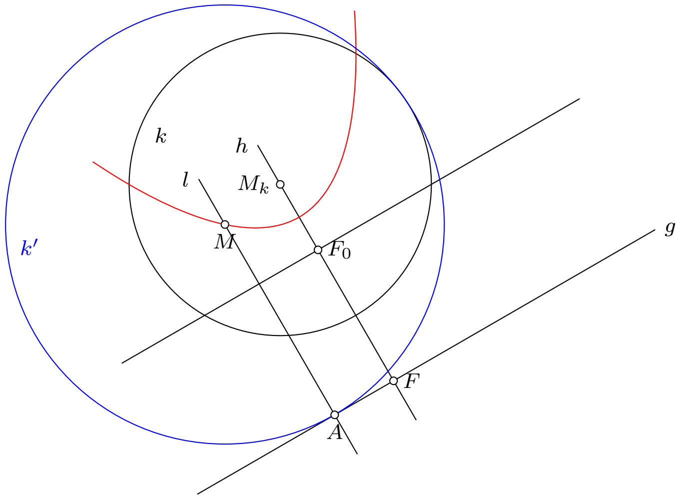
Aufgabe 6 - 060936
In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt.
Man untersuche, wie viele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann.

Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für den Mittelpunkt M von k' an falls A nicht auf g liegt und untersuchen dann, wie viele Möglichkeiten es gibt.

Wir konstruieren zunächst die zu g senkrechte Gerade h durch den Mittelpunkt von k.

Wir verschieben nun g entlang dieser Senkrechten um den Radius von k. Wir konstruieren nun die Ortslinie aller Punkte, die von der verschobenen Gerade und dem Mittelpunkt denselben Abstand haben. Dies ist eine Parabel, die symmetrisch bzgl. h ist.
Damit k' nicht nur g berührt, sondern dies auch in A tut, konstruieren wir die zu g senkrechte Gerade l durch A.
Weil l zu h parallel ist, hat diese genau einen Schnittpunkt mit der oben konstruierten Parabel. Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines gewünschten Kreises (denn der Abstand von M zum Mittelpunkt von k ist gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k).

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:



1. g ist Passante von k. Dann kann k' sowohl g als auch k nur dann berühren, wenn k' in derselben Halbebene bzgl. g liegt wie k.

   Der Mittelpunkt M von k' muss außerdem auf einer zu g senkrechten Geraden durch A liegen, damit k' die Gerade g in A berührt. Es gibt nun zwei prinzipielle Möglichkeiten, wie sich k und k' berühren können:

   Äußerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k sein) oder innerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A minus dem Radius des Kreises k sein). Beide Fälle treten genau je einmal auf (für das äußerliche Berühren zeigt das die Konstruktion von oben, dass innerliche Berühren lässt sich analog begründen, hier muss nur g zu Beginn anders verschoben werden), es gibt also genau zwei Möglichkeiten für k'.

2. g ist Tangente an k. Ist A der Berührungspunkt von k und g, so gibt es unendliche viele Möglichkeiten für k' (jeder Kreis der g in A berührt, berührt auch k).

   Ist A nicht der Berührungspunkt von k und g, so gibt es genau eine Möglichkeit für k:

   Es gibt nämlich theoretisch wieder die Fälle des inneren und äußeren Berührens wie oben, das äußere Berühren tritt genau einmal auf, dass innere Berühren jedoch nicht, denn hier liegt A auf der verschobenen Gerade, die konstruierte Ortslinie ist hier eine Senkrechte durch den Mittelpunkt von k und diese hat mit der Senkrechten zu g durch A keinen Schnittpunkt.

3. g ist Sekante an k. Ist A einer der Schnittpunkte von k und g so gibt es keine Möglichkeit für k' (denn jeder Kreis, der g in A berührt schneidet k in A).

   Liegt A außerhalb von k, so gibt es genau zwei Möglichkeiten (hier kann nämlich, anders als in Fall 1, der Kreis k' in einer beliebigen Halbebene bzgl. g liegen, da A außerhalb von k liegt ist aber nur äußeres Berühren möglich).

   Analog dazu gibt es im Fall, dass A in k liegt auch genau zwei Möglichkeiten.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Rechnerische Lösung:
Sei h der Abstand des Kreismittelpunkts von k zur Gerade g und d der Abstand vom Fußpunkt der Strecke h auf g zum Punkt A. r,r' bezeichnen die Radien. Dann erhalten wir mittels Pythagoras:

$$(h-r')^2 + d^2 = (r+r')^2 \iff h^2 + d^2 - r^2 = 2(r+h)r'$$

Nun können wir über ein rechtwinkliges Dreieck ein Quadrat mit der Fläche $h^2 + d^2 - r^2$ konstruieren und dazu ein Rechteck mit gleicher Fläche, wobei die eine Seite $2(r+h)$ bekannt ist und die andere dann den gesuchten Radius ergibt.
Falls $k \cap g \neq \emptyset \iff h \leq r$, gibt es eine zweite Lösung über die Gleichung

$$(h+r')^2 + d^2 = (r+r')^2$$

6.9 VII. Olympiade 1967

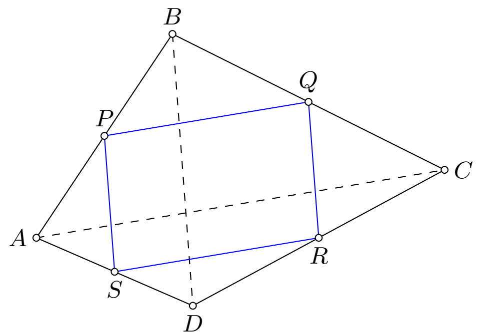
6.9.1 I. Runde 1967, Klasse 9

Aufgabe 1 - 070911
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.



Sei das konvexe Viereck $ABCD$ gegeben. Die Diagonalen sind demnach $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
Durch die Angabe, dass 2 Seiten des (vermeintlichen) Parallelogramms parallel zu $\overline{AC}$ und auch halb so groß wie $\overline{AC}$ sind, sind die 4 Eckpunkte des (vermeintlichen) Parallelogramms schon bestimmt. Denn es existiert genau eine solche Strecke im Dreieck ABC und eine im Dreieck ACD.
Die eine Strecke sei $\overline{PQ}$ mit P auf $\overline{AB}$ und Q auf $\overline{BC}$, die andere $\overline{RS}$ mit R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$.

Wir wissen nach Voraussetzung, dass $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ gilt und dass diese Strecken parallel sind. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass $\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ gilt und dass auch diese Strecken parallel sind, dann sind wir fertig.
Nach Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Daraus folgt $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Der Punkt P halbiert also die Seite auf der er liegt. Gleiches lässt sich für Q, R und S schließen.
Es gilt also $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$. Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit, dass $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ und $\overline{BD}$ zueinander parallel sind. Mit dem 2. Strahlensatz folgt direkt $\frac{\overline{PS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 070912
Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Sei y ein fünfstellige Zahl (f gesuchte Ziffern). Es ist $x = 10y + 5$ Dann gilt:

$$4 \cdot (10y + 5) = 500000 + y \qquad \to \qquad 39y = 499980 \qquad \to \qquad y = 12820$$

Damit lautet die Zahl im Dezimalsystem 128205.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 070913
Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

In einem konvexen Polygon sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Ein konvexes n-Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme $180° \cdot (n - 2)$. Es habe k rechte Winkel.

(1) Sei $k = n$. Dann wird $90° \cdot n = 180° \cdot (n-2)$, also $n = 2n - 4$ und $n = 4$.

Dies ist also nur dann möglich, wenn $n = 4$ ist. $k = n = 4$ ist bei einem Rechteck erfüllt.

(2) Sei $k < n \Rightarrow n - k > 0$
Die restlichen $n-k$ Innenwinkel (die ja existieren, weil $n-k > 0$) sind alle kleiner als 180° (konvexes Polygon!). Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 180° \cdot (n-2) &< 90° \cdot k + 180° \cdot (n-k) \\ -360° &< -90° \cdot k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

Folglich kann in diesem Fall die natürliche Zahl k, die echt kleiner als 4 sein soll, höchstens 3 sein. Bei jedem $n > 4$ ist dies auch möglich. Zum Beispiel kann ein Polygon drei rechte Winkel und $n-3$ Winkel der Größe $(180° \cdot (n-2) - 270°)/(n-3)$ haben, die Winkel haben dann die Summe $180°(n-2)$.

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 270°}{n-3} = 180° - \frac{90°}{n-3}$$

Das heißt: jeder dieser Winkel wäre kleiner als 180° und größer als 90°. Wäre ein weiterer Winkel 90°, so würde mindestens ein Winkel größer als 180° sein oder alle nicht-90°-Winkel wären gleich 180°:

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 360°}{n-4} = 180°$$

Für $n = 3$ kann es maximal einen rechten Winkel geben, da sonst das Dreieck entartet.

Antwort:
Für $n = 3$ gibt es maximal einen rechten Winkel.
Für $n = 4$ gibt es maximal 4 rechte Winkel.
Für $n > 4$ gibt es maximal 3 rechte Winkel.

Aufgabe gelöst von Annika Heckel

Aufgabe 4 - 070914
Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.
Am Tag nach dem Abschluss des Turniers hört Peter den Schluss einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, dass seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Platzierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln. Wie ist das möglich?

Da A gegen B das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben A und B je eine ungerade, C und D je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst D als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte D jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.

Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da D die letzte Mannschaft ist, hat D Null Punkte. Folglich errang C, Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

6.9.2 II. Runde 1967, Klasse 9

Aufgabe 1 - 070921
Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m,n), für die $m+n=111$ gilt.

Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Gruppen aufteilen:

1. Gruppe: Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11.
Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit $(a;b)$, $(c;d)$, dann erfüllen auch die Paare $(a;d)$, $(c;b)$; $(e;b)$, $(a;d)$ und $(c;d)$, $(a;b)$ die gleiche Bedingung.
Wegen $0+1=1$ und $9+2=11$; $8+3=11$; $7+4=11$; $6+5=11$ gibt es genau 6 derartige Paare.

2. Gruppe: Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10.
Das ergibt wegen $9+1=10$; $8+2=10$; $7+3=10$; $6+4=10$ und $5+5=10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.
Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 070922
Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a+b \neq 3; \quad a-b \neq 10; \quad a \cdot b \neq 5; \quad a:b \neq 18{,}75$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ und $a:b$ überein.
Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

Da mit $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} > 0$ auch $b = \frac{a \cdot b}{a}$ positiv ist, gilt $a-b < a+b$.
Insbesondere kann also $a-b$ nicht den größten der vier Werte annehmen. Es verbleiben zwei Fälle: $a-b=5$ oder $a-b=3$.
In beiden Fällen ist $a-b \in \mathbb{N}$. Wäre $a+b=18{,}75$, so würde $a \cdot b = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \notin \mathbb{N}$ folgen, da im Zähler dieses Bruchs von einer nicht ganzen eine ganze Zahl subtrahiert wird, also noch nicht einmal der Zähler eine ganze Zahl ist. Aber $a \cdot b \notin \mathbb{N}$ wäre ein Widerspruch, da die übrigen drei Ergebnisse alle natürlich sind. Also folgt in beiden Fällen $a+b \neq 18{,}75$.

1. Fall: $a-b=5$.

   Dann verbleibt für $a+b$ als einziger Wert die 10, was zu $a = \frac{15}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $a \cdot b = \frac{75}{4} = 18{,}75$ und $a:b=3$, also einer Lösung, führt.

2. Fall: $a-b=3$.

   Wäre $a+b=10$, so $a=\frac{13}{2}$, $b=\frac{7}{2}$ und $a \cdot b = \frac{91}{4}$, was nicht in der Liste vorkommt. Also verbleibt hier noch die Möglichkeit $a+b=5$ zu prüfen, die aber auf $a=4$, $b=1$ und $a \cdot b=4$, also auch keine Lösung, führt.

Es gibt also genau ein Lösungspaar, nämlich $(a,b) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:
Ausgehend von der Gleichung

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab \qquad (*)$$

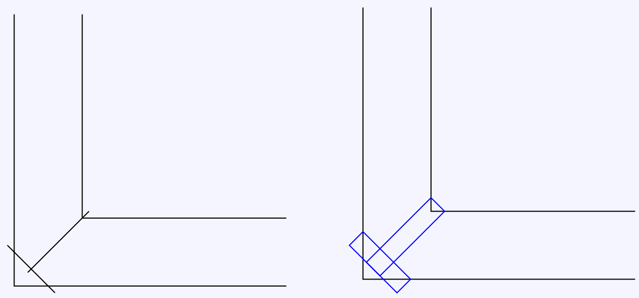
bleibt aufgrund der Tatsachen, dass 18.75 gemäß der Angabe unter den 3 Werten $a+b$,$a-b$,ab vorkommen muss, aber $a \pm b = 18.75$ auf den Widerspruch führt, dass die linke Seite von (*) im Gegensatz zur rechten nicht ganzzahlig ist, nur mehr die Möglichkeit $ab = 18.75 = \frac{75}{4}$ übrig.

Insbesondere ist also dann $a+b > \sqrt{4 \cdot \frac{75}{4}} > 8$, womit von allen dann ganzzahligen Möglichkeiten für $a+b$ nur mehr $a+b=10$ übrigbleibt, was dann wegen (*) auch sofort $a-b=5$ zur Folge hat.

Die Auflösung von $a + b = 10$, $a - b = 5$ führt dann wieder auf die einzige Möglichkeit $a = \frac{15}{2}, b = \frac{5}{2}$, welche auch tatsächlich alle Vorgaben hier erfüllt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 070923

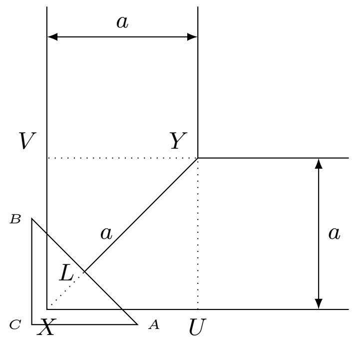


In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.
Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?
Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

Zunächst ermitteln wir die maximale Entfernung, die durch die beiden Bretter mit der Länge a überbrückt werden kann.
Dazu setzten wir laut Aufgabenstellung voraus, dass die Breite der Bretter unberücksichtigt bleibt und das diese so wie auf der Abbildung dargestellt, im rechten Winkel zueinander liegen (rote durchgehenden Linien in der Planfigur). Mithin gilt:

$$AB = LY = a \qquad (1) \qquad AL = BL = \frac{a}{2} \qquad (2)$$



Demnach ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit der Strecke CL als Höhe. Nach dem Höhensatz gilt:

$$(CL)^2 = AL \cdot BL \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt somit:

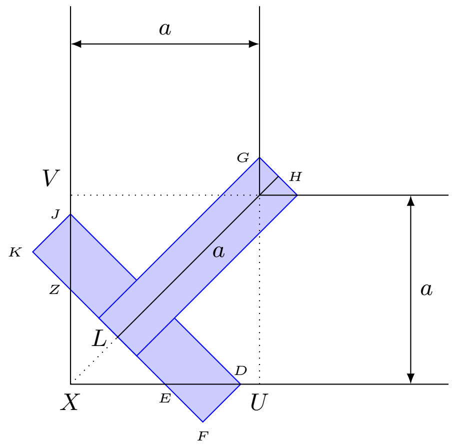
$$(CL)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ und } AL = BL = \frac{a}{2} \Rightarrow CL = \frac{a}{2} \qquad (6)$$

Wegen (2) und (6) ist damit aber auch $AL = BL = CL = \frac{a}{2}$. Damit beträgt die Länge der maximal überbrückbaren Strecke mit 2 Brettern:

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a \qquad (8)$$

Berechnen wir nun die Entfernung der beiden Grabenecken (Punkte X und Y). Laut Aufgabenstellung stellt das Viereck $XUYV$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a dar, die Strecke XY entspricht genau der Diagonalen dieses Quadrates. Für die Diagonale XY des Quadrates wird $XY = a\sqrt{2} \quad (10)$.
Vergleichen wir nun die maximal überbrückbare Strecke (8) mit der Entfernung der beiden Grabenecken (10). Es gilt $\frac{3}{2}a > a\sqrt{2}$, daher kann der Graben mit Hilfe der beiden Bretter überquert werden.

Aufgabenteil b)
Wie bereits im Aufgabenteil a) gezeigt, beträgt die Länge der Strecke $XY = a\sqrt{2}$. Weiterhin ist laut den Bedingungen der Aufgabenstellung das Dreieck ZEX rechtwinklig und gleichschenklig. In einem solchen Dreieck beträgt die Winkelgröße eines Basiswinkels genau 45°, so natürlich auch der Basiswinkel ZEX im Dreieck ZEX.



Die Winkel ZEX und DEF sind Scheitelwinkel, daher haben diese die gleiche Größe. Außerdem handelt es sich bei den verwendeten Bohlen um rechteckige Bretter, daher ist das Dreieck DEF ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig.
Mithin ist die Dreieckseite DF eben dieses Dreieckes die Breite b der verwendeten Bretter, daher gilt: $DF = EF = b$. Ein weiteres gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist das Dreieck XEL, somit ist: $XL = EL$
Die Strecke FL besteht aus den Teilabschnitten EF und EL, entsprechend den gestellten Voraussetzungen beträgt ihre Länge $\frac{a}{2}$. Demnach ist:

$$\frac{a}{2} = FL = EF + EL$$

Daraus ergibt sich durch Substitution von EF und EL: $XL = \frac{a}{2} - b$.
Das Dreieck GYH ist ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig (rechter Winkel bei Punkt H). Außerdem entspricht, wie aus der Planfigur ersichtlich, die Länge der Kathete GH der halben Breite eines Brettes, d.h. $GH = YH = \frac{b}{2}$.
Die Länge der Strecke LY ergibt sich nun aus der Differenz der Strecken LH und YH, wobei LH der Gesamtlänge eines Brettes a entspricht: $LY = LH - YH = a - YH$4.YH ersetzen wir noch erhalten somit für LY: $LY = a - \frac{b}{2}$.

Betrachten wir wieder die Strecke XY. Diese setzt sich aus den Teilstrecken XL und LY zusammen, somit ist: $XY = XL + LY$.
Die Substitution der Teilstrecken XL und LY ergibt: $XY = \frac{3}{2}(a - b)$.
Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten erhalten, die Länge der Strecke XY zu berechnen. Um schließlich das gesuchte Verhältnis $b : a$ zu ermitteln, setzen wir wie folgt fort: $XY = \frac{3}{2}(a - b) = a\sqrt{2}$.
Auflösen nach $b : a$ ergibt

$$b : a = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Das Verhältnis $b : a$ hat den Wert von $1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben.

Aufgabe gelöst von Stefan Knott

Aufgabe 4 - 070924
Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.
Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Um das Verhältnis der Oberflächeninhalte der beiden Figuren zu bestimmen, müssen diese Flächen bekannt sein. Für den Oberflächeninhalt einer Kugel gilt

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

Die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes eines regelmäßigen Oktaeders lautet:

$$A_{\text{Okta}} = 2a^2\sqrt{3}$$

Nun müssen wir den Zusammenhang zwischen dem Radius r der Kugel und der Kantenlänge a des Oktaeders herstellen. Halbiert man den Oktaeder genau zwischen den beiden Spitzen, so erhält man als Schnittfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a, die ja auch gleichzeitig der Kantenlänge des vorgegebenen Oktaeders entspricht.
Der Radius r der umschreibenden Kugel entspricht nun genau der Hälfte der Länge der Diagonalen dieses Schnittflächenquadrates, d.h. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Wir ersetzen zur Bestimmung des Oberflächeninhaltes der Kugel den Radius r und erhalten somit für die Oberfläche der Kugel:

$$A_{\text{Kugel}} = 2\pi a^2$$

Das gesuchte Verhältnis wird zu

$$\frac{A_{\text{Okta}}}{A_{\text{Kugel}}} = \sqrt{3} : \pi$$

Der Oberflächeninhalt des regelmäßigen Oktaeders verhält sich zum Oberflächeninhalt der umschreibenden Kugel wie $\sqrt{3}$ zu π.

Aufgabe gelöst von Stefan Knott

6.9.3 III. Runde 1967, Klasse 9

Aufgabe 1 - 070931
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z. Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y)$$

mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$.
Daraus folgt $11|z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $112|z$. Somit muss gelten $11|100x+y$.
Nun ist aber $100x + y = 99x + x + y$, und somit $11|x + y$.
Wegen der Einschränkungen für x und y kommt nur $1 \leq x + y \leq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.

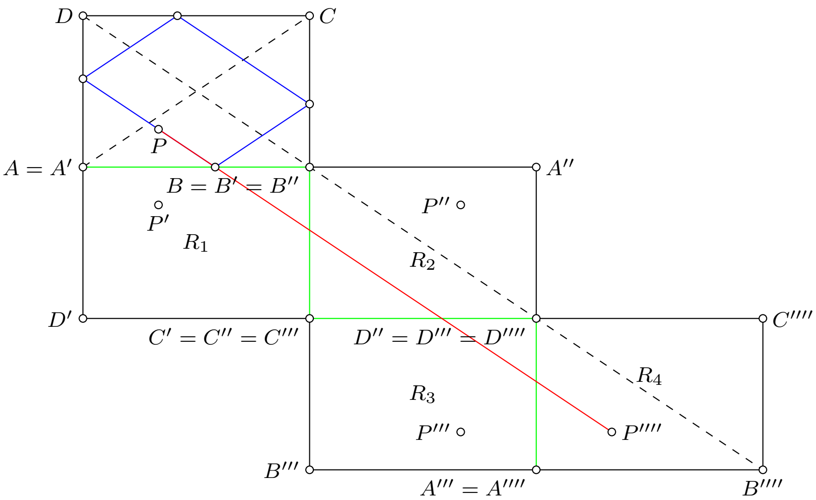
Daraus folgt $100x + y = 99x + x + y = 11(9x + 1)$ und somit $z = 11^2(9x + 1)$.
Da z Quadratzahl ist, muss auch $9x+1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leq x \leq 9$ ist dies (wie man z.B. durch Berechnung der Zahlen $9x + 1$ für $x = 1, ..., 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall.

Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$.
Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 070932
Auf einem rechtwinkligen Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.
Nach welchem Punkt von AB muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Man muss auf den Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu BD durch P zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch P eine zur Diagonalen BD parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn P im Dreieck ABD liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu malen:



Man spiegele $ABCD$ an AB. Das dadurch erhaltene neue Rechteck R_1 spiegle man an der Seite, die BC entspricht und erhalte R_2.
R_2 wiederum spiegle man an der Seite von R_2, die CD entspricht. Das Spiegelrechteck sei R_3.
R_3 spiegelt man an der Seite, die DC entspricht und erhalte R_4.
Sei P' der Punkt in R_4, der P entspricht. (Man beobachte, dass R_4 durch Verschiebung von $ABCD$ parallel zur Diagonalen BD entsteht.)
Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass wenn man die Kugel im Punkt P in die Richtung von P' stößt, man die Seiten in der gewünschten Reihenfolge trifft und anschließend wieder bei P landet.

Analog zeigt man, dass man auch zu Punkt P zurückkehrt, wenn man die Kugel parallel zur Diagonalen AC anstößt.

Lösung von Nuramon

Aufgabe 3 - 070933
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben.
Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, dass die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?

Zunächst beobachten wir, dass das Ergebnis immer die gleiche Anzahl an Ziffern hat, egal welche Ziffern man streicht.
Damit die Ergebniszahl mit mindestens fünf Neunen beginnt, muss man auf jeden Fall die Zahlen

$$1,2,...,8,10,11,...,18,20,21,...,28,30,...,38,40,41,...,48$$

und die Ziffer 4 von 49 streichen. Das sind $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern.
Es ist nicht möglich, dass das Ergebnis mit sechs Neunen startet, denn dazu müsste man auch noch die Zahlen 50,51,...,58 und die Ziffer 5 von 59 streichen, das wären dann aber schon $84 + 19 > 100$ Ziffern.
Es ist auch nicht möglich, dass das Ergebnis mit den Ziffern 999998 beginnt, denn dazu müsste man zusätzlich noch 50,51,...,57 und die 5 von 58 streichen, also insgesamt $84 + 17 > 100$ Ziffern.
Durch zusätzliche Streichung der Zahlen 50,51,...,56 und der Ziffer 5 von 57 erhält man eine Zahl, die mit 999997 beginnt und hat bisher $84 + 15 = 99$ Ziffern gestrichen.
Streicht man danach auch noch die Ziffer 5 von 58, hat man 100 Ziffern gestrichen und erhält

$$\epsilon := 999997859606162...99100$$

als Ergebnis.
Streicht man die Ziffer 5 von 58 nicht, so bekommt man eine Zahl, die mit 9999975 beginnt, also kleiner als ϵ ist.
Also ist ϵ die größtmögliche Zahl.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 070934
Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \qquad (1)$$

gilt. Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Diese Aufgabe lässt sich mit Fallunterscheidung lösen.
Es seien $0 < a \leq b \leq c$ drei natürliche Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (1).

1. Fall: $a = 1$.
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} = 1$ im Widerspruch zu (1). In diesem Fall gibt es keine Lösung.

2. Fall: $a \geq 3$
Wenn $c > 3$ ist, dann ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

im Widerspruch zu (1)

Wenn $c \leq 3$ ist, dann folgt wegen $3 \leq a \leq b \leq c \leq 3$, dass $a = b = c = 3$ gilt.
In diesem Fall ist tatsächlich $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

3. Fall: $a = 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(c+b) = bc \qquad \text{(Multiplikation mit } 2bc > 0\text{)}$$
$$\Leftrightarrow 4 = bc - 2(b+c) + 4 = (b-2)(c-2) \tag{2}$$

Wegen $b \geq= a$ muss $b \geq 2$ sein und $b = 2$ ist nicht möglich, weil $4 \neq (2-2)(c-2) = 0$.
$5 \leq b \leq c$ ist auch nicht möglich, da dann $(b-2)(c-2) \geq (5-2)(5-2) = 9 > 4$ gilt, im Widerspruch zu (2).
Es kommen also nur die Fälle $b = 3$ und $b = 4$ in Betracht.

3.1. Fall: $b = 3$
(2) $\Leftrightarrow 4 = c - 2$, also $c = 6$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.
3.2. Fall: $b = 4$
(2) $\Leftrightarrow 4 = 2(c-2)$, also $c = 4$. Tatsächlich ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Es gibt also genau zehn Lösungstripel: $(3{,}3{,}3), (2{,}3{,}6)$ und $(2{,}4{,}4)$ sowie die Permutationen des 2. und 3. Tripels.

Lösung von Kitaktus

Aufgabe 5 - 070935
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.
Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Sei S der Mittelpunkt der Strecke AB. Mittels Kosinussatz in den Dreiecken ABC und ASC erhalten wir:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos(\alpha) = \frac{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2}{2b\frac{c}{2}}$$

und somit

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - s_c^2 \iff s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Aufgabe 6 - 070936
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

Die Ungleichung ist wegen $\frac{2}{x-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2x-1}$ äquivalent zu $-\frac{1}{2x-1} > -\frac{1}{3}$, also nach Multiplikation mit (-1) und Reziprokenbildung auch zu $2x - 1 > 3$ oder $2x - 1 < 0$, d.h. $x > 2$ oder $x < \frac{1}{2}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

6.10 VIII. Olympiade 1968

6.10.1 I. Runde 1968, Klasse 9

Aufgabe 1 - 080911
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

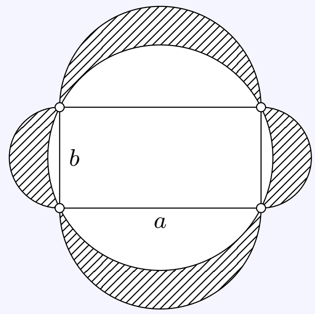
Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Nach der Aufgabenstellung ist $0{,}25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgabe 2 - 080912

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!



Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right) = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also $A_3 = ab$. Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + ab - \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 080913
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

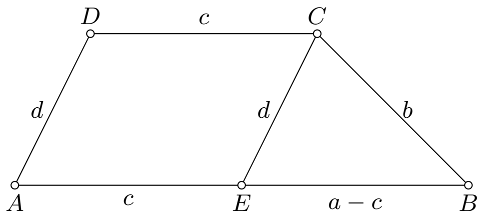
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

   $\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).

   $\triangle ABC$ ist konstruierbar aus $|CB|$, $\angle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).

   $\triangle ACD$ ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).



b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
   - Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
   - Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
   - Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
   - Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig nd hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:
$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$
Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 080914
In

```
1 * * . * *
-----------
  * * * 1
    * * * 1
-----------
  * * * 1 *
```

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Ansatz:

```
1ab.cd
------
  efg1
 hij1
------
 klm1n
```

$a..n$ sind jeweils Ziffern 0..9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d.h. eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b = 1$, $d = 1$
   $1a1 \cdot 1 = ef01 \Rightarrow e = 0, a = 0, f = 1 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$
   $101 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 1, h = 0, i = 1, j = 0 \Rightarrow 101 \cdot 1 = 0101$

2. $b = 3$, $d = 7$
   $1a3 \cdot 7 = ef01 \Rightarrow a = 4, e = 1, f = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$
   $143 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 7, h = 1, i = 0, j = 0 \Rightarrow 141 \cdot 7 = 1001$

3. $b = 7$, $d = 3$
   $1a7 \cdot 3 = ef01 \Rightarrow a = 6, e = 0, f = 5 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$
   $167 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 3, h = 0, i = 5, j = 0 \Rightarrow 167 \cdot 3 = 0501$

4. $b = 9$, $d = 9$
   $1a9 \cdot 9 = ef01 \Rightarrow a = 8, e = 1, f = 7 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$
   $189 \cdot c = hij1 \Rightarrow c = 9, h = 1, i = 7, j = 0 \Rightarrow 189 \cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

```
101*11     143*77      189*99      167*33
------     ------      ------      ------
  0101       1001        1701        0501
 0101       1001        1701        0501
------     ------      ------      ------
 01111      11011       18711       05511
```

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

6.10.2 II. Runde 1968, Klasse 9

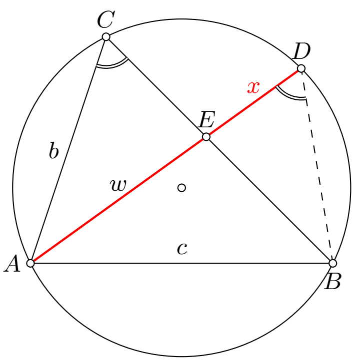
Aufgabe 1 - 080921
Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.
a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!
b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

a) Ein Beispiel ist 2,3,4,5,6.

b) Nennen wir die erste Zahl n. n muss durch 2 teilbar, also gerade sein.
$n+1$ muss durch 3 teilbar sein, also muss n bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. $n+2$ muss durch 4 teilbar sein. Da n gerade ist, ist $n+2$ auch gerade und genau dann durch 4 teilbar, wenn n nicht durch 4 teilbar ist.
$n+3$ muss durch 5 teilbar sein, also muss n bei Division durch 5 den Rest 2 lassen. $n+4$ muss durch 6 teilbar sein. Durch 2 teilbar ist es auf jeden Fall, da n gerade ist. Da n bei Division durch 3 den Rest 2 lässt ist $n+4$ auch durch 6 teilbar. Also muss n die folgenden Voraussetzungen erfüllen:
n muss gerade aber nicht durch 4 teilbar sein, bei Division durch 3 den Rest 2 lassen und bei Division durch 5 ebenfalls den Rest 2 lassen.

Lösung von ZePhoCa

Aufgabe 2 - 080922
Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!



Es seien die Seitenlängen c von AB und b von AC, so wie die Länge w der Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ bekannt. Es sei E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC und es sei D der Schnittpunkt der Verlängerung von w mit dem Umkreis. Gesucht ist die Länge x der Sehne AD.

Nach Umfangswinkelsatz gilt $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$.
Per Definition der Winkelhalbierenden w gilt außerdem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$. Also stimmen die Dreiecke ABD und AEC in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Insbesondere gilt also $\frac{x}{c} = \frac{b}{w}$, d.h. $x = \frac{bc}{w}$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3 - 080923
Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Offenbar erfüllt jede Lösung $x > y$. Es gibt also ein positives $z \in \mathbb{N}$ mit $x = y + z$. Das führt zur äquivalenten Gleichung $z(z^2 + 3yz + 3y^2) = 999$.
Es muss also z ein Teiler von $999 = 3^3 \cdot 37$ sein. Da $z(z^2 + 3yz + 3y^2)$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn z durch drei teilbar ist und weil $z \leq z^2 + 3yz + 3y^2$ gilt, bleiben nur noch die Möglichkeiten $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$ und $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$ übrig.

1. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (3, 333)$
Dann gilt $9+9z+9y^2 = 333$, also $y^2+3y = 108$. Die einzige natürliche Lösung dieser Gleichung ist $y = 9$. Das führt zur Lösung $(x,y) = (12,9)$.

2. Fall: $(z,z^2 + 3yz + 3y^2) = (9, 111)$
Dann ist $81 + 27y + 3y^2 = 111$, also $y^2 + 9y = 10$, also $y = 1$. Somit ist $(x,y) = (10,1)$ eine Lösung.
Insgesamt gibt es also genau zwei Lösungspaare, nämlich (12,9) und (10,1).

Lösung von Nuramon

Aufgabe 4 - 080924
Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.
B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.
C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.
D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.
Ermitteln Sie x.

Da eine der Aussagen von B wahr ist, muss x eine ganze Zahl sein.
Wäre Aussage D2 wahr, so wären es auch D1 und D3. Also ist D2 falsch, d.h. es muss $x < 100$ sein.
Da D1 die Aussage D3 impliziert und mindestens eine der Aussagen D1 bzw. D3 wahr sein muss, ist D3 wahr. Also ist x eine ganze Zahl mit $x \geq 10$.
C1 ist falsch, da x ganz ist. C2 ist falsch, da $x \geq 10$ ist.
Also muss C3 wahr sein, d.h. x ist eine Quadratzahl.
Aussage A1 ist falsch, denn $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} < 1$. Aussage A3 ist falsch, denn $x^3 \geq 10^3 > 221$.
Also ist A2 wahr. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten 25,49 oder 81 für x übrig. Da x Quadratzahl ist, ist B2 falsch. Also muss x gerade oder durch 5 teilbar sein. Somit bleibt als einzige Option $x = 25$ übrig. Tatsächlich erfüllt $x = 25$ die Anforderungen der Aufgabe: A1, B1, C1, D2 sind falsch und A2, B3, C3, D1 sind wahr.

Aufgabe gelöst von Nuramon

6.10.3 III. Runde 1968, Klasse 9

Aufgabe 1 - 080931
Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.
"Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64.
Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17.
Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42."
Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Wir betrachten drei Fälle. Sei immer x die betrachtete Zahl.

1. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist einstellig (d.h. $x \in \{47, \dots ,50\}$). Da $(50-x)^2$ einstellig ist, ist die gebildete Zahl dann $10(x-25)+(50-x)^2 = x^2-90x+2250$.

   Das ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, dies liegt aber nicht im betrachteten Bereich. Für diese Zahlen funktioniert das Verfahren also nicht.

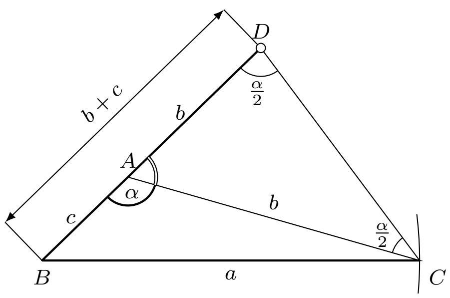
2. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist zweistellig (d.h. $x \in \{41, \dots ,46\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $100(x-25)+(50-x)^2 = x^2$, hier funktioniert das Verfahren also.

3. Das Quadrat der Ergänzung der Zahl zu 50 ist dreistellig (d.h. $x \in \{26, \dots ,40\}$). Dann erhält man mit dem Verfahren die Zahl $1000(x-25)+(50-x)^2 = x^2+900x-22500$ und dies ist genau dann gleich x^2 wenn $x = 25$, was nicht im betrachteten Bereich liegt.

Also geht das Verfahren genau dann, wenn x zwischen 41 und 46 liegt.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Aufgabe 2 - 080932
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a, b+c$ und α!
Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\angle BAC$.



Wird die Seite c eines Dreieck ABC um die Strecke b verlängert, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b+c$.
Durch die Verbindung von D und C entsteht das gleichschenklige Dreieck ACD mit dem Winkel $180° - \alpha$ an der Spitze A und zufolge mit dem Basiswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und Schenkeln der Länge b.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Ziehe die Strecke $b+c = BD$, womit die Punkte B und D festgelegt werden.
(2) Lege eine Gerade h durch D, die mit BD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.
(3) Beschreibe einen Kreis (B,a) um B vom Radius a.
Hier hängt es von der Größe des Winkels α ab, ob es zwischen h und (B,a) keinen oder zwei Schnittpunkte (C_1 und C_2) oder einen Berührungspunkt (C_1) gibt.
(4) Lege durch die Schnittpunkte aus (3) jeweils eine Gerade, die mit h den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt; welche die Strecke BD im Punkt A_1 bzw. in den Punkten A_1 und A_2 schneidet.

(5) Durch Verbindung A_1BC_1 bzw. A_1BC_1 und A_2BC_2 erhält man eine bzw. zwei Lösungen für das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 3 - 080933
Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a+b+c=s_1 & a-b+c=s_3 \\ a+b-c=s_2 & a-b-c=s_4 \end{array}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, dass die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Addition der ersten und vierten Gleichung ergibt $2a = s_1 + s_4$.
Addition der zweiten und dritten Gleichung ergibt $2a = s_2 + s_3$.

Das geht nur, wenn $s_1 = 1$ und $s_4 = 4$ oder umgekehrt und $s_2 = 2, s_3 = 3$ oder umgekehrt. Daraus folgt $2a = 5$, also $a = \frac{5}{2}$.

Für $s_1 = 1$,$s_4 = 4$ folgt dann $b + c = -\frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c + \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = -1$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = -\frac{1}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = -\frac{1}{2}$ bzw. $b = -1$.
Für $s_1 = 4$,$s_4 = 1$ folgt $b + c = \frac{3}{2}$. Auflösen nach b und einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $\frac{5}{2} + c - \frac{3}{2} + c = s_3$. Falls $s_3 = 2$ folgt $c = \frac{1}{2}$, falls $s_3 = 3$ folgt $c = 1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $b = 1$ bzw. $b = \frac{1}{2}$.

Es gibt also insgesamt die Möglichkeiten
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,3,2,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 1,2,3,4)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2},1,\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,3,2,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2},\frac{1}{2},1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 4,2,3,1)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2},\frac{1}{2}, -1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,4,1,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -1,\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 2,1,4,3)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2},1, -\frac{1}{2})$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,4,1,2)$)
$(a,b,c) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2},1)$ (wenn $(s_1,s_2,s_3,s_4 = 3,1,4,2)$)
und eine Probe ergibt, dass dies tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Aufgabe 4 - 080934
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammen, insbesondere also auch ihre Mittelpunkte. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, wobei der längere Abschnitt in Richtung der Eckpunkte liegt.
Demzufolge ist der Umkreisradius genau doppelt so groß wie der Inkreisradius und es ergibt sich ein Verhältnis von 4 zwischen Umkreisfläche und Inkreisfläche.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 080935
Es ist zu beweisen, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ durch 512 teilbar ist.

Sei $m = n^4$. Dann ist die Zahl $m^3 - m^2 - m + 1$ zu untersuchen.
Es gilt $m^3 - m^2 - m + 1 = (m - 1)^2(m + 1)$.
Da n ungerade ist, gilt $n = 2k + 1$ und damit

$$m = (2k + 1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1$$

Damit ist $m+1$ durch 2 teilbar und es gilt

$$m-1 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k = 16(k^4 + 2k^3 + k^2) + 8(k^2 + k)$$

Da $k^2 + k = k(k+1)$ gerade ist, ist also $m-1$ durch 16 teilbar. Also ist $m^3 - m^2 - m + 1$ durch $16 \cdot 16 \cdot 2 = 512$ teilbar.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Zweite Lösung:

Die zu untersuchende Zahl ist

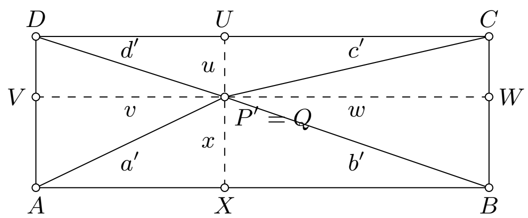
$$\begin{aligned} n^{12} - n^8 - n^4 + 1 &= n^8(n^4-1) - (n^4-1) = (n^8-1)(n^4-1) \\ &= (n+1)^2(n-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1) \\ &= ((n+1)(n-1))^2(n^2+1)^2(n^4+1) \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, sind die zu n benachbarten Zahlen $n+1$ und $n-1$ beide gerade, und eine von ihnen ist durch 4 teilbar. Demnach ist $(n+1)(n-1)$ durch 8 und das Quadrat dieser Zahl durch 64 teilbar. Die Zahlen n^2 und n^4 sind als Potenzen einer ungeraden Zahl ebenfalls ungerade, also ist n^2+1 durch 2, $(n^2+1)^2$ durch 4 und n^4+1 durch 2 teilbar. Damit ist die gegebene Zahl teilbar durch

$$2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 080936
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.
Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.



Der Abstand des Punktes P von D sei d. Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks.
Die Parallele durch Q zu (AD) bzw. (AB) schneide die Gerade (AB) bzw. (AD) in (X) bzw. (V), die Gerade (DC) bzw. (BC) in (U) bzw. (W). Es sei $PQ = h$, $QX = x$, $QU = u$, $QV = v$, $QW = w$.

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:

$$a^2 = v^2 + x^2 + h^2 \quad ; \quad b^2 = w^2 + x^2 + h^2$$
$$c^2 = u^2 + w^2 + h^2 \quad ; \quad d^2 = u^2 + v^2 + h^2$$

Daraus folgt (nach Addition)

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$$

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$). Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

Lösung übernommen von [5]

6.11 IX. Olympiade 1969

6.11.1 I. Runde 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090911
Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

T sei die Anzahl aller Teilnehmer der Kreisolympiade. Nach Aufgabenstellung sind $\frac{1}{9}$ der Teilnehmer Preisträger sowie 75%, also $\frac{3}{4}$, der Preisträger Klubmitglieder.
Einen Preis erhalten damit $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot T = \frac{1}{12} \cdot T$ der Klubmitglieder, d.h. ein Zwölftel der Teilnehmer sind folglich sowohl Preisträger als auch Klubmitglieder.

Die Anzahl der Klubmitglieder die einen Preis erhalten ($\frac{1}{12} \cdot T$) und derer die keinen Preis erhalten (6) ist gleich $\frac{1}{10}$ der Teilnehmer. Damit wird

$$\frac{1}{12} \cdot T + 6 = \frac{1}{10} \cdot T \qquad \text{und somit} \qquad T = 360$$

Die Anzahl der Teilnehmer an der Kreisolympiade war 360.

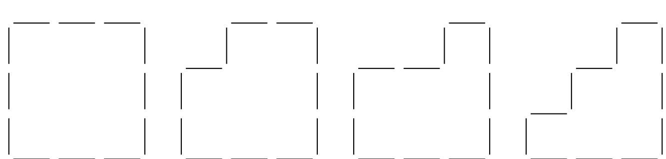
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 090912
Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

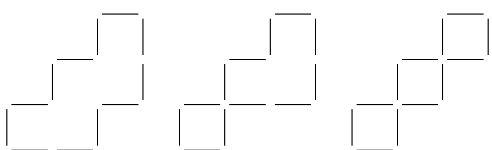
$$I_1 = 9 \text{ dm}^2, \quad I_2 = 8 \text{ dm}^2, \quad I_3 = 7 \text{ dm}^2, \quad I_4 = 6 \text{ dm}^2, \quad I_5 = 5 \text{ dm}^2, \quad I_6 = 4 \text{ dm}^2, \quad I_7 = 3 \text{ dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!



9 8 7 6



5 4 3

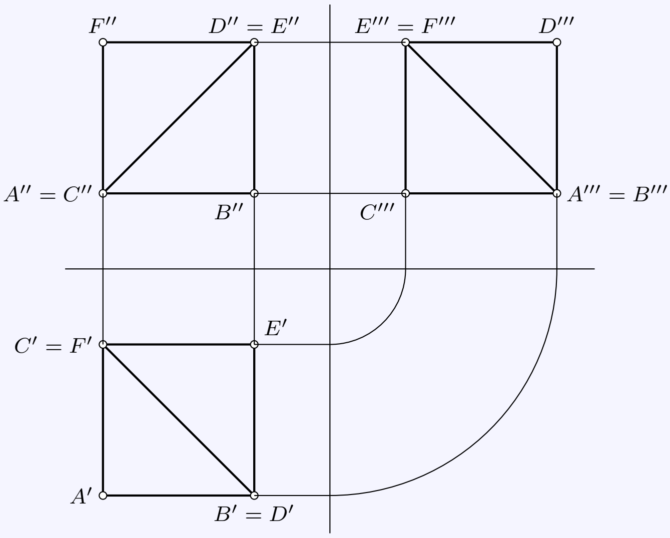
Für eine mögliche Lösungen, von denen es unendlich viele gibt, beginnt man mit einem $3 \cdot 3$ Quadrat mit der Fläche 9 welches sich mit $4 \cdot 3$ Hölzern beranden lässt. Danach klappt man schrittweise jeweils 2 Hölzchen nach innen.
Ab der Fläche 6 kann man auch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 nutzen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 090913
In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!



Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen. Des weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Das Volumen des nichtregulären Oktaeders ist das zweier vierseitiger Pyramiden über der Fläche $a\cdot\sqrt{2}\cdot a$ mit den Höhen der halben Flächendiagonalen also $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cdot\sqrt{2}a = \frac{2}{3}\cdot a^3$.

Aufgabe gelöst von Rainer Sattler

Aufgabe 4 - 090914
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9+8=17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1+7=8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4+3=7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

a) Damit die 2. Quersumme nicht erklärt ist, muss die 1. Quersumme kleiner als 10 sein. Betrachtet man nun alle Zahlen, die aus 3 Ziffern gebildet werden können (jeweils alle Ziffern von 0 bis 9), so sind damit auch alle ein- und zweistelligen Zahlen enthalten. Die folgenden Ziffern führen zu einer Quersumme von 0 bis 9:
$\{0{,}0{,}0\}$, ... $\{0{,}0{,}9\} \Rightarrow$ 10 Möglichkeiten $\{0{,}1{,}1\}$, ... $\{0{,}1{,}8\} \Rightarrow$ 8 Möglichkeiten
$\{0{,}2{,}2\}$, ... $\{0{,}2{,}7\} \Rightarrow$ 6 Möglichkeiten $\{0{,}3{,}3\}$, ... $\{0{,}3{,}6\} \Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
$\{0{,}4{,}4\}$, ... $\{0{,}4{,}5\} \Rightarrow$ 2 Möglichkeiten $\{1{,}1{,}1\}$, ... $\{1{,}1{,}7\} \Rightarrow$ 7 Möglichkeiten
$\{1{,}2{,}2\}$, ... $\{1{,}2{,}6\} \Rightarrow$ 5 Möglichkeiten $\{1{,}3{,}3\}$, ... $\{1{,}3{,}5\} \Rightarrow$ 3 Möglichkeiten
$\{1{,}4{,}4\} \Rightarrow$ 1 Möglichkeit $\{2{,}2{,}2\}$, ... $\{2{,}2{,}5\} \Rightarrow$ 4 Möglichkeiten
$\{2{,}3{,}3\}$, ... $\{2{,}3{,}4\} \Rightarrow$ 2 Möglichkeiten $\{3{,}3{,}3\} \Rightarrow$ 1 Möglichkeit
Von diesen 53 Möglichkeiten gibt es 4 Varianten mit 3 gleichen Ziffern, 26 Varianten mit einem gleichen Ziffernpaar und 23 Varianten mit sämtlich unterschiedlichen Ziffern. Die Kombination aus unterschiedlichen Ziffern ergibt jeweils $6 = 3!$, also $23 \cdot 6 = 138$ verschiedene Zahlen; bei einem gleichen Zahlenpaar gibt es je $3 = 3!/2!$, also $26 \cdot 3 = 78$ Zahlen. Insgesamt erhält man somit (da 0 bis 9 nicht, 1000 dafür aber auch noch gezählt wird) die folgende Anzahl gesuchter Zahlen:
$4 + 78 + 138 - 10 + 1 = 211$

b) 991 Zahlen werden überhaupt nur betrachtet. 211 bilden nur eine Quersumme. Also gibt es 991 - 211 = 780 Zahlen, die eine zweite Quersumme bilden. Es müssen nur noch die ausgeschlossen werden, die eine dritte Quersumme bilden. Die erste Quersumme kann maximal $27 = 9+9+9$ sein, d.h. die 2. Quersumme ist maximal 10 (genau dann, wenn die 1. Quersumme 19 ist). Und auch nur genau in diesen Fällen ist die 3. Quersumme erklärt. Wir müssen also alle die Zahlen ausschließen, deren 1. Quersumme 19 ist.

Keine zweistellige Zahl hat als Quersumme 19. Die gesuchten Zahlen sind also sämtlich dreistellig. Die Ziffern der gesuchten Zahlen bestehen aus folgenden Kombinationen und deren Vertauschungen: $\{9{,}9{,}1\}$, $\{9{,}8{,}2\}$, $\{9{,}7{,}3\}$, $\{9{,}6{,}4\}$, $\{9{,}5{,}5\}$, $\{8{,}8{,}3\}$, $\{8{,}7{,}4\}$, $\{8{,}6{,}5\}$, $\{7{,}7{,}5\}$, $\{7{,}6{,}6\}$. Unter diesen 10 Möglichkeiten gibt es je 5 mit verschiedenen Ziffern und mit einem gleichen Ziffernpaar. Damit ergeben sich analog zu a) die daraus zu bildenden Zahlen: $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$ verschiedene Zahlen mit 3. Quersumme.

Die Summe der Zahlen, die eine 2. aber keine 3.Quersumme bilden ist also 780 - 45 = 735

c) Die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist, lautet:

19.999.999.999.999.999.999.999

Es gibt keine kleinere, da die Quersumme möglichst gering gehalten werden muss, damit auch die Zahl möglichst klein bleibt. Die kleinste 2.Quersumme kann nur 19 sein, da sie die kleinste 2-stellige Zahl ist, die wieder eine 2-stellige Quersumme hat. Also muss die 1.Quersumme selbst eine Quersumme von 19 haben, wobei wiederum keine kleinere Zahl als 199 dies erfüllen kann. Die 1.Quersumme wird durch Addition aller Ziffern der Zahl gebildet. Die kleinste Zahl, die diese Quersumme bilden kann hat also möglichst wenig Stellen, d.h. von rechts her sind möglichst viele 9er aufzufüllen. Dies führt zu einer Zahl mit 1 beginnend und 22 Neunen.

Aufgabe gelöst von Julia Erhard

6.11.2 II. Runde 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090921
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:
Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, dass sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, dass jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten.
Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten.
Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiss, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?
b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

a) Eine Frage genügt nicht, da damit nur zwei Fälle ("ja"- vs. "nein"Antwort) unterschieden werden können, es aber drei Gruppen gibt. Dass es mit zwei Fragen geht, zeigt Teil b).

b) Man stelle zwei mal die gleiche Frage "Bist du ein 'Unbeständiger'?".
Ein "Wahrer" wird darauf zwei mal mit "nein" antworten, ein "Unwahrer" zwei mal mit "ja" und ein "Unbeständiger" einmal mit "ja" und einmal mit "nein" (in irgendeiner Reihenfolge).

Aufgabe 2 - 090922
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Es ist
$$V_1 = a_1^3 \qquad \text{und} \qquad V_2 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot a_2^3 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a_1)^3 = \frac{1}{3}a_1^3 = \frac{1}{3}V_1$$
sodass das Verhältnis $V_1 : V_2$ genau $3 : 1$ beträgt.

Bemerkung:
Das Volumen V eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge a ergibt sich (wie für jede Pyramide) zu $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$, wobei A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe ist.
Als Grundfläche ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a. Dessen Fläche lässt sich (wie in jedem Dreieck) via $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_g$ berechnen, wobei h_g die Länge einer Höhe im Dreieck ist.
Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt eine solche das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige, wobei eine der Katheten eines solchen Dreiecks die Höhe h_g, die zweite eine halbe Grundseite und die Hypotenuse die ungeteilte Dreiecksseite ist.
Es ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras $h_g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, also $h_g = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und damit $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Für die Höhe im regulären Tetraeder beachte man, dass sie mit der entsprechenden Schwerelinie (Verbindung eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) zusammenfällt. So ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit "Spitze des Tetraeders", "Schwerpunkt der Grundfläche" und einem Eckpunkt der Grundfläche als Eckpunkte.
Dessen Hypotenuse ist eine Kante des regulären Tetraeders, eine Kathete die Höhe h und die zweite Kathete der Abschnitt der Seitenhalbierenden in der Grundfläche zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt.
Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, wobei der Abschnitt zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt der längere ist, und da im gleichseitigen Dreieck die Höhen und Seitenhalbierenden zusammenfallen, ist dieser Abschnitt hier also $\frac{2}{3} \cdot h_g = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ lang.

Es ergibt sich für das betrachtete rechtwinklige Dreieck zwischen Spitze, Schwerpunkt und Eckpunkt nach dem Satz von Pythagoras nun also $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2$, also $h^2 + \frac{3}{9}a^2 = a^2$ bzw. $h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a$.

Zusammen mit der zuvor berechneten Grundfläche ergibt sich nun

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}a^3$$

was wir oben verwendet haben.

Aufgabe 3 - 090923
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.
Man zeige, dass sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Wir nehmen indirekt an, es gäbe zwei solche Zahlen $a > b$, die sich so bilden lassen und für die a Vielfaches von b ist. Dann gäbe es eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $a = n \cdot b$.

Da a und b aus den gleichen Ziffern gebildet werden, besitzen sie die gleiche Quersumme $1+2+\dots+7 = 28$, lassen also wegen $28 - 3 \cdot 9 = 1$ jeweils den Rest 1 bei der Division durch 9.
Demnach muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 9 lassen, damit dies auch für das Produkt $a = b \cdot n$ gilt. Also ist $n \geq 10$, sodass a mindestens eine Stelle mehr besitzen müsste als b, was ein Widerspruch ist.
Kurz: $a \equiv b \equiv 28 \equiv 1 \pmod 9$, also auch $n \equiv b \cdot n = a \equiv 1 \pmod 9$ und damit $n \geq 10$, Widerspruch.

Aufgabe 4 - 090924
Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

Sei mit S der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms, M der Mittelpunkt von AB und N der von AD bezeichnet.
Die Diagonalen AC und BD halbieren sich gegenseitig. Also ist BS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$, genauso wie CM. Damit schneiden diese sich im Schwerpunkt S_B des Dreiecks, sodass $|BS_B| = \frac{2}{3}|SB| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede seiner Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilt.
Analog ist DS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ACD$, genauso wie CN. Damit schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt S_D des Dreiecks, sodass wieder $|DS_D| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, was zu beweisen war.

Aufgaben der II. Runde 1969 gelöst von cyrix

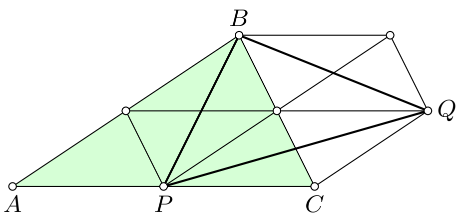
6.11.3 III. Runde 1969, Klasse 9

Aufgabe 1 - 090931
Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind.
Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

Es gibt nur fünf verschiedene Sorten von Dreiecken, d.h. jedes mögliche Dreieck gehört zu genau einer dieser Sorten.
Begründung: Für ein Dreieck mit den Ecken $X,Y,Z \in \{A,...,H\}$ seien x,y und z die Abstände zwischen jeweils zwei Ecken. (Bei dem Dreieck mit den Ecken B,C,H wäre etwa $x = 1, y = 5, z = 2$.)
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn die Tripel der zugehörigen Abstände gleich sind. Dabei spielt es aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Abstände stehen. (Etwa für das Dreieck E,G,D ist $x = 2,y = 5,z = 1$, und die Dreiecke E,G,D und B,C,H sind kongruent.)
Die Summe $x+y+z$ ist stets gleich 8. Folglich ist die Fragestellung dazu äquivalent, auf wie viele Weisen sich 8 als Summe dreier natürlicher Zahlen darstellen lässt, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt.
Hierfür gibt es nur die fünf Möglichkeiten $1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - 090932
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $s_a = 9{,}6$ cm, $s_b = 12{,}6$ cm und $s_c = 11{,}1$ cm! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!



Die Seitenmittelpunkte unterteilen das Dreieck ABC in 4 kongruente Teildreiecke. Durch hinzufügen weiterer Kopien erhalten wir das Dreieck BPQ, dessen Seiten gerade die Längen s_a,s_b,s_c haben - dieses ist an geeigneten Parallelogrammen einsehbar.
BPQ kann wie üblich konstruiert werden. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks BPQ sind parallel zu den Seiten des gesuchten Dreiecks ABC. Daher erhalten wir dieses mittels parallele Geraden durch B und P.
Insbesondere ist das Dreieck konstruierbar, falls s_a,s_b,s_c die Dreieckungleichungen erfüllen.

Aufgabe 3 - 090933
Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen.
Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Wir betrachten die Leistungen a, b und c von A, B und C. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$a = \frac{1}{m}(b+c); \qquad b = \frac{1}{n}(a+c); \qquad c = \frac{1}{p}(a+b)$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $c = am - b$, die zweite zu $c = bn - a$. Insbesondere ist also $am - b = bn - a$ bzw. $(m+1)a = (n+1)b$, also

$$b = \frac{m+1}{n+1} \cdot a \qquad \text{und} \qquad c = am - b = \frac{mn-1}{n+1} \cdot a$$

Ist $mn-1=0$, also $c=0$, dann leistet C keine Arbeit und also ist p nicht definiert. Andernfalls können wir im Folgenden durch $c\neq 0$ dividieren.
Mit der dritten Gleichung erhalten wir schließlich durch Einsetzen

$$p=\frac{a+b}{c}=\frac{\frac{n+1+m+1}{n+1}\cdot a}{\frac{mn-1}{n+1}\cdot a}=\frac{m+n+2}{mn-1}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 090934
Man beweise:
Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, dass die Zahl $11a+2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a+5b$ durch 19 teilbar.

Mit $11a+2b$ ist auch

$$12\cdot(11a+2b)-19\cdot(6a+b)=132a+24b-114a-19b=18a+5b$$

durch 19 teilbar.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Ist $11a+25$ durch 19 teilbar, so ist $2b=19k-11a$ mit einer ganzen Zahl k; also ist

$$2(18a+5b)=36a+5(19k-11a)=19(5k-a) \qquad (1)$$

Daher ist einerseits $5k-a$ gerade, d.h. $5k-a=2n$ mit einer ganzen Zahl n, andererseits folgt dann aus (1) weiter $18a+5b=19n$, w. z. b. w.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 090935
Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Darüber hinaus seien h_{AB} und h_{PQ} die Längen der Höhen des Punktes C auf AB bzw. die Parallele PQ.
Nach Aufgabenstellung ist der Flächeninhalt A_{PQC} des Dreiecks $\triangle PQC$ genau halb so groß wie der Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks $\triangle ABC$.
Also ist

$$\frac{1}{2}|PQ|\cdot h_{PQ}=A_{PQC}=\frac{1}{2}A_{ABC}=\frac{1}{4}\cdot|AB|\cdot h_{AB}$$

bzw.

$$2=\frac{|AB|}{|PQ|}\cdot\frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$$

Nach den Strahlensätzen ist $\frac{|AB|}{|PQ|}=\frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$, also $h_{AB}=\sqrt{2}\cdot h_{PQ}$. Damit wird die Höhe h_{AB} im Verhältnis $1:(\sqrt{2}-1)$ durch die Parallele PQ zu AB geteilt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 090936
Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion

$$f(x)=\frac{(x-1)x}{2}$$

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0+1 und x_0+2 mit $f(x_0+1)$ bzw. $f(x_0+2)$ bezeichnet.

Man beweise, dass dann gilt:

$$f(x_0+2) = \frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0}$$

Es ist

$$\frac{(x_0+2)f(x_0+1)}{x_0} = \frac{(x_0+2)\cdot\frac{x_0(x_0+1)}{2}}{x_0} = \frac{(x_0+2)(x_0+1)}{2} = f(x_0+2)$$

Aufgabe gelöst von cyrix

6.12 X. Olympiade 1970

6.12.1 I. Runde 1970, Klasse 9

Aufgabe 1 - 100911
Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

"Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren)

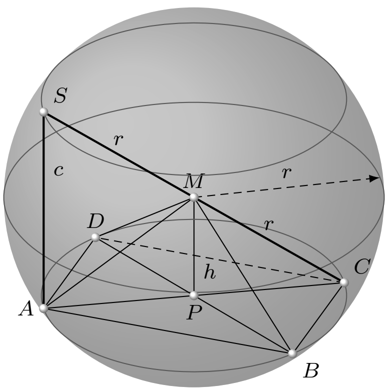
a) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, dass 9 die Quersumme und somit 27 Jahre das Alter von Herrn X ist.

b) Ist 27 Jahre das Alter von Herrn X, so ist 9 die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X zu.

Aus b) folgt, dass die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hierzu und aus a) folgt: Herr X ist 27 Jahre alt.

Aufgabe 2 - 100912
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!



a) Angenommen, k sei eine Kugel der verlangten Art, und M sei ihr Mittelpunkt. Dann haben sie Strecken MA, BM, MC, MD, MS alle die gleiche Länge, die mit r bezeichnet sei. Ist P der Fußpunkt und h die Länge des Lotes von M auf ε, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 = |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2,$$

also $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$. Daher ist P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Der Punkt M, der somit auf der in P auf ε errichteten Senkrechten s liegt, muss demnach in der Ebene ε_1 liegen, die durch die Punkte A, C und S geht; denn diese Ebene enthält die auf ε senkrechte Strecke AS, steht also auf ε senkrecht und geht durch P, sie enthält also die Gerade s.

Daher und wegen $|MA| = |MC| = |MS|$ ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ACS$. Da dieses wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, also $AS \perp AC$ bei A rechtwinklig ist, ist M der Mittelpunkt seiner Hypotenuse CS.

b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel k, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt M der Strecke CS ist und die durch C geht, die verlangte Eigenschaft. Zunächst geht k nämlich außer durch C wegen $|MC| = |MS|$ auch durch S. Ist ferner P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$, so ist

$$\triangle MPA \simeq \triangle MPB \simeq \triangle MPC \simeq \triangle MPD.$$

Also ist $|MA| = |MB| = |MD|$, und daher geht die Kugel k auch durch A, B und D.

c) Die Länge des Durchmessers der Kugel k beträgt nach dem Satz des Pythagoras

$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Aufgabe 3 - 100913
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, dass die so entstandene Zahl nicht durch 1971 teilbar ist.

Es gilt $9|1971$. Wenn die angegebene Zahl durch 1971 teilbar wäre, dann wäre sie mithin auch durch 9 teilbar. Ihre Quersumme lässt sich folgendermaßen ermitteln: Jede der Zahlen 2 bis 9 tritt in dieser Quersumme genau 300mal als Summand auf, da jede dieser Zahlen in den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 als Ziffer genau 100 mal an der Einerstelle, 100mal an der Zehnerstelle und 100 mal an der Hunderterstelle auftritt.

Die Eins tritt 301mal auf, da sie außerdem noch einmal in der Tausenderstelle vorkommt. Die Nullen bleiben unberücksichtigt, da sie für die Berechnung der Quersumme keine Bedeutung haben. Also erhält man

$$300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 \quad = \quad 300 \cdot 45 + 1.)$$

Diese Zahl ist nicht durch 9 teilbar. Daher ist auch die angegebene Zahl nicht durch 9 und damit auch nicht durch 1971 teilbar.

Aufgabe 4 - 100914
In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite:	*Ich bin die Schönste.*	(1)
Athene:	*Aphrodite ist nicht die Schönste.*	(2)
Hera:	*Ich bin die Schönste.*	(3)
Aphrodite:	*Hera ist nicht die Schönste.*	(4)
Athene:	*Ich bin die Schönste.*	(5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, dass alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

Die Aussagen 1., 3. und 5. bringen Paris nicht weiter, denn sie lauten gleich, sind wahr, wenn von der Schönsten ausgesprochen und falsch, wenn von einer anderen Göttin ausgesprochen.
Nun Fallunterscheidung und Prüfung der Aussagen 2. und 4.:

1. Fall: Aphrodite ist die Schönste. Wenn Athene dies leugnet (2.) und Aphrodite Hera wahrheitsgemäß als nicht die Schönste bezeichnet, so ergibt sich kein Widerspruch. $\Rightarrow$ Aphrodite kann die Schönste sein.

2. Fall: Athene ist die Schönste. Die 4. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Hera die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

3. Fall: Hera ist die Schönste. Die 2. Aussage müsste dann aber falsch sein, da nicht von der Schönsten ausgesprochen, was bedeutet, dass Aphrodite die Schönste sei und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Damit ergibt sich die eindeutige Lösung, dass Aphrodite die Schönste ist, wenn die von Paris getroffenen Voraussetzungen genutzt werden.

Aufgaben der I. Runde 1970 gelöst von Manuela Kugel

6.12.2 II. Runde 1970, Klasse 9

Aufgabe 1 - 100921
Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A	(1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
	(2) "Ich habe den Brief nicht."
	(3) "Mein Freund hat den Brief."
B	(1) "Entweder A oder C hat den Brief."
	(2) "Alle Aussagen von A sind wahr."
	(3) "D hat den Brief nicht."
C	(1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
	(2) "Ich habe den Brief."
	(3) "B macht keine falschen Aussagen."
D	(1) "Ich habe den Brief nicht."
	(2) "Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
	(3) "B hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre C b) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, dass C c) wahr sein müsste.
Daher wären alle Aussagen, von B und wegen B b) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen B a) und A b) müsste mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.
Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.

Übernommen aus [5]

2. Lösung:
A kann den Brief nicht haben, da sonst seine Aussagen A_2 und A_3 falsch wären. (Er wird sich nicht als sein eigener Freund bezeichnen.) Auch B kann den Brief nicht haben, da sonst die Aussage A_1 und damit neben B_1 auch B_2 falsch wären. Gleiches gilt, wenn D den Brief hätte.
Es verbleibt die Frage, ob C den Brief haben kann. In dem Fall sind die Aussagen A_1 bis A_3 richtig, da C ein Freund von A ist. Damit sind auch alle Aussagen B_1 bis B_3 von B wahr sowie alle drei Aussagen von C. (Man beachte dazu bei C_1, dass die Voraussetzung der Implikation, dass C den Brief nicht selbst hätte, in diesem Fall nicht erfüllt ist, die Implikation also wahr ist.) Schließlich sind die Aussagen D_1 und D_2 (letzteres, da es eine Tautologie ist) wahr; über D_3 können wir keine Aussage treffen. Also trifft jeder der vier Freunde in diesem Fall mindestens zwei korrekte Aussagen, sodass tatsächlich C den Brief haben muss.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 100922
Jemand behauptet:
Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
b) Beweisen Sie diesen Satz!

a) $5 \cdot 25 = (1+4)(9+16) = 125 = 25 + 100 = 5^2 + 10^2$.

b) Seien a_1, a_2, b_1, b_2 natürliche Zahlen mit $a = a_1^2 + a_2^2$ und $b = b_1^2 + b_2^2$. Dann ist

$$ab = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 =$$

$$= (a_1 b_1)^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + (a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2)^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

Bemerkung: Man erhält diese Identität, indem man a, b und ab als Betragsquadrate der komplexen Zahlen $z_1 := a_1 + i \cdot a_2$, $z_2 := b_1 + i \cdot b_2$ bzw. $z_1 \cdot z_2$ interpretiert.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

a) Es gilt z.B. für $a = 5$ und $b = 13$

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 5 \cdot 13 = 65 = 1^2 + 8^2$$

b) Angenommen, a und b seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt mit natürlichen Zahlen u, v, x, y

$$a = u^2 + v^2 \qquad , \qquad b = x^2 + y^2$$

also

$$\begin{aligned} ab &= (u^2 + v^2)(x^2 + y^2) = u^2x^2 + u^2y^2 + v^2x^2 + v^2y^2 \\ &= (u^2x^2 + v^2y^2) + (u^2y^2 + v^2x^2) \\ &= (u^2x^2 + 2uvxy + v^2y^2) + (u^2y^2 - 2uvxy + v^2x^2) = (ux + vy)^2 + (uy - vx)^2 \qquad (1) \\ &= (ux + vy)^2 + (vx - uy)^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Da entweder $(uy - vx)$ oder $(vx - uy)$ und sämtliche der Zahlen u, v, x, y natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1) bzw. (2) natürliche Zahlen, d. h., ab ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 100923
Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.
a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!
b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

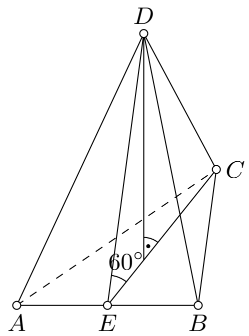
a) Durch die Wahl von m und n ist $f(x) = x$ für alle reellen Zahlen x, d.h., es sind die Lösungen der Gleichung $2 \cdot x_0 = x_0 + 2$ gesucht, was genau für $x_0 = 2$ erfüllt wird.
b) Hier ist die Gleichung $2m \cdot x_0 + 2n = m \cdot x_0 + 2m + n$ zu lösen, was äquivalent ist zu $m \cdot x_0 = 2m - n$, also $x_0 = 2 - \frac{m}{n}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 100924
Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.
In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der mit E bezeichnet sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$ auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \qquad (1)\text{sowie} \qquad |FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Da $\triangle DFA \cong \triangle DFB$ (sws) ist, gilt $|AD| = |BD|$, also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig. Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck.
Der Winkel $\angle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60°. Da $\angle EFD$ ein rechter Winkel ist, lässt sich die Fläche des Dreiecks $\triangle EFD$ als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$$

Übernommen aus [5]

2. Lösung:
Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann ist das Dreieck $\triangle CAM$ rechtwinklig mit Hypotenuse CA und es gilt

$$|CM| = \sqrt{|CA|^2 - |AM|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Damit ist $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Sei S der Schwerpunkt der Grundfläche. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt und CM eine Seitenhalbierende in der Grundfläche ist, gilt $|SM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}a$.
Die drei Punkte D, S und M bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei S und $\angle SMD = 60°$, da sowohl $SM = CM$ als auch DM senkrecht auf AB stehen. (Es ist das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $|AD| = |BD|$, also die Seitenhalbierende DM auf AB gleich der Höhe von D auf AB, also DM orthogonal zu AB.)
Nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DMS$ ist $\tan\angle SMD = \frac{|SD|}{|SM|}$, also $|SD| = \tan 60° \cdot |SM| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}a = \frac{a}{2}$.
Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot |SD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3$$

Aufgabe gelöst von cyrix

6.12.3 III. Runde 1970, Klasse 9

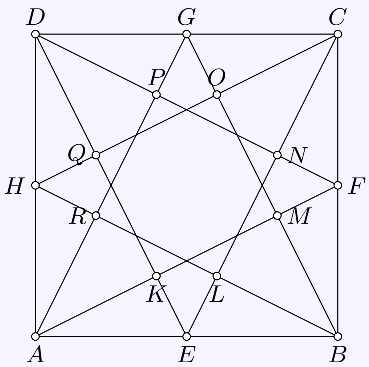
Aufgabe 1 - 100931
Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.
Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.
Aus wie viel Schülern bestand Günters Gruppe?

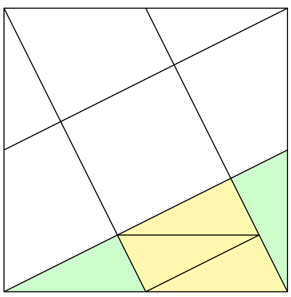
Nach (3) und (4) hatte er genau zwei mal öfter vormittags als nachmittags Tischdienst, und da er nach (2) niemals sowohl vormittags als auch nachmittags Tischdienst hatte, war er mit (1) an genau vier Tagen vormittags, an zweien nachmittags und an 13-4=11-2=9 gar nicht beschäftigt.
Das Lager dauerte damit 9+4+2=15 Tage, sodass $15 \cdot 4 = 60$ Schüler-Tischdienst-Einsätze notwendig waren. Günther war zu 6 davon eingeteilt, sodass also insgesamt seine Gruppe aus $\frac{60}{6} = 10$ Schülern bestand.

Aufgabe 2 - 100932

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet.
In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Bild).
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



Der Flächeninhalt des Sechzehnecks ergibt sich als Differenz der Fläche des Quadrats und der der acht (aus Symmetriegründen – Spiegelung an den Diagonalen bzw. den Mittelparallelen des Quadrats bzw. Hintereinanderausführungen davon überführt je zwei solche ineinander – kongruenten) Dreiecke AKL, ELB, BMF, FNC, COG, GPD, DQH und HRA.



Der Flächeninhalt des Dreiecks AED beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Dieses lässt sich zerlegen in das Dreieck AKE und das Dreieck DAK. Aufgrund der Parallelität der Geraden $AK = AF$ und $HQ = HC$ geht das Dreieck DAK durch Streckung mit Zentrum D um den Faktor 2 aus dem Dreieck DHQ hervor, da $|DA| = 2|DH|$ ist.

Sei mit x der Flächeninhalt des Dreiecks AKE bezeichnet. Dann hat also auch das Dreieck DHQ den Flächeninhalt x und das Dreieck DAK demnach den Flächeninhalt $2^2 \cdot x = 4x$.

Nach der Vorüberlegung ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED gleich $4x + x = \frac{1}{4}a^2$, sodass jedes einzelne der betrachteten "kleinen Dreiecke" den Flächeninhalt von $x = \frac{1}{20}a^2$ besitzt.
Der Flächeninhalt des Sechzehnecks beträgt demnach $a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$.

Aufgabe 3 - 100933
Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z.B. $[3,7] = 3, [-3,7] = -4, [4] = 4$.)
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$\left[\frac{10+3x}{6}\right] = \frac{5x+3}{7}$$

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist $\frac{5x+3}{7}$ ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$, für die

$$\frac{10+3x}{6} = \frac{5x+3}{7} + a$$

gilt. Daraus folgt $70 + 21x = 30x + 18 + 42a$, woraus man

$$x = \frac{52-42a}{9}$$

erhält. Wegen $0 \leq a < 1$ ergibt sich daraus

$$\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$$

und weiter

$$\frac{\frac{50}{9}+3}{7} < \frac{5x+3}{7} \leq \frac{\frac{260}{9}+3}{7} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{11}{9} < \frac{5x+3}{7} \leq \frac{41}{9}$$

also kann der Ausdruck $\frac{5x+3}{7}$ (da er ganzzahlig ist) nur gleich einer der Zahlen 2, 3, 4 sein.
Aus $\frac{5x+3}{7} = 2$ folgt $x = \frac{11}{5}$,
aus $\frac{5x+3}{7} = 3$ folgt $x = \frac{18}{5}$,
Aus $\frac{5x+3}{7} = 4$ folgt $x = 5$.

Also können höchstens $x = \frac{11}{5}$, $x = \frac{18}{5}$, $x = 5$ Lösungen von (*) sein. Tatsächlich sind dies Lösungen, denn es gilt

$$\left[\frac{10+\frac{33}{5}}{6}\right] = 2 \quad , \quad \frac{\frac{55}{5}+3}{7} = 2$$
$$\left[\frac{10+\frac{54}{5}}{6}\right] = 3 \quad , \quad \frac{\frac{90}{5}+3}{7} = 3$$
$$\left[\frac{10+15}{6}\right] = 4 \quad , \quad \frac{25+3}{7} = 4$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 100934
Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$(1) \quad x + y = 2 \qquad ; \qquad (2) \quad xy - z^2 = 1$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $xy = 1 + z^2 \geq 1$ und damit

$$0 \leq (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 2^2 - 4xy \leq 4 - 4 = 0$$

Also muss in dieser Ungleichungskette an jeder Stelle Gleichheit gegolten haben, sodass $x - y = 0$ und $xy = 1$, also $x = y = \pm 1$, und mit Gleichung (2) auch $z = 0$ folgt.

Es kann also nur zwei Lösungstripel (x,y,z) geben, nämlich $(-1,-1,0)$ und $(1,1,0)$. Die Probe bestätigt aber nur das zweite, sodass $(1,1,0)$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Zweite Lösung:

Angenommen, ein Tripel (x_0,y_0,z_0) sei Lösung von (*), (**). Dann ergibt sich, indem man z.B. $x_0 = 2-y_0$ in (**) einsetzt, $y_0^2 - 2y_0 + z_0^2 + 1 = 0$, also

$$(y_0 - 1)^2 + z_0^2 = 0 \tag{1}$$

Wäre nun $y_0 \neq 1$ oder $z_0 \neq 0$, so folgte $(y_0-1)^2 > 0$ bzw. $z_0 > 0$, also, da stets $(y_0-1)^2 \geq 0$ und $z_0^2 \geq 0$ ist, in jedem Fall $(y_0-1)^2 + z_0^2 > 0$, im Widerspruch zu (1). Daher ergibt sich aus (1), dass $y_0 = 1$ und $z_0 = 0$ sein muss.
Aus (*) folgt dann $x_0 = 1$. Also kann höchstens das Tripel $(1,1,0)$ Lösung des Gleichungssystems (*), (**) sein.
Tatsächlich ist dies Lösung, denn für $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ wird

$$x_0 + y_0 = 1 + 1 = 2 \qquad \text{oder} \qquad x_0 y_0 - z_0^2 = 1 - 0 = 1$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 100935
Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A,B,C,D und der Spitze D habe die Kantenlängen $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $BD = 12$ cm, $CD = 13$ cm, und $\angle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Da $AB^2 + AC^2 = BC^2$ gilt, ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig, wobei AB und AC seine Katheten sind.
Also beträgt sein Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6cm^2$. Da $\angle ABD = 90°$ beträgt, ist die Strecke BD auch gleichzeitig die Höhe der Spitze D über der Grundfläche ABC. Also beträgt das Volumen V der Pyramide genau $V = \frac{1}{3} A \cdot BD = 24cm^3$.

Aufgabe 6 - 100936
Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a+b+c, \angle, \gamma$ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a,b,c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\angle CAB, \angle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

1) Man zeichne zuerst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α und γ, indem man ausgehend von zwei Punkten A und C' an die Strecke AC' in A den Winkel α und in C' den Winkel γ in entsprechender Orientierung, dass sich ein Dreieck $AB'C'$ mit B' als Schnittpunkt der freien Schenkel der gezeichneten Winkel ergibt.

2) Auf einer Geraden durch A, welche weder B' noch C' enthält, konstruiere man einen Punkt S' mit $AS' = AC' + AB' + B'C'$, indem man zuerst die Strecke AC' an A, dann AB' an den so erhaltenen ersten Zwischenpunkt und schließlich die Strecke $B'C'$ an den gerade erhaltenen zweiten Zwischenpunkt auf der Geraden anträgt.

3) Auf dem von A ausgehenden Strahl, der S enthält, konstruiere man auch den Punkt S mit $AS = a + b + c$.

4) Man konstruiere nun die Parallele zu $B'S'$ durch S. Diese schneide die Gerade AB' in B.

5) Analog sei der Schnittpunkt der Parallelen zu $C'S'$ durch S mit der Geraden AC' mit C bezeichnet.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis: Das Dreieck $\triangle AB'C'$ ist ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck, da es nach Konstruktion in zwei Innenwinkeln mit diesem übereinstimmt. Also gibt es einen Streckungsfaktor k, sodass alle Seitenlängen des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den gleichen Faktor k gestreckt werden müssen, um die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks zu erhalten.

Demzufolge ist auch der Umfang des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den Faktor k zu klein. Dieser Umfang ist durch die Strecke AS' gegeben; der Umfang des zu konstruierenden Dreiecks mit AS, der Streckungsfaktor also durch $\frac{AS}{AS'}$.

Nach den Strahlensätzen ist aber nach Konstruktion $\frac{AB}{AB'} = \frac{AS}{AS'}$ und analog $\frac{AC}{AC'} = \frac{AS}{AS'}$, da die von A ausgehenden Strahlen AB, AC und AS von den Parallelen BS und $B'S'$ bzw. CS und $C'S'$ geschnitten werden. Damit ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Aufgaben der III. Runde 1970 gelöst von cyrix

6.13 XI. Olympiade 1971

6.13.1 I. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110911
Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}=\frac{1}{(a+b)(c+d)} \qquad (1)$$

Michael meint, dass sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" lässt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen –1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, dass die Gleichung (1) erfüllt wird!

Addiert man die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so folgt, dass die Gleichung gleichbedeutend ist mit

$$\frac{c+d+a+b}{(a+b)(c+d)}=\frac{1}{(a+b)(c+d)}.$$

Diese Gleichung ist genau dann eine wahre Aussage, wenn $a+b+c+d=1$ und $a \neq -b$ sowie $c \neq -d$ gelten. Wählt man für a eine der Zahlen -1, 0 oder 1, so verbleiben für b wegen $a \neq -b$ je genau zwei Zahlen , nämlich die in der untenstehenden Tabelle genannten.

Von den erhaltenen Zahlen sind die mit $a+b=-2$ und die mit $a+b=1$ auszuschließen, da sich aus $a+b+c+d=1$ für sie $c+d=3$ bzw. $c+d=0$ ergibt, was durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 nicht zu erreichen ist bzw. im Widerspruch zu $c \neq -d$ steht.

In jeder der nun verbliebenen Möglichkeiten ergibt sich genau eine Zahl für $c+d$, die durch Wahl von c und d aus den Zahlen -1, 0, 1 durch genau die folgenden Zahlen erreicht werden kann:

a	-1	-1	0	0	1	1	1
b	-1	0	-1	1	0	1	1
a+b	-2	-1	-1	1	1	2	1
c+d	3	2	2	0	0	-1	-1
c	-	1	1	-	-	-1	0
d	-	1	1	-	-	0	-1

Die 2., 3., 6. und 7. Spalte genügen als einzige allen Bedingungen der Aufgabe, wie man durch Einsetzen erkennt.

Aufgabe 2 - 110912
Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Im Dreieck $\triangle ABC$ sei CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2. \qquad (1)$$

Wir zeigen nun, dass nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC und BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind. Das Lot

CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp g$ gilt.

Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3, \text{ d.h.} \tag{2}$$
$$|DE| = \frac{2}{3}|AB| \text{ und} \tag{3}$$
$$|CF| : |CG| = 2 : 3, \text{ d.h.} \tag{4}$$
$$|CF| = \frac{2}{3}|CG| \tag{5}$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.
Damit ist gezeigt, dass nicht alle Geraden durch S die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Aufgabe 3 - 110913
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a + 11}{a - 9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Für natürliche Zahlen $a < 9$ ist $t < 0$. Für $a = 9$ ist t nicht definiert. Ist $a > 9$ und setzt man $h = a - 9$, so ist h stets eine natürliche Zahl, ferner $a = h + 9$ und

$$t = \frac{h+20}{h} = 1 + \frac{20}{h}.$$

Somit ist t genau dann eine natürliche Zahl, wenn h Teiler von 20 ist. Mithin ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

h	$a = h + 9$	t
1	10	21
2	11	11
4	13	6
5	14	5
10	19	3
20	29	2

Damit erfüllen genau die Zahlen 10, 11, 13, 14, 19 und 20 alle gestellten Bedingungen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 110914
In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CDS$!

Die Punkte A, D, S liegen in einer Ebene ε', die auf der Ebene ε durch A, B, C und D senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist $AD \perp AB$ und, falls $S \neq A$ ist, auch $SA \perp AB$.
Im Fall $S = A$ sei ε' die zu ε senkrechte Ebene durch A und D. Daher ist in jedem Fall $CD \perp \varepsilon'$ und somit $|\angle CDS| = 90°$.

Aufgaben der I. Stufe 1971 gelöst von Manuela Kugel

6.13.2 II. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110921
Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge bezeichnet.
Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm): $2\pi r$, die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche: $2\pi r \cdot h$ und die Maßzahl seines Volumens (in cm^3): $\pi r^2 \cdot h$, und es gilt: $2\pi r = 2\pi r \cdot h$, woraus wegen $r > 0$ $h = 1$ folgt.

Ferner gilt: $2\pi r \cdot h = \pi r^2 \cdot h$, woraus wegen $r = 2$ folgt.
Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.
Tatsächlich ist in diesem Falle der Umfang der Grundfläche 4π cm, der Mantelflächeninhalt $4\pi \text{cm}^2$ und das Volumen $4\pi \text{cm}^3$.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 110922
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:
Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Gesucht sind Zahlentripel (a,b,n), die die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a+n}{bn}$$

erfüllen. b kann gekürzt werden und ist somit beliebig wählbar. Nach Umformung erhalten wir $(a-1)(n-1) = 1$.
Da Lösungen in $\mathbb{Z}$ gesucht sind, folgt daraus $a - 1 = n - 1 = \pm 1$. Also sind wegen $n \neq 0$ die Tripel durch $(2,b,2), b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gegeben.

Zweite Lösung:

Angenommen, (a, b) sei ein Zahlenpaar, das zusammen mit einer geeigneten Zahl n der gestellten Bedingung genügt, dann gilt

$$\frac{a+n}{bn} = \frac{a}{b}$$

Daraus erhält man $ab + bn = abn$. Wegen $b \neq 0$ folgt $a + n = an$, also

$$a = n(a-1) \qquad (1)$$

Aus (1) folgt $a \neq 1$ und daher

$$n = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$$

Da n ganzzahlig ist, ergibt sich weiter

$$a - 1 = \pm 1, \quad \text{also } a = 2 \quad \text{oder} \quad a = 0$$

und wegen $n > 0$ schließlich $a = 2$. Daher können nur Zahlenpaare der Form $(2,b)$ und zu jedem dieser Paare nur $n = 2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Tatsächlich ist $\frac{2+2}{b \cdot 2} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$.
Die Lösungsmenge besteht also aus allen Zahlenpaaren der Form $(2, b)$ $(b \neq 0$, ganz$)$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 110923
Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.
Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Wir ergänzen das 30-Eck zu einem 60-Eck mit Ecken $Q_1, \ldots, Q_{60}$. Sei M der Mittelpunkt.
Dann ist $P_7P_{18} = Q_{14}Q_{36}$ orthogonal zu MQ_{25}, $25 = \frac{1}{2}(14+36)$ und $P_{12}P_{21} = Q_{24}Q_{42}$ orthogonal zu MQ_{33}, $33 = \frac{1}{2}(24+42)$.
Der Schnittwinkel der Geraden entspricht daher dem Winkel $\sphericalangle Q_{25}MQ_{33} = \frac{360°}{60}(33-25) = 48°$.

Aufgabe 4 - 110924
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so dass die Gleichungen

$$(1) \quad a+b=p_2 \qquad \text{und} \qquad (2) \quad a-b=p_1$$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

Addition von (1) und (2) ergibt $2a = p_1 + p_2$, Subtraktion ergibt $2b = p_2 - p_1$.

Setze also $a = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ und $b = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$.
Weil p_1,p_2 Primzahlen größer als 2 mit $p_2 > p_1$ sind, gilt $a,b \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $ab = \frac{1}{4}(p_1+p_2)(p_2-p_1)$. Da p_i Primzahlen mit $p_i > 3$ sind, sind die p_i nicht durch 2 teilbar. Dann ist aber entweder $p_1 + p_2$ oder $p_2 - p_1$ durch 3 teilbar. Außerdem ist einer der Faktoren $(p_2 \pm p_1)$ durch 4 und einer durch 2 teilbar.
Damit ist $(p_1+p_2)(p_2-p_1)$ durch 24 teilbar, also ab durch $24/4 = 6$.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Zweite Lösung:

Zu p_1 und p_2 kann man zunächst stets rationale Zahlen a und b eindeutig so bestimmen, dass (*) und (**) erfüllt sind, nämlich

$$a = \frac{p_1+p_2}{2} \qquad , \qquad b = \frac{p_2-p_1}{2}$$

Der verlangte Beweis ist geführt, wenn noch gezeigt wird, dass a, b natürliche Zahlen sind, deren Produkt durch 6 teilbar ist.

Da p_1, p_2 nach Voraussetzung zwei von der Primzahl 2 verschiedene Primzahlen sind, sind sie beide ungerade. Folglich sind $p_1 + p_2$ und $p_2 - p_1$ gerade, also a und b ganze Zahlen. Ferner ist $p_1 + p_2 >=$ und wegen $p_1 < p_2$ auch $p_2 - p_1 > 0$, also sind a und b natürliche Zahlen.
Da ihre Summe $a + b = p_2$ ungerade ist, ist eine der Zahlen a, b gerade. Also ist ab gerade.

Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 von der Primzahl 3 verschiedene Primzahlen. Daher sind sie nicht durch 3 teilbar, d. h., jede von ihnen lässt bei Division durch 3 einen der Reste 1 oder 2. Lassen beide den gleichen Rest, dann ist $2b = p_2 - p_1$ durch 3 teilbar, also auch b.
Lassen beide verschiedene Reste, so ist $2a = p_1 + p_2$ durch 3 teilbar. Daher ist ab in jedem Fall durch 3 teilbar. Aus $2 \mid ab$ und $3 \mid ab$ folgt, da 2 und 3 teilerfremd sind, schließlich $6 \mid ab$, w.z.b.w.

Übernommen aus [2]

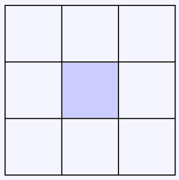
6.13.3 III. Stufe 1971, Klasse 9

Aufgabe 1 - 110931
Günter erzählt:
"Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen:
Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl."
Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Wenn die Quersumme der ersten beiden Zahlen zweistellig wäre, dann wäre sie höchstens 18 und damit enthielte die Telefonnummer eine 1, was nicht sein kann. Also ist die Quersumme einstellig. Da auch die Hausnummer keine 1 enthalten darf, bleiben für die Hausnummer noch die Möglichkeiten:
$24, 27, 30, 33, 36, 42, 45, 54, 60, 63, 72, 90$ mit den Quersummen $6, 9, 3, 6, 9, 6, 9, 9, 6, 9, 9, 9$ übrig.
In allen Fällen außer bei 30,33,60 und 90 ist die erste Ziffer der nächsten Summe eine 1, was nicht geht. Bei 33 ergibt sich 336915, bei 60 ergibt sich 606612 und bei 90 ergibt sich 909918 was nicht geht. Also ist die Hausnummer 30 und die Telefonnummer 303369.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Aufgabe 2 - 110932
In die Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, dass in jedem Feld genau eine steht und die drei "Zeilensummen", die drei "Spaltensummen" und die zwei "Diagonalsummen" sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).
Beweisen Sie, dass eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit $n, n+1, ..., n+8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n+36$.
Da die drei "Zeilensumme" gleich sein sollen, muss jede von ihnen $3n+12$ betragen. Lauf Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen.
Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen lässt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

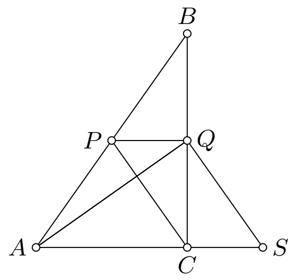
$$\begin{array}{lll} n+(n+4)+(n+8) & n+(n+5)+(n+7) & (n+1)+(n+3)+(n+8) \\ (n+1)+(n+4)+(n+7) & (n+1)+(n+5)+(n+6) & (n+2)+(n+3)+(n+7) \\ (n+2)+(n+4)+(n+6) & (n+3)+(n+4)+(n+5) & \end{array}$$

In den Summen kommen die Summanden $n, n+2, n+6$ und $n+8$ genau zweimal, die Summanden $n+1, n+3, n+5$ und $n+7$ genau je dreimal und es kommt nur der Summand $n+4$ genau viermal vor. Bei dem Bilden der Zeilen- Spalten- und Diagonalsummen wird nur das farbige Feld genau viermal belegt. Daher muss im farbigen Feld die Zahl $n+4$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen $n, ..., n+8$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebenen Möglichkeiten.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 110933
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Wegen $\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$ ist das Dreieck rechtwinklig. Im folgenden betrachten wir ein Dreieck ABC mit $|AB| = \sqrt{3}$, $|AC| = 1$ und $|BC| = \sqrt{2}$.

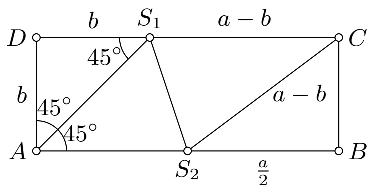


Wir verschieben die Seitenhalbierende CP parallel zu QS (PQ ist parallel zu AC). Das Dreieck AQS hat die Seitenlängen

$$|AS| = \frac{3}{2}, \quad |AQ|^2 = |AC|^2 + |CQ|^2 = \frac{3}{2}, \quad |QS|^2 = |QC|^2 + |CS|^2 = \frac{3}{4}$$

Diese erfüllen die Gleichung $|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2$. Daher sind die beiden Seitenhalbierenden AQ, CP orthogonal.

Aufgabe 4 - 110934
In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB = CD = a$ und $BC = DA = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.
Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\angle AS2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!



Ein Rechteck $ABCD$ genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $angle AS_2S_1 \cong \angle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreiecke $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $S_1C = S_2C$ ist.
Nun ist das rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\angle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit $\angle DAS_1 \cong \angle AS_1D$ gilt. Daher gilt:
$DS_1 = DA = b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $S_2C = S_1C = a - b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a-b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit $a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}$, d.h. $\frac{3}{4}a^2 = 2ab$ gilt.
Wegen $a \neq 0$ trifft dies genau für $a : b = 8 : 3$ zu.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 110935
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, dass dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

gilt! Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Durch Multiplikation mit $abc > 0$ geht die zu zeigende Ungleichung in die äquivalente

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc + ac - ab) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 + 2ab + b^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also $(a + b - c)^2 \geq 0$, was offensichtlich wahr ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Es gilt $(a + b - c)^2 \geq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a + b = c$. Daraus folgt

$$(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2 \geq 0$$

also

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc + ac - ab)$$

Nach Division durch die positive reelle Zahl abc ergibt dies

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a + b = c$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 110936
Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

Mittels der Substitution $y = z - 3$ mit $z \in \mathbb{Z}$ geht die Gleichung über in

$$2x^2 - 2xz + 6x - 5x - z + 3 + 19 = 0 \qquad \text{also} \qquad 2x^2 - 2xz + x - z = -22$$

bzw. $(2x + 1)(x - z) = -22$.
Damit ist $2x + 1$ ein ganzzahliger Teiler von -22. Da dieser Term auch ungerade ist, ergeben sich folgende vier Fälle:

1. Fall: $2x + 1 = 1$ und $x - z = -22$. Dann ist $x = 0$, $z = 22$ und $y = 19$.
2. Fall: $2x + 1 = -1$ und $x - z = 22$. Dann ist $x = -1$, $z = -23$ und $y = -26$.
3. Fall: $2x + 1 = 11$ und $x - z = -2$. Dann ist $x = 5$, $z = 7$ und $y = 4$.
4. Fall: $2x + 1 = -11$ und $x - z = 2$. Dann ist $x = -6$, $z = -8$ und $y = -11$.

Die Probe bestätigt alle Ergebnisse. Die Gleichung wird demnach genau von den ganzzahligen Paaren $(x,y) \in \{(-6,-11),(-1,-26),(0,19),(5,4)\}$ gelöst.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, die Gleichung hätte eine Lösung (x, y). Dann gilt

$$y(2x + 1) = 2x^2 - 5x + 19 \qquad \text{also}$$

$$y = x - 3 + \frac{22}{2x + 1} \qquad \text{mit} \qquad x \neq -\frac{1}{2}$$

Da x, y ganzzahlig sein sollen, muss auch $\frac{22}{2x+1}$ eine ganze Zahl sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $2x + 1$ ein Teiler von 22, d.h. eine der Zahlen -22, -11, -1, 1, 11, 22 ist.

Für $2x + 1 = +22$ ist x nicht ganzzahlig. In den übrigen Fällen erhält man für x der Reihe nach die Werte -6, -1, 0, 5 und daraus für y die Werte -11, -26, 19, 4.
Also können höchstens die Zahlenpaare $(-6, -11)$, $(-1, -26)$, $(0, 19)$, $(5, 4)$ Lösung sein.
Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung findet man, dass sie es tatsächlich sind.

Übernommen aus [2]

6.14 XII. Olympiade 1972

6.14.1 I. Stufe 1972, Klasse 9

Aufgabe 1 - 120911
Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Jede Pyramide, deren Grundfläche ein $(n-1)$-Eck ist, hat genau n Ecken (nämlich die $n-1$ Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau n Flächen (nämlich die $n-1$ Mantelflächen und die Grundfläche).

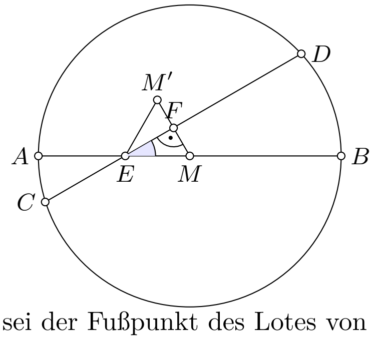
Aufgabe 2 - 120912
Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Die genaue Länge der Strecke S liegt nach Andreas Schätzung A um 10% unter seinem Wert; also bei $\frac{9}{10}A = S$. Franks Schätzung F muss um 10% erhöht werden, um den genauen Wert S zu erhalten; also $\frac{11}{10}F = S$. Andreas Wert ist somit $A = \frac{10}{9}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers $A = |\frac{10}{9}S - S| = \frac{1}{9}S$. Franks Wert ist $F = \frac{10}{11}S$ und der Betrag des absoluten Fehlers
$F = |\frac{10}{11}S - S| = \frac{1}{11}S$. Bei Franks Schätzwert ist der Betrag des absoluten Fehlers kleiner als bei Andreas Schätzwert ($\frac{1}{11}S < \frac{1}{9}S$).

Aufgabe 3 - 120913
Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis 2 : 5 teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von 30°.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!



Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, B gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$|EB| = \frac{5}{7}d, \qquad \text{also} \tag{2}$$

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{3}{14}d. \tag{3}$$

F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf CD. Dann ist $\triangle EMF$ rechtwinklig mit $|\angle MEF| = 30°$ (nach Voraussetzung), also

$$|\angle FME| = 60°. \tag{4}$$

Man spiegele nun $\triangle MEF$ an CD. Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck $\triangle EFM'$ gilt dann

$$|\angle FEM'| = 30° \text{ und } |\angle EM'F| = 60° \tag{5}$$

Nach (4) und (5) ist das Dreieck $\triangle EMM'$ gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt F auch der Mittelpunkt von MM'. Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus $|MF| = \frac{3}{28}d$. Der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also $\frac{3}{28}d$, wenn d die Durchmesserlänge des Kreises ist.

Aufgabe 4 - 120914
Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Es gilt:

a) Jede mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl ist größer als jede *nicht* mit 9876 beginnende siebenstellige Zahl aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern. Denn eine solche beginnt
entweder nicht mit 9
oder zwar mit 9, aber nicht mit 98 und nicht mit 99,
oder zwar mit 98, aber nicht mit 987, nicht mit 988 und nicht mit 989,
oder zwar mit 987, aber nicht mit 9877, nicht mit 9878 und nicht mit 9879

b) Da 8 und 9 teilerfremd sind, ist eine Zahl genau dann durch 72 teilbar, wenn sie durch 8 und 9 teilbar ist.

c) Eine siebenstellige Zahl aus paarweise verschiedenen Ziffern ist genau dann durch 9 teilbar, wenn von den zehn verschiedenen Ziffern 0, 1, 2, ..., 9, deren Summe 45 beträgt, drei Ziffern weggelassen werden, deren Summe 9 beträgt.

d) Eine siebenstellige Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in dieser Reihenfolge gebildete Zahl durch 8 teilbar ist (wobei in diesem Zusammenhang mit dieser Regel auch Anfangsziffern 0 zulässig sind). Daher ist die gesuchte Zahl die größte unter denjenigen mit 9876 beginnenden Zahlen (falls es solche gibt), deren restliche Ziffern drei derart gewählte verschiedene der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind, dass d) gilt und

e) die weggelassenen Ziffern die Summe 9 haben oder, äquivalent hiermit, die restlichen Ziffern die Summe 6 haben.

Nun wird e) genau von den Tripeln (0,1,5), (0,2,4) und (1,2,3) erfüllt. Sämtliche geraden dreistelligen Zahlen, mit zugelassener Anfangsziffer 0, die sich aus diesen Tripeln bilden lassen, sind, der Größe nach geordnet, 510, 420, 402, 312, 240, 204, 150, 132, 042, 024. Unter ihnen ist 312 die größte durch 8 teilbare Zahl. Daher ist 9876312 die gesuchte Zahl.

Anderer Lösungsweg

Die größte siebenstellige Zahl mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern ist 9876543. Denn jede solche siebenstellige Zahl (u.s.w. wie oben in a)).

Wegen $\frac{9876543}{72} = 137174\frac{15}{72}$ ist die größte durch 72 teilbare Zahl, die höchstens ebenso groß wie 9876543 ist, die Zahl

$$9876543 - 15 \quad = \quad 9876528.$$

Bildet man schrittweise zu jeder erhaltenen Zahl die größte darunter gelegene durch 72 teilbare Zahl, so erhält man der Reihe nach

$$9876528 - 72 \quad = \quad 9876456, \quad 9876456 - 72 = 9876384, \quad 9876384 - 72 = 9876312, ...$$

Von den erhaltenen Zahlen ist 9876312 die größte, die aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern besteht. Daher ist sie die gesuchte Zahl.

Übernommen aus [2]

6.14.2 II. Stufe 1972, Klasse 9

Aufgabe 1 - 120921
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir
$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1) \cdot (n^2 + 2n + 1) + (n+2) \cdot (n^2 + 4n + 4)$
$= n^3 + n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8$
$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$
$= 3 \cdot (n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$.
Somit ist die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar.

Aufgabe gelöst von Conny42

2. Lösung: Es ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3(n^3 + 2n)$$

durch 3 teilbar.
Bemerkung: Wegen

$$n^3 + 2n = (n^3 - 4n) + 6n = n(n^2 - 4) + 6n = (n-2)n(n+2) + 6n$$

folgt sogar, dass die Summe von 3 Kuben immer durch $3^2 = 9$ teilbar sein muss, einer der drei Faktoren $n-2$, n oder $n+2$ durch 3 teilbar ist und damit auch $n^3 + 2$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 120922
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient $\dfrac{8-3x}{7x-2}$ negativ ist!

Es ist $\frac{8-3x}{7x-2} < 0$ genau dann, wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

i) Es ist $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$.
ii) Es ist $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$.

Zu i): Aus $8 - 3x < 0$ folgt $x > \frac{8}{3}$ und aus $7x - 2 > 0$ folgt $x > \frac{2}{7}$. Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ ist $x > \frac{2}{7}$ automatisch erfüllt, wenn $x > \frac{8}{3}$ erfüllt ist. Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$.

Zu ii): Aus $7x - 2 < 0$ folgt $x < \frac{2}{7}$ und aus $8 - 3x > 0$ folgt $x < \frac{8}{3}$. Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ ist $x < \frac{8}{3}$ automatisch erfüllt, wenn $x < \frac{2}{7}$ erfüllt ist. Der zweite Fall tritt also genau dann ein, wenn $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$.

Insgesamt folgt, dass der Quotient $\frac{8-3x}{7x-2}$ genau dann negativ ist, wenn $x \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, \infty\right)$.

Aufgabe gelöst von Conny42

Aufgabe 3 - 120923
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.
(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Die kleinste Anzahl von Büchsen ist 36. Je 12 Büchsen der Sorten A, B und C können wie folgt zu einer Pyramide gestapelt werden:

A
B B
A A A
B B B B
C C C C C
B B B B B B
C C C C C C C
A A A A A A A A

Begründung, warum es mit weniger als 36 Büchsen nicht funktioniert:
Die Anzahl k der Büchsen muss eine Dreieckszahl, also von der Form $k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ sein. k muss den Teiler 3 enthalten.

Also kommen für $k < 36$ höchstens die Zahlen $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ infrage.
Die Summanden 1,2,...,n müssen dann auf drei Teilsummen aufgeteilt werden, die jeweils $\frac{k}{3}$ ergeben.
Bei $k = 3 = 1 + 2$ oder $k = 6 = 1 + 2 + 3$ ist solch eine Aufteilung nicht möglich, da der größte Summand (2 bzw. 3) bereits größer als $\frac{k}{3}$ ist, also in keine Teilsumme passt.

Bei $k = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ können die Summanden nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 5$ ergibt: $1 + 4 = 2 + 3 = 5$. Diese Aufteilung widerspricht aber der Bedingung (6), da dann die zweite und die dritte Reihe dieselben Büchsensorten enthalten würden.

Bei $k = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ können die Summanden ebenfalls nur auf eine Weise aufgeteilt werden, sodass sich jeweils die Teilsumme $\frac{k}{3} = 7$ ergibt: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Und auch hier erhalten wir zwei benachbarte Zahlen in einer der Teilsummen, nämlich 3 und 4.

Mit $k = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ schließlich funktioniert es:
$\frac{k}{3} = 12 = 1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 4 - 120924
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Inkreises. Dann zerfällt das Tangentenviereck in vier Teildreiecke ABM, BCM, CDM, ADM, so dass die Höhe der Dreiecke auf der äußeren Kante gerade der Inkreisradius ist. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{ur}{2} \; .$$

6.14.3 III. Stufe 1972, Klasse 9

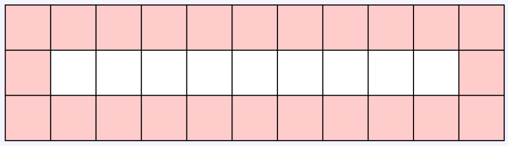
Aufgabe 1 - 120931
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

Es gilt $n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Von den aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n + 1$ ist eine gerade, also ist $n^6 - n^2$ durch 2 teilbar.
Wenn n bei Division durch 5 den Rest 0,1 oder 4 lässt, dann ist n bzw. $n - 1$ bzw. $n + 1$ durch 5 teilbar und das Produkt damit auch.
Lasse n nun bei Division durch 5 den Rest 2 oder 3, also $n = 5k + 2$ oder $n = 5k + 3$. Dann ist $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$ oder $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$ durch 5 teilbar. Also ist $n^6 - n^2$ in jedem Fall durch 5 teilbar.
Da 2 und 5 teilerfremd sind ist damit $n^6 - n^2$ auch durch 10 teilbar.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Bemerkung: $n^6 - n^2$ ist für jedes ganze n sogar durch 60 teilbar.

Aufgabe 2 - 120932



Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.

Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

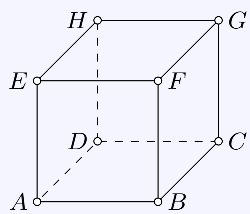
Sei $m > 0$ die Anzahl der Quadratflächen, die in einer Zeile liegen und $n > 0$ die, derer sich in einer Spalte befindlichen. O.B.d.A. können wir $m \geq n$ annehmen.
Weiterhin sei r die Anzahl der roten und w die Anzahl der weißen Quadratflächen. Wäre $n \leq 2$, bestände das Rechteck nur aus Randquadraten, sodass $r > 0 = w$ folgen und damit die Bedingung der Aufgabenstellung nicht erfüllen würde. Sei also ab jetzt $m \geq n \geq 3$.
Es folgt $r = 2(m+n) - 4$ und $w = (m-1)(n-1)$, zusammen mit $r = w$ also $2m + 2n - 4 = mn - m - n + 1$ bzw. $-5 = mn - 3m - 3n = (m-3)(n-3) - 9$, also $(m-3)(n-3) = 4$. Da beide Faktoren nicht negativ sind und $m \geq n$ gilt, kann nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

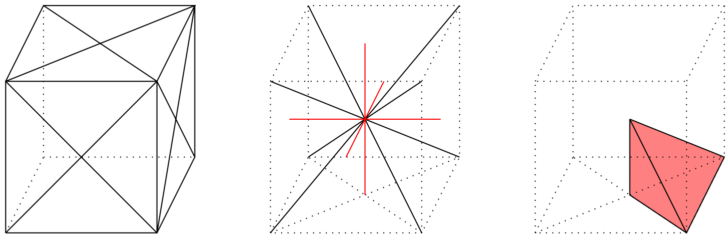
1. Fall: $m - 3 = 4$ und $n - 3 = 1$, also $m = 7$ und $n = 4$, oder
2. Fall: $m - 3 = n - 3 = 2$, also $m = n = 5$. In beiden Fällen bestätigt die Probe, dass dies wirklich Lösungen sind.

Karlheinz kann also ein 5×5-Quadrat, ein 7×4-Rechteck oder ein 4×7-Rechteck legen, was den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 120933
Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.
Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.





Jede der Ebenen wird von zwei Raumdiagonalen des Würfels aufgespannt. Da es $\binom{4}{2} = 6$ ungeordnete Paare von Raumdiagonalen gibt, entsprechen diese genau den Ebenen. Der Mittelpunkt des Würfels ist gemeinsamer Schnitt aller Raumdiagonalen und liegt somit in allen Ebenen. Eine Ebene schneidet die Oberfläche des Würfels in zwei diagonal gegenüberliegenden Kanten und den dazugehörigen Flächendiagonalen. Daher ergibt die linke Skizze den Schnitt aller Ebenen mit der Würfeloberfläche.

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist diese bereits die Schnittgerade. Falls zwei Ebenen keine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist die Schnittgerade durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen gegeben (rote Strecken). Somit stellt die mittlere Skizze sämtliche Schnitte zwischen den Ebenen dar.

Die linke und mittlere Zeichnung ergeben daher alle möglichen Kanten, der gesuchten Teilkörper an. Daher ist ein Teilkörper eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche und dem Mittelpunkt der Würfels als Spitze. Insgesamt zerfällt der Würfel in $6 \cdot 4 = 24$ Teilkörper. Da eine Seitenfläche in 4 kongruente Teildreiecke unterteilt wird und alle Pyramiden dieselbe Höhe besitzen, haben diese alle das gleiche Volumen $V = \frac{a^3}{24}$.

Aufgabe 4 - 120934
Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, den Rest mit 5 $\frac{km}{h}$. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 $\frac{km}{h}$, während der übrigen Zeit mit 5 $\frac{km}{h}$.
Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Wir nutzen die Beziehung Geschwindigkeit = Strecke/Zeit bzw. Zeit = Strecke/Geschwindigkeit.
d sei die Länge der gesamten Strecke.
A benötigt für die Strecke d die Zeit $t_A = \frac{d/2}{4} + \frac{d/2}{5} = \frac{9}{40}d$.
d_1, d_2 seien die Strecken, bei denen sich B mit $4\frac{km}{h}$ bzw. $5\frac{km}{h}$ bewegt. Dann ist $d_1 + d_2 = d$. Für die Strecken benötigt B die Zeiten $t_1 = \frac{d_1}{4}$ bzw. $t_2 = \frac{d_2}{5}$.
Nach Voraussetzung ist $t_1 = t_2$, also $\frac{d_1}{4} = \frac{d_2}{5}$. Zusammen mit $d_1 + d_2 = d$ folgt hieraus $d_1 = \frac{4}{9}d$, $d_2 = \frac{5}{9}d$ und somit $t_1 = t_2 = \frac{1}{9}d$. Also benötigt B die Gesamtzeit $t_B = t_1 + t_2 = \frac{2}{9}d$.
Da $\frac{9}{40} > \frac{2}{9}$, ist B zuerst am Ziel.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

Mit den üblichen Bezeichnungen s für die Weglänge, v für die Geschwindigkeit und t für die aufgewandte Zeit gilt $s = vt$ bzw. $t = \frac{s}{v}$. Wird nun die von A aufgewandte Zeit mit t_A und die von B aufgewandte Zeit mit t_B bezeichnet, dann gilt einerseits für A:

$$t_A = t_1 + t_2 \quad \text{mit} \quad t_1 = \frac{s}{2 \cdot 4} = \frac{s}{8} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{s}{2 \cdot 5} = \frac{s}{10}$$

also $t_A = \frac{9}{40}s$; andererseits für B:

$$s_B = s_1 + s_2 \quad \text{mit} \quad s_1 = \frac{t_B}{2} \cdot 4 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{t_B}{2} \cdot 5$$

also $s = \frac{t_B}{2} \cdot 9$ bzw. $t_B = \frac{2}{9}s$.
Wegen $9 \cdot 9 > 2 \cdot 40$ gilt nun $t_A > t_B$, d. h., B war eher am Ziel als A.

Ein anderer Lösungsweg:
Man kann sich die Gesamtstrecke in neun gleichlange Teilstrecken geteilt denken. Dann ging A genau $4\frac{1}{2}$, dieser Teilstrecken mit 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B dagegen ging genau vier dieser Teilstrecken mit 4 km/h, die restlichen fünf Teilstrecken mit 5 km/h; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleich (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam B zuerst am Ziel an.

Oder:
Wäre die Teilstrecke s, die B mit 5 km/h durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte B für s weniger Zeit als für die andere langsamer durchlaufene und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit 5 km/h durchlaufene Teilstrecke für B länger als die für A. Folglich kam B zuerst am Ziel an.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 120935
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\overparen{AB} + \overparen{CD} = \overparen{BC} + \overparen{DA}$$

Man beweise, dass dann $AC \perp BD$ gilt!

Da die Bogenlänge proportional zum entsprechenden Zentriwinkel ist, folgt aus der Bedingung auch $\angle AMB + \angle CMD = \angle BMC + \angle DMA = 180°$, wobei M der Mittelpunkt von k sei und die vier Zentriwinkel den Vollwinkel bei M bilden.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz sind die Peripheriewinkel über einem Bogen genau halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel, also

$$\angle ADB + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Sei S der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Dann gilt für das Dreieck $\triangle ASD$ aufgrund der Innenwinkelsumme

$$\angle DSA = 180° - \angle SAD - \angle ADS = 180° - (\angle CAD + \angle ADB) = 180° - 90° = 90°$$

Damit stehen die beiden Geraden AC und BD in s senkrecht aufeinander, $\Box$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 120936
a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k,n,m) natürlicher Zahlen k,n,m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m+1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

a) Es gilt $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$. Da $2m+1$ ein ungerader Teiler von 3808 sein muss kann dies nur 7,17 oder $119 = 7 \cdot 17$ sein. Damit gilt $m \in \{3{,}8{,}59\}$.
Für n^2 gibt es die Möglichkeiten $n^2 = 4^2 = 2^4$ oder $n^2 = 2^2$ oder $n^2 = 1^2$ (unabhängig davon, wie m gewählt wurde). Jede dieser Wahlen legt k eindeutig fest, also gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten.

b) Wählt man $n = 1$ oder $n = 2$ so enthält k den zu 4 fehlenden Faktor quadratisch, um ein möglichst kleines Produkt zu erhalten muss also $n = 4$ gewählt werden. Von den verbleibenden Möglichkeiten $(k,m,n) \in \{(34,4,3),(14,4,8),(2,4,59)\}$ hat das Produkt $34 \cdot 4 \cdot 3 = 408$ den kleinsten Wert.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

6.15 XIII. Olympiade 1973

6.15.1 I. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130911
Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Es Sei C der Punkt an der Wand, in dem der von A kommende Schall nach B reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte A und B von der Wand das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig mit $|AB| = |CB|$. Da der Schall auf dem Wege von A über C nach B genau $\frac{1}{10}$s länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34 m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| \quad = \quad |AB| + 34m = 51m + 34m = 85m,$$

also $|AC| = |CB| = 42{,}5$ m.
Der Abstand des Punktes A von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42{,}5^2 - 25{,}5^2}m \quad = \quad 34m.$$

Aufgabe 2 - 130912
Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, dass er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wie viel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muss.

Die ursprüngliche Mischung besteht am Anfang aus Wasser (w_1) und einem anderen Stoff (y). Die Gesamtmenge sei m_1, so dass sich folgende Gleichung aufstellen lässt: $m_1 = y + w_1$ (1), wobei der 99-prozentige Wasseranteil wie folgt einfließt: $w_1 = 0{,}99 \cdot m_1$ (2).

Für den Zustand nach dem Wasserentzug gilt für die veränderte Gesamtmenge m_2 bei konstantem Stoff y: $m_2 = y + w_2$ (3), wobei auch hier eine Aussage zum Wasseranteil getroffen wird: $w_2 = 0{,}98 \cdot m_2$ (4).

Gesucht wird der Anteil der entzogenen Wassermenge ($x_1 - x_2$) an der ursprünglichen Wassermenge (x_1) in Prozent. Dazu werden nun die Gleichungen (1) bis (4) genutzt. Zunächst werden (1) und (3) nach y umgestellt und gleichgesetzt und anschließend (2) und (4) genutzt: $y = m_1 - w_1 = m_2 - w_2 \Rightarrow m_1 - 0{,}99 \cdot m_1 = m_2 - 0{,}98 \cdot m_2 \Rightarrow 0{,}01 \cdot m_1 = 0{,}02 \cdot m_2$ bzw. $m_1 = 2 \cdot m_2$. Nun kann der gesuchte Anteil errechnet werden:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1} \quad = \quad \frac{0{,}99 \cdot m_1 - 0{,}98 \cdot m_2}{0{,}99 \cdot m_1} = \frac{1{,}98 \cdot m_2 - 0{,}98 \cdot m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{m_2}{1{,}98 \cdot m_2} = \frac{1}{1{,}98} \approx 0{,}51$$

Der entzogene Anteil Wasser an der ursprünglichen Wassermenge beträgt also etwa 51%.

Aufgabe 3 - 130913
In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen.

Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Für die Zahl 2 kommt in Reihe a nur das Feld Ba in Frage, da Ca wegen Spalte und Da wegen Diagonale nicht 2 sein kann. Dann muss die Zahl 3 in das Kästchen Ca, weil sie nicht in $Ba = 2$ und Da (Spalte) stehen kann. Die 4 kommt dann in Da. Das sieht so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	0
c	0	0	0	3
d	0	0	0	0
	A	B	C	D

Es folgt (eindeutig) $Dd = 2$ (Dd kann nicht 1 wegen Diagonale und 3 bzw. 4 wegen Spalte sein). Db wird 1 (Spalte). Außerdem folgt $Ad = 3$ ($Ad \neq 1$ wegen Spalte, $Ad \neq 2$ wegen Zeile, $Ad \neq 4$ wegen Diagonale) und $Bc = 1$ (Diagonale). Das sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	0	0	2	1
c	0	1	0	3
d	3	0	0	2
	A	B	C	D

Weiterhin muss $Ab = 4$ ($Ab \neq 1$, $Ab \neq 3$ wegen Spalte; $Ab \neq 2$ wegen Zeile) und $Ac = 2$ (Spalte) gelten. Entsprechend folgt $Bb = 3$ (Zeile) und $Bd = 4$ (Spalte). Dann gilt aber auch $Cc = 4$ (Zeile) und $Cd = 1$ (Spalte). Die vollständige und eindeutige Lösung sieht dann so aus:

a	1	2	3	4
b	4	3	2	1
c	2	1	4	3
d	3	4	1	2
	A	B	C	D

Es existieren übrigens ganze 48 Möglichkeiten, ein 4×4 Quadrat mit den genannten Eigenschaften (ohne die Vorbelegung) zu konstruieren.

Aufgabe 4 - 130914

Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d.h., es gilt

$$n! \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für $n = 1000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endigt (Endnullen).

Es sei x die gesuchte Anzahl der Endnullen der Zahl 1000!. Dann gilt $1000! = z \cdot 10^x$, wobei z eine natürliche Zahl ist, die nicht auf 0 endet. Wegen $10^x = 2^x \cdot 5^x$ ist die Anzahl der Endnullen gleich der kleineren unter den Anzahlen der Faktoren 2 bzw. 5, die in der Zahl 1000! enthalten sind. Da jede zweite natürliche Zahl gerade, aber nur jede fünfte natürliche Zahl durch 5 teilbar ist, enthält die Zahl 1000! mehr Faktoren 2 als Faktoren 5. Mithin ist die gesuchte Anzahl der Endnullen gleich der Anzahl der Faktoren 5, die 1000! enthält.

Nun gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 genau eine durch $625 = 5^4$ teilbare Zahl, unter den restlichen 999 Zahlen genau 8-1 durch $125 = 5^3$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 125$ mit $1 \leq n \leq 8$ und $n \neq 5$; unter den übrigen 992 Zahlen genau 40 - 8 durch $25 = 5^2$ teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 25$ mit $1 \leq n \leq 40$ mit $n \neq 5, 10, 15, ..., 40$, d.h. $n \neq k \cdot 5 (k = 1,...,8)$; schließlich unter den verbleibenden 960 Zahlen genau $200 - 40$ durch 5 teilbare Zahlen, nämlich die Zahlen $n \cdot 5$ mit $1 \leq n \leq 200$ und $n \neq k \cdot 5 (k = 1, ..., 40)$. Daher enthält die Zahl 1000! wegen

$$4 + 3(8-1) + 2(40-8) + (200-40) \quad = \quad 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

genau 249 Faktoren 5 und endet somit auf genau 249 Nullen.

Aufgaben der I. Runde 1973 gelöst von Manuela Kugel

6.15.2 II. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130921
Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet.
Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 130922
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.
Beweisen Sie, dass D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'.
Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt.
Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 130923
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $AD = BC$; $AB > CD$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.
Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Da das Trapez einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass die Summe der Längen jedes Paares seiner gegenüberliegender Seiten gleich ist. Also gilt $|AB|+|CD| = |AD|+|BC| = \frac{u}{2} = 50$ cm. Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist dann sogar schon $|AD| = |BC| = 25$ cm bekannt.
Die Berührradien des Inkreises an AB sowie CD stehen jeweils senkrecht auf den Seiten, sodass sie aufgrund der Parallelität der beiden Seiten selbst parallel zueinander liegen.
Da beide Berührradien durch den Mittelpunkt des Inkreises verlaufen, ergänzen sie sich also zu einem Durchmesser, der senkrecht auf AB und CD steht, sodass diese beiden Parallelen den Abstand $2r = 24$ cm haben. Insbesondere sind sie damit auch kürzer als $|AD| = |BC| = 25$ cm.

Seien L_C und L_D die Fußpunkte der Lote von C bzw. D auf AB. dann sind diese Lote $|CL_C|$ und $|DL_D|$ jeweils auch gleich 24 cm, also gleich lang. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$ zueinander nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da die beiden entsprechenden Seiten CL_C und DL_D zueinander parallel sind sowie die entsprechenden Seiten BL_C und AL_D beide auf der Geraden AB liegen, gibt es also nur zwei mögliche Lagebeziehungen:
Entweder sind auch die dritten Seiten AD und BC dieser beiden Dreiecke zueinander parallel, oder aber sie gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke AB ineinander über, zeigen also in verschiedene Richtungen.

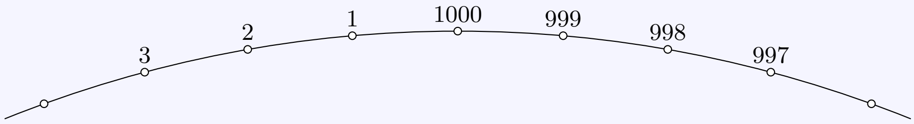
Im ersten dieser beiden Fälle sind aber im Viereck $ABCD$ jeweils gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt. Damit folgt dann auch $|AB| = |CD|$, was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Im zweiten Fall müssen die Lotfußpunkte L_C und L_D also beide außerhalb oder beide innerhalb der strecke AB liegen, wobei ersteres auf $|CD| > |AB|$ führen würde, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also befinden sich beide Lotfußpunkte im Inneren der Strecke AB. Es gilt damit $|AB| = |AL_D|+|L_DL_C|+|L_CB| = |L_DL_C| + 2|L_CB|$, letzteres aufgrund der Kongruenz der Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$.
Im Viereck L_DL_CCD sind aber nun gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt und $|L_DL_C| = |CD|$ folgt.

Es verbleibt, $|L_CB|$ zu berechnen. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BL_CC$ gilt $|L_CC|^2 + |BL_C|^2 = |BC|^2$, also $|L_CB| = \sqrt{25^2 - 24^2}$ cm $= \sqrt{49}$ cm $= 7$ cm.
Setzt man dies ein, erhält man $|AB| = |CD|+2\cdot 7$ cm und zusammen mit $|AB|+|CD| = 50$ cm schließlich $|AB| = 32$ cm und $|CD| = 18$ cm. Für ein solches Trapez gilt damit, dass seine Kantenlängen $|AB| = 32$ cm, $|BC| = 25$ cm, $|CD| = 18$ cm und $|AD| = 25$ cm betragen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 130924
Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen.
Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müssten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Damit eine Zahl $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen wird, muss es nicht-negative ganze Zahlen u und q geben, sodass $n + 1000 \cdot u = 1 + 15 \cdot q$ ist. Dabei beschreibt u die Anzahl der bisher vollständigen Umläufe um den Kreis und $1 + 15 \cdot q$ beschreibt jede 15. Zahl, beginnend mit 1, wenn einfach immer weiter gezählt wird.

Betrachtet man, welchen Rest beide Seiten dieser Gleichung bei der Teilung durch 5 lassen, so muss dies 1 sein, da $15q$ durch 5 teilbar ist. Da aber auch $1000u$ durch 5 teilbar ist, muss auch n den Rest 1 bei der Teilung durch 5 lassen. Es gibt also eine ganze Zahl k mit $0 \leq k < 200$, sodass $n = 5k + 1$ gilt. Setzt man dies in die Gleichung ein, erhält man, dass die Zahl $5k + 1$ genau dann gestrichen wird, wenn es nicht-negative ganze Zahlen q und u gibt, sodass $5k + 1 + 1000u = 1 + 15q$ bzw. nach Subtraktion von 1 und Division durch 5 die äquivalente Gleichung $k + 200u = 3q$ erfüllt ist.

Diese nicht-negativen ganzen Zahlen q und u existieren aber für jedes nicht-negative k: Ist k durch 3 teilbar, wähle man $u = 0$ und $q = \frac{k}{3}$. Lässt k den Rest 1 bei der Division durch 3, so ist $k + 200$ durch 3 teilbar und man kann $u = 1$ sowie $q = \frac{k+200}{3}$ wählen. Und lässt abschließend k den Rest 2 bei der Division durch 3, ist $k + 400$ durch 3 teilbar, sodass man $u = 2$ und $q = \frac{k+2\cdot 200}{3}$ wählen kann.

Zusammen erhält man also, dass genau die Zahlen $1 \leq n \leq 1000$ gestrichen werden, die sich als $n = 5k+1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k mit $0 \leq k < 200$ darstellen lassen. Das sind aber genau 200 Stück, sodass von den 1000 Zahlen genau 800 nicht gestrichen werden.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Beim ersten Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991.
Beim zweiten Umlauf werden wegen $991 + 15 - 1000 = 6$ die Zahl 6 als erste gestrichen und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.
Beim dritten Umlauf streicht man wegen $996 + 15 - 1000 = 11$ als erste Zahl die 11 und anschließend alle

Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41, 45, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.
Beim vierten Umlauf müsste man wegen $986 + 15 - 1000 = 1$ als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim ersten Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991, 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form $5n + 1$ geschrieben werden können.
Da hierbei alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.

Übernommen aus [2]

6.15.3 III. Stufe 1973, Klasse 9

Aufgabe 1 - 130931
Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B. (25; 61), denn es gilt 52+9 = 61 und 16+9 = 25.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

a) Sind $10a + b$ und $10c + d$ mit $a,b,c,d \in \{0; 1; 2; \cdot; 9\}$ und $a \neq 0$, $c \neq 0$ (sonst würde es sich nicht um zweistellige Zahlen handeln) die beiden Zahlen eines solchen Paares, so gilt $10c + d = 10b + a + 9$. Wegen $1 \leq a < 10$ ist $10 \leq a + 9 < 19$, sodass die Zehnerziffer von $10b + a + 9$ also $b + 1$ und die Einerziffer $a + 9 - 10 = a - 1$ ist. Wir erhalten also $c = b + 1$ und $d = a - 1$. Da $a \geq 1$ ist, ist d auf jeden Fall eine Ziffer, sodass hier keine Zusatzbedingungen entstehen. Jedoch erhalten wir wegen $c = b + 1$, dass $b \leq 8$ sein muss, denn für $b = 9$ erhielte man $c = 10$, was keine Ziffer mehr ist.

Tatsächlich sind diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern sogar schon hinreichend: Wendet man das Verfahren auf $10c+d$ an, so erhält man die Zahl $10d+c+9 = 10(a-1)+(b+1)+9 = 10a-10+b+9+1 = 10a + b$; also die Ausgangszahl.
Es können also genau diejenigen zweistelligen Zahlen Elemente eines solchen Paares sein, die als Einerziffer keine 9 besitzen.

b) Mit obigen Bezeichnungen muss dann $a = c = b + 1$ und $b = d = a - 1$ gelten, sodass dies nur für die Zahlen 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87 und 98 der Fall sein kann. Die Probe bestätigt jeweils, dass diese Zahlen sich auch jeweils selbst zugeordnet werden.

Aufgabe 2 - 130932
Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Es ist $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$. Weiterhin ist $n^2 + 2$ gerade genau dann, wenn auch n gerade ist. Wegen $(5k \pm 1)^2 + 2 = 25k^2 \pm 10k + 1 + 2 = 5 \cdot (5k^2 \pm 2k) + 3$ und $(5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5 \cdot (5k^2 \pm 4k + 1)$ ist $n^2 + 2$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 2 oder 3 bei der Teilung durch 5 lässt.
Damit ist $3n(n^2 + 2)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn n den Rest 0 (dann ist n durch 5 teilbar), 2 oder 3 (dann ist $n^2 + 2$ durch 5 teilbar) bei der Teilung durch 5 lässt.
Außerdem ist $3n(n^2 + 2)$ genau dann durch 2 teilbar, wenn es n auch ist.

Zusammen folgt (wegen ggT(2,5)=1), dass $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$ genau dann durch 10 teilbar ist, wenn es durch 2 und 5 teilbar ist, also n die Endziffer 0, 2 oder 8 besitzt.

Lösung von cyrix

Zweite Lösung:

Genau dann ist
$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$
durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
$10 \mid n$ (1)
$10 \mid (n^2 + 2)$ (2)
$5 \mid n$ und $2 \mid (n^2 + 2)$ (3)
$2 \mid n$ und $5 \mid (n^2 + 2)$ (4)

Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n erfüllt. Die Bedingung (2) könnte nur von solchen natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet. Derartige Zahlen gibt es nicht, da für eine Zahl $10k + r$ mit $0 \leq r < 10$ das Quadrat $(10k + r)^2$ gleich $10l' + r'$ mit $r' \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ ist.

Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen n, die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müsste entweder wegen (3) auf 5 oder ihr Quadrat wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht.
Endet n auf 5, so ist n^2 und damit auch $n^2 + 2$ ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 130933
Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, dass PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $PC = AB = BC = CD = DE = EF$.
Man beweise, dass dann $\angle APF = 135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Um die folgende Notation zu vereinfachen, setzen wir $|PC| = 1$. Durch den Satz von Pythagoras erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACP$ die Kantenlänge $|AP| = \sqrt{|AC|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5}$ und analog im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CFP$ die Kantenlänge $|FP| = \sqrt{|CF|^2 + |PC|^2} = \sqrt{10}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AFP$ kann einerseits ermittelt werden zu $\frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |PC| = \frac{5}{2}$ und andererseits auch als $\frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |FP| \cdot \sin(\angle AFP) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\angle AFP)$, sodass man $\sin(\angle AFP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ erhält.
Es ist $|AF| = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{10} = |FP| > \sqrt{5} = |AP|$, sodass AF die längste Seite im Dreieck $\triangle AFP$ ist. Ihr gegenüber liegt damit auch der größte Innenwinkel dieses Dreiecks, sodass $\angle AFP > 60° > 45°$ gilt. also muss $\angle AFP = 135°$ gelten, da dies der einzige weitere Wert im Intervall $[0, 180°]$ ist, an welchem der Sinus den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ annimmt, $\square$.

Aufgabe 4 - 130934
In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Sei $n \geq 3$. Dann betragen die Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck jeweils $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Für $n = 3; 4; 5$ und 6 ergeben sich so Innenwinkel von 60°, 90°, 108° und 120°.

Offensichtlich ist wegen $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ die Größe der Innenwinkel eine in n streng monoton steigende Funktion, sodass für alle $n > 6$ gilt, dass die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks größer als $120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$, aber wegen $\frac{n-2}{n} < 1$ auch kleiner als $180° = \frac{1}{2} \cdot 360°$ sind.
Damit kann für diese n (also $n > 6$) keine Anzahl von regelmäßigen n-Ecken überschneidungsfrei an einer Ecke zusammengelegt werden. Ähnlich sieht es für $n = 5$ aus, da $\frac{360°}{108°} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ ist. Es verbleiben $n = 3; 4$ und 6, wo jeweils 6; 4 bzw. 3 regelmäßige n-Ecke überschneidungsfrei in einer Ecke aneinandergefügt werden können.

Aufgabe 5 - 130935
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $a, b, c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Durch Multiplikation mit $abc(a+b+c)$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$abc = (a+b+c)\cdot(bc+ac+ab) = abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc$$

bzw. nach Subtraktion von abc in

$$0 = a^2b + a^2c + abc + ac^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 = (a+b)\cdot(ab+ac+bc+c^2) = (a+b)(a+c)(b+c)$$

Dieses Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also $a=-b$, $a=-c$ oder $b=-c$ gilt, sodass auf jeden Fall mindestens zwei der drei Zahlen a,b,c einander entgegengesetzt sind.

Aufgabe 6 - 130936
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A,B,C,D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A,B,C,D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
b) $BD' = CD' = a$, c) $AD' \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

Ist h die Höhe des Tetraeders $ABCD$, so folgt aus Eigenschaft a), dass D' in einer zur Grundfläche ABC parallelen Ebene ϵ mit Abstand h liegt. Prinzipiell sind dabei zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder es liegt ϵ im gleichen von der Grundfläche erzeugten Halbraum wie D (dann liegt D auf ϵ), oder die Ebene ϵ liegt im entsprechend anderen Halbraum. Da aber die weiteren Bedingungen nicht davon abhängen, welche der beiden Fälle eintritt, ergeben sich symmetrische Strukturen, sodass wir o.B.d.A. annehmen können, dass ϵ im oberen Halbraum zusammen mit D liegt, sodass D und D' beides Punkte auf ϵ sind.

Nach Bedingung b) liegt D' auf der Oberfläche der beiden Kugeln um die Punkte B und C mit Radius a. Da $h < a$ gilt, werden diese beiden Kugeln durch ϵ geschnitten (und nicht nur berührt), sodass sich zwei Kreise $k_B; k_C$ als Schnittfiguren in der Ebene ϵ ergeben. Diese beiden Kreise schneiden sich nun in bis zu zwei Punkten, wovon einer D ist (da auch $|BD| = |CD| = a$ gilt) und der andere (falls existent) D'.

Einen zweiten Schnittpunkt gäbe es nur dann nicht, wenn sich die Kreise in D nur berühren würden. Da die Mittelpunkte M_B und M_C der beiden Kreise wie die Kugelmittelpunkte B und C den Abstand a haben (da ϵ parallel zur Grundfläche ist), müssten deren gleich große Radien sich also zu a addieren und so würde im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BM_BD$ nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung $|BM_B|^2 + |M_BD|^2 = |BD|^2$ bzw. $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ folgen. Im regelmäßigen Tetraeder ist aber $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, sodass sich die Kreise also nicht nur berühren und es also neben D noch einen zweiten Punkt D' gibt, der die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Da $|AD| = a$ ist, kommt nach Bedingung c) auch nicht $D = D'$ Frage. Berechnen wir nun für den zweiten Schnittpunkt D' der beiden Kreise den Abstand zu A:

Die beiden Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte. Da die Ebene ϵ_1, die senkrecht zur Grundfläche und durch die Gerade BC verläuft, auch senkrecht auf ϵ steht sowie dort durch die Gerade M_BM_C verläuft, geht also D durch Spiegelung an ϵ_1 in D' über. Aufgrund der Orthogonalität von ϵ_1 sowohl zu ϵ wie auch zur Grundfläche geht damit aber auch der Lotfußpunkt L_D von D auf die Grundfläche durch Spiegelung an ϵ_1 in den Lotfußpunkt $L_{D'}$ von D' auf die Grundfläche über: Die Lote sind jeweils parallel zur Spiegelungsebene. Bei Betrachtung nur in der Grundfläche geht also L_D durch Spiegelung an der Geraden BC in $L_{D'}$ über.

Da im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenhalbierenden und Höhen zusammenfallen und L_D der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist, steht die Gerade AL_D als Seitenhalbierende und zugleich Höhe senkrecht auf BC und verläuft durch deren Mittelpunkt M. Insbesondere liegt also auch der Spiegelungspunkt $L_{D'}$ auch auf dieser Geraden und es gilt

$$|AL_{D'}| = |AL_D| + 2\cdot|L_DM| = \frac{2}{3}s + 2\cdot\frac{1}{3}s = \frac{4}{3}s$$

wobei s die Länge der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sei. Für diese gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABM$ die Beziehung $s^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ und damit $s^2 = \frac{3}{4}a^2$. Einsetzen liefert

$|AL_{D'}|^2 = \frac{16}{9}s^2 = \frac{4}{3}a^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AL_{D'}D'$ gilt abschließend nun

$$|AD'|^2 = |AL_{D'}|^2 + |L_{D'}D'|^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$$

also $|AD'| = \sqrt{2}a$.

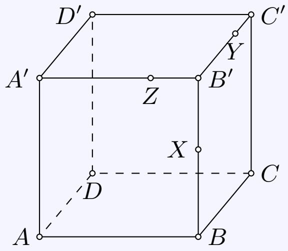
Aufgaben der III. Runde 1973 gelöst von cyrix

6.16 XIV. Olympiade 1974

6.16.1 I. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140911
Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.



a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte X, Y, Z gilt: Setzt man $|B'X| = x$, $|B'Y| = y$, $|B'Z| = z$, so ist $0 < x,y,z \leq a$. Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |YZ| = \sqrt{y^2+z^2}, \quad |ZX| = \sqrt{x^2+z^2}.$$

Daraus folgt

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2a^2}.$$

II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ ergibt sich $x = y = z = a$, also

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2a^2}.$$

III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten X, Y, Z einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt $X*$ zwischen B' und X und setzt man $|B'X*| = x*$, so ist $0 < x* < x$, also

$$|X*Y| + |YZ| + |ZX*| = \sqrt{x*^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x*^2} < |XY| + |YZ| + |ZX|.$$

Aus I. und II. folgt:

a) Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ entstehenden.

c) Seine Länge beträgt $3a\sqrt{2}$.

Aus III folgt:

b) Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d.h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

Aufgabe 2 - 140912
Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Die Größen der Innenwinkel von $\triangle ABC$ bei A, B, C seien α, β, γ. Ist $|AD| = |DB| < |CD|$, so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, $|\angle ACD| < |\angle CAD|$ und $|\angle DCB| < |\angle CBD|$, also

$$\gamma \quad = \quad |\angle ACD| + |\angle DCB| < \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

und daher $2\gamma < 180^\circ$, woraus $\gamma < 90^\circ$ folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: das Dreieck ABC hat bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob $|AB|$ kleiner, gleich oder größer als $2|CD|$ ist.

Aufgabe 3 - 140913
An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen!

Die Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 besagt: eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da die Quersumme der Zahl genau 11 sein muss, folgt daraus, dass die alternierende Quersumme 0 oder 11 ist.

Damit kann die gesuchte Zahl nicht zweistellig sein, denn wäre die alternierende Quersumme Null, so müssten beide Ziffern gleich sein, was (2) widerspricht; und die alternierende Quersumme 11 kann bei einer zweistelligen Zahl nicht erreicht werden.

Die gesuchten Zahlen können aber dreistellig sein: genau dann, wenn die mittlere Ziffer Null ist, erhält man für die alternierende Quersumme den Wert der Quersumme $\Rightarrow$ Regel: die erste und dritte Ziffer müssen zusammen 11 ergeben. Dies gilt für 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. Nach einer anderen Regel kann bei einer dreistelligen Zahl keine alternierende Quersumme von 11 bei einer Quersumme von 11 erreicht werden.

Die alternierende Quersumme Null bei einer dreistelligen Zahl mit der Quersumme 11 kann nicht auftreten, da folgendes gelten muss: $a_1 + a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2$. Dies ergibt zusammengefasst: $11 - a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 5{,}5$.

Bei einer vier- und mehrstelligen Zahl mit Quersumme 11 kann eine alternierende Quersumme 11 nicht auftreten, da mindestens eine Ziffer ungleich Null mit einem negativen Vorzeichen behaftet wird.

Für eine vierstellige Zahl gilt allgemein für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null wieder: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Für eine fünfstellige Zahl gilt nun für die Quersumme und die alternierende Quersumme Null: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 11 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = 11 - a_2 - a_4$ bzw. $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$. Und zusammengefasst: $11 - a_2 - a_4 = a_2 + a_4 \Rightarrow a_2 + a_4 = 5{,}5$, was nicht auftreten kann.

Die gesuchte Zahl kann nicht sechs- und mehrstellig sein, da bei 6 verschiedenen Ziffern die minimale Quersumme $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ den Wert 11 übersteigt.

Damit sind die einzigen Lösungen die der dreistelligen Zahlen wie oben angegeben.

Aufgabe 4 - 140914
Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, dass dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, dass er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, dass keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

Bettina hat recht. Wenn nämlich Axel auf seinen Zettel 1 schreibt, so ist seine Zahl in keinem Fall größer als die Bettinas, es ist also die Differenz zu bilden. Diese ist kleiner als 3, daher darf sich Bettina keine Marke von Axel nehmen. Wenn Bettina ebenfalls 1 notiert, sind folgende 3 Fälle möglich: Axel schreibt 1, 2 oder 3. Im ersten Fall ist die Differenz zu bilden. Sie ist 0, also darf sich Axel keine Marke von Bettina nehmen. Wenn mithin Axel und Bettina beide 1 schreiben, geht jeder von beiden sicher, keine Marke zu verlieren.

Aufgaben der I. Runde 1974 gelöst von Manuela Kugel

6.16.2 II. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140921
An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.
Es ist zu beweisen, dass es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Es seien $a_1,a_2,...,a_{14}$ die Anzahlen der Spiele, die die 14 Mannschaften zu einem bestimmten Zeitpunkt absolviert haben. Für die Gesamtzahl K der Spiele aller 14 Mannschaften gilt dann $K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14})$. (Der Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich daraus, dass bei der Summe jedes Spiel doppelt gezählt wird.)
Wir nehmen nun an, dass keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl von Spielen ausgetragen haben, dass also alle Werte a_i verschieden sind. Da alle Werte a_i der Menge $\{0,1,2,...,13\}$ angehören und diese Menge 14 Elemente hat, muss jeder Wert aus $\{0,1,2,...,13\}$ von genau einem der Werte a_i angenommen werden. Folglich ist

$$K = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_{14}) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + ...13) = \frac{13 \cdot 14}{4} = \frac{91}{2}$$

Hier erhalten wir einen Widerspruch, da $\frac{91}{2}$ keine ganze Zahl ist. Somit war unsere obige Annahme falsch, und es gibt zwei Mannschaften, die exakt gleich viele Spiele ausgetragen haben.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

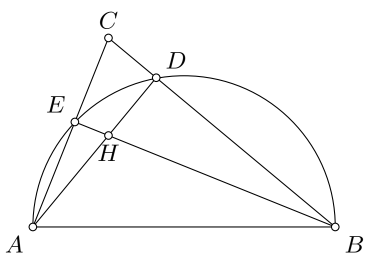
2. Lösung:
Da zu jedem Zeitpunkt der betrachteten Halbserie jede Mannschaft gegen jede andere höchstens einmal gespielt hat, ist die Anzahl der Partien, an der eine Mannschaft beteiligt war, immer durch $14 - 1 = 13$ nach oben beschränkt. Damit gibt es aber nur 14 verschiedene mögliche Anzahlen an Spielen, die eine Mannschaft gespielt haben kann.

Hätten zu einem Zeitpunkt keine zwei Mannschaften dieselbe Anzahl an Spielen, ginge das also nur, wenn jede der 14 möglichen Anzahlen auch vorkommt. Dann müsste es aber sowohl eine Mannschaft geben, die gegen keine andere gespielt hat, wie auch eine, die gegen alle 13 anderen gespielt hat. Beides zugleich kann aber nicht eintreten, was den gewünschten Widerspruch erzeugt und die Behauptung beweist.

Bemerkung: Dieser Ansatz nutzt nicht die konkrete Anzahl beteiligter Mannschaften und lässt sich auf beliebige Anzahlen > 1 verallgemeinern.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 140922
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, dass dann $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ gilt.



Da $\sphericalangle AEB = 90° = \sphericalangle ADB$ gilt, ist das Viereck $ABDE$ nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck.
Nach Sehnensatz gilt daher $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Die andere Gleichung folgt analog.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3 - 140923
Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Die Primfaktorzerlegung von 588 ist: $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Ist z^3 die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl z, so muss z^3 jeden Primfaktor von z mindestens dreimal enthalten.
Das kleinste Vielfache mit je drei Primfaktoren der Zerlegung von 588 ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Dessen dritte Wurzel ist $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. $z = 42$ ist die gesuchte Zahl.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Zweite Lösung:

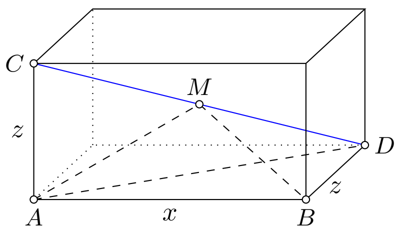
Hat eine ganze Zahl z ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, so gibt es eine ganze Zahl a mit $z^3 = 588a = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 a$. Daraus folgt, dass z^3 und folglich auch z durch jede der Primzahlen 2, 3, 7 teilbar ist; hiernach gibt es eine ganze Zahl x, mit der z von der Form $z = 2 \cdot 3 \cdot 7x$ ist.
Hat umgekehrt z diese Form, so ist

$$z^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7x^3$$

ein ganzzahliges Vielfaches von 588. Daher hat eine ganze Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches von 588 als dritte Potenz, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ ist. Unter allen positiven ganzzahligen Vielfachen von 42 ist 42 die kleinste und somit die gesuchte Zahl.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 140924
AB sei eine in der Ebene ϵ gegebene Strecke der Länge a. In ϵ sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist.
In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ϵ errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass $CA = a\sqrt{2}$ und $BD = a\sqrt{3}$ gilt.



a) Behauptung: Der Mittelpunkt M der Strecke CD hat von den Punkten A,B,C,D jeweils den gleichen Abstand und kann somit als Mittelpunkt der gesuchten Kugel gewählt werden.

Die Strecken x, y und z stehen nach Aufgabenstellung paarweise aufeinander senkrecht. Damit spannen sie einen Quader mit den Kantenlängen x, y und z auf.

Die Strecke CD ist dann die Raumdiagonale des Quaders mit der Länge $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Der Mittelpunkt von CD hat per Definition von C und D den gleichen Abstand. Als Symmetriezentrum des Quaders liegt M aber auch auf den Raumdiagonalen durch A bzw. B. Alle Raumdiagonalen eines Quaders haben die gleiche Länge, so dass $MA = MB = BC = MD$ folgt.
Damit ist M der Mittelpunkt einer Kugel auf deren Peripherie A, B, C und D liegen.

b) Setzt man $x = a$, $y = a\sqrt{2}$ und $z = a\sqrt{3}$ in die Gleichung des Radius r der Kugel ein, so wird

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2 + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

6.16.3 III. Stufe 1974, Klasse 9

Aufgabe 1 - 140931
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:
Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Genau dann ist x die gesuchte Zahl, wenn 1 die kleinste natürliche Zahl ist, zu der eine natürliche Zahl $n \geq 2$ mit

$$83x = 3 \cdot 10^n + 10x + 8$$

oder, äquivalent hierzu, mit $73x = 3 \cdot 10^n + 8$ existiert.
Untersucht man die Zahlen 308, 3008, 30008, 300008, 3000008 der Reihe nach auf Teilbarkeit durch 73, so ergibt sich, dass von ihnen nur die Zahl $3000008 = 73 \cdot 41096$ teilbar ist.
Daher ist $x = 41096$ die gesuchte Zahl, und es gilt $83 \cdot 41096 = 3410968$.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 140932
Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:
Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Wir können für eine ganze Zahl n die Elemente des Quadrupels schreiben als $a_1 = n-1$, $a_2 = n$, $a_3 = n+1$ und $a_4 = n+2$. Damit geht die Bedingung über in die Gleichung

$$(n-1)^3 + n^3 = (n+2)^3 - (n+1)^3 \qquad \text{bzw.}$$

$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 + 9n + 7$$

also $2n^3 - 6n^2 - 6n - 8 = 0$ und damit $n^3 - 3n^2 - 3n - 4 = 0$.
Es ist 4 eine Lösung dieser Gleichung, sodass wir (3,4,5,6) als Lösungsquadrupel erhalten.
Für den Fall $n \neq 4$ können wir die Gleichung durch $n - 4$ teilen und erhalten $n^2 + n + 1 = 0$. Diese Gleichung hat aber keine ganzzahligen Lösungen, sodass auch keine weiteren Lösungsquadrupel existieren.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Genau dann ist (a_1, a_2, a_3, a_4) ein derartiges Quadrupel, wenn es eine ganze Zahl n mit $a_1 = n$, $a_2 = n+1$, $a_3 = n + 2$, $a_4 = n + 3$ gibt, für die

$$n^3 + (n+1)^3 = (n+3)^2 - (n+2)^3 \qquad (1)$$

gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit

$$n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

und dies mit $n^3 - 6n = 9$, d. h. mit

$$n(n^2 - 6) = 9 \qquad (2)$$

Da für ganzzahliges n die beiden Faktoren des linken Terms der Gleichung (2) ganze Zahlen sind, kann (2) nur erfüllt sein, wenn n eine der Zahlen $1, -1, 3, -3, 9, -9$ ist.
Wie die folgende Tabelle zeigt, erfüllt von diesen Zahlen genau die Zahl $n = 3$ die Gleichung (2) und damit die Gleichung (1):

n	n^2	$n^2 - 6$	$n(n^2 - 6)$
1	1	-5	-5
-1	1	-5	5
3	9	3	9
-3	9	3	-9
9	81	75	675
-9	84	75	-675

Damit erfüllt das Quadrupel (3, 4, 5, 6) als einziges alle Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 140933
Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = AB$, $c = CD$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.
Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Es ist $F_{ABC} = F_{ABD} = \frac{1}{2}ah$, also $F_1 + F_2 = F_1 + F_4 = \frac{1}{2}ah$ und damit insbesondere $F_2 = F_4$.
Analog ist $F_{ACD} = F_{BCD} = \frac{1}{2}ch$, also $F_3 + F_4 = F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ch$.

Die Winkel $\angle ASB$ und $\angle CSD$ sind Scheitelwinkel, also gleich groß. Genauso stimmen die Winkel $\angle BAS$ und $\angle DCS$ überein, da sie Wechselwinkel sind. Demnach stimmen die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ in zwei Innenwinkeln überein, sind also ähnlich zueinander und es gilt $\frac{F_3}{F_1} = \left(\frac{|SC|}{|AS|}\right)^2$.
Es ist nach Strahlensatz $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{h}{h_S}$, wobei h_S die Länge der Höhe von S auf AB sei. Insbesondere ist damit

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|AC| - |AS|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AS|} - 1 = \frac{h}{h_S} - 1 = \frac{F_{ABC}}{F_1} - 1 = \frac{F_2}{F_1}$$

Damit ergibt sich $\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_2^2}{F_1^2}$ bzw. $\frac{F_3}{F_2} = \frac{F_2}{F_1}$.
Sei $x := \frac{F_3}{F_2}$. Dann gilt einerseits $F_2 + F_3 = (1+x)F_2 = \frac{1}{2}ch$ und andererseits $F_1 + F_2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot F_2 = \frac{1}{2}ah$.
Stellt man die erste dieser beiden Gleichungen nach F_2 um und setzt sie in die zweite ein, erhält man

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{2}ch \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}ah$$

bzw. $x = \frac{c}{a}$. Damit ergibt sich

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{ac}{a+c} \quad , \quad F_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{c^2}{a+c} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a^2}{a+c}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 140934
Man beweise, dass für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, dass in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Die genannte Ungleichung ist äquivalent zu

$$0 \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) =$$
$$= (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$$

was offensichtlich erfüllt ist. Gleichheit tritt dabei nur genau dann ein, wenn alle drei Quadrate Null sind, also $x = y = z$ gilt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Wegen $(x-y)^2 \geq 0$ gilt $x^2 + y^2 \geq 2xy$, wobei Gleichheit genau für $x = y$ eintritt, und entsprechend
$x^2 + z^2 \geq 2xz$, wobei Gleichheit genau für $x = z$ eintritt, sowie
$y^2 + z^2 \geq 2yz$, wobei Gleichheit genau für $y = z$ eintritt. Nach Addition und Division durch 2 folgt: Es gilt stets

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y = z$ ist.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 140935
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P.
Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.
a) Man beweise, dass C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, dass g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

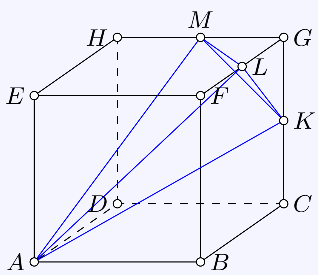
a) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen zu sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung um ihren Schnittpunkt um einen Drehwinkel, der dem Doppelten des Winkels zwischen den Spiegelachsen entspricht.
Da P_1 durch Spiegelung an AC auf P abgebildet wird und dieser Punkt durch Spiegelung an BC auf P_2, gilt $\angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180°$, sodass P_1, C und P_2 auf einer Geraden liegen.

b) Sei M der Mittelpunkt von k. Nach dem Satz des Thales ist M damit auch gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke AB. Weiterhin sei M_1 der Bildpunkt von M bei der Spiegelung an AC. Dann ist $|CM| = |CM_1| = |AM| = |AM_1|$, sodass es sich beim Viereck $AMCM_1$ um eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm handelt. Damit gilt $CM_1 \parallel AM = AB$.

Es ist die Gerade P_1C gleich g eine Tangente an k genau dann, wenn $P_1C \perp CM$ gilt. Bei Spiegelung an AC geht P_1C in PC und CM in CM_1 über, sodass g eine Tangente an k genau dann ist, wenn auch $PC \perp CM_1$ gilt. Letztere Gerade ist aber parallel zu AB, sodass diese Bedingung äquivalent zu $PC \perp AB$ ist, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 140936



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG. Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.

Eine Rotation des Würfels um die Raumdiagonale AG um den Winkel 120° bildet den Würfel wieder auf sich selbst ab, wobei die Punkte K, L und M zyklisch vertauscht werden. Demnach geht die Ebene, die durch diese drei Punkte definiert wird, durch die Drehung in sich selbst über und steht also senkrecht auf der Raumdiagonalen AG.
Sei S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Ebene durch K, L und M. Dann ist also SG die Höhe von G auf diese Ebene.
Sei V das Volumen des Tetraeders $KLMG$. Dann gilt einerseits $V = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |SG|$ und andererseits

$$V = \frac{1}{3}A_{\triangle MGL} \cdot |GK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|MG| \cdot |LG| \cdot |KG| = \frac{1}{48}a^3$$

Da

$$A_{\triangle KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |KL| = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

gilt, da $\triangle KLM$ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ist, folgt

$$|SG| = \frac{1}{48}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Volumen V_P des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A,K,L,M:

$$V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) a = \frac{5\sqrt{3}}{36}a^3$$

Aufgabe gelöst von cyrix

6.17 XV. Olympiade 1975

6.17.1 I. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150911
Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

I. Wenn eine Zahl die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt:
Wegen (1) wird die Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 1, 2, 3, 4 oder 2, 3, 4, 5 oder 3, 4, 5, 6 oder 4, 5, 6, 7 oder 5, 6, 7, 8, oder 6, 7, 8, 9 (in irgendeiner Reihenfolge geschrieben.

Wegen (2) muss die Zahl durch 9 teilbar sein, nach der Teilbarkeitsregel für die 9 muss also ihre Quersumme durch 9 teilbar sein.

Wegen $0+1+2+3=5$; $1+2+3+4=10$; $2+3+4+5=14$; $3+4+5+6=18$; $4+5+6+7=22$; $5+6+7+8=26$; $6+7+8+9=30$ trifft das nur zu, wenn die Zahlen die Ziffern 3, 4, 5, 6 (in irgendeiner Reihenfolge enthält.
Nun gilt es genau 24 solche Zahlen , nämlich:

3456, 3465, 3546, 3564, 3645, 3654, 4356, 4365, 4536, 4563, 4635, 4653, 5346, 5364, 5436, 5463, 5634, 5643, 6345, 6354, 6435, 6453, 6534, 6543.

Von ihnen sind nur die 8 Zahlen

3465, 3564, 4356, 4653, 5346, 5643, 6435, 6534, durch 11 teilbar.

II. Diese 8 Zahlen erfüllen die Bedingung (1).
Sie sind ferner durch 9 und 11 und damit da 9 und 11 teilerfremd sind, durch 99 teilbar, erfüllen also auch die Bedingung (2).

Aufgabe 2 - 150912
In

$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung.
Dann gilt für diese Ersetzung $S=1$; denn die fünfstellige natürliche Zahl "STADT" kann nicht mit 0 beginnen, und die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000.
Ferner gilt $S+S=T$, also $T=2$. Somit muss $H+H=12$ gelten; denn würde dazu noch ein Übertrag von der Hunderterspalte treten, denn könnte dieser nur 1 sein, was stets auf eine ungerade, also von 12 verschiedene Summe $H+H+1$ führen würde.

Also gilt $H=6$. Damit gilt $A\leq 4$, da sonst ein Übertrag in die Tausenderspalte auftreten würde.
Wäre nun mit Übertrag aus der Zehnerspalte $A+A+1=A$, so würde $A=-1$ folgen. Also kann kein solcher Übertrag auftreten, und man erhält $A+A=A$, also $A=0$ sowie $U\leq 4$.
Da verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern entsprechen und von den Zahlen 0, 1, 2. 3, 4 bereits 0, 1, 2 vergeben sind, kann nur $U=3$ oder $U=4$ sein. Für $U=3$ erhielte man $D=6$, was wegen $H=6$ den Regeln der Aufgabe widerspricht. Also gilt $U=4$ und $D=8$.

Somit kann nur die Ersetzung $A = 0$, $D = 8$, $H = 6$, $S = 1$, $T = 2$, $U = 4$ zu einer Lösung führen.

II. In der Tut sind bei dieser Ersetzung verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehende Additionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 0 & 4 & 1 \\ & 6 & 0 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 8 & 2 \end{array}$$

richtig gelöst ist, erfüllt diese Ersetzung alle gestellten Forderungen.

Aufgabe 3 - 150913
Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

I. Angenommen, ein Punkt P auf h habe die Eigenschaft $A'P = B'P$. Dann folgt:

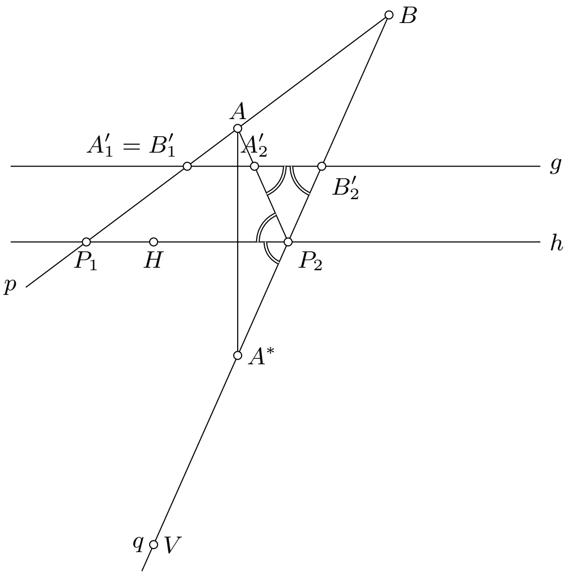
1. Ist $A' = B'$, so geht die durch P und A gelegte Gerade p auch durch $(A' =)B'$, also auch durch B.
2. Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A als an B' gelegenen Punkt auf h und V einen Punkt der Verlängerung von BP über P hinaus bezeichnet,

   $\angle APH = \angle PA'B'$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \angle PB'A'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

   $= \angle VPH$ (Stufenwinkel an Parallelen)

Daher liegt der durch Spiegelung von A an h entstandene Punkt A^* auf der Geraden q durch P und B.



II. Hiernach hat ein Punkt P nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn er als einer der Punkte P_1, P_2 durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiere die Gerade p durch A und B.
2. Schneiden sich p und h, so sei P_1 ihr Schnittpunkt.

3. Man konstruiere den durch Spiegelung von A an h entstehenden Punkt A^*.

4. Man konstruiere die Gerade q durch A^* und B.

5. Schneiden sich q und h, so sei P_2 ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis:

1. Ist $P = P_1$ nach II.1.2 konstruiert, so gilt:

   Die Strecken PA und PB liegen beide auf p. Daher schneiden beide die Gerade q im demselben Punkt, d.h. es gilt $A' = B'$ und somit $A'P = B'P$.

2. Ist $P = P_2$ nach II.3.4.5. konstruiert, so gilt:

   a) Ist $A' = B'$, so gilt $A'P = B'P$.

   b) Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A' als an B' gelegenen Punkt auf h bezeichnet,

   $\angle PA'B = \angle ABH$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \angle A^*PH$ (da A^* Spiegelpunkt von A an h ist)

   $= \angle PB'A'$ (Stufenwinkel an Parallelen)

   also ist $\triangle PA'B'$ gleichschenklig mit $A'P = B'P$.

V. Konstruktionsschritt II.1. ist eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt II.2. führt genau dann auf keinen Punkt P_1, wenn $p \parallel h$ ist, anderenfalls auf genau einen Punkt P_1.

Konstruktionsschritt II.3. und 4. sind stets eindeutig ausführbar, ebenfalls Konstruktionsschritt II.5., da A^* auf B auf verschiedenen Seiten der Geraden h liegen.

Es gilt genau dann $P = P_2$, wenn der Spiegelpunkt A^* auf der Geraden p durch A, B liegt. Da die Gerade durch A, A^* stets auf h senkrecht steht, gilt somit $P_1 = P_2$ genau im Falle $p \perp h$.

Damit ist gezeigt:

1. Ist die Gerade durch A, B parallel zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.

2. Ist die Gerade durch A, B senkrecht zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.1.2. oder durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.

3. Ist die Gerade durch A, B weder parallel noch senkrecht zu h, so existieren genau zwei gesuchte Punkte P_1, P_2; sie können durch die Konstruktion II.1.2. bzw. II.3. bis 5. gefunden werden.

Aufgabe 4 - 150914
Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, dass du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

I. Angenommen, für ein Geburtsdatum des Sohnes seien alle Angaben zutreffend.

Dann gilt:

Ist x das in vollen (vollendeten) Lebensjahren ausgedrückte Alter des Sohnes am 30. 12. 1973, so kann es im Jahre 1974 nur die Werte $x, x+1$, $x+2$ annehmen, und davon den letzten nur dann, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat.

Ferner ist $8x$ das in vollen Lebensjahren ausgedrückte Alter des Vaters am 30. 12. 1973, und dies kann im Jahre 1974 nur die Werte $8x, 8x+1$ annehmen.

Daher gilt für eine der Zahlen $a = 0, 1, 2$ und eine der Zahlen $b = 0, 1$ die Gleichung $5 \cdot (x+a) = 8x + b$, also $5a - b = 3x$.

Nun zeigt die folgende Tabelle der Werte $5a - b$,

b	$a = 0$	1	2
0	0	5	10
1	-1	4	9

dass $5a - b$ nur für $a = 2, b = 1$ durch 3 teilbar ist, was dann auf $x = 3$ führt. Also können die Angaben in der Aufgabe nur dann zutreffen, wenn der Sohn am 31. 12. Geburtstag hat, am 30. 12. 73 noch 3 Jahre alt war, am 31. 12. 1973 also 4 Jahre alt wurde und folglich am 31. 12. 1969 geboren war.

II. Dieses Geburtsdatum des Sohnes, zusammen mit dem daraus folgenden Alter des Vaters von 24 Jahren am 30. 12. 1973, erfüllt in der Tat alle Angaben; denn bei diesen Daten war am 30. 12. 1973 der Vater 8 mal so alt wie sein Sohn; am 31. 12. 1974 aber, als der Sohn 5 Jahre alt wurde, war der Vater 25 Jahre alt, also 5 mal so alt wie sein Sohn.

Daher treffen die Angaben genau für den 31. 12. 1969 als Geburtsdatum des Sohnes zu.

Lösungen der I. Stufe 1975 übernommen von [5]

6.17.2 II. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150921
Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Laut Aufgabenstellung sind alle Paare (a,b) mit a, b natürlich und $a > b$ zu ermitteln, für die $a^2 - b^2 = a+b$ gilt.
Nun ist nach einer binomischen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, und daher ist die geforderte Eigenschaft gleichwertig mit $(a + b)(a - b) = a + b$.
Wegen a, b natürlich und $a > b$, ist $a + b \neq 0$. Also ist die genannte Eigenschaft weiterhin gleichwertig mit $a - b = 1$, d.h. die gestellte Bedingung wird genau von den Paaren (a, b) natürlicher Zahlen erfüllt, für die a um 1 größer ist als b.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 150922

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.
a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!
b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!
Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z.B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

aD:4 (Zeile a, Spalten ABC besetzt; dE:4)
aE:5 (Zeile a, Spalten ABCD besetzt)
bB:5 (Hauptdiagonale: aA:1, cC:$\neq$ 5 wegen cD:5, dd:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
eC:5 (Zeile e, eA:$\neq$ 5 wegen aE:5, eB:$\neq$ 5 wegen bB:5, eD:$\neq$ 5 wegen cD:5, eE:$\neq$ 5 wegen aE:5)
dA:5 (Zeile d; in allen Spalten BCDE gibt es schon Fünfen).
cC:4 (Hauptdiagonale: aA, bB besetzt, dD:$\neq$ 4 wegen aD:4, eE:$\neq$ 4 wegen dE:4)
eB:4 (Spalte B, Zeilen ab besetzt, cB:$\neq$ 4 wegen cC:4, cd:$\neq$ 4 wegen dE:4)
bA:4 (Spalte A, in allen anderen Zeilen schon Vieren vorhanden)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5			
c			4	5	
d	5				4
e		4	5		

Wäre bD:1, dann eA:$\neq$ 1 (Hauptdiagonale) und eD:$\neq$ 1, also eE:1 (da eB und eC schon besetzt). Dies ist aber ein Widerspruch zu aA:1 auf der Hauptdiagonalen. Also ist bD:$\neq$ 1.

eD:1 (Spalte D, bD:$\neq$ 1, aD, cD besetzt, dD:$\neq$ 1 wegen aA:1)
dB:1 (Nebendiagonale, aE, cc besetzt, bD:$\neq$ 1 wegen eD:1, eA:$\neq$ 1 wegen aA:1)
cE:1 (Zeile c, Spalten CD besetzt, Spalten AB verboten, da dort schon Einsen)

bC:1 (Zeile b, in allen anderen Spalten schon Einsen)

Skizze:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1		
c			4	5	1
d	5	1			4
e		4	5	1	

dC:2 (Spalte C, Zeilen abce besetzt) ; dD:3 (Zeile d, Spalten ABCE besetzt)
bD:2 (Spalte D, Zeilen acde besetzt) ; bE:3 (Zeile b, Spalten ABCD besetzt)
eE:2 (Spalte E, Zeilen abcd besetzt) ; eA:3 (Zeile e, Spalten BCDE besetzt)
cA:2 (Spalte A, Zeilen abde besetzt) ; cB:3 (Zeile c, Spalten ACDE besetzt)

Damit ergibt sich notwendigerweise folgende Tabelle:

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	4	5	1	2	3
c	2	3	4	5	1
d	5	1	2	3	4
e	3	4	5	1	2

Dass diese auch alle Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, zeigt die Probe. Es existiert also nur genau diese eine Variante, die Tabelle gemäß den Vorgaben auszufüllen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 150923
Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m \leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $MD = m$ gilt.
Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie 1 : 7 verhält.
Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle NMD$ beträgt

$$\frac{1}{2}|MD| \cdot |DN| = \frac{m}{2} \cdot |DN|$$

Damit dieser den von der Aufgabenstellung verlangten Wert von $\frac{1}{7}a^2$ annimmt, muss $|DN| = \frac{2a}{7m} \cdot a$ gelten. Damit der Punkt D auf der Seite AD des Quadrats liegt (und nicht nur auf der Gerade durch diese Seite), muss der Vorfaktor $\frac{2a}{7m}$ zwischen 0 und 1 liegen.
Wegen $a > 0$ und $m \geq 0$ ist auch immer $\frac{2a}{7m} > 0$. Schließlich ist die Ungleichung $\frac{2a}{7m} \leq 1$ äquivalent zu $m \geq \frac{2}{7}a$, sodass genau für solche Werte von m ein entsprechender Punkt N auf der Strecke AD existiert.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 150924
Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $AB = c$, $BC = a$ und $\angle BAC = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel $\angle AC_2B$!

Es ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenklig mit Basis C_1C_2. Damit ist

$$\angle BC_1C_2 = \angle C_1C_2B = \angle AC_2B$$

Da die Winkel $\angle AC_1B$ und $\angle BC_1C_2$ Nebenwinkel sind, ergänzen sie sich zu 180°. Zusammen mit $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$ folgt $5\angle AC_2B = 180°$, also $\angle AC_2B = 36°$ und damit schließlich $\angle AC_1B = 4 \cdot 36° = 144°$.

Aufgabe gelöst von cyrix

6.17.3 III. Stufe 1975, Klasse 9

Aufgabe 1 - 150931
Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Es seien $2n-1$, $2n+1$ und $2n+3$ die drei aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen. Dann ist die Summe S ihrer Quadrate gleich

$$S = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 =$$

$$= 12n^2 + 12n + 11 = 12(n^2 + n + 1) - 1$$

Diese Summe soll eine vierstellige Zahl sein, die aus vier gleichen Ziffern z besteht. Also gilt $S = 1111 \cdot z$. Es ist S ungerade, sodass auch z ungerade sein muss. Weiterhin lässt wegen $S = 1110z + z = 3 \cdot 370z + z$ die Summe S den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 wie z selbst. Da aber S um 1 kleiner als ein Vielfaches von 12 (und damit auch von 3) ist, muss dieser Rest bei der Teilung durch 3 genau 2 betragen. Als einzige Ziffer $1 \leq z \leq 9$ erfüllt $z = 5$ beide Bedingungen.
Demnach muss $S = 5555$ sein, woraus man $n^2 + n + 1 = \frac{5556}{12} = 463$ und $n = 21$ (bzw. $n = -22$, was aber wegen $2n - 1 \in \mathbb{N}$ entfällt) erhält, sodass die drei gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 41, 43 und 45 lauten.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 150932
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$ und die Höhenlänge $AD = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, dass BC auf g liegt.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Durch den ebenen Schnitt mit der Ebene, die senkrecht zu g durch A verläuft (und in der dann nach Konstruktion auch der Höhenfußpunkt D liegt), zerlegt den Rotationskörper in zwei gerade Kreiskegel: Beide besitzen den aus der Rotation der Strecke AD gebildeten Kreis als gemeinsame Grundfläche sowie B bzw. C als Spitze. Damit ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot (|BD| + |DC|) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 150933
Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1,A_2), (B_1,B_2), (C_1,C_2), (D_1,D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!
A1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.
B1) $x - 5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B2) $x + 1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.
C1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C2) x ist die Zahl 389.
D1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen $307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397$.
D2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Da aus C_2 direkt C_1 folgt, aber nicht beide Aussagen wahr sein dürfen, muss C_2 falsch und C_1 wahr sein. Es ist also x, sofern es existiert, eine natürliche Zahl, die mit der Ziffer 3 beginnt, nicht aber die 389.

Wäre die Aussage D_2 nun wahr, müsste es sich um die Zahl 333 handeln. Dies widerspricht aber beiden

Aussagen B_1 und B_2, da weder 328 durch 6 noch 334 durch 12 teilbar sind. Also muss D_2 falsch und D_1 wahr sein, sodass x eine der von 389 verschiedenen Primzahlen in der angegebenen Liste sein muss.

Wäre die Aussage B_2 wahr, dann wäre $x+1$ insbesondere auch durch 6 teilbar, also auch $x+1-6 = x-5$, sodass die Aussage B_1 auch erfüllt wäre. Demnach muss also $x-5$ durch 6 teilbar sein, während $x+1 = (x-5)+6$ nicht durch 12 teilbar sein darf. Das geht aber nur, wenn schon $x-5$ durch 12 teilbar war. In der Liste erfüllen das nur 317 und 353, sodass x eine dieser beiden Zahlen sein muss.

Wäre A_2 wahr, dann wäre es eindeutig als 353 identifiziert, da nur in dieser noch möglichen Zahl zwei gleiche Ziffern vorkommen. Dann wäre aber auch aufgrund der nun gezeigten Eindeutigkeit auch die Aussage A_1 wahr, was ein Widerspruch zur Bedingung der Aufgabenstellung darstellt.
Ist dagegen A_2 falsch, dann darf in der Darstellung von x keine Ziffer zwei mal auftreten. Dies schließt die 353 aus, sodass 317 die eindeutige Lösung ist, sodass Aussage A_1 wahr ist.
Damit erfüllt $x = 317$ genau die jeweils ersten Aussagen, während die jeweils zweiten falsch sind; und es ist auch die einzige Zahl, die der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 150934
Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

1. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist ungerade, d.h. $2k+1$ für eine positive ganze Zahl k. Ist n der dann existierende mittlere Summand, so lässt sich die Summe schreiben als

$$(n-k)+(n-(k-1))+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(n+(k-1))+(n+k) = n\cdot(2k+1)$$

Dabei muss $n \geq k$ gelten, damit auch der kleinste Summand $n-k$ eine nicht-negative ganze Zahl ist. Soll diese Summe den Wert 60 ergeben, muss also $2k+1$ ein ungerader Teiler von 60 sein und $n = \frac{60}{2k+1} > k$ gelten.

Damit ergeben sich folgende Lösungen:
Für $2k+1 = 3$ ist $n = 20 > 1$, also $60 = 19+20+21$ und
für $2k+1 = 5$ ist $n = 12 > 2$, also $60 = 10+11+12+13+14+15$.
Für den einzigen weiteren ungeraden Teiler $2k+1 = 15$ von 60 erhält man $n = 4$, was aber kleiner ist als $k = 7$. Auf diese Weise erhielte man nur die Summe

$$60 = (-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11$$

welche auch negative Summanden enthält, also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung ist.

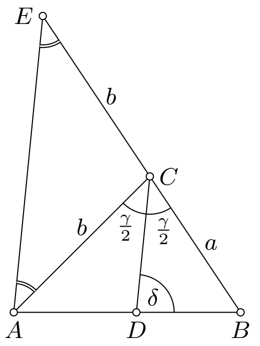
2. Fall:
Die Anzahl der Summanden ist gerade, d.h. $2k$ für eine positive ganze Zahl k. Insbesondere enthält die Summe dann k ungerade Summanden, ist also nur dann – wie 60 – gerade, wenn k auch gerade ist, sich also als $2m$ mit einer positiven ganzen Zahl m schreiben lässt. Die Summe besteht demnach aus $4m$ Summanden.
Sei der kleinste dieser Summanden mit $n-(2m-1)$ bezeichnet, wobei $n \geq 2m-1$ eine natürliche Zahl sei. Dann gilt

$$60 = (n-(2m-1))+\cdots+(n+(2m-1))+(n+(2m)) = 4mn+2m = 2m(2n+1)$$

Insbesondere ist $2n+1$ ein ungerader Teiler von 60, sodass $2m = \frac{60}{2n+1} \leq n+1$ gilt. Dies liefert die folgende Lösung:
Für $2n+1 = 15$ ist $2m = 4 \leq 8$ und wir erhalten $60 = 4+5+6+7+8+9+10+11$.
Sonst ist $2n+1 \leq 5$, also $n \leq 2$, aber $2m = \frac{60}{2n+1} \geq 12$, sodass man wieder nur ganzzahlige, aber keine natürlichen Lösungen erhält.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 150935
Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C.
Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\angle ACB$ die Seite AB in D. Da Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B.
Es wird nun (o.B.d.A.) behauptet: $AD : BC = AC = BC$.

Beweis: Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E. Wegen $AC = EC$ ist das Dreieck ACE gleichschenklig.
Also gilt $\angle CAE = \angle CEA$ (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und ferner $\angle CAE + \angle CEA = \gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz). Daraus folgt $\angle CAE = \frac{\gamma}{2}$.

Die Winkel $\angle CAE$ und $\angle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß. Folglich sind die Geraden CD und AE parallel.
Daher gilt nach einem der Strahlensätze und wegen $AC = EC = b$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 150936
Beweisen Sie, dass für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$$

gilt! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel ist $1 = \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, also $3 \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Daraus erhält man durch Multiplikation mit $abc = 1$ die Ungleichung $3 \leq bc+ac+ab$. Weiterhin ist aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auch $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, also $a + b + c \geq 3$.
Zusammen ergibt sich

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

wobei Gleichheit nur genau dann eintritt, wenn $a = b = c$ $(= 1)$ gilt, da nur genau dann in den Mittel-Ungleichungen der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe gelöst von cyrix

6.18 XVI. Olympiade 1976

6.18.1 I. Stufe 1976, Klasse 9

Aufgabe 1 - 160911
Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie" AG zur "Ziellinie" DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ... , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden. Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

(3) Wenn bereits ein "Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:

a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.

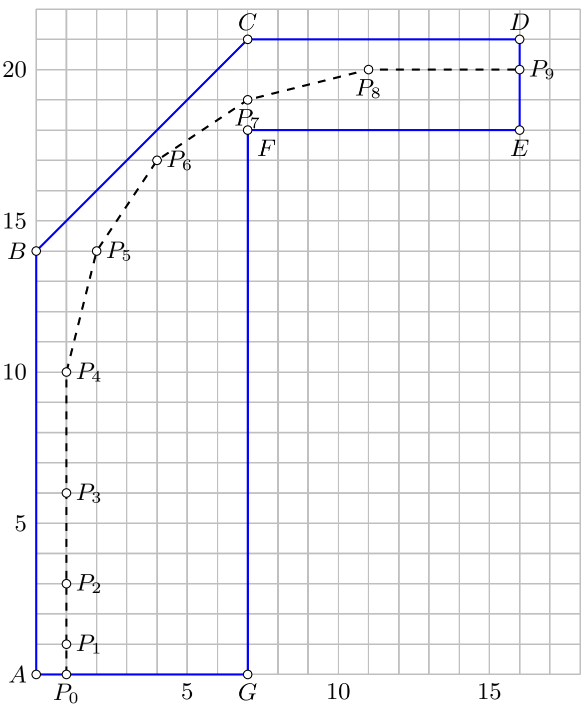
b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

Hinweis: P_{k+1} muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(7;21)$, $D(16;21)$, $E(16;18)$, $F(7;18)$, $G(7;0)$ einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2,..., 9$) ohne Begründung.

Es gibt verschiedene Lösungen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.



Aufgabe 2 - 160912
Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w.

Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

Angenommen es wäre möglich, auf diese Weise genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Da bei jeder Teilung 6 Papierstücke hinzukommen würden, müsste sich die Zahl 1976 in der Form

$$1976 = 6k + 7 \qquad \text{mit} k \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen, d.h. 1976 müsste bei Division durch 6 den gleichen Rest haben wie 7, nämlich 1.
Das ist nicht der Fall, also ist es nicht möglich, auf diese Weise aus 7 Papierstücken genau 1976 Papierstücke zu erhalten.

Oder: Bei der ersten Teilung kommen zu der ursprünglichen Anzahl von 7 Papierstücken 6 weitere hinzu. Da auch bei jeder weiteren Teilung genau 6 Papierstücke hinzukommen, ergibt sich als Summe aller Papierstücke stets eine ungerade Zahl, also niemals die gerade Zahl 1976. Die Behauptung ist somit falsch.

Aufgabe 3 - 160913
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann ist Dreieck DAM gleichschenklig mit $DM = AM = \frac{b}{2}$

Daher ist $\angle MDA = \angle MAD = \angle BAC = \angle ABC$, also $\triangle DAM \sim \triangle ABC$.

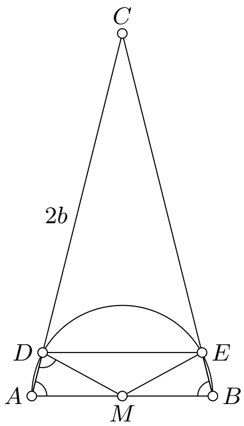
Folglich gilt $DA : AM = AB : BC = 1 : 2$, also $DA = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$ und daher

$$CD = AC - DA = 2b - \frac{b}{4} = \frac{7b}{4}$$

Ebenso erhält man $EB = \frac{b}{4}$ und $CA = \frac{7b}{4}$.

Also ist $DE \parallel AB$ und folglich $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Daraus ergibt sich $DE : AB = CD : AC = 8 : 7$, also $DE = \frac{7b}{8}$. Somit beträgt der gesuchte Umfang

$$AB + BE + ED + DA = b + \frac{b}{4} + \frac{7b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{19b}{8}$$



Aufgabe 4 - 160914
Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Angenommen, es gibt solche Körper, dann muss gelten 1) für den Würfel

$$b = 6a^2$$
$$b = a^3 \quad \text{und damit} \quad a^3 = 6a^2$$
$$a = 6$$

Tatsächlich hat ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm den Oberflächeninhalt 216 cm^2 und das Volumen 216 cm^3.

2) für die Kugel

$$d = \frac{\pi}{6}c^3$$
$$d = \pi c^2 \quad \text{und damit} \quad \frac{\pi}{6}c^3 = \pi c^2$$
$$c = 6$$

Tatsächlich hat eine Kugel mit dem Durchmesser 6 cm einen Oberflächeninhalt von 36 cm^2 und ein Volumen von 36 cm^3.

3) für das reguläre Tetraeder

$$f = e^2\sqrt{3}$$
$$f = \frac{e^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad \frac{e^3}{12}\sqrt{2} = e^2\sqrt{3}$$
$$e = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$
$$e = 6\sqrt{6}$$

Tatsächlich hat ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $6\sqrt{6}$ cm einen Oberflächeninhalt von $216\sqrt{3}$ cm^2 und ein Volumen von $216\sqrt{3}$ cm^3.

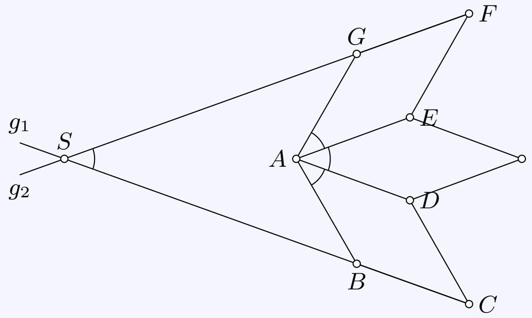
Also erfüllen genau die folgenden Zahlen die gestellten Bedingungen:

$$a = 6, \quad c = 6 \quad \text{und} \quad e = 6\sqrt{6}$$

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen von [5]

6.18.2 II. Stufe 1976, Klasse 9

Aufgabe 1 - 160921

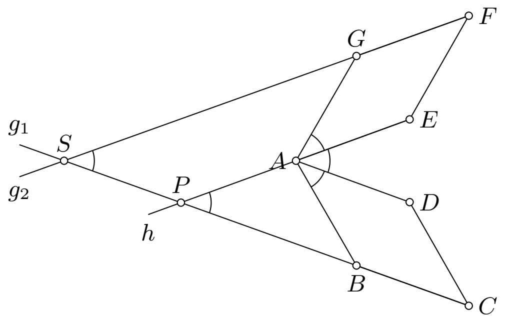


Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel $\angle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$.

Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:

"Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel $\angle BAD, \angle DAE$ und $\angle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\angle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."

Beweisen Sie diesen Satz!



Es sei h die gerade durch A und E. Dann gilt $h \parallel g_2$, da $AEFG$ ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 die Geraden g_2 und h in S bzw. P. (siehe Abbildung)

Nun sind $\angle BPA$ und $\angle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleichgroß. Ebenso sind $\angle DAE$ und $\angle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und mithin gleichgroß. Folglich ist der Winkel $\angle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$, $\angle EAG$.

Aufgabe 2 - 160922

Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, dass

a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, dass es alle verlangten Eigenschaften hat!

a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

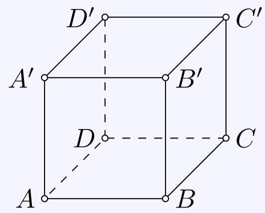
Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.

In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

Aufgabe 3 - 160923

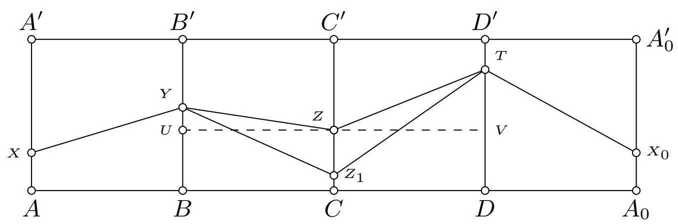


Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.
Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, dass der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen
a) minimale,
b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den "Mantel" aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:
Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0, da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da sie so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $AX = BY = CZ = DT = A_oX_o$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen.
Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYZTX_0$ ist $XX_0 = AA_0$, also für alle X dieselbe Länge.
Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei $XYZTX$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug.
Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, dass $CZ \leq BY$ und $CZ \leq DT$ gilt.



Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT. Daher ist $\angle CZY \geq \angle CZU = 90°$ und $\angle CZT \geq \angle CZV = 90°$.
Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z, so gehört auch XYZ_1TX zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1, also gilt $YZ_1 > YZ$.
Ebenso folgt $Z_1T > ZT$. Daher hat XYZ_1TX eine größere Gesamtlänge als $XYZTX$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

Aufgabe 4 - 160924
In der folgenden Anordnung von Zeichen

ab	X	ab	=	cad
Y		Y		Z
ae	X	ae	=	ffe
ff	Y	ff	=	gg

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, dass jeweils wahre Aussagen entstehen.
Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen "+", "-", "·" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.
Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistellige Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muss deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$$\text{abXab} = \text{cad} \quad \text{und} \quad \text{aeXae} = \text{ffe}$$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.
Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, muss X für das Zeichen · stehen.
Aus ffYff = gg folgt wegen $ff - ff = 0$ und $ff : ff = 1$, dass Y weder das Zeichen $-$ noch das Zeichen : bedeuten kann. Y steht für das Zeichen $+$.
Aus cadZffe=gg folgt, dass Z nicht für das Zeichen : stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Z steht für das Zeichen $-$. Damit ergibt sich bisher

ab	·	ab	=	cad
+		+		-
ae	·	ae	=	ffe
ff	+	ff	=	gg

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus ae · ae = ffe, dass die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.
Aus ab+ae=ff folgt, dass e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müssten.
Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, dass an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrates die gleiche Ziffer steht.
Wäre nun $a = 1$ und $e = 5$, dass müsste wegen ab+ae=ff mithin $f = 3$ und $b = 8$ sein. Wegen $18^2 = 324$ folgt dann auf ab · ab=cad der Widerspruch $a = 2$.
Für $a = 2$ und $e = 1$ folgt $f = 4$ und $b = 3$, Also kann nur die Ersetzung

23	·	23	=	529
+		+		-
21	·	21	=	441
44	+	44	=	88

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Lösungen der 2. Runde 1976 übernommen aus [5]

6.18.3 III. Stufe 1976, Klasse 9

Aufgabe 1 - 160931
Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Aufgrund der Punktsymmetrie ist $n = 2m$ gerade.
Seien die Eckpunkte des n-Ecks in mathematisch positiver Richtung mit P_1, P_2, $\ldots$, P_{2m} durchnummeriert, sodass sich jeweils P_k und P_{m+k} gegenüberliegen. Diese bilden also jeweils einen Durchmesser des Einheitskreises und es gilt $|P_kP_{m+k}|^2 = 2^2 = 4$.
Nach dem Satz von Thales ist jedes Dreieck $P_kP_{k+m}P$ rechtwinklig bei P (oder P fällt mit einem der beiden Endpunkte des betrachteten Durchmessers zusammen).
In jedem Fall gilt aber nach Pythagoras (bzw. sofort durch Einsetzen)

$$|PP_k|^2 + |PP_{k+m}|^2 = |P_kP_{k+m}|^2 = 4$$

sodass sich für die gesuchte Summe s als Wert die Anzahl dieser Durchmesser ergibt, die $4m = 2n$ beträgt, da jeder der Eckpunkte des n-Ecks an genau einem Durchmesser des Einheitskreises beteiligt ist, und auf jedem solchen genau zwei der Eckpunkte des n-Ecks liegen.

Aufgabe 2 - 160932
Man beweise folgenden Satz:
Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a + 1) \cdot (b + 1) \geq 4 \qquad (1)$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 1$, also

$$(a + 1) \cdot (b + 1) = ab + (a + b) + 1 \geq 1 + 2 + 1 = 4$$

Dabei gilt Gleichheit genau für $a = b$, da nur dann die Mittelungleichung den Gleichheitsfall liefert.

Aufgabe 3 - 160933
Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:
(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.
a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

a) T_1 entsteht, indem die drei Kanten der Länge a die Grundfläche $\triangle ABC$ bilden und die drei Kanten AD, BD, CD zur Spitze D jeweils die Länge $a\sqrt{2}$ besitzen. Dann sind beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sind die anderen drei Seitenflächen von T_1 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge a und Schenkellänge $a\sqrt{2}$.
Der Tetraeder T_2 entsteht analog, nur dass diesmal die Kanten mit Länge $\sqrt{2}a$ die Grundfläche bilden, während die Kanten zur Spitze die Länge a erhalten. Dann sind wieder beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $a\sqrt{2}$ sind die drei anderen Seitenflächen von T_2 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge $a\sqrt{2}$ sowie Schenkellänge a.
Insbesondere sind die Seitenflächen von T_1 und T_2 nicht kongruent, also auch nicht die Tetraeder selbst.

b) Für ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge g und Schenkellänge s gilt, dass die Höhe auf die Basis gleichzeitig eine Seitenhalbierende ist. Insbesondere gilt also für deren Länge h aufgrund des rechten Winkels am Höhenfußpunkt $h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = s^2$ bzw. $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4s^2 - q^2}$ und damit $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{4} \cdot g\sqrt{4s^2 - q^2}$.

Für ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge s folgt damit insbesondere

$$A = \frac{1}{4} \cdot s\sqrt{4s^2 - s^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

Damit beträgt der Oberflächeninhalt von T_1

$$O_{T_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{4(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (\sqrt{3} + 3\sqrt{8-1}) = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{7}}{4} \cdot a^2$$

und der von T_2

$$O_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{4a^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2}) = \frac{2\sqrt{3}+6}{4}a^2$$

Aufgabe 4 - 160934
Beweisen Sie, dass für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n-1) \cdot p^2 + 1$ Primzahl ist!

Da p eine von 3 verschiedene Primzahl ist, ist es nicht durch 3 teilbar und lässt sich schreiben als $3m+1$ oder $3m-1$ mit einer natürlichen Zahl m.
Dann ist

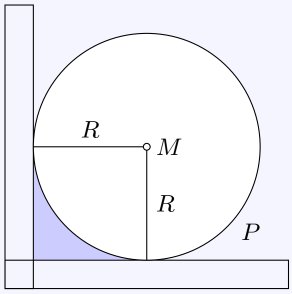
$$(3n-1) \cdot p^2 + 1 = (3n-1)(3m \pm 1)^2 + 1 = (3n-1)(9m^2 \pm 6m + 1) + 1 =$$
$$= 3(9m^2n \pm 6mn + n - 3m^2 \mp 2m) - 1 + 1$$

also durch 3 teilbar, aber sicher größer als 3 (da $3n-1 > 1$ und $p^2 \geq 4$), also sicher keine Primzahl, $\Box$.

Aufgabe 5 - 160935
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.
Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Nein, einen solchen Punkt gibt es nicht.
Da jede Seitenhalbierende das Dreieck in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt, sich diese aber allein im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, wäre der einzig in Frage kommende Punkt P eben der Schwerpunkt des Dreiecks.
Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Die Parallele zur Seite AB durch den Schwerpunkt schneide die Seiten AC und BC in D bzw. E.
Dann ist das Dreieck DEC ähnlich zum Dreieck ABC und es gilt nach dem Strahlensatz, dass der Streckungsfaktor $\frac{2}{3}$ ist.
Damit hat aber das Dreieck DEC nur $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ des Flächeninhalts vom Dreieck ABC. Demzufolge gibt es eine Parallele zur Seite AB, die näher an dieser liegt als die gerade betrachtete Parallele durch den Schwerpunkt, welche das Dreieck in zwei flächengleiche Stücke zerlegt. Diese neue Parallele verläuft dann aber nicht mehr durch den Schwerpunkt, sodass wir mit den drei Seitenhalbierenden und dieser Parallele vier Geraden, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen, gefunden haben, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aufgabe 6 - 160936
Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.
a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

a) Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden des rechten Winkels gehen die beiden Schenkel ineinander über. Da die Pappscheibe beide Schenkel nur in je einem Punkt P bzw. Q berührt, müssen auch diese Berührpunkte zueinander Spiegelpunkte sein.

Da der Mittelpunkt N der kleinen Kreisscheibe mit Radius r in gleicher Entfernung zu beiden Berührpunkten liegt, muss dieser sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ befinden. Dies ist aber genau die Spiegelachse, also die Winkelhalbierende des rechten Winkels. Also liegt N (und analog auch M) auf dieser Geraden.

Lässt man (beginnend beim Scheitelpunkt des Winkels) N auf der Winkelhalbierenden in Richtung M wandern, so vergrößert sich streng monoton seine Entfernung zu beiden Schenkeln (beginnend bei 0). Umgekehrt sinkt seine Entfernung zu M (beginnend bei einem positiven Wert, bis sie 0 erreicht, wenn N auf M liegt). Demzufolge gibt es genau eine Stelle dazwischen, wo die Entfernungen r von N zu den Schenkeln des Winkels und $|MN| - R$ identisch sind. In dem Fall berührt der Kreis um N mit Radius r beide Schenkel und den Kreis um M mit Radius R, also die Pappscheibe P.

b) Sei S der Scheitelpunkt des Winkels. Es stehen die Berührradien NP und NQ senkrecht auf den Schenkeln, sodass das Viereck $SPNQ$ drei (und damit auch vier) rechte Innenwinkel besitzt, also ein Rechteck ist. Da $|NP| = |NQ| = r$ gilt, ist es sogar ein Quadrat.

Dessen Diagonale SN hat damit die Länge $|SN| = \sqrt{2}r$. Auf analoge Weise erhält man $|SM| = \sqrt{2}R$, also $r + R = |NM| = |SM| - |SN| = \sqrt{2}(R - r)$, also $r \cdot (1 + \sqrt{2}) = R \cdot (\sqrt{2} - 1)$ bzw.

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot R = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} \cdot R = (3 - 2\sqrt{2})R$$

Aufgaben der III. Runde 1976 gelöst von cyrix

6.19 XVII. Olympiade 1977

6.19.1 I. Runde 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170911
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

Die beiden Zahlen seien a und b, und es gelte o.B.d.A. $b < a$. Dann gilt für die positive Differenz d ihrer Quadrate

$$d = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (a+b) \cdot 1977 = (a+b) \cdot 3 \cdot 659$$

Daher hat d mindestens die natürlichen Zahlen

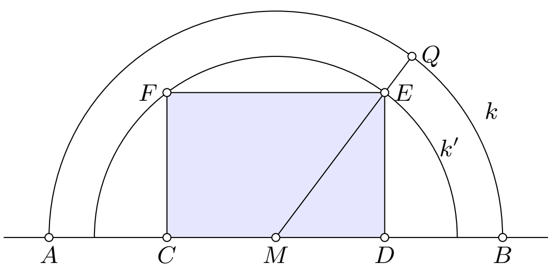
$$1; 3; 659; 1977; a+b; (a+b) \cdot 3; (a+b) \cdot 659; d$$

als Teiler. Wegen $a+b > a-b$ (was aus $b > 0$ folgt), d.h. $a+b > 1977$, sind diese acht Teiler sämtlich voneinander verschieden.

Aufgabe 2 - 170912
Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.



Es sei k ein halbkreisförmiger Querschnitt des Tunnels, das Halbkreisbogen k habe die Endpunkte A und B. Ferner sei M der Mittelpunkt von AB.

Ein Punkt P im Innern des Querschnitts erfüllt genau dann die Forderung, mindestens einen halben Meter Abstand zur Tunnelwand zu besitzen, wenn $MP \leq 2{,}5$ m gilt, d.h. genau dann, wenn P der Fläche des Halbkreises k' angehört, der den Mittelpunkt M, den Radius 2,5 m hat und in der Fläche des Halbkreises k liegt.

Angenommen nun, alle Punkte eines rechteckigen Fahrzeugquerschnitts $CDEF$ erfüllen diese Forderung, wobei C und D auf der Strecke AB liegen.

Dann gilt $ME \leq 2{,}5$ m und $MF \leq 2{,}5$ m. Ferner gilt $MC \geq 1{,}5$ m oder $MD \geq 1{,}5$ m; denn wäre $MC < 1{,}5$, und $MD < 1{,}5$ m, so ergäbe sich $CD < 3$ m. Es sei o.B.d.A. $MD \geq 1{,}5$ m. Dann folgt

$$DE = \sqrt{ME^2 - MD^2} \leq \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}4^2} m = 2m$$

Daher kann ein Fahrzeug nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn es nicht höher als 2 m ist.

Umgekehrt lassen sich die Bedingungen der Aufgabe mit einem Fahrzeug (der Breite 3 m und) der Höhe 2 m erfüllen. Wählt man nämlich im Tunnelquerschnitt ein Rechteck $CDEF$ mit C und D auf AB und mit $CD = 3$ m, $DE = DF = 2$ m so, dass $MC = MD = 1{,}5$ m ist, so liegen E und F wegen $ME = MF = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2} m = 2{,}5 m$ auf k', also gehört das gesamt Rechteck $CDEF$ der Fläche des Halbkreises k' an.
Die gesuchte größtmögliche Fahrzeughöhe beträgt somit 2 m.

Aufgabe 3 - 170913
Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlass.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, dass er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, dass das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlass.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Angenommen, Herr A habe a Bücher gekauft. Dann betrugt der ursprüngliche Preis eines Buches a Mark, nach dem Preisnachlass $(a-1)$ Mark. Herr A hatte demnach $a(a-1)$ Mark zu zahlen.

Nun enden die Produkte zweier aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen stets auf eine der Ziffern 0, 2, oder 6, wie sich aus folgender Tabelle ergibt:

Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$	Endziffer $a-1$	Endziffer a	Endziffer $a(a-1)$
0	1	0	1	2	2
2	3	6	3	4	2
4	5	0	5	6	0
6	7	2	7	8	6
8	9	2	9	0	0

Da der Betrag mit 10-Mark-Scheinen allein nicht beglichen werden konnte, entstand ein Restbetrag von 2 oder 6 Mark.

Herr B hatte, wenn er b Bücher kaufte, insgesamt b^2 Mark zu zahlen. Da der von ihm zu zahlende Betrag zusammen mit dem von Herrn A ein Vielfaches von 10 M ergab, musste dieser Betrag mit der Ziffer 8 oder 4 enden.

Es gibt jedoch keine Quadratzahl mit der Endziffer 8, dagegen gibt es Quadratzahlen mit der Endziffer 4. Demnach hatte Herr B einen Betrag zu zahlen, dessen letzte Ziffer 4 war. Herr A hatte also 4 Mark für Herrn B ausgelegt.

Aufgabe 4 - 170914
Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.
(2) A wird ersetzt durch aAB.
(3) A wird ersetzt durch a.
(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, dass auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, dass der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

a) Eine solche Möglichkeit besteht z.B. darin, erst (1) und dann nur noch Schritte der Art (2) ausführen zu lassen. Dies ist nämlich stets fortsetzbar, da im Ergebnis von (2) stets wieder ein Zeichen A auftritt. Hierbei wird also (1) einmal und (2) neunmal angewendet.

Möglichkeiten sind z.B.:

Anzahl der Anwendungen der Regel				Anzahl der Anwendungen der Regel			
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	8	0	1	1	8	1	0
1	7	0	2	1	7	1	1
1	6	0	3	1	6	1	2
1	5	0	4	1	5	1	3

b) Bei den Schritten (1), (3), (4) bleibt die Anzahl der Zeichen unverändert, bei (2) vergrößert sie sich um genau 2. Daher kann nur dann die Anzahl 5 entstehen, wen nach dem zwangsläufigen Anfangsschritt (1), der S durch A ersetzt, unter den dann noch möglichen Schritten (2), (3), (4) genau 2 Schritte der Art (2) vorkommen. Die Anzahl der großen Buchstaben wird bei (2) um genau 1 größer, bei (3) und (4) um je genau 1 kleiner.

Da eine Zeichenreihe genau dann vom Automaten ausgegeben wird, wenn sie keinen großen Buchstaben enthält, folgt daraus:

Wenn der Automat eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt, so ist dies nur möglich nach Umformungsserien, in denen die Anzahl der Schritte (3) oder (4) genau 3 und somit die Anzahl der insgesamt ausgeführten Schritte genau 6 beträgt.

c) Die in b) genannten Umformungen sind nur in folgender Weise möglich: Da die Anzahl der Zeichen A bei Schritten der Art (2) und (4) gleich bleibt und sich bei (3) um 1 verringert, tritt der Schritt (3) genau einmal auf, und zwar erst, nachdem beide Schritte der Art (2) ausgeführt sind.

Da ferner die Anzahl der Zeichen B bei Schritten der Art (2) jeweils um 1 zunimmt, bei (3) gleich bleibt und bei (4) um je 1 abnimmt, können zu jedem Zeitpunkt höchstens so viele Schritte (4) ausgeführt werden, wie bereits Schritte (2) vorangegangen waren. Daher verbleiben genau die folgenden Möglichkeiten, die Schritte anzuordnen:

$$\begin{aligned} I:&\quad (1),(2),(2),(3),(4),(4)\\ II:&\quad (1),(2),(2),(4),(3),(4)\\ III:&\quad (1),(2),(2),(4),(4),(3)\\ IV:&\quad (1),(2),(4),(2),(3),(4)\\ V:&\quad (1),(2),(4),(2),(4),(3) \end{aligned}$$

Bei den Möglichkeiten I, II, III entsteht in den ersten drei Schritten die Zeichenreihe $aaABB$, danach wird die Teilreihe ABB durch abb ersetzt.

Bei den Möglichkeiten IV und V entsteht in den ersten vier Schritten die Zeichenreihe $aaABb$, danach wir die Teilreihe AB durch ab ersetzt. Somit gibt es genau eine Zeichenreihe aus 5 Zeichen, die vom Automaten ausgegeben werden kann, nämlich die Reihe $aaabb$.

Lösungen der I. Runde 1977 übernommen von [5]

6.19.2 II. Runde 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170921
Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y = f(x) = mx + n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.
a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist dies der Fall, so folgt

$$2x = \frac{1}{2}x + n \qquad , \qquad x = \frac{2}{3}n \qquad , \qquad y = \frac{4}{3}n$$

Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen.
Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n + n = \frac{4}{3}n$ und $2 \cdot \frac{2}{3}n = \frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen.
Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n\right)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y = mx + n$ als auch die Gleichung $y = 2x$ gilt.
Ist $m = 2$ und $n = 0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y = 2x$ als Gleichung hat.
Ist $m = 2$ und n $\neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.
Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x = mx + n$, $x = \frac{n}{2-m}$, $y = \frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen.
Die Probe zeigt, dass jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$ genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{n-m}\right)$ die verlangten Eigenschaften hat.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 170922
Jens sagt zu Christa: "Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält."
Nach kurzem Besinnen sagt Christa: "Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."
Beweisen Sie, dass Christas Aussage wahr ist!

Für $n = 3$ wählen wir $5 \cdot 5 + 5 = 30$, für $n = 4$ die Darstellung $5 \cdot (5 + 5 : 5) = 30$ und für jedes größere n ergänzen wir die Darstellung für $n - 2$ um "$+(5 - 5)$", $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 170923
Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, dass $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\angle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.
Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha = \beta$ und b) $\alpha = \beta$ gilt.

Wegen $|MB| = |MC|$ ist das Dreieck $\triangle MBC$ gleichschenklig und es gilt

$$\angle CBM = \angle MCB = \frac{180^\circ - \angle BMC}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Da $|DM| = |CM|$ ist, liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke CD, welche wegen $AB \parallel DC$ und $|AM| = |MB|$ gleich der Mittelsenkrechten der Strecke AB ist. Demzufolge geht bei Spiegelung an dieser A in B, M in sich selbst und C in D über. Also ist $\angle MAD = \angle CBM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne BC, ist

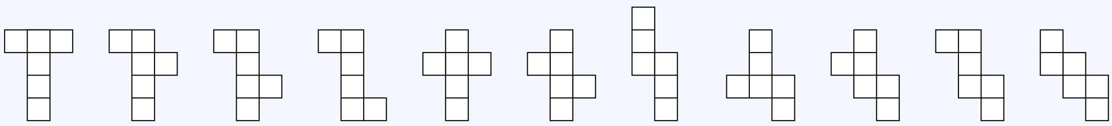
$$\angle MAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BMC = \frac{\alpha}{2} \quad \text{also}$$

$$\angle CAD = \angle MAD - \angle MAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

Und nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne CD, ist dies gleich β.
Es gilt also allgemein $\alpha + \beta = 90^\circ$.
Weiterhin ist aufgrund der Definition des Sinus im Einheitskreis der Abstand h der beiden Parallelen gleich $h = \sin\alpha \cdot |MB|$.
a) Aus $2\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 30^\circ$ und also $h = \frac{1}{2}|MB|$.
b) Aus $\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 45^\circ$ und also $h = \frac{\sqrt{2}}{2}|MB|$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 170924
Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze
a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d.h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11)

Ein solcher Streckenzug lässt sich genau dann zeichnen, wenn es entweder genau null oder genau zwei Punkte in dem Netz gibt, an dem eine ungerade Anzahl von Strecken zusammenstoßen.
(An einem solchen Punkt kann man nur starten oder enden, da man an jedem zwischen Knoten für jede Strecke, auf den man ihn erreicht, auch wieder eine benötigt, auf dem man ihn wieder verlässt. Die Anzahl der Strecken, die sich in einem Punkt, der weder Start- noch Endpunkt des Streckenzugs ist, treffen, muss also gerade sein. Andererseits kann eine zusammenhängende Struktur, wo sich – bis auf ggf. an genau zwei Stellen – in allen Punkten jeweils eine gerade Anzahl an Strecken treffen, auch immer als durchgehender Streckenzug gezeichnet werden.)

In Netz (1) gibt es 6 Punkte, in denen sich je 3 Strecken treffen, in Netz (2) sind es 4, in Netz (3) auch, in Netz (4) sind es 6, in Netz (5) und 6 jeweils genau 2, in Netz (7) sind es 6, in Netz (8) sind es 4, in Netz (9) genau 2, in Netz (10) sind es 4 und in Netz (11) wieder genau 2. Damit lassen sich genau die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Streckenzug zeichnen.
Dabei sind jeweils die beiden Punkte, an denen sich in diesen Netzen je drei Strecken treffen, Anfangs- bzw. Endpunkt des entsprechenden Streckenzugs.

Bemerkung: Im Kontext der Graphentheorie fasst man die Strecken als Kanten und deren Endpunkte als Knoten auf. Die Fragestellung, ob sich alle Kanten in einem Weg zusammenfügen lassen, der jede Kante genau einmal enthält, wird auch als Frage bezeichnet, ob der Graph einen Euler-Weg enthält. (Vgl. Königsberger-Brücken-Problem.)

Aufgabe gelöst von cyrix

6.19.3 III. Runde 1977, Klasse 9

Aufgabe 1 - 170931
Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Es ist $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, sodass sich alle 30 Zahlen das Schema, welche Reste sie bei der Teilung durch 2, 3 bzw. 5 lassen, wiederholt. Von je 30 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind genau 15 ungerade. Von diesen 15 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen sind genau fünf durch 3, genau drei durch 5 und genau eine durch 15 teilbar, sodass genau $15 - 5 - 3 + 1 = 8$ Zahlen eines solchen 30er-Blocks weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind.
Also finden sich in den 33 30er-Blöcken von 1 bis $33 \cdot 30 = 990$ genau $33 \cdot 8 = 264$ weder durch 2, 3 noch 5 teilbare Zahlen. Hinzukommen noch die 991 und 997, da die übrigen ungeraden Zahlen von 991 bis 1000 durch 3 teilbar (993, 999) oder durch 5 teilbar (995) sind.
Es gibt also insgesamt 266 solche Zahlen im zu betrachtenden Intervall.

Aufgabe 2 - 170932
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächengleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Nach dem Kongruenzsatz sws ist das Dreieck $\triangle ABC$ und damit nach Kongruenzsatz sss das Dreieck $\triangle ACD$, also auch das Viereck $ABCD$ und schließlich genauso sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Man kann das Viereck $ABCD$, wie folgt, konstruieren:

An die Strecke AB trage man in B den gegebenen Winkel und auf dem zweiten Schenkel die Strecke BC ab, sodass man den Punkt C erhält. Um diesen schlage man einen Kreis mit Radius $|CD|$ und um A einen mit Radius $|DA|$. Diese beiden Kreise liefern zwei Schnittpunkte, wobei aber nur einer ein – in dieser Reihenfolge der Punkte – nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ liefert.

Für die Gerade EH gilt nach (3), dass sie orthogonal zu AC, und nach (2) auch durch A verläuft, sodass es das eindeutig bestimmte Lot von A auf AC ist. Da im Rechteck $EFGH$ die Gerade FG parallel zur Geraden EH ist, muss nach (2) die Gerade FG das eindeutig bestimmte Lot von C auf AC sein, da auch C auf FG liegt. Damit legt ein Punkt E auf EH eindeutig den Punkt F auf FG wegen $EH \perp EF$ fest und es gilt in jedem Fall $|EF| = |AC|$.

Es seien L_B und L_D die Lotfußpunkte von B bzw. D auf AC. Dann gilt für den Flächeninhalt I vom Viereck $ABCD$:

$$I = I_{\triangle ABC} + I_{\triangle ACD} = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2}$$

Konstruiert man also die beiden Lote von B und D auf AC, trägt deren Längen auf einer Strecke hintereinander ab und halbiert die so entstandene Summe, hat man die zweite Kantenlänge $|EH| := \frac{|BL_B|+|DL_D|}{2}$ des Rechtecks $EFGH$ konstruiert.

Damit A nach (2) zwischen E und H liegt, muss $|EA| < |EH|$ gelten. Jeder dieser Punkte erfüllt dann aber die gewünschte Eigenschaft. Man findet alle diese Punkte E dann auf dem Lot zu AC durch A, welche innerhalb des Kreises um A mit Radius $|EH|$ liegen.

(Der Punkt H ist dann der eindeutig bestimmte Punkt auf diesem Lot, der die Entfernung $|EH|$ von E hat und auf der gleichen Seite wie A von E liegt. Die Punkte F und G ergeben sich als Schnitte der Parallelen zu AC durch E bzw. H mit dem Lot zu AC durch C. Der Flächeninhalt eines solchen

Rechtecks EGH berechnet sich dann nach Konstruktion zu

$$|EF| \cdot |EH| = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2} = I$$

Aufgabe 3 - 170933
In einem Dreieck ABC sei $AC = b = 13$ cm und $BC = a = 15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $CD = h_c = 12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

Das Dreieck $\triangle ACD$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$, also wegen $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ ist $|AD| = 5$ cm.
Auf analoge Weise im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCD$ erhält man wegen $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$, dass $|BD| = 9$ cm.

Liegen A und B auf der gleichen Seite von D auf der Geraden durch A und B (handelt es sich also beim Dreieck $\triangle ABC$ um ein stumpfwinkliges, sodass der Höhenfußpunkt D außerhalb liegt), so gilt $c = |AB| = |BD| - |AD| = 4$ cm und somit $I = \frac{1}{2} c \cdot h_c = 24\ cm^2$.
Liegen dagegen A und B auf verschiedenen Seiten von D auf der Geraden durch A und B (also D zwischen ihnen), dann ist $c = |AB| = |AD| + |BD| = 14$ cm und damit $I = 84\ cm^2$.

Aufgabe 4 - 170934
Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $BC = CD = DA = a$ sowie $AB > a$.
a) Beweisen Sie, dass die Diagonale AC den Innenwinkel $\angle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, dass $\angle DAB = 60°$ gilt!

Bemerkung: Bei kanonischer Anordnung und Bezeichnung der Eckpunkte des Trapezes in mathematisch positiver Orientierung, ist der Innenwinkel bei A "falsch" bezeichnet und müsste eigentlich $\angle BAD$ heißen, damit nicht der zugehörige Gegenwinkel gemeint ist. In der Lösung wird diese "korrekte" Bezeichnung verwendet.

a) Es ist $|DA| = |DC|$, also das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig und es gilt $\angle CAD = \angle DCA$. Es sind nun aber $\angle DCA$ und $\angle BAC$ Wechselwinkel an den von AC geschnittenen Parallelen AB bzw. CD, also gleich groß, sodass sich direkt $\angle CAD = \angle BAC$ ergibt, also AC die Winkelhalbierende von $\angle BAD$ ist, $\square$.

b) Aufgrund von $\angle CAD = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$ folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ACD$, dass $\angle ADC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ ist.
Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ mit der Strecke AB. Dann besitzt das Dreieck $\triangle AMD$ zwei Innenwinkel der Größe 60°, ist also gleichseitig mit Kantenlänge $|AD| = a$.
Für das Dreieck $\triangle MCD$ gilt $|DM| = |DC| = a$, sodass es gleichschenklig ist und $\angle DCM = \angle CMD$ folgt. Da dessen dritter Innenwinkel $\angle MDC = \angle ADC - \angle ADM = 120° - 60° = 60°$ beträgt, ist auch dieses Dreieck gleichseitig mit Kantenlänge a.

Schließlich betrachten wir das Dreieck $\triangle MBC$. Auch hier sind nun zwei Seiten gleich lang: $|MC| = |BC| = a$, sodass die gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle CBM$ und $\angle BMC$ gleich groß sind, wobei sich letzterer als Differenz des gestreckten Winkels $\angle BMA = 180°$ und den beiden Winkeln $\angle CMD = \angle DMA = 60°$, also zu $180° - 2 \cdot 60° = 60°$ ergibt, sodass auch das Dreieck $\triangle MBC$ gleichseitig mit Kantenlänge a ist.
Damit ergibt sich abschließend $|AB| = |AM| + |MB| = 2a$.

Aufgabe 5 - 170935
Beweisen Sie folgende Aussage!
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Für eine natürliche Zahl n gilt:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n+1)(n+2)(n^2+3n)+1 \\ &= (n+1)(n+2)[(n+1)(n+2)-2]+1 \\ &= [(n+1)(n+2)]^2 - 2(n+1)(n+2)+1 \\ &= [(n+1)(n+2)-1]^2 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 6 - 170936
Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leq x_2 + x_3$ und $y_1 \leq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leq d_2 + d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt.
Wenn $d_1 \leq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leq x_2 + x_3$.

a) Es sind für alle i die Ungleichungen $x_i \leq d_i$ und $y_i \leq d_i$ nach Definition erfüllt. Also gilt sowohl $x_1 \leq x_2 + x_3 \leq d_2 + d_3$ als auch $y_1 \leq y_2 + y_3 \leq d_2 + d_3$. Da d_1 eine der beiden Zahlen x_1 oder y_1 ist, beide aber $\leq d_2 + d_3$ sind, gilt dies auch für d_1, $\square$.

b) Dies ist offensichtlich nicht der Fall, wie etwa $x_1 = 1 = y_2 = y_3$ und $y_1 = 0 = x_2 = x_3$ zeigt. Dann ist nämlich $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, also $d_1 \leq d_2 + d_3$, aber $x_1 > x_2 + x_3$.

Aufgaben der III. Runde 1977 gelöst von cyrix

6.20 XVIII. Olympiade 1978

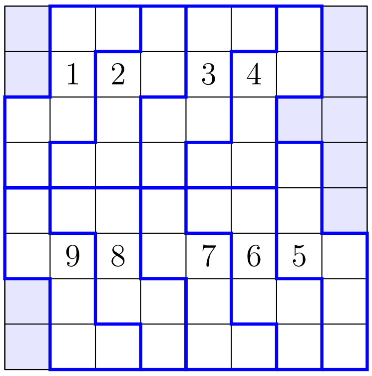
6.20.1 I. Runde 1978, Klasse 9

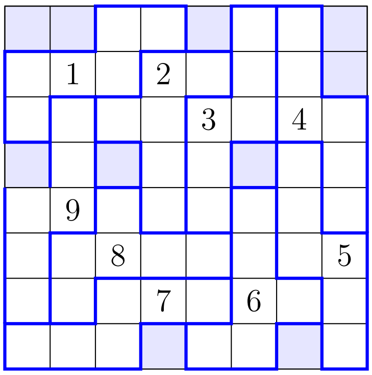
Aufgabe 1 - 180911
Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Angaben von zwei verschiedenen Möglichkeiten:





Aufgabe 2 - 180912
Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

> Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
> Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Da 10 % von a gleich $\frac{a}{10}$ ist, gilt: $a - \frac{a}{10} = 297$, also $\frac{9}{10}a = 297$. Entsprechend gilt:

$$b + \frac{b}{10} = 297 \qquad \text{also} \qquad \frac{11}{20}b = 297 = \frac{9}{10}a$$

Daraus folgt $b = \frac{9}{11}a = 0{,}8182a$ (Dezimalbruch auf 4 Dezimalstellen gerundet); b beträgt also 81,82% von a (Prozentsatz auf 2 Dezimalstellen gerundet).

Aufgabe 3 - 180913
In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, dass das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Es gilt:

$$30 = (1+1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1 \qquad 30 = (2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2$$

$$30 = 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 \qquad 30 = 4 \cdot 4 \left(\frac{4+4}{4}\right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$$

$$30 = 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5 \qquad 30 = 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6$$

$$30 = 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7 \qquad 30 = 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8$$

$$30 = 9 + 9 + 9 + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9}$$

Aufgabe 4 - 180914
Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

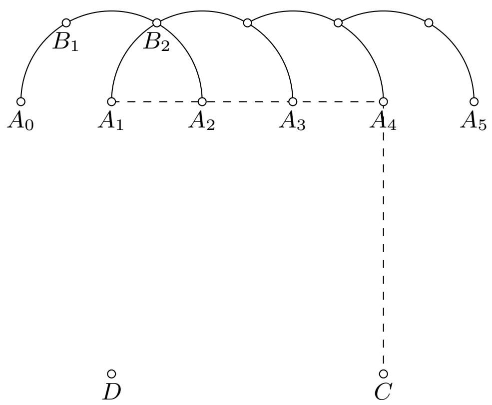
Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Man schlägt um A_0 und A_1 Kreise mit dem Radius a. Einer ihrer Schnittpunkte sei B_1 genannt. Man schlägt um A_1 und B_1 Kreise mit dem Radius a. Ihr von A_0 verschiedener Schnittpunkt sei B_2 genannt. Man schlägt um A_1 und B_2 Kreise mit dem Radius a. Ihr von B_1 verschiedener Schnittpunkt sei A_2 genannt.

Da die Dreiecke $A_0A_1B_1$, $B_1A_1B_2$ gleichseitig sind, haben die Winkel $\angle A_0A_1B_1$, $\angle B_1A_1B_2$ und $\angle B_2A_1A_2$ jeweils eine Größe von 60° und bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Damit liegen die Punkte A_0, A_1 und A_2 auf derselben Geraden, und es ist $A_0A_1 = A_1A_2 = a$.

Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich eine beliebig große Menge von Punkten A_n konstruieren, die alle auf derselben Geraden liegen und von denen je zwei benachbarte den Abstand a haben.



Man konstruiert auf diese Weise eine Folge von Punkten $A_0, A_1, ..., A_5$. Dann ist $A_0A_5 = 5a$, $A_1A_4 = 3a$ und $A_0A_4 = 4a$.

Man schlägt nun den Kreis um A_4 mit dem Radius $3a$ und um A_0 den Kreis mit dem Radius $5a$. Beide Kreise schneiden einander, einer der beiden Schnittpunkte sei C.

Wegen $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das durch die Punkte A_0, A_4, C bestimmte Dreieck rechtwinklig, und A_4 ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels.

Man schlägt nun den Kreis um C mit dem Radius $3a$ und um A_1 den Kreis mit dem gleichen Radius. Ihr von A_4 verschiedener Schnittpunkt sei D genannt. Wegen $A_1A_4 = A_4C = CD = DA_1 = 3a$ und der Tatsache, dass der Innenwinkel bei A_4 ein rechter ist, sind A_1,A_4,C und D Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen von [5]

6.20.2 II. Runde 1978, Klasse 9

Aufgabe 1 - 180921
Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend nummeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: "Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muss eine durch 4 teilbare Quersumme haben."
Der ältere Sohn behauptet dagegen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Es kommt z.B. unter den sechsstelligen Zahlen

$$1000008, \quad 100009, \quad 100010 \quad \text{und} \quad 10011$$

keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

Aufgabe 2 - 180922
In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ ist dagegen rational. Aussage (l) ist also falsch.
Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschieden irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ und

$$r = \frac{a}{b} \quad , \quad r + x = \frac{c}{d}$$

Daraus ergäbe sich

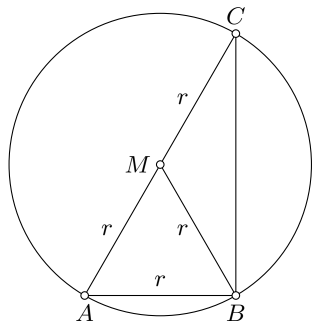
$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

also der Widerspruch, dass x rational wäre; Damit ist bewiesen, dass Aussage (3) wahr ist.
Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, dass die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 3 - 180923
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\angle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $MA = MB = MC = r$ der Umkreis des Dreiecks ABC: Damit gilt $AC = 2r$.
Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe 60°, ist also gleichseitig. Daraus folgt $AB = r$.
Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $CB = r\sqrt{3}$. Damit gilt für den Umfang $u = 3r + r\sqrt{3} = r(3 + \sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}$$



Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I = \frac{1}{2}AC \cdot h = r \cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt

$$h = \frac{I}{r} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$$

Aufgabe 4 - 180924
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:
(1) z ist eine Primzahl.
(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.
(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.
(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).
Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7.
Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet z auf eine Ziffer 3 oder 7.
Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13 oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur $z' = 11$ eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.
Also gilt $z' = 11$.

Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muss die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0 + 4$; $1 + 3$; $2 + 2$; $3 + 1$ und $4 + 0$) erfüllt nur $2 + 2$ die Bedingung (2). Damit erhält man $z = 227$.

Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muss die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen.
Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0 + 8$; $1 + 7$; $2 + 6$; $3 + 5$; $4 + 4$; $5 + 3$; $6 + 2$; $7 + 1$; $8 + 0$) erfüllen nur $3 + 5$ und $5 + 3$ die Bedingung (2).
Das führt auf die Zahlen $z = 353$ und $z = 533$.
Wegen $533 = 13 \cdot 14$ erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).
Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p < 17$ teilbar, und es gilt $17^2 > 227$, 353 ist durch keine Primzahl $p < 19$ teilbar, und es gilt $19^2 > 353$.)
Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

6.20.3 III. Runde 1978, Klasse 9

Aufgabe 1 - 180931
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Wäre $a^2+b^2 = 0 = c^2+d^2$, so wegen $x^2 = 0 \equiv x = 0$ für alle reellen Zahlen x auch $a = b = c = d = 0$ und damit auch $ab - cd = 0$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung. Also muss $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$ gelten, $\Box$.

Aufgabe 2 - 180932
In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, dass unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muss, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:
"Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist."

Die gesuchte Zahl n ist 6. Dazu zeigen wir zuerst, dass es 6 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, deren Quersummen allesamt keine durch 4 teilbaren Zahlen sind, und dann, dass für je 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen (mindestens) eine dieser eine durch 4 teilbare Quersumme besitzt.
Wir betrachten die natürlichen Zahlen 4997, 4998, 4999, 5000, 5001 und 5002. Diese 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen besitzen die Quersummen 29, 30, 31, 5, 6 und 7, welche alle nicht durch 4 teilbar sind.
Es können sich 7 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf nur maximal zwei "Zehner", also Intervalle der Form $[k\cdot 10+0; k\cdot 10+9]$ mit nicht-negativem ganzem k, aufteilen. Dann müssen aber in mindestens einem solchen Intervall 4 aufeinanderfolgende dieser Zahlen befinden, deren Quersummen 4 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind, wovon eine durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 3 - 180933
Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei.
Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt.
Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Es habe der Ausgangswürfel die Kantenlänge a, der Oktaeder die Kantenlänge b und der innere Würfel die Kantenlänge c. Dann gilt $V_1 = a^3$.

Der Oktaeder lässt sich als Vereinigung zweier gerader Pyramiden mit identischer quadratischer Grundfläche auffassen. Deren Spitzen bilden die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen des Ausgangswürfels, sodass sich als Höhe h einer dieser Pyramiden der Wert $h = \frac{1}{2}a$ ergibt. Diese quadratische Grundfläche beider Pyramiden liegt in der Ebene durch die Mittelpunkte der vier übrigen Seiten des Ausgangswürfels. Jede die Kanten dieser Grundfläche entsteht in dieser Schnittfigur als Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Länge $\frac{1}{2}a$ haben. Also gilt $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ und $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}b^2 \cdot h = \frac{1}{6}a^3$.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier benachbarter Kanten der quadratischen Grundfläche der beiden Pyramiden miteinander, entsteht eine Strecke der Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}a$. Der Schwerpunkt der von der Spitze der Pyramide ausgehenden und in einer solchen Seitenfläche des Oktaeders verlaufenden Seitenhalbierenden teilt diese im Verhältnis 2 : 1, sodass sich nach dem Strahlensatz für die Länge c der Strecke zwischen den Schwerpunkten benachbarter Oktaederflächen $\frac{c}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}$ bzw. $c = \frac{a}{3}$ und damit $V_3 = \frac{1}{27}a^3$ ergibt. Damit gilt

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2$$

Aufgabe 4 - 180934
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis 1 : 3.
Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Es sei H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und es gelte $|HB| = 3 \cdot |AH|$. Weiterhin seien $\alpha := \angle BAC$ und $\beta := \angle ABC$.
Dann ist $|AB| = 4 \cdot |AH|$ und nach dem Kathetensatz $|BC| = \sqrt{|AH| \cdot |AB|} = 2 \cdot |AH|$.
Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 30°$, da $0 < \alpha < 90°$ gilt.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck erhält man schließlich $\beta = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Aufgabe 5 - 180935
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 lässt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Ist p gleich 2, 3 oder 5, so ist der Rest von p bei der Division durch 30 offensichtlich p selbst und damit eine Primzahl. Andernfalls ist p weder durch 2, 3 noch 5 teilbar.
Sei nun $p > 5$ eine solche Primzahl und $0 \leq r < 30$ sein Rest bei der Teilung durch 30. Also gibt es eine ganze Zahl q mit $p = 30 \cdot q + r$. Dann kann wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ auch r nicht durch 2, 3 bzw. 5 teilbar sein, denn sonst wäre es $30 \cdot q + r$, und damit p, auch.
Es verbleiben als mögliche Reste also nur diejenigen Zahlen $0 \leq r < 30$, die selbst weder durch 2, 3 noch 5 teilbar sind. Dies sind aber (wegen $7^2 = 49 > 30$) genau die Primzahlen und 1, $\Box$.

Aufgabe 6 - 180936
Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.
Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.
Man beweise, dass F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

Durch Verschiebungen bleiben Richtungen erhalten, sodass Bildgeraden parallel zu ihren Urbildern sind. Insbesondere sind also die Geraden A_1C_1 und AC zueinander parallel und schneiden sich, da A_1 nicht auf AC liegt, nicht.
Es liegt A_1 in der bezüglich AB gleichen Halbebene wie der Punkt C, sodass der von A_1 ausgehende und durch C_1 verlaufende Strahl die Gerade AB nicht schneidet. Also muss die Strecke A_1C_1 wegen $A_1C_1 \parallel AC$ und $|A_1C_1| = |AC|$ die dritte Dreiecksseite BC schneiden.
Es sei S_C dieser Schnittpunkt. Analog erhält man, dass auch A_1B_1 nur genau die Seite BC schneidet und sei S_B dieser Schnittpunkt.
Dann ist $F_1 = (A_1S_BS_C)$. Aufgrund der Parallelitäten $A_1SB = A_1B_1 \parallel AB$, $A_1SC = A_1C_1 \parallel AC$ und $S_BSC = BC$ ist dabei $\triangle A_1S_BS_C \sim \triangle ABC$.

Analog erhält man $F_2 = (T_AB_2T_C)$ und $\triangle T_AB_2T_C \sim \triangle ABC$, wobei T_A und T_C die Schnittpunkte von A_2B_2 bzw. C_2B_2 mit AC seien. Auch hier gilt, dass entsprechende Seiten parallel sind.
Insbesondere sind die beiden F_1 und F_2 definierenden Dreiecke $\triangle A_1S_BS_C$ und $\triangle T_AB_2T_C$ zueinander ähnlich und entsprechende Seiten beider Dreiecke liegen jeweils parallel zueinander.

Wir betrachten nun die Geraden T_AA_1 und B_2S_B. Sind diese Geraden nicht parallel, so sei Z ihr Schnittpunkt und es gilt nach dem Strahlensatz mit Scheitelpunkt Z und geschnittenen Parallelen $A_1S_B \parallel T_AB_2$ die Beziehung $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZB_2|}{ZS_B} =: f$. Die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Faktor f bildet also A_1 auf T_A und S_B auf B_2 ab.

Da zentrische Streckungen Richtungen erhalten, muss durch diese Streckung auch S_C als Schnitt von

Parallelen zu AB und BC durch S_B auch auf den Schnittpunkt der Parallelen zu diesen beiden Geraden durch B_2, also T_C abgebildet werden. Also bildet diese zentrische Streckung das Dreieck $\triangle A_1S_BS_C$ auf das Dreieck $\triangle T_AB_2T_C$ und damit auch F_1 auf F_2 ab.

Schneiden sich die Geraden T_AA_1 und B_2S_B dagegen nicht, sind aber verschieden, so bildet das Viereck $A_1S_BB_2T_A$ ein Parallelogramm. Insbesondere sind dann die beiden Strecken $|A_1S_B|$ und $|T_AB_2|$ kongruent und parallel, sodass auch die Figuren F_1 und F_2 kongruent sind und man F_2 aus F_1 durch die Verschiebung, die A_1 auf T_A abbildet, erhält.
Liegen abschließend T_A, A_1, B_2 und S_B auf einer Geraden g, dann unterscheiden wir die beiden Fälle, ob die Gerade T_CS_C diese schneidet, oder parallel dazu ist. (Identisch kann sie nicht sein, da sonst A_1, S_B und S_C auf einer Geraden lägen, was aufgrund der Definition der beiden letzteren als Schnittpunkte von verschiedenen von A_1 ausgehenden Strahlen mit der gleichen Gerade BC zum Widerspruch führen würde.)

Schneidet T_CS_C die Gerade g, so sei Z ihr Schnittpunkt und wegen $A_1S_C \parallel T_AT_C$ folgt aufgrund des Strahlensatzes $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZT_C|}{|ZS_C|} =: f$, sodass durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z um den Faktor f die Punkte A_1 und S_C auf T_A bzw. T_C abgebildet werden. Analog oben schlussfolgert man nun, dass durch diese zentrische Streckung auch S_B auf B_2 und damit F_1 auf F_2 abgebildet wird.

Sind dagegen g und T_CS_C parallel und verschieden, so bilden $T_AA_1S_CT_C$ und $B_2S_BS_CT_C$ Parallelogramme, sodass $|T_AA_1| = |T_CS_C| = |B_2S_B|$ gilt und die zugehörigen Geraden alle parallel zueinander sind, sodass F_2 aus F_1 durch die Verschiebung hervorgeht, die A_1 auf T_A abbildet.

Damit wurde in jedem Fall gezeigt, dass man F_2 aus F_1 durch eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung erhalten kann. Beides zugleich ist aber nicht möglich, da eine Verschiebung die Kongruenz der Figuren voraussetzt, während jede zentrische Streckung um einen Faktor verschieden von ± 1 die Kongruenz zerstört und nur Ähnlichkeit erhält.

Eine Streckung um den Faktor -1 würde aber die Orientierung ändern, während der Umlaufsinn der entsprechenden Punkte $A_1S_BS_C$ bzw. $T_AB_2T_C$ identisch ist. Und eine Streckung um den Faktor 1 entspricht der Identitätsabbildung. Jedoch kann nicht $F_1 = F_2$ gelten, da B_2 im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt, während der entsprechende Punkt S_B von F_2 sich auf dem Rand von $\triangle ABC$ befindet, also von B_2 verschieden ist.
Demnach gibt es für jeden Fall entweder eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung, die F_2 auf F_1 abbildet, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1978 gelöst cyrix

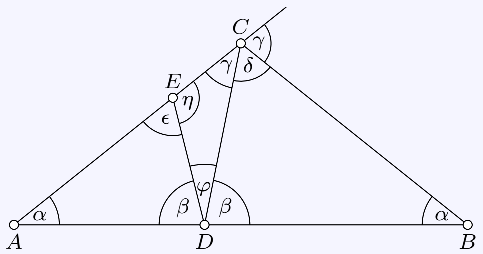
6.21 XIX. Olympiade 1979

6.21.1 I. Runde 1979, Klasse 9

Aufgabe 1 - 190911

In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\angle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



(1) Wegen $\alpha + \beta + \delta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle DBC$) und $\alpha + \beta + \epsilon = 180°$ ((Winkelsumme im Dreieck $\triangle ADE$) gilt

$$\epsilon = \delta$$

(2) Wegen $\delta + 2\gamma = 180°$ (gestreckter Winkelsumme bei C) gilt

$$\gamma = 90° - \frac{\delta}{2}$$

(3) Wegen $\gamma = 2\alpha$ (Außenwinkel der Dreieck ABC) gilt $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und wegen (2) gilt dann

$$\alpha = 45° - \frac{1}{4}\delta$$

(4) Wegen $\eta + \epsilon = 180°$ (Nebenwinkel) und wegen (1) gilt dann

$$\eta = 180° - \epsilon \qquad ; \qquad \eta = 180° - \delta$$

(5) Wegen $\gamma + \eta + \varphi = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle EDC$) gilt $\varphi = 180° - \gamma - \eta$, und unter Berücksichtigung von (2) und (4) gilt dann

$$\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\delta}{2}\right) - (180° - \delta) = \frac{3}{2}\delta - 90°$$

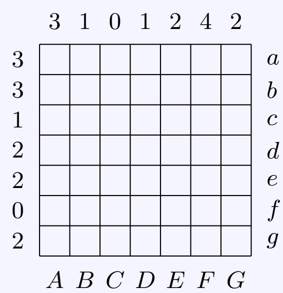
(6) Wegen $2\beta + \varphi = 180°$ (gestreckter Winkel bei D) gilt $\beta = 90° - \frac{\varphi}{2}$, und unter Berücksichtigung von (4) gilt dann

$$\beta = 90° - \left(\frac{3}{4}\delta - 45°\right) = 135° - \frac{3}{4}\delta$$

Aufgabe 2 - 190912

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!



(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Hinweis: In den Abbildungen 1 und 2 sind diejenigen Felder, von denen gesichert ist, dass die frei bleiben mit einem Kreis gekennzeichnet.

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○		○	×	○	a
3			○	○		○		b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2			○			○		d
2			○		○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2			○		○	×	○	g
1)	A	B	C	D	E	F	G	

	3	1	0	1	2	4	2	
3			○	×	○	×	○	a
3			○	○	×	○	×	b
1	○	○	○	○	○	×	○	c
2	○	○	○	○	×	○	×	d
2	×	○	○	○	○	×	○	e
0	○	○	○	○	○	○	○	f
2	×	○	○	○	○	×	○	g
2)	A	B	C	D	E	F	G	

(1) Da in Spalte F genau 4 Felder anzukreuzen sind, können das nur folgende Felder sein: aF, cF, eF, gF.

(2) Als Nachbarfelder bleiben somit frei: $aE, aG, cE, cG, eE, eG, gE, gG, bF, dF$ und fF.

(3) Da in Spalte C und in Zeile f keine Felder anzukreuzen sind, bleiben frei:
$aC, bC, cC, dC, eC, fC, gC, fA, fB, fD, fE$ und fG.

(4) Da in Zeile c bereit ein Feld angekreuzt ist, bleiben die übrigen frei, also (siehe Abbildung 1): cA, cB und cD.

(5) In Spalte E sind nur noch zwei Felder frei; demnach sind anzukreuzen: bE und dE.

(6) Als Nachbarfelder dazu bleiben frei: bD und dD.

(7) In Spalte G sind nur noch zwei Felder frei, es sind demnach anzukreuzen: bG und dG.

(8) In Zeile a sind nich zwei Felder anzukreuzen, eines davon muss sein: ad.

(9) In Spalte D ist bereits ein Feld angekreuzt, also bleiben frei: eD und gD.

(10) In Zeile d sind zwei Felder angekreuzt, die restlichen bleiben frei, d.h.: dA und dB.

(11) In Spalte A sind anzukreuzen: gA und eA damit bleiben als Nachbarfelder frei (siehe Abbildung 2): gB und eB.

(12) Für die übriggebliebenen Felder bestehen genau zwei Möglichkeiten:
Es werden angekreuzt aA und bB oder bA und aB. Damit gibt es genau zwei Verteilungen der geforderten Art.

	3	1	0	1	2	4	2	
3	×			×		×		a
3		×			×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
1)	A	B	C	D	E	F	G	

	3	1	0	1	2	4	2	
3		×		×		×		a
3	×				×		×	b
1						×		c
2					×		×	d
2	×					×		e
0								f
2	×					×		g
2)	A	B	C	D	E	F	G	

Aufgabe 3 - 190913
Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

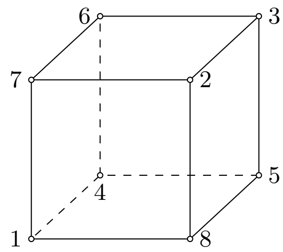
Beweisen Sie, dass eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Bei Tetraeder gehört jede Ecke genau drei Seitenflächen an, beim Oktaeder genau vier. Wenn es für diese Körper eine Zuordnung der genannten Art gäbe, so müsste folglich beim Tetraeder das Dreifach, beim Oktaeder das Vierfache der Summe aller vorkommenden Zahlen $1, ..., n$ durch die Anzahl der Seitenflächen teilbar sein.

Für das Tetraeder ist diese Bedingung nicht erfüllt; denn die Anzahl der Ecken ist $n = 4$, die Summe der Zahlen von 1 bis 4 ist 10, und das Dreifache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 4 der Seitenflächen teilbar.

Auch für das Oktaeder ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Anzahl der Ecken ist $n = 6$, die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, und das Vierfache dieser Summe ist nicht durch die Anzahl 8 der Seitenflächen teilbar.

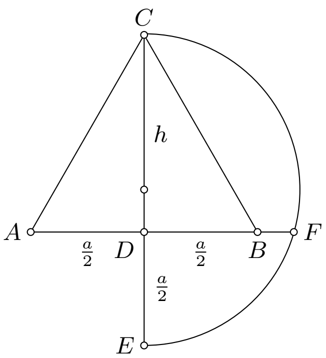
Damit sind die für das Tetraeder und Oktaeder verlangten Beweise geführt. Die Aussage, dass für den Würfel eine Zuordnung der genannten Art möglich ist, kann durch Angabe eines Beispiels bewiesen werden, wie es etwa die Abbildung zeigt.



Aufgabe 4 - 190914
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.



I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man fällt das Lot CD von C auf AB.

(2) Man verlängert dieses Lot über D hinaus bis zu einem Punkt E, für den $DE = AD$ gilt.

(3) Man konstruiert einen Halbkreis über CD. Er schneidet die Gerade durch A und B in einem Punkt F. Die Strecke DF hat die verlangte Eigenschaft.

II. Beweis, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge DF denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck ABC (1):

Es sei $AB = a$, $CD = h$. Nach Konstruktionsschritt (1) ist CD eine Höhe und folglich auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck ABC, also gilt $AD = \frac{a}{2}$. Nach (2) gilt daher ebenfalls $DE = \frac{a}{2}$.

Nach (3) und nach dem Satz von Thales ist das Dreieck DEF bei F rechtwinklig; in diesem Dreieck ist FD nach (1) und (2) die Höhe auf der Hypotenuse. Folglich gilt nach dem Höhensatz

$$DF^2 = \frac{a}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge DF ist mithin gleich dem Flächeninhalt $\frac{a}{2} \cdot h$ des Dreiecks ABC, w.z.b.w.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen von [5]

6.21.2 II. Runde 1979, Klasse 9

Aufgabe 1 - 190921
An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:
(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.
(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.
(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.
(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Wir kürzen LKW mit "L" und PKW mit "P" ab, sodass z.B. "PPLP" einer Reihenfolge von zwei PKW, einem LKW und einem PKW entspricht.
Nach (2) muss LPL Teil der Fahrzeugkolonne sein. Wäre der vordere L nicht das erste Fahrzeug, so müsste nach (1) ein P vor ihm gestanden haben, analog hinter dem zweiten L, falls dieser nicht das letzte Fahrzeug ist. Dann erhielte man den die Wagenfolge PLPLP, welche (3) widerspricht. Also muss der erste L der erste Wagen oder der zweite L der letzte Wagen sein, wobei nicht beides zugleich geht.

1. Fall: Sei der erste L das erste Fahrzeug, sodass die Fahrzeugkolonne mit LPLP beginnt. Da nach (4) die Wagenfolge PPP vorkommen muss, kann diese nur noch an den Positionen 4-6 oder 5-7 liegen. Letzteres ist aber unmöglich, da sonst 4 P an den Positionen 4-7 hintereinander stünden, was (4) widerspricht. Also lautet die Wagenfolge LPLPPPL; wobei aus analogem Grund auf Position 7 kein P stehen kann.

2. Fall: Sei der zweite L das letzte Fahrzeug. Dann folgt auf analoge Weise zum 1. Fall (diesmal von hinten nach vorn argumentiert), dass die Wagenfolge LPPPLPL lauten muss.
Beide Reihenfolgen erfüllen offenbar alle Kriterien, sind also genau die gesuchten Lösungen.

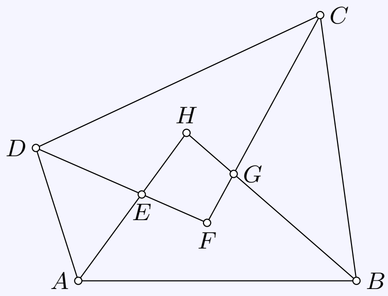
Aufgabe 2 - 190922
Die Zahlen in einem Zahlentripel (p, q, r) seien genau dann "Primzahldrillinge" genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass es genau ein Zahlentripel (p, q, r) gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Es ist von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer genau eine durch 3 teilbar. Da es alles Primzahlen sein sollen, muss also eine der drei Zahlen 3 sein. Da $3 - 2 = 1$ keine Primzahl ist, muss der kleinste Wert p gleich 3 sein, sodass sich das Tripel (3,5,7) ergibt, was offenbar alle Voraussetzungen erfüllt, also der einzige "Primzahldrilling" nach Definition der Aufgabenstellung ist, $\square$.

Bemerkung: So wenig sinnvoll es wäre, "Primzahlzwilling" als "direkt aufeinanderfolgende Primzahlen" zu definieren (weil es dann nur den einen "Primzahlzwilling"(2,3) gäbe), so ist es auch nicht sinnvoll, den Begrif "Primzahldrilling" wie in der Aufgabenstellung zu definieren.
Im allgemeinen fordert man, dass $p < q < r$ alles Primzahlen mit $r = p + 6$ sind. Dabei wählt man den Wert 6 analog wie den Wert 2 bei der Definition von Primzahlzwillingen (p,q) mit $q = p + 2$, weil dies der kleinste Wert ist, für den nicht per se aufgrund Teilbarkeit durch kleine Zahlen ausgeschlossen ist, dass es mehr als ein solches Tupel gibt.
Ob es unendlich viele Primzahldrillinge nach dieser geeigneteren Definition gibt, ist bisher genauso unklar wie die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Aufgabe 3 - 190923

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:
Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.
Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt!



Es seien die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ wie üblich mit α bei A bis δ bei D bezeichnet.
Es ist $\angle FEH = \angle DEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$ und analog $\angle HGF = \angle BGC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, also

$$\angle FEH + \angle HGF = 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180° \qquad \square.$$

Aufgabe 4 - 190924

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!
(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.
(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Es sei nach (1) $x = n^2$ und nach (2) $x + 24 = n^2 + 24 = (n + s)^2 = n^2 + 2sn + s^2$ mit positiven ganzen Zahlen n und s. Es folgt $24 = 2sn + s^2$ und $s^2 = 24 - 2sn = 2(12 - sn)$, sodass s^2 und damit s gerade sowie $s \geq 2$ ist.
Weiterhin ist nach (3) $x \geq 24$, also $n \geq 5$ und damit $s^2 \leq 24 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4$, also auch $s \leq 2$. Man erhält, dass $s = 2$ und damit $n = \frac{24-s^2}{2s} = \frac{20}{4} = 5$ sein muss. Es ist $x = n^2 = 25$ also die einzig mögliche Lösung.

Tatsächlich ist nicht nur $x = 25 = 5^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl (1), sondern auch $x^2 + 24 = 59 = 7^2$ (2) und $x^2 - 24 = 1 = 1^2$ (3), sodass $x = 25$ tatsächlich auch Lösung (und damit die einzige) ist.

Aufgaben der II. Runde 1979 gelöst von cyrix

6.21.3 III. Runde 1979, Klasse 9

Aufgabe 1 - 190931
Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Die Gleichung ist äquivalent zu $(a - b)x = 2$. Weiterhin ist nach (1) $x \in \mathbb{N}$, also $x \geq 0$, sodass auch $a - b \geq 0$ und also $a - b \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also x ein Teiler von 2, d.h., $x = 1$ oder $x = 2$.

1. Fall: $x = 1$. Dann ist nach (2) $a - 6 = b - 4 = 1$, also $a = 7$ und $b = 5$. Die Probe bestätigt, dass das Paar $(a,b) = (7,5)$ beide Eigenschaften erfüllt.

2. Fall: $x = 2$. Dann ist nach (2) $2a - 6 = 2b - 4 = 2$, also $a = 4$ und $b = 3$, was wieder durch die Probe bestätigt wird. Das zweite Paar (a,b), was die Aufgabenstellung erfüllt, lautet also (4,3), und weitere gibt es nicht.

Aufgabe 2 - 190932
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $AB = a\sqrt{2}$ und $BC = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.
Beweisen Sie, dass die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

2 Geraden verlaufen orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt. Sei A der Ursprung (0,0). Dann ist $B(a\sqrt{2}{,}0)$, $C(a\sqrt{2}{,}a)$ und $F(\frac{a}{2}\sqrt{2}{,}a)$.
Sei nun g die proportionale Funktion durch A und C. Diese hat offensichtlich die Steigung $m_1 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sei f die Gerade durch B und F. Für die Steigung gilt

$$m_2 = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2} - a\sqrt{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Es gilt somit $m_1 \cdot m_2 = -1$. qed.

Aufgabe 3 - 190933
Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, dass ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist); die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist); ...; die ersten $n - 1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, dass es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, dass folgende Forderungen erfüllt sind: (1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Für $n = 1$ und $n = 2$ sind die Forderungen leicht erfüllbar: Man stelle den einen bzw. die zwei Kartons leer nebeneinander. Sei ab nun $n > 2$ und es existiere eine Anordnung der ersten $n - 2$ Kartons, die den Anforderungen genügt. Wir unterscheiden, ob in dieser Anordnung ein oder zwei äußere Kartons, die in keinem anderen enthalten sind, existieren.

1. Fall: Die ersten $n - 2$ Kartons sind so verpackt, dass nur ein äußerer Karton existiert. Dann packe man den $n - 2$-ten und den $n - 1$-ten Karton nebeneinander in den n-ten. Im $n - 1$-ten sind dann 0 und im $n - 2$-ten eine gerade Anzahl an Kartons, also auch im n-ten. Die Forderungen (2) und (3) sind offensichtlich erfüllt.

2. Fall: Die ersten $n-2$ Kartons sind so verpackt, dass zwei äußere Kartons existieren. Dann packe man diese beiden in den $n-1$-ten Karton und lege daneben den leeren n-ten Karton. Im $n-1$-ten Karton sind dann die gerade Anzahl an Kartons in den beiden äußeren Kartons der Anordnung der ersten $n-2$ sowie diese beiden äußeren Kartons, also auch eine gerade Zahl; im n-ten Karton ist keiner. Die Bedingungen (2) und (3) sin nach Konstruktion offensichtlich auch erfüllt.

Damit gibt es in jedem Fall auch mit n Kartons eine Anordnung, die der Aufgabenstellung genügt, $\square$.

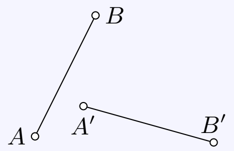
Aufgabe 4 - 190934
a) Beweisen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, dass es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, dass sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

a) Es seien $a-1$, a, $a+1$ die drei aufeinanderfolgenden Ziffern der dreistelligen Zahl p in irgendeiner Reihenfolge. Dann ist die Quersumme von p gleich $(a-1)+a+(a+1)=3a$ durch 3 teilbar, also auch p, sodass p keine Primzahl sein kann.

b) Es ist mit $n=8$ die Zahl $123_8 = 1\cdot 8^2+2\cdot 8+3=83$ eine Primzahl.

Aufgabe 5 - 190935

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!

Fallen die beiden Punkte A und A' zusammen, so gilt offenbar $Z=A$, da bei einer Drehung (um einen von Vielfachen von 360° verschiedenen Drehwinkel) das Zentrum der einzige Fixpunkt ist. (Ansonsten bleiben alle Punkte fix, was genau dann der Fall wäre, wenn auch $B=B'$ gilt. Dann kann man jeden Punkt der Ebene als Z und den Drehwinkel 0° wählen.) Analog gilt für $B=B'$ und $A\neq A'$, dass man ausschließlich $Z=B$ als Drehzentrum wählen kann. In beiden Fällen (die nicht beide Punkte auf sich selbst abbilden) ist dann nicht nur das Drehzentrum Z, sondern auch der Drehwinkel zwischen 0° und 360° eindeutig bestimmt.

Sei ab nun $A\neq A'$ und $B\neq B'$, sodass die jeweiligen Geraden AA' und BB' auch existieren.
Wenn es einen solchen Punkt Z gibt, dann muss $|AZ|=|A'Z|$ und $|BZ|=|B'Z|$ gelten, sodass Z auf den Mittelsenkrechten von AA' und BB' liegen muss. Sind diese Mittelsenkrechten nicht parallel (was genau dann der Fall ist, wenn die Geraden AA' und BB' nicht parallel sind), dann ist dieser Punkt Z also eindeutig bestimmt.

In dem Fall sind die Dreiecke $\triangle ABZ$ und $\triangle A'B'Z$ nach dem Kongruenzsatz sss zueinander kongruent. Es ist also $\angle AZB=\angle A'ZB'$, also (ggf. mit vorzeichenbehafteten Winkeln zu lesen) $\angle AZA'=\angle AZB+\angle BZA'=\angle A'ZB'+\angle BZA'=\angle BZB'$, sodass bei einer Drehung um Z mit Drehwinkel $\angle AZA'$ nicht nur A auf A', sondern auch B auf B' abgebildet wird. Auch hier sind wieder Drehzentrum und Drehwinkel eindeutig bestimmt.

Sind dagegen die Mittelsenkrechten von AA' und BB' parallel, so kann es einen solchen Punkt Z nur dann geben, wenn diese beiden Mittelsenkrechten die gleiche Gerade bilden. Andernfalls gibt es keinen Punkt Z, der $|AZ|=|A'Z|$ und $|BZ|=|B'Z|$ erfüllt, was für die Eigenschaft, Drehzentrum zu sein, notwendig ist.

Seien also nun diese Mittelsenkrechten von AA' und BB' identisch und mit m bezeichnet. Dann muss jedes Drehzentrum Z auf m liegen. Sei Z ein solches Drehzentrum. Dann gilt $\angle AZA'=\angle BZB'$, sodass die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle AA'Z$ und $\triangle BB'Z$ in ihren Nicht-Basiswinkeln übereinstimmen, also zueinander ähnlich sind. Demzufolge stimmen auch die zugehörigen Winkel $\angle ZAA'$ und $\angle ZBB'$ überein.

Da die beiden Schenkel AA' und BB' zueinander parallel sind, müssen es die entsprechend zweiten Schenkel der Winkel $\angle ZAA' = \angle ZBB'$ auch sein, was $ZA \parallel ZB$ nach sich zieht, sodass Z auch auf der Geraden AB liegen muss. Ist aber AB parallel zu und verschieden von m, gibt es keinen solchen Schnittpunkt und damit auch kein Drehzentrum.

Andernfalls ist Z nun als Schnitt zweier Geraden m und AB eindeutig bestimmt, da A nicht auf m, der Mittelsenkrechten von AA' liegen kann, da wir $A \neq A'$ vorausgesetzt haben. Da die Spiegelung an M A in A' und B in B' überführt, ist der Schnittpunkt Z von m und AB auch der von m und $A'B'$, sodass auch Z auf der Geraden $A'B'$ liegt und damit $\angle AZA' = BZB'$ gilt, sodass tatsächlich eine Drehung um Z mit diesem Winkel existiert, welche A auf A' und B auf B' abbildet.

Aufgabe 6 - 190936
Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird!
Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!

Sei $m \geq 3$ eine natürliche Zahl. Dann hat das gerade Prisma, dessen Grund- und Deckfläche ein regelmäßiges m-Eck ist, genau $n = 2m$ Eckpunkte und besitzt $m + 2 < m + m = n$ Seitenflächen. Für gerade Zahlen $n \geq 6$ gibt es also solche Körper.

Setzt man auf eine der rechteckigen Seitenflächen eines solchen Prismas eine vierseitige Pyramide mit entsprechender Grundfläche auf, so erhöht sich die Eckenanzahl des nun neuen Körpers auf $2m+1$ (die Spitze der Pyramide ist hinzugekommen) und die Anzahl der Seitenflächenanzahl auf $(m + 2) - 1 + 4 = m + 5$ (die eine Seitenfläche liegt als Grundfläche der Pyramide nun im Inneren des neuen Körpers, verschwindet also, während durch die Pyramide 4 neue Seitenflächen hinzukommen), was für $m \geq 5$ noch immer kleiner ist als die Eckpunktanzahl $n = 2n + 1$. Damit gibt es also auch für ungerade $n \geq 11$ jeweils solche Körper.

Für $n = 9$ betrachte man einen geraden dreiseitigen Pyramidenstumpf. Dieser besitzt sowohl in Grund- als auch Deckfläche je 3 Punkte, insgesamt also 6, und neben Grund- und Deckfläche noch 3 weitere Seitenflächen, insgesamt also 5. Verklebt man nun zwei kongruente solche Pyramidenstümpfe an ihren Grundflächen, erhöht sich die Eckpunktanzahl des neuen Körpers auf 6+3=9 und die Anzahl der Seitenflächen auf 5-1+3+1=8. Also existiert auch für $n = 9$ ein solcher Körper.

Für $n = 7$ betrachte man ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ sowie die durch Verschiebung der Höhe von A auf die gegenüberliegende Seite CD senkrecht zur Ebene des Fünfecks entstehenden Strecke PQ. Verbindet man die Punkte C und D mit Q sowie A, B und E mit P, entsteht ein ebenflächig begrenzter Körper mit den 7 Eckpunkten A, B, C, D, E, P und Q sowie den Flächen $ABCDE$, CDQ, $BCQP$, $EDQP$, ABP und AEP; also mit 6 Seitenflächen. Damit existiert auch für $n = 7$ ein solcher Körper.

Also kann $N = 6$ gewählt werden, da für jedes $n \geq 6$ ein entsprechender Körper mit n Eckpunkten und weniger Seitenflächen existiert.

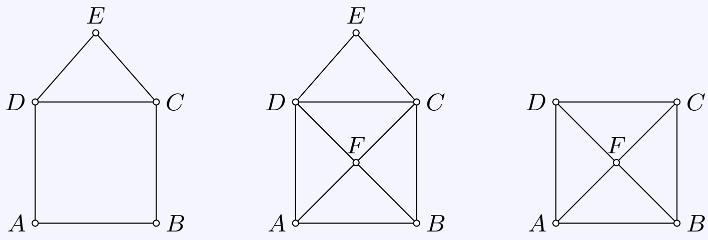
Man kann aber nicht $N < 6$ wählen, da kein solcher Körper mit $e := n = 5$ Eckpunkten existiert:
Da von jedem dieser Eckpunkte mindestens 3 Kanten ausgehen, muss die Summe dieser Anzahlen also mindestens 15 betragen. Da dabei jede Kante doppelt gezählt wird (sie verbindet ja genau zwei Eckpunkte), muss es also mindestens $k \geq \frac{15}{2}$, und damit auch $k \geq 8$, Kanten in dem Körper geben.
Sei f die Anzahl von dessen Flächen. Dann gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz $e - k + f = 2$. Mit $e = 5$ und $k \geq 8$ folgt somit $f = 2 - e + f \geq 2 - 5 + 8 = 5$, sodass es keinen solchen Körper mit 5 Eckpunkten aber weniger als 5 Flächen geben kann.
Also ist tatsächlich $N = 6$ der kleinste solche Wert.

Aufgaben der III. Runde 1979 gelöst von cyrix

6.22 XX. Olympiade 1980

6.22.1 I. Runde 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200911
Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

"In einem Zuge" soll bedeuten, dass beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muss.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Die Figur in Abbildung (a) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B. D, A, B, C, D, E, C.

Die Figur in Abbildung (b) kann in einem Zuge gezeichnet werden, z.B. A, F, C, B, F, D, E, C, D, A, B

Die Figur in Abbildung (c) kann nicht in einem Zuge gezeichnet werden.

Begründung: Um die Bedingung zu erfüllen, müsste es für jeden mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt zu jeder Strecke, die zu ihm hinführt auch einen solche geben, die von ihm wegführt, damit man diesen Punkt, den man erreicht hat, auch wieder verlassen kann. Ausgenommen davon wäre lediglich Anfangs- und Endpunkt der Zeichnung.

Das heißt mit Ausnahme höchstens zweier Punkte müsste für jeden bezeichneten Punkt gelten, dass die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Linien gerade ist. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt, da in den Punkten A, B, C und D jeweils 3 Linien zusammentreffen.

Aufgabe 2 - 200912
Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, dass für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

A hatte einen der Würfe 1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 3, 4, 5, 6;

B hatte einen der Würfe 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2; ...; 6, 6, 6, 6 erhalten. Die Zahl $Z = 12$ kann aus diesen Würfen in der verlangten Weise z.B. folgendermaßen gebildet werden:

$1 \cdot 2^3 + 4 = 12$	$2 \cdot (4 + 5 - 3) = 12$	$6 \cdot (3 + 4 - 5) = 12$
$1 \cdot 11 + 1 = 12$	$2 \cdot (2 + 2 + 2) = 12$	$3 + 3 + 3 + 3 = 12$
$4 \cdot (4 - 4 : 4) = 12$	$(55 + 5) : 5 = 12$	$6 + 6 + 6 - 6 = 12$

Aufgabe 3 - 200913

a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

a) Wenn der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine natürliche Zahl t gekürzt werden kann, dann sind die Zahlen 1711 und 3421 durch t teilbar.

Mithin ist ebenfalls $2 \cdot 1711 = 3422$ durch t teilbar und daher auch die Differenz $3422 - 3421 = 1$. Die einzige natürliche Zahl, durch die 1 teilbar ist, ist aber $t = 1$.

Daher kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden, die von 1 verschieden ist.

b) Ist eine natürliche Zahl t ein gemeinsamer Teiler von $14n + 3$ und $28n + 5$, so ist t ebenfalls ein Teiler von $2 \cdot (14n + 3) = 28n + 6$ und daher auch ein Teiler der Differenz $(28n + 6) - (28n + 5) = 1$. Also folgt wieder, dass $t = 1$ sein muss

Somit haben der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ den größten gemeinsamen Teiler 1, d.h. sie sind teilerfremd zueinander, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 200914

Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4{,}5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

a) Da laut Aufgabe $M_1M_2 = r_1 + r_2$ gilt, berühren sich beide Kreise von außen. Daher haben sie genau eine innere gemeinsame Tangente s. Diese geht durch den Berührungspunkt A der beiden Kreise k_1 und k_2 und steht senkrecht auf M_1M_2. Daraus ergibt sich ihre Konstruktion.

(I) Es sei nun t eine gemeinsame äußere Tangente der Kreise k_1 und k_2, ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen seien T_1 bzw. T_2. Die Parallele zu t durch M_2 schneidet M_1T_1 in einem Punkt, der F genannt sei. Dann ist $T_1T_2M_2F$ ein Rechteck, es gilt $M_1T_1 = r_1$ sowie $M_2T_2 = r_2$, also $M_1F = r_1 - r_2$.

Der Punkt F liegt daher erstens auf dem Kreise um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius und wegen $\angle M_1FM_2 = 90°$ zweitens auf einem der Halbkreise über M_1M_2.

(II) Daraus ergibt sich folgende Konstruktion für eine äußere gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2:

(1) Man konstruiere den Kreis um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius.

(2) Man konstruiert einen Halbkreis über M_1M_2. Sein Schnittpunkt mit dem in (1) konstruierten Kreis sei F genannt.

(3) Man zieht den Strahl aus M_1 durch F. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis k_1 sei T_1 genannt.

(4) Man zieht die Parallele t zu M_2 durch T_1.

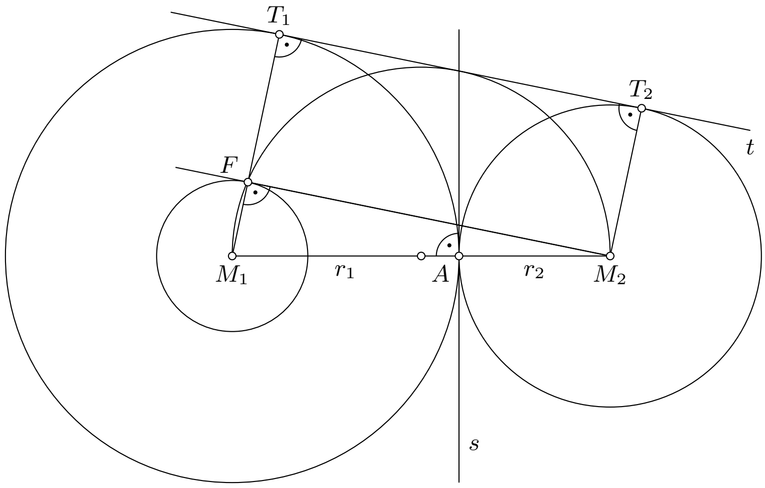
(III) Beweis, dass jede so konstruierte Gerade t Tangente an k_1 und k_2 ist:

Es sei T_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu FT_1 durch M_2 mit t. Laut Konstruktion ist t parallel zu FM_2. Folglich gilt $\angle M_1FM_2 = \angle FT_1T_2 = 90°$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Ferner gilt $\angle FT_1T_2 + \angle M_2T_2T_1 = 180°$ (als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen), also $\angle M_2T_2T_1 = 180° - FT_1T_2 = 180° - 90° = 90°$. Mithin ist $FT_1T_2M_2$ eine Rechteck, und es folgt $FT_1 = M_2T_2 = r_2$.

Daher ist t Tangente an k_1 und k_2.

(IV) In Konstruktionsschritt (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten für die Konstruktion des Halbkreises. Alle anderen Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar. Also gibt es für jeden der beiden Halbkreise über M_1M_2 genau eine Tangente t, insgesamt also genau zwei gemeinsame äußere Tangenten von k_1 und k_2.



Lösungen der I. Runde 1980 übernommen von [5]

6.22.2 II. Runde 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200921
Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, dass $(a + p)(b + p)(c + p) = 1980$ gilt!
Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Bemerkung: In dieser Lösung wird die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ angenommen, wie es die Aufgabe vermutlich voraussetzt.

Es sei o.B.d.A. $a \leq b \leq c$ und damit auch $a + p \leq b + p \leq c + p$.
Es wird p maximal, wenn auch $a + p$ seinen größtmöglichen Wert annimmt. Wegen $13^3 = 169 \cdot 13 = 2197 > 1980$ muss dann $a + p < 13$, also $a + p \leq 12$ gelten. Es ist $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, sodass für $a + p = 12 = 2^2 \cdot 3$ auch $(b + p)(c + p) = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Eine Zerlegung dieses Produkts in zwei Faktoren besitzt aber immer mindestens einen Faktor, der höchstens 11 beträgt, was im Widerspruch dazu steht, dass $a + p$ den kleinsten Wert der drei Faktoren $a + p$, $b + p$, $c + p$ annimmt. Also muss sogar $a + p \leq 11$ sein.

Ist $a + p = 11$, so verbleibt $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, was sich etwa in $b + p = 2^2 \cdot 3 = 12 \geq a + p$ und $c + p = 3 \cdot 5 = 15 \geq a + p$ zerlegen lässt, sodass p maximal 11 gewählt werden kann.

Wählt man das p maximal, also $p = 11$, so ist also – unter der weiterhin angenommenen Sortierung der Variablen a, b und c – $a = 0$ und $(b + p)(c + p) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Dann ist genau einer der beiden Faktoren $b + p$ bzw. $c + p$ durch 5 teilbar.

Ist dieser auch durch 3 teilbar, so verbleiben für den anderen Faktor höchstens die Faktoren $2^2 \cdot 3 = 12$. Also darf der durch 5 teilbare Faktor neben dem einen Faktor 3 keinen weiteren (und auch keinen Faktor 2) enthalten, da sonst der andere Faktor ein echter Teiler von 12, also höchstens 6, wäre, was im Widerspruch zu $a + p \leq b + p \leq c + p$ steht.
Demzufolge gibt es in diesem Fall nur die eine Zerlegung in $12 \cdot 15$, sodass aufgrund der Anordnung $b + p = 12$ und $c + p = 15$, also $(a,b,c) = (0,1,4)$ gilt.

Ist der durch 5 teilbare Faktor nicht durch 3, aber durch 2 teilbar, so muss er wegen $5 \cdot 2 = 10 < 11$ auch durch den zweiten Faktor 2 teilbar sein. Dann ergibt sich aber für den zweiten Faktor, dass dieser höchstens $3^2 = 9$, also kleiner als $a + p = 11$ ist, was einen Widerspruch darstellt. Ein solcher ergibt sich auch, wenn der durch 5 teilbare Faktor weder durch 2 noch 3 teilbar ist, da er dann genau 5 beträgt und $5 < 11$ ist.

Also gibt es unter der Zusatzannahme $a \leq b \leq c$ genau ein Tripel (a,b,c) für das maximal mögliche $p = 11$. Lässt man die Zusatzannahme fallen, ergeben sich alle 6 möglichen Anordnungen dieses einen Tripels als Lösungen:

$$(a,b,c) \in \{(0,1,4);\ (0,4,1);\ (1,0,4);\ (1,4,0);\ (4,0,1);\ (4,1,0)\}$$

Aufgabe 2 - 200922
a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+3}{x-1} < 0$ erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!
b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

a) Setzen wir $x = 0$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{3}{-1} = -3 < 0$. Setzen wir $x = -1$ in die Ungleichung ein, erhalten wir die wahre Aussage $\frac{2}{-2} = -1 < 0$.

b) Es ist $\frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$, die Ungleichung also äquivalent zu $\frac{4}{x-1} < -1$. Also muss $x - 1$ negativ sein, sodas die Multiplikation mit diesem Term das Relationszeichen dreht und die Ungleichung unter der Einschränkung $x - 1 < 0$, d.h., $x < 1$, äquivalent ist zu $4 > -(x - 1)$ bzw. $-4 < x - 1$, d.h. $x > -3$. Die Ungleichung wird also genau von allen reelen Zahlen x mit $-3 < x < 1$ erfüllt.

Aufgabe 3 - 200923
Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1 > r_2$ gelte.
Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge PQ!

Es sei S der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten, M_1 der Mittelpunkt von k_1, M_2 der Mittelpunkt von k_2, B ihr Berührpunkt, B_1 der Berührpunkt von k_1 mit der Tangenten t, auf der P liegt, und B_2 der von k_2 mit der gleichen Tangenten t.

Dann sind M_1B_1 und M_2B_2 parallel, da sie als Berührungsradien beide senkrecht auf der Tangenten t stehen. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{|SM_1|}{|SM_2|} = \frac{|M_1B_1|}{|M_2B_2|} = \frac{r_1}{r_2}$.
Insbesondere ist $|SM_1| > |SM_2|$, also, da S, M_2, B und M_2 aus Symmetriegründen auf einer Geraden liegen, $|SM_1| = |SM_2| + |M_2B| + |BM_1| = |SM_2| + r_1 + r_2$. Setzt man dies in die eben erhaltene Verhältnisgleichung ein, erhält man

$$\frac{|SM_2| + r_1 + r_2}{|SM_2|} = 1 + \frac{r_1 + r_2}{|SM_2|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{also}$$

$$|SM_2| = r_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad |SM_1| = r_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$$

Es ist $\triangle M_1SB_1$ rechtwinklig bei B_1, sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|SB_1| = \sqrt{|SM_1|^2 - |M_1B_1|^2} = \sqrt{r_1^2 \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2)} - r_1^2} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \sqrt{4r_1r_2} = r_1 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$$

und analog $|SB_2| = r_2 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$ ergibt. Damit ist

$$|B_1B_2| = |SB_1| - |SB_2| = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2) = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Der Punkt P liegt auf zwei Tangenten an k_1, sodass die Tangentenabschnitte $|PB_1|$ und $|PB|$ gleich lang sind. Aus gleichem Grund (Tangenten an k_2) ist auch $|PB| = |PB_2|$ und damit P der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2. Insbesondere ist also $|PB| = \frac{1}{2}|B_1B_2| = \sqrt{r_1r_2}$.
Aus Symmetriegründen ist $|QB| = |PB|$, und da Q, B und P nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, ist

$$|PQ| = 2|PB| = 2\sqrt{r_1}r_2$$

Aufgabe 4 - 200924
a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die die folgende Aussage gilt!
"Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen."
b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!
Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Als "Diagonalen" eines Prismas werden alle Strecken zwischen je zwei seiner Eckpunkte bezeichnet, die keine Kante des Prismas sind.

a) Für jeden der $2n$ Eckpunkte eines Prismas mit konvexem n-Eck als Grundfläche gilt, dass von ihm Kanten zu genau drei anderen Eckpunkten des Prismas ausgehen. Es ist also Endpunkt von genau $2n - 3 - 1 = 2n - 4$ Diagonalen. (Von diesem Eckpunkt geht nur keine Diagonale zu den drei Eckpunkten, durch die es mit einer Kante verbunden ist, sowie zu sich selbst, aus.)
Da jede Diagonale genau zwei Eckpunkte miteinander verbindet, gibt es also in einem solchen Prisma mit einem konvexen n-Eck als Prisma genau $\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n - 4) = n \cdot (2n - 4)$ Diagonalen. Damit dies genau $20n$ sind, muss also $2n - 4 = 20$, d.h. $n = 12$ gelten.

Da keine Voraussetzungen über die Form des Prismas gemacht wurde, erfüllen genau alle Prismen, deren Grundfläche ein konvexes 12-Eck ist, die Aussage.

b) Raumdiagonalen seien unter den Diagonalen genau jene, die nicht in einer Seitenfläche des Prismas verlaufen. Das bedeutet, dass diese durch je einen Eckpunkt der Grund- und Deckfläche begrenzt sind, welche aber nicht gemeinsam in einer Seitenfläche des Prismas liegen.

Für jeden der n Eckpunkte der Grundfläche gilt, dass er mit genau einem der Eckpunkte der Deckfläche durch eine Kante verbunden ist und mit genau zwei weiteren jeweils in einer gemeinsamen Seitenfläche liegt. Also gibt es von diesem Eckpunkt der Grundfläche genau $n-3$ ausgehende Raumdiagonalen, sodass es insgesamt $n \cdot (n-3)$ Raumdiagonalen gibt, was im konkreten Fall mit $n = 12$ auf genau $12 \cdot 9 = 108$ Raumdiagonalen bedeutet.
Die übrigen der $20n = 240$, also 132 (bzw. allgemein $n \cdot (2n-4) - n \cdot (n-3) = n \cdot (n-1)$), sind dann die Flächendiagonalen.

Aufgaben der II. Runde 1980 gelöst von cyrix

6.22.3 III. Runde 1980, Klasse 9

Aufgabe 1 - 200931
In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.
Beweisen Sie, dass es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f & 5 & g \\
h & i & 5 & & & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
j & k & m & n & & & & & & & & & \\
p & 5 & q & r & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & s & t & u & v & & & & & & & & \\
 & w & x & y & z & & & & & & & &
\end{array}$$

Wegen $5de \geq 500$ und damit $2 \cdot 5de \geq 1000$, aber $0 < hi5 < 1000$ ist $f = 1$ und $hi5 = 5de$, also $h = 5$, $d = i$ und $e = 5$.

Wegen $500 < 5d5 < 600$ ist $2500 < 5 \cdot 5d5 < 3000$, also $p = 2$. Damit ist $5 \cdot 5d5 < 2600$, d.h. $5d5 < 520$, also $d \in \{0,1\}$. Außerdem endet $5 \cdot 5d5$ in der Einerziffer 5, sodass auch $r = 5$ gilt. Damit ergibt sich insbesondere als Einerziffer der Differenz $u = 0$.

Aufgrund des Vorgehens bei der schriftlichen Division muss $v = 5$ gelten. Damit kein Rest bleibt, muss $wxyz = stuv$ sein.
Trägt man alle bisher gefundenen Informationen ein, erhält man

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & 5 & = & 1 & 5 & g \\
5 & d & 5 & & & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
j & k & m & 5 & & & & & & & & & \\
2 & 5 & q & 5 & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & s & t & 0 & 5 & & & & & & & & \\
 & s & t & 0 & 5 & & & & & & & &
\end{array}$$

Wäre $d = 0$, dann müsste $st05 = g \cdot 505$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zu $s \neq 0$, da die Zehnerziffer von $g \cdot 505$ nur für die positive Ziffer $g = 1$ den Wert 0 hat.

Also muss $d = 1$ sein. Dann ist $st05 = g \cdot 515$, was genau für die Ziffer $g = 7$ erfüllt ist, denn dann ist $7 \cdot 515 = 3605$. Auch ergibt sich $25q5 = 5 \cdot 515 = 2575$, also $q = 7$ und damit $jkm5 = 2575 + 360 = 2935$ sowie abschließend $abc = 515 + 293 = 808$, sodass man die korrekt berechnete und eindeutig bestimmte Divisionsaufgabe

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
8 & 0 & 8 & 5 & 5 & : & 5 & 1 & 5 & = & 1 & 5 & 7 \\
5 & 1 & 5 & & & & & & & & & & \\ \cline{1-3}
2 & 9 & 3 & 5 & & & & & & & & & \\
2 & 5 & 7 & 5 & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & 3 & 6 & 0 & 5 & & & & & & & & \\
 & 3 & 6 & 0 & 5 & & & & & & & &
\end{array}$$

erhält, wie man leicht nachrechnet, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 200932
Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.
Beweisen Sie, dass dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

Wegen $a > b$ existiert ein $x > 0$ mit $a = b + x$. Aufgrund $a + d = b + c$ ist dann $d = c - x$. Insbesondere ist

$$ad = (b + x)(c - x) = bc - (b - c)x - x^2 < bc \quad \text{also} \quad 2ad < 2bc$$

Wegen $a + d = b + c$ ist auch $(a + d)^2 = (b + c)^2$, also $a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$.
Zieht man von dieser Gleichung nun links den kleineren Term $2ad$ und rechts den größeren $2bc$ ab, erhält man die Ungleichung $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 200933
Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{3}$ cm, $PC = \sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.
Beweisen Sie, dass die Länge PD durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Es sei a die Länge des Lots von P auf die Seite AB, b die des Lots von P auf BC, c die des Lots von P auf CD und d die des Lots von P auf DA.
Damit bilden jeweils ein Eckpunkt, die Lotfußpunkte auf den von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des Rechtecks und P ein Quadrat, dessen Diagonalen "Eckpunkt-P" die Längen

$$|AP| = \sqrt{a^2 + b^2}, |BP| = \sqrt{b^2 + c^2}, |CP| = \sqrt{c^2 + d^2}, |DP| = \sqrt{d^2 + a^2}$$

besitzen. Da nach Aufgabenstellung $|AP|^2 + |BP|^2 = |CP|^2$ gilt, folgt $a^2 + b^2 + b^2 + c^2 = c^2 + d^2$, also $a^2 + 2b^2 = d^2$ und damit

$$|DP| = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2b^2} = \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2)} = \sqrt{2} \cdot |AP| = 2cm$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 200934
Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!
(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.
(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.
(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Nach (1) und (2) existieren positive Ziffern $c > d$ mit $c,d \in \{1,2,\dots,9\}$, sodass $a = 10c+d$ und $b = 10d+c$ gilt. Dann ist

$$a^2 - b^2 = (100c^2 + 20cd + d^2) - (100d^2 + 20dc + c^2) = 99(c^2 - d^2)$$

eine Quadratzahl, also wegen $9 = 3^2$ auch $11(c^2 - d^2) = 11(c - d)(c + d)$. Da 11 eine Primzahl ist, muss mindestens einer der Faktoren $(c - d)$ bzw. $(c + d)$ auch durch 11 teilbar sein, damit in der Primfaktorzerlegung des Produkts die Primzahl 11 nicht nur einmal vorkommt.

Da aber $0 < c-d \leq 9-1 = 8 < 11$ ist, muss $c+d$ durch 11 teilbar sein. Wegen $0 < c+d < 10+10 = 20 < 22$ muss damit $c + d = 11$ gelten. Dann ist $11 \cdot (c - d) \cdot 11 = 11^2 \cdot (c - d)$, sodass auch $c - d$ eine Quadratzahl sein muss. Wegen $0 < c - d \leq 9 - 1 = 8$ kommen also nur 1 und 4 als Quadratzahlen in Frage, sodass sich folgende zwei Fälle ergeben:

1. Fall: $c - d = 1$. Dann ist wegen $c + d = 11$ also $c = 6$ und $d = 5$. Es ergeben sich $a = 65$ und $b = 56$. Tatsächlich ist $a^2 - b^2 = 65^2 - 56^2 = 4225 - 3136 = 1089 = 33^2$ eine Quadratzahl, sodass $(a,b) = (65,56)$ eine Lösung ist.

2. Fall: $c - d = 4$. Dann wäre aber wegen $c + d = 11$ also $2c = (c + d) + (c - d) = 15$ die Ziffer c keine natürliche Zahl, was ein Widerspruch ist.
Demzufolge gibt es keine weitere neben der einen angegebenen Lösung.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 200935
Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!
Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!
Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ gilt.

Bei einem regulären Tetraeder sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke gleicher Kantenlänge. Insbesondere betragen alle Innenwinkel auf den Seitenflächen jeweils 60°.

Es seien M_{AB}, M_{AC}, M_{DB} und M_{DC} die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, DB und DC. Dann sind die Dreiecke $\triangle M_{AB}M_{AC}A$, $\triangle M_{DB}M_{DC}D$, $\triangle M_{AB}M_{DB}B$ und $\triangle M_{AC}M_{DC}C$ allesamt gleichschenklig, wobei die beiden Schenkel einen Innenwinkel von 60° einschließen, sodass diese Dreiecke sogar alle gleichseitig mit Kantenlänge $\frac{a}{2}$ sind. Insbesondere ist also

$$|M_{AB}M_{AC}| = |M_{DB}M_{DC}| = |M_{AB}M_{DB}| = |M_{AC}M_{DC}| = \frac{a}{2}$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes mit Zentrum A ist $M_{AB}M_{AC} \parallel BC$ und analog bei Betrachtung mit Zentrum D ist $M_{DB}M_{DC} \parallel BC$, sodass diese beiden Geraden und damit die vier Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Damit ist das Viereck $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ eine Raute.

In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DBC$ fallen die Mittelsenkrechten der Strecke BC mit den Höhen von A bzw. D auf diese zusammen. Damit steht die Gerade BC senkrecht auf der Ebene ϵ, die durch A, D und den Mittelpunkt M_{BC} von BC verlaufe, sodass bei der Spiegelung an ϵ wegen $|BM_{BC}| = |CM_{BC}|$ die Punkte B und C jeweils aufeinander abgebildet werden, während A und D fix bleiben. Das bedeutet, dass bei dieser Spiegelung die Strecken $M_{AB}M_{DC}$ und $M_{AC}M_{DB}$ aufeinander abgebildet werden, also gleich lang sind.
Das bedeutet aber, dass in der Raute $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ die Diagonalen gleich lang sind, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Dieses Quadrat hat die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ und also den Flächeninhalt $I = \frac{1}{4}a^2$.

Aufgabe gelöst von cyrix

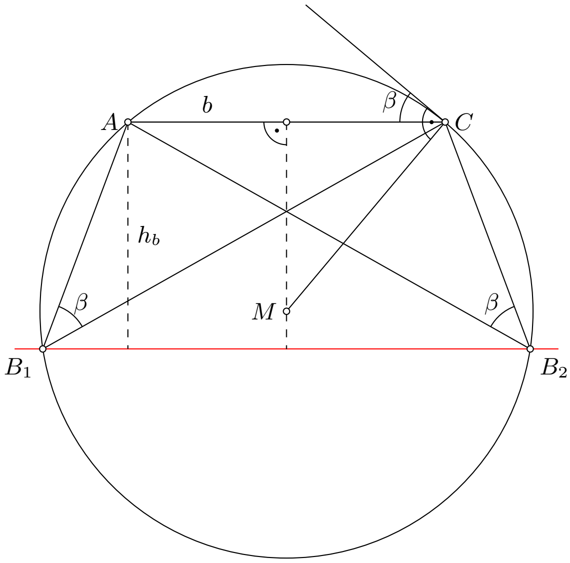
Aufgabe 6 - 200936
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm!
Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann liegt der Punkt B erstens auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und zweitens auf einer Parallelen zu AC im Abstand h_b.
Der Mittelpunkt M des Umkreises liegt erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf der Senkrechten, die in C auf der in C an den Umkreis gelegten Tangente errichtet wird. Auf dieser Tangente bildet derjenige von C ausgehende Strahl, der nach der Seite von AC hin verläuft, in der B nicht liegt, mit dem Strahl aus C durch A einen Winkel der Größe β.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel der Größe β, der Scheitelpunkt sei C genannt.
(2) Auf dem einen Schenkel des Winkels trägt man von C aus eine Strecke der Länge b ab. Der andere Endpunkt der Strecke sei A genannt.
(3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels errichtet man in C die Senkrechte s.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte zu AC. Schneidet sie die Senkrechte s, so sei M dieser Schnittpunkt.

(5) Um M zeichnet man einen Kreis mit dem Radius MC.
(6) Man zeichnet die Parallele zu AC im Abstand h_b auf derjenigen Seite von AC, in die hinein der in (1) konstruierte Winkel nicht verläuft. Schneidet diese Parallele den in (5) konstruierten Kreis um M, so sei B einer der Schnittpunkte.



(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $AC = b$. Nach dem Satz über Sehnentangentenwinkel und nach Konstruktion gilt $\angle CBA = \beta$.
Ebenfalls nach Konstruktion hat B von AC den Abstand h_b damit hat die von B ausgehende Höhe des Dreiecks die Länge h_b.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) bis (5) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Da der in (1) gezeichnete Winkel spitz ist, existiert genau ein Schnittpunkt der Senkrechten von (3) und (4).
Für die gegebenen Werte von b, β, h_b schneidet die in (6) konstruierte Parallele den in (5) konstruierten Kreis in genau zwei Punkten B_1, B_2.
Es entstehen daher zwei Dreiecke AB_1C, AB_2C. Die in (4) konstruierte Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse sowohl von AC als auch von dem in (5) konstruierten Kreis als auch von der in (6) konstruierten Parallelen.
Daher geht das Dreieck AB_1C bei Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten in das Dreieck CB_2A über; es gilt $\triangle AB_1C \cong \triangle CB_2A$. In diesem Sinne gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC, das die geforderten Größen aufweist.

Übernommen von [5]

6.23 XXI. Olympiade 1981

6.23.1 I. Runde 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210911
Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, dass genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, dass es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Wäre (2) falsch, so hätte das Endspiel A gegen B gelautet, und dann wären auch alle Aussagen (1), (3), (4), (5) falsch, in Widerspruch dazu, dass nur zwei falsche Aussagen auftreten.

Daher ist (2) wahr. Daraus folgt, dass auch (4) wahr ist; denn aus der Voraussetzung, A werde das Endspiel erreichen, ergibt sich wegen der Wahrheit von (2) die Schlussfolgerung, dass B nicht das Endspiel erreichte.

Wäre (5) falsch, so wäre auch (1) und (3) falsch, im Widerspruch dazu, dass genau zwei Aussagen (1) bis (5) falsch sind. Also ist (5) wahr.

Da (2), (4) und (5) wahr sind, sind genau die beiden Aussagen (1) und (3) falsch. Hiernach verbleibt von den Möglichkeiten, (5) zu erfüllen, genau die, dass das Endspiel B gegen D lautete.

Aufgabe 2 - 210912
Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, dass er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Die Aussage über das Produkt der drei Altersangaben trifft genau für die folgenden Zusammenstellungen zu:

1. Kind	72	36	24	18	12	9	18	12	9	**6**	8	6
2. Kind	1	2	3	4	6	8	2	3	4	**6**	3	4
3. Kind	1	1	1	1	1	1	2	2	2	**2**	3	3

Herrn Lehrmanns Aussage "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln" trifft hiernach genau dann zu, wenn die Hausnummer 14 beträgt. Die nächste Aussage von Herrn Schulte trifft genau dann zu, wenn das 3. Kind um mindestens ein Jahr jünger ist als das 2. Kind.

Daher trifft die abschließende Aussage von Herrn Lehmann genau dann zu, wenn die Altersangaben 6, 6 und 2 lauten.

Daher ist gezeigt: Es gibt eine Zusammenstellung der drei Altersangaben, für die alle Aussagen des Gesprächs zutreffen; es gibt auch nur eine solche Zusammenstellung; sie lautet 6, 6 und 2.

Aufgabe 3 - 210913
Elsa behauptet:

> ”Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981.”

Ist Elsas Behauptung wahr?

Elsas Behauptung ist wahr. Um das zu beweisen, genügt ein Beispiel. Derartige Beispiele lassen sich etwa durch folgende Überlegung zu finden:

Es gibt eine Zahl m so, dass die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m die Zahle 1981 gerade übersteigt. Das ist bei $m = 63$ der Fall; denn er gilt

$$1 + 2 + 3 + ... + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Wegen $2016 - 1981 = 35$ muss diese Summe um 35 verringert werden, um 1981 zu erreichen. Das kann z.B. dadurch geschehen, dass man die auf 63 folgenden 70 natürlichen Zahlen wechselweise addiert und subtrahiert, also

$$1 + 2 + 3 + ... + 63 + 64 - 65 + 66 - 67 + - ... + 132 - 133 = 1981$$

bildet.

Ein anderer Weg besteht darin, dass man statt +17 die Zahl -17 einfügt, womit sich die Summe um 34 vermindert. Man erhält auf diese Weise

$$1 + 2 + 3 + ... + 17 - 17 + 18 + ... + 64 = 1982$$

und gelangt durch Hinzufügen von +64 und -65 auf die gewünschte Zahl.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$1+2\cdot3\cdot4\cdot5:6+7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11:12-13\cdot14\cdot15-16\cdot17+18\cdot19 = 1+20+4620-2870-272+342 = 1981$$

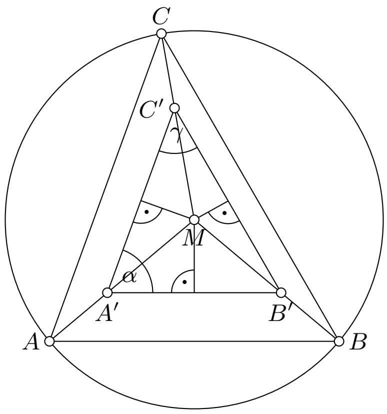
Aufgabe 4 - 210914
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Mittelpunkt seines Umkreises sei M; dann gilt $MA = MB = MC = r$.

Ist $A'B'C'$ ein Dreieck mit $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$, so ist es zu $\triangle ABC$ ähnlich, kann also durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum M und einem Streckungsfaktor $k > 0$ hervorgeht.

Dann gilt $MA' = MB' = MC' = kr$. Also ist M auch der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$, d.h. der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten.



II. Daher entspricht ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, in dem $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$ gilt.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt M seiner Mittelsenkrechten.

(3) Man trägt auf den von M durch A', B' und C' gehenden Strahlen von M aus jeweils die Strecke der Länge r ab. Die erhaltenen Endpunkte bezeichnet man mit A, B bzw. C und verbindet sich untereinander.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach (3) gilt $MA = MB = MC = r$, also ist r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Nach (2) folgt weiter, dass M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$ ist, demnach gilt $MA' = MB' = MC'$. Also gelten mit einer Zahl $k > 0$ die Gleichungen $MA' = MB' = MC' = kr$; folglich geht $\triangle ABC$ aus $\triangle A'B'C'$ durch eine zentrische Streckung hervor. Somit sind beide Dreiecke einander ähnlich und es gilt

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha \quad ; \quad \angle ACB = \angle A'C'B' = \gamma$$

IV. Konstruktionsschritt (1) ist (bei den gegebenen Werten von α und γ) ausführbar, aber nicht eindeutig; jedoch sind je zwei nach (1) zu erhaltende Dreiecke $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$ zueinander ähnlich. Also kann stets $A_2'B_2'C_2'$ durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus $A_1'B_1'C_1'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.

Hiernach ist die Figur aus den drei in (3) konstruierten Strahlen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Somit ist auch das in (3) anschließend konstruierte Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen von [5]

6.23.2 II. Runde 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210921
In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Da für drei Zahlen 5 Ziffern zur Verfügung stehen, muss mindestens eine einstellig sein. Da der Dividend a bei einer Divisionsaufgabe (im Bereich der natürlichen Zahlen) der größte Wert ist, muss a mindestens zweistellig sein. Wären b und c einstellig, so würde ihr Produkt a höchstens $5 \cdot 4 = 20$ betragen, sodass nicht alle fünf Ziffern verwendet werden würden. Also muss a zweistellig und noch genau einer der beiden Werte b bzw. c zweistellig sein, während der andere einstellig ist.

Da die Ziffer 5 nur genau einmal verwendet werden darf, kann sie nicht als Einerziffer verwendet werden, da dann auch die entsprechende Zahl durch 5 teilbar wäre, was die Teilbarkeit durch 5 mindestens einer weiteren der drei Zahlen nach sich ziehen würde. Dies ist aber aufgrund der nicht weiter zur Verfügung stehenden Endziffern 0 bzw. einer weiteren 5 nicht möglich.
Also muss die Ziffer 5 als Zehnerziffer verwendet werden. Dies kann aber nicht die Zehnerziffer des Quotienten oder Divisors sein, weil sonst dieser Wert mindesten 51 wäre, während für den notwendigerweise größeren Dividenden nur noch maximal die Zahl 43 möglich wäre. Also muss die 5 der Zehner von a sein.

Es kann weder b noch c gleich 1 sein, da sonst der andere Wert gleich a sein müsste, was eine doppelte Nutzung von Ziffern nach sich ziehen würde.

Da 53 eine Primzahl ist und $51 = 3 \cdot 17$ als einzige nicht-triviale Zerlegung die nicht vorhandene Ziffer 7 verwendet, scheiden diese beiden Möglichkeiten für a aus. Es verbleiben zwei Fälle:

1. Fall: $a = 52$. Dann gibt es wegen $52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$ genau die beiden Möglichkeiten $b = 4$ und $c = 13$ bzw. umgekehrt $b = 13$ und $c = 4$. Andere Zerlegungen gibt es in diesem Fall nicht.

2. Fall: $a = 54$. Dann gibt es wegen $54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$ als einzig möglichen, nicht-trivialen Zerlegungen keine den Anforderungen der Aufgabenstellung genügenden Divisionsaufgaben.

Es gibt also genau zwei solche Tripel, nämlich $(a,b,c) \in \{(52,4,13), (52,13,4)\}$.

Aufgabe 2 - 210922
Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.
Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Ja, dies ist möglich.
Es sei $ABCDA'B'C'D'$ der Quader mit Grundfläche $ABCD$, Deckfläche $A'B'C'D'$, sodass jeder Eckunkt P der Grundfläche mit seinem entsprechenden Eckpunkt P' der Deckfläche durch eine Kante verbunden sei. Weiterhin gelte $|AB| = b$, $|AA'| = a$ und $|AD| = |A'D'| = c$.

Auf den Kanten $A'D'$ sowie $B'C'$ seien so die Punkte K bzw. L markiert, dass $|A'K| = |B'L| = \sqrt{a^2 - b^2}$ gilt. Dies ist wegen $\sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a < c = |A'D'|$ immer möglich. Dann ist die Strecke KL parallel zur Strecke $A'B'$, also auch zu AB, sodass die vier Punkte $ABLK$ in einer Ebene liegen. Weiterhin gilt damit $|KL| = |AB| = a$ und aufgrund der Symmetrie $|AK| = |BL|$.

Das Dreieck $\triangle AKA'$ ist rechtwinklig in A', sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|AK| = \sqrt{|AA'|^2 + |A'K|} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)} = a$$

ergibt. Damit ist das Viereck $ABLK$ eine Raute.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an der zur Seitenfläche $ADD'A'$ parallelen Ebene durch den Mittelpunkt von AB überführt sowohl den Quader in sich selbst und bildet K auf L sowie A auf B ab) sind aber dessen Diagonalen gleich lang, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Der Schnitt des Quaders durch $ABKL$ liefert also das Gewünschte, $\square$.

Aufgabe 3 - 210923
Beweisen Sie, dass reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &> 0, \\ x \cdot y \cdot z &> 0, \\ xy + xz + yz &> 0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

Sind x, y und $z <$ allesamt positiv, so erfüllen sie offensichtlich alle drei Ungleichungen.
Gelten nun ab jetzt für die drei Variablen die drei Ungleichungen. Dann sind aufgrund der zweiten Ungleichung alle drei verschieden von 0 und entweder genau 0 oder genau 2 negativ. (Bei genau einer oder genau drei negativen Zahlen wäre ihr Produkt auch negativ, im Widerspruch zur zweiten Ungleichung.)

Nehmen wir nun an, dass genau zwei der drei Variablen negativ wären, d.h., wir nehmen o.B.d.A. $x > 0$ und $y < 0$ sowie $z < 0$ an. Dann ist aufgrund der ersten Ungleichung $x > x + z > -y > 0$ und analog $x > x + z > 0$. Damit gilt $0 < (x + y)(x + z) < x^2$.
Es ist aber wegen $0 < x^2$ und der der dritten Ungleichung

$$x^2 < x^2 + xy + xz + yz = x^2 + x(y + z) + yz = (x + y)(x + z)$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.
Damit müssen alle drei Variablen x, y und z positiv sein, wenn sie die drei Ungleichungen gleichzeitig erfüllen, sodass die beiden Aussagen äquivalent sind, $\square$.

Aufgabe 4 - 210924
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.
Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, dass sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $ED = DB + EC$ gilt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Konstruktion:
1) Man konstruiere die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle BAC$ und deren Schnittpunkt W mit der Seite BC.
2) Der Kreis um C durch W schneide die Gerade AC in zwei Punkten, wobei genau einer nicht auf der gleichen Seite von C wie A liegt. Dieser Schnittpunkt heiße X.
3) Die Parallele zur Geraden XW durch C schneide w in S.
4) Die Parallele zur Geraden BC durch S schneide die Geraden AB in D und AC in E.

Begründung:
Da A, E und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, gilt $|AE| + |EC| = |AC|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES}$$

Da die Geraden ES und CW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|ES|}{|AS|} = \frac{|CW|}{|AW|}$, also $|ES| = |CW| \cdot \frac{|AS|}{|AW|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|}$$

Da die Geraden CS und XW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AX|}{|AC|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AX|}{|CW|}$$

Nach Konstruktion ist $|AX| = |AC| + |CW|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AX|}{|CW|} = \frac{|AC| + |CW|}{|CW|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|}$$

Da die Geraden ES und CW parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AC|}{|CW|} = \frac{|AE|}{|ES|}$. Setzt man das ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|} = 1 + \frac{|AE|}{|ES|} = \frac{|AE| + |ES|}{|ES|} \qquad \text{also} \qquad |EC| = |ES|$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt $\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|WB|}{|WC|}$. Da W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit der gegenüberliegenden Seite ist, gilt $\frac{|WB|}{|WC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, da eine Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der angrenzenden Seiten teilt. Zusammen gilt also

$$\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{bzw.} \quad |SD| = |ES| \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$$

Setzt man hierin $|ES| = |EC|$ und $|EC| = |AC| - |AE|$ ein, erhält man

$$|SD| = (|AC| - |AE|) \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|}$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$|SD| = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = |AB| - |AD| = |DB|$$

Damit gilt $|ED| = |ES| + |SD| = |EC| + |DB|$, wie gefordert.

Zur Eindeutigkeit:
Für eine Parallele p zu BC bezeichne E' und D' deren Schnittpunkte mit den Geraden AC bzw. AB. Bewegt man diese Parallele p beginnend mit $p = BC$ kontinuierlich soweit, bis sie durch A verläuft, dann ist die Länge der zugehörigen Strecke $E'D'$ beginnend mit dem Wert $|BC|$ streng monoton auf 0 gesunken.
Umgedreht wachsen in diesem Prozess die Streckenlängen $|D'B|$ und $|E'C|$ von 0 beginnend bis $|AB|$ bzw. $|AC|$, sodass für deren Summe $|D'B| + |E'C|$ gilt, dass sie streng monoton von 0 bis $|AB| + |AC| > |AB|$ wächst, wobei die letzte Ungleichung die Dreiecksungleichung ist.
Also gibt es genau eine Position der Parallelen p in diesem Bereich, an dem Gleichheit zwischen den beiden Werten $|E'D'|$ und $|D'B| + |E'C|$ Gleichheit herrscht. Damit ist die Position der Parallelen eindeutig bestimmt. (Außerhalb des betrachteten Bereichs schneidet p nicht mehr die Dreiecksseiten, was nach Aufgabenstellung gefordert war.)

Aufgaben der II. Runde 1981 gelöst von cyrix

6.23.3 III. Runde 1981, Klasse 9

Aufgabe 1 - 210931
Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A:	(1) x ist eine zweistellige Zahl.
	(2) x ist kleiner als 1000.
Paar B:	(1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
	(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.
Paar C:	(1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
	(2) x ist durch 37 teilbar.
Paar D:	(1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
	(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist!
Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Da jede zweistellige Zahl auch kleiner ist als 1000, kann nicht A(1) wahr sein, da sonst auch A(2) wahr wäre. Demzufolge ist x nicht zweistellig, aber kleiner als 1000, also ein- oder dreistellig.
Sie kann aber nicht einstellig sein, da sonst sowohl C(1) (x wird mit drei gleichen Ziffern geschrieben) als auch C(2) (x ist durch 37 teilbar) wegen $x > 0$ falsch wären. Also ist x eine dreistellige natürliche Zahl.

Wäre C(1) war, so gäbe es eine Ziffer n mit $x = n \cdot 111 = n \cdot 3 \cdot 37$, sodass auch C(2) wahr wäre, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung ist. Also ist x durch 37, nicht aber durch 3 teilbar. Damit ist auch die Quersumme von x nicht durch 3 teilbar, also nicht 27, sodass D(1) falsch ist und D(2) wahr sein muss. Demzufolge ist eine der Ziffern von x gleich Null. Dies kann nicht die führende Ziffer sein, da sonst die Zahl nicht dreistellig wäre.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, welche Ziffer von x gleich Null ist.

1. Fall: Die zweite Ziffer (Zehnerziffer) von x ist Null. Dann ist B(1) wahr und B(2) muss falsch sein, sodass x eine dreistellige, durch 37 aber nicht 3 teilbare Zahl mit 0 an zweiter Stelle und Quersumme verschieden von 11 ist. Die dreistelligen Vielfachen von 37 lauten

$$111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814,$$

$$851, 888, 925, 962 \text{ und } 999$$

Von diesen haben genau die Zahlen 407 und 703 die Zehnerziffer 0, aber 407 die Quersumme 11, sodass nur $x = 703$ eine Lösung für diesen Fall ist.

2. Fall: Die zweite Ziffer von x ist verschieden von Null. Dann muss die Einerziffer von x Null sein und, da B(1) falsch ist, muss B(2) wahr sein und die Zahl eine Quersumme von 11 besitzen. Da die Einerziffer von x gleich 0 ist, ist x also nicht nur durch 37, sondern auch durch 10, also wegen ggT(37,10)=1 auch durch 370, teilbar.
Damit gibt es nur die beiden Möglichkeiten 370 oder 740 für x im zu betrachtenden Intervall, wobei die erste Möglichkeit wegen ihrer Quersumme 10 ausgeschlossen ist. Es verbleibt die einzige Lösung $x = 740$ für diesen Fall.

Man bestätigt leicht durch die Probe, dass tatsächlich beide Werte 703 und 740 jeweils genau eine der Aussagen eines jeden Paares A, B, C und D erfüllen.

Aufgabe 2 - 210932
Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = AD = 6$ cm und $a = AB > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.
Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Offensichtlich ist die genaue Länge von b irrelevant. Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt $(a,0)$ und D im Punkt $(0,b)$ zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen: $C(a,b)$, $F(b,0)$, $E(b,b)$, $H(a-b,0)$ und $G(a-b,b)$.

Die Gerade AC hat den Anstieg $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$, die Gerade EH den Anstieg $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$, sofern $a \neq 2b$ ist. (Wäre aber $a = 2b$, so würde H mit zusammenfallen, die Gerade EH wäre senkrecht zu AB, also insbesondere nicht senkrecht zu AC, sodass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Deshalb können wir ab sofort $a \neq 2b$ annehmen.)

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu -1 multiplizieren, d.h., es ist

$$EH \perp AC \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a} \cdot \frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot (a-2b) = a^2 - 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a - b = \sqrt{2}b \Leftrightarrow a = (1+\sqrt{2})b$$

sodass für festes b genau ein a existiert, sodass die beiden Geraden EH und AC senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit $b = 6$ cm ist dafür dann $a = (1+\sqrt{2}) \cdot 6$ cm.

Aufgabe 3 - 210933
Beweisen Sie, dass die Ungleichung gilt:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} < 1000^{500000}$$

Es ist $300^2 = 90.000 < 10^5$ und damit $300 < 1000^{\frac{5}{6}}$, also gilt

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} < 300^1 \cdot 300^2 \cdot \ldots \cdot 300^{300} = 300^{1+2+\cdots+300} = 300^{\frac{300\cdot 301}{2}} < 300^{300\cdot 151} <$$

$$< 1000^{\frac{5}{6}\cdot 300\cdot 151} = 1000^{37.750} < 1000^{40.000}$$

Weiterhin ist

$$301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} = 1000^{301+\cdots+1000} = 1000^{\frac{1000\cdot 1001}{2} - \frac{300\cdot 301}{2}} =$$

$$= 1000^{500.500-150\cdot 301} < 1000^{500.500-45.000}$$

also

$$1^1 \cdot \ldots \cdot 300^{300} \cdot 301^{301} \cdot \ldots \cdot 1000^{1000} < 1000^{40.000} \cdot 1000^{500.500-45.000} =$$

$$= 1000^{50.500+40.000-45.000} < 1000^{500.000}, \Box$$

Aufgabe 4 - 210934
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm!
Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

1) Man zeichne einen Kreis um einen Punkt M mit Radius r. Auf dessen Rand markiere man einen beliebigen Punkt B und zeichne den zugehörigen Radius BM ein.
2) An diesen Radius trage man den Winkel 2α ab und bestimme den Schnittpunkt des zweiten Schenkels dieses Winkels mit dem Kreis. Der Schnittpunkt heiße C.
3) Man zeichne eine Parallele zu BC im Abstand h_a in der Halbebene von BC, in der auch M liegt. Diese Parallele schneidet den Kreis in zwei Punkten, wovon man einen A und den anderen A' nennt.

Dann sind das Dreieck $\triangle ABC$ und das dazu kongruente Dreieck $A'BC$ das Gesuchte.

Begründung:
Es müssen alle Punkte auf einem Kreis mit Radius r liegen, da dies der Umkreisradius des gesuchten Dreiecks ist. Über der Sehne BC ist $\angle BAC$ ein Peripheriewinkel, sodass der zugehörige Zentriwinkel $\angle BMC$ genau doppelt so groß sein muss. Schließlich liegen A und M in der gleichen Halbebene bezogen auf die Gerade BC, da $\alpha < 90°$ ist. Da h_a senkrecht auf BC steht, muss also A auf einer Parallelen zu BC in diesem Abstand liegen.
Die entstehenden beiden Schnittpunkte A und A' erfüllen dabei gleichermaßen die Bedingungen, was man auch daran sieht, dass sie durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke BC ineinander übergehen (sowie B in C und umgekehrt), sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$ zueinander kongruent sind.

Aufgabe 5 - 210935
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen der Zahlen ± 5, ± 4, ± 3, ± 2, ± 1 und 0, dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein.
Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind, $\square$.

Aufgabe 6 - 210936
Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $AD = 13$ cm, $BD = 13$ cm geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.
Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Es sei L der Fußpunkt des Lots von D auf die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann sind die Dreiecke $\triangle ADL$ und $\triangle BDL$ rechtwinklig in L und es gilt

$$|AL| = \sqrt{|AD|^2 - |DL|^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

sowie analog $|BL| = 5$ cm. Da $|AB| = 10$ cm die Summe dieser beiden Strecken ist, liegt L auf der Strecke AB und bildet dessen Mittelpunkt.

Da $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ gilt, ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C. Damit gilt nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|AL| = |BL| = |CL| = 5$ cm.
Das Dreieck $\triangle CDL$ ist rechtwinklig in L. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|CD| = \sqrt{|CL|^2 + |DL^2|} = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

Aufgaben der III. Runde 1981 gelöst von cyrix

6.24 XXII. Olympiade 1982

6.24.1 I. Runde 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220911
Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, dass aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

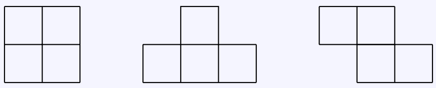
Die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl z mit den geforderten Eigenschaften seien a bzw. b. Dann hat die Quersumme $a+b$ dieselbe Einerziffer wie die Zahl z^2 und daher auch wie die b^2. Somit muss a die Einerziffer von b^2-b sein.

Außer $b=0$ scheiden damit auch $b=1,5,6$ aus, da sie auf $a=0$ führen würden. Für die übrigen Möglichkeiten wird in der folgenden Tabelle geprüft, ob z^2 die durch Hintereinanderschreiben von b, a und $a+b$ erhaltene Zahl z' ist:

b	b^2	b^2-b	a	z	z^2	z'
2	4	2	2	22	484	224
3	9	6	6	63	3969	369
4	16	12	2	24	576	426
7	49	42	2	27	729	729
8	64	56	6	68	4624	8614
9	81	72	2	29	841	9211

Damit ist $z=27$ als einzige Lösung ermittelt.

Aufgabe 2 - 220912
Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(a) (b) (c)

(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

a) Beweisen Sie, dass diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!

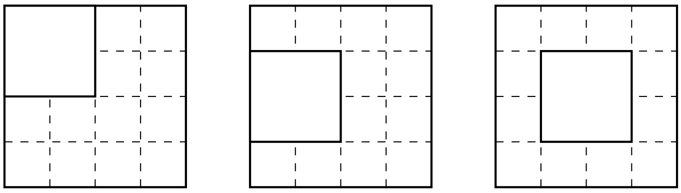
b) Zeigen Sie, dass die Bedingungen für $n=6$ erfüllbar sind!

c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

a) Für ungerades n ist die Anzahl n^2 der Felder von F_n ungerade, während bei beliebiger Zusammenstellung von Täfelchen stets eine durch 4 teilbare, also gerade Anzahl von Feldern entsteht. Daher sind die Bedingungen für ungerades n nicht erfüllbar.

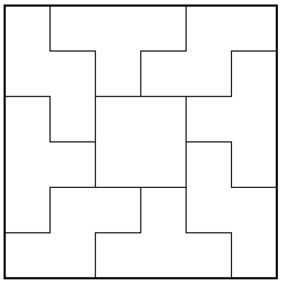
Kommt in einer Fläche F_n von jeder Sorte (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen vor, so muss $n^2 \geq 12$ sein. Also sind die Bedingungen für $n \leq 3$ nicht erfüllbar.

Für $n = 4$ gilt: Wären die Bedingungen erfüllbar, so käme auch ein Täfelchen der Form (a) vor. Hierfür gäbe es o.B.d.A. nur die drei angegebenen Möglichkeiten in der Abbildung:

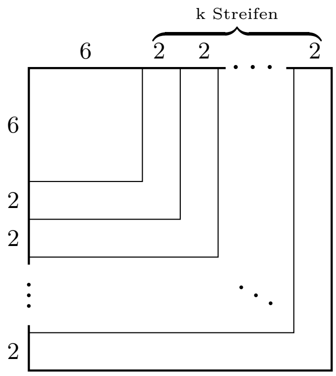


In allen drei Fällen kann die verbleibende Restfläche nicht so in Täfelchen der Formen (a), (b) oder (c) zerlegt werden, dass dabei die Formen (b) und (c) auch vorkommen. Daher sind die Bedingungen für $n = 4$ ebenfalls nicht erfüllbar.

b) Die Abbildung zeigt eine Belegung von F_6 die alle Bedingungen erfüllt.



c) Jede gerade Zahl $n \geq 8$ lässt sich in der Gestalt $n = 6 + 2k$ ($k = 1,2,3,...$) darstellen. Hiernach kann die Fläche F_n in eine 6×6 Feld und k Streifen der Breite 2 aufgeteilt werden. (siehe Abbildung)



Diese lassen sich durch Täfelchen der Form (a) überdecken. Daher und nach b) kann insgesamt F_n in der geforderten Weise überdeckt werden.

Aufgabe 3 - 220913

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

a) Der Term ist genau dann nicht definiert, wenn $2x - 3 = 0$ ist. Dies ist äquivalent mit $x = \frac{3}{2}$. Somit ist der Term genau für alle reellen x mit $x \neq \frac{3}{2}$ definiert.

Im Fall $x > \frac{3}{2}$ gilt also $2x - 3 > 0$. Daher führt das Multiplizieren einer Ungleichung mit $2x - 3$ zu einer jeweils äquivalenten Ungleichung. Somit sind die Ungleichungen

$$0 < \frac{4x-4}{2x-3} \qquad \text{und} \qquad \frac{4x-4}{2x-3} < 1$$

äquivalent mit

$$0 < 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 < 2x - 3$$

diese mit $4 < 4x$ und $2x < 1$ und diese mit $x > 1$ und $x < \frac{1}{2}$.
Diese beiden Ungleichungen widersprechen einander. Also gibt es kein $x > \frac{3}{2}$, das die in b) geforderte Ungleichung erfüllt.

Im Fall $x < \frac{3}{2}$ gilt $2x - 3 < 0$. Daher entsteht jeweils aus einer Ungleichung durch Multiplikation mit $2x - 3$ und Umkehrung des Ungleichheitszeichens eine äquivalente Ungleichung.

Somit sind die gegebenen Ungleichungen äquivalent mit

$$0 > 4x - 4 \qquad \text{und} \qquad 4x - 4 > 2x - 3 \qquad \text{d.h.} \qquad x < 1 \qquad \text{und} \qquad x > \frac{1}{2}$$

Diese beiden Ungleichungen werden genau von allen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$ erfüllt. Für alle diese x gleich auch $x < \frac{3}{2}$.

Damit ist bewiesen: Die in b) geforderte Ungleichung gilt genau für alle reellen x mit $\frac{1}{2} < x < 1$.

Aufgabe 4 - 220914
In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, ..., A_n. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, ..., A_nS seien M_1, M_2, ..., M_n. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε.

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, ..., M_n schneide ε in B_2, B_3, ..., B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten B_1, B_2, ..., B_n, M_1, M_2, ..., M_n habe das Volumen V_K.

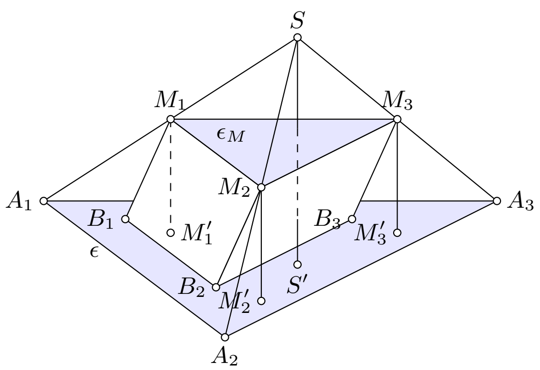
a) Beweisen Sie, dass alle Punkte M_1, M_2, .., M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!

b) Beweisen Sie, dass V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

Die Fußpunkte der Lote von $S, M_1, M_2, ..., M_n$ auf ϵ seien $S', M_1', M_2', ..., M_n'$. Für alle $i = 1,2,...,n$ gilt wegen $M_iM_i' \parallel SS'$: Die Ebene durch A_i, S, S' geht auch durch M_i und M_i'. Auf ihrer Schnittgeraden mit ϵ liegen folglich A_i, M_i' und S'. Somit gilt nach einem der Strahlensätze

$$M_iM_i' : SS' = A_iM_i : A_iS = 1 : 2$$

Also haben alle Punkte M_i denselben Abstand $M_iM_i' = \frac{1}{2}SS'$ von ϵ. Folglich liegen sie in einer gemeinsamen zu ϵ parallelen Ebene ϵ_M.



b) Hiernach schneiden die von dem gemeinsamen Punkt S ausgehenden Geraden jeweils durch A_i und M_i die beiden zueinander parallelen Ebenen ϵ und ϵ_M in zwei ähnlichen Vielecken $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$.

Für jeweils entsprechende Seiten A_iA_j, M_iM_j gilt $A_iA_j \parallel M_iM_j$, also nach einem der Strahlensätze

$$A_iA_j : M_iM_j = SA_i : SM_i = 2 : 1$$

Also stehen die Flächeninhalte F_P und F_L der Vielecke $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$ im Verhältnis

$$F_P : F_K = 4 : 1$$

Nach a) gilt für die Höhenlängen $h_P = SS'$ und $h_K = M_1M_1'$ der Pyramide bzw. des Prismas $h_K = \frac{1}{2}h_P$.

Daher und wegen der Volumenformel $V_K = F_K \cdot h_K, V_P = \frac{1}{3}F_P \cdot h_P$ für Pyramide bzw. Pyramide ergibt sich

$$V_K = \frac{1}{4}F_P \cdot \frac{1}{2}h_P = \frac{1}{8}F_P \cdot h_P = \frac{3}{8}V_P$$

Lösungen der I. Runde 1982 übernommen von [5]

6.24.2 II. Runde 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220921
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) $n-9$ ist eine Primzahl.
(2) n^2-1 ist durch 10 teilbar.

Wegen (2) ist n^2-1 gerade, also n^2 ungerade, also n ungerade, also $n-9$ gerade, also wegen (1) $n-9=2$ und damit $n=11$. Tatsächlich ist auch $11^2-1=120$ durch 10 teilbar.

Aufgabe 2 - 220922
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a=\frac{(x+y\sqrt{z})^2+(x-y\sqrt{z})^2}{2}$$
$$b=\frac{(x+y\sqrt{z})^2-(x-y\sqrt{z})^2}{2\sqrt{z}}$$
$$c=a^2-(x^2-y^2z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

Es ist

$$a=\frac{1}{2}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z+x^2-2xy\sqrt{z}+y^2z)=x^2+y^2z\in\mathbb{N}$$
$$b=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot(x^2+2xy\sqrt{z}+y^2z-x^2+2xy\sqrt{z}-y^2z)=2xy\in\mathbb{N}\qquad\text{und}$$
$$c=(a-x^2+y^2z)\cdot(a+x^2-y^2z)=2y^2z\cdot 2x^2=4x^2y^2z=b\cdot 2xyz\in\mathbb{N}$$

und es gilt offensichtlich $b|c$, $\Box$.

Aufgabe 3 - 220923
Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:
(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) es gilt $PR\perp QS$.
Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $PR<QS$, $PR=QS$, $PR>QS$ gilt!
Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt (1,0) und D im Punkt (0,1) zu liegen kommt. Dann liegt C im Punkt (1,1). Weiterhin existieren reelle Zahlen p,q,r,s, sodass P die Koordinaten (p,0), Q die Koordinaten (1,q), R die Koordinaten (r,1) und S die Koordinaten (0,s) besitzt.

Gilt dabei $p=r$, so liegt die Gerade PR parallel zur y-Achse und damit parallel zur y-Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke QS parallel zur x-Achse liegen, sodass $q=s$ gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|PR|=\sqrt{(r-p)^2+(1-0)^2}=1=\sqrt{(1-0)^2+(s-q)^2}=|QS|$$

Sonst hat die Gerade PR den Anstieg $m_1=\frac{1-0}{r-p}=\frac{1}{r-p}$ und die Gerade QS den Anstieg $m_2=\frac{s-q}{1-0}=s-q$. Nach (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, sodass sich ihre Anstiege zu (-1) multiplizieren.

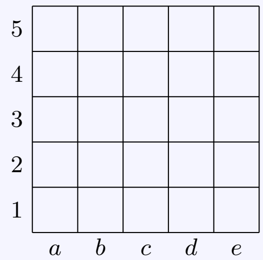
Es gilt also $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$ bzw. $s-q = -(r-p)$, also $(s-q)^2 = (r-p)^2$. Für die Längen der Strecken PR und QS erhalten wir damit wieder

$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

sodass in jedem Fall $|PR| = |QS|$ gilt.

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte P bis S auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

Aufgabe 4 - 220924



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$, zerlegt ist.
Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Wir konstruieren alle zulässigen Färbungen schrittweise durch eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Mindestens eines der vier Eckfelder a_1, e_1, e_5 oder a_5 ist markiert.
Dann können wir ggf. durch Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats erzwingen, dass das Feld a_1 markiert ist. Nun können die Felder b_1 und b_2 sowie a_2 jeweils nicht markiert sein, da sonst in Zeile 1, der Diagonalen durch a_1 bzw. der Spalte b zwei Felder markiert wären.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an der Diagonalen durch a_1 kann man erzwingen, dass die Zeilennummer des in Spalte b markierten Feldes höchstens so groß ist wie die "Spaltennummer" des in Zeile 2 markierten Feldes. Dabei sei unter der "Spaltennummer" die Zahl gemeint, die bei der Übersetzung $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$ aus der Spalte entsteht. Es ergeben sich nun für das in Spalte b markierte Feld folgende Unterfälle:

Fall 1.1: In Spalte b ist das Feld b_3 markiert.
Dann können folgende Felder alle nicht markiert sein: a_5 und e_1 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit a_1 sowie b_4 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile mit b_3. Dann sind von der Diagonalen durch a_5 aber vier Felder schon unmarkiert, sodass das fünfte Feld d_2 markiert werden muss. In der 5. Zeile dürfen aber die Felder a_5 und e_5 wegen gleicher Spalte/ Diagonale mit a_1 sowie b_5 und d_5 wegen gleicher Spalte mit b_3 bzw. d_2 nicht markiert werden, sodass nur c_5 verbleibt und damit abschließend aufgrund des einzig freien Feldes in Zeile 4 auch das Feld e_4 markiert werden muss. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_3, c_5, d_2, e_4)$$

Fall 1.2: In Spalte b ist das Feld b_4 markiert.
Da die Spaltennummer des in Zeile 2 markierten Felds nun mindestens 4 beträgt, muss es in Spalte d oder e liegen. Das Feld d_2 liegt aber wie b_4 in der Diagonalen durch a_5, sodass es unmarkiert bleiben muss. Es folgt, dass e_2 markiert ist. In Zeile 3 sind folgende Felder sicher unmarkiert: a_3 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Diagonale wie a_1 sowie b_3 und e_3 wegen gleicher Spalte mit b_4 bzw. e_2. Also muss d_3 markiert sein und damit auch c_5 als letztes freies Feld der Zeile 5. Wir erhalten die Lösung

$$(a_1, b_4, c_5, d_3, e_2)$$

Fall 1.3: In Spalte b ist das Feld b_5 markiert.
Dann muss aufgrund der Bedingung an die Spaltennummer des in Zele 2 markierten Felds dieses e_2 sein. Dies führt aber zum Widerspruch, da dann alle Felder der Diagonale durch a_5 unmarkiert sein müssen: a_5, e_1 und c_3 wegen gleicher Spalte/ Zeile/ Diagonale mit a_1 sowie b_4 wegen gleicher Spalte mit b_5 und d_2 wegen gleicher Zeile mit e_2. In diesem Unterfall gibt es also keine Lösung.

Fall 2: Alle Eckfelder sind unmarkiert.
Es kann nicht sowohl in Spalte a als auch in Spalte e die dritte Zeile markiert sein. Also kann man durch ggf. erfolgende Spiegelung an Spalte e erzwingen, dass das Feld a_3 unmarkiert ist. Da auch a_1 und a_5 (sowie e_1 und e_5) unmarkiert sind, verbleiben in Spalte a nur die beiden Felder a_2 und a_4, die markiert sein können.
Durch ggf. erfolgende Spiegelung an Zeile 3 kann man erzwingen, dass dies a_2 sein muss. Damit müssen die Felder b_2 und d_2 unmarkiert sein, sodass auf den beiden Diagonalen nur noch die Felder c_3 und d_4 für die eine bzw. b_4 und c_3 für die andere markiert werden können.

Wäre also c_3 unmarkiert, müssten sowohl d_4 als auch b_4 markiert werden, die beide in der gleichen Zeile liegen, was zu einem Widerspruch führt. Also muss c_3 markiert sein. Damit dürfen aber nun weder b_4 noch b_4 markiert sein, da sie beide auf den Diagonalen durch c_3 liegen. Weiterhin ist auch a_4 sowie c_4 ausgeschlossen, da sie in den gleichen Spalten wie a_2 und c_3 liegen, sodass e_4 in Zeile 4 das markierte Feld sein muss.

Es verbleiben in Zeilen 1 und 5 noch die freien Felder in den Spalten b und c, sodass sich zwei durch Rotation um den Mittelpunkt des Quadrats um 180° ineinander überführbare Lösungen

$$(a_2, b_1, c_3, d_5, e_4) \quad \text{und} \quad (a_2, b_5, c_3, d_1, e_4)$$

ergeben.

Tatsächlich sind diese drei Lösungen (wenn man in Fall 2 nur eine der beiden betrachtet) auch jeweils nicht durch Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen daraus ineinander überführbar: In der Lösung von Fall 2 ist kein Eckfeld markiert, in denen aus Fall 1 aber schon, sodass die Lösung aus Fall 2 nicht in eine aus Fall 1 überführt werden kann. Da bei diesen das markierte Eckfeld gleich ist, muss dieses Fixpunkt einer potentiell überführenden Abbildung sein.
Bei Drehungen kann dies aber nur der Mittelpunkt sein. Also müsste es eine Spiegelung durch dieses Eckfeld a_1 geben, die die Lösung aus Fall 1.1 in die von Fall 1.2 überführt, was nur die Spiegelung entlang der Diagonalen durch a_1 sein kann. Man sieht aber schnell, dass diese Spiegelung bei Anwendung auf die Lösung aus Fall 1.1 eine andere Lösung als die aus Fall 1.2 erzeugt, da das in der ersten Lösung markierte Feld b_3 auf das in der zweiten Lösung unmarkierte Feld c_2 abgebildet würde.

Aufgaben der II. Runde 1982 gelöst von cyrix

6.24.3 III. Runde 1982, Klasse 9

Aufgabe 1 - 220931
Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a + b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

Es ist $c > 0$, da für alle a, b gilt, dass $(a + b)^0 = 1$, also nicht dreistellig ist. Es ist wegen $a + b \leq 18$ auch $c > 1$, da sonst $z = (a + b)^c$ nicht dreistellig wäre.

Ist $c = 2$, so folgt wegen $10^2 = 100 \leq z = (a+b)^2$, dass $10 \leq a+b \leq 18$ ist. Die auftretenden Quadratzahlen lauten $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16 = 256$, $17^2 = 289$ und $18^2 = 324$. Von diesen fallen 100, 144, 169 und 196 heraus, da sie keine Ziffer $c = 2$ enthalten. Für die übrigen ist zu prüfen, ob die anderen beiden Ziffern neben der Zwei (bzw. einer der Zweien) als a und b gewählt werden können. Dies ist weder bei $121 = 11^2$ (wegen $1 + 1 \neq 2$), $256 = 16^2$ (wegen $5 + 6 \neq 16$) noch $324 = 18^2$ (wegen $3+4 \neq 18$) der Fall, wohl aber bei $17^2 = 289$ (wegen $8+9 = 17$). Also ist $z = 289$ die einzige Lösung dieses Falls.

Ist $c = 3$, so folgt wegen $4^3 = 64 < z < 1000 = 10^3$, dass $5 \leq a + b \leq 9$ ist. Die betreffenden Kubikzahlen $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$ enthalten bis auf $343 = 7^3$ keine Ziffer $c = 3$, können also keine Lösungen sein. Dagegen ist wegen $3 + 4 = 7$ tatsächlich $z = 343$ damit die einzige Lösung für diesen Fall.

Ist $c = 4$, so folgt wegen $3^4 = 81 < z < 6^4 = 1296$, dass $4 \leq a+b \leq 5$ ist. Die relevanten vierten Potenzen $4^4 = 256$ und $5^4 = 625$ enthalten keine Ziffer $c = 4$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Ist $c = 5$, so folgt wegen $2^5 = 32 < z < 4^5 = 1024$, dass $a + b = 3$ sein müsste. Jedoch enthält $3^5 = 243$ keine Ziffer $c = 5$, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Ist $c = 6$, so folgt wegen $2^6 = 64 < z < 4^6 = 4096$, dass $a + b = 3$ sein müsste, was aber wegen $3^6 = 729$, was keine Ziffer $c = 6$ enthält, zu keiner Lösung führt.

Ist $c \geq 7$, so folgt wegen $z < 1000 < 2187 = 3^7 \leq 3^c$, dass $a + b \leq 2$ sein muss. Da aber $1^c = 1 < 100 \leq z$ ist, muss immer auch $1 < a + b$, also in diesen Fällen zusammen immer $a + b = 2$ gelten. Wegen $2^{10} = 1024 > z$ muss also $c \leq 9$ sein, sodass noch die Fälle $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$ zu betrachten, die jedoch keine Lösungen liefern, weil jeder der Potenzen jeweils nicht das zugehörige c als Ziffer enthält.

Also gibt es insgesamt genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = 289 = (8 + 9)^2$ und $z_2 = 343 = (3 + 4)^3$.

Aufgabe 2 - 220932
Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, dass der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt.
Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Es seien r_1 sowie r_2 die Längen der Radien von k_1 und k_2 sowie g die Gerade M_1M_2.

Da die Berührradien senkrecht auf die Tangente stehen, sind sowohl M_1P_1 als auch M_2P_2 senkrecht auf P_1P_2 und damit zueinander parallel.

Ist $P_1P_2 \parallel M_1M_2$, so ist das Viereck $M_1M_2P_2P_1$ ein Parallelogramm, sodass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, also $r_1 = |M_1P_2| = |M_2P_2| = r_2$ und damit $S = M_2$ gilt. Insbesondere ist dann $P_2S = P_2M_2 \perp P_1P_2 \parallel M_1M_2 = M_1S$, also $P_2S \perp M_1S$.

Seien ab nun die Geraden P_1P_2 und $g = M_1M_2$ nicht parallel (was gleichbedeutend mit $r_1 \neq r_2$ ist) und X ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Da $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ ist, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|XM_1|}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|XP_1|}{|XP_2|}$.

Ist $r_1 < r_2$, so folgt $|XM_1| < |XM_2|$, sodass X auf dem von M_1 ausgehenden Strahl auf g liegt, der M_2 nicht enthält. Insbesondere ist $|XM_2| = |XM_1| + |M_1M_2| = |XM_1| + r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$.

Für $r_1 < r_2$ ist auch $|XP_1| < |XP_2|$, sodass P_1 zwischen X und P_2 liegt. Damit ist

$$|P_1P_2| = |XP_2| - |XP_1| = |XP_2| \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad \text{also} \quad |P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Ist dagegen $r_1 > r_2$, so ist $|XM_1| > |XM_2|$ und M_2 liegt zwischen X und M_1, sodass sich $|XM_2| = |XM_1| - |M_1M_2| = |XM_1| - r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} - 1$ ergibt.
Für $r_2 > r_1$ ist auch $|XP_1| > |XP_2|$, sodass P_2 zwischen X und P_1 liegt. Damit ist $|P_1P_2| = |XP_1| - |XP_2| = |XP_2| \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)$, also genauso wie im Fall $r_1 < r_2$ wieder

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

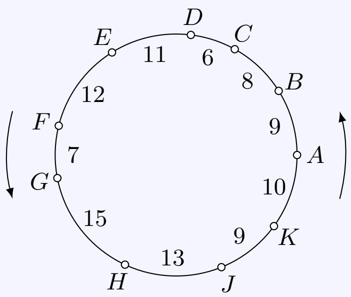
Das Dreieck $\triangle XM_2P_2$ ist rechtwinklig in P_2, da der Berührungsradius M_2P_2 senkrecht auf der Tangente XP_2 steht. Den Flächeninhalt F dieses Dreiecks kann man damit einerseits als das halbe Produkt der Längen seiner Katheten bestimmen, sodass $2F = |XP_2| \cdot |P_2M_2| = |XP_2| \cdot r_2$ gilt.
Andererseits kann man den Flächeninhalt dieses Dreiecks auch als halbes Produkt der Länge der Hypotenuse $|XM_2|$ und der Länge h der zugehörigen Höhe von P_2 auf XM_2 bestimmen, sodass auch $2F = |XM_2| \cdot h$ gilt. Insbesondere ist also $1 = \frac{2F}{2F} = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2| \cdot h}$ und damit

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|} = h$$

Sei H der Fußpunkt der Höhe von P_2 auf XM_2. Dann ist also $|P_2P_1| = |P_2H|$. Weiterhin ist $XM_2 \perp HP_2$, also gilt wegen nun $XM_2 = M_1H$ nun $\angle M_1HP_2 = 90° = \angle P_2P_1M_1$.
Und schließlich gilt $|P_2M_1| = |P_2M_1|$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle M_1P_1P_2$ und $\triangle M_1HP_2$ in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen. Da zusätzlich noch die größere der beiden Seiten (es ist M_1P_2 die Hypotenuse in beiden rechtwinkligen Dreiecken) dem (rechten) Winkel gegenüberliegt, sind diese beiden Dreiecke damit kongruent und insbesondere sind auch die dritten Seiten gleich, sodass $|M_1P_1| = |M_1H| = r_1$ gilt und H auch auf dem Kreis k_1 liegt.
Und da H nach Konstruktion innerhalb von k_2 liegt, gilt schließlich $H = S$, sodass $P_2S = P_2H \perp HM_1 = SM_1$, also $P_2S \perp SM_1$ gilt, $\square$.

Aufgabe 3 - 220933

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich.
Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, dass ein beliebiges der zehn Autos die 1000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1000 km dadurch zurücklegen kann, dass es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)
Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Äquivalent zur Aufgabenstellung können wir annehmen, dass jedes Auto mit einem Kraftstoffvorrat von 0 startet, dafür aber an jeder Station ein Kanister mit der angegebenen Menge an Litern Kraftstoff zur Verfügung steht. (Dies hebt die Asymmetrie der Startstation im Vergleich zu allen anderen Stationen auf.)
Ein Auto kann also genau dann den Rundkurs schaffen, wenn das Volumen seines aktuell zur Verfügung stehenden Kraftstoffs nie negativ wird, also an jeder Station (nach Auffüllen) mindestens so groß ist, wie bis zur nächsten Station benötigt wird.

Erreicht man eine der Stationen B, C, D, F, H oder K, so kann man immer mindestens eine Station weiterfahren, da man dort mindestens so viel Kraftstoff erhält, wie man bis zur nächsten Station benötigt.

An den Stationen A, E, G und J ist dies nicht der Fall, sodass die vier dort startenden Autos nicht einmal bis zur nächsten Station kommen können.

Hat man also Station B erreicht, so kann man bis E durchfahren und hat auf dieser Teilstrecke in B, C und D insgesamt 29 Liter Kraftstoff auftanken können, während man von B bis E nur 25 Liter verbraucht hat, sodass man nun 4 Liter mehr zur Verfügung hat als zum Zeitpunkt, indem man in B war.
(Startete man in B, C oder D, sind es nun also höchstens 4 Liter, weil man nicht notwendigerweise den Überschuss an noch nicht besuchten Stationen, da sie "vor" dem eigenen Start lagen, erhalten hat.)
Da aber an Station E nur 5 zusätzliche Liter zu erhalten sind, aber 12 benötigt werden, erreichen die in B, C oder D gestarteten Autos die Station F nicht, während "vor" B gestartete dies nur tun, wenn sie in B noch mindestens einen Kraftstoffvorrat von 3 Litern hatten.

Dazu musste man in A noch mindestens $3 + 9 - 8 = 4$ Liter (vor Nachtanken) und in K mindestens $4 + 10 - 14 = 0$ Liter (vor Nachtanken) an Kraftstoffvorrat haben. Dies bedeutet, dass jedes Auto, dass bis K kommt, dann bis Station F durchfahren kann, und danach (vor Nachtanken) genauso viel Kraftstoff noch besitzt, wie vor dem Nachtanken in K. (Da nur noch die Autos F, H und K den Rundkurs ggf. absolvieren können, starten auch alle spätestens bei H und sind frühestens bei F am Ziel.)

Wer F erreicht hat (und noch nicht am Ziel ist), erhält man zusätzliche 13 Liter, benötigt aber bis G nur 7, sodass man auf jeden Fall noch mindestens 6 Liter Kraftstoffvorrat hat. Mit den zusätzlichen 9 Litern bei G kann man also in jedem Fall die Strecke bis H absolvieren und hat danach (vor Nachtanken) einen so hohen Kraftstoffvorrat wie in F (vor Nachtanken).

Analog gilt auch, dass für jedes der drei verbleibenden Autos, dass aus dem Erreichen von H (sofern dies noch nicht das Ziel war) das Erreichen von K folgt, da man in H zusätzliche 16 Liter erhält, bis J aber nur 13 benötigt, also in J noch mindestens 3 Liter übrig hat, die mit den dort erhaltenen 6 gerade für die benötigten 9 nach K ausreichen.

Damit gilt, dass genau die drei Autos an den Stationen F, H und K den Rundkurs absolvieren können, wobei ihnen an diesen drei Stationen auch immer gerade der Sprit ausgeht und sie sich mit dem letzten Tropfen in dieses (Zwischen-)Ziel schleppen.

Aufgabe 4 - 220934
Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.
Wer hat recht?

Dirk hat recht:
Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$ bei der Teileung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt der Rest der Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer den Rest $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$ oder $1+1 = 2$, nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form $4k+3$ sich nicht also Summe zweiter Quadratzahlen darstellen lassen.

Aufgabe 5 - 220935
Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, dass für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $PS^2 + QS^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!
Hinweis:
1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B. PS, PQ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Es seien ϵ_1 und ϵ_2 die Ebenen, die die beiden Großkreise beinhalten. Da diese verschieden sind, sind auch die Ebenen verschieden, schneiden sich also in einer Geraden. Da beide Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten, ist dieser auch in der Schnittgeraden enthalten, sodass P und Q sowohl auf der Kugeloberfläche als auch einer Geraden durch den Kugelmittelpunkt liegen. Sie bilden also einen Durchmesser der Kugel und es gilt $|PQ| = 2$.

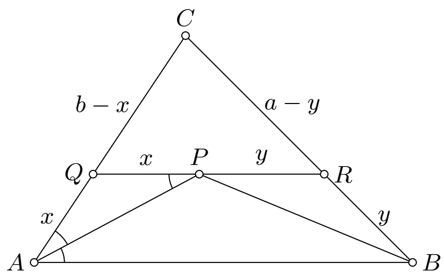
Ist $S = P$ oder $S = Q$, so vereinfacht sich die Summe $|PS|^2 + |QS|^2$ zu $|PQ|^2 + 0^2 = 2^2 = 4$.

Sei ab nun S verschieden von P und Q ein Punkt auf der Kugeloberfläche. Da PQ ein Durchmesser der Kugel ist, liegt S also nicht auf der Geraden durch P und Q, sodass genau eine Ebene ϵ existiert, auf der die drei Punkte liegen. Mit P und Q liegt auch ihr Mittelpunkt, was der Kugelmittelpunkt ist, in dieser Ebene, sodass der Schnitt von ϵ mit der Kugeloberfläche ein Großkreis ist, insbesondere also ein Kreis mit Durchmesser PQ, auf dem S liegt.

Nach dem Satz von Thales ist damit das Dreieck $\triangle PQS$ rechtwinklig in S und nach dem Satz von Pythagoras gilt $|PS|^2 + |QS^2| = |PQ|^2 = 2^2 = 4$, sodass diese Summe unabhängig von der Lage immer den Wert 4 annimmt, $\Box$.

Aufgaben 1-5 der III. Runde 1982 gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 220936
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge QR in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!



Es sei $x = PQ$, $y = PR$. Dann gilt nach Voraussetzung $\angle PAQ = \angle BAP = \angle QPA$ (Wechselwinkel an den Parallelen AB, PQ), also ist das Dreieck APQ gleichschenklig mit $AQ = PQ = x$. Entsprechend gilt $BR = PR = y$.

Wegen $QR \parallel AB$ folgt aus dem Strahlensatz

$$CA : CB = QA : RB, \qquad b : a = x : y, \qquad by = ax \tag{1}$$

$$CA : CQ = AB : AR, \qquad b : (b - x) = c : (x + y), \qquad bx + by = bc - cx \tag{2}$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt $bx + ax = bc - cx$ und

$$x = \frac{bc}{a + b + c}$$

hieraus und aus (1) folgt $y = \frac{ax}{b} = \frac{ac}{a+b+c}$. Damit ergibt sich

$$QR = x + y = \frac{(a + b)c}{a + b + c}$$

Lösung übernommen von [5]

6.25 XXIII. Olympiade 1983

6.25.1 I. Runde 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230911
Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leq a \leq 10$ und $5 \leq b \leq 10$ gibt es folgende "Fingerregel":

> Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$.

Beweisen Sie, dass diese "Fingerregel" für alle genannten a und b gilt!

Nach der angegebenen Regel wird aus a und b die Zahl

$$z = ((a-5)+(b+5)) \cdot 10 + (10-a)(10-b)$$

berechnet. Man erhält

$$z = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab = ab$$

Damit ist die Gültigkeit der "Fingerregel" für die genannten a und b bewiesen.

Aufgabe 2 - 230912
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

Die Bedingung (1) wird genau dann erfüllt, wenn

$$x = 10a + b, \qquad y = 10b + a \tag{3}$$

mit zwei natürlichen Zahlen a,b gilt, für die $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$ (4) gilt. Hiermit wird (2) genau dann erfüllt, wenn a und b außer (4) auch

$$10a + b + 10b + a = 121 \qquad \text{oder, gleichwertig hiermit} \qquad 11 \cdot (a+b) = 121 \quad , \quad a+b = 11 \tag{5}$$

erfüllen.

Da (4) und (5) genau durch die in der folgenden Tabelle angegebenen natürlichen Zahlen a,b erfüllt werden, folgt nach (3), dass genau die anschließend angegebenen Zahlen x,y die geforderten Eigenschaften haben.

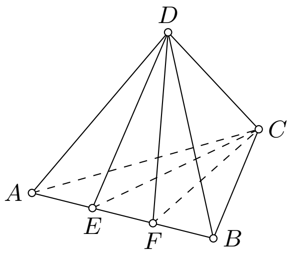
a	b	x	y	a	b	x	y
2	9	29	92	3	8	38	83
4	7	47	74	5	6	56	65
6	5	65	56	7	4	74	47
8	3	83	38	9	2	92	29

Aufgabe 3 - 230913
Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T_1', T_2', T_3' bezeichnen lassen, dass $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ und $T_3 \cong T_3'$ gilt.

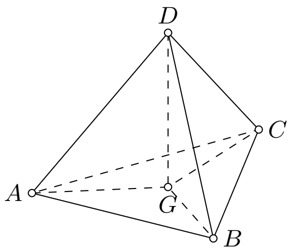
a) Zwei Möglichkeiten sind beispielsweise die folgenden:



- Die Kante AB eines regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ werde durch E und F in drei gleichlange Teilstrecken zerlegt (Abbildung 1). Dann wird $ABCD$ in die Tetraeder

$$AECD, \quad EFCD, \quad FBCD \tag{1}$$

zerlegt, und diese sind volumengleich; denn die Grundflächen AEC, EFC, FBC sind flächeninhaltsgleich (gleichlange Grundlinien AE, EF, FB, gemeinsame Höhe; Lot von C auf AB), und die zugehörige Höhe ist gemeinsam (Lot von D auf die Ebene durch A, B, C).



- Es sei G der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC (Abbildung 2).

Dann wird $ABCD$ in

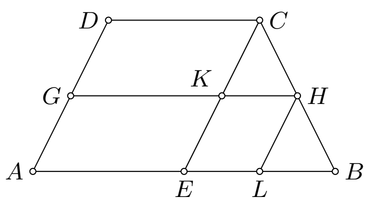
$$ABGD, \quad BCGD, \quad CAGD \tag{2}$$

zerlegt, und auch diese Tetraeder sind volumengleich (übereinstimmende Höhe GD zu den Grundflächen ABG, BCG, CAG mit gleichlangen Grundlinien $AB = BC = CA = a$ und gleichlangen Höhe $\frac{a}{6}\sqrt{3}$, wegen der Übereinstimmung von Höhe und Seitenhalbierender ein Drittel der Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$).

b) Im Tetraeder $EFCD$ aus (1) gilt $EF < a$, $EC = ED = FC = FD < a$, es hat also nur eine Kante der Länge a. In allen Tetraedern aus (2) kommen dagegen drei kanten der Länge a vor. Daher ist $EFCD$ zu keinem Tetraeder aus (2) kongruent. Daraus folgt die Verschiedenheit der Zerlegungen (1), (2).

Aufgabe 4 - 230914
Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke GH gibt und dass ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!



(I) Wenn eine zu AB parallele Strecke GH (G auf AD, H auf BC) das Trapez in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt, so folgt:

Es sei E der Punkt auf AB mit $AE = DC$. Die Strecken EC und GH schneiden sich in einem Punkt K.

Im Viereck $AEKG$ gilt somit außer $AE \parallel GH$ auch $AG \parallel EK$, folglich ist es ebenfalls ein Parallelogramm. Hiernach gilt $EB = a - c$ und $KH = s - c$.

Die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ seien h bzw. F, die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $GHCD$ seien h' bzw. F'. Dann sind h und h' auch Höhenlängen der Dreiecke EBC bzw. KHC; diesen sind wegen $EB \parallel KH$ zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\frac{h}{h'} = \frac{EB}{KH} = \frac{a-c}{s-c}$$
$$\frac{F}{F'} = \frac{(a+c)h}{(a+c)h'} = \frac{a^2-c^2}{s^2-c^2} \qquad (1)$$

Wegen $F = 2F'$ gilt somit

$$a^2 - c^2 = 2(s^2 - c^2) \qquad (2)$$
$$a^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2)$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} \qquad (3)$$

Wegen $c < \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} < a$ liegt der Punkt L auf AB mit $AL = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)}$ zwischen E und B. Für ihn ist $ALHG$ wegen $AL \parallel GH$ und $AL = GH$ ein Parallelogramm. Daher kann nur die durch $LH \parallel AD$ (und H auf BC) sowie $GH \parallel AB$ (und G auf AD) bestimmte Strecke GH die geforderten Eigenschaft haben.

(II) Für diese Strecke ist $ALHG$ ein Parallelogramm, also gilt für ihre Länge (3) und folglich (2). Ferner kann man für sie wie in (I) wieder (1) herleiten.

Daraus folgt $F = 2F'$; also hat die Strecke GH die geforderte Eigenschaft.

Mit (I) und (II) ist bewiesen, dass es genau eine Strecke GH mit der geforderten Eigenschaft gibt. Ihre Länge ist in (3) angegeben; wie verlangt, eindeutig durch a und c bestimmt.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen von [5]

6.25.2 II. Runde 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230921
Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

Sind a und b die Ziffern einer zweistelligen Zahl x, so gilt

$$1 \leq a \leq 9; \quad 0 \leq b \leq 9; \qquad \text{und} \qquad x = 10a + b \tag{1}$$

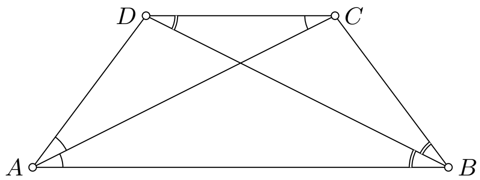
Durch Vertauschen der Ziffern entsteht daraus $y = 10b + a$. Die Summe

$$x + y = 11a + 11b = 11(a + b)$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn der Primfaktor 11 und weitere Primfaktoren jeweils in gerader Anzahl in $a + b$ enthalten sind. Wegen (1), also $1 \leq a + b \leq 18$, kann $a + b$ außer dem Primfaktor 11 keinen weiteren Primfaktor enthalten. Also ist $x + y$ genau dann eine Quadratzahl, wenn $a + b = 11$ gilt. Das trifft unter den Bedingungen (1) genau für die Wertetabelle $(a; b)$ der folgenden Tabelle zu. Daher haben genau die hierzu angegebenen Zahlen x die verlangte Eigenschaft.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3	2
x	29	38	45	56	65	74	83	92

Aufgabe 2 - 230922
Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt
(1) Es gilt $AB \parallel DC$.
(2) Es gilt $AB > DC$.
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.
(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ bzw. $\angle ABC$.
Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!



Es gilt $\angle BAC = \angle DCA$ und $\angle ABD = \angle CD$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus (4) und (1) folgt daher

$$\angle DAC = \angle DCA \qquad \text{bzw.} \qquad \angle DBC = \angle CDB \tag{5}$$

Aus (5) folgt: $AD = DC = CB$ (6).
Wegen (2) ist $ABCD$ kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C, also gilt $\angle ADC = \angle DCB = 110°$ (7).
Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180°, d.h., es gilt $\angle DAB = \angle ABC = 70°$ (8).
Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

Aufgabe 3 - 230923

$$\begin{array}{ccccc} & \square & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In das Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, dass jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.
Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgabe möglich sind!

I. Wenn eine Eintragung die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:
(1) Die vorderste Ziffer der gesuchten Summe kann, da die 0 dafür nicht zugelassen ist, nur die 1 sein; denn die Summe zweier dreistelliger Zahlen ist kleine als 2000.

Die 9 kann in der Summe nicht auftreten, weil die Summe zweier einstelliger Zahlen unter den gegebenen Bedingungen nicht 19 werden kann, während andererseits sowohl bei der Addition in der Einer- als auch bei der in der Zehner- und der in der Hunderterstelle ein Übertrag, also ein Additionsergebnis ≥ 10 gefordert ist.
Die 9 kann in den Summanden nicht als Zehner oder Hunderter auftreten, weil dann unter Berücksichtigung des Übertrags (der nur 1 sein kann) die Zehner bzw. Hunderterziffer des anderen Summanden wieder in der Summe auftreten würde.

(2) Daraus folgt, dass die 9 in einem der Summanden als Einer stehen muss, o.B.d.A. stehe sie also im ersten Summanden.

(3) Die 0 darf in keinem Summanden vorkommen, da sonst kein Übertrag auftreten würde. Als Zwischenergebnis halten wir fest: Im zweiten Summanden kann als Einer nicht stehen:
0 wegen (3), 1 wegen (1), 9 wegen (2), 2, denn sonst erhält man in der Summe eine 1.
Wegen (2) und (3) kann die Summe nicht auf 0 enden.

(4) Damit im Zehner oder Hunderter der Summe ein 0 auftritt, müssen zwei Ziffern (bei der Addition der Zehner- oder der Hunderterspalten) als Summe 9 ergeben. Damit verbleiben höchstens die folgenden Möglichkeiten:
Die in der letzten Spalte angegebenen Zahlen ergeben sich jeweils aus den einzigen Möglichkeiten, die drei verbleibenden Ziffern so zu kombinieren, dass die Summe von zweien um 9 größer ist als die dritte. (In den Fällen * und ** gibt es keine solchen Möglichkeiten.)

Einer des zweiten Summanden	Einer in der Summe	restliche Ziffern	mögliche Summe 9 aus zwei Summanden	möglich dritte Zeile des Schemas
3	2	0,4,5,6,7,8	4+5	1062 oder 1602
4	3	0,2,5,6,7,8	2+7	1053 oder 1503
5	4	0,2,3,6,7,8	2+7 oder 3+6	*
6	5	0,2,3,4,7,8	2+7	1035 oder 1305
7	6	0,2,3,4,5,8	4+5	1026 oder 1206
8	7	0,2,3,4,5,6	4+5 oder 3+6	**

Damit ist gezeigt, dass nur die acht in der letzten Spalte der Tabelle angegebenen Zahlen als dritte Zeile (Summe) auftreten können.

II. Sie können (unter Einhaltung aller Bedingungen der Aufgabenstellung) auftreten, wie z.B. die folgenden Eintragungen zeigen:

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 4 & 9 \\ + & 8 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 4 & 7 & 9 \\ + & 5 & 8 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 8 & 2 & 9 \\ + & 6 & 7 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 2 & 9 & 9 \\ + & 7 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 2 & 9 \\ + & 8 & 7 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 9 \\ + & 7 & 8 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 9 \\ + & 8 & 5 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 9 \\ + & 5 & 8 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Somit gibt es genau die acht in der letzten Spalte angegebenen Ergebnisse.

Aufgabe 4 - 230924
Beweisen Sie:
Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

Indirekter Beweis:
Angenommen, $\sqrt{p}$ wäre eine rationale Zahl. Dann gäbe es natürliche Zahlen m und n mit $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$.
Dabei könnte erreicht werden, dass m und n teilerfremd sind. Daraus würde $pn^2 = m^2$ folgen, die Primzahl p müsste also m teilen, d.h., es würde $m = px$ mit einer natürlichen Zahl x gelten.
Daraus ergäbe sich $pn^2 = p^2 \cdot x^2$, also $n^2 = p \cdot x^2$, und daher müsste p auch n teilen, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von n und m.
Also war die Annahme, dass $\sqrt{p}$ rational ist, falsch, d.h., $\sqrt{p}$ ist keine rationale Zahl.

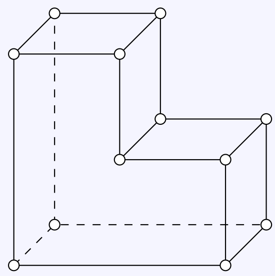
Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

6.25.3 III. Runde 1983, Klasse 9

Aufgabe 1 - 230931
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
(1) x, y und z sind Primzahlen.
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.
(3) Es gilt $x < y$.
(4) Es gilt $x + y = z$.

Wegen (1) und (4) ist $z \geq 2 + 2 > 2$, also ungerade. Damit ist genau eine der beiden Summanden x bzw. y gerade, also wegen (1) gleich 2, sodass wegen (3) $x = 2$ gilt, da dies die kleinste Primzahl ist. Damit sind y und z Primzahlzwillinge.
Mehrstellige Primzahlzwillinge besitzen aber die Endziffern (9 und 1), (1 und 3) oder (7 und 9), da die Endziffer 5 zur Teilbarkeit durch 5 und damit (und wegen der Mehrstelligkeit) zum Widerspruch zu (1) führen würde. Also ist $y < z$ einstellig und es ergeben sich die Lösungstripel (2,3,5) und (2,5,7).

Aufgabe 2 - 230932
In der Abbildung ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.
Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!



Da das Volumen von K 3 ist, folgt direkt, dass nur für $n = 3k$ ein Würfel der Kantenlänge n gefüllt werden kann. Ein Würfel der Kantenlänge $3k$ zerfällt in k^3 Würfel der Kantenlänge 3. Daher reicht es für $n = 3$ eine Lösung anzugeben. Eine Möglichkeit ist

1	1	3
1	2	3
2	2	4

5	6	3
6	6	7
8	4	4

5	5	7
8	9	7
8	9	9

wobei hier die drei Ebenen angegeben sind und eine Ziffer einen K-Block beschreibt.

Aufgabe 3 - 230933

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ + & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array}$$

In dem Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, dass jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, dass bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Wir nehmen indirekt an, es gäbe eine solche Eintragung mit genau zwei Überträgen.

Die Tausenderstelle der Summe s kann nur durch einen Übertrag entstanden sein. Da nur zwei Summanden s_1 und s_2 addiert werden, kann wegen $9 + 9 + 1 = 19 < 20$ ein Übertrag nur 1 lauten. Insbesondere ist die Tausenderstelle von s also eine 1.

Wir denken uns nun zur Vereinfachung der Notation die beiden Summanden um eine Tausenderstelle 0 ergänzt, sodass alle drei Zahlen die gleiche Stellenanzahl besitzen.

Es sei q_1 die Quersumme des ersten Summanden, q_2 die des zweiten und q die der Summe. Dann gilt offenbar $q_1+q_2+q=45$, da jede der Ziffern 1 bis 9 insgesamt genau einmal (und die 0 nun genau dreimal) in diesen Zahlen vorkommt.

Weiterhin entsteht eine Ziffer in s durch die Addition der beiden entsprechenden Ziffern in s_1 und s_2, sofern kein Übertrag in dieser oder der vorhergehenden Stelle auftritt. Entstand ein Übertrag in der vorhergehenden Stelle, erhöht sich der Wert der gerade betrachteten Ziffer von s gegenüber der Summe der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2 um den Übertrag von 1. Entsteht (ggf. dadurch) nun in der betrachteten Stelle ein Übertrag, ist die Ziffer in s um genau 10 kleiner als die Summe (und die nächste Ziffer in s erhöht sich um den Übertrag von 1).

Summiert man nun alle diese Summen der entsprechenden Ziffern von s_1 und s_2, erhält man wieder q_1+q_2, da jede Ziffer von s_1 sowie s_2 dabei genau einmal betrachtet wird. Andererseits ergibt dies nach der eben erfolgten Beobachtung $q_3+k\cdot(10-1)$, wobei k die Anzahl der Überträge ist, da dann an genau k Stellen die Ziffer in s durch einen Übertrag um 1 erhöht und auch an genau k Stellen um genau 10 gegenüber dem Wert der Summe der entsprechenden Ziffern (+ ggf. Übertrag aus vorheriger Stelle) verringert wurde.

Laut Aufgabenstellung soll $k=2$ gelten, sodass man $q_1+q_2=q_3+18$ erhält. Setzt man dies in $q_1+q_2+q_3=45$ ein, erhält man $2q_3+18=45$ bzw. den Widerspruch $q_3=\frac{27}{2}\notin\mathbb{Z}$. Also kann es keine solche Eintragung mit genau 2 Überträgen geben, $\Box$.

Aufgabe 4 - 230934
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die gilt:

$$-5\leq\frac{4x-3}{2x+1}<6$$

Es ist $\frac{4x-3}{2x+1}=2-\frac{5}{2x+1}$, die Ungleichungskette also äquivalent zu $-7<-\frac{5}{2x+1}<4$ bzw. $-4<\frac{5}{2x+1}<7$ sowie $-\frac{4}{5}<\frac{1}{2x+1}<\frac{7}{5}$.

Wir unterscheiden danach, ob $\frac{1}{2x+1}$ positiv oder negativ ist. (Verschwinden kann es aufgrund des positiven Zählers nicht.) Dabei ist $x\neq-\frac{1}{2}$, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Der Bruch ist dabei genau dann positiv, wenn $x>-\frac{1}{2}$ ist.

1. Fall: $x>-\frac{1}{2}$: Dann ist die erste Ungleichung automatisch erfüllt und die zweite nach Reziprokenbildung äquivalent zu $2x+1>\frac{5}{7}$, also $x>-\frac{1}{7}$. Wegen $x>-\frac{1}{7}>-\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.

2. Fall: $x<-\frac{1}{2}$: Dann ist die zweite Ungleichung automatisch erfüllt und die erste nach Reziprokenbildung äquivalent zu $-\frac{5}{4}>2x+1$, also $x<-\frac{9}{8}$. Wegen $x<-\frac{9}{8}<-\frac{1}{2}$ erfüllen all jene x (und keine weiteren, die die Fallannahme erfüllen) beide Ungleichungen.
Zusammenfassend wird also die Ungleichungskette der Aufgabenstellung genau von jenen reellen Zahlen x erfüllt, die kleiner als $-\frac{9}{8}$ oder größer als $-\frac{1}{7}$ sind.

Aufgabe 5 - 230935
In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

Die Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle ABC$ sind aufgrund der Parallelität von A_1B_1 und AB zueinander ähnlich, da ihre entsprechenden Innenwinkel bei A_1 und A bzw. B_1 und B jeweils Stufenwinkel, also insbesondere gleich groß, sind. Damit gibt es eine reelle Zahl $k>0$, sodass $\triangle A_1B_1C$ aus $\triangle ABC$ durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum C hervorgeht.

Sei h die Länge der Höhe von C auf AB und h_1 die von C auf A_1B_1. Insbesondere gilt dann $h_1=k\cdot h$ und $|A_1B_1|=k\cdot|AB|$, also $F_1=k^2\cdot F_0$, d.h. $k=\sqrt{\frac{F_1}{F_0}}$.

Die Diagonale A_1B_1 zerlegt das Viereck A_1PB_1C in die zwei Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle A_1B_1P$, sodass sich sein Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte dieser beiden Teildreiecke ergibt.

Es sei h_2 die Länge der Höhe von P auf A_1B_1 und F der Fußpunkt von C auf AB sowie F_1 der Fußpunkt der Höhe von C auf A_1B_1. Da $A_1B_1 \parallel AB$ gilt, liegt F_1 auf CF und es gilt

$$h = |CF| = |CF_1| + |F_1F| = h_1 + |F_1F|$$

Wiederum wegen $A_1B_1 \parallel AB$ ist $h_2 = |F_1F|$, da F_1 auch der Fußpunkt der Höhe von F auf A_1B_1 ist. Insbesondere ist also $h_2 = h - h_1 = (1-k) \cdot h$.

Für das Dreieck $\triangle A_1B_1P$ ergibt sich also ein Flächeninhalt von

$$F_P := \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |AB| \cdot (1-k) \cdot h = F_0 \cdot (k - k^2)$$

und damit für den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C

$$F = F_P + F_1 = F_0 \cdot (k - k^2 + k^2) = F_0 \cdot k = F_0 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_0}} = \sqrt{F_1 \cdot F_0}.$$

Aufgabe 6 - 230936
Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Welcher der drei Schüler hat recht?
Hinweis: Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1', D_2 \cong D_2', D_3 \cong D_3'$ gilt.

Y hat recht: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen, wie im Folgenden bewiesen wird.

Es sei D das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ mit Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CA| = a$. Dann muss jeder dieser drei Punkte A, B, C auch Eckpunkt mindestens eines der drei Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sein.

Für jeden weiteren Eckpunkt P eines dieser drei Teildreiecke gilt, dass er auch Eckpunkt mindestens eines weiteren Teildreiecks sein muss. Also kann es höchstens $\frac{3 \cdot 3 - 3}{2} = 3$ verschiedene weitere Eckpunkte der Teildreiecke geben.

Nehmen wir an, es gäbe drei und seien dies P_1, P_2 und P_3. Sie müssten dann Eckpunkte von je genau zwei der Teildreiecke sein, sodass A, B und C Eckpunkt von nur jeweils genau einem der Teildreiecke sind. Es sei A o.B.d.A. Eckpunkt von D_1. Da A nicht Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks ist, muss der gesamte Winkel $\angle BAC$ durch D_1 abgedeckt werden. Also müssen die beiden anderen Eckpunkte von D_1 auf den Kanten AB und AC liegen.

Wäre auch B Eckpunkt von D_1, so müsste dessen dritter Eckpunkt analog auch auf BC liegen, also auf dem Schnittpunkt von AC und BC, sodass $D_1 = \triangle ABC = D$ folgen würde, was ein Widerspruch ist. Also liegt auf jedem Teildreieck genau einer der Eckpunkt von D und zwei der Punkte P_1, P_2, P_3, welche auf den vom entsprechenden Eckpunkt von D ausgehenden Kanten von D liegen müssen. Damit verbliebe aber in der Zerlegung das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, welches nicht durch die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 abgedeckt wird, sodass wieder ein Widerspruch entsteht.

Also können wir schlussfolgern, dass es höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte gibt und damit auch mindestens eine der Seiten des Dreiecks D nicht durch einen zusätzlichen Eckpunkt der Teildreiecke zerlegt wird. Wir führen im Folgenden eine Fallunterscheidung danach durch, wie viele der Kanten von D durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke zerlegt werden:

Fall 1: Keine der Kanten AB, BC, AC wird durch einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. Dann seien o.B.d.A. A, B Eckpunkte von D_1; B, C von D_2 und C, A von D_3. Da es nur höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte geben kann, müssen die dritten Eckpunkte von mindestens zwei der drei Teildreiecke zusammenfallen. O.B.d.A. haben D_1 und D_2 den gemeinsamen dritten Eckpunkt P. Dann jedoch muss auch der dritte Eckpunkt von D_3 gleich P sein, da dieser auch Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks sein muss.

Damit die drei Teildreiecke alle flächengleich sind, müssen sie, da sie D zerlegen, jeweils ein Drittel von dessen Flächeninhalt besitzen. Da D_1 mit AB auch eine Seitenkante der Länge a besitzt, muss P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h$ liegen, wobei h die Länge der Höhe in D ist. Nach dem Strahlensatz und der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt S eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, liegt auch S auf dieser Parallele. Also muss P auf der Parallelen zu AB durch S liegen. Analog muss er wegen D_2 auch auf der Parallelen zu BC durch S liegen, sodass $P = S$ folgt. Abschließend ist dann aber auch die Höhe von $P = S$ auf AC in D_3 genau ein Drittel mal so lang wie die Höhe in D, sodass auch D_3 flächengleich zu D_1 und D_2 ist und diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch die Verbindung des Schwerpunkts S von D mit seinen drei Eckpunkten entsteht. Die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sind paarweise kongruent.

Fall 2: Genau eine der Kanten von D, o.B.d.A. sei dies BC, wird durch mindestens einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. O.B.d.A. sei damit die Kante AB vollständig in D_1 und AC vollständig in D_3 enthalten und seien deren dritte Eckpunkte mit P_1 bzw. P_3 bezeichnet. Mindestens einer von diesen beiden Punkte, o.B.d.A. P_1, muss auf BC liegen. Wir unterscheiden zwei Unterfälle, je nach dem, wo P_3 liegt.

Fall 2.1: Auch P_3 liegt auf BC. Da die Höhen von A auf die Gerade $BC = BP_1 = P_2C$ identisch sind mit der Höhe von A auf BC in D, besitzen D_1 und D_3 genau dann jeweils ein Drittel des Flächeninhalts von D, wenn $|BP_1| = |P_3C| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gilt. Dann ist jedoch auch $|P_1P_3| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$, sodass auch das entstehende Dreieck $D_2 = \triangle AP_1P_3$ flächengleich zu D_1 und D_3 ist, sowie diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Drittelung einer Seitenkante von D und Verbindung der dort entstehenden zwei Zwischenpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D entsteht. Alle drei Teildreiecke besitzen eine Seite mit Länge $\frac{1}{3}a$, zwei dieser drei Teildreiecke (D_1 und D_3 in der obigen Bezeichnung) sind zueinander kongruent und besitzen als eine zweite Kantenlänge a, während das dritte gleichschenklig ist.

Fall 2.2: Der dritte Eckpunkt P_3 von D_3 liegt nicht auf BC und damit echt im Innern des Dreiecks D. Wie im Fall 2.1 folgt, dass $|BP_1| = \frac{1}{3}|BC|$ gelten muss. Das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ muss nun in zwei flächengleiche Teildreiecke D_2 und D_3 zerlegt werden. Dies ist nur möglich, indem es durch eine Seitenhalbierende zerlegt wird. Damit muss P_3 Mittelpunkt einer der Seiten von $\triangle AP_1C$ sein. Da aber P_3 nach Fallannahme weder auf AC noch BC liegt, muss P_3 der Mittelpunkt von AP_1 sein.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Einzeichnen eines Punkts P_1, der eine Seitenkante CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, der Verbindung dieses Punkts mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt A von D und dem Einzeichnen der Verbindung des Mittelpunkts P_3 von AP_1 mit dem dritten Eckpunkt C von D entsteht. Genau zwei der drei Teildreiecke besitzen eine Seite der Länge a, wobei genau eine davon eine zweite Kante der Länge $\frac{1}{3}a$ besitzt.

Fall 3: Genau zwei der drei Kanten von D werden durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke geteilt, seien dies o.B.d.A. P_1 auf BC und P_3 auf AC, sodass AB ungeteilt verbleibt und vollständig o.B.d.A. in D_1 enthalten ist. Dessen dritter Eckpunkt muss dann P_1 oder P_3 sein, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass P_1 der dritte Eckpunkt von D_1 ist. Dann folgt analog Fall 2.1, dass $|BP_1| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gelten muss und analog Fall 2.2, dass P_3 der Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks $\triangle AP_1C$, hier also von AC ist. Man überprüft leicht, dass alle entstehenden Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Wir erhalten hier also die eindeutige Zerlegung, die entsteht, wenn analog zu Fall 2.1 erst ein Punkt P_1, der eine Seite CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, sowie die Verbindung zum gegenüberliegenden Eckpunkt A von D eingezeichnet wird, während dann das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ entlang der Seitenhalbierenden von AC halbiert wird. Es entstehen drei paarweise inkongruente Teildreiecke, wobei genau eines eine Seite mit Kantenlänge a und genau zwei je eine Seite mit Kantenlänge $\frac{1}{2}a$ besitzen.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass keine weiteren Zerlegungen möglich sind. Auch liefern keine zwei dieser (Unter-)Fälle gleiche Zerlegungen, da niemals alle drei Paare von Teildreiecken zweier verschiedener solcher Zerlegungen untereinander kongruent sind. Also gibt es genau diese vier verschiedenen Zerlegungen, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1983 gelöst von cyrix

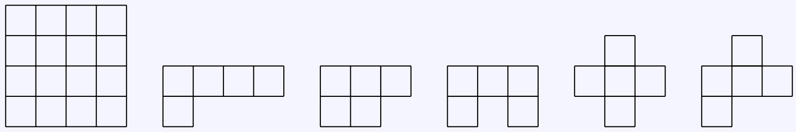
6.26 XXIV. Olympiade 1984

6.26.1 I. Runde 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240911

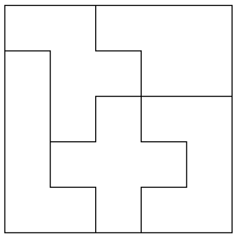
a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, dass jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und dass dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$-Feldes möglich ist!



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

a) Ein Beispiel einer gesuchten Zerlegung zeigt die Abbildung.



b) (I) Wenn für eine natürliche Zahl $n > 0$ eine solche Zerlegung des quadratischen Feldes möglich ist und wenn dabei k die Anzahl der entstehenden Teilstücke ist, so besteht das Feld aus $5k$ Einheitsquadraten, also gilt $n^2 = 5k$. Daher ist n^2 durch 5 teilbar und folglich, weil 5 Primzahl ist, auch n durch 5 teilbar.

(II) Wenn n durch 5 teilbar ist, so kann man die Seitenlänge des quadratischen Feldes in Teilstrecken zerlegen, deren jede eine Länge von 5 Einheitsstrecken hat; somit kann man dass das quadratische Feld in quadratische Teilfelder einer Seitenlänge von jeweils 5 Einheitsstrecken zerlegen.

Jedes dieser Teilfelder lässt sich nach (a) auf die geforderte Weise zerlegen; damit existiert auch für das gesamte Feld eine derartige Zerlegung.

Mit (I) und (I) ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen $n > 0$ sind genau alle diejenigen, die durch 5 teilbar sind.

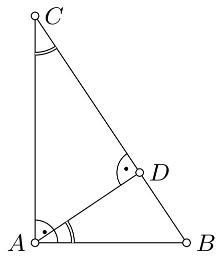
Aufgabe 2 - 240912
Beweisen Sie, dass die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

Wegen der Primfaktorzerlegung $91 = 7 \cdot 13$ ist eine Darstellung der Zahl 91 als Produkt von möglichst vielen ganzzahligen Faktoren nur so zu erhalten, dass man erstens zwei Faktoren der Beträge 7 bzw. 13 (also einen Faktor 7 oder -7 und einen zweiten Faktor 13 oder -13) nimmt und dann noch die beiden einzigen den Betrag einer Zahl nicht ändernden Faktoren 1 und -1 hinzufügt.

Also enthält jede Darstellung von 91 als Produkt aus verschiedenen ganzen Zahlen höchstens vier Faktoren.

Aufgabe 3 - 240913
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D.

Beweisen Sie, dass dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!



Nach Voraussetzung gilt

$$\angle ADB = \angle CDA = 90° \qquad (1)$$

und unter Berücksichtigung des Dreiecksinnenwinkelsatzes

$$\angle BAD = 90° - \angle CAD = \angle ACD$$

Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ und damit

$$AB : BD = CA : CD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot CD = AC \cdot AD \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Aufgabe 4 - 240914
Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und $\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest:

Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also $1 < \frac{2}{x-10}$;
für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$;
für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$.

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.
Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$.
Petra behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Marions Behauptung ist wahr. Beweis:

(I) Wenn für eine reelle Zahl x die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt, dann folgt $x - 10 = 2$, also $x = 12$.

(II) Für $x = 12$ gilt $\frac{2}{x-10} = \frac{2}{2} = 1$.

Norberts Behauptung ist falsch, da es unter den von Norbert genannten Zahlen x mit $x < 12$ auch solche gibt, für die $1 < \frac{2}{x-10}$ nicht gilt.

Zum Beweis gebügt es, ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel ist $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt $x < 12$, und für sie gilt $\frac{2}{x-10} = -\frac{2}{10}$, also $1 > \frac{2}{x-10}$.

Petras Behauptung ist falsch, da es außer den von Petra genannten Zahlen x mit $x > 12$ noch weitere gibt, für die $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt. Auch hierfür genügt ein Beispiel zum Beweis. Geeignet ist ebenfalls $x = 0$; denn diese Zahl erfüllt nicht $x > 12$, und für sie gilt $1 > \frac{2}{x-10}$.

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen von [5]

6.26.2 II. Runde 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240921
Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.
Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden lässt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:
Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d.h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w.z.b.w.

Bertolds Behauptung ist falsch.
Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, dass jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 240922
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die gilt:

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlussweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$, dies mit $5x < 20$ und dies mit $x < 4$.

b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent mit $x > 20 - 4x$, dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d.h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung $x > 5$ äquivalent ist.
Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit a) und b) bewiesen:
Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $x < 4$ oder $x > 5$ gilt.

Aufgabe 3 - 240923
Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte $BE = FC$ und $BE : EF = 41 : 11$.
Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.
Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

Aus $AB = AC$, $\angle ABE = \angle DCF$ und $BE = FC$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\angle BAE = \angle CDF$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\angle DAS = \angle ADS$.
Wegen $\angle FES = \angle DAS$ und $\angle EFS = \angle ADS$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\angle FES = \angle EFS$.

a) Liegen die Punkte B, E, F, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $AS > AE$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $AS > AB = AD$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60° = \angle ASD = \angle ESF$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.

b) Liegen die Punkte B, F, E, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt:

Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\angle FES = \angle BEA = 60°$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt($\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $AE = E'E = 2 \cdot BE$.
Zerlegt man BE in 41 gleich lange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $AB = BC = BF + FC = BF + BE$ die Länge von 71 Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müsste dann $AB^2 + BE^2 = AE^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten.
Es ist aber $71^2 + 41^2 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 6724$.
Dieser Widerspruch beweist, dass $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

Aufgabe 4 - 240924
Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Es gilt

$$z = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b) \tag{1}$$

was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.
Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene Zahlen -1, 1, -2, 2, 3) folgte $(n - n') \cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lösungen der II. Runde 1984 übernommen aus [5]

6.26.3 III. Runde 1984, Klasse 9

Aufgabe 1 - 240931
Beweisen Sie, dass es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!
(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Nehmen wir an, es gäbe eine solche Zahl z und bezeichnen ihre erste Ziffer mit a sowie ihre zweite mit b. Dann ist $z = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101 \cdot (10a + b)$.
Da $z > 0$ eine Quadratzahl ist, aber 101 eine Primzahl, die z teilt, muss auch $101^2 > 10000$ die Zahl z teilen, was ein Widerspruch zur Vierstelligkeit von z ist. Demnach gibt es keine vierstellige Quadratzahl z, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, $\square$.

Aufgabe 2 - 240932
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Die zu g parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie g, also -1. Darüber hinaus stehen die Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg 1 und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung $y_r = x$, sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten (1,1) bzw. (-1,-1) befinden. (Man rechnet leicht nach, dass diese den Abstand $\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf k liegen.)
Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t_1} = -(x-1) + 1 = -x + 2 \qquad \text{und} \qquad y_{t_2} = -(x+1) - 1 = -x - 2$$

Aufgabe 3 - 240933
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.
a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!
b) Ermitteln Sie den Abstand MN zwischen M und N!
c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand XY zwischen X und Y die Ungleichung $XY \geq MN$ erfüllt!

a) Es ist CM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ und steht damit senkrecht auf g. Analog ist DM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$, die damit auch senkrecht auf g ist. Da beide Geraden durch M verlaufen, liegen sie in der eindeutig bestimmten Ebene ϵ, welche zu g senkrecht ist und durch M verläuft. Damit liegen auch C und D, also auch ihre Verbindungsgerade und damit auch N auf ϵ. Da alle Geraden auf ϵ, die g schneiden, senkrecht zu dieser verlaufen, gilt dies auch für die Gerade MN, die g in M schneidet.

Da im regulären Tetraeder keine Eckpunkte oder Seitenkanten voneinander ausgezeichnet sind, folgt aus Symmetriegründen völlig analog auch $MN \perp h$.

b) Wie gerade nachgewiesen, ist das Dreieck $\triangle MND$ rechtwinklig in N. Dabei ist $|ND| = \frac{1}{2}a$, da N der Mittelpunkt der Kante CD mit Länge a ist. Weiterhin ist $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, da dies die Länge einer Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$ mit Kantenlänge a ist. Also gilt nach dem Satz des Pythagoras $|MN|^2 = |MD|^2 - |ND|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$, also $|MN| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) Die Geraden g und h sind windschief, denn lägen sie in einer Ebene, so auch die Punkte A, B, C und D, die auf ihnen liegen, sodass diese keinen Tetraeder bilden würden. Damit gibt es die zwei parallelen Ebenen ϕ_g und ϕ_h die g bzw. h beinhalten und jeweils parallel zur anderen Geraden sind. Nach Aufgabenteil b) haben diese beiden Ebenen wegen Teil a) den Abstand $|MN|$.

Sei für einen beliebigen Punkt X auf ϕ_g der Bildpunkt bezüglich Projektion auf ϕ_h mit P bezeichne. Dann ist also $|XP| = |MN|$. Ist Y nun ein beliebiger Punkt auf ϕ_h, so kann entweder $Y = P$ gelten, sodass dann $|XY| = |XP| = |MN|$ gilt, oder aber es ist $Y \neq P$.
Dann ist das Dreieck $\triangle XYP$ rechtwinklig in P und es gilt $|XY|^2 = |XP|^2 + |YP|^2$, also $|XY| > |XP| = |MN|$, sodass in jedem Fall, insbesondere auch für X auf g und Y auf h die Ungleichung $|XY| \geq |MN|$ erfüllt ist, $\square$.

Aufgabe 4 - 240934
Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.
Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."
Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"
a) Beweise Ankes Aussage!
b) Beantworte Bernds Frage!

a) Die Aussage gilt für jede natürliche Zahl $n > 1$, da $n^2 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist. (Dies stimmt offensichtlich für $n = 1$; und wenn es für n wahr ist, dann wegen

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + (2n+1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

auch für $n+1$, also für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.)

b) Solche Quadratzahlen $n^2 > 1$ kann es nicht geben, da die Summe von $2n$ paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen mindestens so groß ist wie die Summe der kleinsten $2n$ positiven ganzen Zahlen, also

$$0 + 1 + \cdots + (2n-1) = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = n \cdot (2n-1) > n^2$$

für $2n - 1 > n$, also $n > 1$.

Aufgabe 5 - 240935
Beweisen Sie, dass für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Einerseits ist $a < c$ und $b < c$ und andererseits gilt nach dem Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Also gilt

$$a^5 + b^5 = a^3 \cdot a^2 + b^3 \cdot b^2 < c^3 \cdot a^2 + c^3 \cdot b^2 = c^3 \cdot (a^2 + b^2) = c^3 \cdot c^2 = c^5, \square$$

Aufgabe 6 - 240936
Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

Es sei B' einer dieser Berührungspunkte einer Tangente durch P mit einem Kreis durch A und B. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz, dass $|PB'|^2 = |PA| \cdot |PB|$ gilt. Insbesondere ist also $|PB'|$ unabhängig von der Wahl des konkreten Punktes B', sodass jeder Berührpunkt auf dem Kreis um P mit Radius $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$ liegen muss, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1984 gelöst von cyrix

6.27 XXV. Olympiade 1985

6.27.1 I. Runde 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250911
Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die
a) durch 2,
b) durch 3,
c) durch 4,
d) durch 5,
e) durch 6
teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

a) Durch 2 sind von den genannten vierstelligen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf eine geradzahlige Ziffer, also auf 8 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden, also gibt es genau 6 derartige durch 2 teilbare Zahlen, nämlich 1598, 1958, 5198, 5918, 9158 und 9518.

b, e) Da die Quersumme von 1985 nicht durch 3 teilbar ist, und das auch für alle durch Umordnung zu bildenden Zahlen gilt, ist keine der Zahlen durch 3 und damit auch keine durch 7 teilbar.

c) Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die von den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Aus den Ziffern 1, 5, 8 und 9 kann aber keine solche zweistellige Zahl gebildet werden; denn sie müsste gerade sein, also auf 8 enden, und die Zahlen 18, 58 und 98 sind nicht durch 4 teilbar. Folglich gibt es keine derartigen durch 4 teilbaren Zahlen.

d) Durch 5 sind von diesen Zahlen genau diejenigen teilbar, die auf 5 enden. Mit den restlichen 3 Ziffern kann man 6 verschiedene Zahlen bilden. Also sind genau 6 derartige Zahlen durch 5 teilbar, nämlich 1895, 1985, 8195, 8915, 9185 und 9815.

Aufgabe 2 - 250912
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a{,}b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a{,}b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

I Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Es gilt

$$a < b \tag{1}$$

II Wenn ein Paar (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die Ungleichung (1) erfüllt, so folgt wegen der Ganzzahligkeit von a und b, dass

$$a + 1 \leq b \tag{2}$$

gilt. ferner ist $a \geq 0$, nach (2) also $b \geq 1$; daher gilt für die einstellige Zahlen b

$$1 \leq b \leq 9 \qquad \text{also} \qquad a + \frac{1}{10} \leq a + \frac{b}{10} \leq a + \frac{9}{10}$$

und somit erst recht

$$a < a + \frac{b}{10} < a + 1 \tag{3}$$

Da $a+\frac{b}{10}$ die mit $\overline{a{,}b}$ bezeichnete Zahl ist, folgt aus (3) und (2) die geforderte Eigenschaft $a < \overline{a{,}b} < b$.

III Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau diejenigen Paare (a,b) einstelliger natürlicher Zahlen die verlangte Eigenschaft haben, die (1) erfüllen.

Ist $a = 0$, so wird (1) genau für die neun Zahlen $b = 1,...,9$ erfüllt;

Ist $a = 1$, so wird (1) genau für die acht Zahlen $b = 2,...,9$ erfüllt;

...

Ist $a = 8$, so wird (1) genau für die eine Zahl $b = 9$ erfüllt;

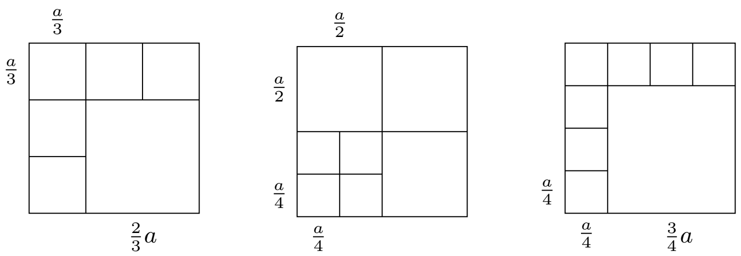
Ist $a = 9$, so wird (1) genau für keine einstellige natürliche Zahl b erfüllt.

Folglich haben genau $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ Paare die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 3 - 250913
Man beweise:

Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Eine Zerlegung einer Quadratfläche in 6, 7 bzw. 8 Teilquadratflächen ist möglich, wie die Abbildung zeigt.



Da man durch Weiterzerlegen einer Teilquadratfläche in 4 kongruente neue Teilquadratflächen die Anzahl der Teilquadratflächen jeweils um 3 erhöhen kann, erhält man so fortlaufend die Zerlegung einer Quadratfläche in n Teilquadratflächen mit

$$n = 6 + 3 = 9, \qquad n = 7 + 3 = 10, \qquad n = 8 + 3 = 11, \qquad n = 9 + 3 = 12, \qquad \text{usw.}$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 250914
Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!

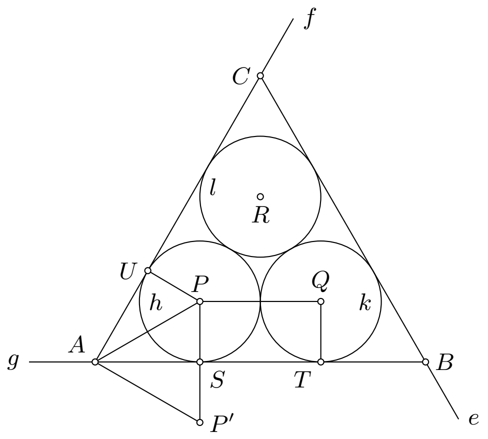
Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Die Kreise seien h, k, l ihre Mittelpunkte P, Q, R. Die genannte gemeinsame Tangente an k,l bzw. an l,h bzw. an h,k sein e bzw. f bzw. g. Der Schnittpunkt von f mit g bzw. von g mit e bzw. von e mit f sei A bzw. B bzw. C. Das Dreieck mit dem zu berechnenden Flächeninhalt ist dann $\triangle ABC$.

Das Lot von P bzw. Q auf g hat als Fußpunkt S bzw. T den Berührungspunkt von g mit h bzw. k, das Lot von P auf f hat las Fußpunkt U den Berührungspunkt von f mit h (siehe Abbildung).

Daher ist $STQP$ ein Rechteck mit $PS = QT = r$, $PQ = ST = 2r$, und die Dreiecke APS, APU sind nach dem Kongruenzsatz ssw (wobei der Winkel $\angle ASP$ bzw. $\angle AUP$ als rechter Winkel der größten Seite gegenüberliegt) zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, woraus $\angle PAS = \angle PAU$ folgt.

Da die Summe dieser beiden Winkelgrößen die Innenwinkelgröße $\angle BAC = 60°$ des gleichseitigen Dreiecks ABC ergibt, folgt $\angle PAS = \angle PAU = 30°$ und damit nach dem Innenwinkelsatz $\angle APS = 60°$.



Somit ist für den bei der Spiegelung an g aus P entstehenden Bildpunkt P' das Dreieck APP' gleichseitig. Die zur Seite PP' gehörende Höhe AS ist zugleich Seitenhalbierende; d.h., es folgt $AP = PP' = 2PS = 2r$ und damit (nach dem Satz des Pythagoras oder nach der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck) $AS = r\sqrt{3}$. Entsprechend erhält man $BT = r\sqrt{3}$.

Daher hat das Dreieck ABC die Seitenlänge

$$a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1+\sqrt{3})$$

und somit nach der Flächeninhaltsformel für gleichseitige Dreiecke der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 4r^2(1+\sqrt{3})^2 = r^2 \cdot (4\sqrt{3}+6)$$

Beispiel für die Verwendung von Näherungswerten:

Es gilt auf drei Dezimalen nach dem Komma genau $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Daraus folgt $1{,}7315 < \sqrt{3} < 1{,}7325$ und hieraus $12{,}296 < 4\sqrt{3}+6 < 12{,}93$. Somit ist $F \approx 12{,}93r^2$, und der hier angegebene Zahlenwert 12,93 ist auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau.

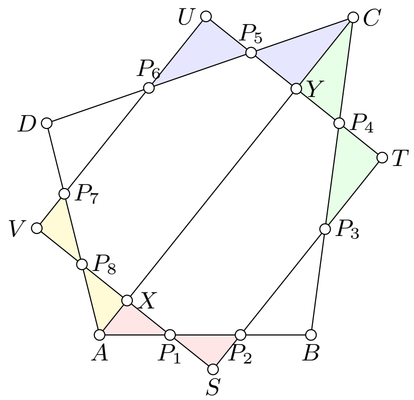
Lösungen der I. Runde 1985 übernommen von [5]

6.27.2 II. Runde 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250921
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) von natürlichen Zahlen a,b,c, für die $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85$ gilt!

Die Primfaktorzerlegung von $19 \cdot 85 = 1615$ lautet $1615 = 5 \cdot 17 \cdot 19$. Für die zu ermittelnden Tripel gibt es daher genau die folgenden Möglichkeiten.
1. Genau die beiden Zahlen a und b sind gleich 1. Das führt auf das Tripel $(1,1,1615)$.
2. Genau die eine Zahl a ist gleich 1. Dann enthält b mindestens einen der Primfaktoren 5, 17, 19. Enthielte b mehr als einen dieser Faktoren, so wäre $b \geq 5 \cdot 17 = 85$. Andererseits enthielte c dann nur noch höchstens einen dieser Faktoren, also wäre $c \leq 19$. Das widerspricht der Bedingung $b \leq c$.
Also enthält b genau einen der Primfaktoren 5, 17, 19 und c enthält die beiden anderen. Das führt auf die Tripel $(1,5,323)$, $(1,17,135)$, $(1,19,85)$.
3. Keine der drei Zahlen a,b,c ist gleich 1, führt auf das Tripel $(5,17,19)$.
Somit sind genau die fünf in 1., 2., 3. angegebenen Tripel die gesuchten.

Aufgabe 2 - 250922
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.
Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.
Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?



Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, ..., P_8$ und Schnittpunkte S,T,U,V sowie die Schnittpunkte X,Y von AC mit VS bzw. TU seien wie im Bild bezeichnet.
Nach Voraussetzung gilt: $BP_2 : BA = BP_3 : BC = 1:3$.
Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus $\angle P_1AX = \angle P_1P_2S$.
Da ferner $\angle AP_1X = \angle P_2P_2S$ (Scheitelwinkel) und $AP_1 = P_1P_2$ (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz wsw die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.
Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U. Die Viereckflächen $ABCD$ und $STUV$ haben die Achteckfläche $P_1P_2...P_9$ gemeinsam.
Vergleicht man die außerhalb dieser Achteckfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, dass der Inhalt des Vierecks $ABCD$ um die Summe der Inhalte P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks $STUV$.

Aufgabe 3 - 250923
Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y}$$

Aus $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ folgt durch die Multiplikation mit der positiven Zahl by: $ay < bx \quad (1)$.
Addiert man $a \cdot b$ folgt $a(b+y) < b(a+x)$. Dividiert man dies durch die positive Zahl $b(b+y)$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} \tag{2}$$

Addiert man zu (1) xy ergibt sich durch Umformung

$$ay + xy < bx + xy$$
$$(a+x)y < x(b+y)$$
$$\frac{a+x}{b+x} < \frac{x}{y} \tag{3}$$

Mit (2) und (3) ist die geforderte Beziehung hergeleitet.

Aufgabe 4 - 250924
Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gilt!

Angenommen, es gäbe derartige Zahlen a und b. Aus dieser Annahme folgte dann

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 \qquad ; \qquad 2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$$

(1) Im Fall $a \neq 0, b \neq 0$ folgt weiter

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre. Daher scheidet dieser Fall aus.
(2) Im Fall $b = 0$ folgte aus $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ der Widerspruch, dass $\sqrt{3} = a$ eine rationale Zahl wäre. Also ist auch dieser Fall nicht möglich.
(3)Im fall $a = 0$ folgt $3 = 2b^2$ mit einer rationalen Zahl b, also mit $b = \frac{m}{n}$, wobei m und n natürliche Zahlen wären. Das führte auf

$$3 = 2 \cdot \frac{m^2}{n^2} \qquad ; \qquad 3n^2 = 2m^2$$

Da in der Primfaktorzerlegung der Quadratzahlen n^2 und m^2 jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt, ergäbe sich der Widerspruch, dass der Primfaktor 3 auf der linken Seite in ungerader Anzahl vorkommen müsste, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl.
Die Annahme hat somit in jedem Falle auf einen Widerspruch geführt; damit ist bewiesen, dass es keine rationalen Zahlen a, b mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ gibt.

Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]

6.27.3 III. Runde 1985, Klasse 9

Aufgabe 1 - 250931
a) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!
(1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden.
(Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Es sei die Kantenlänge der Quadratfläche F gleich a.

a) Wir geben zuerst Lösungen für $n = 6$, $n = 7$ und $n = 8$ an:
Für $n = 6$ zerlege man das Quadrat F in 3×3 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{3} \cdot a$ und fasse davon 2×2 Teilquadrate wieder zu einem der Kantenlänge $\frac{2}{3}$ zusammen. Dieses sei mit T_1 bezeichnet, die übrigen $9 - 4 = 5$ Teilquadrate mit T_2 bis T_6.

Für $n = 7$ zerlege man das Quadrat F in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{2} \cdot a$ und bezeichne drei davon mit T_1 bis T_3. Das vierte Teilquadrat zerlege man in 2×2 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und bezeichne diese mit T_4 bis T_7.

Für $n = 8$ zerlege man das Quadrat F in 4×4 Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{4} \cdot a$ und fasse davon 3×3 wieder zu einem Quadrat der Kantenlänge $\frac{3}{4} \cdot a$ zusammen, welches mit T_1 bezeichnet sei. Die übrigen $16 - 9 = 7$ Teilquadrate seien mit T_2 bis T_8 bezeichnet.

Aus einer Zerlegung von F in n Teilquadrate $T_1, \ldots, T_n$ erhält man leicht eine in $n + 3$ Teilquadrate, indem man das Teilquadrat T_n weiter unterteilt in 2×2 Teilquadrate halber Kantenlänge. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Teilquadrate um $4 - 1 = 3$.
Also lässt sich für jedes $n \geq 6 =: N$ die Quadratfläche F in genau n Teilquadrate zerlegen, $\square$.

b) Es bleibt noch zu zeigen, dass keine Unterteilung in genau 5 Teilquadrate möglich ist, damit $N = 6$ der kleinste Wert ist, der die Aussage (1) der Aufgabenstellung erfüllt.

Nehmen wir also indirekt an, dass es eine Unterteilung von F in genau 5 Teilquadrate gäbe. Dann können keine zwei Eckpunkte von F im gleichen Teilquadrat liegen, da dieses sonst allein ganz F überdecken (oder darüber hinausragen) würde. Tatsächlich müssen alle Kanten von Teilquadraten senkrecht bzw. parallel zu Kanten von F verlaufen, da sich an allen Eckpunkten, also insbesondere denen von F, die Innenwinkel der dort zusammentreffenden Quadrate nur auf Vielfache von $90°$ addieren können.
Es seien T_1 bis T_4 die Teilquadrate, die je einen der vier Eckpunkte von F enthalten. Deren Kantenlängen seien mit a_1 bis a_4 gekennzeichnet. Dann kann nur höchstens eines dieser Teilquadrate eine größere Kantenlänge als $\frac{1}{2} \cdot a$ besitzen, da sich sonst die beiden entsprechenden Teilquadrate mit größerer Kantenlänge überschneiden würden.

Gilt, dass an drei Kanten von F die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart sind, also z.B. $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = a$, so auch $a_4 + a_1 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) = 1$, d.h., auch an der vierten Kante von F sind die beiden zugehörigen Teilquadrate aus T_1 bis T_4 direkt benachbart. Dann folgt jedoch $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$, sodass für alle vier Kantenlängen gilt, dass sie kleiner oder gleich $\frac{1}{2} \cdot a$ sein müssen, da sonst wenigstens zwei größer als dieser Wert wären, was gerade ausgeschlossen wurde. Wäre aber auch nur eine dieser Kantenlängen echt kleiner als $\frac{1}{2} \cdot a$, würden dann die Gleichungen nicht mehr gelten, sodass $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2} \cdot a$ folgt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass genau 5 Teilquadrate existieren, denn nun decken T_1 bis T_4 die Fläche F schon vollständig ab.

Also gibt es mindestens zwei Kanten von F, an denen die entsprechenden Teilquadrate aus T_1 bis T_4 nicht direkt benachbart sind, sodass zwischen ihnen bisher nicht abgedeckte Bereiche der Quadratfläche F existieren. Diese müsste aber T_5 gemeinsam überdecken, sodass T_5 Punkte von zwei verschiedenen Kanten von F beinhalten müsste. Liegen diese Kanten einander in F gegenüber, ergibt sich sofort ein Widerspruch, da T_5 die Kantenlänge a haben müsste, und so allein F überdecken würde. Aber auch wenn die beiden Kanten von F, auf denen Punkte liegen, die T_5 beinhalten soll, nicht parallel sind, sondern sich in einem Eckpunkt von F schneiden, folgt schnell der Widerspruch, da dann auch T_5 diesen Eckpunkt enthalten müsste, sich damit aber mit dem Teilquadrat aus T_1 bis T_4 überschneiden würde, was diesen Eckpunkt von F bereits enthält.

Demnach führt jeder Fall zum Widerspruch und es gibt keine Zerlegung von F in genau 5 Teilquadrate, sodass $N = 6$ der minimal mögliche Wert ist, der die Aussage (1) erfüllt.

Aufgabe 2 - 250932
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:
Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist $z = (a + b)^2$.

Es ist nach Aufgabenstellung $z = 100a+b = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ bzw. $a^2+(2b-100)a+b(b-1) = 0$. Für $b \geq 26$ ist aber

$$0 = a^2 + (2b-100)a + b(b-1) \geq a^2 - 48a + 26 \cdot 25 = (a-24)^2 - 24^2 + 650 = (a-24) + 650 - 576 > 0$$

was ein Widerspruch darstellt. Also muss $b \leq 25$ gelten.

Es ist b die aus den letzten zwei Stellen einer Quadratzahl gebildeten Zahl. Wegen $(10n+m)^2 = 100n^2 + 20nm + m^2$ und $0^2 = 00$, $1^2 = 01$, $2^2 = 04$, $3^2 = 09$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ und $9^2 = 81$ ist die vorletzte Stelle einer Quadratzahl nur dann ungerade, wenn die letzte Stelle eine 6 ist. Ist die vorletzte Stelle gerade, verbleiben als mögliche Endziffern 0, 1, 4 und 5.

Damit schränken sich die Möglichkeiten für b auf die Elemente der Menge {16, 20, 21, 24, 25} ein. Diese werden nun der Reihe nach untersucht:
Wäre $b = 16$, so müsste $z = 100a + 16 = (a+16)^2 = a^2 + 32a + 256$ gelten, was äquivalent ist zu $a^2-68a+240 = 0$ bzw. $a = 34\pm\sqrt{34^2-240}$. Es ist $34^2-240 = (30+4)^2-240 = 900+240+16-240 = 916$, also $30 < \sqrt{34^2-240} < 31$, sodass es keine Lösung mit $b = 16$ gibt.

Wäre $b = 20$, so wäre $z = 100a + 20$ zwar durch 5, aber nicht 25 teilbar, was ein Widerspruch zu $z = (a+b)^2$ ist.

Für $b = 21$ müsste $100a + 21 = (a+21)^2 = a^2 + 42a + 441$, also $a^2 - 58a + 420 = 0$ und damit $a = 29 \pm \sqrt{29^2-420} = 29 \pm 841 - 420 = 29 \pm \sqrt{421}$ gelten, was wegen $20 < \sqrt{421} < 21$ wieder keine Lösung besitzt.

Wäre $b = 24$, dann $100a+24 = (a+24)^2 = a^2+48a+576$ und $a^2-52a+552 = 0$, also $a = 26\pm\sqrt{26^2-552}$. Es ist $26^2 - 552 = 900 - 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 - 552 = 900 - 240 + 16 - 552 = 124$, also $11 < \sqrt{26^2-552} < 12$, sodass es auch in diesem Fall keine Lösung gibt.

Abschließend sei $b = 25$. Dann ist $100a+25 = (a+25)^2 = a^2+50a+625$ und damit $a^2-50a+600 = 0$, was die Lösungen $25 \pm \sqrt{25^2-600} = 25 \pm \sqrt{25} = 25 \pm 5$, d.h. $a_1 = 20$ und $a_2 = 30$ besitzt.
Tatsächlich ist $(20+25)^2 = 45^2 = 2025$ und $(30+25)^2 = 55^2 = 3025$, sodass $(a,b) \in \{(20, 25), (30, 25)\}$ die gesuchte Lösungsmenge ist.

Aufgabe 3 - 250933
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)!
Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

Im regulären Tetraeder mit Kantenlänge a sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge a. Die Seitenhalbierende s in einem solchen Dreieck verläuft durch den Mittelpunkt der entsprechenden Seite und steht orthogonal auf dieser, besitzt also die Länge $s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und die Seitenfläche einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt dessen Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodass die Entfernung eines Eckpunkts zum Schwerpunkt der entsprechenden Seitenfläche genau $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ beträgt.
In einem regulären Tetraeder steht die Schwerelinie (d.h. Verbindungsstrecke eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) senkrecht auf der entsprechenden Seitenfläche, sodass diese eine Länge von $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Damit hat der Tetraeder ein Volumen von

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4 \cdot 3} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Der Umkugelmittelpunkt es regulären Tetraeders fällt mit dessen Schwerpunkt zusammen. Dieser teilt die Schwerelinien im Verhältnis 3:1, sodass sich als Umkugelradius r der Wert $r = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{4} a$ ergibt. Damit hat die Umkugel ein Volumen von

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 6\sqrt{6}}{3 \cdot 4^3} \cdot \pi \cdot a^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \pi \cdot a^3$$

sodass

$$V_K : V_T = \frac{\sqrt{6} \cdot 12}{8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot \pi \approx \frac{1{,}7 \cdot 3}{2} \cdot \pi = 2{,}55 \cdot \pi \approx 2{,}55 \cdot 3{,}14 = 8{,}007 \approx 8$$

ist.

Aufgabe 4 - 250934
Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, dass dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.
(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, dass jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und dass keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.
Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Die Eckpunkte des Würfels seien mit A bis H bezeichnet, wobei A, B, C und D in dieser Reihenfolge die Eckpunkte einer Fläche und E, F, G, H die Eckpunkte der dazu parallelen Seitenfläche seien, wobei A mit E, B mit F, C mit G und D mit H durch eine Kante verbunden seien. Weiterhin identifizieren wir einen Eckpunkt mit der Zahl, die an diesem Eckpunkt steht, schreiben also z.B. $A = 1$, wenn an Eckpunkt A die Zahl 1 steht. (Dies können wir, da nach Bedingung (1) jede der acht Zahlen an genau einem der Eckpunkte steht.)

Summiert man für alle sechs Seitenflächen jeweils deren Eckpunkt-Zahlen und bildet die Summe dieser sechs Summen, so erhält man eine Summe, die jede Eckpunktzahl genau dreimal enthält, nämlich je einmal pro Seitenfläche. Ist S die nach Bedingung (2) für alle Seitenfläche gleiche Summe ihrer Eckpunktzahlen, so gilt also $6 \cdot s = 3 \cdot (A + B + \dots + H) = 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 3 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 3 \cdot 36 = 108$, also $S = \frac{108}{6} = 18$.

O.B.d.A. können wir durch ggf. erfolgende Drehung $A = 1$ annehmen.
Dann kann B nicht 2 sein, denn sonst müssten sowohl $C + D$ als auch $E + F$ den Wert $18 - 2 - 1 = 15$ haben. Diese Summe kann aber mit den Zahlen 1 bis 8 nur auf die eindeutige Weise $7+8$ erhalten werden, sodass – im Widerspruch zu (1) – $\{C,D\} = \{E,F\}$ folgen würde. Analog schließt man auch $D = 2$ sowie $E = 2$ aus: 1 und 2 können nicht benachbart sein.

Fall 1: Die 2 in einer Seitenfläche mit 1. Dies geht nur, wenn sie in dieser Seitenfläche der 1 diagonal gegenüberliegt. Also können wir hier durch ggf. erfolgende Drehung o.B.d.A. $C = 2$ annehmen. Es muss dann $B + D = 18 - 2 - 1 = 15 = 8 + 7$, also durch ggf. erfolgende Spiegelung o.B.d.A. $B = 8$ und $D = 7$ gelten. Damit $A + B + E + F = 18$ gilt, muss $E + F = 9$ und analog $G + H = 9$ gelten, was sich jeweils nur durch $4 + 5 = 9$ bzw. $3 + 6 = 9$ mit noch nicht verwendeten Zahlen realisieren lässt. Weiterhin ist auch $B + C + F + G = 18$, also $F + G = 18 - 8 - 2 = 8$, was sich nur als $3 + 5$ noch realisieren lässt.

Fall 1.1: Es ist $F = 3$. Dann folgt $G = 5$, $E = 6$ und $H = 4$. Man überprüft schnell, dass diese Verteilung beide Bedingungen erfüllt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 6, 7 und 8.)

Fall 1.2: Es ist $F = 5$. Dann folgt $G = 3$, $E = 4$ und $H = 6$. Auch hier überprüft man schnell, dass es sich um eine Lösung handelt. (Hier hat die 1 die Nachbarn 4, 7 und 8.)

Fall 2: Die 2 liegt nicht in einer gemeinsamen Seitenfläche mit 1. Dann verbleibt aber nur noch als einziger Eckpunkt G, der damit gleich 2 sein muss. Damit folgt, dass 1 und 3 in einer gemeinsamen Seitenfläche liegen müssen, o.B.d.A. nach ggf. erfolgender Drehung um die Raumdiagonale AG also $3 \in \{B,C,D\}$.

Fall 2.1: Es ist $B = 3$ oder $D = 3$. Nach ggf. erfolgender Spiegelung an der Ebene, die durch A, C, E und G verläuft, können wir dann sogar o.B.d.A. $B = 3$ fordern. Es folgt aber wie oben, dass $C+D = E+F = 14$ gelten muss, was sich aber mit verschiedenen Summanden aus $\{1,\dots,8\}$ nur mit $14 = 8 + 6$ realisieren lässt, sodass wieder im Widerspruch zu (1) $\{E,F\} = \{C,D\}$ folgen würde. Also gibt es in diesem Fall keine gültige Verteilung.

Fall 2.2: Es ist $C = 3$. Dann muss analog zum Fall 1 $B + D = 14$, also nach ggf. erfolgender Spiegelung $B = 8$ und $D = 6$ gelten. Wegen $A + B + E + F = 18$ folgt $E + F = 11$, was sich mit noch nicht verwendeten Zahlen nur als $11 = 4 + 7$ realisieren lässt, woraus $F \in \{4,7\}$ folgt. Andererseits ist auch $B + C + F + G = 18$, also $F = 18 - 8 - 3 - 2 = 5$, was ein Widerspruch ist, sodass es auch in diesem Fall keine gültige Lösung gibt.

Insgesamt gibt es also genau zwei verschiedene Anordnungen. Da in diesen die 1 verschiedene Nachbarn besitzt, können sie auch nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden.

Aufgabe 5 - 250935
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $AB : A'B' = AS : SB'$ gilt!

Nach dem Satz von Thales, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABA'$ und $\triangle ABB'$, liegen die Punkte A, B, B' und A' (in dieser Reihenfolge) auf dem Kreis mit Durchmesser AB.

In diesem Kreis sind die beiden Peripheriewinkel $\angle BB'A'$ und $\angle BAA'$ über der gleichen Sehne BA' nach dem Peripheriewinkelsatz gleich. Weiterhin sind die beiden Winkel $\angle ASB$ und $\angle A'SB'$ Scheitelwinkel, also auch gleich, sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle A'B'S$ in zwei Innenwinkeln übereinstimmen, also ähnlich zueinander sind. Demnach stehen die entsprechenden Seitenlängen im gleichen Verhältnis und es gilt $|AB| : |A'B'| = |AS| : |SB'|$, $\square$.

Aufgabe 6 - 250936
a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

a) Es ist $192 - 96\sqrt{3} = 96 \cdot (2 - \sqrt{3}) > 0$, da $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$, sodass z eine reelle Zahl beschreibt.
b) Es ist

$$z = \sqrt{16 \cdot (12 + 6\sqrt{3})} + \sqrt{16 \cdot (12 - 6\sqrt{3})} = 4 \cdot (\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}})$$

genau dann rational, wenn es $0 \leq x := \frac{z}{4} = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ auch ist. Es ist

$$x^2 = (12 + 6\sqrt{3}) + 2\sqrt{(12 + 6\sqrt{3}) \cdot (12 - 6\sqrt{3})} + (12 - 6\sqrt{3}) = 24 + 2\sqrt{144 - 36 \cdot 3} =$$

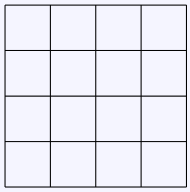
$$= 24 + 2\sqrt{36} = 24 + 2 \cdot 6 = 36 \qquad \text{also} \qquad x = 6 \text{ und } z = 24 \in \mathbb{Q}$$

Aufgaben der III. Runde 1985 gelöst von cyrix

6.28 XXVI. Olympiade 1986

6.28.1 I. Runde 1986, Klasse 9

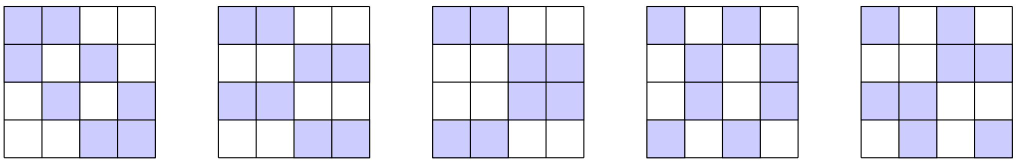
Aufgabe 1 - 260911



In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.

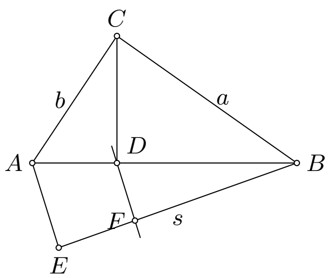
Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Die Abbildung zeigt fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. (Man kann auch beweisen, dass es keine von diesen verschiedene Lösung gibt)



Aufgabe 2 - 260912
Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:
(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$
(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei D.
(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.
(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einen Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
b) Beweisen Sie:
Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE in Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.



a) Die Abbildung zeigt die geforderte Konstruktion.

b) Wenn A, B, C, D, E, F nach der Beschreibung konstruiert werden, so folgt:

Nach (1) und (2) ist $\angle ACB = 90° = \angle CDB$. Ferner ist $\angle ABC = \angle CBD$. Daher gilt $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, also

$$AB : BC = CB : BD \qquad ; \qquad BD \cdot AB = BC^2 = a^2$$

Nach (3) und (4) folgt damit aus dem Strahlensatz

$$BF : FE = BD : DA = a^2 : b^2$$

w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 260913
Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

(1) $x \leq y \leq z$ und

(2) $xyz = 1986$ gilt!

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau denn voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$; $z_1 \neq z_2$ gilt.

Wegen der Primfaktorzerlegung $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$ gibt es genau die folgenden fünf verschiedenen Tripel natürlicher Zahlen, die (1) und (2) erfüllen:

$$(1{,}1{,}1986), \quad (1{,}2{,}993), \quad (1{,}3{,}662), \quad (1{,}6{,}331), \quad (2{,}3{,}331)$$

Alle weiteren Tripel ganze Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, erhält man, indem man in jeweils einem der genannten Tripel jeweils genau zwei Zahlen durch ihre entgegengesetzten Zahlen ersetzt und die Reihenfolge der entstandenen Zahlen gemäß (1) wählt.

Ausgehend von (1,1,1986) führt dies auf genau zwei weitere Tripel

$$(-1986, -1{,}1), \qquad (-1, -1{,}1986)$$

Ausgehend von jeweils einem Tripel (x,y,z) mit $0 < x < y < z$ führt dies dagegen, unter Beachtung von $-z < -y < -x < x < y < z$, genau auf die drei weiteren Tripel

$$(-z, -y, x), \quad (-z, -x, y), \quad (-y, -x, z)$$

Daher ergibt sich als gesuchte Anzahl $5 + 2 + 4 \cdot 3 = 19$.

Aufgabe 4 - 260914
Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass die Lösung x der Gleichung $17x + n = 6x + 185$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

Für jede natürliche Zahl n gilt:

Die Gleichung $17x + n = 6x + 185$ lässt sich äquivalent umformen zu $11x = 185 - n$. Sie hat daher genau die Lösung

$$x = \frac{185 - n}{11} \tag{1}$$

Diese ist für genau diejenigen natürlichen Zahlen n selbst eine natürliche Zahl, für die $n \leq 185$ gilt und 11 ein Teiler von $185 - n$ ist.

Diese Bedingungen werden, da 185 bei Division durch 11 den Rest 9 lässt, genau von denjenigen natürlichen Zahlen $n = 9 + 11m$ mit ganzzahligem m erfüllt, für die $9 + 11m \leq 185$ gilt. Solche natürlichen Zahlen n gibt es; die kleinste von ihnen erhält man mit $m = 0$.

Die gesuchte kleinste Zahl n mit den genannten Eigenschaften ist also $n = 9$; nach (1) ist die zugehörige Lösung der in der Aufgabe gegebenen Gleichung die Zahl $x = 16$.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen von [5]

6.28.2 II. Runde 1986, Klasse 9

Aufgabe 1 - 260921
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2} \qquad \text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Es ist

$$\frac{n^3-2n^2-4n+8}{n+2} = \frac{n^3+2n^2-4n^2-8n+4n+8}{n+2} = \frac{(n^2-4n+4)\cdot(n+2)}{n+2} = n^2-4n+4 \in \mathbb{N}, \square$$

Aufgabe 2 - 260922
Peter und Heinz erzählen, dass sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x+9, \qquad b = 5x+8, \qquad c = 4x+1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.
Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.
Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.
Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

a) Offensichtlich gilt für jede reelle Zahl $x > 0$ (und damit auch für jede von Null verschiedene natürliche), dass $a + b = 8x + 17 > 4x + 1 = c$ und $a + c = 7x + 10 > 5x + 8 = b$ ist. Es gilt aber auch die dritte Dreiecksungleichung $b + c = 9x + 9 > 3x + 9 = a$, sodass sich für alle $x > 0$ jeweils ein entsprechendes Dreieck mit Kantenlängen a, b und c bilden lässt. Anke hat also recht.

b) Mit $x = 1$ ist $a = 12$, $b = 13$ und $c = 5$, was $a^2+c^2 = 144+25 = 169 = 13^2 = b^2$ erfüllt, sodass nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bedeutet, dass es ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen a und c sowie Hypotenusenlänge b gibt. Also hat auch Birgit recht.

Aufgabe 3 - 260923
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!
(1) Es gilt $b < c$.
(2) b und c sind zueinander teilerfremd.
(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.
(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.
(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Nach (5) sind die Summen $4+9 = 13$, $4+12 = 16$, $9+12 = 21$, $4+a$, $9+a$ und $12+a$ alle in B enthalten. Da nach (3) a verschieden von 4, 9 und 12 ist, ist in dieser Liste von sechs Additionsaufgaben doppelt. Da aber B nur höchstens fünf Elemente enthält, müssen mindestens zwei das gleiche Ergebnis besitzen. Nach (4) sind b und c von den sonstigen Elementen von B und nach (1) auch voneinander verschieden, sodass B tatsächlich genau fünf Elemente besitzt und damit von den drei obigen Summen, die a als Summand enthalten, genau eine einen schon vorhanden Wert 13; 16 oder 21 annimmt.

Fall 1: Es ist $4 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $4 + a$ nicht 13 oder 16 sein, da sonst $a = 9$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 4 = 21$ und damit $a = 17$ gelten. Dann ist $a + 9 = 26 = b < a + 12 = 29 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein erstes Lösungstripel $(a,b,c) = (17,26,29)$ erhält.

Fall 2: Es ist $9 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $9 + a$ nicht 13 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 12$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 9 = 16$ und damit $a = 7$ gelten. Dann ist $a + 4 = 13 = b < a + 12 = 19 = c$, was auch (2) erfüllt, sodass man ein zweites Lösungstripel $(a,b,c) = (7,13,19)$ erhält.

Fall 3: Es ist $12 + a \in \{13; 16; 21\}$. Dann kann $12 + a$ nicht 16 oder 21 sein, da sonst $a = 4$ bzw. $a = 9$ folgen würde; im Widerspruch zu (3). Also muss $a + 12 = 13$ und damit $a = 1$ gelten. Dann ist $a + 4 = 5 = b < a + 9 = 10 = c$. Dies widerspricht aber (2), sodass es in diesem Fall kein Lösungstripel gibt.

Zusammenfassend gibt es also genau zwei Lösungstripel, die die Aufgabenstellung erfüllen, nämlich (7,13,19) und (17,26,29).

Aufgabe 4 - 260924
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.
Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!
Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$!

Es sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit AB, H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und M der Mittelpunkt der Strecke AB.

Da die Winkelhalbierende den rechten Winkel bei C in die beiden Winkel $\angle ACW = \angle WCB = 45°$ halbiert, müssen die Höhe und die Seitenhalbierende diese beiden Teilwinkel halbieren.
O.B.d.A. gelte, dass die Seitenhalbierende den Winkel $\angle ACW$ und die Höhe den Winkel $\angle WCB$ halbiert. (Den umgekehrten Fall erhält man durch Vertauschung der beiden Punkte A und B.)

Also gilt
$$\angle ACM = \angle MCW = \angle WCH = \angle HCB = 22{,}5°$$
Nach Definition ist $\angle BHC = 90°$, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BHC$ gilt, dass
$$\angle CBA = \angle CBH = 180° - \angle HCB - \angle BHC = 67{,}5°$$
gilt.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist dann $\angle BAC = 180° - \angle ACB - \angle CBA = 22{,}5°$. Damit sind (bis auf Vertauschung) die beiden übrigen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ eindeutig bestimmt, sollte es überhaupt ein solches geben.

Sei also nun umgekehrt ein solches Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle BAC = 22{,}5°$, $\angle CBA = 67{,}5°$ und $\angle ACB = 90°$ gegeben und seien die Punkte H, W und M wie oben definiert. Dann sind also aufgrund der Definition der Winkelhalbierenden $\angle ACW = \angle WCB = \frac{90°}{2} = 45°$.
Nach dem Satz des Thales liegen C, A und B auf dem Kreis um M durch A, sodass also $|AM| = |BM| = |CM|$ gilt. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig und es gilt
$$\angle ACM = \angle MAC = \angle BAC = 22{,}5° = \frac{90°}{4} \qquad \text{sowie} \qquad \angle MCW = \angle ACW - \angle ACM = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$
Im Dreieck $\triangle HCB$ gilt wie oben nach der Definition der Höhe $\angle BHC = 90°$, sodass sich aufgrund der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck und $\angle CBH = \angle CBA$ wieder
$$\angle HCB = 180° - \angle BHC - \angle CBH = 180° - 90° - 67{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$
Da das Dreieck $\triangle ABC$ keinen stumpfen Innenwinkel besitzt, liegt H auf der Strecke AB und es gilt abschließend auch
$$\angle WCH = \angle WCB - \angle HCB = 45° - 22{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$
sodass tatsächlich, wie in der Aufgabenstellung gefordert, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe den rechten Winkel in vier gleich große Teile.
Es gibt also bis auf Vertauschung der Innenwinkel bei A und B (was natürlich die Ähnlichkeit erhält) genau eine Wahl der beiden weiteren Innenwinkel von $\triangle ABC$, nämlich die oben angegebene von 22,5° und 67,5°.

Aufgaben der II. Runde 1986 gelöst von cyrix

6.28.3 III. Runde 1986, Klasse 9

Aufgabe 1 - 260931
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a,b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2(a+b)=ab$ gilt!

Es ist die Gleichung äquivalent zu $4 = ab-2a-2b+4 = (a-2)\cdot(b-2)$, sodass $a-2$ und $b-2$ das gleiche Vorzeichen haben und Teiler sowie zugehöriger Gegenteiler von 4 sind. Da a und b natürliche Zahlen sind, gilt dabei $a-2 \geq -2$ und $b-2 \geq -2$, sodass keine ganzzahlige Zerlegung der 4 mit Faktor -4 in Frage kommt. Damit gilt $(a-2)\cdot(b-2) = 4\cdot 1 = (\pm 2)\cdot(\pm 2) = 1\cdot 4$ und also

$$(a,b) \in \{(6,3),(0,0),(4,4),(3,6)\}$$

Dass dies auch alles Lösungen der Ausgangsgleichungen sind, zeigt die Probe.

Aufgabe 2 - 260932
In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P=S$ ist, ist $P_S=P$.)
Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Es ist für jeden Punkt P der Ebene e das Dreieck $\triangle P_UP_VP_W$ kongruent zum Dreieck $\triangle ABC$. Insbesondere haben also die beiden Dreiecke auch den gleichen Flächeninhalt.

Zum Beweis der Kongruenz sei zuerst $P \notin \{U,V,W\}$. Dann sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes wegen $\frac{|PP_U|}{|PU|} = 2 = \frac{|PP_V|}{|PV|}$ die Geraden P_UP_V und UV zueinander parallel und nach dem Strahlensatz gilt $\frac{|P_UP_V|}{|UV|} = \frac{|PP_U|}{|PU|} = 2$, also $|P_UP_V| = 2\cdot|UV|$.
Weiterhin gilt analog nach der Umkehrung des Strahlensatzes (mit Scheitelpunkt bei C), dass $UV \parallel AB$ und mit dem Strahlensatz an gleicher Stelle dann, dass $|AB| = 2\cdot|UV|$ ist. Insgesamt ist also $|P_UP_V| = |AB|$. Analog folgt auch $|P_UP_W| = |AC|$ und $|P_VP_W| = |BC|$, sodass die Dreiecke $\triangle P_UP_VP_W$ und $\triangle ABC$ nach Kongruenzsatz sss zueinander kongruent sind.

Andernfalls gilt o.B.d.A. $P = W = P_W$. Dann ist aber direkt nach Definition $|P_UP_W| = 2\cdot|UP| = 2\cdot|UW| = |AC|$ und analog $|P_VP_W| = |BC|$.
Wie im ersten Fall können wir schließen, dass $|P_UP_V| = |AC|$ gilt, sodass sich die gewünschte Dreiecks-Kongruenz auf die gleiche Art und Weise ergibt, $\square$.

Aufgabe 3 - 260933
Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3+x^2+ax+1}{x^2+1}$$

zugeordnet.
(A) Ermitteln Sie, wenn $a=-3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!
(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!
(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.
(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Es ist für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^3+x+x^2+1+(a-1)x}{x^2+1} = x+1+\frac{a-1}{x^2+1}$$

(A): Für $a = -3$ ist also $y = x + 1 + \frac{-4}{x^2+1} = x + 1 - \frac{4}{x^2+1}$. Damit ist für jede ganze Zahl x die Zahl y ganz, wenn auch $x+1-y = \frac{4}{x^2+1}$ eine ganze Zahl, also x^2+1 ein Teiler von 4 ist. Dies ist z.B. für $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ der Fall. Tatsächlich ist $y(0) = 1$ und $y(1) = 0$.

(B)/(C): Damit für ein a die Aussage (*) gilt, muss also für unendlich viele ganze Zahlen x auch $y - (x+1) = \frac{a-1}{x^2+1}$ eine ganze Zahl sein. Da auch x^2+1 eine ganze Zahl ist, ist damit auch $a - 1 = (y - (x+1)) \cdot (x^2+1) \in \mathbb{Z}$ und es gilt $a-1$ ist durch x^2+1 teilbar.
Insbesondere ist also $a-1$ durch unendlich viele verschiedene ganze Zahlen teilbar, was nur die ganze Zahl 0 erfüllt, sodass $a = 1$ sein muss. Für $a = 1$ ist aber $y = x + 1$ für jedes ganzzahlige x selbst ganzzahlig, insbesondere also auch für unendlich viele x. Damit ist $a = 1$ die einzige reelle Zahl, die (*) erfüllt.

Aufgabe 4 - 260934
Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

Wir nehmen indirekt an, dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine rationale Zahl ist. Dann existieren teilerfremde positive ganze Zahlen p und q mit $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$, da $a > 0$ und $b > 0$ sind.
Nach Quadrieren und Beseitigen der Nenner folgt $aq^2 = bp^2$. Da p und q teilerfremd sind, ist auch $ggT(p^2,q^2) = 1$, also wegen $p^2|bp^2$ und damit $p^2|aq^2$ auch $p^2|a$. Damit gibt es eine positive ganze Zahl c mit $a = c \cdot p^2$.
Analog folgert man auch die Existenz einer positiven ganzen Zahl d mit $b = d \cdot q^2$. Setzt man dies ein, so ergibt sich $c \cdot p^2q^2 = d \cdot p^2q^2$, also $c = d$. Dann jedoch sind a und b beide durch c teilbar, sodass der Bruch $\frac{a}{b}$ mit diesem Zähler und Nenner nur genau dann schon so weit wie möglich gekürzt war, wenn $c = 1$ ist.
Dann jedoch sind sowohl $a = p^2$ als auch $b = q^2$ Quadratzahlen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung aus der Aufgabenstellung ist.
Demzufolge kann $\sqrt{\frac{a}{b}}$ nicht rational, muss also irrational sein, $\square$.

Aufgabe 5 - 260935
Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:
(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $AB > CD$.
(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ beträgt 90°.
Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $MN = \frac{1}{2} \cdot (AB - CD)$ gilt!

Wegen (2) sind die Geraden AD und BC nicht parallel, schneiden sich also in einem Punkt S, der auf den Verlängerungen über D bzw. C hinaus liegt. Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABS$ und (3) gilt dann $\angle ASB = 180° - \angle BAS - \angle SBA = 180° - (\angle BAD + \angle CBA) = 90°$, sodass das Dreieck $\triangle ABS$ rechtwinklig bei S ist. Nach dem Satz von Thales gilt dann

$$|SM| = |AM| = |BM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Wegen (1) und der Umkehrung des Strahlensatzes liegen wegen $\frac{|AM|}{|MB|} = 1 = \frac{|DN|}{|NC|}$ die drei Punkte S, N und M auf einer Geraden, da auch S, D und A sowie S, C und B jeweils auf einer Geraden liegen. Insbesondere ist dann $\frac{|SN|}{|SM|} = \frac{|CD|}{|AB|}$ und damit

$$|MN| = |SM| - |SN| = |SM| \cdot \left(1 - \frac{|CD|}{|AB|}\right) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{|AB| - |CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |CD|), \square$$

Aufgabe 6 - 260936
a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.
Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in Bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muss!

b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

a) Da die Schnittfläche von e mit dem Tetraeder Seitenfläche beider Teiltetraeder T_1 und T_2 wird, muss sie insbesondere selbst dreieckig sein. Da sie a enthält, muss die Ebene e noch genau zwei weitere Schnittpunkt mit Kanten von $ABCD$ besitzen.

Da mit einem weiteren Punkt auf einer von A ausgehenden Kante gleich die gesamte weitere Gerade, auf der diese Kante liegt, in e liegen würde, also auch der Endpunkt der entsprechenden Kante, der B, C oder D ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass e das Dreieck $\triangle BCD$ in einer Strecke schneidet. (Die Endpunkte dieser strecke sind dann genau die beiden weiteren Eckpunkte der Schnittfläche von e mit dem Tetraeder $ABCD$.)

Diese Strecke s kann aber keine der Seitenkanten des Dreiecks $\triangle BCD$ sein, da sonst der gesamte Tetraeder $ABCD$ in einem der beiden von e aufgespannten Halbräume läge, also diesen nicht in zwei Teiltetraeder zerlegen würde. also muss s innere Punkte von $\triangle BCD$ enthalten und dieses in zwei Teilfiguren zerlegen.

Die beiden Teilkörper vom Tetraeder $ABCD$, die beim Schnitt entlang e entstehen, besitzen die beiden Teilfiguren, in die s das Dreieck $\triangle BCD$ zerlegt, als Grundfläche sowie A als Spitze. Da die Teilkörper Tetraeder sind, muss also deren Grundfläche jeweils ein Dreieck sein, sodass s das Dreieck $\triangle BCD$ in zwei Teildreiecke zerlegt.

Dies ist aber durch eine Strecke s nur genau dann möglich, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks verläuft und die gegenüberliegende Seite in deren Innern schneidet.
Also muss e durch A sowie genau einen der drei übrigen Eckpunkte B, C oder D sowie das Innere der Strecke aus den übrigen beiden Punkten verlaufen. Dies beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass e den Tetraeder $ABCD$ in zwei Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt. Verläuft e o.B.d.A. durch B und S, wobei S ein innerer Punkt der Strecke CD ist, dann sind die beiden Tetraeder gegeben durch $ABCS$ und $ABDS$.

b) Es verlaufe o.B.d.A. die Ebene e durch B und den inneren Punkt S der Strecke CD. Die beiden übrigen Fälle, dass e durch C bzw. D verlaufe, sind hierzu völlig analog.

Da in beiden Teiltetraedern $ABCS$ und $ABDS$ die Höhe der Spitze A auf die Grundflächenebene $\epsilon_{BCS} = \epsilon_{BDS} = \epsilon_{BCD}$ identisch ist, genauso wie in der Grundfläche die Höhe von B auf die Gerade CD der gegenüberliegenden Dreiecksseiten CS bzw. DS, verhalten sich die Volumina der beiden Tetraeder wie die Längen der Grundseiten $|CS|$ bzw. $|DS|$ in ihren Grundflächen. Insbesondere sind sie genau dann volumengleich, wenn $|CS| = |DS|$ gilt, also S der Mittelpunkt von CD ist.

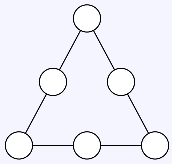
Zusammenfassend erhält man also genau dann eine Zerlegung in zwei volumengleiche Tetraeder, wenn die Ebene e durch A verläuft sowie eine Seitenhalbierende des Dreiecks $\triangle BCD$ enthält. (Damit ist e eindeutig bestimmt.) Da keine zwei der Seitenhalbierenden mit A in einer gemeinsamen Ebene liegen und das Dreieck $\triangle BCD$ genau drei Seitenhalbierende besitzt (je eine durch jeden seiner Eckpunkte), gibt es also genau drei Ebenen, die A enthalten und das Tetraeder $ABCD$ in zwei volumengleiche Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1986 gelöst von cyrix

6.29 XXVII. Olympiade 1987

6.29.1 I. Runde 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270911



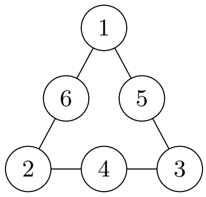
In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Die Abbildung zeigt z.B. eine solche Lösung, da jede Zahl genau einmal vorkommt und für die Summen gilt:

$$1 + 6 + 2 = 1 + 5 + 3 = 2 + 3 + 4$$

Es gibt weitere Lösungen.



Aufgabe 2 - 270912
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einen Dominospiel gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

a) Es gibt genau 7 Steine, bei denen auf den beiden Hälften des Steins dieselbe Zahl steht.

Um die anderen Steine zu beschreiben, kann man für ihr erstes Feld eine der 7 Zahlen wählen und für das zweite Feld jeweils eine der 6 anderen Zahlen. Dabei hat man jeden Stein der genannten Art genau 2 mal erfasst. Die Anzahl der Steine beträgt folglich $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.
Die Anzahl aller zu einem Dominospiel gehörenden Steine beträgt somit $7 + 21 = 28$.

b) Man kann aus alle Steinen eines Dominospieles eine geschlossene Kette bilden, z.B.

00 / 01 / 11 / 12 / 22 / 23 / 33 / 34 / 44 / 45 / 55 / 56 / 66 / 61 / 13 / 35 / 51 / 14 / 46 / 62 / 24 / 40 / 02 / 25 / 50 / 03 / 36 / 60

Die gesuchte größte Zahl für eine geschlossene Kette beträgt folglich 28.

Aufgabe 3 - 270913
Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

Wenn man zeigen kann, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt, dann ist 1987 als Primzahl nachgewiesen.

Wegen $\sqrt{1987} < 44$ genügt es hierzu also zu zeigen, dass 1987 durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 teilbar ist. Diese Aussagen lassen sich in der Tat durch Ausrechnen bestätigen (z.B. kann man mit Hilfe eines Taschenrechners feststellen, dass keine der 14 Zahlen 1987 : 2, 1987 : 3, ..., 1987 : 4 eine ganze Zahl ist).

Damit ist die Antwort erbracht, dass 1987 eine Primzahl ist.

Aufgabe 4 - 270914
Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt $d = 2a - b$ genau dann, wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt!

I. Wenn $d = 2a - b$ gilt, so folgt (da nach dem Satz des Pythagoras $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist) $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$,

$$a^2 + b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 \qquad (1)$$
$$4ab = 3a^2 \qquad (2)$$

und hieraus (da nach der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks $A = ab$ ist)

$$4A = 3a^2 \qquad (3)$$
$$A = \frac{3}{4}a^2 \qquad (4)$$

II. Wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt, so folgt einerseits $ab = \frac{3}{4}a^2$, wegen $a > 0$ als $b = \frac{3}{4}a < 2a$.

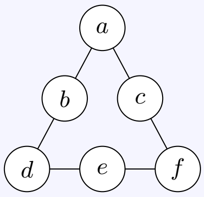
Andererseits folgt (da die Schlüsse von (1) auf (2), (3), (4) umgekehrt werden können) $a^2 + b^2 = (2a - b)^2$. Wegen $b < 2a$, also $2a - b > 0$ kann man hieraus weiter auf $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a - b$, d.h. $d = 2a - b$ schließen.

Mit I. und II. ist der verlangte Beweis geführt.

Lösungen der I. Runde 1987 übernommen von [5]

6.29.2 II. Runde 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270921



In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt, wenn man die genannte Summe mit s bezeichnet

$$a+b+d=s \quad (1); \qquad a+c+f=s \quad (2); \qquad d+e+f=s \quad (3)$$

$$\text{sowie} \qquad a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21+a+d+f = 3s \qquad ; \qquad 7+\frac{a+d+f}{3} = s \quad (4)$$

Da s (nach (1)) ganzzahlig ist, muss $a + d + f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a, d, f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a + d + f$, den Wert s aus (4), die Werte

$$b=s-a-d \quad (5); \qquad c=s-a-f \quad (6); \qquad e=s-d-f \quad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

a	d	f	$a+d+f$	s	b	c	e	kommen 1 bis 6 vor ?
1	2	3	6	9	6	5	4	ja
1	2	6	9	10	7	3	2	nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	nein
2	3	4	9	10	5	4	3	nein
2	4	6	12	11	5	3	1	ja
3	4	5	12	11	4	3	2	nein
4	5	6	15	12	3	2	1	ja

Da (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit "ja" gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Da sie sich in den überhaupt als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten.

Aufgabe 2 - 270922
Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so dass man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden lässt!

a) Wir fordern o.B.d.A., dass die erste Ziffer auf einem Dominostein größer oder gleich der zweiten Ziffer ist. Dann gibt es genau einen Dominostein mit erster Ziffer 0 (nämlich 0-0, genau zwei mit erster Ziffer 1 (nämlich 1-0 und 1-1), ... , genau zehn Dominosteine mit erster Ziffer 9 (nämlich 9-0, 9-1, ..., 9-9). Insgesamt gibt es also $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ verschiedene Dominosteine.

b) Jede Ziffer kommt auf diesen 55 Dominosteinen insgesamt elfmal vor, nämlich neunmal mit je einer anderen Ziffer und zweimal auf dem Dominostein, der auf beiden Seiten die betreffende Ziffer enthält. Jedoch ist jede Ziffer in einer geschlossenen Kette geradzahlig oft enthalten, nämlich jeweils paarweise auf aneinanderstoßenden Hälften zweier benachbarter Dominosteine. Damit kann also in einer geschlossenen Kette jede Ziffer nur maximal zehnmal vorkommen, sodass in der geschlossenen Kette maximal 50 Steine Verwendung finden können.

Eine Kette lässt sich auch wie folgt erhalten:
0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-3, 3-3, 3-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-6, 6-6, 6-7, 7-7, 7-8, 8-8, 8-9, 9-9, 9-0, 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-1, 1-3, 3-5, 5-9, 9-7, 7-0, 0-3, 3-6, 6-9, 9-2, 2-5, 5-1, 1-7, 7-4, 4-8, 8-0, 0-4, 4-1, 1-9, 9-3, 3-7, 7-5, 5-8, 8-2, 2-6, 6-0

Dabei wurden die Dominosteine 0-5, 1-6, 2-7, 3-8 und 4-9 nicht und alle anderen genau einmal verwendet.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 270923
Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A.
Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:
Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$, wenn $3d = a + b + c$ gilt. Wegen $d > 0$ und $a + b + c > 0$ ist dies äquivalent mit

$$9d^2 = (a + b + c)^2 \qquad \to \qquad 9d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

und dies wegen $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ und $A = 2(ab + ac + bc)$ mit $9d^2 = d^2 + A$, also auch mit $8d^2 = A$, w.z.b.w.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 270924
Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10 \quad (1) \qquad ; \qquad 3a + 8b \leq 25 \quad (2)$$

erfüllen, sei $S = a + 2b$.
Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

Aus der zweiten Ungleichung folgt $b \leq 3$. Wir unterscheiden nun nach dem Wert, den b annimmt:

1. Fall: $b = 3$. Dann ist nach (2) $a \leq 0$, also $a = 0$ und $S = 6$.
2. Fall: $b = 2$. Dann folgt aus (2) $a \leq 3$, welche jeweils auch (1) erfüllen, und $S \leq 3 + 2 \cdot 2 = 7$.
3. Fall: $b \leq 1$. Dann folgt aus (1) $a \leq 4$, also $S \leq 4 + 2 \cdot 1 = 6$. Damit gilt in jedem Fall $S \leq 7$, welcher für das Paar $(a,b) = (3,2)$, dass beide Ungleichungen erfüllt, auch angenommen wird.

Aufgabe gelöst von cyrix

6.29.3 III. Runde 1987, Klasse 9

Aufgabe 1 - 270931
a) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1987}^{11} = 1988 \qquad (1)$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ besitzt, in der alle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ natürliche Zahlen sind!
b) Beweisen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!
Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1987})$ und $(x'_1, x'_2, ..., x'_{1987})$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen gilt:

$$x_1 \neq x'_1, x_2 \neq x'_2, ..., x_{1987} \neq x'_{1987}$$

a) Angenommen, es gäbe eine solche Lösung für die Gleichung (1) der Aufgabenstellung.
Wegen $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, 1987$ ist dann auch für alle diese Indizes i der Wert $x_i^{11} \geq 0$, sodass genauso für alle diese i die Abschätzung $x_i^{11} \leq 1987 < 2048 = 2^{11}$, also $x_i < 2$ und damit wegen $x_i \in \mathbb{N}$ schließlich $x_i \leq 1$, also auch $x_i^{11} \leq 1$, was dann aber wegen

$$x_1^{11} + x_2^{11} + \cdots + x_{1987}^{11} \leq 1987 < 1988$$

einen Widerspruch zu (1) erzeugen würde, $\Box$.

b) Es sei k eine beliebige ganze Zahl. Setze $x_1 := x_2 := \cdots = x_{61} := -1$, $x_{62} := 2$, $x_{63} := k$, $x_{64} := -k$ und für alle $i \geq 65$ $x_i := 0$. Dann ist

$$x_1^{11}+x_2^{11}+\cdots+x_{1987}^{11} = (-1)^{11}\cdot(61)+2^{11}+k^{11}+(-k)^{11}+0^{11}\cdot(1987-64) = -61+2048+k^{11}-k^{11} = 1987$$

also eine Lösung der Gleichung (1) in ganzen Zahlen. Dabei unterscheiden sich je zwei solche Lösungen durch die verschiedenen Werte von k, sodass es unendlich viele verschiedene gibt.

Aufgabe 2 - 270932
(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0, b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:
Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}$$

(I) Die Aussage ist falsch, wie $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ und $d = 0$ zeigt, da dann die Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{a+c}{b+c}$ erfüllt ist, die Schlussfolgerung wegen $\frac{a+d}{b+d} = \frac{a}{b}$ aber offensichtlich nicht.

(II) Die Aussage ist korrekt, da die Voraussetzung nach Multiplikation mit $b(b + c) > 0$ äquivalent ist zu $a(b + c) < b(a + c)$ bzw. $ab + ac < ab + bc$, also wegen $c > 0$ auch äquivalent zu $a < b$.
Dann ist aber wegen $d > 0$ auch $ab + ad < ab + bd$, also $a(b + d) < b(a + d)$, was nach Division durch $b(b + d) > 0$ genau auf die Folgerung in der Aufgabenstellung führt, $\Box$.

Aufgabe 3 - 270933
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASD$ sei g.

Beweisen Sie:
Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass g und h zueinander parallel sind.
Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Wir berechnen die Winkel, in denen g sowie h die Gerade BC schneiden, und zeigen, dass sie gleich sind. Daraus folgt dann sofort die zu zeigende Parallelität von g und h. Dazu betreiben wir eine Winkeljagd:

Nach Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ASD$ ist $\angle ASD = 180° - (\angle SDA + \angle DAS)$. Da $\angle ASD$ und $\angle CSB$ Scheitelwinkel sind, sind sie auch gleich groß und besitzen die gleiche Winkelhalbierende. Sei S_1 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ASD$, also auch von $\angle CSB$, mit BC. Dann ist $\angle S_1SB = \frac{1}{2} \cdot \angle CSB = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS)$. Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die beiden Peripheriewinkel $\angle DBC = \angle SBS_1$ und $\angle DAC = \angle DAS$ über der Sehne DC gleich groß, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle SS_1B$ folgendes gilt:

$$\angle BS_1S = 180° - \angle SBS_1 - \angle S_1SB = 180° - \angle DAS - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)$$

Andererseits erhält man mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ATD$, dass $\angle ATD = 180° - \angle DAT - \angle TDA = 180° - \angle DAB - \angle CDA$ ist. Sei S_2 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ATD$ mit BC. Dann ist $\angle BTS_2 = \angle ATS_2 = \frac{1}{2} \cdot \angle ATD = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA)$.
Im Sehnenviereck $ABCD$ addieren sich gegenüberliegende Innenwinkel zu 180°, sodass $\angle ABC = 180° - \angle CDA$ gilt. Da $\angle ABC$ und $\angle CBT = \angle S_2BT$ Nebenwinkel sind, gilt $\angle S_2BT = 180° - \angle ABC = \angle CDA$. Damit gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BTS_2$

$$\angle TS_2B = 180° - \angle S_2BT - \angle BTS_2 = 180° - \angle CDA - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA) =$$

$$= 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA)$$

Es ist $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes sind die beiden Peripheriewinkel $\angle CAB$ und $\angle CDB$ über der Sehne CB gleich. Also gilt auch $\angle DAB = \angle DAC + \angle CDB$. Weiterhin ist $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA$, sodass sich

$$\angle DAB - \angle CDA = (\angle DAC + \angle CDB) - (\angle CDB + \angle BDA) = \angle DAC - \angle BDA = \angle DAS - \angle SDA$$

und damit

$$\angle TS_2B = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAS - \angle SDA) =$$

$$= 180° - (90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)) = 180° - \angle BS_1S$$

ergibt. Sei P ein Punkt auf dem von T ausgehenden Strahl durch S_2, nicht aber auf der Strecke TS_2, (also "nach S_2") liegt. Dann sind $\angle TS_2B$ und $\angle BS_2P$ Nebenwinkel, sodass sich

$$\angle BS_2P = 180° - \angle TS_2B = \angle BS_1S$$

ergibt und damit g sowie h die Gerade BC im gleichen Winkel schneiden, also nach Umkehrung des Stufenwinkelsatzes zueinander parallel sind, □.

Aufgabe 4 - 270934
Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke.
Dabei kommt es auch vor, dass Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.
Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.
Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.
Trifft das zu?

Ja, dies trifft zu: Zählt man die von jedem Punkt ausgehenden Strecken, so muss dies die doppelte Anzahl aller Strecken sein, da jede Strecke an ihren beiden Endpunkten jeweils einen Summanden von 1 beiträgt. Insbesondere ist diese Anzahl also gerade. Damit ist die Summe, die entsteht, wenn man für alle Punkte P die Anzahl der von P ausgehenden Strecken addiert, gerade, muss also geradzahlig viele (ggf. auch null) ungerade Summanden besitzen.
Dabei ist A genau diese Anzahl ungerader Summanden, also selbst gerade, $\Box$.

Aufgabe 5 - 270935
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

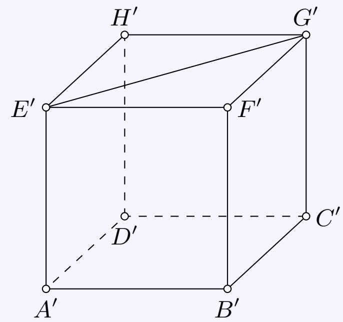
Da für $n \geq 1$ die Zahl $z := 2^{n+2} + 3^{2n+1} > 3^2 = 9 > 7$, aber wegen

$$z = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n \equiv 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 7$$

durch 7 teilbar und damit keine Primzahl ist, gibt es keine solche Zahl.

Aufgabe 6 - 270936

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.
a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, dass die Summe $CP_0 + P_0F$ kleiner ist als die Summe $CP + PF$ für jeden anderen Punkt P auf EG.



b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!
Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!
Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.

a) Dreht man das Quadrat $EFGH$ um die Achse EG so um 90°, dass der Bildpunkt $\tilde{F}$ von F nun senkrecht "über" dem Mittelpunkt von EG liegt, dann liegt $\tilde{F}$ nun mit in der gleichen Ebene wie A, C, G und E. Da EG als Drehachse bei der Drehung fix blieb, gilt für jeden Punkt P auf dieser, dass $|PF| = |P\tilde{F}|$ gilt.
Es ist also P_0 derjenige Punkt auf EG (falls existent und eindeutig bestimmt), für den $|CP_0| + |P_0\tilde{F}|$ minimal wird. Dies ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung genau dann der Fall, wenn P_0 auf der Geraden $\tilde{F}C$ liegt, denn dann ist diese Summe gleich $|C\tilde{F}|$, sonst größer. Da C und $\tilde{F}$ auf verschiedenen Seiten von EG liegen, schneiden sich die beiden Geraden EG und $C\tilde{F}$ in genau einem Punkt P_0, der die Aussage in der Aufgabenstellung erfüllt, sodass dieser existiert und eindeutig bestimmt ist, $\Box$.

b) Zur Konstruktion von P_0' genügt es also $\tilde{F}'$ zu konstruieren, da auch für die Bildgeraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ gilt, dass sie sich in P_0' schneiden.

Es liegt $\tilde{F}$ senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats $EFGH$ in einer Höhe von $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |EF|$. Da $|E'F'| = |EF|$ gilt, kann man h leicht durch eine Hilfskonstruktion erhalten, indem etwa in das schon gegebene Quadrat $A'B'F'E'$ der Kantenlänge $|EF|$ die beiden Diagonalen eingezeichnet und der Diagonalenschnittpunkt N' ermittelt wird. Dann gilt $|E'N'| = h$.

Da die Strecke $M\tilde{F}$ parallel zu AE ist, wird also auch diese unverzerrt dargestellt, sodass man zuerst M' als Schnittpunkt der Diagonalen $E'G'$ und $H'F'$ erhält und dann dort in M' die Streckenlänge h auf einer Geraden durch M', die parallel zu $A'E'$ ist, "nach oben" abträgt. Der damit erhaltene Punkt ist $\tilde{F}'$ und der Schnittpunkt der Geraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ schließlich der gesuchte Punkt P_0'.

Aufgaben der III. Runde 1987 gelöst von cyrix

6.30 XXVIII. Olympiade 1988

6.30.1 I. Runde 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280911
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Eine Lösung zeigt die Abbildung.

Bemerkung: Solche Quadrate nennt man magische Quadrate. Sie sind schon lange bekannt. Im Hintergrund des 1514 geschaffenen Kupferstichs "Die Melancholie" hat Albrecht Dürer z.B. dieses magische Quadrat eingetragen.

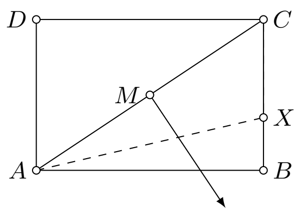
Schon im 17. Jahrhundert wusste man, dass es 880 verschiedene derartige Quadrate gibt.

Aufgabe 2 - 280912
Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Es gibt keine solche rationale Zahl. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Gäbe es eine solche Zahl x, so wäre für sie $\frac{1}{x} \cdot 2 = x$. Daraus würde $x^2 = 2$ folgen. Diese Gleichung hat aber nur die beiden Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, die bekanntlich beide irrational sind.

Aufgabe 3 - 280913
Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!



I. Es sei M der Mittelpunkt von AC. Derjenige Strahl auf der Mittelsenkrechten von AC, der von M ausgeht und in das Dreieck ABC hineinführt (siehe Abbildung), muss dieses Dreieck wieder in einem Punkt verlassen, der auf einer der Strecken AB, BC liegt (und von A sowie C verschieden ist; denn die Mittelsenkrechte schneidet AC nur in M).

Für jeden (von C verschiedenen) Punkt X der Strecke BC kann man aber beweisen, dass X nicht auf der Mittelsenkrechten liegt. Ist dieser Beweis geführt (siehe II.), so folgt, wie verlangt, dass die Mittelsenkrechte die Strecke zwischen A und B schneiden muss.

II. Durchführung des angekündigten Beweises:

Für jeden Punkt X auf BC gilt: Entweder ist $X = B$, also $AX = AB$, oder $\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, das AX als Hypotenuse hat, womit $AX > AB$ folgt.

Wegen der Voraussetzung $AB > BC$ folgt somit in beiden Fällen $AX > BC$ und daher erst recht $AX > XC$. Da aber jeder Punkt der Mittelsenkrechten dieselbe Entfernung von A wie von C hat, liegt X folglich nicht auf der Mittelsenkrechten, wie gezeigt werden sollte.

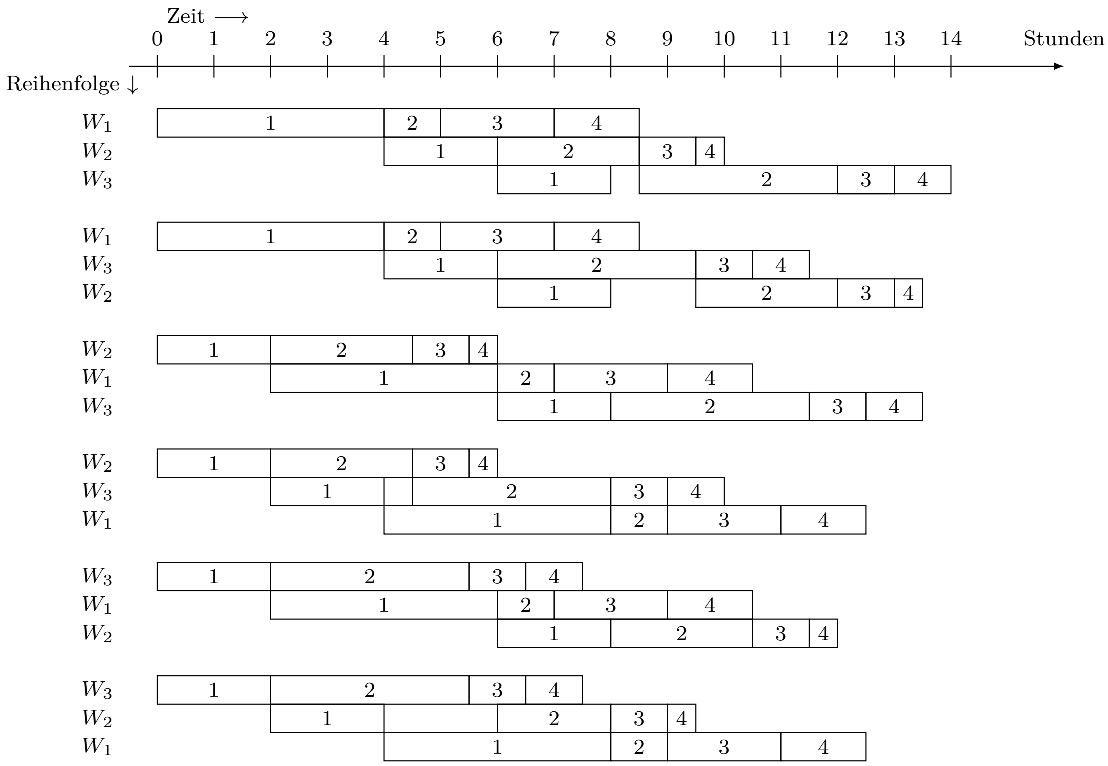
Aufgabe 4 - 280914
Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muss jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, dass die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M4) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!



(Maschinenbezeichnung kurz 1,2,3,4 statt M_1, M_2, M_3, M_4)

In den Darstellungen des zeitlichen Ablaufs wird für jede der sechs möglichen Reihenfolgen dreier Werkstücke die Gesamtzeit ermittelt, die sich ergibt, wenn man in jede Maschine das jeweils nächste Werkstück (der vorgesehenen Reihenfolge) möglichst bald einführt.

Beim Vergleich dieser Darstellungen ergibt sich:

Die Reihenfolge W_3, W_1, W_2 unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge.

Hinweise:

Möglich ist auch ein sehr argumentierendes Vorgehen. Beispielsweise kann man zuerst feststellen, für welche Reihenfolge sich bei der Berechnung der

- Summe der Zeiten des ersten und des zweiten Werkstücks in M_1 plus Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_1,M_2,M_3 und M_4 (1)

ein möglichst kleiner Wert ergibt. Statt der Summe (1) kann man einfacher

- die Summe der Zeiten des dritten Werkstücks in M_2, M_3 und M_4 (2)

heranziehen. Nach der Tabelle im Aufgabentext hat diese Summe genau für W_2 als drittes Werkstück den kleinsten Wert (nämlich 4; dagegen für W_1 den Wert 4,5 und für W_3 den Wert 5,5). Dann kann man untersuchen, ob bei einer der Reihenfolgen mit W_2 als drittem Werkstück gilt, dass

- W_2 die Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 ohne Wartezeiten durchlaufen kann. (3)

Ist das der Fall, so folgt: Diese Reihenfolge unterbietet mit ihrer Gesamtzeit die Gesamtzeiten aller Reihenfolgen, die (1) bzw. (2) nicht so klein wie möglich machen.

(Man beachte: Ohne die Aussage (3) wäre ein solcher Schluss nicht gesichert!) Schließlich ist dann noch eine Reihenfolge, die (3) erfüllt, mit der anderen, in der auch W_2 als drittes Werkstück läuft, zu vergleichen. Die Untersuchung auf (3) sowie der eben genannte Vergleich kann z.B. durch die zwei obenstehenden Darstellungen zu W_1,W_3,W_2 und W_3,W_1,W_2 erfolgen. Die Überlegung zu (1), (2) hat also vier solche Darstellungen eingespart.

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen von [5]

6.30.2 II. Runde 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280921
Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

I. Wenn eine Zahl des Quadrat einer natürlichen Zahl n und zugleich auch die dritte Potenz einer natürlichen Zahl m ist, so ist sie eine natürliche Zahl, bei deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor in einer durch 2 und zugleich auch durch 3 teilbaren Anzahl vorkommt.
Daher (und weil 2 und 3 zueinander teilerfremd sind) muss jeder Primfaktor in einer durch 6 teilbaren Anzahl vorkommen, die Zahl muss also die sechste Potenz einer natürlichen Zahl sein. Ist außerdem noch die Bedingung $n \neq m$ zu erfüllen, so scheiden 0 und 1 aus, da diese Zahlen Quadrat und dritte Potenz nur von jeweils derselben Zahl sind.

II. Die Zahlen $2^6, 3^6, 4^6$ und 5^6 erfüllen alle diese Bedingungen, wie aus

$$216 = 8^2 = 4^3, \quad 3^6 = 27^2 = 9^3, \quad 4^6 = 64^2 = 16^3, \quad 5^6 = 125^2 = 25^3$$

ersichtlich ist.
Mit I. und II. (und weil alle k^6 mit $k > 5$ größer als $2^6, ..., 5^6$ sind) ist gezeigt: Die vier gesuchten Zahlen sind $2^6 = 64$, $3^6 = 729$, $4^6 = 4096$, $5^6 = 15625$.

Aufgabe 2 - 280922
In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, dass jede der Zahlen genau einmal auftritt und dass sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt ("Magisches Quadrat").
a) Beweisen Sie, dass in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muss!
b) Beweisen Sie, dass in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muss!

Für jedes magische Quadrat, dessen Zahlen mit

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	d_2	d_3	d_4

bezeichnet sind, gilt:
a) Da die Summe aller Zahlen von 1 bis 16 der Wert 136 hat, muss in jeder der vier Zeilen die Summe $s = 136 : 4 = 34$ auftreten.
b) Nach den Bedingungen für ein magisches Quadrat ist

$$\begin{array}{rlrl} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s & \text{1. Zeile} & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = s & \text{4. Zeile} \\ -a_2 - b_2 - c_2 - d_2 = -s & \text{2. Spalte} & -a_3 - b_3 - c_3 - d_3 = -s & \text{3. Spalte} \\ a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = s & \text{Hauptdiagonale} & d_1 + c_2 + b_3 + a_4 = s & \text{Nebendiagonale} \end{array}$$

Die Addition dieser sechs Gleichungen ergibt $2(a_1 + a_4 + d_1 + d_4) = 2s$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 3 - 280923
In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet.
Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $AD = b$.
Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

I. Wenn die Winkelgrößen α, β, γ eines Dreiecks ABC die Voraussetzungen erfüllen, so folgt:
Wegen $AD = b$ ergibt nach dem Basiswinkelsatz $\angle ADC = \angle ACD = \gamma$. Da AD den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ACD$

$$\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma \quad ; \quad \alpha = 360° - 4\gamma \tag{1}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ folgt damit

$$\beta = 180° - (360° - 4\gamma) - \gamma = 3\gamma - 180° \tag{2}$$

Für die Voraussetzung, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:
1. Fall: $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$360° - 4\gamma = 2\gamma - 90°; \quad \gamma = 75°; \quad \alpha = 60°; \quad \beta = 45°$$

2. Fall: $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$3\gamma - 180° = 180° - \frac{3}{2}\gamma; \quad \gamma = 80°; \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 60°$$

3. Fall: $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$\gamma = 90° - \frac{\gamma}{2}; \quad \gamma = 60°; \quad \beta = 0°$$

Der 3.Fall scheidet also aus.
II. Die Winkelgrößen des 1. bzw. des 2.Falles, d.h.

$$\alpha = 60°; \quad \beta = 45°; \quad \gamma = 75° \quad (3) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 60°; \quad \gamma = 80° \tag{4}$$

sind Innenwinkelgrößen von Dreiecken ABC (denn sie sind positiv und erfüllen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). Sie erfüllen auch die Bedingung, dass $AD = b$ für die Winkelhalbierende AD gilt; denn sie erfüllen die Gleichung $\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma$, woraus nach dem Innenwinkelsatz $\angle ADC = \gamma$ und daher nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = AC$ folgt.
Mit I., II. ist gezeigt, dass in (3), (4) alle gesuchten Möglichkeiten für α, β, γ angegeben sind.

Aufgabe 4 - 280924
a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!
b) Beweisen Sie, dass es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lässt!

a) Von je zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets eine ungerade, die andere gerade. Daher ist ihre Summe stets ungerade.
Also können höchstens die ungeraden, d.h. die von 2 verschiedenen Primzahlen eine Darstellung der genannten Art besitzen.
Für jede Primzahl $p \geq 3$ gibt es die Darstellung

$$p = \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2}$$

und darin gilt: Da p ungerade ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ gerade, also $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+1}{2}$ ganze Zahlen. Wegen $p \geq 3$ ist $p - 1 \geq 2$, also $\frac{p-1}{2} \geq 1$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Wegen $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ ist $\frac{p+1}{2}$ die darauffolgende (und damit ebenfalls von Null verschiedene) natürliche Zahl.
Die gesuchten Primzahlen sind also genau alle Primzahlen $p \geq 3$.

b) Angenommen, es gäbe eine Primzahl p und für sie eine Darstellung $p = a_1 + ... + a_n$ (1) mit $n \geq 3$ aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $a_1, ..., a_n$.

Nach der bekannten Formel für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen wären dann

$$p = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$$

Daher müsste mindestens eine der Zahlen n, $(a_1 + a_n)$ gerade sein. Ferner wäre $a_1 \geq 1$, $a_n \geq n$, also $a_1 + a_n \geq 1 + n$.
Wäre n gerade, so wäre wegen $n \geq 3$ sogar $n \geq 4$, also p in die ganzzahligen Faktoren $\frac{1}{2}n \geq 2$ und $a_1 + a_n > n \geq 4$ zerlegt.
Wäre $a_1 + a_n$ gerade, so wäre p in die ganzzahligen Faktoren $n \geq 3$ und

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + n) \geq \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

zerlegt. Damit ist die Annahme über (1) widerlegt, d.h. der verlangte Beweis geführt.

Lösungen der II. Runde 1988 übernommen von [5]

6.30.3 III. Runde 1988, Klasse 9

Aufgabe 1 - 280931
Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Sind a und b nicht durch 5 teilbar, lassen sie aber wegen $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ und $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ beide die Reste 1 oder 4 bei der Division durch 5.
Damit lässt $a^2 + b^2$ also einen der Reste $1 + 1 = 2$, $1 + 4 = 4 + 1 = 5$ – also 0 – oder $4 + 4 = 8$ – also 3 – bei der Division durch 5. Da aber auch c^2 als Quadratzahl nur einen der Reste 0, 1 oder 4 bei der Division durch 5 lassen kann, fallen der erste und der letzte Fall für den Rest der Summe $a^2 + b^2$ weg und $a^2 + b^2 = c^2$ muss durch 5 teilbar sein, $\square$.

Aufgabe 2 - 280932
In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.
Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Die Felder des Quadrats seien mit a_1 bis d_4 bezeichnet.
Dann kann nicht in drei Eckfelder des Quadrats die gleiche Zahl eingetragen werden. Andernfalls wären o.B.d.A. $a_1 = a_4 = d_4 = 0$. Dann folgt in Zeile a, dass $a_2 = a_3 = 1$ und analog in Spalte 4, dass $b_4 = c_4 = 1$ sein muss. In der Diagonale a_1–d_4 gilt aber auch $b_2 = c_3 = 1$, sodass sich in Zeile b schließlich $b_1 = b_3 = 0$ und in Zeile c $c_1 = c_2 = 0$ ergibt, womit man in Spalte 1 den Widerspruch $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ erhält.

Also müssen in je zwei der vier Eckfelder des Quadrats die Zahl 0 und in die zwei anderen die Zahl 1 eingetragen werden. Wir unterscheiden danach, ob sich die beiden Felder mit der 0 gegenüberliegen, oder ob sie benachbart sind:

Fall 1: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen einander diagonal gegenüber, d.h., nach ggf. erfolgter Spiegelung gilt o.B.d.A. $a_1 = d_4 = 0$ und $a_4 = d_1 = 1$. Es folgt auf den Diagonalen automatisch $b_2 = c_3 = 1$ und $b_3 = c_2 = 0$, man erhält also

0			1
	1	0	
	0	1	
1			0

Fall 1.1: Es ist $a_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 1$, $d_2 = 1$ und $d_3 = 0$. Man erhält

0	0	1	1
	1	0	
	0	1	
1	1	0	0

Fall 1.1.1: Es ist $b_1 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 1$, $c_1 = 1$ und $c_4 = 0$, sodass man die folgende (wie man leicht überprüft) Lösung erhält:

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Fall 1.1.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	0	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0

Fall 1.2: Es ist $a_2 = 1$. Dann ist zwangsweise $a_3 = 0$, $d_2 = 0$ und $d_3 = 1$. Wäre $b_1 = 0$, so könnte man dies durch Spiegelung auf den Fall 1.1.2 zurückführen. Also muss $b_1 = 1$ sein, was auf $b_4 = 0$, $c_1 = 0$ und $c_4 = 1$, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0

Fall 2: Die beiden Eckfelder mit Eintrag 0 liegen auf einer gemeinsamen Kante, d.h., es gilt nach ggf. erfolgter Spiegelung o.B.d.A. $a_1 = a_4 = 0$ und $d_1 = d_4 = 1$. Es folgt sofort $a_2 = a_3 = 1$ und $d_2 = d_3 = 0$, sodass man folgende Situation erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.1: Es ist $b_2 = 0$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 1$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 1$, was sofort $b_3 = 0$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 1$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 0$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

Fall 2.2: Es ist $b_1 = 1$. Dann ist zwangsweise $b_3 = 0$ und aufgrund der Diagonalen a_1–d_4 auch $c_3 = 0$, was sofort $b_3 = 1$, also in Zeile b auch $b_1 = b_4 = 0$ sowie in Zeile c analog $c_1 = c_4 = 1$ nach sich zieht, sodass man die folgende Lösung erhält:

0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1

Die Fallunterscheidung ist vollständig und die fünf erhaltenen Eintragungen (von denen man jeweils schnell überprüft, dass sie alle geforderten Eigenschaften erfüllen) gehen paarweise nicht durch Spiegelung auseinander hervor, bilden also die gesuchte Lösungsmenge.

Aufgabe 3 - 280933
Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, dass die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

Es gibt zu jeder solcher Pyramide eine solche Ebene:
Da P eine gerade Pyramide ist, sind alle dreieckigen Seitenflächen von P zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke. Es sei a die Kantenlänge des Quadrats $ABCD$ (und damit Basislänge in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABS$ und $\triangle DAS$) sowie $0° < \alpha < 45°$ die Größe des Basiswinkels in den Seitenflächen.
Damit ist die Länge h der Höhe von S in den "Seitendreiecken" nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck gleich $h = \frac{a}{2} \cdot \tan\alpha > 0$, da die Höhe mit der Seitenhalbierenden zusammenfällt, und die Länge s der von der Spitze S der Pyramide ausgehenden Kanten mit dem Satz des Pythagoras

gleich $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > 0$.

Es sei $0 \leq \beta \leq 90°$ der Winkel, der $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$ erfüllt. Wegen $0 < \alpha < 45°$ ist $0 < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $0 < \sin\beta < \frac{1}{2}$ und damit sogar $0 < \beta < 30°$. Insbesondere ist auch

$$180° > \gamma := 180° - \alpha - \beta > 180° - 45° - 30° = 105°$$

sodass sich ein stumpfwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ bilden lässt. Außerdem gilt wegen $90° < \gamma < 180°$, dass $\cos\gamma$ negativ ist. Schließlich sei f eine reelle Zahl, die definiert ist als $f := \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\gamma}$, was wegen $\cos\gamma < 0$ eine wohldefinierte, positive reelle Zahl ist.

Es sei nun $0 < x < a$ eine Länge mit $f \cdot x < s$. Wir betrachten die Punkte S_1 auf der Strecke AB und S_2 auf der Strecke DA mit $|AS_1| = |AS_2| = x$. (Wegen $0 < x < a$ liegen diese Punkte im Innern der jeweils entsprechenden Strecke.) Dann gilt (wegen des rechten Winkels bei A) offenbar $|S_1S_2| = \sqrt{2}x$.

Schließlich sei S_3 der Schnittpunkt des Kreises in der Ebene der Seitenfläche SAB um S_1 mit Radius $\sqrt{2}x$ und dem von A ausgehenden und durch S verlaufenden Strahl. (Ein solcher Schnittpunkt muss wegen $|AS_1| = x < 2\sqrt{x}$ existieren und ist dann auch aufgrund der nur einen betrachteten Richtung der von A ausgehenden Strahlen auch eindeutig bestimmt.)
Liegt S_3 im Innern der Strecke AS, so erhält man mit einem ebenen Schnitt entlang der durch S_1, S_2, S_3 definierten Ebene e genau das nach Konstruktion gleichseitige Dreieck $\triangle S_1S_2S_3$ mit Kantenlänge $\sqrt{2}x$, da nicht nur $|S_1S_2| = \sqrt{2}x = |S_3S_1|$, sondern aus Symmetriegründen auch $|S_3S_2| = |S_3S_1| = \sqrt{2}x$ gilt.

Wir zeigen nun, dass S_3 im Innern der Strecke AS liegt, indem wir das Dreieck $\triangle AS_1S_3$ betrachten und die Streckenlänge $|AS_3|$ berechnen. Dazu berechnen wir erst dessen Innenwinkel:

Es ist $\angle S_1AS_3 = \angle BAS = \alpha$ und nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin\angle AS_3S_1}{|AS_1|} = \frac{\sin\angle S_1AS_3}{|S_1S_3|}.$$

Setzt man hierin die schon bekannten Größen $|AS_1| = x$, $|S_1S_3| = \sqrt{2}x$ und $\angle S_1AS_3 = \alpha$ ein, erhält man

$$\sin\angle S_1AS_3 = \frac{x}{\sqrt{2}x} \cdot \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} = \sin\beta,$$

also wegen $\beta < \alpha < 90°$ (der kleineren Seite $|AS_1| = x < \sqrt{2}x = |S_1S_3|$ liegt auch der kleinere Winkel gegenüber) auch $\angle S_1AS_3 = \beta$. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AS_1S_3$ ist damit schließlich auch $\angle S_3S_1A = \gamma$, sodass wir seine drei Innenwinkel schon kennen.
Nach dem Kosinussatz in diesem Dreieck gilt dann

$$|AS_3| = \sqrt{|AS_1|^2 + |S_1S_3|^2 - 2 \cdot |AS_1| \cdot |S_1S_3| \cdot \cos\gamma} = \sqrt{x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}x \cdot \cos\gamma} =$$

$$= x \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\gamma} = f \cdot x < s = |AS|,$$

sodass S_3 tatsächlich im Innern der Strecke AS liegt und man durch S_1, S_2 und S_3 die Ebene e definieren kann, die beim Schnitt mit P die Schnittfläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle S_1S_2S_3$ erzeugt, $\square$.

Aufgabe 4 - 280934
Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung gilt:

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in x und y, sodass wir o.B.d.A. $y \geq x$ annehmen können. Durch Multiplikation mit $y^6 > 0$ geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

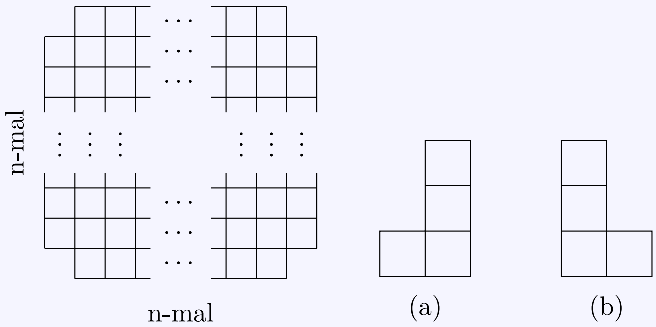
bzw. nach der Substitution $t := \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ in $t^{-1} + t^{13} \geq t^{12} + 1$. Da beide Seiten der Ungleichung offensichtlich positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, sodass die Ungleichung äquivalent ist zu $t^{-2} + 2 \cdot t^{-1} \cdot t^{13} + t^{26} \geq t^{24} + 2t^{12} + 1$ bzw. $t^{26} - t^{24} \geq 1 - t^{-2}$, also nach Multiplikation mit t^2 zu $t^{28} - t^{26} = t^{26} \cdot (t^2 - 1) \geq t^2 - 1$, was wegen $t \geq 1$ und damit sowohl $t^2 - 1 \geq 0$ auch $t^{26} \geq 1$ wahr ist, sodass auch die Ausgangsgleichung wahr ist, $\square$.

Aufgabe 5 - 280935
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Es kann kein solches Rechteck geben:
Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann es kein solches Rechteck geben, $\square$.

Aufgabe 6 - 280936

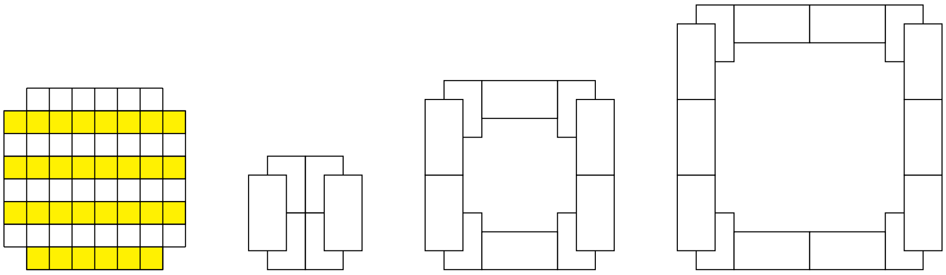
Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!
Hinweis: Es ist auch zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.



Da (a) und (b) beide Fläche 4 haben, muss damit so eine Lösung existiert notwendigerweise $n^2 - 4$ durch 4 teilbar sein, d.h. es muss n gerade sein. Für gerades n können wir die Zeilen des Brettes abwechselnd mit weiß und grün einfärben (siehe Skizze unten). Diese Färbung hat die Eigenschaft, dass egal wie man die Teile (a) bzw. (b) auf dem Brett positioniert, genau 1 Feld des Teils grün und die anderen 3 weiß (Typ A) bzw. genau 1 Feld weiß und die anderen 3 grün (Typ B) sind.

Da die Anzahl der weißen Felder gleich der Anzahl der grünen Felder ist, folgt, dass in einer zulässigen Zerlegung die Anzahl der Teile vom Typ A gleich der Anzahl der Teile vom Typ B sein muss. Also muss $n^2 - 4$ sogar durch 8 teilbar sein, also muss n von der Form $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$ sein.

Diese Bedingung ist auch hinreichend: Für $n = 2$ ist eine Zerlegung offensichtlich möglich (von einem 2×2-Brett wurden alle vier Felder entfernt.).
Außerdem ist klar, dass man 2×4-Rechtecke in genau zwei Teile zerlegen kann.
Hat man eine Zerlegung eines Brettes der Größe $n = 4k + 2$ gefunden, dann kann man diese zu einer Zerlegung eines Brettes der Größe $4k+6$ erweitern, indem man wie in der Skizze vier Teile in den Ecken des bereits zerlegten Brettes positioniert und die beiden horizontalen Seiten dann noch mit k 2×4-Rechtecken auffüllt und die beiden vertikalen Seiten mit $k + 1$ 2×4-Rechtecken ergänzt:



Aufgabe gelöst von Nuramon

6.31 XXIX. Olympiade 1989

6.31.1 I. Runde 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290911
Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Sind a, 5 die Ziffern der zu quadrierenden Zahl, so lautet diese $10a + 5$. Ihr Quadrat ist

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$$

also die nach der angegebenen Regel zu bildende Zahl.

Aufgabe 2 - 290912
Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Antwort: Ja, nämlich zum Beispiel 10243.

Es fehlt noch eine Begründung für diese Antwort. Außerdem seien einige hinführende Bemerkungen gegeben, die nicht notwendig zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe gehören:

Wenn eine Primzahl die genannten Eigenschaften hat, so kann jedenfalls keine der Ziffern 0, 2, 4 ihre Einerziffer sein. Der Aufwand beim Überprüfen, ob eine Primzahl vorliegt, ist um so kleiner, je kleiner die zu überprüfende Zahl ist. Daher beginnt man zweckmäßig mit der kleinsten fünfstelligen Zahl, die sich mit den genannten Ziffern schreiben lässt und 1 oder 3 als Einerziffer hat, d.h. mit der Zahl 10243.

Diese Zahl ist als Primzahl nachgewiesen, wenn sie durch keine Primzahl, die kleiner als 10243 ist, teilbar ist. Dabei genügt es wegen $\sqrt{10243} < 102$, nur die Primzahlen ≤ 101 als Teiler zu überprüfen. Denn falls 10243 einen Teiler ≥ 102 hat, so muss er bei der Zerlegung von 10243 zusammen mit einem Faktor auftreten, der kleiner als 102 ist, dessen Primfaktoren also bereits überprüft sind.

Mit einer Primzahltabelle und dem SR 1 (oder anderen Rechenhilfsmitteln) stellt man schnell fest, dass keine der Primzahlen 2, 3, ..., 101 Teiler von 10243 ist. Damit ist die Antwort begründet.

Bemerkung: Sämtliche Primzahlen mit den genannten Eigenschaften sind: 10243, 12043, 20143, 20341, 20431, 23041, 24103, 30241, 32401, 40123, 40213, 40231, 41023, 41203, 42013, 43201.

Aufgabe 3 - 290913
Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verlässt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.
a) Bei welchem Kind muss der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, nummeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)
b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen lässt.

a) I. Man kann zunächst zur Vereinfachung die Silbenzahl durch jeweils möglichst kleine positive Werte ersetzen. Wegen $15 = 1 \cdot 11 + 4$ wird nämlich beim Anzählen die Runde der Kinder erst 1 mal ganz durchlaufen, und danach verbleiben nur noch 4 Silben. Auf diese Weise folgt: Wenn im Kreis jeweils nur noch

$$11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$

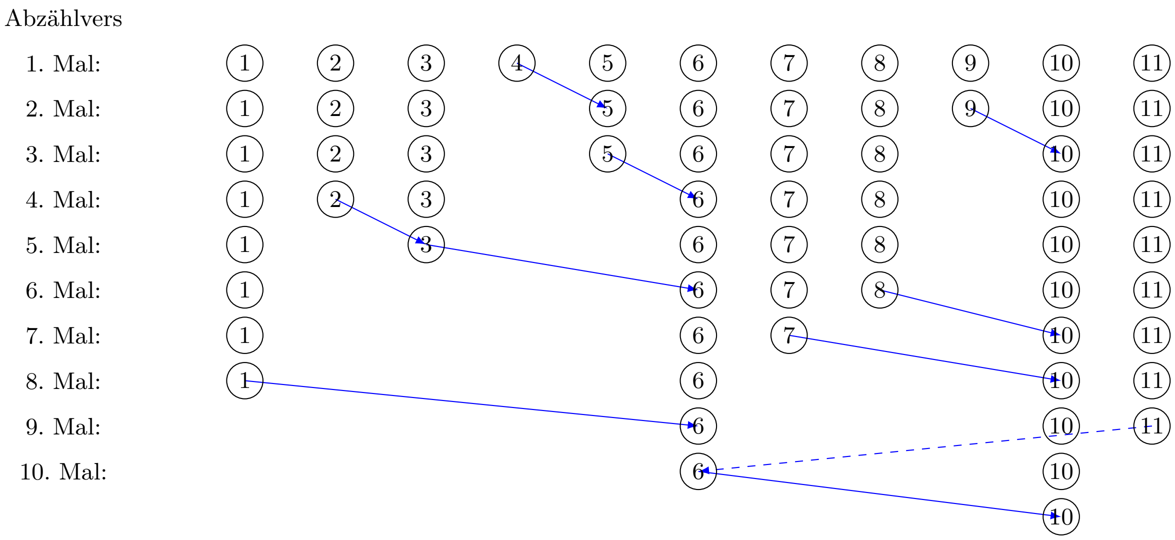
Kinder stehen, so kann wegen

$$15 = 1\cdot 11+4 = 1\cdot 10+5 = 1\cdot 9+6 = 1\cdot 8+7 = 2\cdot 7+1 = 2\cdot 6+3 = 2\cdot 5+5 = 3\cdot 4+3 = 4\cdot 3+3 = 7\cdot 2+1$$

die Silbenzahl ersetzt werden durch

$$4, 5, 6, 7, 1, 3, 5, 3, 3, 1$$

II. Nun kann man (mit der Vereinfachung I. oder ohne sie) das Anzählen mit einem bei Kind 1 beginnenden "Probespiel" verfolgen:



III. Es bleibt also dasjenige Kind übrig, das ausgehend von Kind 1 durch Weiterzählen um 9 (in der ursprünglichen Aufstellung) zu erreichen wäre. Der Spielbeginn, der zum gewünschten Übrigbleiben von Kind 1 führt, wird daher gefunden, indem man in der ursprünglichen Aufstellung von Kind 1 an um 9 zurückzählt. Damit findet man:

Wenn Kind 1 gewinnen soll, so muss das Auszählen bei Kind 3 beginnen.

b) Die Aufgabe wird z.B. durch folgendes BASIC-Programm gelöst:

```
100 INPUT "Kinderzahl"; K
110 INPUT "Silbenzahl"; S
120 DIM M(K)
130 FOR N=K TO 2 STEP -1
140   T = S - N * INT(S/N)
150   IF T = 0 THEN T = N
160   FOR I = 1 TO T
170      GOSUB 300
180   NEXT I
190   M(A) = 1
200 NEXT N
210 GOSUB 300
220 B = 2 - A
230 IF B < 1 THEN B = B+K
240 PRINT "Beginne bei Kind"; B; "!"
250 END
300 REM ABZAEHLEN
310 A = A+1
320 IF A > K THEN A = 1
330 IF M(A)= 1 THEN 310
340 RETURN
```

Bedeutung der Variablen: K Anzahl der Kinder, S Anzahl der Silben, A Nummer des beim Abzählen erreichten Kindes, M(A) Marke 0 oder 1: Kind A ist noch im Spiel oder ausgeschieden, N Anzahl der noch im Spiel befindlichen Kinder, T Ersatzwert für die Silbenzahl, I Zählschritt

Programmteile:

100 bis 120 Eingeben, Speicher reservieren,

300 bis 340 Unterprogramm "Weiterzählen zum nächsten noch im Spiel befindlichen Kind"

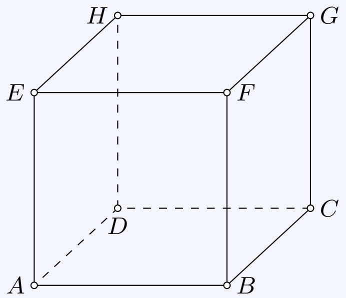
130 bis 210 "Probespiel":

140 bis 150 Division von S durch N mit Rest T ergibt die vereinfachte Silbenzahl T; nur ist 0 durch N zu ersetzen

160 bis 210 Nach T Zählschritten scheidet das erreichte Kind aus. Am Ende des "Probespieles" noch ein Zählschritt bis zum einzigen noch im Spiel befindlichen Kind.

220 bis 240 Ermittlung und Ausgabe der Antwort: Statt um A-1 vorwärts, ebenso viel zurückzählen bis 1-(A-1)=2-A; dies ggf. um K korrigieren.

Aufgabe 4 - 290914

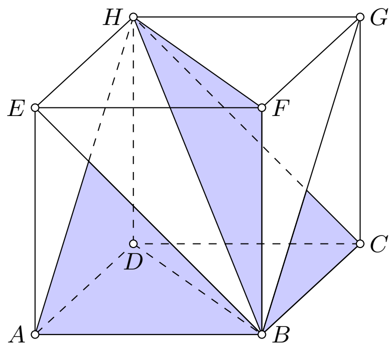


Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.
(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!



Jedes dieser Dreiecke hat als Seitenlängen die Längen einer Seitenkante, einer Flächendiagonale und einer Raumdiagonale des Würfels. Da beim Würfel alle Seitenkanten bzw. Flächen- bzw. Raumdiagonalen jeweils untereinander gleichlang sind, sind somit die genannten Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sss sämtlich untereinander kongruent.

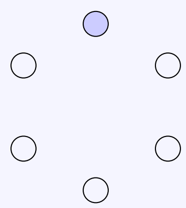
Lösungen der I. Runde 1989 übernommen von [5]

6.31.2 II. Runde 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290921
Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Nein, kann man nicht:
Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, sodass für jede der $\frac{1989 \cdot 1988}{2} < 1000 \cdot 1989 < 2 \cdot 10^6$ Möglichkeiten, aus den 1989 Geraden zwei auszuwählen, höchstens ein Schnittpunkt in der Figur enthalten ist. Es gibt also in jedem Fall weniger als 2 Millionen Schnittpunkte.

Aufgabe 2 - 290922
Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben.
Nun soll, beginnend mit dem farbigen Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.
Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen.



Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.
Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, dass leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.
a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?
b) Jemand vermutet: "Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."
Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!
c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist: "Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine - auch bei Abzählbeginn im farbigen Feld - ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

a) Weggenommen werden die Steine auf den Feldern, die bei der ursprünglichen Nummerierung vor der ersten Wegnahme die Nummern 4, 2 und 1 hatten. Dabei wurde allein im dritten Durchgang das schon leere Feld mit ursprünglicher Nummerierung 4 übersprungen. Also sind auf jenen die schwarzen und auf die anderen die weißen Steine zu legen, damit am Ende die weißen übrig bleiben.

b) Für $a = 10$ wird zuerst auch der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer $10 - 6 = 4$ entfernt, im zweiten Durchlauf aber der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3, da nun der zweite Umlauf durch die noch übrigen 5 Felder nach 10 Schritten mit dem letzten besetzten Feld vor Beginn dieses zweiten Durchlaufs (also dem mit ursprünglicher Nummer 3) abgeschlossen wird. Da für $a = 4$ aber nicht der Stein auf dem Feld mit ursprünglicher Nummer 3 entfernt wurde, unterscheiden sich also diese beiden Ergebnisse.

c) Die Aufgabenstellung schließt $z = 0$ nicht aus, was eine Triviallösung wäre. Wir zeigen aber auch, dass es unendlich viele weitere positive natürliche Zahlen z gibt, die die Aussage der Aufgabenstellung erfüllen.
Damit die ersten Züge für a und $a + z$ den gleichen Stein entfernen, müssen a und $a + z$ den gleichen Rest bei der Teilung durch 6 lassen, also z durch 6 teilbar sein, da dann zwar ggf. verschieden viele Umläufe um die anfänglich 6 belegten Felder durchgeführt werden, aber an der gleichen Stelle die Zählung stoppt, sodass der gleiche erste Stein entfernt wird.

Damit darauf aufbauend die zweiten Züge für a und $a + z$ den gleichen zweiten Stein entfernen, müssen a und $a + z$ auch den gleichen Rest bei der Teilung durch 5 lassen, also z auch durch 5 teilbar sein, da dann analog wieder ggf. unterschiedlich viele Umläufe durch die 5 noch verbliebenen besetzten Felder durchgeführt werden, aber wieder an der gleichen Stelle gestoppt und damit auch der gleiche zweite Stein entfernt wird. Für den dritten Zug folgt analog, dass z durch 4 teilbar sein muss.
Tatsächlich erfüllen alle z, die durch $60 = 6 \cdot 10 = 5 \cdot 12 = 4 \cdot 15$ teilbar sind, die Aussage der Aufgabenstellung, dass für a und $a + z$ die gleichen Steine (sogar in der gleichen Reihenfolge) entfernt werden.

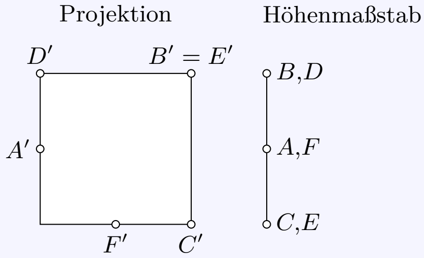
Aufgabe 3 - 290923
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n+1$ ist.

Endet die Zahl n auf genau k Neunen und besitzt davor die Ziffer $z < 9$ (ggf. mit führender Null), so endet die Zahl $n+1$ auf genau k Nullen und besitzt davor die Ziffer $z+1 \leq 9$. (Die Ziffern vor z bzw. $z+1$ sind in beiden Zahlen identisch.) Seien q_n und q_{n+1} die Quersummen von n bzw. $n+1$. Dann gilt also $q_{n+1} = q_n - k \cdot 9 + 1$.

Damit beide Quersummen durch 5 teilbar sind, muss also $k \cdot 9 - 1$ durch 5 teilbar sein. Dies tritt zum ersten mal für $k = 4$ auf, sodass jede Zahl n, die der Aufgabenstellung genügt, auf mindestens vier Neunen enden muss.

Tatsächlich erfüllen die ersten dieser Zahlen, nämlich 9999, 19999, 29999 und 39999 nicht die Bedingung, dass ihre Quersumme durch 5 teilbar ist. Die nächste solche Zahl $n = 49999$ erfüllt aber die Aufgabenstellung, da sowohl ihre Quersumme 40 als auch die Quersumme 5 von $n+1 = 50000$ durch 5 teilbar sind.

Aufgabe 4 - 290924

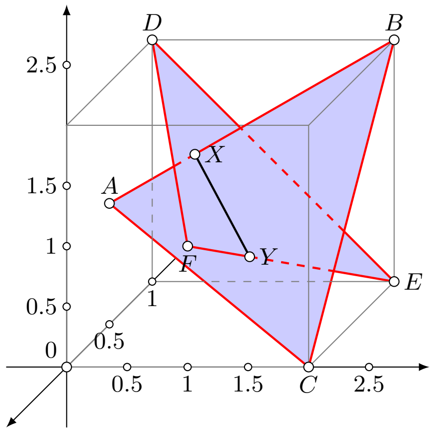


Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.
Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm.
Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!
b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!
Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!
Eine Verdeckung durch davor liegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!
c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y!
Beschreiben Sie diese Konstruktion!

a), b): Eine Darstellung der beschriebenen Situation (mit Ausnahme der geforderten Schraffuren) findet sich in folgendem Bild, wobei hierfür eine Längeneinheit als 3 cm gewählt wurde.

Dabei ist genau der Teil des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht sichtbar, welcher durch das Viereck $FYXS$ verdeckt wird, wobei S der Schnittpunkt in der Schrägbilddarstellung von DF und AX ist. Vom Dreieck $\triangle DEF$ ist genau jenes Viereck, "der von D ausgehende Bereich bis zur Geraden AB" und "der von E ausgehende Bereich bis zur Geraden BC" sichtbar.



c) Jeder der beiden Endpunkte der Strecke XY muss auf dem Rand mindestens einer der beiden Dreiecksflächen liegen, findet sich also dort, wo eine Kante einer Fläche die andere durchstößt. Offenbar schneidet die Strecke AB das Dreieck $\triangle DEF$ und die Strecke EF das Dreieck $\triangle ABC$, während die übrigen Seitenkanten dieser beiden Dreiecke das jeweils andere Dreieck nicht schneiden. Es sind also genau diese beiden Schnittpunkte zu bestimmen.

Jeder Punkt auf der Geraden AB besitzt für ein bestimmtes $t \in \mathbb{R}$ die Koordinaten $(0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (2 - 1), 1 + t \cdot (2 - 1)) = (2t, 1 + t, 1 + t)$. (Dies erhält man aus der Zweipunktform zur Aufstellung der Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte.) Weiterhin gilt für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch die Punkte D, E und F, dass $x + z = 2$ ist. Für den Schnittpunkt X der Geraden mit der Ebene muss also $2t + 1 + t = 2$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ gelten, sodass X die Koordinaten $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ besitzt.

Analog gilt für jeden Punkt auf der Geraden FE, dass er für ein reelles t die Koordinaten $(1 + t \cdot (2 - 1), 0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (0 - 1)) = (1 + t, 2t, 1 - t)$ besitzt, sowie für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch A, B und C, dass $y = z$ gilt. Also muss der Schnittpunkt Y dieser beiden Objekte die Bedingung $2t = 1 - t$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ erfüllen, sodass Y die Koordinaten $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ besitzt.

Kennt man die Koordinaten beider Punkte X und Y, kann man sie leicht in das Schrägbild eintragen. (Streckenlängen von einem Drittel bzw. Vielfache davon kann man mit dem Strahlensatz konstruieren.)

Aufgaben der II. Runde 1989 gelöst von cyrix

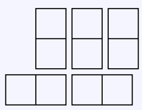
6.31.3 III. Runde 1989, Klasse 9

Aufgabe 1 - 290931
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.
Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\angle BAC$ der Größe 7° bilden.
Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.
Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Zur Konstruktion: 1) Man zeichne einen Kreis k um A, der beide Strecken AB und AC schneidet. Die Schnittpunkte mit AB und AC seien mit P_0 und P_7 bezeichnet, die Streckenlänge $|P_0P_7|$ mit r_7.
2) Der Kreis um P_7 mit Radius r_7 schneide den Kreis k außer in P_0 noch in einem zweiten Punkt P_{14}; der Kreis um P_{14} mit Radius r_7 außer in P_7 noch in einem zweiten Punkt P_{21}, usw. Man erhält auf diese Weise sukzessive die Punkte P_{7n} auf k mit $n = 0, 1, \ldots, 13$, insbesondere also den Punkt P_{91}.
3) Man errichte das Lot l auf AB durch A und als Schnittpunkt des Lots l mit dem von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k, auf dem auch P_7 liegt, den Punkt P_{90}. Der Abstand $|P_{90}P_{91}|$ sei mit r_1 bezeichnet.
4) Der Kreis um P_0 mit Radius r_1 schneide den von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k in P_1; der Kreis um P_1 den Kreis k neben P_0 in einem zweiten Punkt P_2; der Kreis um P_2 den Kreis k neben P_1 in einem zweiten Punkt P_3; usw., bis man den Punkt P_6 erhält.
5) Die Strahlen AP_i mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ zerlegen den Winkel $\angle P_0AP_1 = \angle BAC$ in sieben gleich große Teile.

Begründung:
Die Indizes der Punkte sind so gewählt, dass für jedes i der Winkel $\angle P_0AP_i$ genau $i°$ groß ist. Dies ist für P_0 und P_7 aufgrund der gezeichneten Strecken und dem von diesen aufgespannten Winkel der Fall.
Da die Bögen auf k zwischen P_{7n} und $P_{7(n+1)}$ alle genauso groß sind wie der zwischen P_0 und P_7, gilt auch $\angle P_{7n}AP_{7(n+1)} = 7°$ und damit sukzessive auch $\angle P_0AP_{7n} = 7n°$.
Für P_{90} gilt $\angle P_0AP_{90} = 90°$, da dieser Punkt auf dem Lot zu AP_0 durch A liegt. Insbesondere ist nun $\angle P_{90}AP_{91} = \angle P_0AP_{91} - \angle P_0AP_{90} = 1°$.
Nach Konstruktion ist der Bogen zwischen P_i und P_{i+1} für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ immer genauso groß wie der zwischen P_{90} und P_{91}, sodass für diese i jeweils $\angle P_iAP_{i+1} = 1°$ gilt und damit sukzessive $\angle P_0AP_i = i°$ für alle $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, was das Gewünschte zeigt, da man dadurch eine entsprechende Unterteilung in 7 Teilwinkel der Größe von je einem Grad erhält.

Aufgabe 2 - 290932



Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:
Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

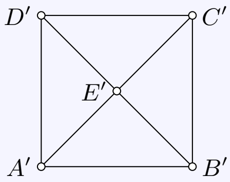
Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x \mid y}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

Da mindestens ein Übertrag notwendig ist, um aus der Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl zu erhalten, muss pro Figur mindestens einer der Dominosteine 6-6, 6-5, 6-4 oder 5-5 beteiligt sein.

Da aber $6+4=5+5=10$ ist, können nicht alle vier jeweils einzeln in einer eigenen Figur liegen, da sonst die ersten beiden stellen der Figuren mit diesen beiden Dominosteinen 1-0 lauten würden, dieser Dominostein aber nur einmal verwendet werden darf.
Also können höchstens drei solche Figuren gebildet werden. Dass dies möglich ist, wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 6 \\ + & 6 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 6 & 0 & 0 \\ + & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 1 \\ + & 5 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 4 \end{array}$$

Aufgabe 3 - 290933



Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:
(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.
(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ϵ ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
(4) Der Punkt D liegt "oberhalb" der Ebene ϵ im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.
(5) Der Punkt E liegt "oberhalb" der Ebene ϵ im Abstand a von ihr.
(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4}a^3$.
Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Da laut Bedingung (3) die Ebene ϵ parallel zur Bildebene ist und sonst in den weiteren Bedingungen nur von ϵ die Rede ist, können wir o.B.d.A. die Bildebene mit ϵ – und diese mit der xy-Ebene – identifizieren. Legen wir dort noch A in den Koordinatenursprung sowie B und C geeignet, dass sie die weiteren Eckpunkte des Quadrats darstellen, erhalten wir also aus den Bedingungen (2) bis (5) die Koordinaten aller fünf Punkte A bis E, die im Folgenden angegeben werden:

$$A(0{,}0{,}0), \quad B(a{,}0{,}0), \quad C(a{,}a{,}0), \quad D\left(0{,}a{,}\frac{a}{2}\right), \quad E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right)$$

Aus der Zeichnung ergibt sich, dass alle vier Punkte A bis D jeweils mit E durch eine Kante verbunden sind. Damit lässt sich der aus allen fünf Punkten bestehende Körper auffassen als die Vereinigung der beiden Tetraeder $ABCE$ und $ACED$. Diese beiden Tetraeder besitzen die gemeinsame Fläche $\triangle ACE$, jedoch keine gemeinsamen inneren Punkte, sodass sich das Volumen des Gesamtkörpers aus der Summe der Volumina der beiden Tetraeder berechnet.

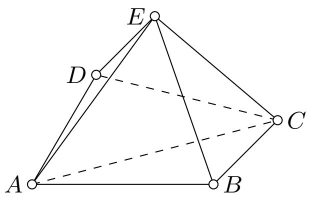
Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ABCE$ betrachten wir zuerst desen Grundfläche $\triangle ABC$. Dieses ist gleichschenklig rechtwinklig mit Kathetenlänge a, sodass es einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2$ besitzt.
Die Spitze E dieses Tetraeders hat nach (5) eine Höhe von a über der Ebene, in der die Grundfläche liegt, sodass sich für den Tetraeder ein Volumen von $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2\right) \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$ ergibt.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ACED$ betrachten wir zuerst dessen Grundfläche $\triangle ACE$. Dieses hat eine Grundseite AC der Länge $\sqrt{2} \cdot a$ und eine Höhe des dritten Punkts E auf diese Seite der Länge a, also einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2$. Die Ebene durch die Punkte A, C und E verläuft parallel zur Projektionsrichtung, sodass das Lot von D auf diese Ebene parallel zur Bildebene – und damit der xy-Ebene – verläuft, also die gleiche Länge besitzt wie die dazu parallele Strecke $D'E'$, da das Viereck $D'E'LD$, wobei L der Lotfußpunkt von D ist, ein Rechteck darstellt. Also besitzt die

Spitze D des Tetraeders $ACED$ eine Höhe von $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ über der Grundfläche $\triangle ACE$, sodass sich für diesen Tetraeder ein Volumen von $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{1}{6} \cot a^3$ ergibt.

Damit hat der Gesamtkörper $ABCDE$ das Volumen $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^3$, im Widerspruch zu Bedingung (6). Es gibt also keinen solchen Körper.

Bemerkung:
Wäre in den Bedingungen (4) und (5) nicht eine Beschreibung der Lage von D und E relativ zur Ebene ϵ durch A, B und C gegeben, sondern relativ zur Bildebene, so wären die Höhen von D und E über ϵ – und damit der xy-Ebene – noch nicht eindeutig bestimmt.
Da die Bildebene "unterhalb" (oder auf) der Ebene ϵ liegen muss, damit die Kanten des Dreiecks $\triangle ABC$ sichtbar sind und E "oberhalb" (oder auf) der Ebene ϵ liegen muss, damit die Kanten AE, BE und CE sichtbar sind, gilt dann, dass E die Höhe h "über" ϵ besitzt, wobei $0 \leq a - h \leq a$ der Abstand der Ebene ϵ zur Bildebene sei.
Der Tetraeder $ABCE$ hätte dann nur noch das Volumen $V_1 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$ und der Tetraeder $ACED$ analog das Volumen $V_2 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot h$, sodass sich für den Gesamtkörper ein Volumen von $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ ergäbe, was mit Bedingung (6) auf $h = \frac{3}{4} \cdot a$ und damit die eindeutig bestimmten Koordinaten $E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4} \cdot a\right)$ und $D\left(0,a,\frac{a}{4}\right)$ führt.
Eine Darstellung dieses Körpers kann man nun leicht aus den Koordinaten seiner Eckpunkte erhalten.



Aufgabe 4 - 290934
Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Wähle $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b - a)$ und $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a)$. Dann ist wegen $b - a > 0$ und $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ auch

$$a < a + \frac{1}{2} \cdot (b - a) = x < a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) = y < a + 1 \cdot (b - a) = b$$

und mit $a,b \in \mathbb{Q}$ auch $x = a + \frac{1}{2} \cdot (b - a) \in \mathbb{Q}$ sowie wegen $\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ auch $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) \notin \mathbb{Q}$ und damit $y = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a) \notin \mathbb{Q}$, $\square$.

Aufgabe 5 - 290935
a) Beweisen Sie, dass es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x - 1) = (x^2 - 1) \cdot f(x + 1) \tag{1}$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.
b) Beweisen Sie, dass es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

a) Es ist für $x = 1$ laut (1) $f(0) = f(1 - 1) = (1^2 - 1) \cdot f(1 + 1) = 0 \cdot f(2) = 0$. Für alle natürlichen Zahlen n gilt für $x = -2n + 1$ wegen(1), dass $f(-2n - 2) = ((-2n + 1)^2 - 1) \cdot f(-2n)$ gilt. Aus $f(0) = 0$ folgt damit direkt $f(-2) = 0$, daraus $f(-4) = 0$ und sukzessive für alle negativen geraden ganzen Zahlen $f(-2n) = 0$, sodass die Funktion unendlich viele Nullstellen besitzt, $\square$.

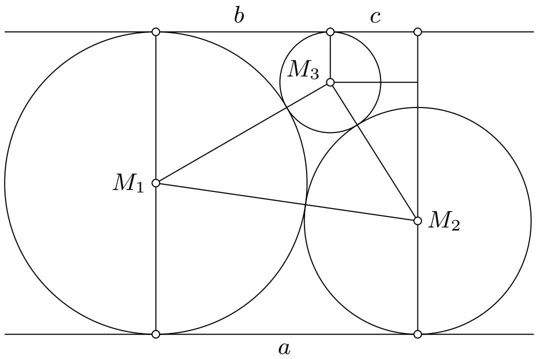
b) Die Gleichung (1) setzt nur Funktionswerte von Argumenten in Beziehung, die sich um genau 2 unterscheiden. Es sei $2\mathbb{Z} + 1$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Da für keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$ gilt, dass $x + 2$ oder $x - 2$ eine ungerade ganze Zahl ist, ist die Wahl des Funktionswert für $f(x)$ unabhängig von der Wahl der Funktionswerte an den ungeraden ganzzahligen Stellen. Also kann man für alle x mit $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$ den Funktionswert $f(x) := 0$ festsetzen und unabhängig davon die für $x \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Setzt man nun $f(1) := 1$, so ergibt sich daraus ein eindeutiger Wert für $f(3)$, daraus ein eindeutiger Wert für $f(5)$ usw. für alle ungeraden natürlichen Zahlen. Umgekehrt folgt aber aus $f(1) = 1$ auch ein eindeutiger Wert, den $f(-1)$ annehmen muss, daraus einer für $f(-3)$ usw. für alle negativen ungeraden ganzen Zahlen.

Diese Funktion f ist wegen $f(1) \neq 0$ nicht konstant 0 ist, erfüllt damit für alle reellen Zahlen x die Funktionalgleichung (1), sodass es eine solche Funktion gibt, $\Box$.

Aufgaben 1-5 der III. Runde 1989 gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 290936
Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$.
Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!



Seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Kreise und a, b, c die Projektionen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3 auf die Tangenten. Dann erhalten wir mittels Pythagoras

$$a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$b^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$
$$c^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $a = 2\sqrt{r_1 r_2}$ und $b = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Mit $c = |a - b|$ ergibt dann die dritte Gleichung

$$4(\sqrt{r_1 r_2} - \sqrt{r_1 r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Nach Ausmultiplizieren und zusammenfassen der Terme ist dieses äquivalent zu $4r_1^2 = 8r_1\sqrt{r_2 r_3}$ und somit

$$r_1^2 = 4r_2 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}$$

6.32 XXX. Olympiade 1990

6.32.1 I. Runde 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300911
Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d.h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, dass jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z.B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z.B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als "Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die "Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Diese Meinung stimmt. Man kann dies folgendermaßen begründen:

Der Schüler A erhält aus der Startzahl z der Reihe nach die Zahlen

$$z-2, z-2\cdot 2, z-3\cdot 2, ...$$

allgemeine nach k-maliger Ausführung die Zahl $z-k\cdot 2$. Der Schüler B erhält entsprechend der Reihe nach

$$\frac{z}{2}, \frac{z}{2\cdot 2}, \frac{z}{2^3}, ...$$

allgemein nach k-maliger Ausführung die Zahl $\frac{z}{2^k}$.

Wegen $z < 1000$ und $2^{10} > 1000$ ist daher spätestens nach 10-maliger Ausführung sein Resultat kleiner als 1. Für den Schüler A ist (wegen $z > 99$) für alle $k \leq 10$ das Resultat nach k-maliger Ausführung $z-k\cdot 2 > 99-20$ größer als 1.

Da schließlich für jede Zahl $x > 1$ auch $\sqrt{x} > 1$ ist, erreicht Schüler C niemals ein Resultat kleiner als 1. Also muss stets der Schüler V verlieren.

Aufgabe 2 - 300912
Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, dass der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, dass das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

Dies Gesamtsteigerung errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahlen $1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 = 1{,}1988 > 1{,}19; \qquad 1{,}19 \cdot 1{,}09 = 1{,}2971 > 1{,}28; \qquad 1{,}29 \cdot 1{,}12 = 1{,}4448 > 1{,}4$$

ist folglich die Gesamtsteigerung größer als 40%. Daher hat Peter nicht recht.

Die Gesamtsteigerung bei viermaliger Steigerung um 10% errechnet sich durch Multiplikation des Anfangswertes mit der Zahl $1{,}1^4$. Wegen

$$1{,}08 \cdot 1{,}12 = 1{,}2096 < 1{,}21 = 1{,}1^2; \qquad 1{,}09 \cdot 1{,}11 = 1{,}2099 < 1{,}21 = 1{,}1^2 \qquad \text{also}$$

$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 < 1{,}1^4$$

führt eine viermalige Steigerung im 10% daher in der Tat zu einer größeren Gesamtsteigerung. Bernds Behauptung trifft also zu.

Hinweis: Mit Taschenrechnergenauigkeit ergibt sich

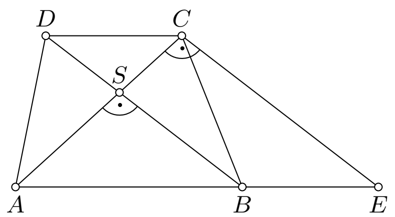
$$1{,}08 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}12 \approx 1{,}463495 \qquad ; \qquad 1{,}1^4 = 1{,}4641$$

Rundet man diese Ergebnisse so, dass ganzzahlige Prozentangaben entstehen, also auf 1,46, so erhält man:

1. Die Gesamtsteigerung (bei Steigerungen um 8 %, 11 %, 9%, 12%) ist größer als 40 %. Allerdings ist der Beweis mit den so vorgenommenen Rundungsschritten nicht einwandfrei, da nicht untersucht wird, ob auch Aufrundungsschritte vorkommen.
2. Die viermalige Steigerung um 10% ergibt nur eine so wenige vergrößerte Gesamtsteigerung, dass man auch formulieren kann, sie sei "nicht wesentlich größer" und "in diesem Sinne" sei Bernds Behauptung nicht zutreffend.

Aufgabe 3 - 300913
Beweisen Sie, dass in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \qquad \text{gilt!}$$

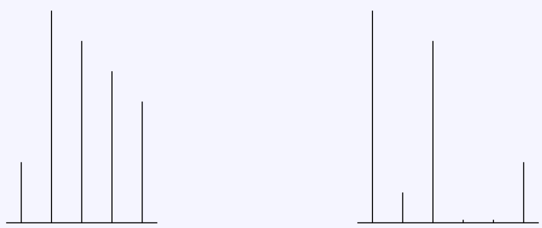


Verlängert man AB um eine Strecke der Länge CD bis E, so sind in dem Viereck $BECD$ die Gegenseiten BE und CD zueinander parallel und gleichlang, also ist $BECD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $BD = EC$ ind $BD \parallel EC$.

Für den Schnittpunkt S von AC und BD gilt nach Voraussetzung $\angle ASB = 90°$, nach dem Stufenwinkelsatz wegen $BS \parallel EC$ also auch $\angle ACE = 90°$. Daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$AC^2 + EC^2 = AE^2 = (AB + BE)^2 \qquad \text{und damit} \qquad AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$$

Aufgabe 4 - 300914
Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, dass das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.



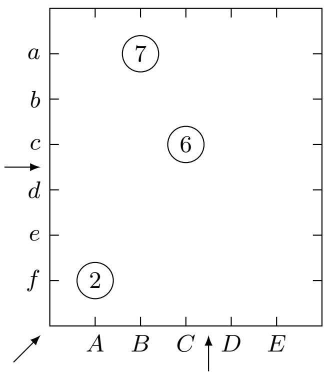
Blick aus südlicher Richtung — Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen. Christoph korrigierte ihn: "Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren.

Schließlich bemerken sie, dass der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, dass die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

Bezeichnen wir die Schornsteine - beim kleinsten beginnend - mit (1) bis (7) und die möglichen Standorte nach der Abbildung durch Buchstabenpaare (Aa) bis (Ef), so ergeben sich aus den Abbildungen der Aufgabenstellung sofort die Standorte für (2), (6), (7).



Ferner müssen (5) und (4) aus westlicher Richtung durch (6) oder (7) verdeckt sein; hiernach und wegen der linken Aufgabenabbildung kann (5) nur aus (Da) oder (Dc) und (4) nur auf (Ea) oder (Ec) stehen.

Da (3) aus westlicher Richtung von einem größeren Schornstein verdeckt ist, scheiden nun für (3) die waagerechten Reihen b, d, e, f aus. Da (3) auch aus südwestlicher Richtung verdeckt ist, scheiden (Ca), (Da), (Dc), (Ec) aus, also muss (3) auf (Ea) stehen.

Damit (3) dann auch aus südlicher Richtung verdeckt ist, folgt: (4) steht auf (Ec).

Hiernach sind aus südwestlicher Richtung bereits (7), (6), (2), (4) zu sehen, und für (5) scheidet (Da) aus, also steht (5) auf (Dc).

Nun folgt weiter:

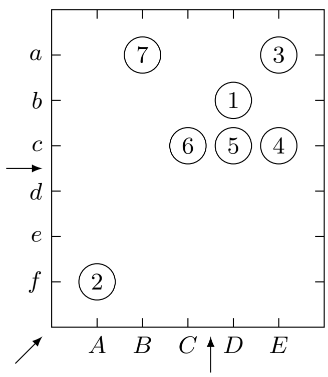
(1) muss auf Linie b stehen.

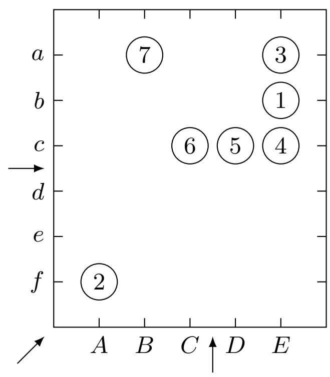
Stünde (1) auf (Ab), so wären aus SW zwei kleinere vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde (1) auf (Bb), so wäre aus S ein kleinerer vor einem größeren Schornstein zu sehen.

Stünde (1) auf (Cb), so wären aus SW fünf Schornsteine nebeneinander zu sehen.

Steht (1) auf (Db) oder (Eb), so sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Also sind genau díe beiden Anordnungen der nachfolgenden Abbildung möglich.





Lösungen der I. Runde 1990 übernommen von [5]

6.32.2 II. Runde 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300921
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}$$

Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{3}{5} < \frac{3}{x-3}$ bzw. $\frac{1}{5} < \frac{1}{x-3}$. Ist $x-3$ negativ, so auch $\frac{1}{x-3}$, sodass die Ungleichung nicht erfüllt wäre. Also ist $x-3$ positiv und damit die Ungleichung äquivalent zu $5 > x-3 > 0$ bzw. $3 < x < 8$.

Aufgabe 2 - 300922
Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\angle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann die Winkelhalbierende nicht durch den Mittelpunkt der Seite AB verlaufen, $\square$.

Aufgabe 3 - 300923
a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z.B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?
b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, dass man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?
c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

a) Jede Auswahl von 3 verschiedenen Ziffern ohne Beachtung der Reihenfolge führt auf genau eine solche dreistellige Zahl. Also gibt es $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$ solcher dreistelligen Zahlen.

b) Jede Auswahl von 2 verschiedenen solchen dreistelligen Zahlen ohne Beachtung der Reihenfolge liefert genau eine solche sechsstellige Zahl. Also gibt es genau $\binom{120}{2} = \frac{120\cdot 119}{2\cdot 1} = 60 \cdot 119 = 7140$ solcher sechsstelligen Zahlen.

c) Damit die Zahl möglichst klein ist, sollten die ersten Ziffern möglichst klein sein. Minimal möglich ist für eine dreistellige Zahl aus a) der Wert 210. Dann ist aber die um 1 größere Zahl nicht von der in a) beschriebenen Form.
Dafür muss die um 1 erhöhte Einerziffer immer noch kleiner als die Zehnerziffer sein, sodass diese mindestens 2 und damit die Hunderterziffer mindestens 3 betragen muss. Tatsächlich ist die minimale Möglichkeit dafür 320321, sodass dies die gesuchte Telefonnummer ist.

Aufgabe 4 - 300924
Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet:
Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen.
Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können. Er möchte die m Strahlen so zeichnen, dass sich dabei
a) möglichst wenige,
b) möglichst viele

verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Auf jedem Strahl liege ein von P verschiedener Punkt P_i, $i = 0, \ldots, m-1$, sodass diese in mathematisch positivem Drehsinn den Punkt P durchlaufen.

a) Nach Konstruktion sind die Winkel $\angle P_0PP_i$ für alle $i = 1, \ldots, m-1$ paarweise verschieden. Also gibt es wenigstens $m-1$ verschiedene Winkel. Ordnet man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{i}{m} \cdot 360°$ gilt, so werden nur Winkel von dieser Form angenommen, da für $i < j$ dann $\angle P_iPP_j = \angle P_0PP_j - \angle P_0PP_i = \frac{j-i}{n} \cdot 360°$ bzw. $\angle P_jPP_i = 360° - \angle P_iPP_j = \frac{m-(j-i)}{m} \cdot 360°$ gelten. Also sind minimal $m-1$ verschiedene Winkelgrößen möglich.

b) Die maximal mögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen erhielte man, wenn für je zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ mit $0 \leq i,j \leq m-1$ die Winkel $\angle P_iPP_j$ alle paarweise verschieden wären. Dann erhielte man $m \cdot (m-1)$ verschiedene Winkelgrößen.
Um zu zeigen, dass dies möglich ist, ordne man die Strahlen so an, dass $\angle P_0PP_i = \frac{3^i}{3^m} \cdot 360°$ für alle $i = 1, \ldots, m-1$ gilt. Dann ist offenbar $\angle P_iPP_j < 180°$, wenn $i < j$ und $\angle P_iPP_j > 180°$, wenn $j > i$. Es können also zwei solche Winkel $\angle P_iPP_j$ und $\angle P_kPP_\ell$ nur dann gleich sein, wenn $i < j$ und $k < \ell$, oder $i > j$ und $k > \ell$ gilt.
Im zweiten Fall sind dann aber auch die entsprechenden Winkel in der jeweils anderen Orientierung gleich, sodass wir o.B.d.A. $i < j$ und $k < \ell$ voraussetzen können. Aus $\angle P_iPP_j = \angle P_kPP_\ell$ folgt dann $3^j - 3^i = 3^\ell - 3^k$.
Die linke Seite der Gleichung ist eine durch 3^i, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl, die rechte Seite analog eine durch 3^k, aber keine größere Dreierpotenz teilbare natürliche Zahl.
Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit $i = k$, woraus sofort auch $j = \ell$ folgt, sodass es sich nicht um Winkel zwischen verschiedenen Strahl-Paaren gehandelt haben kann, also tatsächlich alle Winkel zwischen je zwei verschiedenen Strahlen verschiedene Größen haben. Damit kann man also maximal $m \cdot (m-1)$ verschiedene Winkelgrößen erhalten.

Aufgaben der II. Runde 1990 gelöst von cyrix

6.32.3 III. Runde 1990, Klasse 9

Aufgabe 1 - 300931
Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:
Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung.
Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.
Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.
Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.
Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, dass er mit Sicherheit gewinnt?

Egal, wie gespielt wird, B gewinnt immer. (Damit kann sich A eine beliebige Strategie festlegen, das Spiel so gestalten, und gewinnt mit Sicherheit.)

Beweis: Seien a und b mit o.B.d.A. $a \geq b$ die Zahlen, die in einem Zug von einem Spieler auf aus dem Spiel genommenen Karten stehen. Dann verringert sich die Gesamtsumme aller Zahlen auf im Spiel befindlichen Karten um $a+b$, erhöht sich aber durch die neu ins Spiel gebrachte Karte um $a-b$.
Insgesamt verringert sich also die Gesamtsumme um $a+b-(a-b)=2b$, also eine gerade Zahl, sodass sich die Parität der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen nie ändert. Da das Spiel endlich ist (mit jedem Zug sinkt die Anzahl der im Spiel befindlichen Karten um 1), ist irgendwann nur noch eine Karte im Spiel, d.h., die darauf befindliche Zahl ist dann gleichzeitig der Gesamtsumme aller im Spiel befindlichen Zahlen.
Diese ist demnach genau dann gerade, wenn es auch die Summe aller Zahlen zu Spielbeginn war, welche $1+2+\cdots+50=\frac{50\cdot 51}{2}=25\cdot 51$, also ungerade ist. Damit bleibt in jedem Fall am Ende eine Karte mit einer ungeraden Zahl übrig, sodass B sicher gewinnt, $\Box$.

Aufgabe 2 - 300932
Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Es ist $1991=1001+990=11\cdot(91+90)=11\cdot 181$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Damit hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.
Es sei $n \geq 3$ die Anzahl der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 1991 ergibt.

Fall 1: Es ist $n=2m+1$ eine ungerade Zahl. Sei $a-m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren also $a-(m-1), a-(m-2), \dots, a-1, a, a+1, \dots, a+(m-1), a+m$ und wir erhalten

$$1991=(a-m)+(a-(m-1))+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+(m-1))+(a+m)=(2m+1)\cdot a$$

Also müssen $n=2m+1$ und a Teiler von 1991 mit $0<a-m=\frac{1991}{n}-\frac{n-1}{2}$ sein. Dies schließt $n=1991$ und $n=181$ aus; $n=1$ fällt wegen $n \geq 3$ weg, sodass nur $n=11$ und damit $a=181$ verbleibt. Wir erhalten

$$1991=176+177+178+179+180+181+182+183+184+185+186$$

Fall 2: Es ist $n=2m$ eine gerade Zahl mit $m \geq 2$. Sei $a-m$ der kleinste Summand. Dann lauten die weiteren $a-(m-1), \dots, a+(m-1)$, sodass wir

$$1991=(a-m)+(a-(m-1))+\cdots+(a+(m-1))=2m\cdot a-m=m\cdot(2a-1)$$

erhalten. Diesmal müssen m und $2a-1$ Teiler und Gegenteiler von 1991 sein, sodass $2a=\frac{1991}{m}+1=\frac{1991+m}{m}$ und damit $a=\frac{1991+m}{2m}$ gilt.
Wieder muss $0<a-m=\frac{1991+m-2m^2}{2m}$, also $2m^2-m<1991$ gelten. Dies schließt $m=1991$ und $m=181$ aus, während $m=1$ wegen $m \geq 2$ ausgeschlossen ist. Es verbleibt als einzige Lösung $m=11$, woraus $2a-1=181$ und $a=91$ folgt. Wir erhalten die Darstellung

$$1991=80+81+\cdots+100+101.$$

Aufgabe 3 - 300933
Man beweise, dass es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Wir beginnen mit einem Quadrat der Kantenlänge 10 cm und positionieren darauf Punkte, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Dazu beginnen wir auf einer Kante des Vierecks und positionieren je einen Eckpunkt in deren Endpunkte und einen auf ihren Mittelpunkt.
Dies wollen wir eine "Dreier-Strecke" nennen. Die Parallele zu dieser Kante im Abstand von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm vierteln wir und positionieren auf den beiden äußeren Teilungspunkten je einen Punkt. Dies wollen wir eine "Zweier-Strecke" nennen.
Wieder auf der Parallelen zur Grundkante im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10cm$ positionieren wir analog der Grundkante eine "Dreierstrecke" und abschließend auf der gegenüberliegenden Kante im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm wieder eine "Zweier-Strecke".

Auf jeder Strecke haben je zwei ausgewählte Punkte den Abstand von mindestens 5 cm. Je zwei benachbarte der ausgewählten Punkte auf einer solchen Strecke spannen mit einem ausgewählten Punkt "zwischen ihnen" auf einer benachbarten Strecke ein gleichseitiges Dreieck mit Basislänge 5 cm und Länge der Höhe auf die Basis von $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm auf.
Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{24}{4} + \frac{90}{9}} = \sqrt{6+10} = \sqrt{16} = 4cm$$

sodass auch keine zwei ausgewählte Punkte auf verschiedenen Strecken einen Abstand von 4 cm oder geringer haben.

Auf dem Quadrat haben wir so $3 + 2 + 3 + 2 = 10$ Punkte ausgewählt, von denen keine zwei einen Abstand von 4 cm oder weniger haben. Ein solches Quadrat nennen wir "gut gefüllt" und "mit Dreier-Strecke beginnend".
Spiegeln wir es, indem wir Grundkante und deren gegenüberliegende Kante aufeinander abbilden, so entsteht wieder ein "gut gefülltes" Quadrat, nun aber in der Reihenfolge "Zweier-Strecke", "Dreier-Strecke", "Zweier-Strecke", "Dreier-Strecke". Dieses wollen wir als "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat"bezeichnen.

Starten wir nun mit der Grundfläche des Würfels und legen in diese ein "mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes" Quadrat.
In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir – bezüglich der gleichen Orientierung – ein "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat". In das Quadrat, welches als Schnitt der zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand $\frac{2}{3} \cdot 10$ cm mit dem Würfel entsteht, legen wir wieder ein "mit Dreier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat" und schließlich in die Deckfläche, welche zur Grundfläche parallel im Abstand $\frac{3}{3} \cdot 10$ cm liegt, wieder ein "mit Zweier-Strecke beginnendes, gut gefülltes Quadrat".
Auf diese Weise sind in alle drei Richtungen die ausgewählten Punkte jeweils "versetzt" angeordnet.

Zwei Punkte innerhalb eines solchen "gut gefüllten Quadrats" haben, wie oben schon gesehen, niemals einen Abstand von 4 cm oder weniger. Da wir vier "gut gefüllte Quadrate"in oder auf den Würfel gelegt haben, die sich paarweise nicht überschneiden (da sie in verschiedenen, zueinander parallelen Ebenen liegen), beträgt die Gesamtanzahl der so markierten Punkte also $4 \cdot 10 = 40$.
Jedoch bilden auch die so markierten Punkte auf den Schnitten, die durch Ebenen parallel zu den anderen Seitenflächen des Würfels im Abstand $\frac{i}{3} \cdot 10$ cm zu diesen für jedes $i = 0,1,2,3$ "gut gefüllte" Quadrate, sodass auch hier keine zwei Punkte einen Abstand von 4 cm oder weniger besitzen.
Also haben zumindest all diejenigen Paare verschiedener markierter Punkte, die in einer gemeinsamen zu einer Seitenfläche des Würfels parallelen Ebene liegen, jeweils einen Abstand von mehr als 4 cm zueinander. Zwei Punkte, die aber in keiner gemeinsamen solchen Ebene liegen, haben in jeder Richtung einen Abstand von mindestens $\frac{1}{3} \cdot 10$ cm, also nach dem Satz von Pythagoras einen Abstand von mindestens

$$\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{100}{9}} > \sqrt{\frac{300}{10}} = \sqrt{30} > \sqrt{16} = 4cm$$

also mehr als 4 cm. Damit haben je zwei verschiedene der angegebenen markierten Punkte einen Abstand von mehr als 4 cm, □.

Aufgabe 4 - 300934
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.
Hinweis:
Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Missverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

Es sei $n = z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0$ die Darstellung von n im Dezimalsystem und $n = n_2 \cdot 9^2 + n_1 \cdot 9 + n_0$ die Darstellung im System zur Basis 9. Dabei reichen wegen $9^3 = 729 > 400 \geq n$ auch drei Ziffern aus. Dann ist $s = z_2 + z_1 + z_0$ und $t = n_2 + n_1 + n_0$.

Wegen $10 \equiv 1 \pmod 9$ ist $n \equiv z_2 \cdot 1^2 + z_1 \equiv 1 + z_0 = s \pmod 9$ und analog wegen $9 \equiv 1 \pmod 8$ auch $n \equiv n_2 \cdot 1^2 + n_1 \cdot 1 + n_0 = t \pmod 8$.

Gilt $s = t$, so ist also $n - s = n - t$ sowohl durch 9 als auch 8, also wegen $ggT(9{,}8) = 1$ auch durch $9 \cdot 8 = 72$ teilbar. Es folgt $n - s = n - t \in \{144{,}216{,}288{,}360\}$.
Es ist $n \leq 400 < 404 = 5 \cdot 81 - 1$, also $n < 488_9$. Damit gilt $t < 4 + 8 + 8 = 20$, also $t \leq 19$.

Fall 1: $n - s = n - t = 144$.
Dann ist $145 \leq n \leq 144 + 19 = 163$, also $s \leq 1 + 5 + 9 = 15$ und damit $145 \leq n \leq 144 + 15 = 159$. Es ist $145 = 171_9$ und $159 = 186_9$, also $9 \leq t \leq 16$. Damit ergibt sich $149 \leq n \leq 159$. Für $n = 149$ ist $s = 14$ und wegen $n = 175_9$ dann $t = 13$, also keine Lösung.
Für $n = 150 + z_0$ ist $s = 6 + z_0$. Ist $0 \leq z_0 \leq 2$, so $176_9 \leq n \leq 178_9$, also $s \leq 8$ und $t \geq 14$, sodass es keine Lösung gibt. Für $3 \leq z_0 \leq 9$ dagegen ist $n = 1 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + (z_0 - 3)$, sodass sich $t = 1 + 8 + (z_0 - 3) = 6 + z_0 = s$ ergibt.
Also sind alle $n \in \{153{,}154{,}155{,}156{,}157{,}158{,}159\}$ Lösungen.

Fall 2: $n - s = n - t = 216$.
Dann ist $217 \leq n \leq 216 + 19 = 235$ und damit $s \leq 2 + 2 + 9 = 13$, d.h. $n \leq 216 + 13 = 229$. Es ist $217 = 261_9$ und $229 = 274_9$, also $9 \leq t$ und damit $225 \leq n \leq 229$.
Es ist $n = 220 + z_0$ mit $z_0 \geq 5$ und $n = 2 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + (z_0 - 5)$, also $s = 2 + 2 + z_0 = 4 + z_0$ und $t = 2 + 7 + (z_0 - 5) = z_0 + 4 = s$, sodass alle Werte $n \in \{225{,}226{,}227{,}228{,}229\}$ Lösungen sind.

Fall 3: $n - s = n - t = 288$.
Dann ist $289 \leq n \leq 288 + 19 = 307$. Es ist $289 = 351_9$ und $307 = 371_9$, also $9 \leq t \leq 17$. Damit ist $297 \leq n \leq 305$. Ist $300 \leq n \leq 300$, so also $s \leq 3 + 0 + 5 = 8$, was wegen $t \geq 9$ keine Lösungen liefert.
Also ist $297 \leq n \leq 299$ und damit $s \geq 18$, während $297 = 360_9$ und $299 = 362_9$, also $t \leq 3 + 6 + 2 = 11$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 4: $n - s = n - t = 360$.
Dann ist $361 \leq n \leq 379$. Dann ist $s \geq 10$, also $370 \leq n \leq 379$, d.h. $n = 370 + z_0$ und $s = 10 + z_0$. Es ist $370 = 451_9$, also für $0 \leq z_0 \leq 7$ ist $n = 4 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + (z_0 + 1)$ und $t = 4 + 5 + z_0 + 1 = 10 + z_0 = s$, sodass alle $n \in \{370{,}371{,}372{,}373{,}374{,}375{,}376{,}377\}$ Lösungen sind.
Ist dagegen $n = 370 + z_0$ mit $8 \leq z_0 \leq 9$, also weiterhin $s = 10 + z_0$, so ist $n = 4 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + (z_0 - 8)$ und damit $t = 4 + 6 + z_0 - 8 = 2 + z_0 \neq s$, sodass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zusammenfassend erfüllen genau die folgenden n die Bedingung der Aufgabenstellung:
$n \in \{153{,}154{,}155{,}156{,}157{,}158{,}159{,}225{,}226{,}227{,}228{,}229{,}370{,}371{,}372{,}373{,}374{,}375{,}376{,}377\}$

Aufgabe 5 - 300935 = 321034
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

O.B.d.A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

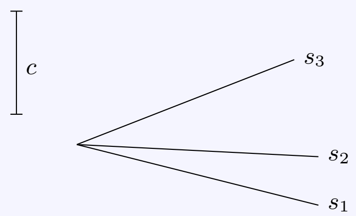
Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)
positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

Aufgabe 6 - 300936
Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3.
Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\angle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\angle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.

a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\angle(s_1, s_3)$ und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und dass seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

Wir geben zuerst an, wie man zu einer gegebenen Strecke PQ einen Kreis k durch P und Q konstruiert, sodass der Peripheriewinkel in diesem Kreis über der Sehne PQ einem vorgegebenen Winkel α entspricht:

Man trage in P und Q an die Strecke PQ in die gleiche Halbebene bezüglich der Geraden PQ den Winkel $\frac{180°-\alpha}{2}$ ab, der sich leicht aus α konstruieren lässt. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel dieser beiden Winkel sei R. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle PQR$ gilt dann $\angle QRP = 180° - 2 \cdot \frac{180°-\alpha}{2} = \alpha$, sodass der Umkreis des Dreiecks $\triangle PQR$ der gesuchte Kreis ist.

Nun zur eigentlichen Konstruktion:

- Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A'B'C'$ der Kantenlänge c.

- Über der Strecke $A'B'$ konstruiere man den Kreis k durch A' und B', für den die Peripheriewinkel $\angle A'PB'$ der Punkte P auf k, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'B'$ wie C' liegen, genau so groß ist wie der Winkel zwischen s_1 und s_2.
- Analog konstruiere man über der Strecke $A'C'$ den Kreis ℓ durch A' und C', sodass die entsprechenden Peripheriewinkel zu Punkten, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'C'$ wie B' liegen, die Größe des Winkels zwischen s_1 und s_3 haben.
- Der neben A' zweite Schnittpunkt der beiden Kreise k und ℓ sei mit M bezeichnet, der Schnittpunkt der drei Strahlen s_1, s_2, s_3 mit S.
- Trage von S aus auf s_1 die Streckenlänge $|A'M|$ ab und erhalte A, trage von S aus auf s_2 die Streckenlänge $|B'M|$ ab und erhalte B und trage schließlich von S aus auf s_3 die Streckenlänge $|C'M|$ ab und erhalte C.

Dann ist $\triangle ABC$ ein gesuchtes Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion[1] ist $\angle A'MB' = \angle ASB$, $\angle A'MC' = \angle ASC$ und $\angle B'MC' = \angle A'MC' - \angle A'MB' = \angle ASC - \angle ASB = \angle BSC$.
Also sind die beiden Dreiecke $\triangle A'MB'$ und $\triangle ASB$, die beiden Dreiecke $\triangle A'MC'$ und $\triangle ASC$ sowie die beiden Dreiecke $\triangle B'MC'$ und $\triangle BSC$ jeweils zueinander kongruent, da sie jeweils in einem Winkel und den beiden anliegenden Seiten übereinstimmen.
Also gilt auch $|AB| = |A'B'| = c = |A'C'| = |AC| = |B'C'| = |BC|$. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig mit Kantenlänge c, wobei nach Konstruktion A auf s_1, B auf S_2 und C auf s_3 liegt, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1990 gelöst von cyrix

[1] Die beiden Kreise k und ℓ sind verschieden, denn sonst würden sie mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ zusammenfallen, sodass die jeweiligen Peripheriewinkel jeweils $60°$ betragen würden, entgegen der Voraussetzung.

6.33 XXXI. Olympiade 1991

6.33.1 I. Runde 1991, Klasse 9

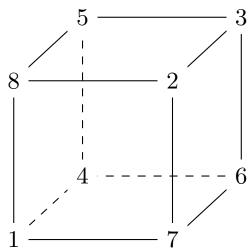
Aufgabe 1 - 310911
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

a) Die genannte Aussage ist falsch; denn eine Seitenfläche des Tetraeders muss die Flächensumme $1+2+3=6$ haben, eine anderen Seitenfläche z.B. die Flächensumme $1+2+4=7$.



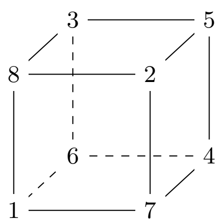
b) Es ist möglich, die Zahlen in der genannten Weise an die Ecken eines Würfels zu schreiben; eine solche Möglichkeit zeigt die Abbildung; denn bei ihr entstehen die Flächensummen

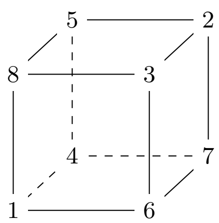
$$1+7+6+4=18 \quad ; \quad 1+7+2+8=18$$
$$7+6+3+2=18 \quad ; \quad 6+4+5+3=18$$
$$4+1+8+5=18 \quad ; \quad 8+2+3+5=18$$

Bemerkung:

Um eine solche Reihenfolge zu finden, kann man zunächst berücksichtigen, dass das Sechsfache der einheitlichen Flächensumme s gleich dem Dreifachen von $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ sein muss, da beim Addieren der sechs einander gleichen Flächensummen jede Ecke genau dreimal erfasst wird. Also muss $s=18$ sein.

Dann kann man alle Zerlegungen von 18 in eine Summe aus vier verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, ..., 8 bilden und eine Verteilung suchen, bei der sechs solche Zerlegungen als Flächensummen auftreten.
Man kann zeigen, dass es bis Spiegelung und Drehung genau die drei Verteilungen (obere Abbildung und folgende zwei Abbildungen) gibt.





Aufgabe 2 - 310912
Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{cccccc} & J & A & C & K & E \\ + & & H & O & S & E \\ \hline = & A & N & Z & U & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & M & A & N & N \\ + & F & R & A & U \\ \hline = & P & A & A & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & M & I & R \\ + & E & M & I & R \\ \hline = & R & E & I & M \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

a) Dieses Kryptogramm hat keine Lösung, da es mehr als 10 ungleiche Buchstaben enthält.

b) Angenommen, eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

Es ist $N \neq 0$, da sich in der Einerstelle aus $N = 0$ der Widerspruch $U = R$ ergäbe.

Also kann die in der Zehnerstelle auszuführende Addition von N, A und einem eventuellen Übertrag nur dann zu einer Zahl mit der letzten Ziffer A führen, wenn ein solcher Übertrag aus der Einerstelle vorliegt und $N = 9$ ist.

Das führt aber zu einem Übertrag aus der Zehnerstelle in die Hunderterstelle, und die dort auszuführende Addition kann nur dann zu einer Zahl mir der letzten Ziffer A führen, wenn auch $R = 9$ ist. Damit hat die Annahme einer Ersetzung, die Lösung ist, zu einem Widerspruch geführt; folglich hat das Kryptogramm keine Lösung.

c) I) Angenommen, eine Ersetzung sei eine Lösung des Kryptogramms. Dann folgt für sie:

An der Tausenderstelle liegt wegen $E \neq R$ ein Übertrag aus der Hunderterstelle vor; es gilt $M + M \geq 9 \quad (1)$ sowie $E + 1 = R \quad (2)$.

Aus (1) folgt $M > 4$; ferner ist an der Einerstelle ersichtlich, dass M gerade ist, also $M = 6$ oder $M = 8$ sein muss. Führt man für diese Werte die Addition an der Hunderterstelle durch (und zwar entweder ohne oder mit Übertrag aus der Zehnerstelle) und wendet dann noch (2) an, so erhält man: Es gibt höchstens die folgenden Möglichkeiten:

M	E	R
6	2	3
6	3	4
8	6	7
8	7	8

Von ihnen widersprechen aber die zweite, dritte und vierte den Angaben an der Einerstellen. Die vierte enthält auch den Widerspruch $M = R$. Also kann nur die erste Möglichkeit vorliegen. Bei ihr entsteht kein Übertrag aus der Einerstelle in die Zehnerstelle; somit hat die Zahl $I + I$ die letzte Ziffer I, was nur für $I = 0$ zutrifft.

Also kann nur die Ersetzung $M = 6$, $E = 2$, $R = 3$, $I = 0$ das Kryptogramm lösen.

II) Sie erfüllt die Gleichheits- und Ungleichheitsforderungen, und die Addition

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & 0 & 3 \\ + & 2 & 6 & 0 & 3 \\ \hline = & 3 & 2 & 0 & 6 \end{array}$$

ist richtig gerechnet.

Damit ist gezeigt, dass das Kryptogramm genau diese Lösung hat.

Aufgabe 3 - 310913

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Die Anzahl der Dreiecksflächen, aus denen die Oberfläche eines Körpers zusammengesetzt ist, sei f. Die Anzahl der Kanten, die an der Oberfläche dieses Körpers auftreten, sei k. Zählt man zu jeder der f Flächen ihre drei Kanten auf, so ergibt sich eine Aufzählung von insgesamt $3f$ Kanten. In dieser Aufzählung ist jede Kante genau zweimal erfasst, da an jeder Kante genau zwei der Dreiecksflächen zusammenstoßen. Also gilt:

$$3f = 2k$$

somit ist $f = 2(k - f)$ eine gerade Zahl, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 310914
a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.
Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

a) Zu Beginn der Schuljahres sei x die Anzahl der Teilnehmer, y die Anzahl der Nichtteilnehmer gewesen, Dann gilt $x + y = 825$ (1) und da die Zunahme der Teilnehmerzahl ebenso groß wie die Abnahme der Nichtteilnehmerzahl war, gilt

$$\frac{4}{100} \cdot x = \frac{7}{100} \cdot y \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $x = 825 - y$; aus (2) folgt damit

$$4 \cdot (825 - y) = 7y \quad (3) \qquad ; \qquad 11y = 3300 \quad (4)$$

Also war die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres $y = 300$ (5); sie nahm um 7 % dieses Wertes ab, d.h. um die Zahl $z = 21$.

b) Sind p und q die wahren, durch 4,0 und 7,0 angenäherten Werte, so liegt p zwischen 3,95 und 4,05 sowie q zwischen 6,95 und 7,05; ferner ist statt (3), (4), (5) nur bekannt, dass mit solchen Werten p,q

$$p \cdot (825 - y) = q \cdot y \qquad ; \qquad y = \frac{p \cdot 825}{p + q}$$

gilt. Das führt zunächst zu der Aussage, das y zwischen

$$\frac{3{,}95 \cdot 825}{4{,}05 + 7{,}05} = \frac{3258{,}75}{11{,}1} \qquad \text{und} \qquad \frac{4{,}05 \cdot 825}{3{,}95 + 6{,}95} = \frac{3341{,}25}{10{,}9} \qquad \text{und}$$

also erst recht zwischen 293,58 und 306,54 liegen und folglich eine der Zahlen

$$294, 295, ..., 306 \qquad (6)$$

sein muss. Die Anzahl $z = \frac{q}{100}y$ der Schüler, um die sich y während des Schuljahres verringert hat, liegt daher zwischen $\frac{6{,}95}{100} \cdot 294 = 20{,}433$ und $\frac{7{,}05}{100} \cdot 306 = 21{,}573$, d.h. sie ist eindeutig bestimmt und beträgt $z = 21$.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

6.33.2 II. Runde 1991, Klasse 9

Aufgabe 1 - 310921
a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, dass sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n+1$ durch 10 teilbar sind!
Überprüfen Sie, dass die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!
b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt!
Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, dass es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Endet die Zahl n nicht auf die Ziffer Neun, so ist die Quersumme von $n+1$ genau um eins größer als die von n, da sich nur die letzte Ziffer um eins erhöht und alle anderen gleich bleiben. Also können nicht beide Quersummen durch 10 teilbar sein. endet dagegen n auf genau k Neunen, so werden diese beim Übergang zu $n+1$ alle zu Nullen, während die Ziffer vor diesen Neunen (ggf. eine führende Null) um eins erhöht. Die Quersumme von $n+1$ erhält man also aus der von n durch Subtraktion von $k \cdot 9 - 1$.

Damit beide Quersummen durch 10 teilbar sind, muss also sowohl die von n als auch $k \cdot 9 - 1$ durch 10 teilbar sein. Das kleinste k, welches die letzte Bedingung erfüllt, ist, $k = 9$. Also muss n auf mindestens neun Neunen enden. Damit hat n mindestens die Quersumme 81, also, da es eine durch 10 teilbare Quersumme haben soll, von mindestens 90.

Die kleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist 9.999.999.999. Diese endet aber auf genau zehn Neunen, sodass die Quersumme ihres Nachfolgers sich auf 1 reduziert, was nicht durch 10 teilbar ist.

Die nächstgrößere, also zweitkleinste Zahl, die auf mindestens neun Neunen endet und Quersumme mindestens 90 hat, ist $n = 18.999.999.999$. Tatsächlich ist die Quersumme von n gleich $1+8+9\cdot 9 = 90$ und die von $n+1 = 19.000.000.000$ gleich $1+9+9\cdot 0 = 10$, sodass dieses n die Bedingung erfüllt und das kleinste solche ist.

Aufgabe 2 - 310922
Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.
Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel!
Hinweis:
Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.
Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Wir führen folgende Konstruktion durch:
1) Kreis k_1 um B durch A, Kreis k_2 um A durch B
2) Schnittpunkte von k_1 und k_2 seien P_1 und P_5
3) Kreis k_3 um P_1 durch A, Schnittpunkt von k_1 und k_3 seien A und P_2
4) Kreis k_4 um P_2 durch P_1
5) Schnittpunkte von k_4 und k_1 seien P_1 und P_3
6) Kreis k um P_3 durch A, Kreis ℓ um A durch P_3
7) Schnittpunkte von k und ℓ seien C und C'

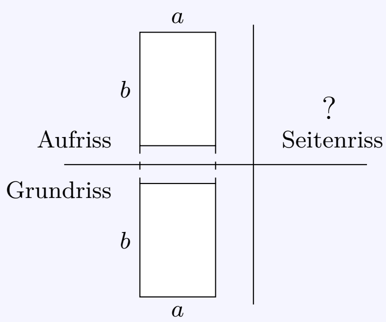
Beweis, dass $\angle ABC = 90°$ ist:
Nach Konstruktion besitzen die Kreise k_1 und k_2 den gleichen Radius $|AB|$, sodass das Dreieck $\triangle ABP_1$ gleichseitig mit Kantenlänge $|AB|$ ist. Insbesondere ist $\angle ABP_1 = 60°$.

Auf analoge Weise erhält man auch die Gleichseitigkeit der Dreiecke $\triangle P_1BP_2$ und $\triangle P_2BP_3$, sodass sich auch $\angle P_1BP_2 = \angle P_2BP_3 = 60°$ und damit

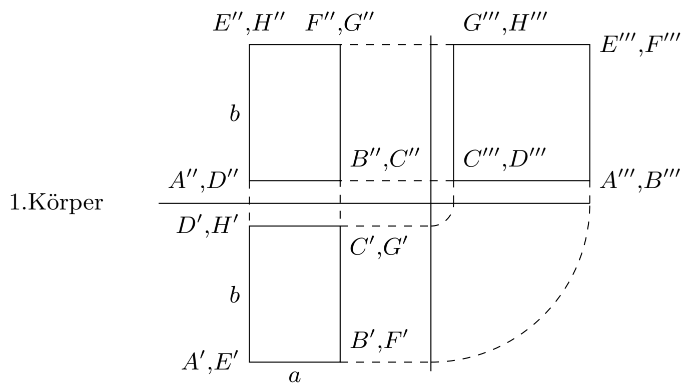
$$\angle ABP_3 = \angle ABP_1 + \angle P_1BP_2 + \angle P_2BP_3 = 60° + 60° + 60° = 180°$$

ergibt, sodass die Punkte A, B und P_3 auf einer Geraden liegen, wobei B zwischen A und P_3 liegt. Weiterhin haben alle drei betrachteten gleichseitigen Dreiecke die Kantenlänge $|AB|$, sodass auch $|BP_3| = |AB|$ gilt und damit B der Mittelpunkt der Strecke AP_3 ist.
Abschließend schneiden sich die beiden Kreise k und ℓ auf dem Mittellot dieser Strecke AP_3, also insbesondere in einem Punkt C mit $\angle ABC = 90°$, da das Mittellot von AP_3 natürlich durch dessen Mittelpunkt B verläuft und senkrecht auf der Geraden $AP_3 = AB$ steht, $\square$.

Aufgabe 3 - 310923

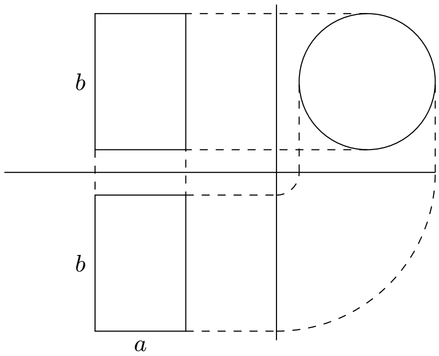


Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!
Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)
Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



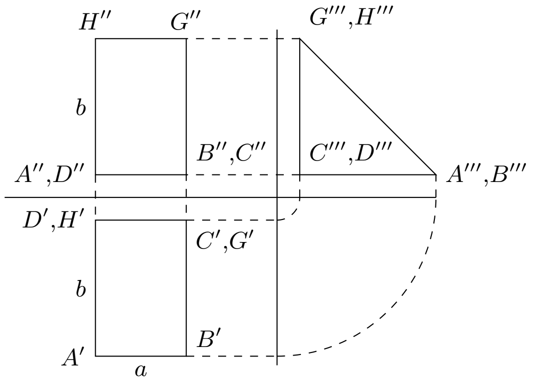
Der 1. Körper ist ein Quader mit den Seitenlängen a, b und b. Der Seitenriss ist ein Quadrat der Kantenlänge b. Das Volumen des Körpers ist damit $V = ab^2$.

2.Körper



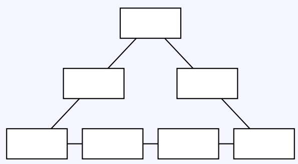
Der 2. Körper ist ein "liegender" Zylinder (Grund- und Deckfläche sind Kreise mit Durchmesser b, die "Höhe", also eher die Länge ist a). Der Seitenriss ist ein Kreis dem mit Durchmesser b. Das Volumen wird $V = \frac{\pi}{4}ab^2$.

3.Körper



Der 3. Körper ist ein dreiseitiges Prisma mit der Höhe a und einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche, dessen Katheten b sind. Der Seitenriss ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Das Volumen des Körpers ist damit $V = \frac{1}{2}ab^2$.

Aufgabe 4 - 310924



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.
Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

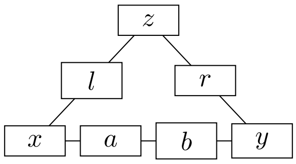
Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne, dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden auch o.B.d.A. voraussetzen, dass die Zahl im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Sei x die Zahl, die im ersten Feld der Basis, y diejenige im vierten Feld der Basis und z diejenige in der Spitze des Dreiecks steht sowie s die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist $3s = 1+2+3+4+5+6+7+x+y+z = 28+x+y+z$, da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen $6 = 1+2+3 \leq x+y+z \leq 5+6+7 = 18$ ist $34 \leq 3s \leq 46$, also, da s eine ganze Zahl ist, $12 \leq s \leq 15$.

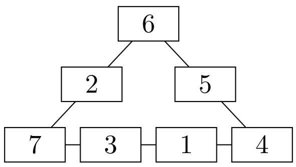
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für s den Wert, den die Summe der Eckfelder $x+y+z$ dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	x+y+z
12	8=1+2+5=1+3+4
13	11=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5
14	14=1+6+7=2+5+7=3+4+7=3+5+6
15	17=4+6+7

Seien weiterhin mit l die Zahl im Mittelfeld des linken, r die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit a sowie b die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1: $s = 15$. Dann ist $x + y + z = 4 + 6 + 7$ in irgendeiner Reihenfolge. Es können aber wegen $s - 6 - 7 = 2 < 1 + 2$ nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass $y = 4$ folgt. Weiterhin kann dann wegen $s - 7 - 4 = 4$ nicht $z = 7$ gelten, sodass $x = 7$ und $z = 6$ folgt. Dann muss $l = s - x - z = 2$ und $r = s - y - z = 5$ gelten. Es verbleiben für a und b die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann $x + a + b + y = 15 = s$, sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).

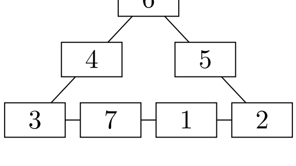


Fall 2: $s = 14$.
Dann ist $x + y + z = 14 = s$ und es müsste $l = s - x - z = y$ haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl y führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

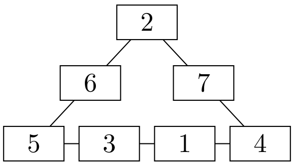
Fall 3: $s = 13$.
Fall 3.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 7$. Dann sind insbesondere $x + z$ und $y + z$ gerade, aber s ungerade, sodass sowohl l als auch r beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

Fall 3.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 4 + 6$. Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$, da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss $y = 1$ gelten. Es kann nicht $z = 6$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = 6 = z$. Es kann aber auch nicht $z = 4$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 3 + 6$. Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$, da 1 und 4 die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen sind. Also muss 2 in der Basis stehen und damit $y = 2$ gelten. Dann kann nicht $z = 3$ sein, da sonst $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8 > 7$ wäre. Also muss $z = 6$, $r = 5$ und $x = 3$ gelten, woraus wegen $l = s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$ folgt. Es verbleiben für a und b die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt auch $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13 = s$, sodass auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.

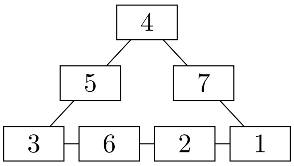


Fall 3.4: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 4 + 5$.
Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze z stehen, da sonst $y = 2$ und $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$ folgen würde. Also muss $z = 2$, $x = 5$ und $y = 4$ sein, woraus sofort $l = 6$ und $r = 7$ folgt, sodass für a und b noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$, sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



Fall 4: $s = 12$.
Fall 4.1: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 2 + 5$.
Dann kann nicht die 5 in der Spitze z stehen, weil sonst $x = 2$ und $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$ folgen würde. Also ist $x = 5$. Aus analogem Grund kann dann nicht $z = 2$ sein, sodass $z = 1$ und $y = 2$ folgt, was aber auf den Widerspruch $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$ führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: Es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 4$.
Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst $x = 4$ und $y+z = 1+3$, also $r = s-y-z = 12-1-3 = 8 > 7$ folgen würde. Also muss $z = 4$ und damit $x = 3$ sowie $y = 1$ gelten, woraus $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$ folgt. Es verbleiben für a und b noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$, sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten:



Damit gibt es, da die Fallunterscheidung vollständig war, bis auf Vertauschung der Felder a und b (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen.

Aufgaben der II. Runde 1991 gelöst von cyrix

6.33.3 III. Runde 1991, Klasse 9

Aufgabe 1 - 310931
Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Nein dies ist nicht möglich:
Gäbe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 21 = 84$, betragen, da jede jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.
Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass es eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist, $\square$.

Aufgabe 2 - 310932
In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies "durch" für den Strich! Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist $\frac{5}{20} = 0{,}25$.
Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Es seien a, b und c die drei Ziffern. Es ist also die Gleichung $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ zu lösen.

Fall 1: $b = 0$.
Dann reduziert sich die Gleichung auf $\frac{a}{c} = c + \frac{a}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $c \neq 0$ auf $a = c^2 + \frac{ac}{100}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auch die rechte Seite eine solche sein, also ac durch 100 teilbar. Wegen $0 \leq a,c < 10$ ist $0 \leq ac < 100$, sodass $ac = 0$ und wegen $c \neq 0$ (sonst wäre der Bruch $\frac{a}{c}$ nicht definiert) schließlich $a = 0$, aber daraus nach Einsetzen dann auch wieder $c = 0$ folgen würde, was ein Widerspruch ist, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Fall 2: $b > 0$.
Dann ist $10b + c \geq 10 > a$, also $0 \leq \frac{a}{10b+c} < 1$. Da wegen $0 < 10b + a \leq 99 < 100$ auch $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ gilt und c eine nicht-negative ganze Zahl ist, ist c der Vorkomma-Anteil von $c + \frac{10b+a}{100}$, also wegen $\frac{a}{10b+c} = c + \frac{10b+a}{100}$ und $0 < \frac{10b+a}{100} < 1$ schließlich $c = 0$.

Dadurch vereinfacht sich die zu betrachtende Gleichung auf $\frac{a}{10b} = \frac{a+10b}{100}$ bzw. nach Multiplikation mit $100b$ auf $10a = ab + 10b^2$. Dabei kann a nicht null sein, da sonst $0 = 10 \cdot b^2$ folgen würde, was ein Widerspruch zur Fallannahme $b > 0$ wäre. Also sind sowohl a als auch b positiv, woraus $ab > 0$ und $10a > 10b^2$ bzw. $a > b^2$ folgt. Dies ist aber für $b \geq 3$ wegen $a \leq 9$ nicht möglich, sodass $b \in \{1,2\}$ folgt.

Fall 2.1: Es ist $b = 1$. Dann muss $10a = a + 10$ bzw. $9a = 10$ gelten, was keine Lösung in ganzen Zahlen hat.

Fall 2.2: Es ist $b = 2$. Dann muss $10a = 2a + 40$ bzw. $8a = 40$, also $a = 5$ gelten. Tatsächlich ist also das schon in der Aufgabenstellung genannte Tripel $(a,b,c) = (5,2,0)$ das einzig möglich.

Aufgabe 3 - 310933
a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.

b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$ $(n > 3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2A_3...A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.
Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!
Hinweis:
Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

Beide Behauptungen sind wahr, wie im folgenden bewiesen wird:

a) Unterteilt man die Strecken AB, BC und CA jeweils in k kongruente Abschnitte und zeichnet die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die entstandenen Unterteilungspunkte auf den Seiten, so wird das Dreieck $\triangle ABC$ in eine Vielzahl kleinerer Dreiecke zerlegt.
Wir nennen ein solches Dreieck "Elementardreieck", wenn es nicht weiter durch eine solche Parallele unterteilt wird. Die Seitenkanten eines jeden solchen Elementardreiecks sind parallel zu einer Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ und haben aufgrund dieser Parallelitäten die gleichen Längen wie die entsprechenden Randabschnitte, also die $\frac{1}{k}$-fache Länge der entsprechenden Seite des Dreiecks $\triangle ABC$.
Insbesondere haben also alle Elementardreiecke die gleichen Seitenlängen, sind damit kongruent untereinander, und, da diese im gleichen Verhältnis stehen wie beim Dreieck $\triangle ABC$ sind sie auch alle ähnlich zu diesem.
Da der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ beträgt, ist der Flächeninhalt eines jeden solchen Elementardreiecks genau das $\frac{1}{k^2}$-fache des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$. Da dieses vollständig in Elementardreiecke zerlegt wird, gibt es davon also genau k^2 Stück, $\square$.

b) Da das n-Eck konvex ist, kann man es durch Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegen. Für jedes dieser Dreiecke führe man die Konstruktion aus Teilaufgabe a) durch.
Gegebenenfalls werden durch die Schnitte, die eines der Teildreiecke zerlegen, auch andere Teildreiecke und dortige Elementardreiecke zerlegt. Diese "fremden Schnitte" werden aber direkt durch Zusammenfassen der entsprechenden Teile zu den jeweiligen Elementardreiecken direkt wieder rückgängig gemacht.
Damit ist jedes der durch die Diagonalen des n-Ecks erzeugten "großen Teildreiecke" des n-Ecks in genau k^2 Elementardreiecke, die mit einem Ähnlichkeitsfaktor von $\frac{1}{k}$ ähnlich zum jeweiligen "großen Teildreieck" sind, zerlegt. Greift man sich nun aus jedem dieser "großen Teildreiecke" eines der dortigen Elementardreiecke heraus, so lässt sich daraus ein n-Eck, welches ähnlich zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ist, zusammenlegen.
Dies funktioniert aber unabhängig für jedes der k^2 Elementardreiecke jeder Sorte, sodass man also k^2 untereinander kongruente und zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ähnliche n-Ecke aus diesen zusammenlegen kann, ohne eines der Elementardreiecke doppelt zu verwenden oder übrig zu behalten, $\square$.

Aufgabe 4 - 310934
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F.
Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck DEF gleichseitig sei.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $AD = BE = CF$ folgt.

In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ sind alle Innenwinkel genau 60° groß. Also ist, da C, B und E sowie D, A und E in diesen Reihenfolgen jeweils auf einer Geraden liegen $\angle DBE = \angle ABE = 180° - \angle CBA = 180° - 60° = 120°$. Analog folgt auch $\angle ECF = 120°$ und $\angle FAD = 120°$, sodass diese drei Winkel alle gleich groß sind.

Weiterhin ist $\angle ADF = \angle FDE - \angle EDA = 60° - \angle EDB = 180° - 120° - \angle EDB = 180° - \angle DBE - \angle EDB = \angle BED$, wobei letzteres aus der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BED$ folgt. Analog folgt auch $\angle ADF = \angle BED = \angle CFE$.

Damit stimmen die Dreiecke $\triangle BED$, $\triangle CFE$ und $\triangle ADF$ jeweils in zwei Winkeln und einer Seitenlänge ($|DE| = |EF| = |FD|$, da das Dreieck $\triangle DEF$ n.V. gleichseitig ist) überein, sodass sie paarweise kongruent sind und die Längen entsprechender Seiten gleich groß sind, also insbesondere $|AD| = |BE| = |CF|$ gilt, $\square$.

Aufgabe 5 - 310935
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$ die Gleichung $|x+y|+|x-y|=4$ erfüllen.

Durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bzw. äquivalent einer Drehung um diesen um 180° geht jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(-x_P;-y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund der Beträge auch der zweite, und umgekehrt. Es genügt also die Figur im Bereich $x \geq 0$ zu konstruieren und sie dann durch diese Punktspiegelung bzw. Drehung fortzusetzen, sodass wir o.B.d.A. $x \geq 0$ annehmen können.

Weiterhin geht durch Spiegelung an der x-Achse jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(x_P;-y_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung $|x_P+y_P|+|x_P-y_P|=4$, dann wegen

$$|x_P-y_P|+|x_P+y_P| = |x_P+y_P|+|x_P-y_P| = 4$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o.B.d.A. auch $y \geq 0$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der x-Achse fortsetzen.

Schließlich geht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten jeder Punkt $(x_P;y_P)$ in den Punkt $(y_P;x_P)$ über. Erfüllt der erste Punkt die Bedingung, dann aufgrund

$$|y_P+x_P|+|y_P-x_P| = |x_P+y_P|+|x_P-y_P|$$

auch der zweite, und umgekehrt. Wir können also o.B.d.A. $x \leq y$ annehmen und dann die Figur durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten fortsetzen.

Zusammen haben wir also nun folgende Annahmen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit treffen konnten: $0 \leq x \leq y$. Dann jedoch sind $x+y$ und $-(x-y)$ stets nichtnegativ, sodass die Gleichung übergeht in $(x+y)+(y-x)=4$ bzw. $y=2$. Zu zeichnen ist also der Abschnitt der Parallelen zur x-Achse durch $(0;2)$, für welchen die x-Koordinaten der auf ihm liegenden Punkte nichtnegativ und ≤ 2 sind, also die Strecke vom Punkt $(0;2)$ zum Punkt $(2;2)$.

Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten erhält man die zusätzliche Strecke vom Punkt $(2;2)$ zum Punkt $(2;0)$. Durch Spiegelung an der x-Achse setzt sich diese Strecke bis zum Punkt $(2;-2)$ fort und man erhält als Spiegelung der ersten Teilstrecke noch die Strecke zwischen den Punkten $(2;-2)$ und $(0;-2)$. Die Punktspiegelung/ Drehung um den Koordinatenursprung schließlich ergänzt die Figur, sodass man abschließend genau das Quadrat (bzw. genauer: dessen Rand) mit den Eckpunkten $(\pm 2;\pm 2)$ als gesuchte Lösungsmenge erhält.

Aufgabe 6 - 310936
Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben A,B,C,D,E,F,G,H,J von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert:
Es soll A links von B, A links von C, A links von D, E links von F, E links von G, E links von H, E links von J stehen.
Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?
Hinweise:
In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.
Die Formulierung "X links von Y" schließt nicht aus, dass zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

Wir unterteilen die neun Buchstaben in zwei Gruppen. Gruppe 1 enthält A, B, C und D, Gruppe 2 die übrigen fünf Buchstaben. Die Bedingungen vergleichen nur die Positionen von Buchstaben einer Gruppe miteinander, sodass jede beliebige Verteilung der neun Positionen auf die zwei Gruppen eine korrekte

Anordnung aller neun Buchstaben liefert, wenn innerhalb beider Gruppen die Bedingungen alle erfüllt sind.

Es gibt in Gruppe 1 insgesamt 6 mögliche Anordnungen, die die drei ihr zugehörigen Bedingungen erfüllt: A muss ganz links (unter diesen vier Elementen) stehen, während die Reihenfolge der drei übrigen Buchstaben dieser Gruppe beliebig ist, also dafür alle $3! = 6$ Varianten möglich sind. Analog erhält man für Gruppe 2 nun $4! = 24$ mögliche Anordnungen (da dort E unter diesen ganz links stehen muss, während sich die restlichen vier Buchstaben von Gruppe 2 beliebig anordnen lassen).

Die neun Positionen lassen sich auf $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$ Arten auf die beiden Gruppen (ohne Beachtung der Reihenfolge der Verteilung der Positionen) verteilen. Für jede solche gibt es nun jeweils 6 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 1 untereinander auf den Positionen dieser Gruppe und jeweils 24 mögliche Anordnungen der Elemente von Gruppe 2 auf ihren Positionen untereinander, insgesamt also

$$126 \cdot 6 \cdot 24 = 126 \cdot 144 = 18144$$

mögliche Anordnungen.

Aufgaben der III. Runde 1991 gelöst von cyrix

6.34 XXXII. Olympiade 1992

6.34.1 I. Runde 1992, Klasse 9

Aufgabe 1 - 320911
Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: "Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z.B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muss dann ein wenig überlegen."

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

Man kann, ohne dass (wie bei dem Taschenrechnerergebnis für 1:13) die Möglichkeit eines Rundungsfehlers zu berücksichtigen wäre, $13 \cdot 76923 = 999999$ erhalten. Daraus folgt $1000000 - 13 \cdot 76923 = 1$ und weiter

$$1 : 13 - 0{,}076923 = 0{,}000001 : 13$$

Also muss das Divisionsverfahren für die Aufgabe 1:13, nachdem es die Anfangsziffern 0,076923 erbracht hat, wieder mit denselben aufeinanderfolgenden Ziffern fortgesetzt werden, mit denen es begonnen hat.

Das heißt: der wahre Dezimalbruch für 1:13 ist der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0{,}\overline{076923}$.

Aufgabe 2 - 320912
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

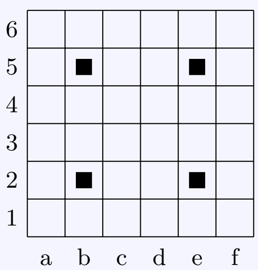
Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 1$ sein.

In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b) \tag{1}$$

Wäre $a = 1$, so wäre (1) für die ganzen Zahl $c - b$ und $c + b$, die wegen $0 < b < c$ positiv sind, nur mir $c - b)1$ und $c + b = 1$ möglich. Daraus folgte $b = 0$ im Widerspruch zu $0 < b$. Also muss $a \neq 1$ sein.

Aufgabe 3 - 320913



Auf einem 6×6-Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, dass er jedes freie Feld genau einmal erreicht.

a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!
b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, dass es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, daß es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

7	2	5
4	■	8
1	6	3

Ein Teilfeld wie in der Abbildung kann auf dem Weg 1 - 2 - ... - 8 oder umgekehrt 8 - 7 - ... - 1 oder auf einem durch Spiegelung oder Drehung entstehenden Weg durch laufen werden.

a) Daher ist z.B. das Durchlaufen der Teilfelder (links unten) - (links oben) - (rechts oben) - (rechts unten) so möglich, dass dabei jeweils in den Teilfeldern (a1 - ... - c2) - (b4 - ... - c6) - (d4 - ... - f5) - (e3 - ... - f1) auftreten.

b) Ebenso ist beispielsweise der Weg (c1 - ... - b3) - (a5 - ... - c4) - (d6 - ... - e4) - (f2 - ... - d3) - c1 möglich.

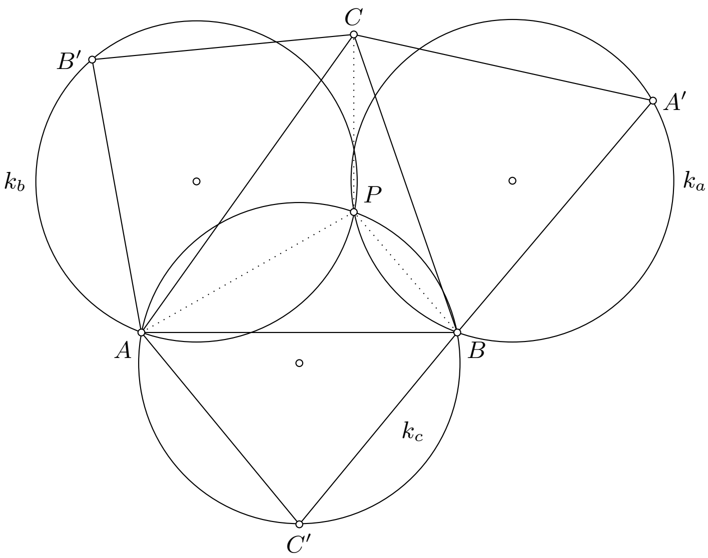
c) Denkt man sich die Felder wie auf einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, so besteht jeder Weg eines Springer abwechselnd aus schwarzen und weißen Feldern. Von seinen 32 Feldern müssen also 16 schwarz und 16 weiß sein.

Besetzt man daher vier Felder so, dass nicht je 16 schwarze und weiße Felder frei bleiben, so existiert kein Weg der genannten Art. Beispielsweise wird dies erreicht, wenn a1, a3, c1, c3 als besetzte Felder gewählt werden.

Aufgabe 4 - 320914
Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von ABC ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck ABC der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks ABC.



Die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit α, β, γ bezeichnet. Die über BC, CA bzw. AB errichteten Dreiecke seien BCA', CAB' bzw. ABC', ihre Umkreise k_a, k_b, k_c.

Nach dem Hinweis schneiden sich k_a und k_b außer in C in einem Punkt P, der im Innern des Dreiecks ABC liegt.

Nach Definition von BCA', CAB' und da $CPBA'$ und $CPAB'$ Sehnenvierecke sind, gilt

$$\angle CPB = 180° - \alpha \qquad , \qquad \angle CPA = 180° - \beta$$

Daraus sowie aus dem Innenwinkelsatz und der Definition von ABC' folgt

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta \\ &= 180° - \gamma = 180° - \angle AC'B \end{aligned}$$

Also ist auch $APBC'$ ein Sehnenviereck; d.h., P liegt auf dem Umkreis k_c von ABC'; d.h., k_a, k_b und k_c schneiden sich in dem Punkt P.

Lösungen der I. Runde 1992 übernommen von [5]

6.34.2 II. Runde 1992, Klasse 9

Aufgabe 1 - 320921
Ein pythagoreisches Zahlentripel $(a; b; c)$ besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
a) Geben Sie drei verschiedene Tripel $(a; b; c)$ mit $a \leq b$ an und bestätigen Sie, dass es pythagoreische Zahlentripel sind!
b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$?

a) Offensichtlich ist für jedes natürliche $n > 0$ das Tripel $(3n; 4n; 5n)$ wegen

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

ein pythagoreisches.

b) Wäre $a = b$, so also $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $2 = \frac{c^2}{a^2}$ mit $\sqrt{2} = \frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 2 - 320922
In der Ebene seine vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.
a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?
b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Es seien a,b,c,d die vier Geraden.
a) Wenn keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, dann besitzen a und b, a und c, a und d, b und c, b und$d$ sowie c und d jeweils einen Schnittpunkt, der von den übrigen verschieden ist. Da zwei verschiedene Geraden nur höchstens einen Punkt gemein haben können, ist dies also die Maximalzahl möglicher verschiedener Schnittpunkte.

b) Wir haben gerade gesehen, dass sich genau 6 Schnittpunkte erzeugen lassen, indem keine zwei der Geraden parallel sind und sich keine drei in einem Punkt schneiden.

Sind a und b parallel, aber c und d weder zueinander noch zu a (und b) parallel, haben c und d mit a und b je zwei Schnittpunkte. Ist der Schnittpunkt von c und d keiner dieser vier, so gibt es insgesamt 5. Sind in der Konstruktion von eben nun c und d doch parallel, so gibt es nur die vier Schnittpunkte mit den Parallelen a und b.
Sind a, b und c paarweise parallel zueinander, d aber nicht, so schneiden sich a, b und c paarweise nicht, während jede von diesen mit d genau einen Schnittpunkt besitzt, wobei keine zwei dieser Schnittpunkte zusammenfallen, es also insgesamt genau 3 gibt.
Sind alle vier Geraden paarweise parallel zueinander, so gibt es gar keinen, also 0, Schnittpunkte.

Verlaufen alle vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt P, gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich P. Weitere kann es nicht geben, da zwei verschiedene Geraden sich in höchstens einem Punkt schneiden.

Bleibt noch zu zeigen, dass genau zwei Schnittpunkte nicht möglich sind:
Angenommen, es gäbe eine solche Konstellation. Dann können die drei Geraden a, b und c nicht paarweise parallel zueinander sein, da es sonst (s.o.) mit d genau 0 oder genau 3 Schnittpunkte gäbe.
Auch können sie sich nicht in einem gemeinsamen Punkt P schneiden, da es sonst (wenn d durch P verläuft) genau 1 oder (wenn d nicht durch P verläuft) genau $1 + 3 = 4$ Schnittpunkte geben würde.
Auch können die drei Geraden nicht paarweise nicht parallel sein, da aus dem Zusammenfallen von zwei ihrer drei Schnittpunkte sofort folgen würde, dass der dritte mit diesem auch identisch ist, man sich also im vorherigen Fall befindet.
Also sind von den drei Geraden a, b und c genau zwei parallel und die dritte dazu nicht parallel. O.B.d.A. sei $a \parallel b$ und $b \nparallel c$. Analog kann man nun die drei Geraden b, c und d betrachten, von denen wieder zwei parallel und die dritte nicht dazu parallel sein muss. Im Fall $b \parallel d$ erhalten wir den Widerspruch $a \parallel b \parallel d$ analog oben mit genau 3 Schnittpunkten und im verbleibenden Fall $c \parallel d$ erhält man genau 4 Schnittpunkte (s.o.), also auch nicht genau 2.
Es lässt sich also jede Schnittpunktanzahl von 0 bis 6 mit Ausnahme der 2 realisieren.

Aufgabe 3 - 320923
Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.
Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt?
Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Es sei V das Volumen der noch nachzutankenden Menge in Litern.
Dann soll also $\frac{1}{34} \cdot V = \frac{1}{51} \cdot (V+7)$ gelten, also $\left(\frac{1}{34} - \frac{1}{51}\right) \cdot V = \frac{7}{51}$.
Es ist $51 = 3 \cdot 17$ und $34 = 2 \cdot 17$, also geht die Gleichung durch Multiplikation mit $17 \cdot 6$ über in $(3-2) \cdot V = V = 14$, sodass genau (auf beliebig viele Stellen nach dem Komma) 14 Liter vom 1 : 33-Gemisch nachzutanken sind.

Aufgabe 4 - 320924
Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C.
Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über die Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $AB = a$ und $BC = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ und BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass A im Punkt $(-a,0)$, B im Koordinatenursprung und C im Punkt $(b,0)$ liegt.
In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge s besitzt die Höhe genau die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt wird, sodass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von $\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot s$.

Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte L, M und N demnach die Koordinaten $\left(\frac{b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b)\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)$ bzw. $\left(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)$.

Es ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras die Quadrate der Streckenlängen zwischen je zwei dieser Punkte zu

$$\begin{aligned}
|LM|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a+b)\right)^2 \\
&= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{9b^2 + 12a^2 + 12ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \\
|LN|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{9a^2 + 3a^2 + 12ab + 12b^2}{36} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \text{ und} \\
|MN|^2 &= \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2 \\
&= \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 + 3a^2 - 6ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}
\end{aligned}$$

sodass $|LM| = |LN| = |MN| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$ gilt und damit das Dreieck $\triangle LMN$ gleichseitig ist, $\square$.

Aufgaben der II. Runde 1992 gelöst von cyrix

6.34.3 III. Runde 1992, Klasse 9

Aufgabe 1 - 320931
In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken.
Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:
A sagt zu B: "Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: "Du bist von anderer Sorte als ich."
Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben?
Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Wir betrachten zuerst C und seine Aussage. Wäre er ein Schurke, so also auch A, der mit seiner Aussage also eine falsche Aussage getroffen hätte. Nun ist aber die Voraussetzung "Wenn C ein Edelmann ist" seiner Aussage nicht erfüllt, diese also automatisch immer wahr, was ein Widerspruch ist.

Also kann in einem solchen Gespräch C kein Schurke, muss also ein Edelmann sein. Dann jedoch ist seine Aussage wahr und A ein Schurke. Dessen Aussage ist damit falsch, sodass (aufgrund der diesmal erfüllten Voraussetzung der Aussage von A) auch B ein Edelmann sein muss.

In dieser Konstellation kann das Gespräch stattgefunden haben und es ist eindeutig bestimmt, welcher Sorte jeweils A, B und C angehören, nämlich B und C den Edelmännern und A den Schurken.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 320932
Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1993$ gilt, gibt es insgesamt?

Für diese Aufgabe wird vorausgesetzt, dass 0 eine natürliche Zahl ist.
Dann gibt es für jedes natürliche $x \leq 199$ genau $1993 - 10x$ verschiedene Möglichkeiten y zu wählen (nämlich 0 bis $1993 - 10x - 1$), sodass die Ungleichung erfüllt ist. Summieren wir dies über alle x, so erhalten wir also insgesamt

$$\sum_{x=0}^{199}(1993 - 10x) = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \sum_{x=0}^{199} x = 200 \cdot 1993 - 10 \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} = 200 \cdot 1993 - 1990 \cdot 100 = 199600$$

Paare natürlicher Zahlen, die die Ungleichung aus der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 320933
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.
a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = AB$, $b = BC$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

a) Da k durch A und B verläuft, liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese ist parallel zu der durch C gehenden Senkrechten zu g, welche im Abstand $r := b + \frac{a}{2}$ zu dieser liegt. Es sei P der Berührungspunkt von k mit dieser Senkrechten.
Dann ist der Berührungsradius MP senkrecht auf der Tangenten, sodass diese Strecke genau das Lot von M auf die Tangenten ist, also die Länge r hat. Damit gilt $|MP| = r$, sodass der Radius von k genau den Wert $r = b + \frac{a}{2}$ besitzt.

b) Es sei P ein Berührungspunkt eines Kreises k durch A und B mit einer Tangenten durch C. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist dann $|CP|^2 = |CA| \cdot |CB| = (a + b) \cdot b$, also mit $r := \sqrt{(a + b) \cdot b}$ schließlich $|CP|^2 = r^2$ bzw. $|CP| = r$.

Dabei ist r vom gewählten Kreis k unabhängig, sodass all diese Berührungspunkte auf dem Kreis c um C mit Radius r liegen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 320934
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.
Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p die folgende Aussage $(*)$ gilt!
Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. $(*)$

Es sei $z \in M_p$, sodass es also positive ganze Zahlen x und y mit $z = x^2 + p \cdot y^2$ gibt. Dann ist

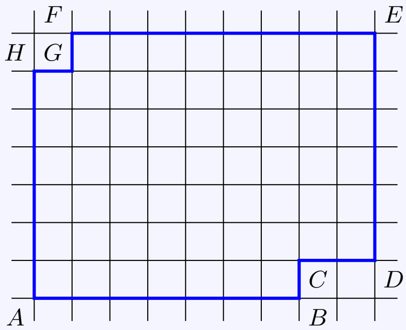
$$z^2 = x^4 + 2px^2y^2 + p^2y^4 = x^4 - 2px^2y^2 + p^2y^4 + 4px^2y^2 = |x^2 - py^2|^2 + p \cdot (2xy)^2$$

Offensichtlich sind mit x und y auch $|x^2 - py^2|$ und $2xy$ ganze Zahlen. Mit $x,y > 0$ ist auch $2xy > 0$.
Nach Definition ist $|x^2 - py^2| \geq 0$. Es kann aber nicht $x^2 - py^2 = 0$ gelten, da sonst $p = \frac{x^2}{y^2}$, also $\sqrt{p} = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ folgen würde, was ein Widerspruch ist.
Also ist $x^2 - py^2 \neq 0$ und damit $|x^2 - py^2| > 0$, sodass auch $z^2 \in M_p$ folgt, $\square$.

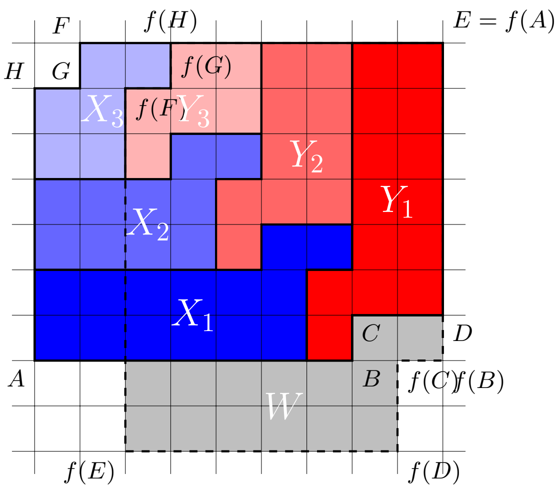
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 320935

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.
Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, dass dabei A mit E zur Deckung kommt.
Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.



Beweisen Sie, dass es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!



Angenommen das Achteck $Z := ABCDEFGH$ ist in zwei Flächen X,Y mit den geforderten Eigenschaften zerlegt, wobei $A \in X$ und $E \in Y$. Es sei f diejenige (affin lineare) Abbildung, durch die X mit Y zur Deckung kommt und die $f(A) = E$ erfüllt.

f muss das Kästchen links unten in Z (das mit der Ecke A) auf das Kästchen rechts oben in Z (das mit Ecke E) abbilden, wobei $f(A) = E$. Es gibt nur zwei Abbildungen mit dieser Eigenschaft, die in Frage kommen:
- eine ist die Drehung um 180° um den Mittelpunkt der Strecke AE,
- die andere erhält man, indem man Z zuerst parallel verschiebt, so dass der Punkt A auf E zu liegen kommt und anschließend an derjenigen Gerade spiegelt, die Z nur im Punkt E schneidet und mit EF einen Winkel von 45° einschließt.

f kann nicht die Drehung sein, denn dann wäre $f \circ f = \mathrm{id}$ und somit hätte $Z = X \cup Y = X \cup f(X) = f \circ f(X) \cup f(X) = f(f(X) \cup X) = f(Z)$ eine Punktsymmetrie.

Also muss f die andere genannte Abbildung sein. Da die Abbildung f bijektiv ist und X auf Y abbildet, muss gelten: (1): Für alle Punkte $p \in Z$ gilt $f(p) \in Y$ genau dann, wenn $p \in X$ gilt.

Es sei $f(Z)$ das Achteck $f(A)f(B)f(C)f(D)f(E)f(F)f(G)f(H)$, dass man erhält, wenn man f auf das Achteck $Z = ABCDEFGH$ anwendet.

Es sei $W := f(Z) \setminus Z$. Für jeden Punkt $p \in Z = X \cup Y$ mit $f(p) \in W$ gilt dann insbesondere $f(p) \notin Y$ und nach (1) gilt somit $p \in Y$.
Daher ist die Menge $Y_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in W\}$ eine Teilmenge von Y.
Wiederum nach (1) muss dann die Menge $X_1 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_1\}$ eine Teilmenge von X sein.

Als nächstes betrachten wir $Y_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_1\}$. Wieder folgt aus (1), dass Y_2 eine Teilmenge von Y ist.
Somit ist auch $X_2 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_2\}$ eine Teilmenge von X.

Schließlich sei $Y_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in X_2\} \subset Y$ und $X_3 := \{p \in Z \mid f(p) \in Y_3\} \subset X$.
Wir stellen fest, dass $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ bis auf einige Gitterlinien schon ganz Z ist.
Also muss X der Abschluss von $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ sein und Y der Abschluss von $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ sein.

Tatsächlich erfüllen die so konstruierten Flächen alle gewünschten Eigenschaften. Damit ist sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz von X,Y bewiesen.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 320936
a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \tag{1}$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

Es ist

$$(x-2)^2+(y+6)^2+(z-7)^2 = x^2-4x+4+y^2+12y+36+z^2-14z+49 = x^2+y^2+z^2-4x+12y-14z+89,$$

also (1) äquivalent zu

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 - 89 - 57 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 146 = (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2$$

Es ist $146 = 12^2 + 1^2 + 1^2$, sodass man etwa $x - 2 = 12$, $y + 6 = z - 7 = 1$, also $(x,y,z) = (14, -5,8)$ wählen kann, was eine Lösung der Ausgangsgleichung liefert und Teilaufgabe a) löst.

Für b) stellen wir fest, dass die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x,y,z) der Ausgangsgleichung offenbar genau der Anzahl der ganzzahligen Lösungen (a,b,c) der Gleichung $146 = a^2 + b^2 + c^2$ entspricht, da man aus jeder Lösung der einen eindeutig eine Lösung der anderen via $x - 2 = a$, $y + 6 = b$ und $z - 7 = c$ erhält.
Es lässt sich die Zahl 146 auf ausschließlich folgende Weisen (ohne Beachtung der Reihenfolge) als Summe von drei Quadratzahlen darstellen:

$$146 = 144 + 1 + 1 = 121 + 25 + 0 = 121 + 16 + 9 = 81 + 64 + 1 = 81 + 49 + 16$$

Für die letzten drei Darstellungen gibt es je 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden und unabhängig voneinander jeweils beide Wahlen für die Vorzeichen von a, b und c, also jeweils $6 \cdot 2^3 = 48$ Lösungen; für beide Darstellungen insgesamt also 144 Lösungen.

Für die zweite Darstellung $146 = 121+25+0$ gibt es wieder 6 mögliche Reihenfolgen der Summanden, aber nur noch für die von Null verschiedenen Quadrate je zwei mögliche Vorzeichen, also für diese Darstellung $6 \cdot 2^2 = 24$ Lösungen.

Und für die erste Darstellung gibt es wieder für jede der Variablen zwei mögliche Vorzeichen, dafür aber nur 3 mögliche Reihenfolgen der Summanden, also $3 \cdot 2^3 = 24$ Lösungen.
Insgesamt besitzt also $146 = a^2+b^2+c^2$ genau $144+24+24 = 192$ verschiedene ganzzahlige Lösungstripel, sodass dies auch die gesuchte Anzahl an Lösungen für die Ausgangsgleichung (1) ist.

Aufgabe gelöst von cyrix und Marcel Seifert

6.35 XXXIII. Olympiade 1993

6.35.1 I. Runde 1993, Klasse 9

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 330911 = 331011
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 2 - 330912 = 331012
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

Aufgabe 3 - 330913 = 331013
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

I Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

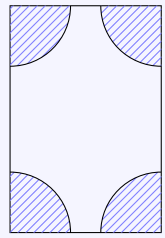
II Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale wären.

Also wäre $t = m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus ebenso folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d.h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

Aufgabe 4 - 330914 = 331014
Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).



a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o.B.d.A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \qquad (1)$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt $0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also $ab = 2\pi \cdot r^2 \quad (2)$.

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit $1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

II. Wenn $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen a,b, > 0 mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

Aufgabe 5 - 330915 = 331015
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

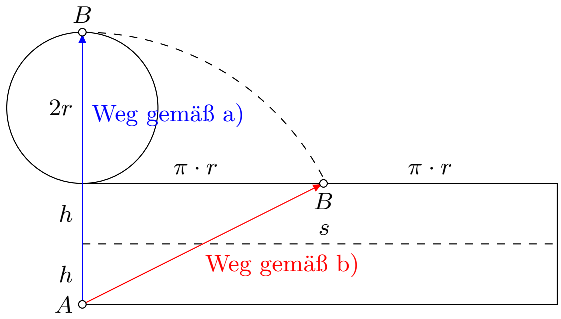
a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 4^2 + 8hr + 4r^2 &= 4h^2 + \pi^2 r^2 \\ 8h &= (\pi^2 - 4) \cdot r \end{aligned}$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \qquad (\approx 0{,}7337)$$

Aufgabe 6 - 330916 = 331016
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel:

```
10 P = 10
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P
```

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 100o zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon $0 \leq z < 100$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem "Hinweis" erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine "Endlos-Schleife" auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines "Probelaufs mit Risiko" erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

Lösungen der I. Runde 1993 übernommen von [5]

6.35.2 II. Runde 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330921
Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.
Wie heißt die dreistellige Zahl?

Die gesuchte Zahl sei [abc].
Die letzte Ziffer des Ergebnisses kann nur 8 sein, wenn mit einer $c = 4$ multipliziert wurde. Alle Produkte von 7 mit einer anderen einstelligen Zahl enden mit einer anderen Ziffer.
Der Zehner 3 enthält damit aus dem Produkt $7 \cdot 4 = 28$ einen Übertrag 2. Somit muss $b = 3$ sein. Analog schließt man auf $a = 2$. Die gesuchte Zahl ist 234 und es ist $234 \cdot 7 = 1638$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 330922
Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.
Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.
Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.
Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Es seien x und y die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1$$

mit der Lösung $x = 20, y = 30$. Arbeiten beide t Stunden zusammen, wird damit $\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$ mit der Lösung $t = 12$. Beide Mahlwerke benötigen 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 330923

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:
1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.
2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe O darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

a)

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

b) Man kann aus der in a) gefundenen Lösung insgesamt $2^4 = 16$ Lösungen erhalten, indem man unabhängig voneinander folgende Entscheidungen trifft, die aus einer Lösung eine weitere erzeugen:

*) Ziffern von O und A tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von D und B tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von (O und A) mit denen von (D und B) tauschen (oder nicht)
*) Ziffern von R und U tauschen (oder nicht).

Jede solche Tauschoperation erzeugt aus einer gültigen Lösung des Kryptogramms eine gültige Lösung. Auch sind je zwei dieser so erzeugten 16 Lösungen verschieden, da sie sich in wenigstens einer Ziffernzuweisung unterscheiden.
Es gibt also mindesten 16 und damit auch mindestens 15 verschiedene Lösungen, $\square$.

Bemerkung: Eine vollständige Fallunterscheidung bei der Konstruktion dieser Lösungen zeigt, dass dies tatsächlich alle Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 330924
Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt! Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

Nach dem Südpolsatz liegen X und Y auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, also insbesondere damit auch auf einem gemeinsamen Kreis mit A und B, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

6.35.3 III. Runde 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330931
Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Stellt man diese Gleichung um

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

so erhält man für jedes $n > 0$ eine Darstellung für den Stammbruch $\frac{1}{n}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche, also das Gesuchte.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 330932
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet: Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt.
Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Wir schreiben n in der Form $n = a \cdot 10^x + b$, wobei $a \in \{1, \dots, 9\}, x,b \in \mathbb{N}$ und $b < 10^x$ sei. Dann ist $n' = 10b + a$.
Damit $n' = n : 7$, also $7 \cdot (10b + a) = a \cdot 10^x + b$ gilt, muss demnach $a(10^x - 7) = 69b$ gelten.

Wir wählen $a = 1$ und suchen ein $x \in \mathbb{N}$, für das $10^x - 7$ durch $69 = 3 \cdot 23$ teilbar ist. Da $10^x - 7 \equiv 1^x - 1 \equiv 0 \pmod 3$ immer erfüllt ist, genügt es ein x zu finden mit $10^x \equiv 7 \pmod{23}$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $1 \equiv 10^{22} \pmod{23}$. Multiplikation mit 7 liefert $7 \equiv (7 \cdot 10) \cdot 10^{21} \equiv 10^{21} \pmod{23}$. Also können wir $x = 21$ wählen.

Für $b = \frac{10^x - 7}{69}$ gilt offenbar $b < 10^x$, so dass wir schließen können, dass $n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}$ eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3 - 330933 = 331033
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus.
Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_12} = |DC| + (12-6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_12| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2+\sqrt{3})s^2 + (2+\sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2+\sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2+\sqrt{3}) \cdot (1-\cos\alpha)$, also

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2 \cdot (4-3)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Cosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 330934

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Z} & \text{W} & \text{E} & \text{I} \\ + & \text{D} & \text{R} & \text{E} & \text{I} \\ \hline = & \text{F} & \text{Ü} & \text{N} & \text{F} \end{array}$$

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis:
Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

a)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & 3 \\ + & 5 & 7 & 4 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 8 & 6 \end{array}$$

b) In der Lösung aus a) können Z und D sowie unabhängig davon W und R vertauscht werden, sodass man drei weitere Lösungen erhält.
Schließlich gibt es die davon (wegen $N = 0 \neq 8$) verschiedene Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 5 & 3 \\ + & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \hline = & 6 & 9 & 0 & 6 \end{array}$$

für welche die gleichen Vertauschungen auch möglich sind, sodass es mindestens 8 verschiedene Lösungen, also insbesondere mehr als 5 verschiedene gibt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 330935
Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die drei Zahlen $n+1$, $n+10$ und $n+55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Sei g ein gemeinsamer Teiler der drei Zahlen. Dann ist auch g ein Teiler von $(n+10)-(n+1) = 9$. Damit die drei Zahlen also einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben, müssen sie alle drei durch 3 teilbar sein. Dies ist genau für $n = 3m - 1$ mit einer beliebigen positiven ganzen Zahl m der Fall, denn dann ist $n + 1 = 3m$, $n + 10 = 3m + 9 = 3(m + 3)$ und $n + 55 = 3m + 54 = 3(m + 18)$; sonst ist keine der Zahlen durch 3 teilbar, sodass insbesondere $n+10$ und $n+1$, also auch alle drei Zahlen gemeinsamen, teilerfremd sind. Die gesuchten Zahlen sind also die der Form $3m - 1$ mit positiven ganzen Zahlen m.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 330936
Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:
Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Wir stellen zuerst fest, dass genau im Fall, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist, die Mittelpunkte M_5 und M_6 beider Diagonalen zusammenfallen und somit keine echte Stecke M_5M_6 existiert. In diesem Fall jedoch sind die Mittellinien M_1M_3 und M_2M_4 jeweils parallel zu den Seitenkanten des Parallelogramms und verlaufen durch die Mittelpunkte der Seiten, schneiden sich also auch im Diagonalenschnittpunkt $M_5 = M_6$, sodass die Behauptung für diesen Fall als gezeigt gelten kann.

Sei ab nun $ABCD$ ein konvexes Nicht-Parallelogramm. Dann fallen die Punkte M_5 und M_6 nicht zusammen (sowie auch keine weiteren der Mittelpunkte M_1 bis M_4 verschiedener Seiten, auch nicht mit M_5 oder M_6, die echt im Innern des konvexen Vierecks liegen).

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma:
Verbindet man im echten Dreieck $\triangle PQR$ die Mittelpunkte X von PQ und Y von PR miteinander, so ist die entstehende Strecke XY parallel zur Strecke QR.

Beweis: Dies zeigt direkt die Umkehrung des Strahlensatzes (von P aus gesehen).

Wenden wir dieses Lemma auf die Situation der Aufgabe an, so folgt einerseits im Dreieck $\triangle ABC$, dass $M_1M_2 \parallel AC$ gilt, und andererseits im Dreieck $\triangle CDA$, dass $M_3M_4 \parallel AC$, insbesondere also $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ gilt. Analog folgt auch $M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4$. Damit ist das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm, sodass sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_2M_4 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Wenden wir das Lemma auf das Dreieck $\triangle ACD$ an, so folgt $M_3M_5 \parallel DA$. Und wenden wir es auf das Dreieck $\triangle ABD$ an, erhalten wir $M_1M_6 \parallel AD$, also insbesondere $M_3M_5 \parallel M_1M_6$. Wenden wir es auf das Dreieck $\triangle BCD$ an, erhalten wir $M_3M_6 \parallel BC$ und im Dreieck $\triangle ABC$ schließlich $M_1M_5 \parallel BC$, sodass $M_1M_6M_3M_5$ wieder ein Parallelogramm ist und sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_5M_6 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Damit haben alle drei Geraden M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 einen Punkt gemeinsam, der Mittelpunkt jeder dieser drei Strecken ist, $\square$.

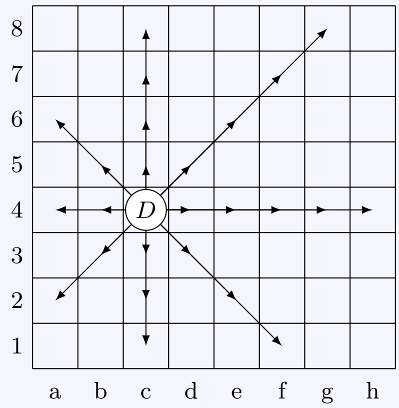
Bemerkung: Die Konvexität wurde hier nicht benutzt, sodass der Satz auch für konkave und überschlagene Vierecke gilt, sofern keine der Punkte A bis D und M_1 bis M_6 zusammenfallen.

Aufgabe gelöst von cyrix

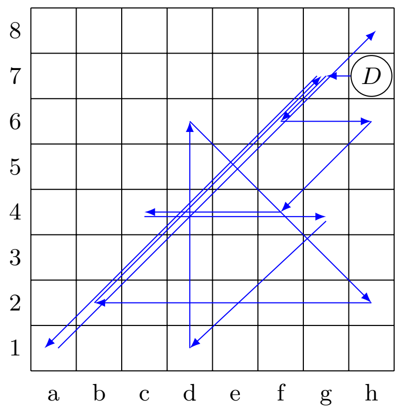
6.35.4 IV. Stufe 1993, Klasse 9

Aufgabe 1 - 330941 = 331041

Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:



(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o.B.d.A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o.B.d.A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.
Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

Aufgabe 2 - 330942
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver ganzer Zahlen a,b,c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen $a+b \geq 101$, $a+c \leq 101$, $a+b+c \geq 201$ gelten!

Wäre $a+c < 101$ oder $b < 100$, so wegen $a+c \leq 101$ und $b \leq 100$ auch $a+c+b < 101+100 = 201$, im Widerspruch zur letzten gegebenen Ungleichung. Also muss $a+c = 101$ und $b = 100$ gelten, sodass die letzten beiden Ungleichungen also in jedem Fall erfüllt sind.

Aus $a+c = 101$ folgt für jedes positive ganze $1 \leq a \leq 100$, dass auch $c = 101-a$ positiv ganz und nicht größer als 100 ist. Schließlich ist für alle diese a wegen $b = 100$ auch $a+b \geq 101$, sodass alle Bedingungen erfüllt sind. Weitere Lösungen kann es nicht geben. Damit erfüllen genau die Elemente der Menge

$$\{(a,100,101-a) | a \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq a \leq 100\}$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 3 - 330943 = 331043
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360°}{8} = 45°$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(45°) = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2-\sqrt{2}\right) \cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-2} \cdot a = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4+2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o.B.d.A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0° \leq \angle P_1AS_1 < 45°$. Damit ist $0° < \angle S_1AP_2 \leq 45°$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45° + 45° = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0° + 90° = 90°$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90° = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser

Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45° - \angle S_1AP_2 = 45° - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45° - 90° + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.
Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, $\square$.

Aufgabe 4 - 330944
Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277 * *607680000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Es sei a die vordere und b die hintere der beiden unleserlichen Ziffern. Da 22! durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Sie lautet $1+1+2+4+7+2+7+7+a+b+6+7+6+8 = 58+a+b$, sodass wegen $0 \leq a+b \leq 18$ dann $a+b \in \{5{,}14\}$ gilt.

Weiterhin ist 22! durch 11 teilbar, sodass ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Diese lautet $1-1+2-4+0-0+0-7+2-7+7-a+b-6+0-7+6-8 = -22-a+b$, sodass $a-b$ durch 11 teilbar ist, was wegen $-9 \leq a-b \leq 9$ auf $a-b=0$ und damit $a=b$ führt.

Da es keine Lösung in natürlichen Zahlen für $a+b=5$ und $a=b$ gibt, muss $a+b=14$ und damit $a=b=7$ gelten. Dies sind die gesuchten Ziffern.

Aufgabe 5 - 330945 = 331045
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate). Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z.B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Aufgabe 6 - 330946
Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden:
Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:
Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.
Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muss!

Es sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch P zu CB mit AC. Dann liegen S, P und S_1 in dieser Reihenfolge auf einer Parallelen zu CB. Wir zeigen im Folgenden, dass $S_6 = S$ gilt und damit die Gerade S_6S_7, welche nach Definition parallel ist zu CB und durch S_6 verläuft, identisch ist mit der Gerade SS_1, auf der auch P liegt.

Nach Konstruktion sind die Geraden $SC = AC$ und S_1S_2 sowie SS_1 und $CS_2 = CB$ jeweils zueinander parallel, sodass das Viereck SS_1S_2C ein Parallelogramm ist. Damit gilt insbesondere $|SC| = |S_1S_2|$.

Weiterhin sind analog auch die Vierecke $S_3S_4BS_2$ und $S_3S_4S_5C$ Parallelogramme (da jeweils gegenüberliegende Seiten nach Konstruktion parallel zueinander sind), sodass $|CS_5| = |S_3S_4| = |S_2B|$ folgt.

Es ist $S_6C = AC \parallel S_1S_2$ und es liegen C, S_5, S_2 und B auf einer Geraden, also ist $\angle S_6CS_5 = \angle S_1S_2B$, da es sich um Stufenwinkel handelt. Analog folgert man auch $\angle CS_5S_6 = \angle S_2BS_1$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle S_6CS_5$ und $\triangle S_1S_2B$ nicht nur aufgrund der Übereinstimmung zweier Winkelgrößen zueinander ähnlich, sondern wegen dem zuvor gezeigten $|CS_5| = |S_2B|$ sogar kongruent sind. Insbesondere folgt damit $|S_6C| = |S_1S_2| = |SC|$. Also liegen S und S_6 beide auf der Strecke AC in gleicher Entfernung zu C, sodass sie identisch sind. Es folgt, wie oben beschrieben, dass P auf der Parallelen zu BC durch S_6 liegt, $\square$.

Aufgaben der IV. Runde 1993 gelöst von cyrix

6.36 XXXIV. Olympiade 1994

6.36.1 I. Runde 1994, Klasse 9

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 340911 = 341011

Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass

a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

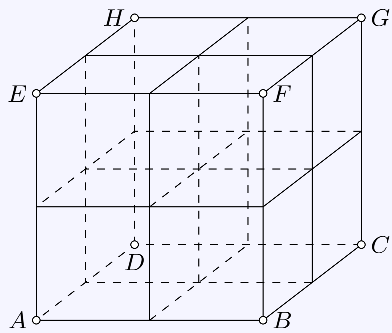
b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

Aufgabe 2 - 340912 = 341012

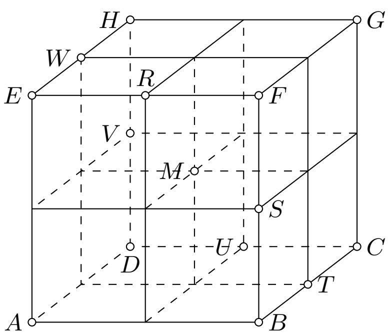
Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.

Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen. Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,



a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt.

Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6 \cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 3 - 340913 = 341013
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:

```
1  z = 0
2  for a = 0 to 9
3    for b = 0 to 9
4      for c = 0 to 9
5        for d = 0 to 9
6          for e = 0 to 9
7            for f = 0 to 9
8              if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9            next
10         next
11       next
12     next
13   next
14 next
15 print z/10000
```

2. Programm:

```
1  dim n(27)
2  for s = 0 to 27
3    n(s) = 0
4  next
5  for a = 0 to 9
6    for b = 0 to 9
7      for c = 0 to 9
8        s = a+b+c
9      next
10   next
12 next
13 z = 0
14 for s = 0 to 27
15   z = z + n(s)*n(s)
16 next
17 print z/10000
```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 - 7, 9 - 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller "Glücksschein"- Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s=a+b+c$ der ersten drei Ziffern a,b,c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d,e,f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s)\cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a+b+c=s$ und $d+e+f=s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller "Glücksschein"-Nummern ist die Summe aller für s = 0,...,27 gebildeten Produkte $(n(s)\cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen *abc* von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s=a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s)\cdot n(s))$ gebildet.

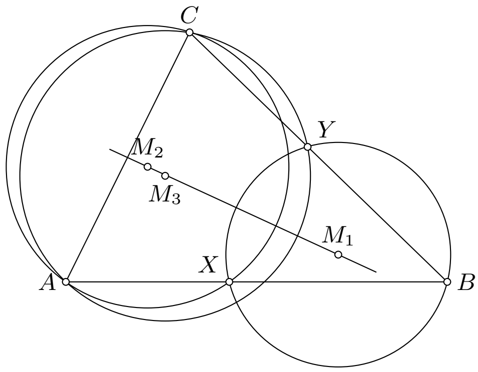
Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

Aufgabe 4 - 340914 = 341014
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

   Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

   Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

   Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

   Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

   Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

Aufgabe 5 - 340915 = 341015
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, daß die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

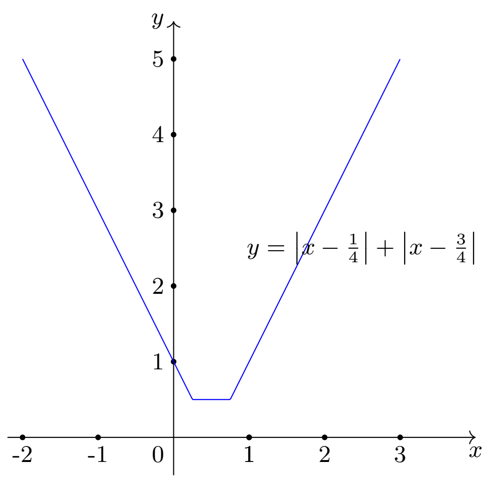
Für alle $x<\frac{1}{4}$ ist
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}-x+\frac{3}{4}-x=1-2x>1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

für alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ ist
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-x=\frac{1}{2}$$

für alle $x>\frac{3}{4}$ ist
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+x-\frac{3}{4}=2x-1>2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}$$

Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x)=\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x=1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen
$$\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

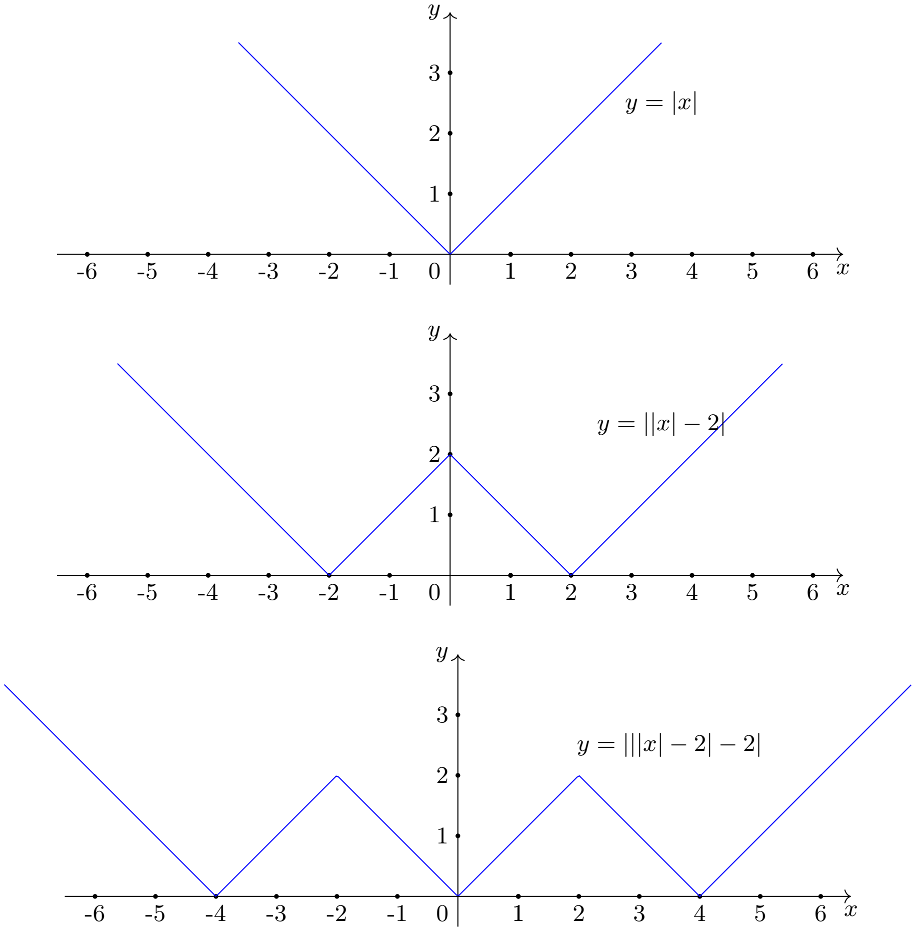
Aufgabe 6 - 340916 = 341016
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x|-2|\,, \\ f_2(x) &= |||x|-2|-2|\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.



Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen von [5]

6.36.2 II. Runde 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340921
Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.
Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, dass bei dieser Sitzordnung alle genanten Bedingungen erfüllt sind!

Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b und c, sowie die Geschlechter mit 1, 2 bzw. 3, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis c sowie jedes Geschlecht 1 bis 3 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$$\begin{array}{ccc} a1 & b2 & c3 \\ b3 & c1 & a2 \\ c2 & a3 & b1 \end{array}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 340922
Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, dass in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.
Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, dass es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.
Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Felix hat nicht recht. Dies kann z.B. folgendermaßen gezeigt werden: Es gibt die Lösungen

$$\begin{array}{ccccc} & 3 & 4 & 9 & 2 \\ + & 5 & 8 & 1 & 7 \\ \hline = & 9 & 3 & 0 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 8 & 0 & 9 & 4 \\ + & 1 & 7 & 3 & 5 \\ \hline = & 9 & 8 & 2 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 7 & 0 & 9 & 1 \\ + & 2 & 6 & 4 & 8 \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 3 & 0 & 9 & 1 \\ + & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \hline = & 9 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 3 & 9 & 2 \\ + & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline = & 9 & 8 & 5 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 4 & 0 & 9 & 1 \\ + & 5 & 3 & 7 & 8 \\ \hline = & 9 & 4 & 6 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & 9 & 3 \\ + & 5 & 2 & 8 & 6 \\ \hline = & 9 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für S und T miteinander vertauschen, ebenso (unabhängig hiervon) die Ziffern für I und C.
Da sich je zwei der Lösungen in der Ziffer für U voneinander unterscheiden, ergeben sich hiermit bereits $4 \cdot 7 = 28$ verschiedene Lösungen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 340923
Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:
Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot AB$ bis zum Punkt S verlängert,
die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot BC$ bis zum Punkt T verlängert,
die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot CD$ bis zum Punkt U verlängert,
die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot DA$ bis zum Punkt V verlängert.
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

Das Viereck $STUV$ lässt sich zerlegen in das Quadrat $ABCD$ sowie die vier rechtwinkligen Dreiecke $\triangle VSA$, $\triangle STB$, $\triangle TUC$ und $\triangle UVD$.

Es habe das Quadrat $ABCD$ die Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$, sodass $|AV| = |CT| = y$, $|BS| = |DU| = x$ und also $|AS| = |CU| = 1 + x$ und $|BT| = |DV| = 1 + y$ gilt.
Damit können wir die Flächeninhalte der vier Dreiecke, des Quadrats und damit auch des Vierecks $STUV$ berechnen, denn dieser ist nun

$$F = 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot y\cdot(1+x) + \frac{1}{2}\cdot x\cdot(1+y) + \frac{1}{2}\cdot y\cdot(1+x) + \frac{1}{2}\cdot x\cdot(1+y) = 1+y+xy+x+xy = 1+x+y+2xy$$

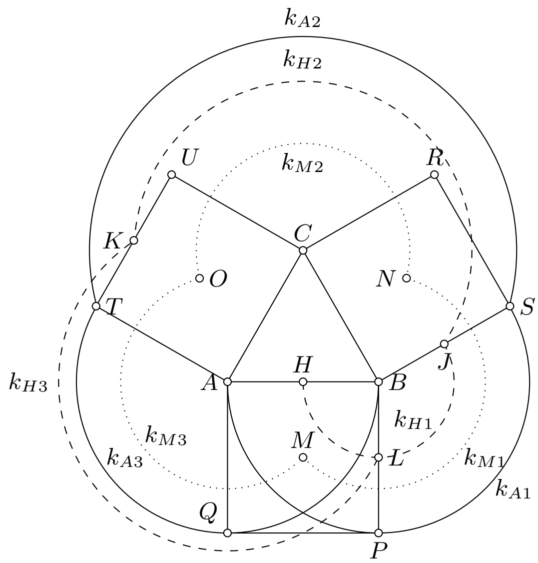
Nach Aufgabenstellung soll $F = 11$ sein, sodass die Gleichung $11 = 1 + x + y + 2xy$ bzw. $10 = x + y + 2xy$ in positiven ganzen Zahlen x und y zu lösen ist. Da diese symmetrisch in x und y ist, können wir o.B.d.A. $x \leq y$ annehmen, sodass $10 = x + y + 2xy \geq 2x + 2x^2 = 2x(1 + x)$ gilt, also $x = 1$, da für alle $x \geq 2$ diese Ungleichung nicht erfüllt ist.
Dann ist aber $10 = 1 + y + 2y$, also $y = 3$, was schließlich auf die beiden Lösungen $(x; y) \in \{(1; 3),(3; 1)\}$ führt, für die dann der Flächeninhalt des Vierecks $STUV$ genau 11 mal so groß ist wie der des Quadrats $ABCD$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 340924
Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet.
Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum "rollen, ohne zu gleiten".
(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest u.s.w.).
a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).
Wie lang ist dabei der Weg, den
- der Punkt A,
- der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
- der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates
zurücklegt?
b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene "volle Umrundung des Dreiecks ABC" durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.
Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.
- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seien eigenen Mittelpunkt M wurden dabei insgesamt ausgeführt?

(a) Die volle Umrundung des Dreiecks ABC findet in drei Teilbewegungen statt (siehe Abbildung):
Die erste ist die Drehung um B durch den überstumpfen Winkel $\angle PBC$ der Größe $360° - 60° - 90° = 210°$; dabei gehen P, Q, A, M, H und C, R, S, N, J über.

Die zweite Teilbewegung ist die Drehung um C durch 210°; dabei gehen R,S,B,N,J in A,T,U,O,K über. Die dritte Teilbewegung ist die Drehung um A mit 210°; dabei gehen T, U, C, O, K in B, P, Q, M, L über.



Der Weg von A besteht demnach aus den drei Kreisbögen $k_{A1} = APS$, $k_{A2} = ST$m $k_{A3} = TQB$. Sie sind Bögen zu Zentriwinkeln der Größe 210° in Kreisen mit den Radien $a, a\sqrt{2}, a$. Also legt A einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot (1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{7}{6}\pi a \approx 12{,}5137a$$

zurück. Der Weg von M besteht aus $k_{M1} = MN$, $k_{M2} = NO$, $k_{M3} = OM$; Bögen zu Zentriwinkeln von 210° in Kreisen des Radius $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; also legt M einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{7}{4}\sqrt{2}\pi a \approx 7{,}7750a$$

zurück. Für den Weg von H, bestehend aus $k_{H1} = HLJ$, $k_{H2} = JK$, $k_{H3} = KL$, ergibt sich entsprechend die Länge

$$(1 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{7}{12}\pi a \approx 10{,}0282a$$

(b) Bei der ersten Umrundung gehen die Punkt A, B, P, Q wie in (a) beschrieben, in B, P, Q, A über, d.h., sie haben dieselbe Lage wie nach einer Vierteldrehung um M erreicht. Um zu bewirken, dass sie erstmals in ihre Anfangslage übergehen, muss eine solche Umrundung daher insgesamt 4 man durchgeführt werden. Die Strecke MQ geht bei der ersten in (a) genannten Teilbewegung in die Strecke NR über. Bezogen auf den Mittelpunkt des rollenden Quadrats ist das eine Drehung von der Größe des überstumpfen Winkels $\angle QBR = 210°$.

Entsprechendes gilt für die weiteren Teilbewegungen, also findet bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats bei der ersten Umrundung eine Drehung um $3 \cdot 210°$ statt. Bei den festgestellten 4 Umrundungen ist dies eine Drehung um $12 \cdot 210° = 2520° = 7 \cdot 360°$, das sind 7 volle Umdrehungen.

Übernommen aus [5]

6.36.3 III. Runde 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340931
Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC.
Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.
(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel $\angle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\angle BXC$.
Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.
Hat Christa recht?

Ja, sie hat recht, wie im folgenden indirekt bewiesen wird:

Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck $\triangle ABC$ und einen solchen Punkt X. Dann liegt nach (1) X auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, sodass die beiden Winkel $\angle CBX$ und $\angle XBA$ gleich groß sind.
Da nach Annahme auch die Winkel $\angle AXB$ und $\angle BXC$ gleich groß sind, stimmen die beiden Dreiecke $\triangle AXB$ und $\triangle BXC$ in zwei Innenwinkeln überein und zusätzlich auch in der Strecke XB, die sie beide gemeinsam haben, zwischen diesen beiden Innenwinkeln, sodass diese Dreiecke kongruent sind.
Dann folgt aber direkt, da die Strecken gleichgroßen Winkeln gegenüberliegen, auch $|AB| = |CD|$, was den Widerspruch zur entsprechenden Bedingung in der Lage der drei Punkte A, B, C liefert. Also kann es kein solches nicht gleichschenklige Dreieck $\triangle ABC$ mit entsprechendem Punkt X geben, $\square$.

Aufgabe 2 - 340932 = 341031
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Würde 9^n+1 auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n - 1 = 9^n - 1^n$ durch $9 - 1 = 8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

Aufgabe 3 - 340933 = 341032
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+7) - (n-7) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4-2-1+7) + 2n \cdot (-8+56+28+14) = 180n = 22.222.222.020$$

Aufgabe 4 - 340934 = 341034
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.

Von diesen $n\cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe $1, 2, \dots, n$ unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \dots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ "freundlich" sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ "unfreundlich".

Aufgabe 5 - 340935
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \quad n+2, \quad n+6, \quad n+8, \quad n+12, \quad n+14$$

eine Primzahl ist.

Es ist genau eine der Zahlen n, $n+6 = 5+(n+1)$, $n+2$, $n+8 = 5+(n+3)$ und $n+14 = 10+(n+4)$ durch 5 teilbar, da auch genau eine der fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n bis $n+4$ durch 5 teilbar ist.

Die sechs Zahlen können also nur dann allesamt Primzahl sein, wenn die 5 unter ihnen ist. Da $n > 0$ gilt, kommt dafür nur n oder $n+2$ in Frage. Wäre aber $n+2 = 5$, so wäre $n+12 = 15$ keine Primzahl. Also verbleibt nur $n = 5$, was wegen $n+2 = 7$, $n+6 = 11$, $n+8 = 13$, $n+12 = 17$ und $n+14 = 19$ tatsächlich eine Lösung ist. Es gibt also nur genau ein solches n, nämlich $n = 5$.

Aufgabe 6 - 340936
Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind.
Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:
Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.
Hinweis:
Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.
In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

Es sei A der Flächeninhalt einer (und damit jeder der) Tetraederfläche(n) und V das Volumen des Tetraeders $ABCD$. Dann gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.

Das Tetraeder $ABCD$ lässt sich durch die Verbindungsstrecken von P zu den vier Eckpunkten vollständig in die vier Tetraeder $ABCP$, $ABDP$, $ACDP$ und $BCDP$ zerlegen, deren Volumina V_1, V_2, V_3 und V_4 bezeichnet seien. Dann gilt $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.
Seien weiterhin h_1, h_2, h_3 und h_4 die Längen der Höhen von P auf die Tetraederflächen ABC, ABD, ACD bzw. BCD, so gilt wegen der Kongruenz dieser vier Tetraederflächen $V_i = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_i$ für alle $i = 1,2,3,4$. Insbesondere ist also

$$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h = V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

und damit wegen $A \neq 0$ schließlich $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, $\Box$.

Aufgaben der III. Stufe 1994 gelöst von cyrix

6.36.4 IV. Stufe 1994, Klasse 9

Aufgabe 1 - 340941 = 340841
Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme.
Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.
Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, dass bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Wir bezeichnen die Völkerstämme mit a, b, c und d, sowie die Geschlechter mit 1, 2, 3 bzw. 4, sodass also a1 den Abgeordneten von Völkerstamm a mit Geschlecht 1 bezeichne.
Dann gibt folgende Tabelle eine zulässige Sitzordnung an, wobei man sich leicht davon überzeugt, dass in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Völkerstamm a bis d sowie jedes Geschlecht 1 bis 4 genau einmal vertreten ist und kein Abgeordneter mindestens zwei oder gar keinen Sitzplatz erhält:

$a1$	$b2$	$c3$	$d4$
$b3$	$a4$	$d1$	$c2$
$c4$	$d3$	$a2$	$b1$
$d2$	$c1$	$b4$	$a3$

Aufgabe 2 - 340942 = 341041
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Es ist $z = 7 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \cdots + 7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7} = 49^0 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + \cdots + 49^{47} \equiv 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{47} = 48 \equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7 \cdot 48 = 336$ teilbar, $\square$.

Aufgabe 3 - 340943 = 341042
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine relle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S,y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $\triangle ACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1)-a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1)-a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a+1-a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

mit $p := r + r^2 - 1$ und $q := r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

Aufgabe 4 - 340944 = 340844
Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte		7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert		7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:
Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt.
Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen.
Er wird dann umgedreht, so dass die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.
1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.
Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.
Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden.
Wie ist das möglich?

Bevor der erste Stapel gebildet wurde, war die Anzahl der Restkarten 32. Es sei a_1 der Wert der für den ersten Stapel zu Beginn offen hingelegten Karte. Dann verringert sich die Anzahl der Restkarten um $1 + (11 - a_1) = 12 - a_i$, denn neben der einen aufgedeckten Karte mit Wert a_1 werden noch $11 - a_1$ weitere Karten auf diesen Stapel gelegt.
Analog reduziert jeder weiterer Stapel mit zuerst offen liegendem Kartenwert $a - i$ die Anzahl der nun noch vorhandenen Restkarten um den Wert $12 - a_i$.
Sieht also Axel n Stapel und r Restkarten, so weiß er

$$r = 32 - (12 - a_1) - \cdots - (12 - a_n) = 32 - n \cdot 12 + (a_1 + \cdots + a_n)$$

bzw. $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot 12 + r - 32$,
kennt also die Summe der Kartenwerte der zuerst für jeden Stapel ofen ausgelegten Karten, die nach dem Umdrehen nun die obersten Karten eines jeden Stapels sind.

Aufgabe 5 - 340945 = 341045
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3}r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1:3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

Aufgabe 6 - 340946 = 340846
Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung $|x - 30| + |y - 10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

Wir betrachten zuerst die Ungleichung (*) $a + b < 100$ und bestimmen die Anzahl der Lösungen von dieser Ungleichung mit nicht-negativen ganzen Zahlen a und b. Dabei unterscheiden wir, ob diese gleich 0 werden, oder verschieden davon sind:

Es gibt genau eine Lösung mit $a = b = 0$.
Für $a = 0$, $b \neq 0$ gibt es genau die 99 Lösungen $b = 1$ bis $b = 99$. Analog gibt es für $a \neq 0$, $b = 0$ genau 99 Lösungen.

Sei nun $a > 0$ und $b > 0$. Für festes a gibt es für b genau die Lösungen 1,2,...,$99 - a$, also $99 - a$ verschiedene. Insgesamt gibt es also

$$\sum_{a=1}^{99}(99 - a) = 99 \cdot 99 - \sum_{a=1}^{99} a = 99 \cdot 99 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot (99 - 50) = 99 \cdot 49$$

Lösungen in diesem Fall.
Nun zurück zur Ungleichung aus der Aufgabenstellung:
Für jede Lösung (a,b) der Ungleichung (*) mit $a,b \neq 0$ erhält man vier Lösungen der Ungleichung der Aufgabenstellung, da man $x - 30 = \pm a$ und unabhängig davon $y - 10 = \pm b$ wählen kann. Ist einer oder sind beide Werte a, b aber gleich Null, so kann man hierbei nur ein Vorzeichen wählen und erhält $x - 30 = 0$ bzw. $y - 10 = 0$.

Zusammen ergeben sich also für die Ausgangsgleichung folgende Anzahlen von Lösungen:
Ist $a = b = 0$, so erhält man genau $1 \cdot 1 = 1$ Lösung für die Ausgangsgleichung.
Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, oder umgekehrt, dann erhält man jeweils genau $99 \cdot 2$, in beiden Fällen zusammen also $99 \cdot 4$, Lösungen der Ausgangsgleichung.
Und sind sowohl a als auch b von 0 verschieden, erhält man daraus $(99 \cdot 49) \cdot 4 = 99 \cdot 196$ Lösungen der Ausgangsgleichung.

Insgesamt erhalten wir damit, dass die Ungleichung aus der Aufgabenstellung genau $99 \cdot 196 + 99 \cdot 4 + 1 = 19801$ ganzzahlige Lösungen besitzt.

Aufgaben der IV. Runde 1994 gelöst von cyrix

7 Klassenstufe 10

7.1 Vorolympiade 1960

7.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 10

Aufgabe 1 - V01001
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

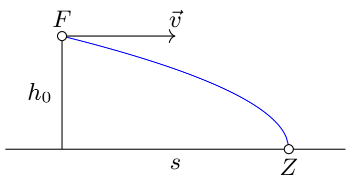
Wir bezeichnen die zweistellige Zahl mit a. Wegen der zweiten Bedingung, dass $5a - 9 < 100$ sein muss, muss $a < 22$ gelten. Daher ist der gesuchte Kandidat 18, da

$$5 \cdot 18 - 9 = 90 - 9 = 81$$

ist, somit die zweite Bedingung erfüllt ist und 18 als Quersumme 9 besitzt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V01002
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss der Verpflegungskanister ausgelöst werden, damit er sein Ziel erreicht? (g = 10 m/s^2)



Der Kanister muss in der Entfernung s vom Zielpunkt abgeworfen werden, da er längs der Bahn eines waagerechten Wurfs den Zielpunkt erreicht. Für einen waagerechten Wurf gilt:

$$s = v_0 \cdot t \qquad ; \qquad h = h_0 - \frac{g}{2}t^2$$

wobei v_0 die Flugzeuggeschwindigkeit, h_0 die Abwurfhöhe und t die Wurfzeit ist. Der Boden wird für $h = 0$ erreicht, so dass sich ergibt

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad ; \qquad s = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt $s \approx 278$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - V01003
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Die beiden gesuchten Summanden bezeichnen wir mit a und b. Die beiden Bedingungen lauten

$$a + b = 900, \quad (1) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{221} \quad (2)$$

(2) lässt sich zu

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{900}{ab} = \frac{1}{221}$$

umschreiben, so dass $ab = 900 \cdot 221 = 198900$ gilt. Mit $a = 900 - b$ aus (1) folgt

$$a \cdot b = (900 - b) \cdot b = 198900$$
$$b^2 - 900 \cdot b = -198900$$
$$b^2 - 900 \cdot b + 450^2 = 450^2 - 198900$$
$$(b - 450)^2 = 3600$$

und somit die Möglichkeiten $b_1 = 390$ und $b_2 = 510$. Somit lauten die beiden Summanden - unter Beachtung der Kommutativität der Addition - dementsprechend 390 und 510.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V01004
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Wir können (1) umschreiben zu

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = 2^{22},$$

sodass wir das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 22 \quad (3) \qquad , \qquad x - y = 4 \quad (4)$$

lösen müssen. Aus (4) folgt $x = y + 4$ und setzen wir dieses Ergebnis in (3) ein, so ergibt sich

$$x + y = (y + 4) + y = 2y + 4 = 22$$

und somit $y = 9$ und daher $x = 13$.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V01005
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

"Sie heißt III Z ... Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Die erste Ziffer sei y, die drei letzten Ziffern: $3x$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$y + 3x = 22$$
$$(1000y + 100x + 10x + x) - 1998 = 1000x + 100x + 10x + y$$

Dieses System hat die Lösung $x = 5$ und $y = 7$. Die Autonummer heißt folglich III Z 7555.

Übernommen von [6]

Aufgabe 6 - V01006
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vorn streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

x sei die Zahl ohne die Anfangsziffer 7. Dann wird

$$7 \cdot 10^n + x = 3(10x + 7) = 30x + 21$$
$$7 \cdot 10^n - 21 = 7(10^n - 3) = 29x$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $10^n - 3$ die Zahl 29 als Teiler besitzen.

1. Lösung:
Setze $r_0 = -2$ und $r_{n+1} = 10r_n - 2 \bmod 29$, so gilt $r_n \equiv 10^n - 3 \pmod{29}$.
Durch systematisches Berechnen der Folgenglieder erhält man für $n = 1,2,...$
-22, -19, -18, -8, -24, -10, -15, -7, -14, -26, -1, -12, -6, -4, -13, -16, -17, -27, -11, -25, -20, -28 -21, -9, -5, -23, 0
Damit ist $10^{27} - 3$ ein Vielfaches von 29. Die gesuchte Zahl ist somit

$$7 \cdot 10^{27} + \frac{7 \cdot 10^{27} - 3}{29} = \frac{3}{29}(7 \cdot 10^{28} - 1)$$

Aufgabe gelöst von ochen

2. Lösung:
Setze $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 10a_n \mod 29$. Dann ergibt sich

$a_0,a_1,a_2,...,a_{28} = 1,10,13,14,24,8,22,17,25,18,6,2,20,26,28,19,16,15,5,21,7,12,4,11,23,27,9,3,1$

Danach wiederholt es sich periodisch. Das kleinste n mit $a_n = 3$ (und daher $10^n - 3 \equiv 0 \mod 29$) ist $n = 27$. Somit ist $\frac{7}{29}(10^{27} - 3)$ die gesuchte Zahl x und die kleinste Zahl aus der Aufgabenstellung $\frac{210 \cdot 10^{27} - 3}{29}$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

3. Lösung:
Gesucht ist das kleinste n, so dass $10^n \equiv 3 \pmod{29}$. Schreibt man n in der Form $n = 6m + r$ mit $0 \leq r < 6$ (Bemerkung: $6 = \lceil\sqrt{29}\rceil$), so erhält man $10^{6m}10^r \equiv 3 \pmod{29}$.

Wegen $10 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{29}$ und $3^6 \equiv 27^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4 \pmod{29}$ suchen wir also das lexikographisch kleinste Paar (m,r) für das $10^r \equiv 3 \cdot 4^m \pmod{29}$ gilt.

Für $r = 0,1,2,3,4,5$ gilt $10^r \equiv 1,10,13,14,8,22 \pmod{29}$. Jetzt berechnen wir $3 \cdot 4^m$ modulo 29 für $m = 0,1,2,\ldots$, bis wir einen Rest aus der gerade berechneten Liste erhalten: $3 \cdot 4^m \equiv 3,12,19,18,14 \pmod{29}$ für $m = 0,1,2,3,4$. Also ist $(m,r) = (4,3)$, d.h. $n = 6 \cdot 4 + 3 = 27$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 7 - V01007
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Die gesuchte Zahl z hat die Form $z = 10x + 1$, wobei x die Restzahl nach dem Streichen der 1 am Ende ist. Dann wird

$$z = 10x + 1 = 3 \cdot (100000 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 42857$$

Die gesuchten Zahlen sind somit 428571 und 142857. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

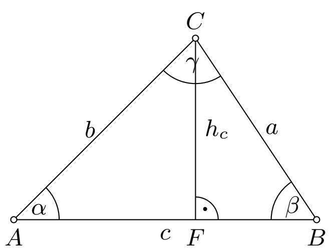
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 8 - V01008
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Das Volumen einer Halbkugel ergibt sich zu $V_H = \frac{4}{6}\pi r^3$. Mit $V_H = 1\text{ dm}^3$ wird $r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}} = 0{,}78$ dm. Der innere Durchmesser der Schöpfkelle muss 15,6 cm groß sein.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 9 - V01009
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!



In den rechtwinkligen Dreiecken AFC und BFC gilt zum einen $h_c = a \sin\alpha$, zum anderen $h_c = b \sin\beta$. Für den Flächeninhalt F wird mit dem Einsetzen der zwei Gleichungen

$$F = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\alpha}\frac{h_c}{\sin\beta}\sin\gamma$$

Auflösen der Gleichung nach h_c ergibt die gesuchte Beziehung

$$h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

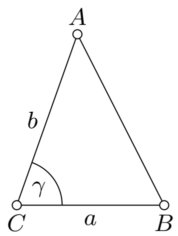
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 10 - V01010
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Der Nagel weist den besten Halt auf, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Bei gleicher Fläche (von 1 cm^2) hat ein Dreieck den größten Umfang, vor dem Quadrat und dem Kreis. Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 11 - V01011
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?



Der Punkt, von dem die beiden Stollen ausgehen und in einer Ebene liegen, soll mit C bezeichnet werden. Die beiden Stollenlängen sind $a = 162{,}5$m und $b = 200$m. Der Winkel, der von den beiden Stollenlängen a und b am Punkt C eingeschlossen wird, wird $\gamma = 70{,}5°$ genannt. Die gesuchte Stollenlänge nennen wir c.

Da im Dreieck die zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel gegeben sind, folgt die eindeutige Konstruierbarkeit bis auf Kongruenz aus den Kongruenzsätzen.

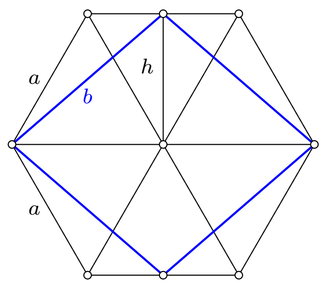
Mit dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \\ &= (162{,}5\text{m})^2 + (200\text{m})^2 - 2 \cdot (162{,}5\text{m}) \cdot (200\text{m}) \cdot \cos(70{,}5°) \approx 44708{,}8\text{m}^2 \end{aligned}$$

und damit $c \approx 211{,}4$m. Somit wird der Verbindungsstollen ungefähr 211,4m lang.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 12 - V01012
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?



a) Es ist

$$b = \sqrt{a^2 + h^2}$$

wobei $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ist, und daher:

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

Der Umfang des Rhombus ist somit:

$$U_R = 4b = 2\sqrt{7}\,a$$

Die Fläche des Rhombus lautet:

$$A_R = 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 2ah = \sqrt{3}\,a^2$$

b) Die Fläche des Sechsecks lautet:
$$A_S = 6 \cdot \tfrac{1}{2}ah = 3ah$$
Die Fläche des Rhombus ist daher zwei Drittel des Flächeninhalts des Sechsecks, und daher gerundet 66,7%.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

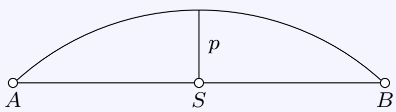
Aufgabe 13 - V01013
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Für die Anzahl d der Diagonalen eines n-Ecks gilt:
$$d(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$$
Begründung: Von jeder der n Ecken lässt sich zu $n-3$ anderen Ecken eine Diagonale zeichnen. Bei $n \cdot (n-3)$ wird aber jede Diagonale doppelt gezählt. Folglich gibt es $\frac{1}{2}n \cdot (n-3)$ Diagonalen.

Setzt man $n = 4775$ ein, so ergeben sich für das 4775-Eck genau 11393150 Diagonalen.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 14 - V01014

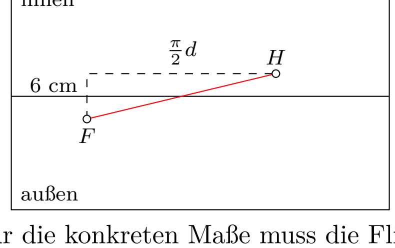


Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s;p)$?

Es sei M der Kreismittelpunkt. Dann bildet MSA ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten AS und MS und der Hypotenuse AM.
Die Seitenlängen sind $\frac{s}{2}$, $r-p$ und r. Nach Pythagoras gilt $(\frac{s}{2})^2 + (r-p)^2 = r^2$. Diese Gleichung nach r aufgelöst ergibt
$$r = r(s,p) = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2}$$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 15 - V01015
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.
Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.



Die Fliege muss sowohl den Rand des Zylinders überklettern, als auch den halben Umfang des Zylinders überwinden. Breitet man äußere Mantelfläche und innere Mantelfläche in der Ebene aus, so erkennt man, dass der kürzeste Weg die eingezeichnete Gerade von der Fliege F zum Honig H ist.

Für das entstehende rechtwinklige Dreieck wird die Hypotenuse (Weglänge) gleich $\sqrt{6^2 + \left(\frac{\pi}{2}d\right)^2}$.
Für die konkreten Maße muss die Fliege $d \approx 16{,}8$ cm Weg zurücklegen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 16 - V01016
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Radius des kleinsten Kreises ist nach b) $r = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_1, r_2, r_3 und r_4. Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r^2 \quad ; \quad F_2 = \pi(r_1^2 - r^2) \quad ; \quad F_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$
$$F_4 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \quad ; \quad F_5 = \pi(r_4^2 - r_3^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r^2 = \pi(r_1^2 - r^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$r^2 = r_1^2 - r^2 \Rightarrow 2r^2 = r_1^2 \Rightarrow r_1 = r\sqrt{2}$$
$$r_1^2 - r^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 - r^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r\sqrt{3}$$
$$r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r\sqrt{4}$$
$$r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r\sqrt{5}$$

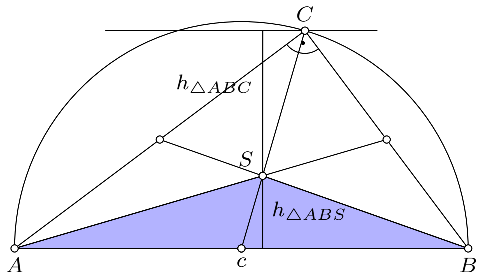
Die Kreise haben folgende Radien: $r = 2$ cm, $r_1 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_3 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_4 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Übernommen von [6]

Aufgabe 17 - V01017
Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.



Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.
Aus $F = \frac{gh}{2}$ folgt $h = \frac{2F}{g}$ und damit für das Dreieck ABS: $h_{\triangle ABS} = \frac{4}{3}$. Auch die Höhenabschnitte verhalten sich wie 1:2, daraus folgt:

$$h_{\triangle ABC} = 3h_{\triangle ABS} = 4 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

Aus den Verbindungslinien des Schwerpunkts S mit den Dreieckspunkten A, B und C entstehen somit drei flächengleiche Teildreiecke.
Aus c und h ergeben sich dann die Katheten mittels Höhensatz und Satz des Pythagoras zu $a = 8{,}94$ cm sowie $b = 4{,}47$ cm.

Übernommen von [6]

7.2 Vorolympiade 1961

7.2.1 I. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V11011
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Für die Hackfruchtflächen werden $48{,}72 \cdot 34\text{kg} = 1656{,}48\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Luzerneflächen werden $20{,}47 \cdot 20\text{kg} = 409{,}40\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Getreideflächen werden $82{,}5 \cdot 17{,}5\text{kg} = 1443{,}75\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Insgesamt werden somit 3509,83kg P_2O_5 benötigt.

Superphosphat enthält 17,3 Prozent P_2O_5, sodass insgesamt $\frac{3509{,}63}{0{,}173}\text{kg} \approx 20286\text{kg}$ Superphosphat benötigt werden. Da eine Dezitonne 100kg entspricht, werden 202,86 Dezitonnen Superphosphat benötigt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V11012
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} &a) \quad \sin x = \sin 69^\circ \\ &b) \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32^\circ\right) = 1 \\ &c) \quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

a) $x_1 = 69^\circ; x_2 = 111^\circ$. Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$x_1 = 69^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad ; \quad x_2 = 111^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b) $x_1 = 26^\circ; x_2 = 206^\circ$. Bei Berücksichtigung der Periodizität

$$x = 26^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 x$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Übernommen von [6]

Aufgabe 4 - V11013
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47^\circ$ und $\gamma = 55^\circ$.
Berechnen Sie b, c und α!

Da die Winkel β und γ an der Seite a anliegen, ist dieses Dreieck nach den Kongruenzsätzen bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar.
Für den Winkel α gilt nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 47^\circ - 55^\circ = 78^\circ.$$

Mit dem Sinussatz gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

und daher

$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(47^\circ)}{\sin(78^\circ)} \approx 3{,}74\text{cm}.$$

Ebenso folgt mit dem Sinussatz

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(55°)}{\sin(78°)} \approx 4{,}19\text{cm}.$$

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V11014
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse gerade die Summe des Erdradius und der Höhe des Fernsehturms ist. Wir setzen dafür $c = 6370{,}5$km. Die bekannte Kathete ist der Erdradius und wir schreiben dafür $a = 6370$km. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da die gesuchte Kathete b tangential am Erdgroßkreis anliegt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 = c^2 - a^2 = (6370{,}5\text{km})^2 - (6370\text{km})^2 = 6370{,}25\text{km}^2$$

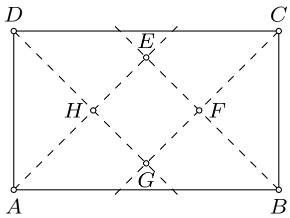
und somit

$$b \approx 79{,}8\text{km}.$$

Das bedeutet, dass man vom Fernsehturm etwa 79,8km weit sehen kann.

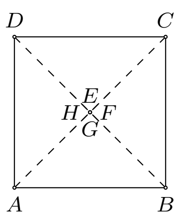
Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V11015
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?



a) Die vier Winkelhalbierenden bilden ein Quadrat $EFGH$.
F und H liegen aus Symmetriegründen auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks $ABCD$. Nach einem Strahlensatz gilt dann $EH : AE = EF : EB$. Da $AE = EB$ ist, gilt auch $EH = FH$. Analog folgt auch $FG = GH$, $EH = GH$ und $GF = EF$, d.h., alle vier Seiten von $EFGH$ sind gleich lang.
Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln von 45° (Winkelhalbierende). Das ist der Winkel bei E ein Rechter und $EFGH$ ist ein Quadrat.

b) Für ein Quadrat fallen die vier Punkte E, F, G und H zusammen, da auch die Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es entsteht keine Fläche.



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

7.2.2 II. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V11021
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

A sei die Anfangsproduktion. Dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

$$\begin{array}{llll} 1959 & A & & \\ 1960 & A+\frac{1}{10}A & =A\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1 \\ 1961 & A\cdot 1{,}1+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1 & =A\cdot 1{,}1\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^2 \\ 1962 & A\cdot 1{,}1^2+\frac{1}{10}A\cdot 1{,}1^2 & =A\cdot 1{,}1^2\left(1+\frac{1}{10}\right) & A\cdot 1{,}1^3 \end{array}$$

Nach n-jährigem Wachsen ergibt sich $A\cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt. Danach gilt die Formel:

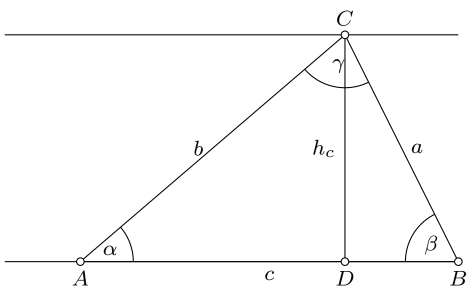
$$x = A\cdot 1{,}1^n$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:
zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59 \approx 2{,}6$,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73 \approx 6{,}8$,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26 \approx 45{,}3$.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren auf das 6,8fache ..., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

Übernommen von [6]

Aufgabe 2 - V11022
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm\frac{1}{2}^{\circ}$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.



a) Allgemeine Lösung: Es gilt $\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a}$ sowie $h_c = a\sin\beta$. Aus dem Sinussatz wird durch Einsetzen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad h_c = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

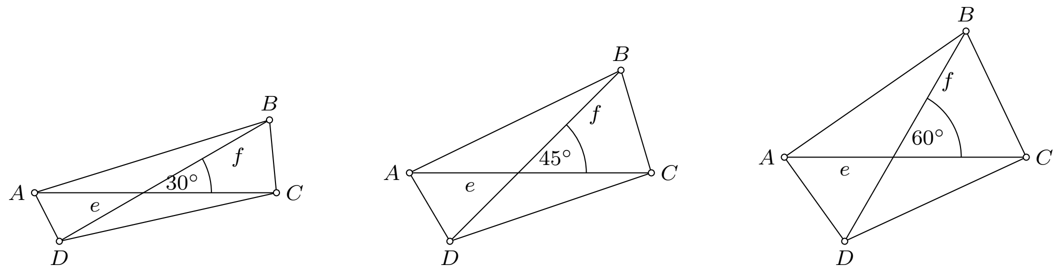
Für die gegebenen Werte ergibt sich somit $h_c = 169{,}5$ m. Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung des Messfehlers 169,5 m.

b) Berechnet man die Höhe h_c mit $c + 0.5$, $\alpha + 0.5°$ und $\beta + 0.5°$ ergibt sich $h_c = 173{,}3$ m.

Im Fall $c - 0.5$, $\alpha - 0.5°$ und $\beta - 0.5°$ wird $h_c = 165{,}7$ m.
Der mögliche Fehler ist somit $\frac{173{,}5-165{,}5}{2} = 4$ m.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - V11023
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?



Jedes der Vierecke wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Dabei entstehen die Diagonalenteile e_1, e_2, f_1, f_2 mit $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Mit dem Schnittwinkel α der Diagonalen ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Vierecks

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}e_1 \cdot f_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_2 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_1 \cdot f_2 \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_1 \sin(180° - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot e \cdot f \end{aligned}$$

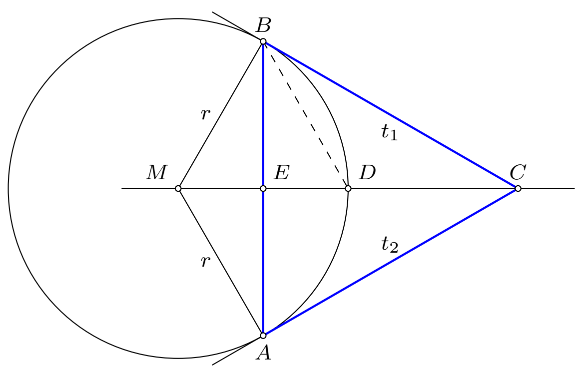
Damit folgt für die Verhältnisse der Flächeninhalte

$$\begin{aligned} F_1 : F_2 &= \sin 30° : \sin 45° = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2} \\ F_2 : F_3 &= \sin 45° : \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - V11024
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!



Behauptung: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

Beweis:
1. Winkel $\angle MBC$ ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck MDB ist gleichseitig, alle Seiten sind r, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle MED$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.
4. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel $\angle BCD$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.

Im $\triangle EBM$ treten die Winkel $\angle EMB = 60°$ (aus 2.), $\angle MBE = 30°$ (Basiswinkel in ABM) auf, folglich ist Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle EBM$ = Winkel $\angle EBC = 60°$. Im Dreieck EBC ist der Winkel $\angle EBC = 60°$, der Winkel $BCE = 30°$ und der Winkel $\angle BEC = 90°$.
Die Strecke EC ist Symmetrieachse im Dreieck. Daraus folgt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - V11025
Peter sagt zu seinem Freund: "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast."
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Mit $g = 2k$ für eine natürliche Zahl k bezeichnen wir die gerade Anzahl Streichhölzer. Mit $u = 2l + 1$ für eine nichtnegative ganze Zahl l bezeichnen wir die ungerade Anzahl Streichhölzer. Es gibt zwei Varianten.

Erste Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der linken Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_1 des Rätsels
$$n_1 = 2 \cdot g + 3 \cdot u = 4k + 6l + 3.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels ungerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand befindet.

Zweite Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der rechten Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_2 des Rätsels
$$n_2 = 2 \cdot u + 3 \cdot g = 6k + 4l + 2.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels gerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand befindet.

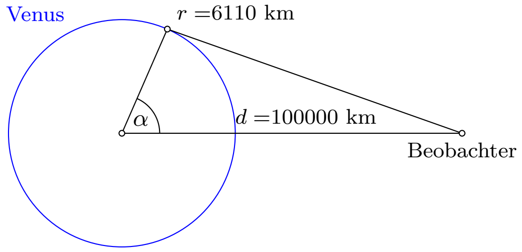
Aufgabe gelöst von svrc

7.2.3 III. Runde V1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - V11031
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

a) Betrachtet man die Himmelskörper wie gefordert näherungsweise als scheibenförmig, dann ist das Raumschiff beim Vorbeiflug 3,84 mal näher als der Mond von der Erde entfernt ist. Außerdem ist die Venus $\frac{12220}{3476}$ mal größer als der Mond, so dass sie einem Beobachter im Raumschiff $\frac{12220}{3476} \cdot 3{,}84 = 13{,}5$ mal größer erscheinen würde als der Vollmond von der Erde aus gesehen.

b) Hier ist man versucht, zu antworten: "den ihm Zugewandten". Es soll jedoch wohl der tatsächliche Beobachtungswinkel verwendet werden, um prozentual die sichtbare Fläche der Venus anzugeben. Leider lässt uns die Aufgabe auch im Unklaren darüber, ob mit der Entfernung von 100000 km der Abstand zum Schwerpunkt der Venus oder zur Oberfläche gemeint ist. Wir nehmen das erste an:



Es ist $\cos\alpha = \frac{r}{d}$. Die gesamte Oberfläche der Venus ist

$$A_g = 4\pi r^2$$

Der sichtbare Teil ist dagegen

$$A_s = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{d}\right)$$

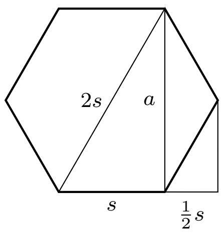
Somit ist der sichtbare Anteil der Oberfläche

$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{1-\frac{r}{d}}{2} = \frac{d-r}{2d}$$

Im vorliegenden Fall entspricht das etwa 46,9% der gesamten Oberfläche.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - V11032
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?



a) Die genaue Formel lautet:

$$F_S = (s + \tfrac{1}{2}s)a = \tfrac{3}{2}as$$

Dabei gilt wegen des Satzes von Pythagoras:

$$a = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{3}\,s \quad \rightarrow \quad s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Und daher gilt für die genaue Formel:

$$F_S = \frac{3}{2\sqrt{3}}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

b) Der prozentuale Fehler ist immer gleich, egal ob $a = 50$mm oder irgendein anderer Zahlenwert ist. Der relative Fehler ist

$$1 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{7}{12}\sqrt{3}$$

Das entspricht etwa -1%. (Die Näherung ergibt einen größeren Wert als die genaue Formel, daher negativ).

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

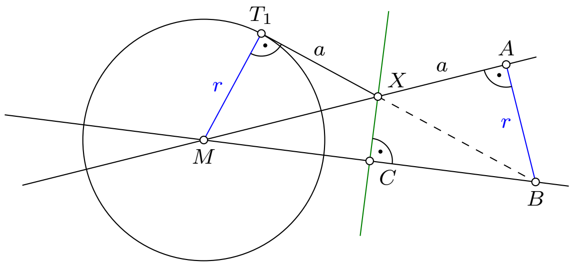
Aufgabe 3 - V11033
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Die Divisionsaufgabe die Fritz gestellt wird, möge $\frac{a}{b}$ lauten. Fritz rechnet $a = 57 \cdot b + 52$, macht die Probe und erhält dabei $57 \cdot b' + 52 = 17380$ wobei sich der Faktor b' irrtümlich in der Zehnerstelle vom korrekten Wert b unterscheidet.

Es folgt dann $b' = \frac{17380-52}{57} = 304$. Laut Aufgabenstellung ergibt sich der wirkliche Wert b, indem die Zehnerstelle 0 von b' durch 6 ersetzt wird. Folglich ist $b = 364$, $a = 57 \cdot 364 + 52 = 20800$ und die Divisionsaufgabe, die Fritz gestellt wurde, lautet $\frac{20800}{364}$.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 4 - V11034
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!



1. Man zeichne Punkt B so, dass die Strecke AB die Länge r (Radius des Kreises) habe und senkrecht stehe auf der Strecke AM, siehe Skizze.
2. Vom Punkt B zeichne man eine Gerade durch M.
3. Man konstruiere den Mittelpunkt C der Strecke MB.
4. Man zeichne eine Senkrechte auf die Gerade MB durch den Punkt C.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden (grün) mit der Geraden AM ist der gesuchte Punkt X.

Begründung:
Man erkennt, dass der Streckenzug MT_1XAB symmetrisch ist bezüglich der "grünen"Geraden CX. a und r stehen senkrecht aufeinander sowohl im Punkt T_1 als auch im Punkt A. T_1 und X sind zwar anfangs noch unbekannt, aber der Punkt C auf der Symmetrieachse lässt sich mit obigen Schritten einfach konstruieren.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V11035
Unter der Zahl $n!$, gelesen "n Fakultät", versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Wir zerlegen alle Faktoren in ihre Primfaktoren. Eine Endnull entsteht genau dann, wenn die Primzahlen 2 und 5 miteinander multipliziert werden. Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus den Faktoren, die als Endziffer eine Null oder eine Fünf haben, d.h:

$$5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 2^2 \cdot 5, 25 = 5^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 40 = 2^3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5^2.$$

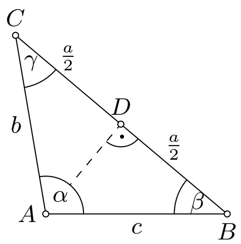
Insgesamt taucht der Primfaktor 5 12 Mal auf. Da der Primfaktor 2 in jeder geraden Zahl auftaucht, hat die Zahl 50! insgesamt 12 Endnullen.

Aufgabe gelöst von svrc

7.3 I. Olympiade 1961

7.3.1 I. Runde 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011011
Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: $AB = c = 87{,}51$ m, $\angle CAB = \alpha = 93{,}42°$.
Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!



Wegen $2\alpha > 180°$ kann α kein Basiswinkel sein. Für die Größe der beiden Basiswinkel $\angle ABC = \beta$ und $\angle ACB = \gamma$ gilt dann

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 43{,}29°$$

Da $AC = b$ wie AB ein Schenkel ist, gilt $b = c = 87{,}51$ m. Zeichnet man die auf $BC = a$ stehende Höhe AD ein, so erhält man im entstehenden rechtwinkligen Dreieck ABD die Gleichung $\cos\beta = \frac{a}{2c}$ und damit $a = 2c \cdot \cos\beta = 127{,}40$ m.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 2 - 011012
In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genau soviel Gas erzeugt wie im zaristischen Russland während des gesamten Jahres 1913.
Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!

Für die Menge des heute in 37 min produzierten Gases brauchte man 1913 genau $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525600$ min. Die Gasproduktion steigerte sich also um das $\frac{525600}{37}$ fache, also um $\left(\frac{525600}{37} - 1\right) \cdot 100\% = 1420441\%$.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 3 - 011013
Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in km/h)?
b) Wie lang ist der Zug?

Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v in 9 s an dem Fußgänger vorbei, der ihm in dieser Zeit 9 m entgegenkommt. Der Zug fährt also eine Strecke von $s - 9$ m, wobei s die Länge des Zuges ist. Damit ist

$$v = \frac{s - 9m}{9s}$$

Da der Zug in 27 s eine Strecke von 171 m$+s$ zurücklegt, ist aber auch

$$v = \frac{171m + s}{27s}$$

Nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Umstellen erhalten wir $s = 99$ m und durch Einsetzen $v = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$.

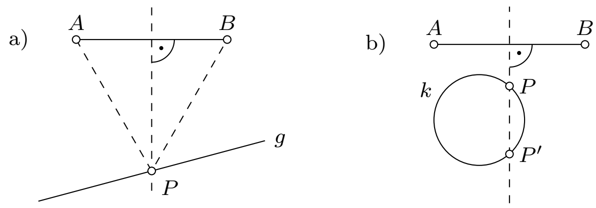
Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 4 - 011014
Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht.
Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan? Die Antwort ist zu begründen!

Die Kugel hat den Durchmesser a und damit ein Volumen von $\frac{\pi}{6}a^3$. Der Würfel hat ein Volumen von a^3, der Abfallspan also ein Volumen von $(1-\frac{\pi}{6})a^3$. Das Volumen der Kugel ist somit etwas größer als das des Verschnitts, denn es gilt: $\pi > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} > 1 - \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 5 - 011015
Es ist
a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist;
b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
Ist dieser Punkt stets vorhanden? Gibt es nur einen solchen Punkt?



a) (Bild a) Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt der gegebenen Geraden g mit der Mittelsenkrechten von AB. Wenn diese parallel zu g verläuft, gibt es keine Lösung.

b) (Bild b) Wie oben. Wenn die Mittelsenkrechte mit dem gegebenen Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es keine Lösung. Ist sie Tangente, erhält man eine, ist sie Sekante, zwei Lösungen P und P'.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 6 - 011016
Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

a) Teilt man diese sechsstellige Zahlx in ihre 1. Ziffer 1 und die restliche 5-stellige Zahl a, so lässt sich dies wie folgt ausdrücken: $x = 100000 + a$.
Gleichzeitig gilt für die zweite sechsstellige Zahl y, dass sie aus x durch Streichen der 1. Ziffer und Anfügen dieser Ziffer am Ende der Zahl entsteht, also: $y = 10 \cdot a + 1$.
Ferner wird gesagt, dass gelte: $y = 3x$ und somit $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100000 + a)$. Nach Umformen erhält man $7a = 3 \cdot 100000 - 1$, was ergibt: $a = 42857$. Für x und y ergibt sich damit: $x = 142857, y = 428571$.

b) Es gelten folgende Aussagen:
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten beiden Ziffern 14 und hängt sie an die verbleibende vierstellige Zahl, so entsteht eine doppelt so große wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzten beiden Ziffern 57 und stellt sie der verbleibenden vierstelligen Zahl voran, so entsteht eine viermal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzte Ziffer 7 und stellt sie der verbleibenden fünfstelligen Zahl voran, so entsteht eine fünfmal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten drei Ziffern 142 und hängt sie an die verbleibende dreistellige Zahl, so entsteht eine sechsmal so große wie die ursprüngliche Zahl.

c) Die Aufgabe kann aus der Antwort zu Teil a) entnommen werden:

$$x = 100000 + a = 100000 + \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} \qquad \text{sowie} \qquad y = 10 \cdot a + 1 = 10 \cdot \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} + 1$$

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

7.3.2 II. Runde 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011021
Im Jahre 1970 sollen in der Sowjetunion mindestens 900 Milliarden kWh und 1980 wenigstens 2700 Milliarden kWh Elektroenergie erzeugt werden. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1475 Milliarden kWh bzw. 2230 Milliarden kWh an.
Wann würde die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?

Die produzierte Energiemenge E (in Mrd. kWh) lässt sich, wenn eine gleichmäßige Steigerung vorausgesetzt wird, mit linearen Funktionen beschreiben, diejenige der Sowjetunion ist $E_{SU} = 900 + 180x$, die der USA $E_{USA} = 1475 + 75{,}5x$, wobei x die Anzahl der Jahre nach 1970 ist.
Die Energieproduktion beider Länder ist gleich, wenn

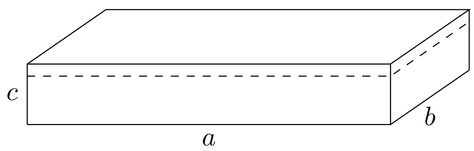
$$E_{SU} = E_{USA}, \text{ also } 900 + 180x = 1475 + 75{,}5x$$

oder nach Umstellen $x \approx 5{,}5$ gilt. Dies wird somit im Jahre 1976 der Fall sein.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 2 - 011022
An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen $a = 120$ mm, $b = 60$ mm und $c = 17$ mm soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine.
Folgende Einstellungen sind möglich:
(1) 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm,
(2) 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm.

a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?
b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen $a = 150$ mm, $b = 50$ mm, $c = 17$ mm?
Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.



a) Bei Einstellung 1 wird man so einspannen, dass a in Hubrichtung liegt. Man benötigt für eine Fläche $\frac{60}{1{,}5} = 40$ Hübe, also $\frac{40}{46} = \frac{20}{23}$ min reine Arbeitszeit.
Bei Einstellung 2 spannt man so ein, dass b in Hubrichtung liegt. Man benötigt dann 80 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{20}{27}$ min.
Damit ist Einstellung 2 rationeller.

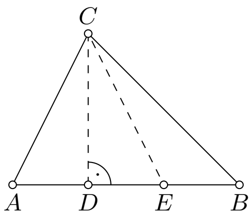
b) Bei Einstellung 1 wählt man die Einspannung wie oben; man braucht 34 Hübe, also $\frac{17}{23}$ min. Bei Einstellung 2 wählt man ebenfalls die Einstellung wie oben und braucht 100 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{25}{27}$ min.
Hier ist damit Einstellung 1 rationeller.

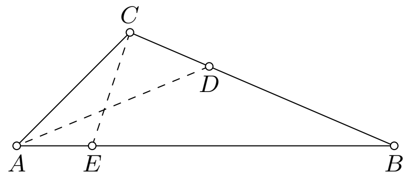
Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 3 - 011023
Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen?
Die Behauptung ist zu begründen!

Nein, es ist nicht möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Beweis: Zunächst ist festzustellen, dass der Schnitt durch das Dreieck ABC durch einen der Eckpunkte gehen muss, da ansonsten ein Viereck entsteht.
Angenommen, ABC sei spitzwinklig (linkes Bild).





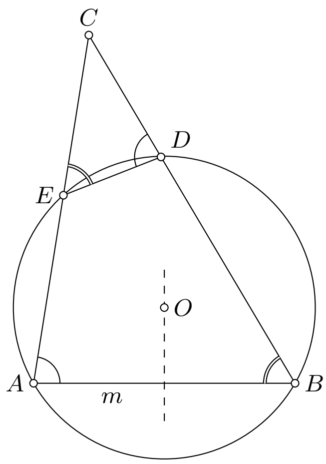
Dann erzeugt jeder geradlinige Schnitt durch einen Eckpunkt, hier C, an der gegenüberliegenden Seite AB zwei Winkel, von denen entweder beide rechtwinklig ($\angle CDA = \angle CDB = 90°$) oder einer spitz- und der andere stumpfwinklig ($\angle CEA < \angle CEB$) sind.
Im ersten Fall können die Dreiecke CDA und CDB nicht kongruent sein, da ihre Hypotenusen nach Voraussetzung ungleich lang sind; im zweiten Fall entsteht nur ein stumpfer Winkel, der keinen „Partner“ im anderen Teildreieck hat.

Ist das zu teilende Dreieck ABC dagegen stumpfwinklig (rechtes Bild), so erzeugt ein Schnitt durch einen der Eckpunkte, an denen spitze Innenwinkel vorliegen, hier AD, auf der gegenüber-liegenden Seite zwar einen stumpfen Winkel, der aber stets größer als der stumpfe Innenwinkel in $\triangle ABC$ ist.
Bei einem Schnitt durch den Eckpunkt mit dem stumpfen Innenwinkel, hier CE, gilt bezüglich der rechten Winkel dasselbe wie im ersten Fall. Selbst wenn dabei ein stumpfer Innenwinkel zustande kommt, hier $\angle AEC$, kann dieser nicht gleich dem verbleibenden Winkel $\angle ECB$ sein, weil dazu zwei Seiten des Dreiecks parallel sein müssten ($AB \parallel BC$), was nicht geht.
Es ist somit nicht möglich, ein beliebiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011024
Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, dass das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Konstruktion:
(Bild) O.B.d.A. sei AB die kürzeste der Seiten des Dreiecks ABC.
Wir wählen auf der Mittelsenkrechten m der Seite AB einen Punkt O derart, dass ein Kreis mit Mittelpunkt O durch die Eckpunkte A und B geht und weiterhin noch die beiden anderen Seiten in den Punkten D bzw. E schneidet.
Das Dreieck DEC ist dann dem ursprünglichen Dreieck ähnlich. Die kürzeste Seite als Sehne des Kreises auszuwählen, garantiert dabei, dass die Schnittpunkte D und E tatsächlich existieren.



Beweis:
$ABDE$ ist ein Sehnenviereck, in dem sich gegenüberliegende Winkel stets zu einem Gestreckten ergänzen.
Also gilt:

$$\angle CAB = 180° - \angle BDE = \angle CDE \qquad ; \qquad \angle CBA = 180° - \angle AED = \angle CED$$

Das abgeschnittene Dreieck DEC hat somit dieselben Innenwinkel wie das ursprüngliche Dreieck ABC und ist diesem daher ähnlich. Außerdem liegen sich gleiche Winkel stets gegenüber, so dass für alle nicht gleichschenkligen, also beliebigen Dreiecke $AB \nparallel ED$ gilt.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 011025
Gegeben ist die Zahl $9^{(9^9)}$.
a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden.)
b) Wie lang müsste der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?
c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?

a) Die Anzahl der Ziffern ist gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer ist als

$$\log_{10} 9^{(9^9)} = 9^9 \cdot \log_{10} 9$$

Wegen $9^9 = 387420489$ und $\log_{10} 9 \approx 0{,}954243$ hat $9^{(9^9)}$ somit rund 369700000 Stellen.

b) So ein Streifen müsste ungefähr $369700000 \cdot 2$ mm $= 739400000$ mm $= 739{,}4$ km lang sein.

c) Da 9^9 eine ungerade Zahl ist, endet die Zahl wegen

$$9^{(9^9)} \equiv (-1)^{(9^9)} \equiv -1 \equiv 9 \mod 10$$

auf die Ziffer 9.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

7.3.3 III. Runde 1961, Klasse 10

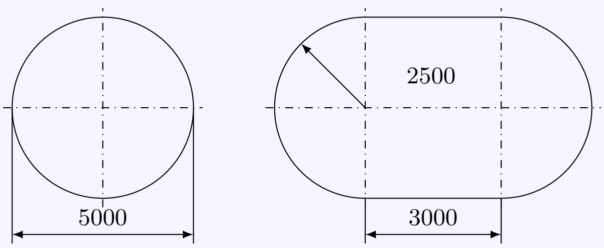
Aufgabe 1 - 011031
Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU wurde über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft berichtet, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben.
In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais.
Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha.
Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?

Der Ertrag an Erbsen beträgt $708 \cdot 31$ dt. Da die 21% der gesamten Anbaufläche, auf denen Erbsen angebaut werden, 708 ha entsprechen, beträgt die Gesamtfläche $\frac{708}{0{,}21}$ ha. Auf dieser wurde also ein Ertrag von $\frac{38\cdot 708}{0{,}21}$ dt erzielt.
Die Maisanbaufläche beträgt $\frac{0{,}3\cdot 708}{0{,}21}$ ha, es wurden also $\frac{18\cdot 708}{0{,}21}$ dt Mais geerntet.
Die Fläche, auf der weder Mais noch Erbsen angebaut wurden, beträgt $\frac{0{,}49\cdot 708}{0{,}21}$ ha. Damit beträgt der Ernteertrag der restlichen Getreidekulturen

$$\frac{\left(\frac{38\cdot 708}{0{,}21} - 708\cdot 31 - \frac{18\cdot 708}{21}\right)\text{dt}}{\frac{0{,}49\cdot 708}{0{,}21}\text{ha}} = 27{,}5\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$$

Aufgabe gelöst von Christian Czech

Aufgabe 2 - 011032



In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“ in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (s. Abbildung) und ein Leergewicht von 30 Mp.
a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke? (Wichte des Stahls 7,85 $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Der Kocher hat die Form eines Zylinders, an dessen Grund- und Deckfläche jeweils eine Halbkugel angebracht ist.

a) Damit ist die Oberfläche gleich die Summe der Oberfläche der gesamten Kugel und der Mantelfläche des Zylinders, also gleich

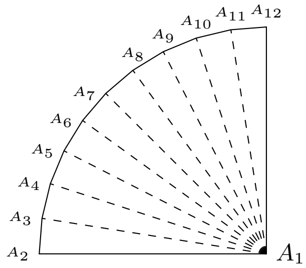
$$4\pi(2{,}5\text{ m})^2 + 2\pi\cdot 2{,}5\text{ m}\cdot 3\text{ m} = 125{,}7\text{ m}^2$$

Die Wichte eines Stoffes ist der Quotient aus Masse und Volumen (des Stahlmantels). Damit beträgt das Volumen des verwendeten Stahls 3,83 m^3. Die Wandstärke beträgt damit $\frac{3{,}82\text{ m}^3}{125\text{ m}^2} = 3$ cm.
b) Das Fassungsvermögen ist die Summe aus dem Volumen der Kugel und des Zylinders, also gleich

$$\frac{4}{2}\pi(2{,}5\text{ m})^3 + \pi(2{,}5\text{ m})^2\cdot 3\text{ m} = 124{,}4\text{ m}^3$$

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 3 - 011033
In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel.
Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

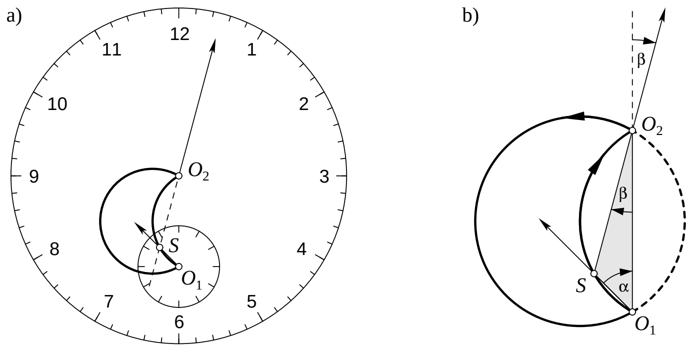


Wir legen einen Eckpunkt des Zwölfecks fest, etwa A_1, und zeichnen alle Diagonalen, die durch diesen Punkt gehen, ein. Dabei entstehen 10 Dreiecke, die durch solche Diagonalen und die Seiten des Zwölfecks begrenzt sind.
Die Innenwinkelsumme des Zwölfecks ist gleich der Summe aller Innenwinkel dieser Dreiecke, also gleich $10 \cdot 180° = 1800°$. Sind drei der Innenwinkel rechte Winkel (hier diejenigen bei A_{12}, A_1 und A_2), müssen die übrigen 9 Innenwinkel folglich eine Summe von $1800° - 270° = 1530°$ haben.
Ist darunter ein spitzer Winkel, so ist die Summe der restlichen 8 Winkel größer als $1530° - 90° = 1440°$. Diese sind jedoch alle kleiner als 180° (da das Zwölfeck konvex ist), ihre Summe ist also kleiner als $8 \cdot 180° = 1440°$. Damit kann es keine spitzen Winkel in diesem Zwölfeck geben.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

Aufgabe 4 - 011034
Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Ziffernblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Ziffernblattes verläuft.
Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zur gleichen Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Konstruieren Sie diese Kurve für den folgenden Fall:
Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5$ cm (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich so groß gewählt)!
Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenziffernblattes.

Das Bild a) zeigt das Ziffernblatt der Armbanduhr und die Stellung der beiden Sekundenzeiger, nachdem beide einen Winkel von 15° überstrichen haben. Die Mittelpunkte der Zeiger seien O_1 bzw. O_2, deren Schnittpunkt S. Es genügt im Folgenden, ausschließlich das Dreieck O_1O_2S zu betrachten (Bild b).



a) Je weiter die Zeit voran schreitet, desto kleiner wird der Winkel α und desto größer der Winkel β. Da beide Zeiger aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit umlaufen, bleibt die Summe $\alpha + \beta$ konstant, die hier gleich dem Differenzwinkel beider Zeiger zu Beginn ist.

   Wegen der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck folgt daraus: $\angle O_1SO_2 = 180° - (\alpha + \beta) = \text{const}$.

   Die Strecke O_1O_2 ist ebenfalls konstant, somit kann der gesuchte geometrische Ort aller Schnittpunkte S nur ein Kreisbogen sein, für den alle Peripheriewinkel über der Sehne O_1O_2 konstant sind.

   Erreicht einer der Zeiger die vertikale Richtung, kehrt sich die Umlaufrichtung von S um. Insgesamt ergibt sich somit eine, im Bild gezeigte möndchenförmige Figur.

b) Zur Konstruktion wird derjenige Kreisbogen gezogen, der über der Sehne O_1O_2 einen Peripheriewinkel von $\alpha + \beta$ fasst. Der kleinere der beiden Bögen O_1O_2 wird anschließend an der Geraden durch O_1 und O_2 gespiegelt.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 011035
Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

Es gilt:

$$\begin{aligned}
11^6 &\equiv 1^6 \equiv 1 \pmod{10},\\
12^6 &\equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{10},\\
13^6 &\equiv 3^6 \equiv 27 \cdot 27 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10},\\
14^6 &\equiv 4^6 \equiv 16^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}),\\
15^6 &\equiv 5^6 \equiv 5 \pmod{10} \text{ (denn } 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}),\\
16^6 &\equiv 6^6 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10})
\end{aligned}$$

Damit ist $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 \equiv 1 \pmod{10}$.

Aufgabe gelöst von Christiane Czech

2. Lösung: Es gilt

$$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1^6 + 2^6 + (-2)^6 + (-1)^6 + 0^6 + 1^6 = 131 \equiv 1 \mod 5$$

Von den beiden dann nur mehr möglichen Endziffern 1 bzw. 6 kommt aber nur die 1 in Frage, da die fragliche Summe eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden enthält und somit selbst ungerade ist.

Aufgabe gelöst von weird

7.3.4 IV. Runde 1961, Klasse 10

Aufgabe 1 - 011041
Wie auf dem XXII. Parteitag der KPdSU mitgeteilt wurde, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8 fache steigen.
Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) soll stark anwachsen, sie soll auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2 fache.
a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?
b) Wieviel Prozent würde er im Jahre 1980 betragen?

Seien a_0, b_0 und c_0 die Produktion von Produktionsmitteln, Gebrauchsgütern bzw. die gesamte Industrieproduktion im Jahr 1960 sowie a_1, b_1 und c_1 die avisierten Größen im Jahr 1980.
Dann gilt $a_1 = 6{,}8a_0$, $b_1 = 5{,}0b_0$ und $c_1 = 6{,}2c_0$ und ferner $a_0 + b_0 = c_0$ und $a_1 + b_1 = c_1$ bzw. $6{,}8a_0 + 5{,}0b_0 = 6{,}2c_0$. Die erste Gleichung wird nun durch c_0, die zweite durch $6{,}2c_0$ dividiert. Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{c_0} = 1 \qquad ; \qquad \frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} + \frac{25}{31}\frac{b_0}{c_0} = 1$$

welches die Lösung $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3}$ und $\frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{3}$ besitzt.
a) Im Jahr 1960 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln demnach $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3} = 66{,}7\%$.
b) Im Jahr 1980 hätte dieser Anteil $\frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} = \frac{68}{93} = 73{,}1\%$ betragen.

Aufgabe 2 - 011042
Auf einem Fluss mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück.
Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.
a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?
b) Welches Ergebnis erhält man für $s = 250$ m, $v = 150\ \frac{m}{min}$ und $c = 250\ \frac{m}{min}$?

a) Wenn das Boot mit der Strömung fährt, addieren sich die Geschwindigkeiten. Fährt es ihr entgegen, ist die Differenz die Effektivgeschwindigkeit. Die Fahrzeit ist die Summe aus dem Abschnitt, auf dem das Boot mit $c + v$ fährt und dem mit $c - v$:

$$t_1 = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{2vs}{c^2 - v^2}$$

Bewegt es sich aber senkrecht zur Strömung, spielt die Geschwindigkeit des Flusses keine Rolle (sie muss natürlich vom Boot kompensiert werden). Dann ist $t_2 = \frac{2s}{c}$.
b) Nach Einsetzen der Zahlenwerte folgt: $t_1 = 1\frac{14}{30}$ min, im anderen Fall: $t_2 = 2$ min.

Aufgabe 3 - 011043
Es sei

$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Berechnen Sie s_2 und s_3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Wir setzen $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der 3. binomischen Formel

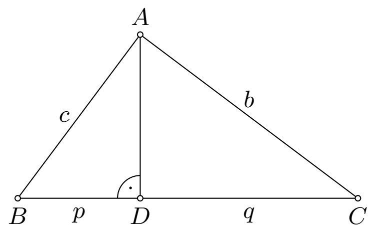
$$u^3v^3 = (20 + 14\sqrt{2} \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 8$$

also $uv = 2$. Ferner gilt stets

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3) \Rightarrow s^3 - 6s - 40 = 0$$

Glücklicherweise lässt sich eine Wurzel dieser kubischen Gleichung (die bereits in reduzierter Form vorliegt) durch Probieren leicht finden, nämlich $s = 4$.
Eine Polynomdivision durch $(s-4)$ liefert nun $s^3 - 6s - 40 = (s-4)(s^2+4s+10) = 0$, d.h. die anderen beiden Wurzeln sind komplex: $s_{2,3} = -2 + \sqrt{6}i$. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt also 4; die weiteren Potenzen sind demnach $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$.

Aufgabe 4 - 011044
Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie BC teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.



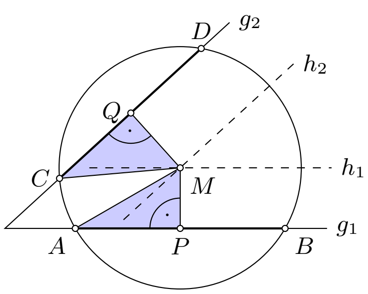
Beweis: Der Höhenfußpunkt von A auf BC sei D.
Mit den Bezeichnungen $h = AD, q = BD$ und $p = CD$ sowie den üblichen Abkürzungen $b = CA, c = AB$ und $a = BC = p + q$ folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADB$:

$$b^2 + c^2 = (h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) = 2h^2 + (p^2 + q^2)$$

$$b^2 + c^2 + 2pq = 2h^2 + (p^2 + 2pq + q^2) = 2h^2 + (p+q)^2 = 2h^2 + a^2$$

Nach Voraussetzung gilt $h^2 = pq$, so dass aus obiger Gleichung nach Subtraktion $b^2 + c^2 = a^2$ folgt. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist damit bewiesen, dass das Dreieck bei A rechtwinklig ist.

Aufgabe 5 - 011045
Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 40°$.
Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll! Die Konstruktion ist zu begründen!
Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)



Analyse:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei M. Der Kreis schneide die beiden Schenkel g_1 und g_2 des Winkels in den Punkten A, B bzw. C, D.
Ferner seien MP und MQ die Lote auf g_1 bzw. g_2.
Betrachten wir nun die rechtwinkligen Dreiecke APM und CQM, so sind diese durch ihre Hypotenusen $MA = MC = r$ sowie die Katheten $AP = \frac{a}{2}$ bzw. $CQ = \frac{b}{2}$ bekannt. Also sind auch die anderen beiden Katheten MP und MQ bekannt.
Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Konstruktionsbeschreibung:
Die Strecken MP und MQ lassen sich aus den gegebenen Stücken mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSW konstruieren. Nun werden zwei Parallelen $h_1 \parallel g_1$ und $h_2 \parallel g_2$ im Abstand MP bzw. MQ von den Schenkeln des Winkels gezogen. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M.
Es ist zu beachten, dass sich ein anderer Mittelpunkt ergibt, wenn die Abschnitte a und b auf den Schenkeln vertauscht werden.

Aufgaben der IV. Runde 1962 gelöst von Eckard Specht

7.4 II. Olympiade 1962

7.4.1 I. Runde 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021011
Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m.

Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m. Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

Aus dem Strahlensatz ergibt sich als Höhe h der Pyramide

$$\frac{h}{20\text{ m}} = \frac{h - 7{,}3\text{ m}}{15\text{ m}}$$

was zu $h = 29{,}2$ m führt. Damit können wir die Länge l der Baugrube berechnen:

$$\frac{l}{29{,}2\text{ m}} = \frac{47\text{ m}}{21{,}9\text{ m}}$$

was $l \approx 62{,}7$ m ergibt. Die Pyramide hat ein Volumen von

$$V_p = \frac{1}{3}(20\text{ m} \cdot 62,7\text{ m} \cdot 29{,}2\text{ m}) = 12205{,}6\text{ m}^3$$

Der Teil der Pyramide, der noch nicht ausgehoben ist, hat ein Volumen von

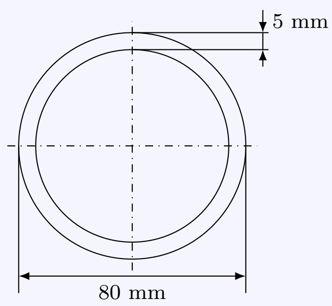
$$V_n = \frac{1}{2}(15\text{ m} \cdot 47\text{ m} \cdot 21{,}9\text{ m}) = 5146{,}5\text{ m}^3$$

Der ausgebaggerte Boden hat daher ein Volumen von $V_p - V_n \approx 7000\text{ m}^3$.

Aufgabe 2 - 021012

Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben ($d = 80$ mm, $h = 15$ mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung).

Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?

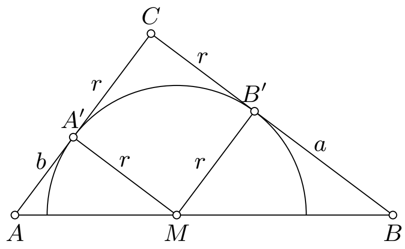


Während früher für eine Scheibe $\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \approx 75400\text{ mm}^3$ Messing benötigt wurden, können heute $\frac{\pi}{4} \cdot (d - 10\text{ mm})^2 \cdot h \approx 57700\text{ mm}^3$ eingespart werden. Es werden jetzt also nur noch 17700 mm^3 Messing benötigt.
Jetzt können ungefähr 4,25 Scheiben aus der Menge Messing gefertigt werden, die früher für eine Scheibe reichte.

Aufgabe 3 - 021013
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.
Es ist zu beweisen, dass für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt, stets

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ist, wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!



Sei M der Mittelpunkt des Halbkreises mit Radius r und A' bzw. B' die Berührungspunkte des Halbkreises mit der Seite a bzw. b. Dann steht die Strecke MA' senkrecht auf a, weil a Tangente am Halbkreis ist. Ebenso steht MB' senkrecht auf b. Das Viereck $MA'CB'$ ist wegen drei rechten Winkel also ein Rechteck. Da weiterhin die benachbarten Seiten MA' und MB' gleichlang sind, handelt es sich um ein Quadrat.
Einerseits ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$

$$F = \frac{ab}{2}$$

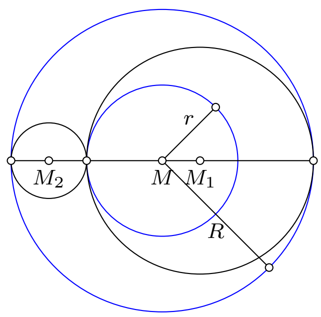
andererseits ist

$$F = r^2 + \frac{(b-r)r}{2} + \frac{(a-r)r}{2} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}$$

Nach Gleichsetzung beider Formeln und Multiplikation mit $\frac{2}{abr}$, gewinnt man die gesuchte Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Aufgabe 4 - 021014
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.
a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle)!
b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle)?



Es gibt zwei verschiedene Fälle:
1. Der innere Kreis wird von dem zu konstruierenden Kreis umschlossen.
2. Der innere Kreis liegt nicht in dem zu konstruierenden Kreis.
a) Man zeichnet einen beliebigen Durchmesser in den großen Kreis. Für den 2. Fall halbiert man einen der beiden Teile des Durchmessers, der zwischen dem kleinen und dem großen Kreis liegt. Dort liegt der Mittelpunkt M_2 des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist folglich $\frac{R-r}{2}$.
Im 1. Fall halbiert man den Rest des Durchmessers und schlägt um diesen Punkt einen Kreis mit Radius $\frac{R+r}{2}$.
b) Bei 1. liegen alle Mittelpunkte auf einem Kreis mit Radius

$$\frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$$

und dem gleichen Mittelpunkt wie die gegebenen konzentrischen Kreise. Im anderen Fall ist es ein Kreis mit dem Radius

$$\frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2}$$

und dem gleichen Mittelpunkt.

Aufgabe 5 - 021015
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Seien n und m diese Zahlen. Damit ihre Summe durch 10 teilbar ist, muss gelten:

$$n = 10a + b \qquad , \qquad m = 10c - b$$

Daraus folgt $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ und $m^2 = 100c^2 - 20cb + b^2$. Für die letzte Ziffer beider Quadrate ist ausschließlich der Summand b^2 zuständig, der bei beiden Quadraten gleich ist.

Aufgabe 6 - 021016
Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;
b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

Wir wissen, dass die gesuchte Zahl n auf 6 endet. Daher endet das Vierfache von n auf 4. Das ist zugleich die vorletzte Ziffer von n.
Da nun n auf 46 endet, steht 84 an den letzten beiden Stellen von $4n$. Also endet n auf 846. Wenden wir dieses Verfahren so weiter an, erhalten wir für n die Zahl 153846.

Aufgaben der I. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka

7.4.2 II. Runde 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021021
Die in einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4%. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6% übererfüllt.
Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

Im I. Quartal 1961 wurden Waren im Wert von

$$\frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{12{,}4\%} = \frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{0{,}124} \approx 38 \text{ Millionen DM}$$

produziert. Im I. Quartal 1962 waren es demnach Waren im Wert von 38 Millionen DM $\cdot 1{,}124 \approx 42{,}7$ Millionen DM.
Das entspricht 105,6% des Volkswirtschaftsplans.
Vorgesehen waren also $\frac{42{,}7 \text{ Millionen DM}}{1{,}056} \approx 40$ Millionen DM.

Aufgabe 2 - 021022
In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden.
Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.
Wie groß muss der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8 \frac{p}{cm^3}$)

Das Seil muss das Gewicht von 12 Mp, sowie das Eigengewicht fördern. Das Eigengewicht ergibt sich als $V \cdot \gamma = x \cdot 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$. Dabei ist x der Querschnitt des Seils in cm^3.
Das Seil fördert 2000 $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ Querschnitt. Damit benötigt das Seil einen Querschnitt von

$$x = \frac{12000 \text{ kp}}{2000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} - 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}} \approx 8{,}721 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 3 - 021023
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

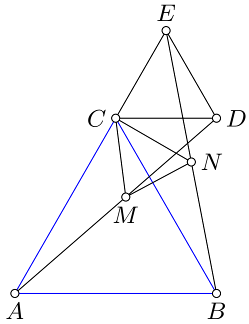
$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

immer eine natürliche Zahl ist!

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{2m + 3m^2 + m^3}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Damit ist das Produkt der drei Zahlen auf jeden Fall durch 6 teilbar.

Aufgabe 4 - 021024
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E.
Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positivem Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, dass das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!



Da der Winkel $\angle ECD = 60°$ ist, muss $\angle DCA = 120°$ sein. Genauso ist $\angle BCA = 60°$ und deshalb $\angle ECB = 120°$.
Die beiden Dreiecke $\triangle DCA$ und $\triangle ECB$ sind deswegen nach Kongruenzsatz SWS kongruent. Die beiden Seitenhalbierenden CN und CM sind dann gleichlang und das Dreieck $\triangle CMN$ ist gleichschenklig. Rotiert man das Dreieck $\triangle CAD$ um den Punkt C um 60° nach links, so bildet man es genau auf das Dreieck $\triangle CBE$ ab. Dabei wird auch M auf N abgebildet. Die beiden Punkte müssen bezüglich C einen Winkel von 60° haben, womit unter Beachtung der Gleichschenkligkeit gezeigt ist, dass $\triangle CMN$ gleichseitig ist.

Aufgabe 5 - 021025
Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

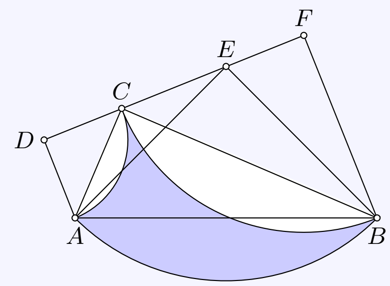
Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Das liegt daran, dass jede 10er Potenz bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.
Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht, weswegen die gegebene Zahl und die umgestellte Zahl den gleichen Rest bei Division durch 9 lassen. Ihre Differenz ist deswegen durch 9 teilbar.

Aufgaben der II. Runde 1962 gelöst von Andre Lanka

7.4.3 III. Runde 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021031

Vergleichen Sie die Flächeninhalte der grauen Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!
(Die Dreiecke $\triangle ACD$, $\triangle ABE$ und $\triangle CBF$ sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)



Die graue Fläche besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC, erweitert um den Kreisabschnitt AB und vermindert um die Kreisabschnitte AC und BC.
Man berechne die Fläche eines dieser Abschnitte, hier die Fläche S_{AB} zwischen der Strecke AB und dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Sie ist gleich der Differenz aus dem Viertelkreis mit Mittelpunkt E und Radius AE und dem Dreieck ABE, also

$$S_{AB} = \frac{1}{4}\pi AE^2 - \frac{1}{2}AE^2 = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $AB = AE\sqrt{2}$ im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.
Der letzte Schritt nutzt den Satz des Pythagoras: diese beiden Summanden haben die gleiche Form wie der für S_{AB}, sie sind die anderen beiden Kreisabschnitte S_{AC} und S_{BC}.
Damit haben wir $S_{AB} = S_{AC} + S_{BC}$, d.h. die hinzugefügte Fläche ist genauso groß wie die abgeschnittenen Flächen. Also sind das Bogendreieck und das Geradendreieck ABC flächengleich.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 2 - 021032
Berechnen Sie:

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128$$

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128 =$$

$$= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 128 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 32 + ... \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 2 + \log_2 1$$

$$= \log_2 \frac{1}{256} - \log_2 128 + \log_2 128 - \log_2 64 + \log_2 64 - \log_2 32 + \log_2 32 ... - \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 1$$

$$= \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 1 = \log_2 256 + 0 = -\log_{2^8} = -8$$

Aufgabe gelöst von Andre Lanka

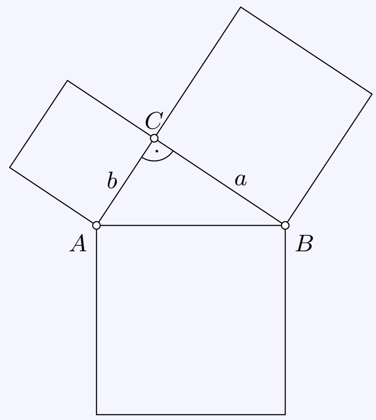
Aufgabe 3 - 021033
Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wie viele Lösungen gibt es?

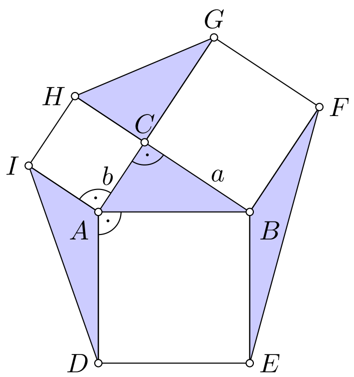
Die gesuchte Zahl muss durch 11 und durch 9 teilbar sein. Wegen letzterem ist auch die Quersumme durch 9 teilbar. Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht. Die neu gebildete ist also auch durch 9 teilbar.
Da sie durch Multiplikation mit $\frac{2}{9}$ aus der ursprünglichen Zahl erhalten wurde, muss die anfängliche Zahl zweimal durch 9 teilbar sein. Die gesuchte Zahl ist also nicht nur durch $11 \cdot 9$ sondern sogar durch $11 \cdot 9 \cdot 9$ teilbar.
Die einzige dreistellige Zahl, die diese Bedingung erfüllt ist 891. Sie ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe gelöst von Andre Lanka

Aufgabe 4 - 021034

Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.
Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!





Nennen wir die Eckpunkte des Sechsecks D, E, F, G, H und I. Dann setzt sich der Flächeninhalt des Sechsecks zusammen aus vier Dreiecken und drei Quadraten:

$$A_{DEFGHI} = A_{ABC} + A_{ADEB} + A_{BFGC} + A_{CHIA} + \\ + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras folgt nun:

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2} \qquad A_{ADEB} = a^2 + b^2$$
$$A_{BFGC} = a^2 \qquad A_{CHIA} = b^2$$

Verbleiben noch die äußeren farbigen Dreiecksflächen. Doch diese sind alle untereinander gleich der Fläche des Dreiecks ABC.
Um das einzusehen, vergleichen wir z.B. die Dreiecke AID und ABC. Beide haben paarweise gleiche Seiten $AI = AC = b$ und $AD = AB = c$, die jeweils Supplementwinkel einschließen: $\angle IAD = 180° - \angle CAB$.
Wegen $\sin(\angle IAD) = \sin(180° - \angle CAB) = \sin(\angle CAB)$ und der bekannten Formel $\frac{bc}{2} \sin \alpha$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist also tatsächlich $A_{AID} = A_{ABC} = \frac{ab}{2}$.
Dasselbe gilt für A_{BEF} und A_{CGH}.
Alle Flächeninhalte addiert ergibt schließlich $A_{DEFGHI} = 2(a^2 + ab + b^2)$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 021035
Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Seien $n - 1$, n und $n + 1$ die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Dann ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6^n = 3n(n^2 + 2)$$

Wenn n durch 3 teilbar ist, ist der Faktor $3n$ durch 9 teilbar und damit das ganze Produkt. Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, also wenn $n = 3k + 1$ gilt, dann ist der zweite Faktor $n^2 + 2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$ durch 3 teilbar und mit der ersten 3 dann das ganze Produkt durch 9.

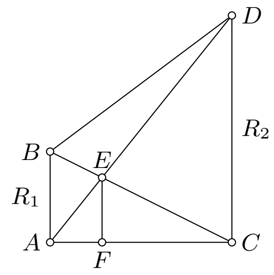
Bei der letzten Möglichkeit, Rest 2 bei Division durch 3 kann auch äquivalent genutzt werden, dass bei Division durch 3 der Rest -1 auftritt. Dann gilt $n = 3k - 1$ und für den zweiten Faktor analog $n^2 + 2 = (3k - 1)^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 3$. Damit ist der zweite Faktor durch 3 und das ganze Produkt durch 9 teilbar sind.

Aufgabe gelöst von Andre Lanka

Aufgabe 6 - 021036
Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_g bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen:
Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen.
Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Fällt man von E aus das Lot auf die Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, dass EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_g angibt.
a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!
b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von $8\Omega, 10\Omega, 12\Omega$ parallel geschaltet werden?



a) Mit den Strahlensätzen ergibt sich

$$\frac{AF}{EF} = \frac{AC}{CD} \qquad \text{und} \qquad \frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB}$$

Nach Addition und Division durch die Länge der Strecke AC erhält man

$$\frac{AF + FC}{EF} = \frac{AC}{CD} + \frac{AC}{AB} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{EF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$$

Die Strecke EF ist also tatsächlich der gesuchte Widerstand.
b) Zuerst konstruiert man den Gesamtwiderstand von 8Ω und 10Ω. Anschließend wiederholt man die Konstruktion mit dem eben ermittelten Widerstand und 12Ω.

Aufgabe gelöst von Andre Lanka

7.4.4 IV. Runde 1962, Klasse 10

Aufgabe 1 - 021041
Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$ ist!

Abschätzung nach unten: $x > 0$ und $y > 0$; Abschätzung nach oben: $\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{y} < \sqrt{y}$, also $x < 50$; analog für y.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} \qquad x = 50 + y - 2\sqrt{50y} \qquad x = 50 + y - 10\sqrt{2y}$$

Damit muss $\sqrt{2y}$ ganzzahlig sein. Dies wird durch $y = 2\sqrt{a}^2$ mit $a \in \mathbb{N}$ erreicht. In den obigen Grenzen bedeutet dies:

$$y_1 = 2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow x_1 = 32; \qquad y_2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \Rightarrow x_2 = 18;$$
$$y_3 = 2 \cdot 3^2 = 18 \Rightarrow x_3 = 8; \qquad y_4 = 2 \cdot 4^2 = 32 \Rightarrow x_4 = 2.$$

Die Probe bestätigt alle Lösungen.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 021042
Beweisen Sie, dass für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z = 3^n + 63$ stets durch 72 teilbar ist!

Primfaktorenzerlegung: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Damit ist zu zeigen, dass z sowohl durch 8 als auch durch 9 teilbar sein muss.

(1) Teilbarkeit durch 9:

$z = 3^n + 63$ mit n gerade: $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0 \Rightarrow$

$$z = 3^{2k} + 63 = \left(3^2\right)^k + 63 = 9^k + 9 \cdot 7 = 9 \cdot (9^{k-1} + 7)$$

Da k positiv ist, folgt daraus $k-1 \geq 0$, damit ist der Klammerausdruck $a := 9^{k-1}+7 \geq 9^0+7 = 8 > 0$ und ganzzahlig. Es gilt also $z = 9 \cdot a$ mit $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, d.h. z ist durch 9 teilbar.

(2) Teilbarkeit durch 8:

Mittels Induktionsbeweis kann diese Teilbarkeit für den Term $a := 9^{k-1} + 7$ nachgewiesen werden.

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, für das gilt: $8 \mid 9^{k-1} + 7$

Induktionsbehauptung: $8 \mid 9^k + 7$

Induktionsschritt: Für $k = 1$ gilt: $a = 9^{k-1} + 7 = 8$ und $8 \mid 8$.

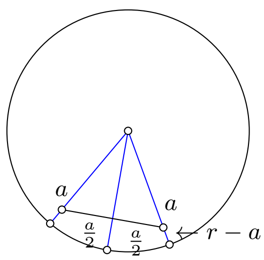
Induktionsbeweis: Es gilt

$$9^k + 7 = 9^{k-1} \cdot 9 + 7 = 9^{k-1} \cdot (8 + 1) + 7 = 8 \cdot 9^{k-1} + 9^{k-1} + 7$$

Damit ist jeder der beiden Summanden $8 \cdot 9^{k-1}$ sowie $9^{k-1} + 7$ (wegen Induktionsvoraussetzung) durch 8 teilbar, folglich auch deren Summe. 2

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 021043
Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, dass die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)



Durch die Senkrechte zur Winkelhalbierenden entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Dieses Dreieck hat den Umfang $3a$. Der Rest des Kreisausschnittes hat einen Umfang von $2(r - a) + a + 2\pi\frac{r}{6}$. Damit beide Umfänge gleich sind, muss

$$a = \frac{2r + 2\pi\frac{r}{6}}{4} = \frac{r}{12}(\pi + 6)$$

sein. Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144}$$

Für den zweiten Flächeninhalt gilt, dass er die Differenz zwischen dem gesamten Kreissegment abzüglich A_1 ist:

$$A_2 = \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144} = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(96\pi - \sqrt{3}(\pi+6)^2\right)$$

Nun gilt $A_1 = A_2 + k$. Wenn $k > 0$, so ist $A_1 > A_2$, wenn $k = 0$, so ist $A_1 = A_2$ und wenn $k < 0$, so ist $A_1 < A_2$. Daher wird nun die Differenz ermittelt:

$$k = A_1 - A_2 \qquad = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 96\pi + \sqrt{3}(\pi+6)^2\right) = \frac{r^2}{4\cdot 144}(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 48\pi)$$

Abschätzung nach unten mit $\sqrt{3} < 1{,}8$ und $3{,}15 > \pi > 3{,}14$:

$$k < \frac{r^2}{4\cdot 144}(1{,}8(3{,}15+6)^2 - 48\cdot 3{,}14) < -\frac{0{,}0195}{2\cdot 144}r^2 < 0$$

Indem $k < 0$ gilt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks kleiner als der des abgeschnittenen Kreissegments.

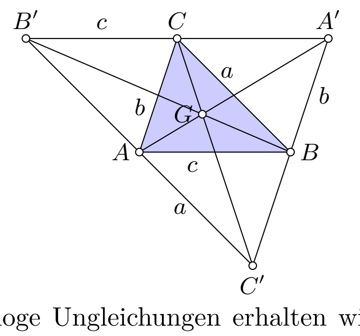
Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 4 - 021044
Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

Es gibt genau ein Rechteck, das diese Bedingungen erfüllt.
Seien c und d die Rechteckseiten. Dann gilt $c \cdot d = a^2$ und $2(c+d) = 2\cdot 4a$.
Aus der ersten Gleichung erhält man $c = \frac{a^2}{d}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, kommt man zu $2(\frac{a^2}{d} + d) = 8a$ und erhält $d^2 - 4ad + a^2 = 0$.
Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $d_1 = (2+\sqrt{3})a$ und $d^2 = (2-\sqrt{3})a$. Entsprechend kommen als Lösung ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2+\sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2+\sqrt{3}}$ und ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2-\sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2-\sqrt{3}}$ in Frage.
Da aber $\frac{a}{2+\sqrt{3}} = a(2-\sqrt{3})$ ist und entsprechend $\frac{a}{2\sqrt{3}} = a(2+\sqrt{3})$ ist, sind beide Rechtecke identisch. Es gibt also bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck.

Aufgabe gelöst von Andre Lanka

Aufgabe 5 - 021045
Beweisen Sie, dass die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!



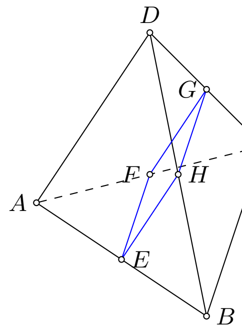
Beweis: Der Schwerpunkt des Dreiecks, in dem sich bekanntlich die Seitenhalbierenden schneiden, sei G; die Seitenlängen seien wie üblich a, b und c. Wir ergänzen nun das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABA'C$.
Dieses hat die Diagonalenlängen $BC = a$ und $AA' = 2m_a$, letzteres, weil sich in Parallelogrammen die Diagonalen stets halbieren. Jetzt können wir die Dreiecksungleichung auf das Dreieck ABA' anwenden: $b + c > 2m_a$.

Analoge Ungleichungen erhalten wir, wenn wir die Parallelogramme $BCB'A$ und $CAC'B$ betrachten: $c + a > 2m_b$ bzw. $a + b > 2m_c$. Eine Addition dieser drei Ungleichungen liefert die Behauptung $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 6 - 021046
Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass eine quadratische Schnittfigur entsteht.
a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

a) A, B, C, D seien die Ecken des regelmäßigen Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt der Kante $AB = a$. Eine der gesuchten Schnittebenen, die den Tetraeder so schneidet das eine quadratische Schnittfigur entsteht, ist die Ebene ϵ, die durch den Punkt E geht und parallel zu den Kanten AD und BC verläuft.
b) Die unter a) beschriebene Ebene ϵ schneide die Kanten AC, CD und BD in dieser Reihenfolge in den Punkten F, G und H.



Dann gilt $EF \parallel BC$ und $GH \parallel BC$ und somit $EF \parallel GH$, sowie $FG \parallel AD$ und $HE \parallel AD$ und somit $FG \parallel HE$.
Hieraus folgt nach dem Strahlensatz

$$EF = FG = GH = HE = BH = HD = CG = GD = CF = AF = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur $EFGH$ ist demnach ein Rhombus und die Punkte F, G, H sind in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Kanten AC, CD, BD.
Da die vier Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ gleichseitige Dreiecke sind und E der Mittelpunkt von AB ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$CE = DE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Damit ist das Dreieck $\triangle CDE$ gleichschenklig. Da G der Mittelpunkt von CD ist, ist er auch der Fußpunkt des Lotes von E auf DC. Damit ist EG die Höhe auf die Basislänge des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle CDE$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$EG^2 = DE^2 - DG^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Da die Strecken EH, HG und EG der Beziehung

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 \qquad \left(\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$

genügen ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das Dreieck $\triangle EGH$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei H. Wegen $\angle EHG = 90°$ ist der Rhombus $EFGH$ ein Quadrat.
c) Für den Flächeninhalt A des Quadrates $EFGH$ gilt:

$$A = |EF| \cdot |EH| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Aufgabe gelöst von Manfred Worel

7.5 III. Olympiade 1963

7.5.1 I. Runde 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031011
Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4235 g.
Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule? (Dichte des Kupfers $\rho = 8{,}93$ g/cm^3.)

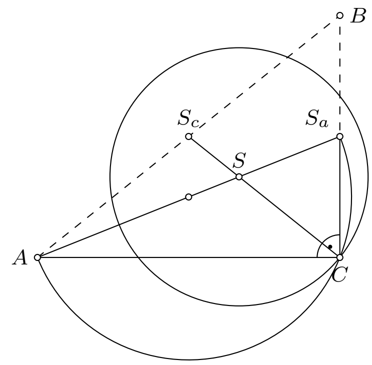
Es gelten folgende Bezeichnungen und Formeln:
m_D Masse Kupferdraht, V_D Volumen Kupferdraht, der ein Kreiszylinder der Länge l_D mit dem Durchmesser d_D ist, $\rho_D = 8{,}93$ g/cm^3 Dichte des Kupfers, $m_S = 4235$ g Masse Spule inkl. Draht, $m_L = 235$ g Leermasse der Spule

$$\begin{aligned} m_D &= m_S - m_L \\ V_D &= \frac{\pi}{4} d_D^2 \cdot l_D \\ \rho_D &= \frac{m_D}{V_D} = \frac{4(m_S - m_L)}{\pi d_D^2 l_D} \\ l_D &= \frac{4(m_S - M_L}{\pi d_D^2 \rho_D} = 116391{,}85 cm \approx 1{,}164 km \end{aligned}$$

Es befinden sich ca. 1,164 km Kupferdraht auf der Spule.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 031012
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c!
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!



Analysis:
Da das gesuchte Dreieck ABC rechtwinklig sein soll, muss das Dreieck AS_aC ebenfalls rechtwinklig sein, wenn S_a der Mittelpunkt von BC ist. Damit muss C auf dem Thaleskreis über AS_a liegen.
Andererseits müssen sich s_a und s_c gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen. Somit kennt man den Abstand von C zum Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden, woraus auch der Rest folgt.
Wichtig dabei ist, dass beide Bedingungen für C (Lage auf dem Thaleskreis und Abstand zu S) gleichzeitig erfüllbar sein müssen.

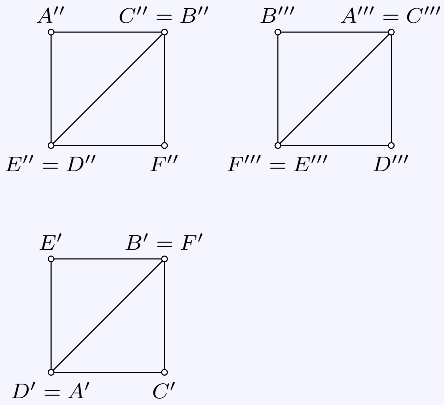
Konstruktion:
Man zeichne die Strecke AS_a mit der Länge s_a, über der man einen Halbkreis errichtet. Danach ergibt sich S als Teilpunkt bei der Teilung von AS_a im Verhältnis 2 : 1. Um S wird ein Kreis mit dem Radius $\frac{2s_c}{3}$ gezogen.
Der Schnittpunkt mit dem vorher gezeichneten Halbkreis ist – sofern er existiert – der gesuchte Punkt C. Damit der Schnittpunkt tatsächlich auftritt, muss

$$\frac{1}{3}s_a < \frac{2}{3}s_c < \frac{2}{3}s_a$$

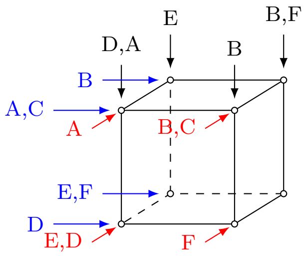
gelten; andernfalls ist die Konstruktion nicht ausführbar.
Mit Hilfe der Länge s_c erhält man auf der Geraden CS den Punkt S_c. Der Punkt B ist dann der Schnittpunkt von AS_c und CS_a.

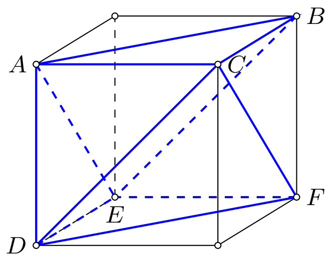
Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 3 - 031013



Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriss, Aufriss und Seitenriss zeigt ($a =$ 6 cm)!





Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen, siehe erste Abbildung.

Des Weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

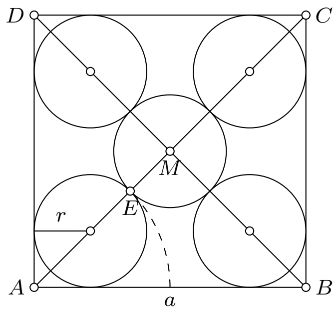
Wenn man gedanklich die drei zu einem Buchstaben gehörenden Richtungspfeile verbindet, treffen sie sich immer alle in einem Punkt des Würfels. Dieser wird in der Parallelprojektion entsprechend mit diesem Buchstaben gekennzeichnet.

Anhand dieser Punkte werden alle Kanten eingetragen. Es entsteht die blaue Figur aus der 2. Abbildung, die aus 6 paarweise parallelen Dreiecksflächen besteht.

Aufgabe gelöst von Rainer Sattler

Aufgabe 4 - 031014
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, dass ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.
a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus! b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

a) Die Diagonale des Vierecks hat die Länge $a\sqrt{2}$; und sie lässt sich auch in Abhängigkeit von r ausdrücken, und zwar als: $r\sqrt{2} + 4r + r\sqrt{2}$.
Gleichsetzen der beiden Terme führt auf $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.



b) Man zeichne das Quadrat $ABCD$ und dessen Diagonalen; deren Schnittpunkt sei M. Von einem der Eckpunkte aus trage man auf der Diagonalen $\frac{a}{2}$ ab und bezeichne den erhaltenen Punkt auf der Diagonalen mit E. Wegen $\frac{a}{2} = r + r\sqrt{2}$ folgt für den gesuchten Radius $r = EM$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 031015
Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

Begründen Sie Ihre Behauptung!

Man bildet die Differenz

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1) - (100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhält man im Zähler

$$100^{100} + 100^{89} - 100^{90} - 100^{99} = 100^{99} \cdot (100-1) - 100^{89} \cdot (100-1) > 0$$

Da der Nenner ebenfalls positiv ist, ist die Differenz größer als Null. Also ist der erste Bruch größer.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 031016
Beim Fußball-Toto ist auf dem Tippschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird. Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten:
Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tippscheine müsste jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte? Der Lösungsweg ist zu begründen.

Bei nur einem Spiel bräuchte man drei Tippscheine, einen für jede der Möglichkeiten. Bei zwei Spielen müsste man einen Tippschein für jede denkbare Kombination ausfüllen, also $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten.
Mit jedem weiteren Spiel muss die Zahl mit drei multipliziert werden, bei 12 Spielen führt das auf $3^{12} = 531441$ Tippscheine.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

7.5.2 II. Runde 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031021
a) Beweisen Sie, dass die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

a) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel kann man einen Term der Form $2^{2^n} - 1$ in zwei Faktoren zerlegen. Es gilt:

$$2^{2^n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$$

Den Ausdruck $2^{256} - 1$ kann man, wenn man dieses Verfahren mehrfach anwendet, in mehrere Faktoren aufspalten.

$$2^{256} - 1 = (2^1 - 1)(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)(2^{128} + 1)$$

b) $2^1 + 1 = 3, 2^2 + 1 = 5$ und $2^4 + 1 = 17$ sind Primzahlen und damit Primfaktoren von $2^{256} - 1$.

Aufgabe 2 - 031022
In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.
a) Es ist zu beweisen, dass stets $a + h_a \geq b + h_b$ ist!
b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

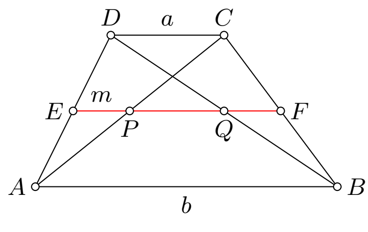
a) Ist I der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt $ah_a = 2I$ und $bh_b = 2I$. Damit erhalten wir

$$(a + h_a) - (b - h_b) = \left(a + \frac{2I}{a}\right) - \left(b + \frac{2I}{b}\right) = (a - b)\left(1 + \frac{2I}{ab}\right) \tag{1}$$

Wegen $a \geq b$ $(b > 0)$ und $ab \geq ab \sin\gamma = 2I$. ($\gamma$ ist die Größe eines Winkels, der von Dreiecksseiten mit den Längen a und b bestimmt wird) folgt hieraus die Aussage $(a + h_a) - (b - h_b) \geq 0$, die mit der behaupteten gleichbedeutend ist.

b) Aus (1) folgt, dass $(a+h_a)-(b+h_b) = 0$ genau dann gilt, wenn $ab = 2I$ oder wenn $a = b$ ist, d.h., wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b die Kathetenlängen sind, oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist und a und b die Längen von Schenkeln sind.

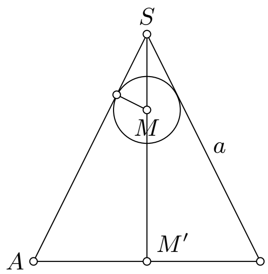
Aufgabe 3 - 031023
Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!



Als bekannt kann vorausgesetzt werden, dass die Länge der Mittellinie $m = \frac{a+b}{2}$ beträgt. Ferner ist offensichtlich, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auch auf der Mittellinie m liegen.
Nun bleibt zu untersuchen, wie groß die Streckenlängen EP und QF sind: Da die von A ausgehenden Strahlen AD und AC zwei Parallelen EP und DC schneiden, verhalten sich die Seiten $DC : EP$ wie $AD : AE = 2 : 1$, da die Mittellinie die Seite AD halbiert. Damit gilt $EP = \frac{a}{2}$.
Analog erhält man $QF = \frac{a}{2}$.
Setzt man diese Werte nun in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich

$$PQ = m - EP - QF = \frac{a + b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b - a}{2}$$

Aufgabe 4 - 031024
In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis 1 : 2 (von der Spitze aus) teilt.
Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius der Kugel?



Sind SA Mantellinie und MF Lot von M auf g_{SA} (siehe Abbildung), so gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle MFS \cong \triangle AM'S$, also wegen $|AM'| = \frac{a}{2}; |SA| = a$ und $|MF| = r$

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Besitzt die Höhe des Kegelkörpers, d.h. des gleichseitigen Schnittdreiecks mit der Seitenlänge a, die Länge h, so gilt $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nach Voraussetzung ist weiterhin $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ folgt: $|SM| = \frac{h}{3}$, so dass sich schließlich $r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ ergibt.

Aufgabe 5 - 031025
Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.
Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist genau eine durch 4 teilbar.
Wegen der drei im Produkt enthaltenen Faktoren 2, 3 und 4 ist das Produkt stets durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar.

Lösungen der II. Runde 1963 übernommen aus [5]

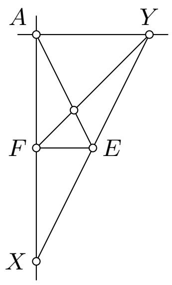
7.5.3 III. Runde 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031031
Man löse die Gleichung $\lg(2x+1) - \lg x = 2$.

Mit Hilfe der Logarithmengesetze und der Tatsache, dass $\lg x = 2$ nur für $x = 100$ gilt, folgt:

$$\lg(2x+1) - \lg x = \lg \frac{2x+1}{x} = 2$$
$$\frac{2x+1}{x} = 100 \Rightarrow x = \frac{1}{98}$$

Aufgabe 2 - 031032
Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)



Der Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks ergibt sich aus dem Schnitt seiner Seitenhalbierenden.
Sei $\triangle AXY$ ein Dreieck, das die Voraussetzungen erfüllt, E der Punkt, der XY halbiert und F das Lot von E auf AX.
Dann folgt aus dem Strahlensatz die Beziehung $\frac{AX}{FX} = \frac{XY}{EX} = 2$.
D.h., $AX = 2FX$. Das Dreieck $\triangle AXE$ ist somit gleichschenklig.
In allen Dreiecken $\triangle AXY$, gilt also: $AE = EX = 3$ cm. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle AXY$ liegt auf der Strecke AE und teilt diese bekanntermaßen im Verhältnis 2 : 1.

Somit liegen alle möglichen Schwerpunkte S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = 2$ cm.

Aufgabe 3 - 031033
Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0, b > 0$). Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308. Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
Wie heißen die Zahlen a und b?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei b die kleinere Zahl. Dann ergibt sich aus den Angaben folgendes Gleichungssystem:

$$575b + 227 = ab - 100 \qquad ; \qquad 572b + 308 = ab - 1000$$

Dieses Gleichungssystem kann man beispielsweise lösen, wenn man die erste Gleichung nach b umstellt. Man erhält $b = -\frac{327}{575-a}$.
Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, führt das nach äquivalenten Umformungen auf die Lösung $a = 576$. Daraus ergibt sich durch die Beziehung $b = -\frac{327}{575-a} = 327$.

Aufgabe 4 - 031034
Man zeige, dass für jede natürliche Zahl n der Term $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist!

Da $6 = 2 \cdot 3$ und 2 und 3 teilerfremd sind, ist zu zeigen, dass $3|(n^3 + 11n)$ und $2|(n^3 + 11n)$.
Der Term $n^3 + 11n$ lässt sich aber als $n \cdot (n^2 + 11)$ schreiben. Es ist nun nachzuweisen, dass 2 entweder n oder $n^2 + 11$ teilt und dass 3 entweder n oder $n^2 + 11$ teilt.
Wenn 2 kein Teiler von n ist, dann lässt sich n durch $n = 2p + 1$ darstellen, wobei p eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt:

$$n^2 + 11 = 4p^2 + 4p + 12 = 2 \cdot (2p^2 + 2p + 6) \Rightarrow 2|(n^2 + 11)$$

Wenn 3 kein Teiler von n ist, dann lässt n beim Teilen durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. n lässt sich also darstellen durch $n = 3p + 1$ oder $n = 3p + 2$, wobei p jeweils wieder eine natürliche Zahl ist.
Im ersten Fall gilt:

$$n^2 + 11 = 9p^2 + 6p + 12 = 3 \cdot (3p^2 + 2p + 4) \Rightarrow 3|(n^2 + 11)$$

Im zweiten Fall gilt:

$$n^2 + 11 = 9p^2 + 12p + 15 = 3 \cdot (3p^2 + 4p + 5) \Rightarrow 3|(n^2 + 11)$$

Das heißt: In jedem Fall ist $n^3 + 11n$ durch 2 und durch 3 und damit durch 6 teilbar.

2. Lösung:
Es ist $(n-1)n(n+1) = n^3-n$ das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen, von denen damit min. eine durch 2 und eine durch drei, das Produkt also durch 6 teilbar ist. Damit ist auch $n^3+11n = (n^3-n)+12n$ durch 6 teilbar, $\square$.

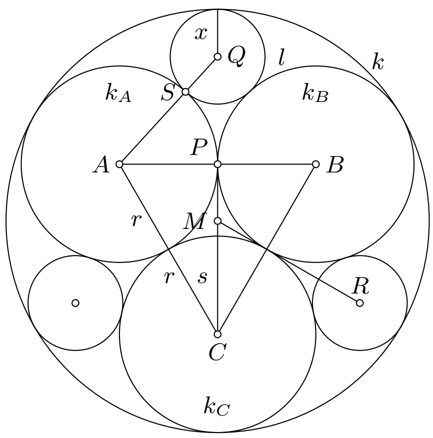
Aufgabe gelöst von cyrix

3. Lösung:
Wir nehmen $n^3 + 11n$ Bauklötze, die alle Einheitswürfel seien. Die Aufgabe ist es diese Bauklötze auf 6 gleich große Haufen zu verteilen.
Aus n^3 davon bauen wir dazu einen Würfel mit Kantenlänge n. Den Rest legen wir erstmal zur Seite.

Falls $n > 1$ ist, dann betrachten wir zunächst all jene Bauklötze, die an der Oberfläche des n^3 Würfels liegen. Da ein Würfel 6 Seiten hat, können wir die Bauklötze, die nicht an einer Kante des n^3-Würfels liegen ohne Rest verteilen.
Ebenso können wir die Bauklötze, die an den Kanten liegen, aber keine Ecken sind, ohne Rest verteilen, denn ein Würfel hat $12 = 2 \cdot 6$ Kanten. Um die 8 Ecken zu verteilen nehmen wir uns noch 4 Klötze von den beiseite gelegten $11n$ Bauklötzen hinzu, so dass wir 12 Klötze haben, die sich ohne Rest auf 6 Haufen verteilen lassen.
Somit bleiben nun noch ein $(n - 2)^3$-Würfel und die restlichen, beiseite gelegten Bauklötze zu verteilen.
Wir wiederholen dieses Verfahren (d.h. das Verteilen der Oberfläche des großen Würfels unter Hinzunahme von 4 extra Klötzen), bis von dem großen Würfel nichts mehr übrig ist (das passiert, wenn n gerade ist), oder bis noch genau 1 Klotz von ihm übrig bleibt (wenn n ungerade ist).
Schreibt man n in der Form $n = 2m$ bzw. $n = 2m + 1$, so braucht man dafür m Wiederholungen.
Am Schluss hat man dann noch $11n-4m = 18m = 6\cdot 3m$ (falls $n = 2m$) bzw. $1+11n-4m = 12+18m = 6 \cdot (2 + 3m)$ (falls $n = 2m + 1$) Bauklötze übrig, die man offenbar ohne Rest verteilen kann.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 5 - 031035
Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, dass sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!



Seien A, B bzw. C die Mittelpunkte der Kreise k_A, k_B bzw. k_C mit dem Radius r.
Der Abstand des Mittelpunktes M des Kreises k, in den diese drei Kreise einbeschrieben sind, zu den Punkten A, B und C ist aufgrund der Symmetrie gleich. Damit ist M Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Der Radius R des Kreises k ergibt sich nun z.B. durch $R = MA + r$.
Da das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist und seine Seitenlänge a durch $a = 2r$ bestimmt ist, berechnet sich die Länge s einer Seitenhalbierenden mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$s = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$$

Da M Schwerpunkt von $\triangle ABC$ ist, teilt M bekanntermaßen die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$. Damit hat die Strecke MA eine Länge von $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Deshalb gilt nun für R:

$$R = MA + r = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) r$$

Andererseits berühren sich k_A und k_B in einem Punkt P. Sei Q der Mittelpunkt des Kreises l mit Radius x, der k_A in einem Punkt S und k_B berührt. Dann ergibt sich der Radius R von k aus $R = MP + PQ + x$. Da $AP = r$ erhält man über den Satz des Pythagoras

$$MP = \sqrt{MA^2 - AP^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Desweiteren gilt, dass $AQ = r + x$. Daraus folgt wieder mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{2rx + x^2}$$

Man findet für R also eine zweite Darstellung durch:

$$R = MP + PQ + x = \frac{r}{\sqrt{3}} + \sqrt{2rx + x^2} + x$$

Es ist nun möglich die beiden gefundenen Darstellungen für R gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach x umzustellen.

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) r = \sqrt{2rx + x^2} + \frac{r}{\sqrt{3}} + x \Rightarrow \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) rx = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) r^2$$

$$x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{4 + \frac{2}{\sqrt{3}}} r \Rightarrow x = \left(\frac{3}{11} + \frac{4\sqrt{3}}{33}\right) \cdot r$$

Aufgabe 6 - 031036
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$

und $x > 2, y > 2$.

Es gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{x-2}{2x} \Rightarrow y < \frac{2x}{x-2}$$

In diese letzte Beziehung kann man nun konkrete Werte für x einsetzen. Unter Beachtung der Voraussetzungen, d.h. $x, y > 2$, erhält man für

$$\begin{aligned} x = 3: &\quad 2 < y < 6 \rightarrow y = 3, y = 4 \text{ oder } y = 5 \\ x = 4: &\quad 2 < y < 4 \rightarrow y = 3 \\ x = 5: &\quad 2 < y < \frac{10}{3} \rightarrow y = 3 \\ x = 6: &\quad 2 < y < 3 \end{aligned}$$

Für $x = 6$ existiert also keine natürliche Zahl y, so dass die Ungleichung erfüllt wird.
Aus $\frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ ist ersichtlich, dass für größer werdendes x, $\frac{1}{y}$ ebenfalls größer und somit y immer kleiner werden muss. Für $x > 5$ können deshalb keine weitere Lösung existieren.

Aufgaben der III. Runde 1963 gelöst von Manuel Naumann

7.5.4 IV. Runde 1963, Klasse 10

Aufgabe 1 - 031041
Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 $\frac{km}{h}$ auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Bezeichnungen: 1. Radfahrer: x, 2. Radfahrer: y, Länge der Brücke b, Geschwindigkeit der Radfahrer: $v_x = v_y$ und des Autos: v_A, Weg: s, Zeit: t
Zum Zeitpunkt t_0 fährt y los und zum Zeitpunkt t_1 x. Zum Zeitpunkt t_2 begegnen sich x und y, d.h. $s_{x,t_2} + s_{y,t_2} = b$. Da $s_{x,t_2} = \frac{3}{8}b$ ist damit $s_{y,t_2} = \frac{5}{8}b$.
Schließlich erreicht zum Zeitpunkt t_3 y das Ziel, also $s_{y,t_3} = b$ und damit $s_{x,t_3} = \frac{6}{8}b$. x gelangt zum Zeitpunkt t_4 zur anderen Seite der Brücke: $s_{x,t_4} = b$, d.h. $s_{x,t_4-t_3} = \frac{1}{4}b$.

Fall 1: Das Auto fahre in gleicher Richtung wie x, fährt damit bei t_3 los und kommt bei t_4 an, legt eine Strecke von $s_{A,t_4-t_3} = b$ zurück, d.h. es gilt

$$v_A = \frac{s_{A,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{b}{t_4 - t_3} \quad \text{und} \quad v_x = \frac{s_{x,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{\frac{b}{4}}{t_4 - t_3}$$

Damit ergibt sich $v_x = \frac{v_A}{4} = 20 \frac{\text{km}}{h}$.

Fall 2: Das Auto fahre in entgegengesetzter Richtung wie x, fährt damit bei t_0 los und kommt bei t_1 an und legt wieder eine Strecke von $s_{A,t_1-t_0} = b$ zurück, d.h. es gilt

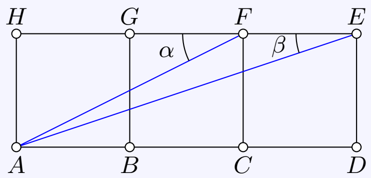
$$v_A = \frac{s_{A,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{b}{t_1 - t_0} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{s_{y,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{b}{4}}{t_1 - t_0}$$

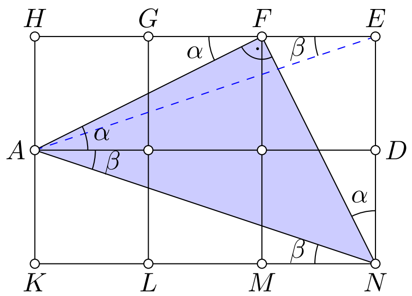
Damit ergibt sich ebenfalls $v_y = v_x = \frac{v_A}{4} = 20 \frac{\text{km}}{h}$.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 031042

Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung.
Es ist zu beweisen, dass $\alpha + \beta = 45°$ ist!





Beweis: Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, dass die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z.B. SSS).
Daher ist $\triangle AFN$ gleichschenklig mit den Basiswinkeln

$$\angle FNA = \angle FAN = \angle FAD + \angle DAN$$

$$\alpha = \angle HFA = \angle FAD \qquad \text{und} \qquad \beta = \angle DAN = \angle ANK$$

sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so dass aus obiger Gleichung

$$\angle FNA = 90° - \alpha - \beta = \angle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45°$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 031043
Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.
Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Es gilt $27 < 20 \cdot 7 = 20\sqrt{49} < 20\sqrt{57}$. Also ist

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 = 25 + 27 + 228 < 25 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57 = (5 + 2\sqrt{3 \cdot 19})^2$$

Somit ist $2\sqrt{7 \cdot 10} < 5 + 2\sqrt{3 \cdot 19}$ bzw.

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 7 + 2\sqrt{7 \cdot 10} + 10 < 3 + 2\sqrt{3 \cdot 19} + 19 = (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2$$

Daraus folgt $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$ und $Z_1 < Z_2$.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 4 - 031044
Wieviel Endnullen hat das Produkt

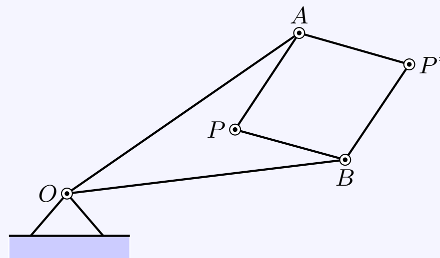
$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdot ... \cdot (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdot ... p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)$$

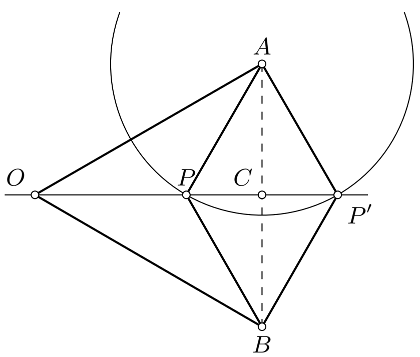
Dabei sind $p_1, p_2, p_3, ..., p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Die Anzahl der Endnullen hängt von der Anzahl der Faktoren $p_1 = 2$ und $p_3 = 5$ ab; denn nur das Produkt der beiden Primzahlen 2 und 5 liefert eine Null.
Im angegebenen Produkt kommt die Zahl 2 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 100)$mal, die Zahl 5 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 98)$mal als Faktor vor.
Also hat die Zahl genau $1 + 2 + 3 + ... + 98 = 98 \cdot \frac{99}{2} = 4851$ Endnullen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 031045
Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB (mit $OA = OB$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $OA > AP$.
Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, dass das Produkt der Entfernungen $OP = r$ und $OP^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.





1. Lösung
Man betrachte den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Da die beiden Vierecke $AOBP'$ und $APBP'$ Drachenvierecke sind, gilt für ihre Diagonalen $AB \perp OP'$ und $AB \perp PP'$,und demnach liegen O, P und P' auf derselben Geraden.
Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_{AB} ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $APBP'$ und liegt daher auf AB. Er werde mit C bezeichnet. Der Punkt O liegt außerhalb der Strecke PP'.

Läge O auf PP', so hätte die Größe eines der beiden Winkel $\angle AOP, \angle AOP$ einen Wert, der größer oder gleich 90° ist, da ihre Summe 180° beträgt.
Daher wäre in einem der Dreiecke $POA, P'OA$ der Winkel mit dem Scheitel O der größte im betreffenden Dreieck. Folglich wäre PA oder $P'A$ die längste Seite im Dreieck, was wegen der Voraussetzung $|P'A| = |PA| < |OA|$ nicht möglich ist.

Daher gilt wegen $|PC| = |P'C|$

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OC| - |CP|)(|OC| + |CP|) = |OC|^2 - |CP|^2$$

ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|OC|^2 = |OA|^2 - |AC|^2 \qquad \text{und} \qquad |CP|^2 = |PA|^2 - |AC|^2$$

woraus sich ergibt, dass

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 - |PA|^2 \tag{1}$$

gilt, also $|OP| \cdot |OP'|$ nicht von der Stellung des Mechanismus abhängt.

Bemerkung: In den Grenzfällen $A = B$ oder $P = P'$ ist $APBP'$ kein Rhombus. Es gilt aber trotzdem (1); denn im Fall $A = B$ liegen P und P' auf der Geraden g_{OA}, und dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OA| - |PA|)(|OA| + |PA|) = |OA|^2 - |PA|^2$$

und im Fall $P = P'$ ist P Fußpunkt der Höhe auf AB im gleichschenkligen Dreieck AOB, und es folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$|OP| \cdot |OP'| = |OP|^2 = |OA|^2 - |PA|^2$$

2. Lösung:
O.B.d.A. kann angenommen werden, dass OA festliegt. O, P und P' liegen auf derselben Geraden (siehe erste Lösung), welche Sekante (im Grenzfall Tangente) des Kreises k mit dem Radius $|PA|$ um A ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Sekantentangentensatz:

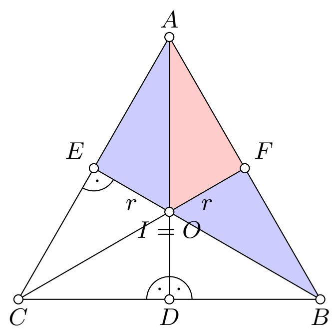
$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 031046
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

Beweis: Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote vom Inkreismittelpunkt I des Dreiecks auf den Seiten BC, CA bzw. AB.
Vom Inkreismittelpunkt darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Abstände $ID = IE = IF = r$ untereinander gleich sind und dem Inkreisradius r entsprechen. Dann folgt aus dem Kongruenzsatz SSW, dass z.B. die beiden rechtwinkligen Dreiecke AIE und AIF kongruent sind.



Fällt nun nach Voraussetzung der Umkreismittelpunkt O mit I zusammen, gilt auch $IA = IB = R$, da O gleiche Abstände (d.i. der Umkreisradius R) zu den Eckpunkten des Dreiecks hat. Somit sind nach SSW auch die Dreiecke AIF und BIF kongruent.
Diese Argumentation lässt sich fortführen, bis wir wieder beim Dreieck AIE ankommen und feststellen, dass alle sechs Teildreiecke kongruent sind, und das Dreieck mithin gleichseitig ist.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

7.6 IV. Olympiade 1964

7.6.1 I. Runde 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041011
In einem Betrieb, in dem Elektromotoren montiert werden, können durch die Anschaffung einer neuen Fließbandanlage, deren Kosten 105000 MDN betragen, die Lohnkosten je Motor um 0,50 MDN und die Gemeinkosten um jährlich 8800 MDN gesenkt werden.
a) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit die Kosten der neuen Anlage bereits in drei Jahren durch die Einsparungen an Löhnen und Gemeinkosten gedeckt werden?
b) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit darüber hinaus noch ein zusätzlicher Gewinn von jährlich 10000 MDN entsteht?

a) Wenn pro Jahr x Motoren montiert werden, so werden pro Jahr $0{,}50 \cdot x + 8800$ MDN eingespart. Damit die Kosten der Anlage nach drei Jahren gedeckt sind, muss gelten $3 \cdot (0{,}5 \cdot +8800) = 105000 \Rightarrow x = 52400$.

b) Von den 105000 MDN müssen jährlich 35000 MDN eingespart werden, und außerdem soll es noch 10000 MDN zusätzlichen Gewinn geben, deshalb gilt: $35000 + 10000 = 0{,}5 \cdot x + 8800 \Rightarrow x = 72400$.
Es müssen jährlich mindestens 72400 Motoren montiert werden.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 041012
In der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccc} & & V & A & T & E & R \\ + & M & U & T & T & E & R \\ \hline & E & L & T & E & R & N \end{array}$$

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Geben Sie sämtliche Lösungen an, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren geben kann!

Es gelten folgende Gleichungen (Klammerausdrücke sind optional):

$$R + R = N(+10) \tag{1}$$
$$E + E(+1) = R(+10) \tag{2}$$
$$T + T(+1) = E(+10) \tag{3}$$
$$A + T(+1) = T(+10) \tag{4}$$
$$V + U(+1) = L + 10 \tag{5}$$
$$M + 1 = E \tag{6}$$

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar:
Wenn $R \leq 4$ dann kein Übertrag in (1), d.h. R gerade, und mit $R \neq 0$ (dies gilt, weil sonst in (1) $N = R$ wäre):

$$R = \{2, 4\} \Rightarrow E = \frac{R(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{7a}$$

Wenn $R \geq 5$, dann mit Übertrag in (1), d.h. R ungerade:

$$R = \{5, 7, 9\} \Rightarrow E = \frac{R - 1(+10)}{2} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

wobei $E = 9$ entfällt, da dies nur erreicht wird bei $R = 9$ (7*b*). Also

$$R \in \{2, 4, 5, 7, 9\} \qquad \text{und} \qquad E \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \tag{7c}$$

Betrachtet man zu den Werten aus (7a) und (7b) nun noch Gleichung (3), so ergibt sich analog:
Wenn $E \leq 4$ dann kein Übertrag in (2), d.h. E gerade mit $E(+10) = 2T$, und mit $E \neq 0$ (siehe (7c)):

$$E = \{2, 4\} \Rightarrow T = \frac{E(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{8a}$$

Wenn $E > 5$ ($E \neq 5, E \neq 9$ siehe (7c)), dann mit Übertrag in (2), d.h. E ungerade:

$$E = 7 \Rightarrow T = \frac{E - 1(+10)}{2} = \{3, 8\} \qquad \text{also} \tag{8b}$$

$$E \in \{2, 4, 7\} \qquad \text{und} \qquad T \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} \tag{8c}$$

Ich betrachte (7c) und (8c): Da R nur 2 werden kann bei $E = 1$ oder $E = 6$ folgt $R \neq 2$. Analog gilt $R \neq 7$, da hierfür $E = 3$ oder $E = 8$ gegeben sein muss, d.h. $R \in \{4, 5, 9\}$ (9).
A ergibt sich mit (3), (4) und (8c) wie folgt: wenn $T < 4$ dann $A = 0$ und wenn $T > 5$ dann $A = 9$ (10).
Weiterhin gilt mit (6): $M \in \{1, 3, 6\}$ (11).
Es gilt also zusammenfassend:

$$R = 4 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$$
$$R = 5 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow E = \{2, 7\} \Rightarrow M = \{1, 6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3, 8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0, 9\}\}$$
$$R = 9 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{4\} \Rightarrow M = \{3\} \Rightarrow T = \{2, 7\} \Rightarrow A = \{0, 9\}$$

Probiert man diese Fälle systematisch mit den verbleibenden freien Größen V,U,L durch, so kommt man auf folgende 8 Lösungen: $VATER + MUTTER = ELTERN$

$20374 + 693374 = 713748$; $59624 + 176624 = 236248$; $79624 + 156624 = 236248$

$90374 + 623374 = 713748$; $49625 + 186625 = 236250$; $89625 + 146625 = 236250$

$50249 + 362249 = 412498$; $60249 + 352246 = 412498$

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 041013
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.
a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Drachenviereck ist, wenn das Sehnenviereck ein Trapez ist! b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist. Dann sind die Tangenten an den Umkreis von $ABCD$ in benachbarten Eckpunkten nicht parallel zueinander und haben daher einen Schnittpunkt.
Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Tangenten in A und B mit E und entsprechend den der Tangenten in B und C mit F, in C und D mit G und den der in D und A mit H. E, F, G, H sind paarweise voneinander verschieden.

Aufgrund einer bekannten Eigenschaft von Tangentenabschnitten gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$|AE| = |BE|, \quad |BF| = |CF|, \quad |CG| = |DG|, \quad |DH| = |AH|$$

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt außerdem $|MA| = |MB| = |MC| = |MD|$.
Daher ist jedes der Vierecke $AEBM$, $BFCM$, $CGDM$, $DHAM$ ein Drachenviereck. Infolgedessen halbieren ihre Diagonalen ME, MF, MG bzw. MH die Winkel $\angle AEB$, $\angle BFC$, $\angle CBD$ bzw. $\angle DMA$ und stehen auf den Strecken AB, BC, CD bzw. DA senkrecht.

a) Ist nun $ABCD$ Trapez, so kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $AB \perp CD$ ist. In diesem Fall ist auch die auf AB senkrechte Strecke ME parallel zu der auf CD senkrechten Strecke MG.
Folglich liegen ME und MG auf der Geraden g_{EG}, so dass die Diagonale EG von $EFGH$ die Winkel $\angle HEF$ und $\angle HGF$ halbiert. Daher ist nach dem Kongruenzsatz (sww) $\triangle EFG$ zu $\triangle EHG$ kongruent. Wegen $F \neq H$ liegen diese Dreiecke somit auf verschiedenen Seiten von g_{EG}, und zwar spiegelbildlich zu g_{EG}. Folglich ist $EFGH$ ein Drachenviereck.

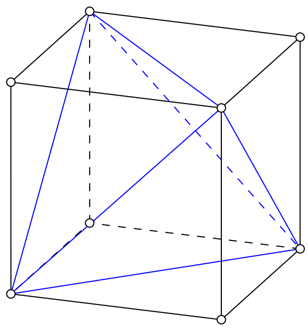
b) Ja. Dazu ist zu zeigen: Ist $EFGH$ Drachenviereck, so ist $ABCD$ Trapez.

Beweis:
Wenn $EFGH$ Drachenviereck ist, so kann es o.B.d.A. zu g_{EG} symmetrisch angenommen werden, so dass g_{EG} jeden der beiden Winkel $\angle HEF$ und $\angle FGH$ halbiert. Wegen $\angle HEF = \angle AEB$ und $\angle HGF =$

$\angle DGC$ (1) halbiert g_{EG} auch die beiden Winkel auf der rechten Seite von (1). Da g_{ME} den Winkel $\angle AEB$ und g_{MA} den Winkel $\angle DGC$ halbiert ist $g_{ME} = g_{EG} = g_{MG}$.
Außerdem steht g_{ME} auf AB und g_{MG} auf DC senkrecht. Daher steht sowohl AB als auch DC auf g_{EC} senkrecht, so dass $AB \perp CD$ gilt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 041014
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder (Kantenlänge 6 cm).
a) Stellen Sie das Tetraeder im dimetrischen Verfahren dar!
b) Beweisen Sie, dass die Gegenkanten (Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben) eines regelmäßigen Tetraeders orthogonal sind!



a) Ein regelmäßiges Tetraeder kann man erhalten, wenn man die Flächendiagonalen eines Würfels wie in der Abbildung miteinander verbindet. Jede Kante des Tetraeders hat dann dieselbe Länge.
Dies kann man sich für die dimetrische Darstellung des Tetraeders zu Nutze machen, indem man in gewohnter Weise einen Würfel darstellt (Winkel zur Horizontalen 7° und 42°, Verkürzungsfaktor 0,5 auf der x-Achse) und die Flächendiagonalen geeignet zum Tetraeder verbindet.

b) Projiziert man die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders so aufeinander, dass sie sich schneiden, so liegen sie in derselben Ebene, da sich gegenüberliegende Kanten in gegenüberliegenden Würfelseiten befinden und diese einander bei Parallelprojektion genau dann schneiden, wenn sie aufeinander zu liegen kommen.

Demzufolge liegen die projizierten Tetraederkanten dann in derselben Ebene und sind die beiden Diagonalen einer Würfelfläche.

Nun ist aus dem Schulunterricht bekannt, dass die Diagonalen eines Quadrates (jede Würfelfläche ist ein Quadrat) einander im rechten Winkel schneiden. Damit ist gezeigt, dass die gegenüberliegenden Tetraederkanten orthogonal zueinander sind, wenn es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 5 - 041015
Die Zahl $2^{3217} - 1$ wurde als Primzahl ermittelt.
a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!
b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Sei $\lg x$ der Logarithmus von x zur Basis 10, $[x]$ die Gauß-Klammer, welche die größte ganze Zahl $\leq x$ liefert, und $y \mod x$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ der ganzzahlige Rest, der bei der Division von y durch x auftritt.

(a) Umschreiben der Zahl 2^{3217} auf die Basis 10 ergibt:

$$2^{3217} = 10^{\lg(2^{3217})} = 10^{3217 \cdot \lg 2}$$

Da 10^n im Dezimalsystem jeweils die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl ist, folgt für eine positive reelle Zahl r, dass die Anzahl der Stellen von 10^r gleich $[r] + 1$ ist. Die Anzahl der Stellen von 2^{3217} ist also gleich

$$[3217 \cdot \lg 2] + 1 = 969.$$

Da 2^{3217} nicht den Faktor 5 enthält, kann 2^{3217} nicht von der Form 10^n sein. Insbesondere ist 2^{3217} damit nicht die kleinste 969-stellige Zahl und dem zu Folge hat $2^{3217}-1$ ebenfalls 969 Dezimalstellen.

(b) Es genügt die Betrachtung der letzten Ziffer, also alle Berechnungen modulo 10 auszuführen. Es gilt:

$$\begin{array}{lll} 2^1 \mod 10 = 2 \quad ; & 2^2 \mod 10 = 4 \quad ; & 2^3 \mod 10 = 8 \\ 2^4 \mod 10 = 6 \quad ; & 2^5 \mod 10 = 2 & \end{array}$$

Man hat es also mit einem 4-er Zyklus zu tun. Sei $n \in \mathbb{N}$ und 2^n gegeben. Gilt $n \mod 4 = 1$ endet 2^n auf 2, bei $n \mod 4 = 2$ auf 4, bei $n \mod 4 = 3$ auf 8 und bei $n \mod 4 = 0$ auf 6. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.
Wegen $3217 \mod 4 = 1$ endet 23217 auf 2 und $2^{3217}-1$ demzufolge auf 1.
Die Information, dass $2^{3217}-1$ eine Primzahl ist, wurde für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt.

Aufgabe gelöst von Daniel Gutekunst

Aufgabe 6 - 041016
a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

Verwendete Formeln (bekannt aus dem Schulunterricht):

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v \tag{1}$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \tag{2}$$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \tag{3}$$

Nach (1) gilt

$$\lg 3 - \lg 2 = \lg \frac{3}{2}, \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{\lg 5}{\lg \frac{3}{2}}$$

Nach (2) und (3) gilt:

$$x = \log_{\frac{3}{2}} 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$$

Durch Ausprobieren ganzzahliger Werte für x erhält man:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1{,}5; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3{,}375; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5{,}0625; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7{,}59375$$

Es ist folglich 4 die beste ganzzahlige Näherung für x, weil sie am nächsten an die Lösung der Gleichung (= 5) kommt. Da $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 5$ ist folglich der Näherungswert $x = 4$ größer als die tatsächliche Lösung.

Aufgabe gelöst von Annika Heckel

7.6.2 II. Runde 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041021
Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:

a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.

b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.

c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunamen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt.
Dann gibt es wegen c) folgende Personen: BX, XY,YD, DZ.

Wegen a) gilt X $\neq$ B, Y $\neq$ D. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin Y $\neq$ B, X $\neq$ D gilt, ist wegen b) nur X = A, Y = C, Z = B möglich.
Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

Aufgabe 2 - 041022
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten (ohne Benutzung von Logarithmentafel oder Rechenstab):
$$y = 10 - 2 \cdot \lg 32 - 5 \cdot \lg 25$$

Folgende Gesetze werden angewandt:
(1) $\lg(ab) = b \cdot \lg a$
(2) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
(3) $\lg x = \log_{10} x$
(4) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ und insbesondere $\log_a a = 1$, weil $a^1 = a$ und folglich $\lg 10 = 1$.
Damit kann nun äquivalent umgeformt werden:

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 2^5 - 5 \cdot \lg 5^2 = 10 - 2 \cdot 5 \cdot \lg 2 - 5 \cdot 2 \lg 5 = 10 - 10 \cdot \lg 2 - 10 \cdot \lg 5 =$$

$$= 10 \cdot (1 - \lg 2 - \lg 5) = 10 \cdot (1 - (\lg 2 + \lg 5)) = 10 \cdot (1 - (\lg(2 \cdot 5))) = 10 \cdot (1 - \lg 10) = 0$$

Aufgabe 3 - 041023
Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.
Man beweise, dass das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke flächengleich sind.

Bezeichnet man die Abschnitte der einen Diagonalen mit a und b, die der anderen mit c und d und den Winkel zwischen a und c mit β, so erhält man für die Flächen der vier Dreiecke:

$$F_1 = 0{,}5ac \sin\beta \qquad ; \qquad F_2 = 0{,}5ad \sin(180° - \beta)$$

$$F_3 = 0{,}5bd \sin\beta \qquad ; \qquad F_4 = 0{,}5bc \sin(180° - \beta)$$

Aus $F_1 = F_2$ folgt $c = d$, und aus $F_1 = F_4$ folgt $a = b$. Das heißt, die Diagonalen halbieren einander, es liegt ein Parallelogramm vor.
Umgekehrt folgt, dass die Flächen der vier Dreiecke gleich sind, wenn die Diagonalen einander halbieren.

Aufgabe 4 - 041024
Der Weg von einem Ort A nach einem Ort B ist 11,5 km lang und führt zuerst bergauf, dann verläuft er auf gleicher Höhe und schließlich bergab. Ein Fußgänger, der von A nach B ging, legte diesen Weg in 2 h 54 min zurück.
Für den Rückweg auf gleichem Kurs brauchte er 3 h 6 min. Dabei ging er jeweils bergauf mit einer Geschwindigkeit von $3\frac{km}{h}$, auf dem Mittelteil mit einer Geschwindigkeit von $4\frac{km}{h}$ und bergab mit $5\frac{km}{h}$.
Wie lang sind die einzelnen Teilabschnitte, wenn man voraussetzt, dass auf jedem Teilabschnitt die jeweilige Geschwindigkeit konstant war?

Die Maßzahlen der drei Teilabschnitte seien a, b und $a+x$.
Dann gelten:

$$2a + b + x = 11{,}5 \qquad (1)$$
$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a+x}{5} = 2{,}9 \qquad (2)$$
$$\frac{a+x}{3} + \frac{b}{4} + \frac{a}{5} = 3{,}1 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) erhält man $x = 1{,}5$ und damit aus (1) $2a + b = 10$ und aus (2) $32a + 15b = 156$.
Aus diesen Gleichungen berechnet man $b = 4$ und $c = 3$.

Der Weg führt 3 km bergauf, dann 4 km auf gleicher Höhe und schließlich 4,5 km bergab, wenn man von A nach B geht. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Lösungen der II. Runde 1964 übernommen von [5]

7.6.3 III. Runde 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041031
Ein Fußgänger geht (mit konstanter Geschwindigkeit) um 9.00 Uhr von A nach dem 12,75 km entfernten B.
Auf der gleichen Straße fährt um 9.26 Uhr ein Straßenbahnzug von A nach B ab. Er überholt den Fußgänger um 9.36 Uhr und fährt nach 4 Minuten Aufenthalt in B wieder zurück. Dabei begegnet er dem Fußgänger um 10.30 Uhr.

a) Wieviel Kilometer legen der Fußgänger und der Straßenbahnzug durchschnittlich in der Stunde zurück?

b) In welcher Entfernung von A überholt der Straßenbahnzug den Fußgänger, und wo begegnet er ihm bei der Rückfahrt?

Sei v_1 die Geschwindigkeit des Fußgängers und v_2 die Geschwindigkeit der Straßenbahn. Sei s_1 die Strecke von A zum ersten Treffpunkt und s_2 die Strecke von B bis zum zweiten Treffpunkt. Dann gilt:

$$(1): \quad v_1 = \frac{s_1}{36} = \frac{12{,}75 - s_2}{90} \qquad ; \qquad (2): \quad v_2 = \frac{s_1}{10} = \frac{12{,}75 + s_2}{60}$$

Die Lösungen für dieses linearen Gleichungssystems sind $s_1 = 3$ und $s_2 = 5{,}25$ Damit:

$$v_1 = \frac{3\text{km}}{\frac{3}{5}\text{h}} = 5\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad ; \qquad v_2 = \frac{12{,}75\text{km} + 5{,}25\text{km}}{1\text{h}} = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Fußgänger legt in der Stunde durchschnittlich 5 km, der Straßenbahnzug in der gleichen Zeit durchschnittlich 18 km zurück.
b) Der Fußgänger wird, 3 km von A entfernt, vom Straßenbahnzug überholt und begegnet ihm, 5,25 km von B entfernt.

Aufgabe 2 - 041032
Eine ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl.
Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?

Die Zahl n hat die Quersumme 300. Da 300 durch 3 aber nicht durch 9 teilbar ist, gilt dieses auch für n. Daher kann n keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 3 - 041033
Gegeben sind Strecken von den Längen $a = 5$, $b = 4$ und $c = 1$.
Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den algebraischen Ausdruck

$$x = \frac{a^2 + b^2}{3c}$$

Man setze $a^2 + b^2 = y^2$. Dann ist y mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks als Hypotenuse konstruierbar.
Aus $x = \frac{y^2}{3c}$ erhält man $x \cdot 3c = y^2$. Dann ist x nach dem Höhensatz konstruierbar.

Aufgabe 4 - 041034
Von sechs Schülern einer Schule, die an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teilnahmen, erreichten zwei die volle Punktzahl. Die Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:

(1) A und C, (2) B und F, (3) F und A, (4) B und E, (5) D und A.

Nun wissen wir, dass in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.
Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?

Ein Anfang wäre es wohl Kandidat A zu betrachten, da dieser in 3 Aussagen vorkommt. Wenn A nun nicht volle Punktzahl hat, da muss von diesen 3 Aussagen eine mit beiden falschen Aussagen dabei sein. Wenn nun A und C beide falsch sind, dann müssten also F und D volle Punktzahl erhalten haben. Dann wären aber B und E beide leer ausgegangen, und somit hätten wir bei Aussage (4) wieder 2 verkehrte. Das funktioniert also nicht.
Die gleiche Argumentation klappt auch für den Fall, dass A und F beide falsch sind und dass A und D beide falsch sind. A muss also volle Punktzahl erhalten haben und C, F und D nicht.
Es fehlt dann also noch die Aussage, in der beide Angaben nicht stimmen.
Nach Aussage (2) haben B und F volle Punktzahl erhalten und nach Aussage (4) B und E. B kann somit nicht volle Punktzahl erreicht haben, da in diesem Fall in beiden Aussagen eine Angabe richtig wäre.
Somit hat B nicht volle Punktzahl erreicht. Dann hat E volle Punktzahl erreicht.
Somit haben A und E volle Punktzahl erreicht.

Aufgabe 5 - 041035
Ist die folgende Aussage richtig? Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

Wenn a nicht durch 3 teilbar ist, hat a die Gestalt $3n + 1$ oder $3n + 2$.
Durch Quadrieren der Gleichungen sehen wir, dass a^2 dann in beiden Fällen die Gestalt $3m + 1$ hat ($m = 9n^2 + 6n$ oder $m = 9n^2 + 12n$).
Wenn a und b beide nicht durch 3 teilbar sind, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 2$. Wenn a durch 3 teilbar und b nicht durch 3 teilbar ist, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 1$.
In beiden Fällen ist $a^2 + b^2$ nicht durch 3 teilbar. Also folgt aus "$a^2 + b^2$ durch 3 teilbar" bereits, dass a und b durch 3 teilbar sind.

Aufgabe 6 - 041036
Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhe h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.
Man beweise: $a + b + c + d = h$.

Das Volumen des Tetraeders ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

wobei G die Grundfläche bezeichnet. Durch einen Punkt im Inneren zerfällt der Tetraeder in 4 Teiltetraeder mit Grundfläche G und den Höhen a,b,c,d.
Da das ganze Tetraeder regelmäßig ist, haben alle 4 Teiltetraeder ebenfalls die Grundfläche G. Es gilt die Gleichung $V = V_a + V_b + V_c + V_d$, wobei V_* das Volumen des Teiltetraeders mit der entsprechenden Höhe ist. Nach Anwenden der Volumenformel erhalten wir

$$\frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} G \cdot a + \frac{1}{3} G \cdot b + \frac{1}{3} G \cdot c + \frac{1}{3} G \cdot d$$

und nach Kürzen $h = a + b + c + d$.

Lösungen der III. Runde 1964 übernommen von [5]

7.6.4 IV. Runde 1964, Klasse 10

Aufgabe 1 - 041041
Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden.
Es stehen drei verschiedene Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt $600M - 30M - 24M - 18M = 528M$.
27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch $528M - 486M = 42M$ übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen.
Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht
b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.
c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M
d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M
e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 2 - 041042
Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x > 0$.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung äquivalent zu

$$x^2 - 2p^2 < 2px \qquad \text{bzw.} \qquad (x^2 - 2px + p^2) < 3p^2$$

also $(x-p)^2 < 3p^2$ und damit

$$-\sqrt{3}p < x - p < \sqrt{3}p \qquad \text{bzw.} \qquad (1-\sqrt{3})p < x < (1+\sqrt{3})p$$

Dabei fallen die Lösungen mit $x \leq 0$ aufgrund der Fallannahme weg, und es bleibt (wegen $p < 0$) die Lösungsmenge

$$\{x | 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}$$

für diesen Fall.

2. Fall: Sei nun $x < 0$.

Es ist $x = 0$ nicht Teil des Definitionsbereichs der in der zu betrachtenden Ungleichung auftretenden Terme.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung diesmal äquivalent zu $x^2-2p^2 > 2px$, was sich analog äquivalent umformen lässt zu

$$(x-p)^2 > 3p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x-p < -\sqrt{3}p \quad \text{oder} \qquad x-p > \sqrt{3}p)$$

und damit $(x < (1-\sqrt{3})p$ oder $x > (1+\sqrt{3})p)$.
Der zweite Teil entfällt aufgrund der Fallannahme, sodass die Lösungsmenge für diesen Fall

$$\{x|x < (1-\sqrt{3})p\}$$

lautet. Zusammen ergibt sich also in Abhängigkeit vom Parameter $p > 0$ folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R}|x < (1-\sqrt{3})p \vee 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}.$$

Aufgabe gelöst von cyrix

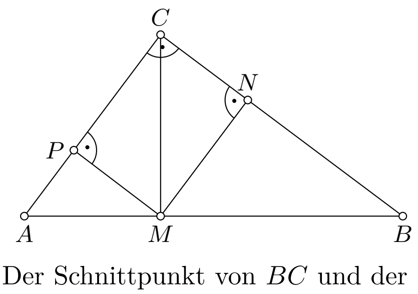
Aufgabe 3 - 041043
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

a, b und c seien beliebige ganze (natürliche) Zahlen. Es gilt $(a-1)a(a+1) = a^3 - a$.
Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $a-1, a$ und $a+1$ ist mindestens eine gerade und mindestens eine durch drei teilbar. Das Produkt ist also durch 6 teilbar.
a und a^3 lassen somit stets den selben Rest bei Division durch 6. Das Gleiche gilt natürlich auch für b und c.
Daher lässt $a^3 + b^3 + c^3$ bei Division durch 6 den selben Rest wie $a + b + c$.
Insbesondere ist $a^3 + b^3 + c^3$ genau dann durch 6 teilbar, wenn $a + b + c$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 041044
Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit $\angle ACB = R$ und ein beliebiger Punkt M auf der Hypotenuse AB. Beweisen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2$$



Fall I: $M = A$
Die Relation reduziert sich auf $BA^2 \cdot AC^2 = CA^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall II: $M = B$
Die Relation reduziert sich auf $AB^2 \cdot BC^2 = CB^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall III: $M \neq A$, $M \neq B$

Der Schnittpunkt von BC und der Senkrechten auf BC durch M sei N. Der Schnittpunkt von AC und der Senkrechten auf AC durch M sei P. Nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz gelten:

$$AM^2 = AP^2 + MP^2 \qquad \text{und} \qquad BM^2 = MN^2 + BN^2 \qquad \text{sowie} \tag{1}$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}; \quad AP = \frac{MP \cdot AC}{BC} \qquad \text{und} \qquad \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}; \quad BN = \frac{MN \cdot BC}{AC} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$AM^2 \cdot BC^2 = MP^2 \cdot AC^2 + MP^2 + BC^2 \qquad \text{und} \qquad BM^2 \cdot AC^2 = MN^2 \cdot AC^2 + MN^2 + BC^2 \tag{3}$$

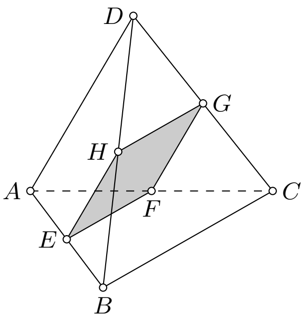
Durch Addition der Gleichungen (3) ergibt sich:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = (MP^2 + MN^2)(AC^2 + BC^2)$$

Unter Berücksichtigung von $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $MP^2 + MN^2 = PN^2$ und $PN = CM$ ($PMNC$ ist ein Rechteck) erhält man die Relation.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 041045
Die Länge der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante wird eine Ebene ϵ so gelegt, dass sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei einander nicht schneidenden Kanten verläuft.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder!



A, B, C, D seien die Ecken des Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt von AB (siehe Abbildung). Dann kann ϵ o.B.d.A. als E enthaltend und parallel zu AD und BC vorausgesetzt werden.
Daher schneidet ϵ weder AD noch BC. Folglich liegen A und D bzw. B und C jeweils auf derselben Seite von ϵ, während A und B auf verschiedenen Seiten von ϵ liegen. Mithin schneidet ϵ die Kanten AC, CD und DB. Die Schnittpunkte seien in dieser Reihenfolge mit $F.G$ und H bezeichnet.

Dann gilt

$$EF \parallel BC \quad \text{und} \quad GH \parallel BC \qquad \text{sowie} FG \parallel AD \quad \text{und} \quad HE \parallel AD$$

Daraus folgt nach dem 2. Strahlensatz

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur ist demnach ein Rhombus. Da wegen der Regelmäßigkeit des Tetraeders die Seitenflächen untereinander kongruente regelmäßige Dreiecksflächen sind, sind deren Höhen untereinander kongruent; es gilt also

$$|DE| = |CE| = |DF| = |BF|$$

Da außerdem $|CD| = |BD|$ ist, gilt nach dem Kongruenzsatz (sss) $\Delta CDE \cong \Delta BDF$ und folglich $\angle DCE \cong \angle DBF$.
Wegen $|CG| = |BH| = \frac{1}{2}|CD|$ gilt nach dem Kongruenzsatz (sws) $\Delta CGE \cong \Delta BHF$ und mithin $|GE| = |HF|$. Die Mittelpunkte von GE und HF fallen im Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus zusammen, so das GE und HF Durchmesser desselben Kreises sind.
Damit ist $EFGH$ als Rhombus und Sehnenviereck ein Quadrat und hat den Flächeninhalt

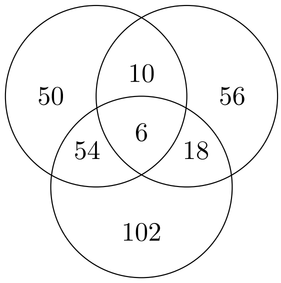
$$I = |EF|^2 = \frac{a^2}{4}$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 041046
In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

- 120 Schüler die Zeitschrift "Technikus"
- 90 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen"
- 180 Schüler die Zeitschrift "Die Trommel"
- 60 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Technikus"
- 16 Schüler die Zeitschriften "Technikus" und "Fröhlichsein und Singen"
- 24 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Fröhlichsein und Singen"
- 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

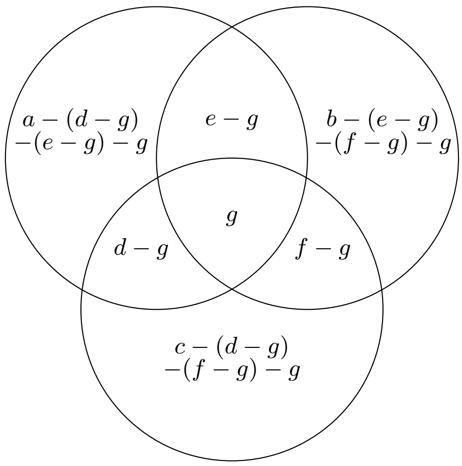
I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?
b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig? II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!



1)

Die Lösungen zu I) ergeben sich aus der Abbildung 1:

a) 208 Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften.
b) 296 Schüler lesen mindestens eine der Zeitschriften, 4 also keine.



2)

Die Lösungen zu II ergeben sich aus Abbildung 2:

x: Zahl der Schüler, die genau eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
y: Zahl der Schüler, die mindestens eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
z: Zahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmäßig lesen.

$$x = a + b + c - 2(d + e + f) + 3g$$
$$y = a + b + c - (d + e + f) + g$$
$$z = a + d + e + f - (a + b + c + g)$$

Lösung übernommen von [5]

7.7 V. Olympiade 1965

7.7.1 I. Runde 1965, Klasse 10

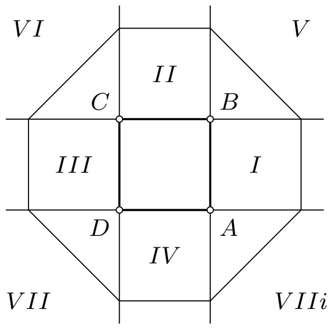
Aufgabe 1 - 051011
Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!
Weisen Sie nach, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Angenommen, es gäbe eine solche Zahl $z = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen a, b und $0 < a < 10$, $b < 10$, so gilt die Gleichung

$$10a + b = a + b^2$$

Dann muss $9a = b^2 - b$, also $a = \frac{b(b-1)}{9}$ sein.
Da a eine natürliche Zahl ist und b sowie $b-1$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muss entweder b oder $b-1$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $b-1$ nicht durch 9 teilbar sein, also muss $b = 9$ sein. a ist dann 8.
Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen. Da $89 = 8 + 92$ gilt, genügt 89 wirklich den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 051012
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Quadratseiten oder deren Verlängerungen gleich 4 ist!



Die Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder, die im Bild mit I bis VIII bezeichnet sind, wobei die Punkte und Trennungsgeraden als zu allen ihren Feldern anliegenden Feldern zugehörig betrachtet werden.

Wir betrachten zunächst das Feld I. Die Abstände jedes Punktes P dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit e_{AB}, e_{BC}, e_{CD} bzw. e_{DA}. Dann gilt:

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA} = 4$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden g_{BC} und g_{DA} liegt, ist $e_{BC} + e_{DA} = 1$. Da die Geraden g_{AB} und g_{CD} parallel sind, und weil g_{CD} und P auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, ist $e_{CD} = e_{AB} + 1$. Daher folgt:

$$2e_{AB} + 1 + 1 = 4 \qquad ; \qquad e_{AB} = 1$$

Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf einer Parallelen zu g_{AB} im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Die Abstände jedes Punktes Q dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} bzw. f_{DA}. Dann gilt:

$$f_{AB} + f_{BC} + f_{CD} + f_{DA} = 4$$

Analog zum Fall $P \in I$ ist $f_{CD} = f_{AB} + 1$ und $f_{DA} = f_{BC} + 1$. Daraus folgt

$$2f_{AB} + 2f_{BC} + 2 = 4 \qquad ; \qquad f_{AB} + f_{BC} = 1$$

Q liegt daher auf der zu g_{AC} parallelen Diagonalen des aus $ABCD$ durch Spiegelung an D entstehenden Quadrates.
Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der schon gefundenen Strecken in den Feldern II und III, III und IV bzw. IV und I übereinstimmen.

Im Innern des Quadrats (Feld IX) können keine derartigen Punkte liegen, da der Abstand jedes Punktes im Innern von jeder der Quadratseiten kleiner als die Seitenlänge ist, was dann auch für die entsprechenden Summen gilt.

Die gesuchte Punktmenge besteht also aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ liegen und von dessen Seiten jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel und kongruent ist.

Aufgabe 3 - 051013
Wie verhält sich das Maß der Oberfläche eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zum Maß der Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, wenn das Maß der Rauminhalte beider Körper gleich ist?
Dabei werden bei beiden Figuren gleiche Maßeinheiten zugrunde gelegt.

Es seien r_1 der Grundkreisradius, I_1 der Oberflächeninhalt und V_1 das Volumen des Kegelkörpers sowie r_2, I_2 und V_2 die entsprechenden Maße des Zylinderkörpers. Die Länge der Mantellinie des Kegels beträgt wegen der Form des Achsenabschnittes $2r_1$.

Die Oberfläche des Kegelkörpers setzt sich aus einer Kreisscheibe vom Radius $r1$ und einem Kegelmantel vom Grundkreisradius r_1 und der Mantellinienlänge $s = 2r_1$ zusammen. Daher gilt:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(2r_1)^2 + \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2 \tag{1}$$

Als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks hat der Achsenabschnitt und damit auch der Kegelkörper die Höhenlänge $2r_1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und somit gilt

$$V_1 = \pi r_1^2 r_1 \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi r_1^3}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

Die Oberfläche des Zylinderkörpers setzt sich aus zwei Kreisscheiben vom Radius r_2 und einem Zylindermantel vom Radius r_2 und der Höhenlänge $2r_2$ zusammen. Daher gilt:

$$I_2 = 4\pi r_2^2 + 2\pi r_2^2 = 6\pi r_2^2 \tag{3}$$

und außerdem

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot 2r_2 = 2\pi r_2^3 \tag{4}$$

Wegen $V_1 = V_2$ folgt aus (2) und (4)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12} \tag{5}$$

und somit aus (1), (3) und (5)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

Aufgabe 4 - 051014
Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$, $|v| < |c|$. Es ist zu beweisen, dass dann gilt:

$$\left|\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right| < |c|$$

Aus $|u| < |c|$ folgt zunächst $c \neq 0$ und weiter $\left|\frac{u}{c}\right| < 1$. Aus $|v| < |c|$ folgt $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$. Somit ergibt sich

$$0 < \left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2} \qquad \text{und}$$

$$0 < \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 + \frac{u+v}{c} + \frac{uv}{c^2}$$

und daraus

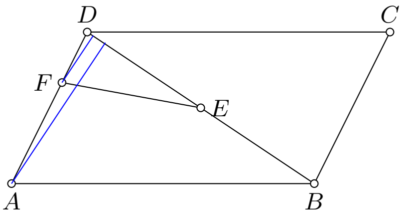
$$-\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) < \frac{u+v}{c} < 1 + \frac{uv}{c^2} \tag{1}$$

insbesondere also auch $1 + \frac{uv}{c^2} > 0$, so dass sich nach Division der Ungleichung (1) durch $1 + \frac{uv}{c^2}$ und anschließender Multiplikation mit $|c|$ die Behauptung ergibt.

Lösungen der I. Runde 1965 übernommen von [5]

7.7.2 II. Runde 1965, Klasse 10

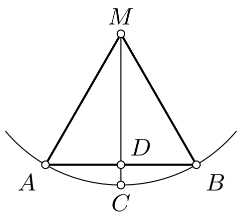
Aufgabe 1 - 051021
Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen DB des Parallelogramms $ABCD$. Punkt F sei derjenige Punkt auf AD, für den $|DA| : |DF| = 3 : 1$ gilt.
Wie verhält sich das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks ΔDFE zu dem des Vierecks $ABEF$, wenn man gleiche Maßeinheiten zugrunde legt?



Die Höhen der Dreiecke DAB bzw. DFE auf g_{DB} bzw. g_{DE} sind zueinander parallel, da die zu diesen Höhen gehörenden Seiten DB bzw. DE der genannten Dreiecke auf derselben Geraden liegen.
Nach dem 2. Strahlensatz verhalten sich die Längen dieser Höhen aufgrund der Voraussetzung wie 3:1. Ferner verhalten sich die Längen der Grundseiten DB bzw. DE zueinander wie 2:1.
Daher verhalten sich die Flächeninhalte beider Dreiecke wie 6:1. Folglich verhält sich der Flächeninhalt des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$ wie 1:5.

Aufgabe 2 - 051022
Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!
c) Um wie viel Prozent ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)
d) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Genauigkeit wie bei c)



Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Weiter seien C eine Ecke und A und B die beiden benachbarten Ecken des Zwölfecks.
Dann gilt: $r = |MA| = |MC| = |MB| = |AB|$.
AB ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und $MC \perp AB$. $ACBM$ ist wegen $|AM| = |BM|$ und $|AC| = |BC|$ ein Drachenviereck.

a) Die Strecken AB und MC haben einen Schnittpunkt D. Setzt man $|DC >= x$, dann gilt

$$x = r - |MD| = r - \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

MD ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck MAB. Bezeichnet $s = |AC| = |BC|$ die Seitenlänge des Zwölfecks, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck CBD

$$s^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{3}) \to s = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Der Umfang des Zwölfecks beträgt daher $12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt I_1 des Dreiecks MBC. Es gilt

$$I_1 = \frac{1}{2}r \cdot r \sin 30^\circ = \frac{r^2}{4}$$

Der Flächeninhalt $12I_1$ des Zwölfecks beträgt demnach $3r^2$.

c) Es ist

$$12r\sqrt{2\sqrt{3}} : 2r\pi \approx 3{,}106 : \pi \approx 0989$$

Weil $3{,}1055^2 < 36(2-\sqrt{3}) < 3{,}1065^2$ also $3{,}1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3{,}1065$ gilt und wegen $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$$0.9885 \cdot 3{,}1416 < 3{,}1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3{,}1065 < 0.9895 \cdot 3{,}1415$$

ausfällt. Der Umfang des Zwölfecks ist also um etwa 1,1% kleiner als der des Kreises.

d) Wegen $0{,}9549 \cdot 3{,}1416 < 3 < 0{,}955 \cdot 3{,}1415$ ist

$$3r^2 : \pi r^2 = 3 : \pi \approx 0{,}955$$

Der Flächeninhalt des Zwölfecks ist also um etwa 4,5% kleiner als der des Kreises.

Aufgabe 3 - 051023
Beweise: Wenn gilt $0 < b < a$ (1) und $a^2 + b^2 = 6ab$ (2) dann ist

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

Da a und b von 0 verschieden sind, gilt

$$\frac{6ab + 2ab}{6ab - 2ab} = 2$$

Unter Verwendung von (2) folgt

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = 2$$

Wegen $a > b > 0$ sind $a + b$ und $a - b$ positiv und man kann die Wurzel ziehen und erhält

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{(2)}$$

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 051024
Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt.
Wieviel Autobusse, jeder Art sind zu bestellen?

Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt.
Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die

$$a + b + c = n \quad \text{(mit ganzzahligem } n \leq 26) \qquad (1)$$

$$41a + 29b + 13c = 1007 \qquad (2)$$

gilt.
$41 \cdot (1) - (2)$ ergibt die Gleichung $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \quad (3)$.
Für $n = 26$ vereinfacht sich (3) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59 \qquad (4)$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Für $n \leq 24$ ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23 \qquad (5)$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.
Es bleibt also nur noch der Fall $n = 25$. Hier ergibt sich aus (3) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18 \qquad (6)$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre.
Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.
In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt.
Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmöglich Anzahl an Bussen.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

7.7.3 III. Runde 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051031
Weisen Sie nach, dass alle Zahlen

$$1331; 1030301; 1003003001; ...; 1\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}3\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}1$$

Kubikzahlen sind!

Es ist

$$\begin{aligned} 1331 &= 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = (10+1)^3 \\ 1030301 &= 1 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2+1)^3 \\ 1003003001 &= 1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 = (103+1)^3 \end{aligned}$$

Folgen bei einer Zahl in der angegebenen Weise jeweils k Nullen direkt aufeinander, so erhält man

$$1 \cdot 10^{3(k+1)} + 3 \cdot 10^{2(k+1)} + 3 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1}+1)^3$$

Also ist die angegebene Zahl eine Kubikzahl.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 051032
a) Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e+f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α das Maß des Winkels $\angle DAB$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

1) Man konstruiere zwei Strahlen, die von A ausgehen und den Winkel α einschließen.
2) Auf dem ersten Strahl markiere man einen beliebigen, von A verschiedenen Punkt B'.
3) Der Schnittpunkt des zweiten Strahls mit dem Kreis um A durch B' heiße D'.
4) Der Schnittpunkt der Parallelen zu AB' durch D' mit der Parallelen zu AD' durch B' heiße C'.
5) Die Länge der Strecke $B'D'$ wird auf dem Strahl AC' an C' in die Richtung angetragen, in der A nicht liegt. Der entstehende zweite Endpunkt dieser Strecke sei S'.
6) Auf dem Strahl AC' wird zusätzlich noch der Punkt S markiert, sodass die Strecke AS die Länge $e+f$ habe.
7) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' im Punkt B; die Parallele zu $D'S'$ durch S die Gerade AD' in D; und die Parallelen zu AB durch D sowie zu AD durch B sich in C.

Dann ist $ABCD$ der gesuchte Rhombus.

Beweis: Zuerst ist nach Konstruktion $AB'C'D'$ ein Parallelogramm (siehe Schritt 4)), wobei zwei benachbarte Seiten gleichlang sind (siehe Schritt 3)); also ein Rhombus.
Weiterhin hat es bei A den Innenwinkel α, ist also ähnlich dem gesuchten Viereck. Also gibt es eine positive rationale Zahl k, sodass das gesuchte Viereck durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum A aus dem Rhombus $AB'C'D'$ hervorgeht.
Dies gilt insbesondere auch für die Diagonalen und deren Summe, sodass sich der Streckungsfaktor k ergibt als $\frac{e+f}{|AC'|+|B'D'|} = \frac{|AS|}{|AS'|}$. Nach den Strahlensätzen ist dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AD|}{|AD'|}$.
Abschließend wird C wieder als vierter Parallelogrammpunkt konstruiert, sodass das so konstruierte Viereck $ABCD$ wieder ein Rhombus mit Innenwinkel α ist, dessen Diagonalensumme aber nun die gewünschte Größe hat.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 051033
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, b und c für die gilt: $a + bc = (a + b)(a + c)$.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit jeder der folgenden Gleichungen

$$a + bc = a^2 + ac + ab + bc \qquad ; \qquad a(a + b + c - 1) = 0 \tag{1}$$

Da das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner Faktoren Null ist, folgt, dass

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a + b + c - 1 = 0$$

sein muss, und umgekehrt ist in jedem dieser Fälle die Gleichung (1) und damit die gegebene Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung ist also erfüllt für alle Zahlentripel (a,b,c) mit

1. $a = 0$ und reellen Zahlen b und c und
2. reellen Zahlen a, b und c, für die $a + b + c = 1$ gilt.

In allen anderen Fällen ist sie nicht erfüllt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 051034
Beweisen Sie, das $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!

Angenommen, $\log_2 6$ wäre eine rationale Zahl. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q > 0$, so dass

$$\log_2 6 = \frac{p}{q}$$

gilt. Hieraus folgt nach der Definition des Logarithmus $2^{\frac{p}{q}} = 6$. Diese Aussage ist äquivalent mit

$$2^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$$

Also müsste $2^{p-q} = 3^q$ gelten. Es sei $p - q = n$. Dann ist n ganz, und es müsste $2^n = 3^q$ gelten, woraus wegen $q > 0$ folgt, dass $n > 0$ sein muss. Daraus ergäbe sich $2|3^q$, was nicht wahr ist.
Also ist $\log_2 6$ keine rationale Zahl.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 051035
Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

1. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung

$$\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

(mindestens) eine Lösung.

2. Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (1). (Diskussion)

Wenn die Gleichung (1) eine Lösung x_0 besitzt, so gilt:

$$\frac{a(x_0+1)+b}{c(x_0+1)+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$$

$$c(x_0 + 1) + d \neq 0 \qquad ; \qquad cx_0 + d \neq 0$$

Daraus folgt

$$(a(x_0+1)+b)(cx_0+d) = (c(x_0+1)+d)(ax_0+b) \qquad (2)$$

$c^2+d^2>0$, weil c und d nicht gleichzeitig Null sein können. Und weiter

$$ad = bc \qquad ; \qquad c^2+d^2>0 \qquad (3)$$

Wenn (1) eine Lösung besitzt, so muss (3) gelten, und umgekehrt, wenn (3) gilt, dann hat (1) eine Lösung; denn aus (3) folgt, dass für alle reellen Zahlen x_0 sicher (2) gilt, und daraus folgt weiter:

I. Ist $c=0$, dann ist wegen (3) auch $a=0$ und $d\neq 0$. Also ist für jede reelle Zahl x_0 sicher (1) erfüllt.

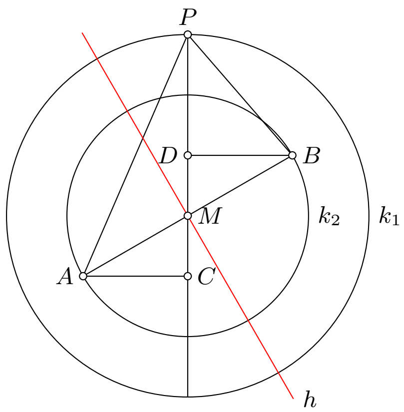
II. Ist $c\neq 0$, dann ist die Gleichung (1) für jede reelle Zahl $x_0 4$ mit $x_0 \neq -\frac{d}{c}$ und $x_0 \neq -\frac{d+c}{c}$ erfüllt. $x_0 = -\frac{d}{c}$ und $x_0 = -\frac{d+c}{c}$ sind nicht Lösung von (1).

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 051036
Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.
Man beweise, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes Punktes P auf der äußeren Kreislinie von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises konstant ist.

Es seien M der Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_1 und k_2 und A und B die Endpunkte eines Durchmessers des inneren Kreises k_2.

Behauptung: $|PA|^2+|PB|^2=c$, wobei c nicht von $P\in k_1$ abhängt.



Beweis:
Es seien C und D die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g_{MP} und h die Senkrechte zu g_{AB} durch M (siehe Abbildung). Liegt P nicht auf h und nicht auf g_{AB}, so fallen C und D nicht mit A, B oder M zusammen, und es gilt für die Dreiecke ACM und BDM

- $|AM>=|BM|$ (als Radien des inneren Kreises)
- $|\angle ACM| = |\angle BDM|$ (als rechte Winkel)
- $|\angle AMC| = |\angle BMD|$ (als Scheitelwinkel)

Folglich sind die Dreiecke ACM und BDM kongruent nach dem Kongruenzsatz (wsw), und es gilt $|CM|=|DM|$ und $|AC|=|BD|$.
O.B.d.A. kann angenommen werden, dass P auf derselben Seite von h wie B liegt. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf ΔACP

$$|AP|^2 = |AC|^2 + (|CM|+|MP|)^2$$

sowie, angewandt auf ΔBPD,

$$|BP|^2 = |BD|^2 + (|MP|-|DM|)^2$$

Wegen $|BD| = |AC|$ und $|DM| = |CM|$ folgt daraus

$$|BP|^2 = |AC|^2 + (|MP| - |CM|)^2$$

Also ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AC|^2 + |CM|^2 + 2|CM| \cdot |MP| + |MP|^2 + |AC|^2 + |MP|^2 - 2|CM| \cdot |MP| + |CM|^2 =$$

$$= 2\left(|AC|^2 + |CM|^2 + |MP|^2\right)$$

Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf ΔACM

$$|AM|^2 = |AC|^2 + |CM|^2$$

und somit ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

da $|AM|$ und $|MP|$ die Radien der konzentrischen Kreise sind.
Liegt P auf g_{AB} und zwar o.B.d.A. auf der Verlängerung von AB über B hinaus, erhält man

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |BM|)^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |AM|)^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Liegt P auf h, so erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf ΔAMP und ΔMBP

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AM|^2 + |MP|^2 + |MP|^2 + |BM|^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Übernommen aus [5]

7.7.4 IV. Runde 1965, Klasse 10

Aufgabe 1 - 051041
Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.
Man zeige, dass in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Gilt
$$mn + pq = r(m - p) \qquad \text{, r ganz} \tag{1}$$
so folgt wegen
$$(mn + pq) : (m - p) = n + \frac{pq + pn}{m - p} \tag{2}$$
aus (1) und (2)
$$pq + pn = s(m - p) \qquad \text{, s ganz} \tag{3}$$
Andererseits gilt
$$(pq + mn) : (-p + m) = -q + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{4}$$
und aus (1) und (4) folgt
$$mn + mq = t(m - p) \qquad \text{, t ganz} \tag{5}$$
Also gilt
$$pq + pn + mn + mq = (s + t)(m - q) \tag{6}$$
woraus wegen (1)
$$mq + np = w(m - p) \qquad \text{, w ganz} \tag{7}$$
folgt. Umgekehrt folgt aus (6) wegen
$$(mq + np) : (m - q) = q + \frac{pq + np}{m - p} \tag{8}$$
$$pq + np = u(m - p) \qquad \text{, u ganz} \tag{9}$$
sowie wegen
$$(np + mq) : (-p + m) = -n + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{10}$$
$$mn + mq = v(m - p) \qquad \text{, v ganz} \tag{11}$$
Also gilt
$$pq + np + mn + mq = (u + v)(m - q) \tag{12}$$
woraus wegen (6)
$$mn + pq = k(m - p) \qquad \text{, k ganz} \tag{13}$$
folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 051042
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10cm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
Dabei ist h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\angle BAC$ und β das Maß des Winkels $\angle CBA$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

1) Gegeben Sei eine beliebige echte Strecke, deren Endpunkte mit A und B' bezeichnet seien.

2) In A trage man den Winkel α und in B' den Winkel β in der entsprechenden Orientierung an die Strecke AB' an. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel heiße C'.

3) Man konstruiere im Dreieck $AB'C'$ die Höhen auf die Seiten $B'C'$ sowie AC', deren Längen mit h'_a bzw. h'_b bezeichnet seien.

4) Auf einem von A ausgehenden Strahl, auf dem keiner der beiden Punkte B' und C' liegt, trage man von A aus die Streckenlänge $h'_a + h'_b$ konstruktiv ab und erhalte den Punkt S'.

5) Auch auf diesem Strahl konstruiere man den Punkt S mit $|AS| = h_a + h_b$.

6) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' in B; die Parallele zu $C'S'$ durch S die Gerade AC' in C.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $\triangle AB'C'$ zum gesuchten Dreieck ähnlich. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass das gesuchte Dreieck durch Streckung um den Faktor k und Zentrum A aus dem Dreieck $\triangle AB'C'$ hervorgeht.
Insbesondere ist damit auch das Verhältnis entsprechender Höhen (sowie deren Summen) in den beiden Dreiecken jeweils gleich $k = \frac{h_a+h_b}{h'_a+h'_b} = \frac{|AS|}{|AS'|}$.
Nach den Strahlensätzen gilt dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AC|}{|AC'|}$, sodass im Dreieck $\triangle ABC$ die Höhen (und deren Summe) die richtige Länge besitzen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 051043
Man beweise folgenden Satz:
Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M.
Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.
Anmerkung:
Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

Für jeden Punkt P auf einer solchen Ebene, die den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen halbiert, gilt, dass seine Lote auf die beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind. Umgekehrt bildet die Menge der Punkte, für die deren Lote auf diese beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind, genau jeweils eine solche Winkelhalbierenden-Ebene.

Da jede dieser Ebenen eine Kante des Tetraeders enthält, und keine zwei Tetraederkanten parallel sind, sind auch keine zwei dieser sechs Ebenen zueinander parallel. Es folgt, dass sich je drei von ihnen in genau einem Punkt schneiden.

Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden-Ebenen durch die Geraden A_1A_2, A_1A3 und A_2A4. Auf der ersten dieser Winkelhalbierenden-Ebenen liegen alle Punkte, deren Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\epsilon_{A_1A_2A_4}$ gleichlang sind; in der zweiten die, für die die Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\epsilon_{A_1A_3A_4}$ gleichlang sind; und auf der dritten die, für die die Lote auf die Ebenen $\epsilon_{A_1A_2A_4}$ und $\epsilon_{A_2A_3A_4}$ gleichlang sind. Für den Punkt M stimmen also die Längen der Lote auf alle vier Seitenflächen-Ebenen überein. Damit ist aber M in jeder der sechs Winkelhalbierenden-Ebenen enthalten, also ihr gemeinsamer Schnittpunkt.

Da die Lote von M auf die Seitenflächenebenen alle gleichlang sind, berührt eine Kugel um M mit diesem Radius genau alle Seitenflächen (in den jeweiligen Lotfußpunkten).

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 051044
Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100!

Es gilt: Summe der ungeraden Quadrate $< 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i-1)^2$ und Summe der geraden Quadrate $\leq 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i)^2$. Also gilt

$$D = \sum_{i=1}^{50}(2i)^2 - \sum_{i=1}^{50}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{50} 4i^2 - \sum_{i=1}^{50}(4i^2 - 4i + 1) = -50 + \sum_{i=1}^{50} 4i =$$
$$= -50 + 4 \cdot \frac{50}{2} \cdot 51 = 5050$$

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Aufgabe 5 - 051045
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen:

$$[\sin(x-y)+1] \cdot [2\cos(2x-y)+1] = 6$$

Wegen $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ und $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ gilt

$$[\sin(x-y)+1] \cdot [2\cos(2x-y)+1] \leq 6$$

für alle reellen x und y, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gleichzeitig

$$\sin(x-y) = 1 \qquad ; \qquad \cos(2x-y) = 1 \tag{1}$$

gilt. Das Gleichungssystem (1) ist daher mit der gegebenen Gleichung äquivalent und genau dann erfüllt, wenn es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so dass

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \qquad ; \qquad 2x - y = 2n\pi$$

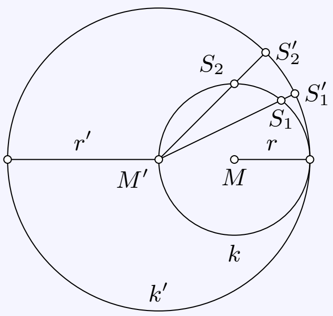
gilt. Daher erhält man alle Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn $k = n-m$ und m in der Gleichungen

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(n-m)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$y = [2(n-2m)-1]\,\pi = [2(k-m)-1]\,\pi$$

unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 051046
Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.
Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!



Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!
Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, dass die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.

Wir beweisen zuerst den Hilfssatz:
Der Kreis k habe den Radius 1 und damit k' den Radius 2. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze in der Aufgabenstellung hat der Bogen zwischen S_1' und S_2' eine Länge von $2 \cdot \angle S_1'M'S_2'$, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.
Da M' auf dem Kreis k liegt, ist $\angle S_1'M'S_2' = \angle S_1M'S_2$ ein Peripheriewinkel im Kreis k, dessen zugehöriger Zentriwinkel $\angle S_1MS_2$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz genau doppelt so groß ist, also $\angle S_1MS_2 = 2 \cdot \angle S_1M'S_2$ beträgt.
Da k den Radius 1 besitzt, hat der Bogen zwischen S_1 und S_2 damit die Länge $2 \cdot \angle S_1M'S_2$, also die gleiche wie der Bogen zwischen S_1' und S_2' auf k', $\square$.

Wendet man den Hilfssatz auf die Situation an, in der einer der beiden von M' ausgehenden Strahlen M enthält, so schneidet dieser beide Kreise in ihrem Berührungspunkt. Da die von dort ausgehenden Bögen zu den Schnittpunkten des zweiten Strahls gleich lang sind, heißt dies, dass beim weiteren Abrollen von k an k' diese beiden Punkte sich berühren werden.
Da dieser Berührungspunkt auf k' fest ist, findet man bei jeder Lage des Kreises k den darauf fixierten (und sich somit mitbewegenden) Punkt, der später auf den Berührungspunkt abgerollt wird, indem man die Gerade durch den Berührungspunkt und M' mit k schneidet (und den von M' verschiedenen Schnittpunkt betrachtet, sofern es zwei verschiedene gibt).

Damit bewegt sich ein auf k fixierter Punkt P auf einem Durchmesser von k'.

Bemerkung:
Die Argumentation funktioniert auf diese Weise an sich nur dann, wenn sich M höchstens $\frac{\pi}{2}$ "vor" oder "nach" dem Berührungspunkt von P an k' befindet, da nur dann der von M' ausgehende und durch den Berührungspunkt verlaufende Strahl den Kreis k überhaupt noch zumindest tangiert.
Aber da k' den doppelten Radius von k hat, rollt k bei einer vollständigen Umdrehung um k' genau zweimal ab, sodass nach einer halben Runde P ein zweites mal k' berührt; genau am auf k' dem ersten Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt, sodass sich die beiden von M' ausgehenden und durch die Berührungspunkte verlaufenden Strahlen zu einer Gerade ergänzen und die Argumentation nun für beliebige Lagen von M, ohne Einschränkung an Winkel, durchführbar ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

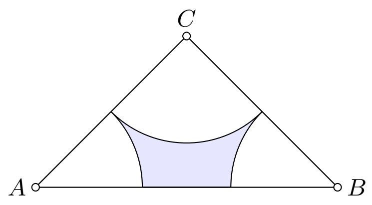
7.8 VI. Olympiade 1966

7.8.1 I. Runde 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061011
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten der Länge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ sind im Inneren um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius von der Länge $r = \frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!

b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt der Flächeninhalt I_K?



a) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$I_D = \frac{a^2}{2} \tag{1}$$

Ferner gilt: $I_K = I_D - I_{D'}$, wobei $I_{D'}$ die Summe der Flächeninhalte der drei im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Kreissektoren ist. Da nach dem Satz des Pythagoras $|AB| = a\sqrt{2} > a$ gilt, schneiden sich die um A bzw. B jeweils mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreise nicht (siehe Bild).
Diese drei Kreissektoren lassen sich zu einer Halbkreisscheibe zusammensetzen, da die Winkelgrößen im Dreieck 180° beträgt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} I_{D'} &= \frac{\pi a^2}{8} \\ I_K &= I_D - I_{D'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{2} \sim 0{,}2146 \cdot \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Wegen (1) beträgt somit der Inhalt I_K rund 21,46% des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

Aufgabe 2 - 061012
Wieviel natürliche Zahlen $n < 1000$ gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Bezeichnet man mit $[x]$ die größte ganze Zahl, de nicht größer als x ist, so beträgt die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 1000 sind $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$.

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$.

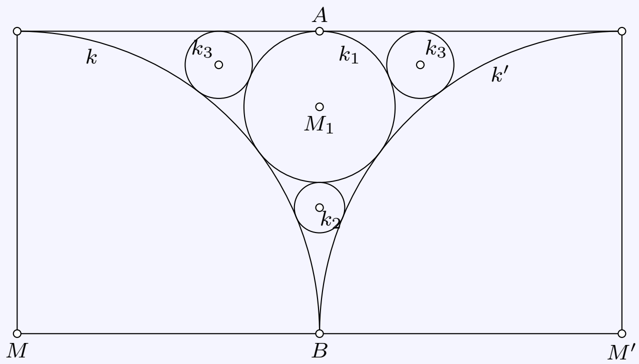
Dabei wurden aber die Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, doppelt gerechnet. Ihre Anzahl ist $\left[\frac{999}{15}\right] = 66$.

Von den 999 Zahlen sind also 999 - 333 - 199 + 66 = 533 Zahlen weder durch 3 noch durch 5 teilbar.

Aufgabe 3 - 061013

In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise auf. Die Längen der Radien r und r' der Kreise k bzw. k' seien bekannt, und es ist $r = r'$.

Berechnen Sie die Längen r_1, r_2 und r_3 der Radien der Kreise k_1, k_2 und k_3!



Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise k, k', k_1, k_2 und k_3 der Reihe nach mit M, M', M_1, M_2 und M_3, den Berührungspunkt der Kreise k und k' mit B und den nicht auf BM_1 gelegenen Schnittpunkt von k_1 mit g_{BM_1} mit A, dann gilt

$$|MM_1| \quad = \quad r + r_1 \quad \text{sowie} \quad AB \perp MB \quad \text{(Bild a)}$$

Außerdem gilt $|AB| = |MB| = r$, und daher $|M_1B| = r - r_1$. Daraus folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_1$, $(r+r_1)^2 = (r-r_1)^2 + r^2$, und somit $4rr_1 = r^2$, d.h. wegen $r > 0$: $r_1 = \frac{r}{4}$.

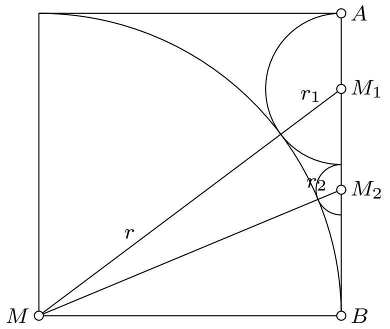
Ferner gilt $|MM_2| = r + r_2$ und $|M_2B| = r \cdot 2r_1 - r_2 = \frac{r}{2} - r_2$, also nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_2$, $(r+r_2)^2 = (\frac{r}{2} - r_2)^2 + r^2$, und somit $3rr_2 = \frac{r^2}{4}$, d.h. wegen $r > 0$: $r_2 = \frac{r}{12}$.

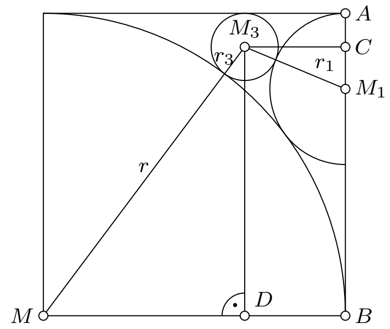
Weiterhin gilt $|M_1M_3| = r_1 + r_3$ und $|M_1C| = r_1 - r_3$, wobei C der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB ist (Bild b).

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle M_1CM_3$, erhält man dann

$$\begin{aligned} |M_3C|^2 &= (r_1+r_3)^2 - (r_1-r_3)^2 \\ &= 4r_1r_3 = rr_3, \end{aligned}$$

also $|M_3C| = \sqrt{rr_3}$. Schließlich gilt: $|MM_3| = r + r_3$ und $|M_3D| = r - r_3$, wobei D der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf MB ist, sowie $|MD| = r - |M_3C|$, also $|MD| = r - \sqrt{rr_3}$.





Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MDM_3$, gilt dann

$$\begin{aligned} (r+r_3)^2 &= (r-r_3)^2 + (r-\sqrt{rr_3})^2 \\ (r+r_3)^2 - (r-r_3)^2 &= (r-\sqrt{rr_3})^2 \\ 4rr_3 &= r^2 - 2r\sqrt{rr_3} + rr_3, \\ r - 3r_3 &= 2\sqrt{rr_3}. \quad \text{(wegen } r > 0) \\ r^2 - 6rr_3 + 9r_3^2 &= 4rr_3 \\ r_3^2 - \frac{10rr_3}{9} + \frac{r^2}{9} = 0, \end{aligned}$$

woraus sich für die Lösungen r_{3_1} und r_{3_2} die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_{3_1} &= \frac{5r}{9} + \sqrt{(25r^2 + 9r^2)\frac{1}{81}} = \frac{5r}{9} + 4r9 = r \text{ und} \\ r_{3_2} &= \frac{5r}{9} - 4r9 = \frac{r}{9} \end{aligned}$$

ergeben. Hiernach ist entweder $r_3 = r$ oder $r_3 = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ folgt $r_3 = \frac{r}{9}$. Zusammenfassend gilt also:

$$r_1 = \frac{r}{4}, \quad r_2 = \frac{r}{12} \quad \text{und} \quad r_3 = \frac{r}{9}.$$

Aufgabe 4 - 061014
Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden.

A sagte: "Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter." Nach kurzem Überlegen gratuliert ihm daraufhin B zum Geburtstag.

a) Woher wusste B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?

b) Wann wurde A geboren?

A kann höchstens 27 Jahre alt sein; denn die größte Quersumme, die unter den angegebenen Bedingungen möglich ist, beträgt $1 + 8 + 9 + 9 = 27$. Er ist also nach dem Jahre 1924 geboren. Sein Geburtsjahr sei $1900 + 10a + b$ mit a, b ganz und $2 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 9$. Sein Alter beträgt am 1.1.1953 folglich (laut Voraussetzung) $1 + 9 + a + b$ Jahre.

Daher gilt, falls er am 1.1. geboren ist (Fall 1):

$$\begin{aligned} 1 + 9 + a + b &= 1953 - (1900 + 10a + b), \\ 43 &= 11a + 2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, berücksichtigt man die Bedingungen für a und b, nur von $a = 3$ und $b = 5$ erfüllt. A wurde daher am 1.1.1935 geboren und ist 18 Jahre alt.

Er könnte aber auch an einem anderen Tage geboren sein (Fall 2):

$$\begin{aligned} 1 + 9 + a + b &= 1952 - (1900 + 10a + b), \\ 42 &= 11a + 2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird unter den Bedingungen der Aufgabe von keinem Zahlenpaar (a, b) erfüllt. Die für den Fall 1 angegebene Lösung ist also die einzige.

Lösungen der I. Runde 1966 übernommen von [5]

7.8.2 II. Runde 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061021
Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$w^2 + w = \frac{15}{4} \qquad (1) \quad ; \quad w^2 \cdot w = a \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

$$w_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad w_2 = -\frac{5}{2}$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{und} \qquad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8}$$

Durch Einsetzen findet man, dass die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$. Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

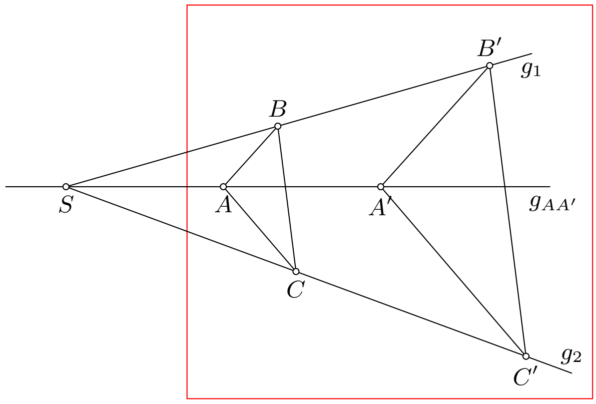
Aufgabe 2 - 061022
Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$). Man beweise, dass dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

Indirekter Beweis:
Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c \neq 0, \pm 1$), dann müsste gelten $q - p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und $q = c \cdot n$ (n ganzzahlig).
Daraus würde folgen $q = c(n - m)$. Dann wären q und p durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

Aufgabe 3 - 061023
Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so dass die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

Analyse: Angenommen, ein Punkt A' ($\neq A$) des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen.
Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'.

Folglich gilt nach dem Strahlensatz $SB : SB' = SA : SA' = SC : SC'$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgendes Konstruktion ergibt:



Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige, von BC verschiedene, Parallele zu BC.
Sie schneide g_1 in B', g_2 in C', Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$ ist die gesuchte Gerade.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$SC : SC' = BC : B'C' \qquad \text{(Strahlensatz)}$$

$$= AC : A'C' \qquad (\text{da } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S.

Diskussion:
Da BC nicht zu g_2 oder G_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt.
Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B \neq B'$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar.
Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, dass B, C, B', C', A' auf den Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, wird hier verzichtet.

Aufgabe 4 - 061024
Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verführt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.

a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenen Oktaeder zueinander?
b) Wie verhalten sich die Volumina von Oktaeder und einbeschriebenen Würfel zueinander?
c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?
d) Wie verhalten sich im zweiten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

Für das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $V_w = a^3$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $O_w = 6a^2$.

Für das Volumen des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $V_o = \frac{1}{3}b^3 \cdot \sqrt{2}$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $O_o = 2b^2 \cdot \sqrt{3}$.

Das Oktaeder setzt sich aus einer vierseitigen Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche des Inhalts b^2 und deren Spiegelbild an der Grundfläche zusammen. Die Höhe ist die halbe Diagonale des Quadrates, also $\frac{b}{2}\sqrt{2}$.
Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Grundseite b. Deren Höhe ist $\frac{b}{2}\sqrt{3}$. Damit ist der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$.

a) Die Länge der Würfelkante sei a. Dann gilt für die Länge der Oktaederkante $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Daher ist

$$V_w = a^3 \qquad \text{und} \qquad V_o = \frac{1}{3}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right) = \frac{1}{6}a^3$$

und mithin $V_w : V_o = 6 : 1$.

b) Die Länge der Oktaederkante sei b. Die Mittelpunkte S der gleichseitigen Dreiecke liegen auf den Seitenhalbierenden. Diese werden von S im Verhältnis $1 : 2$ geteilt. Eine parallele Strecke zu b durch S hat die Länge $\frac{2}{3}b$. Der Schnitt einer Ebene, in der eine Seitenfläche des einbeschriebenen Würfels liegt, mit dem Oktaeder ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}b$.
Die Länge der Quadratseite a ergibt sich aus

$$a^2 = \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{3}b\sqrt{2}$$

Daher gilt:

$$V_o = \frac{1}{3}b^3\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad V_w = \left(\frac{1}{3}b\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2}{27}b^3\sqrt{2}$$

und mithin $V_o : V_w = 9 : 2$.

c) Es ist $O_w = 6a^2$ und $O_o = a^2\sqrt{3}$. Daher ist $O_w : O_o = 2\sqrt{3} : 1$.

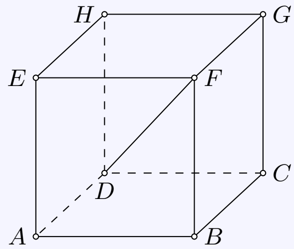
d) Es ist $O_o = 2b^2\sqrt{3}$ und $O_w = \frac{4}{3}b^2$. Daher ist $O_o : O_w = 3\sqrt{3} : 2$.

Lösungen der II. Runde 1966 übernommen aus [5]

7.8.3 III. Runde 1966, Klasse 10

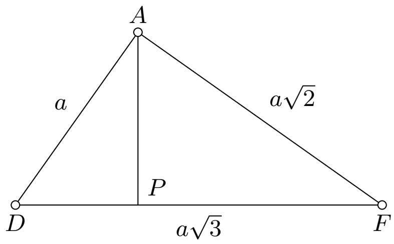
Aufgabe 1 - 061031

Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$. Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A,B,C,G,H,E von der Diagonalen DF!



Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe. Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa ΔADF. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ϵ_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe HP ist daher, wie aus $\Delta ADP \sim \Delta DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$



Aufgabe 2 - 061032

Zeigen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{a+b+c}$$

Wegen $a > 0, b > 0, c > 0$ gilt

$$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \leq 0 \qquad \text{d.h.}$$

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6abc \leq 0$$

Durch Addition von $pabc$ erhält man

$$(bc + ac + ab)(a + b + c+) \leq 9abc$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 3 - 061033

Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:

$$AB = 30, AE = 63, AF = 50, BF = 40, CD = 49, CE = 200, DF = 38$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?

Es ist

$$EA + AF + FD + DC = 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = EC$$

Daraus folgt, dass die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben geraden liegen. A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\angle ABF$. Dies folgt wegen

$$AB^2 + BF^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = AF^2$$

aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras.
Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF. Wegen $\Delta BFQ \sim \Delta AFB$ ist dann

$$BQ = \frac{AB \cdot BF}{AF} = 24 \qquad \text{und} \qquad QF = \frac{BF^2}{AF} = 32$$

Also ist $QD = QF + FD = 70$. Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔBQD nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$BD^2 = BQ^2 + QD^2 = 24^2 + 70^2 = 4(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $BD = 74$. Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

Aufgabe 4 - 061034
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung

$$x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$$

eine in x quadratische Gleichung ist, die
a) eine Doppellösung hat!
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0 \qquad (1)$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanten nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}} = \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2 + 32k - 11}}{2(k-1)}$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0$$

ist. Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese der Fall.

b) Die Gleichung (1) hat genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wenn $-20k^2+32k-11 > 0$ ist. Daraus folgt

$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$$

und schließlich

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{11}{20}\right) < 0$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder $k - \frac{1}{2} > 0$ und gleichzeitig $k - \frac{11}{20} < 0$ ist, also für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$, oder
$k - \frac{1}{2} < 0$ und gleichzeitig $k - \frac{11}{20} > 0$ ist. Es gibt keinen Wert von k, der den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügt.

Also hat die Gleichung (1) für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k voneinander verschiedene reelle Lösungen.

Aufgabe 5 - 061035
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x-1) + \lg\sqrt{x-9} > 1$$

Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x - 9 > 0$ und $2x - 1 > 0$ gilt. Dies ist genau für $x > 9$ der Fall.

Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\lg(2x-1)+\frac{1}{2}\lg(x-9)>1$$
$$\lg(2x-1)(x-9)>2$$
$$\lg(2x^2-19x+9)>\lg 100$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$2x^2-19x+9)>100 \qquad \text{oder} \qquad x2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2}>0$$

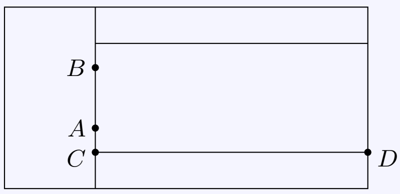
gilt. Wegen $(x-13)(x+\frac{7}{2})=x^2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(x-l3)\left(x+\frac{7}{2}\right)>0 \tag{1}$$

Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn entweder (2) $x-13>0$ und $x+\frac{7}{2}>0$ oder (3) $x-13<0$ und $x+\frac{7}{2}<0$.
Aus (2) folgt $x>13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x<-\frac{7}{2}$ und umgekehrt.
Davon ist wegen $x-9>0$ nur $x>13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x>13$ und nur für diese erfüllt.

Lösungen der Aufgaben 1-5 der III. Runde 1966 entnommen von [5]

Aufgabe 6 - 061036



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen.
Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\angle APB$ zu verstehen. Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

Anmerkung: Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

Sei P auf CD mit $P\neq C$ gegeben. Dann sind die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, sodass sich nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck für die Winkel bei P die Gleichungen $\tan(\angle CPA)=\frac{|AC|}{|CP|}$ und $\tan(\angle CPB)=\frac{|BC|}{|CP|}$ ergeben.
Für den Sichtwinkel auf die Bühne von P aus gilt also

$$\angle APB=\angle CPB-\angle CPA=\arctan\left(\frac{|BC|}{|CP|}\right)-\arctan\left(\frac{|AC|}{|CP|}\right)$$

Der Formelsammlung entnehmen wir für reelle Zahlen x und y mit $xy>-1$ das Additionstheorem $\arctan(x)-\arctan(y)=\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$.
Setzen wir unsere konkreten Verhältnisse aus der Aufgabe für x und y ein (die jeweils positiv sind, ihr Produkt also sicher größer als -1 ist), so erhalten wir

$$\angle APB=\arctan\left(\frac{\frac{|BC|}{|CP|}-\frac{|AC|}{|CP|}}{1+\frac{|BC|}{|CP|}\cdot\frac{|AC|}{|CP|}}\right)=\arctan\left(\frac{|AB|}{|CP|+\frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}}\right)$$

Da die Arcustangens-Funktion streng monoton steigend ist, nimmt sie ihren maximalen Wert genau dann an, wenn auch das Argument maximiert wird. Damit erhalten wir den maximalen Sichtwinkel $\angle APB$ genau dann, wenn das Argument des Arcustangens maximal, also, da dessen Zähler nicht von der Wahl von P abhängt, wenn der Nenner minimal wird. Es verbleibt demnach der Ausdruck $|CP| + \frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}$ zu minimieren.

Für positive reelle Zahlen x und c betrachten wir die Funktion $f(x) = x + \frac{c}{x}$. Setzen wir $x := t \cdot \sqrt{c}$ mit einer positiven reellen Zahl t hier ein, erhalten wir

$$f(t \cdot \sqrt{c}) = t \cdot \sqrt{c} + \frac{c}{t \cdot \sqrt{c}} = \sqrt{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

was genau für $t = 1$, also $x = \sqrt{c}$ minimal wird.
Wenden wir dies auf unseren zu betrachtenden Term $|CP| + \frac{|BC|\cdot|AC|}{|CP|}$ an, so wird dieser minimal – und der Sichtwinkel auf die Bühne maximal – , wenn $|CP| = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ gilt.
Dies beschreibt (da man nur "vor" und nicht auch "hinter" der Bühne sitzen kann) den eindeutigen Platz auf der Seitenloge mit dem besten Blickwinkel auf die Bühne.

Ist die Seitenloge zu kurz, um den so errechneten Punkt P mit größtem Blickwinkel auf die Bühne zu enthalten, d.h., ist $|CD| < \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$, so ist $P = D$ zu wählen, also mit maximaler Entfernung zur Bühne, da der Blickwinkel auf die Bühne, wenn man den Punkt P auf dem von C ausgehenden und durch D verlaufenden Strahl wandern lässt, am Punkt $P = C$ gleich 0 beträgt, dann bis zum Maximum bei $P = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ streng monoton wächst, und abschließend mit gegen unendlich gehender Entfernung $|PC|$ wieder streng monoton auf Null fällt.
Ist also die Seitenloge schon vor Erreichen des Maximums zu Ende, ist genau dieser auf ihr am weitesten von der Bühne entfernte Punkt derjenige mit dem größten Sichtwinkel auf die Bühne.

Aufgabe gelöst von cyrix

Geometrische Lösung:
Behauptung: Falls der Umkreis von ABP die Gerade CD schneidet, haben die Punkte auf der Sekante einen größeren Öffnungswinkel. Beweis: Sei Q ein Punkt auf der Sekante. Betrachte die Verlängerung AQ' der Strecke AQ, so dass Q' auf dem Umkreis liegt. Dann gilt

$$\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQ'B + \sphericalangle Q'BQ > \sphericalangle AQ'B = \sphericalangle APB\ .$$

Für einen Punkt R auf der Halbgerade CD außerhalb des Umkreises gilt analog $\sphericalangle ARB < \sphericalangle APB$. Also ist der Winkel $\sphericalangle APB$ maximal, wenn CD eine Tangente des Umkreises von ABP ist. Aus dem Sekanten-Tangenten-Satz folgt

$$|CP|^2 = |AC| \cdot |BC| \Rightarrow |CP| = \sqrt{|AC| \cdot |BC|}$$

Im Fall $|CD| < |CP|$ liegt die Sekante des Umkreises ABD nicht auf der Strecke CD. Somit ist D der optimale Punkt.

7.8.4 IV. Runde 1966, Klasse 10

Aufgabe 1 - 061041
Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$

durch 30 teilbar.

Die zu untersuchende Zahl ist

$$z = m \cdot n \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$$

(a) Behauptung: z ist durch 2 teilbar.
Beweis: Sind m, n nicht beide ungerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.

(b) Behauptung: z ist durch 3 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 3 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar. Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.

(c) Behauptung: z ist durch 5 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 5 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$; also auch z, durch 5 teilbar.
Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m + n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m,n den Rest 2, die andere den Rest 3 lässt.
Lässt schließlich eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4 die andere den Rest 2 oder 3, so lässt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.

Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt aus (a), (b) und (c), dass z durch 30 teilbar ist.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 061042
Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ϵ und ϵ_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ΔABC, das in der Ebene ϵ liegt.
Die Fußpunkte der Lote von A,B,C auf ϵ_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$.
Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{\Delta A_1B_1C_1}$?

Sei ϕ der Winkel zwischen den beiden Ebenen und g ihre Schnittgerade.
Durch die Orthogonalprojektion werden Strecken in ϵ, die parallel zu g sind, auf kongruente Strecken in ϵ_1 abgebildet.
Für Strecken in ϵ, die senkrecht zu g verlaufen, sind deren Bilder in ϵ_1 dagegen um den Faktor $\cos\phi$ gestreckt (bzw., da $\cos\phi \leq 1$ ist, eher "gestaucht"). Die Bilder von Parallelen zu g in ϵ sind auch weiterhin in ϵ_1 parallel zu g; analog werden auch die zu g in ϵ orthogonalen Geraden wieder auf in ϵ_1 zu g orthogonale Geraden abgebildet.
Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ in ϵ. Ist eine der Seiten des Dreiecks (o.B.d.A. AB) parallel zu g, dann ist ihr Bild (also dann A_1B_1) kongruent zu ihr, während ihre Höhe (h_{AB}) senkrecht zu g verläuft, und so dessen Bild ($h_{A_1B_1}$) eine um den Faktor $\cos\phi$ gestreckte Länge besitzt. Da die Bilder dieser beiden Strecken auch in der Zielebene senkrecht aufeinander stehen, berechnet sich der Flächeninhalt des Bilddreiecks zu

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot |A_1B_1| \cdot |h_{A_1B_1}| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \cos\phi \cdot h_{AB} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Ist dagegen keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ parallel zu g, dann schneidet (genau) eine der Parallelen in ϵ zu g durch die drei Eckpunkte die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite in einem inneren Punkt.

Sei dies o.B.d.A. die Parallele durch A; und deren Schnittpunkt mit BC heiße D. Dann ist AD parallel zu g und die Höhen von B und C auf AD orthogonal zu g, sodass sich auf diese Teildreiecke die eben gemachte Überlegung jeweils einzeln anwenden lässt, also (mit D_1 als Bildpunkt von D bezüglich der Orthognalprojektion)

$$I_{\triangle A_1B_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABD} \qquad \text{und} \qquad I_{\triangle A_1C_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ACD}$$

gilt.
Abschließend ist festzustellen, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sich aus den jeweiligen zwei Teildreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ bzw. entsprechend $\triangle A_1B_1D_1$ und $\triangle A_1C_1D_1$ zusammensetzen, sich ihre Flächeninhalte also aus der Summe derer der jeweiligen beiden Teildreiecke ergibt und damit in jedem Fall gilt:

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 061043
In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ΔABC; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR so, dass P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

Anita glaubt, dass die Aufgabe nicht für jedes Dreieck ΔABC lösbar ist.
Berthold ist der Meinung, dass es für jedes Dreieck ΔABC genau eine Lösung gibt.
Claus nimmt an, für jedes Dreieck ΔABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke ΔPQR, die Lösung sind, sind einander kongruent.
Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck ΔABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck ΔABC mit der Eigenschaft, dass nicht alle Dreiecke ΔPQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

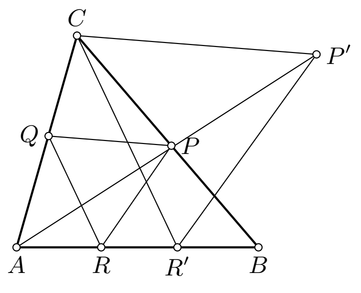
Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Wir zeigen, dass die Meinung und Behauptung von Dagmar richtig und daher die zu ihnen in Widerspruch stehenden Meinungen der drei anderen falsch sind.
Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass im gegebenen Dreieck (Bild)

$$|\angle BCA| \leq |\angle ABC| \leq |\angle CAB|$$

insbesondere also gilt

$$|\angle BCA| \leq 60^\circ \qquad \text{und} \qquad |\angle CAB| \geq 60^\circ$$



Unter diesen Bedingungen sei R' ein beliebiger (innerer) Punkt von AB. P' sei derjenige Punkt, für den $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist und der auf der anderen Seite von $g_{CR'}$ wie A liegt. Dann liegt P' auf der anderen Seite von g_{BC} wie A, weil $|\angle BCA| \leq 60^\circ$ und $|\angle P'CA| = |\angle P'CR'| + |\angle R'CA| > 60^\circ$ gilt.

Außerdem ist $|\angle P'CA| \leq 120^\circ$ und $|\angle P'R'A| \leq 60^\circ + |\angle CR'A| < 180^\circ$, so dass $AR'P'C$ ein konvexes Viereck ist und insbesondere R' und C auf verschiedenen Seiten von $g_{AP'}$ liegen.
Da R' Punkt von AB ist, liegt B auf derselben Seite von $g_{AP'}$ wie R', so dass die Strecken BC und AP' einen Schnittpunkt haben, der mit P bezeichnet werde. Ist nun Q derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch C, für den

$$AQ : AC = AP : AP' \tag{1}$$

gilt, und R derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch B, für den

$$AR : AB = AP : AP' \tag{2}$$

gilt, so ist, da wegen $P \in AP'$ sicher $AP : AP' < 1$ ausfällt, Q innerer Punkt von AC und R innerer Punkt von AB.
Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt aufgrund von (1)

$$g_{PQ} \parallel g_{P'C} \quad \text{und aufgrund von (2)} \quad g_{PR} \parallel g_{P'R'}$$

Daher folgt aus dem 2. Strahlensatz, dass die drei Beziehungen

$$PQ : P'C = AP : AP' \qquad ; \qquad PR : P'R' = AP : AP'$$

$$\angle QPR = \angle CP'R'$$

bestehen. Da $\triangle P'C'R'$ gleichseitig ist, folgt somit

$$PQ = PR \qquad \text{und} \qquad \angle QPR = 60°$$

so dass $\triangle PQR$ gleichseitig ist.

Hieraus ergibt sich weiter, dass $QR \parallel CR'$ ist, so dass keine zwei der gleichseitigen Dreiecke, die zu verschiedenen Lagen von R' auf AB gehören, zusammenfallen können. Es gibt also zu jedem Dreieck ABC unendlich viele verschiedene gleichseitige Dreiecke, die der im Zirkel gestellten Aufgabe entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es bei mindestens einem Dreieck ABC unter diesen gleichseitigen Dreiecken mindestens zwei zueinander inkongruente gibt. Dazu wählen wir $\triangle ABC$ gleichseitig. Sind P_1, Q_1, R_1 die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB, so ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig and es gilt

$$P_1Q_1 = \frac{1}{2}AB$$

Sind P_2, Q_2, R_2 die Mittelpunkte von P_1C, Q_1A bzw. R_1B, so ist auch $\triangle P_2Q_2R_2$ gleichseitig und es gilt nach dem Kosinussatz

$$P_2Q_2 = \sqrt{BP_2^2 + BQ_2^2 - 2 \cdot BP_2 \cdot BQ_2 \cdot \cos 60°} = AB\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= AB\frac{\sqrt{7}}{4} > P_1Q_1$$

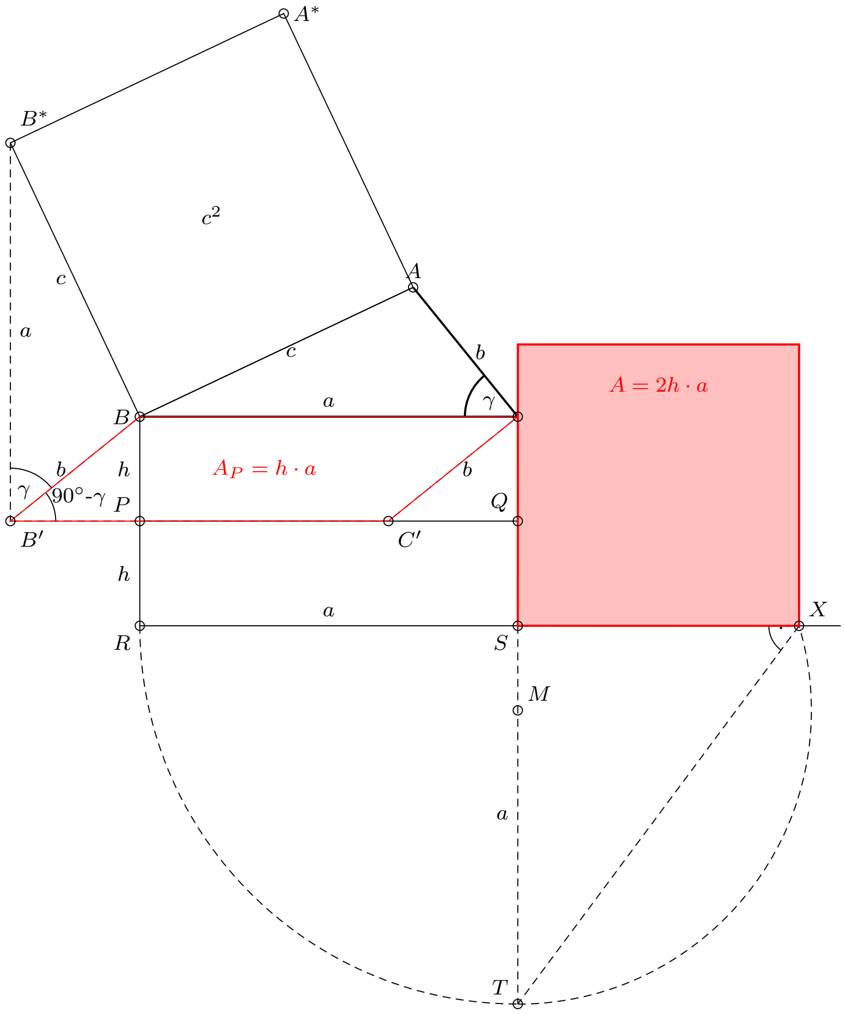
so dass $\triangle P_1Q_1R_1$ und $\triangle P_2Q_2R_2$ infolge unterschiedlicher Seitenlängen inkongruente gleichseitige Dreiecke sind.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 061044
Gegeben sei ein Dreieck ΔABC; wie üblich sei $BC = a$, $CA = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\angle ACB$.
Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

1. Errichte das Quadrat über $|AB| = c$.
2. Ergänze an der Quadratseite BB^* das zum Dreieck ABC kongruente Dreieck $B'BB^*$.
3. Bilde das Parallelogramm $B'C'CB$ aus den Seiten $|BB'|$ und $|BC|$; dieses hat den Flächeninhalt $A_P = a \cdot h = ab\sin(90° - \gamma) = ab\cos(\gamma)$.
4. Bilde aus dem Parallelogramm das flächengleiche Rechteck $PQCB$; verdopple das Rechteck zum Rechteck $RSCB$; dieses hat den Flächeninhalt $A = 2h \cdot a$.
5. Verlängere die Rechteckseite $|CS|$ um $a = |RS|$, Endpunkt sei T.

6. Errichte über der Strecke $|CT|$ den Thaleskreis (Mittelpunkt sei M).
7. Bestimme den Schnittpunkt derjenigen Geraden durch $|RS|$ mit dem Thaleskreis; der Schnittpunkt sei X.
8. Dann gilt für das rechtwinklige Dreieck CTX nach dem Höhensatz: Das Rechteck aus den Höhenabschnitten ($2h$ und a) der zur Hypotenuse gehörenden Höhe ist so groß wie das Quadrat über der Höhe; mit anderen Worten: $A = 2h \cdot a = 2b\cos(\gamma) \cdot a = 2ab\cos(\gamma)$.



Aufgabe 5 - 061045
Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung genügen:

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}$$

Multiplikation der Gleichung mit $\sqrt{a+x}$ überführt diese in (die wegen $a + x \neq 0$ äquivalente Gleichung) $a + x - |a| = \sqrt{(2a + x) \cdot (a + x)}$.

1. Fall: $a > 0$. Dann ist $|a| = a$ und man erhält durch Quadrieren $x^2 = x^2 + 3ax + 2a^2$ bzw. $x = -\frac{2}{3} \cdot a$. Damit erhält man $a + x = \frac{1}{3} \cdot a$ bzw.

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{3}a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{3a} = \sqrt{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) < 0 \leq \sqrt{2a-x}$$

also einen Widerspruch zur Ausgangsgleichung, sodass es in diesem Fall keine Lösungen gibt.

2. Fall: $a \leq 0$. Dann ist $|a| = -a$, sodass die Gleichung übergeht in $2a + x = \sqrt{(2a + x) \cdot (a + x)}$.

   Fall 2.1: $2a + x = 0$. (Wegen $a + x \neq 0$ ist in diesem Fall $a \neq 0$, denn sonst würde aus $2a + x = 0$ nach Subtraktion von $a = 0$ sofort auch $a+x = 0$ folgen.) Dann ist $x = -2a$ und $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a+x}$, sodass dies Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

   Fall 2.2: Es ist $2a + x \neq 0$, also auch $\sqrt{2a+x} \neq 0$, sodass wir dadurch dividieren können. Damit erhalten wir die Gleichung $\sqrt{2a+x} = \sqrt{a+x}$ bzw. nach Quadrieren $2a + x = a + x$, also $a = 0$. Tatsächlich vereinfacht sich aber in diesem Fall die Ausgangsgleichung zu $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{0}{x}} = \sqrt{x}$, was für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Zusammenfassung: Für positive a hat die Gleichung keine Lösung, für negative a ist jeweils $x = -2a$ die einzige Lösung und für $a = 0$ erfüllt jede positive reelle Zahl x die Gleichung.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 061046

Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100$$

an! Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

Sei $x = 0$ dann sind für y möglich: $-100...100 \Rightarrow$ Anzahl: 201
Sei $x = -1$ oder 1 dann sind für y möglich: $-99...99 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 199$
Sei $x = -2$ oder 2 dann sind für y möglich: $-98...98 \Rightarrow$ Anzahl $2 \cdot 197$
usw. bis
Sei $x = -99$ oder 99 dann sind für y möglich $-1...1 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 3$
Sei $x = -100$ oder 100 dann sind für y möglich: $0 \Rightarrow$ Anzahl : $2 \cdot 1$

$$2\sum_{i=1}^{100}(2i - 1) + 201 = 2 \cdot 100^2 + 201 = 20201$$

Lösung von Matthias Lösche

7.9 VII. Olympiade 1967

7.9.1 I. Runde 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071011
Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, dass 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist.

Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: "Ich kann sogar beweisen, dass keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens lässt sich auch beweisen, dass unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist."

Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar fasst dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$).

Dann gilt $z = 100a + a = 101a$.
Das heißt, es gilt $101|z$. Nur für $a = 1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101.

Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101|z$ auch $101^2|z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müsste.

Aufgabe 2 - 071012
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Seiten folgende Längen (in cm) haben: $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$. Die Seite $\overline{AB}$ ist durch einen Punkt T so zu teilen, dass die Umfänge der Dreiecke $\triangle ATC$ und $\triangle TBC$ gleichlang sind.

Der Flächeninhalt (in cm^2) des Dreiecks $\triangle TBC$ ist zu berechnen!

Alle Zahlenangaben verstehen sich in *cm*.

Zunächst kann mit der Umkehrung vom Satz des Pythagoras gezeigt werden, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt:

Es gilt: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = \overline{AB}^2$ und somit auch, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $\angle ACB$ ist.

Für die Umfänge der Dreiecke ergibt sich jeweils:

(1) $u_{\triangle ATC} = \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT}$

(2) $u_{\triangle BTC} = \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT}$

Bei gleichen Umfängen der Teildreiecke und Zusammensetzung von $\overline{AB}$ aus $\overline{AT}$ und $\overline{BT}$, ergibt sich für $\overline{BT}$:

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT} &= \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT} \\ \overline{AC} + \overline{AT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{BT} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes kann auf 2 verschiedene Arten berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ \overline{AB} \cdot h &= \overline{BC} \cdot \overline{AC} \\ h &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad (4) \end{aligned}$$

Nun ergibt sich für den Flächeninhalt des Teildreiecks $\triangle TBC$ mit (1) und (2):

$$\begin{aligned} A_{\triangle TBC} &= \frac{1}{2}\cdot \overline{BT}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}\right)\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{1}{4}\cdot(13+5-12)\cdot\frac{12\cdot 5}{13}\approx 6{,}9 \end{aligned}$$

Das Teildreieck $\triangle TBC$ hat somit einen Flächeninhalt von ungefähr $6{,}9 cm^2$.

Aufgabe 3 - 071013
Ein Mathematiker hat den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wusste er allerdings noch, dass sie eine durch 13 teilbare dreiziffrige Zahl war und dass sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.

Geben Sie alle diese Zahlen an!

Laut Aufgabe gilt:

$$100a+10b+c=13n \quad (a,\, b,\, c,\, n \text{ ganz}) \tag{1}$$

$$0<a\leq 9;\quad 0<b=\frac{a+c}{2}\leq 9;\quad 0\leq c\leq 9;\quad n>0. \tag{2}$$

Daraus folgt:

$$c=2b-a \tag{3}$$

sowie $99a+12b=13n$

$$b=\frac{13n-99a}{12}=n-8a+\frac{n-3a}{12}. \tag{4}$$

Mithin muss $n-3a=12m$ (m ganz) gelten, woraus man

$$n=12m+3a \tag{5}$$

erhält. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$b=13m-5a. \tag{6}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$c=26m-11a \tag{7}$$

und aus (5) und (6) $16a+b+c=39m$, woraus man unter Berücksichtigung von (1) $17\leq 39m\leq 162$ erhält. Daraus folgt

$$1\leq m\leq 4. \tag{8}$$

Da $m>0$ und ganzzahlig sein muss, ergibt sich aus (6) und (1)

$$11a\leq 26m\leq 11a+9. \tag{9}$$

Mit Hilfe von (7) und (8) ermittelt man aus (5) und (2) als einzig mögliche Zahlen 234, 468, 741 und 975, da jeder Wert von m in (7) genau einen Wert für a in (8) liefert. Da jede dieser vier Zahlen allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie auch Lösung.

Aufgabe 4 - 071014
Herr X stellt am 30.05.1967 fest, dass er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazu setzt. Außerdem bemerkt er, daß die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist.

Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?

Es bezeichne $ab.cd.efgh$ das Geburtsdatum und ik das Alter von Herrn X. Es seien also
a und b die Ziffern für den Tag, c und d die Ziffern für den Monat, e, f, g und h die Ziffern für das Jahr und i und k die Ziffern für das Alter.

Dann muss gelten:

$e = 1$, und f kann nur 9 oder 8 sein, da die Anzahl der Lebensjahre von Herrn X zweistellig sein muss und er demnach nach 1799 geboren wurde.
$c = 0$, da es nur 12 Monate gibt und die 1 bereits vergeben ist.
$a = 2$, da ein Monat höchstens 31 Tage haben kann, die 0 und die 1 vergeben sind, und somit 30 und 31 auch nicht in Frage kommen.

Fall 1: Sei $f = 9$
Dann muss gelten

A) $10g + h + 10i + k = 66$, falls Herr X nach dem 30.5. Geburtstag hat,

B) $10g + h + 10i + k = 67$ andernfalls.

Aus A) folgt, dass entweder

a) $g + i = 6$ und $h + k = 6$ oder

b) $g + i = 5$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus B) folgt, dass entweder

c) $g + i = 6$ und $h + k = 7$ oder

d) $g + i = 5$ und $h + k = 17$ gilt.

Aus den noch verbliebenen Ziffern ist keins der vier Gleichungspaare realisierbar. Die Annahme $f = 9$ ist falsch.

Fall 2: Sei $f = 8$.
Dann gilt, ähnlich wie oben,

C) $10g + h + 10i + k = 166$ oder

D) $10g + h + 10i + k = 167$.

Aus C) folgt, dass entweder

e) $g + i = 16$ und $h + k = 6$ oder

f) $g + i = 15$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus D) folgt, dass entweder

g) $g + i = 16$ und $h + k = 7$ oder

h) $g + i = 15$ und $h + k = 17$ gilt.

Mit den noch vorhandenen Ziffern ist nur g) realisierbar.Folgende vier Verteilungen sind möglich:
$g = 9$ und $i = 7$, $h = 4$ und $k = 3$, $g = 7$ und $i = 9$ und $h = 3$ und $k = 4$.

Das Alter von Herrn X kann damit 73, 74, 93 oder 94 Jahre sein. Von diesen Zahlen ist nur 73 Primzahl. Es ergibt sich damit folgende Verteilung:

$$f = 8, \quad i = 7, \quad k = 3, \quad g = 9 \quad \text{und} \quad h = 4.$$

Für b und d stehen nur noch die Ziffern 5 und 6 zur Verfügung. Aus g) folgt, weil es aus D) hervorgegangen ist, dass Herr X vor dem 30.5. Geburtstag hatte. Damit ist $d = 5$ und $b = 6$.

Herr X wurde am 26.05.1894 geboren und ist 73 Jahre alt.

Lösungen der I. Runde 1967 übernommen von [5]

7.9.2 II. Runde 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071021
In

$$\begin{array}{cccccc} & F & U & E & N & F \\ + & & Z & W & E & I \\ \hline S & I & E & B & E & N \end{array}$$

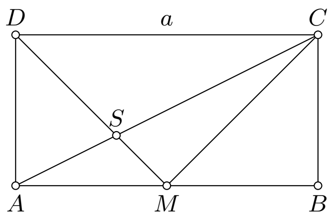
sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wie viele Lösungen die Aufgabe hat!

Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S, B sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S \neq 0$ und $S = 1$, da $U + Z < 20$ ist und $F + 1 \leq 10$ sein muss.
(2) $F = 9$, da $F + 1 \geq 10$ sein muss.
Daraus folgt (3) $F + 1 = 10$ und daraus wiederum (4) $I = 0$.
Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, dass $F + I = N$, also wegen (4) $F = N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muss, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d.h. die Aufgabe hat keine Lösung.

Aufgabe 2 - 071022
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit Mund A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks ΔSMC!



Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks $ABCD$ mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $I(ABGB) = a \cdot b$.
Ferner gilt $\triangle ASM \sim \triangle DSC$, da $\angle ASM \cong \angle DSC$ (Scheitelwinkel) und $\angle SAM \cong \angle DCS$ (Wechselwinkel) sind.

Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt $AM : CD = 1 : 2$. Ferner ist $I(\triangle AMC) = \frac{1}{4}a \cdot b$, und wegen $SM : SD = 1 : 2$ (Strahlensatz) gilt

$$I(\triangle AMS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{12}a \cdot b$$

Somit erhält man

$$I(\triangle SMC) = I(\triangle AMC) - I(\triangle AMS) = \frac{1}{4}a \cdot b - \frac{1}{12}a \cdot b = \frac{1}{6}a \cdot b$$

Mithin gilt $I(ABCD) : I(\triangle SMC) = 6 : 1$.

Aufgabe 3 - 071023
Beweisen Sie, dass für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

Für $n \geq 2$ gilt

$$2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}$$

Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Fall $n \geq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

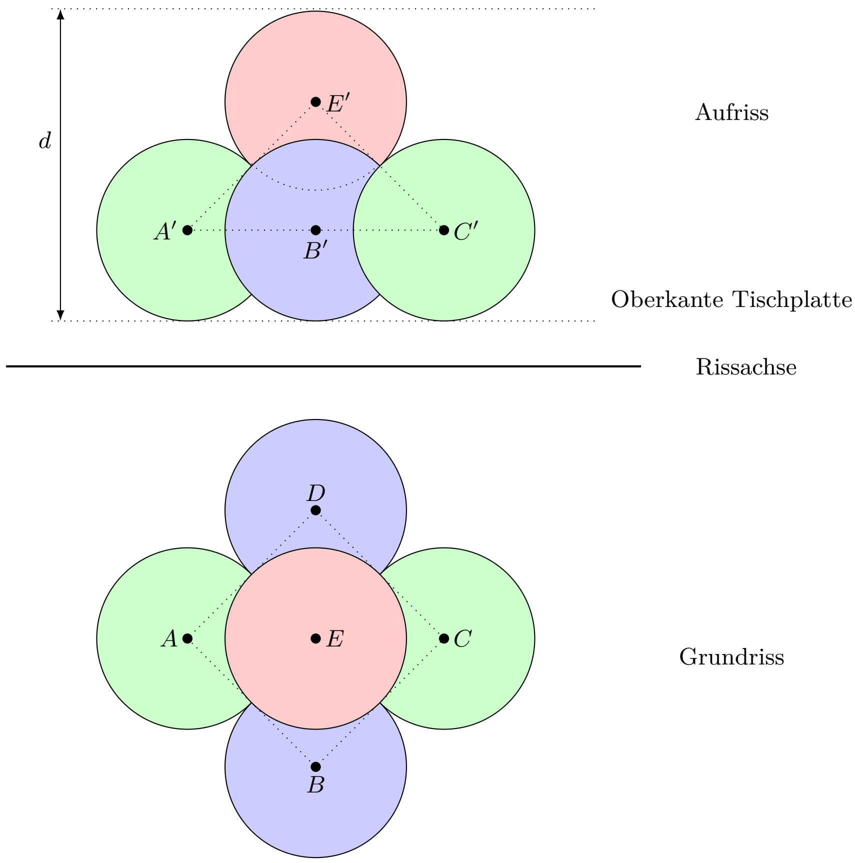
Aufgabe 4 - 071024
Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, dass ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden.
Auf die entstandene mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt.
Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischplatte an!

Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat $ABCD$ (Abbildung Grundriss) hat die Seitenlänge $2r$ und die Diagonalenlänge $2r\sqrt{2}$.
Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale AC enthaltender Schnitt ergibt das Aufrissbild.
Da das Dreieck $\Delta A'C'E'$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen

$$A'C' = AC = 2r\sqrt{2}; \qquad A'E' = AE = C'E' = CE = 2r$$

hat, so ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von E auf AC hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$.
Der gesuchte Abstand d beträgt daher

$$d = r + r\sqrt{2} + r = r(2+\sqrt{2})$$



Lösungen der II. Runde 1967 übernommen von [5]

7.9.3 III. Runde 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071031
Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ und o.B.d.A. die Winkelhalbierende durch B, welche die Seite AC im Punkt W_B schneide. O.B.d.A. betrachten wir das Teildreieck $\triangle ABW_B$.
Dessen Innenwinkel bei W_B sei mit ϕ bezeichnet; die Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$ bei A und B, wie üblich, mit α und β. Dann ist, da BW_B den Innenwinkel β halbiert, also $\angle W_BBA = \frac{\beta}{2}$, und aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck ABW_B schließlich $\phi = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist

$$\alpha < 180° - \beta \qquad \text{, also} \qquad \phi > 180° - (180° - \beta) - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Da in einem Dreieck dem größeren Innenwinkel auch immer die größere Seite gegenüberliegt, ist $|AB| > |AW_B|$, was zu beweisen war.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 071032
Es ist zu beweisen, dass $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1, b \neq 1$ ist!

Es ist $\log_a b$ diejenige reelle Zahl x, für die $a^x = b$ gilt. Analog ist $\log_b c$ diejenige reelle Zahl y, für die $b^y = c$ gilt. Dann ist $c = b^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y}$, also $\log_a c = x \cdot y = \log_a b \cdot \log_b c$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 071033
Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika:

"Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten.
Ich weiß zwar noch, dass alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauten."
"Welche Maßzahlen meintest du, als du 'alle Maßzahlen' sagtest?"
"Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide."
"Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren z.B. die Längen in cm der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?"
"Ja so war es."

Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?

Wir gehen von einer geraden quadratischen Pyramide aus, da sonst die Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist.
Sei $a \neq 0$ die Maßzahl der Kantenlänge der Grundfläche und $h \neq 0$ die der Höhe der Pyramide. Dann ist deren Volumen V gleich $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und ihr Oberflächeninhalt

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Aus $V = A$ folgt damit $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$ bzw. nach Division durch $\frac{a}{3}$ und Umsortieren $a \cdot (h - 3) = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$. Quadrieren liefert

$$a^2 \cdot (h-3)^2 = 9 \cdot (4h^2 + a^2) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 \cdot (h^2 - 6h + 9) = 36h^2 + 9a^2$$

was nach Subtraktion von $9a^2$ und Division durch h die Gleichung $a^2 \cdot h - 6a^2 = 36h$, also $h \cdot (a^2 - 36) = 6a^2$ und damit $h = \frac{6a^2}{a^2-36}$ liefert.
Da h eine natürliche Zahl ist, muss der Nenner $a^2 - 36$ Teiler des Zählers $6a^2$ sein. Also muss auch $a^2 - 36$ ein Teiler von $6a^2 - 6 \cdot (a^2 - 36) = 216$ sein.

Für jeden Teiler t von 216, der durch 2, aber nicht 4 teilbar ist, wäre $t + 36$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also keine Quadratzahl. Analog können wir auch die durch drei, aber nicht 9 teilbaren Teiler t von 216 ausschließen, da auch dann $t + 36$ nicht die Quadratzahl a^2 ergeben kann.
Es verbleiben die Teiler 1, 9, 27, 4, 36, 108, 8, 72 und 216. Von diesen erfüllt nur $t = 108$, dass $t + 36$ eine Quadratzahl ergibt, nämlich $t + 36 = 144 = 12^2 = a^2$. Also ist

$$a = 12 \qquad \text{und} \qquad h = \frac{6a^2}{a^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12^2}{12^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12}{12 - 3} = 8$$

Tatsächlich ist für diese Werte der Länge der Grundseite $a = 12$ und Höhe der Pyramide $h = 8$ das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 384$ und die Oberfläche

$$A = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2} = 144 + 12 \cdot \sqrt{256 + 144} = 144 + 12 \cdot 20 = 384 = V$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 071034
Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leq a_i \leq 10$ gilt!

Die Gleichung ist offenbar äquivalent zu $2(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = a_3^2$.
Da 2 eine Primzahl ist, folgt aus $2|a_3^2$ direkt $2|a_3$, sodass die rechte Seite der Gleichung durch 4 teilbar ist. Also muss auch $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$ gerade sein, und damit mindestens einer dieser beiden Faktoren. Da nur beide zugleich (oder keiner von beiden) gerade sein können, ist die rechte Seite der Gleichung also sogar durch 8 teilbar, sodass aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung a_3 zumindest durch 4 teilbar sein muss.
Es verbleiben also zwei Fälle: $a_3 = 4$ und $a_3 = 8$.

1. Fall: $a_3 = 4$.
Dann ist also $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 8$ und, da beide Faktoren gerade sind, wegen $a_1 + a_2 > 0$ auch $a_1 - a_2 > 0$ und schließlich $a_1 + a_2 > a_1 - a_2$, also $a_1 + a_2 = 4$ sowie $a_1 - a_2 = 2$. Es ergibt sich als Lösungstripel $(a_1, a_2, a_3) = (3,1,4)$, was durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auch bestätigt wird.

2. Fall: $a_3 = 8$.
Dann ist $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 32$. Nun ergeben sich folgende mögliche Zerlegungen in zwei positive und gerade Faktoren:
*) $a_1 + a_2 = 16$ und $a_1 - a_2 = 2$, was auf $a_1 = 9$ und $a_2 = 7$ führt.
*) $a_1 + a_2 = 8$ und $a_1 - a_2 = 4$, was dan auf $a_1 = 6$ und $a_2 = 2$ führt.
Beide mögliche Lösungen werden durch die Probe bestätigt.

Zusammenfassung: Im zu betrachtenden Bereich gibt es genau drei Lösungstripel, nämlich (3,1,4), (6,2,8) und (9,7,8).

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 071035
Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung
$x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?

Die Diskriminante des Polynoms $x^2 + ax + a - 2$ ist $a^2 - 4(a - 2) = (a - 2)^2 + 4$ ist für jedes reelle a positiv, also gibt es auch für jedes reelle a genau zwei Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ und diese sind keine doppelten Nullstellen.

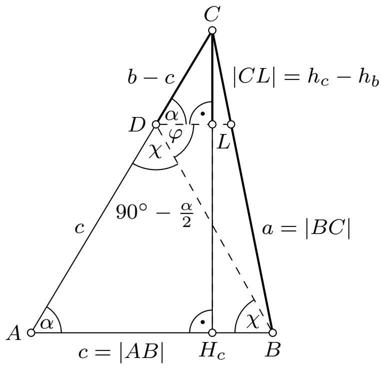
Nach Vieta gilt $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 x_2 = a - 2$. Somit ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-2) = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3$$

Die Summe der Quadrate der Lösungen wird daher genau dann minimal, wenn $a = 1$.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 071036
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm!
Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

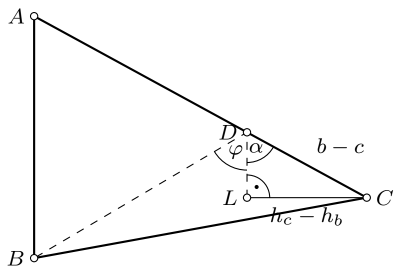


Planfigur und Konstruktion
Trägt man auf der Seite $b = |AC|$ die Strecke c ab, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b - c = |DC|$.
Legt man durch D eine Parallele zu $|AB|$ und fällt von C das Lot auf die Parallele, Lotfußpunkt sei L, dann erhält man eine Strecke $|CL| = h_c - h_b$, die gleich der gegebenen Strecke $h_c - h_b$ ist.
Beweis: Nach der Strahlensatzfigur mit Scheitelpunkt C ist

$$\frac{|CL|}{h_c} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \Leftrightarrow |CL| = h_c - \frac{ch_c}{b} = h_c - \frac{bh_b}{b} = h_c - h_b$$

da nach der Flächenformel $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ gilt.

Damit ist mit DLC ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, mit der Hypotenuse $b - c$ und einer Kathete $h_c - h_b$.
Mit ABD ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A und den Schenkeln c und entsprechend dem Basiswinkel $\chi = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ gegebenen.
Für den Konstruktionswinkel φ bei D ist $\varphi = 180° - \alpha - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, also $\varphi = \chi$. Die Ecke B liegt also auf einer Geraden, die den Supplementwinkel $\sphericalangle ADL$ von $\alpha = \sphericalangle CDL$ halbiert sowie auf einem Kreis $(C{,}a)$ beschrieben um C vom Radius a.
Die Ecke A liegt auf einer Parallelen zu $|DK|$ durch B sowie auf derjenigen Geraden durch $|CD|$.



Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks DLC.
(1a) Lege durch $h_c - h_b = |CL|$ die Punkte C und L fest.
(1b) Errichte eine Senkrechte zu $|CL|$ in L.
Beschreibe einen Kreis $(C{,}b - c)$ um C vom Radius $b - c$. Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Punkt D.
(2) Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks ABD.
(2a) Lege eine Gerade durch $|CD|$ und halbiere den Supplementwinkel von $\alpha = \sphericalangle LDC$, um den Winkel φ zu erhalten.
(2b) Lege eine Gerade durch D so, dass sie mit $|LD|$ den Konstruktionswinkel $\varphi = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ einschließt.
Beschreibe einen Kreis $(C{,}a)$ um C vom Radius a. Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden ist die Ecke B.
(2c) Lege eine Parallele zu $|DL|$ durch B.
Schnittpunkt der Parallelen mit derjenigen Geraden durch $|CD|$ ist die Ecke A.

Bedingungen für die Konstruktion
Man liest aus der Konstruktionsskizze, dass $b - c > h_c - h_b$ sein muss, da $b - c$ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DLC ist.
Ferner muss $a > b - c$ sein, da der Punkt B sonst innerhalb des Dreiecks DLC liegt.

7.9.4 IV. Runde 1967, Klasse 10

Aufgabe 1 - 071041
Welchen Rest lässt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Wenn a eine solche natürliche Zahl ist, dass $a^{100}-2$ und $a^{101}-69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101} - 2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit $a^{101} - 2a = 73r$ und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit $a^{101} - 69 = 73s$.
Daraus folgt $2a - 69 = 73(s - r)$, also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a = 69 + 73t \to 2a = 69 + 73 + 73(t - 1) \to 2a = 142 + 73(t - 1)$$

Da $2a - 69$ ungerade ist, muss auch t eine ungerade Zahl sein. Dann ist $t - 1$ gerade, also von der Form $t - 1 = 2n$, n ganz, und es gilt

$$2a = 142 + 2n \cdot 73 \qquad \text{also} \qquad a = 71 + 73n$$

Als Rest, den a bei Division durch 73 lässt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.
Zusätzlich wird noch gezeigt, dass 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d.h., dass mindestens eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen. Es ist:

$$\begin{aligned} 71 &\equiv -2 \pmod{73} \\ 71^9 \equiv (-2)^9 = -512^2 = -7 \cdot 73 - 1 &\equiv -1 \pmod{73} \\ 71^{99} &\equiv 2 \pmod{73} \\ 71^{100} \equiv -4 &\equiv 69 \pmod{73} \end{aligned}$$

Wenn allgemeiner $a \equiv 71 \pmod{73}$ ist, also $a \equiv -2 \pmod{73}$ ist, gilt

$$a^{100} \equiv 2 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} \equiv -4 \pmod{73}$$

Folglich ist

$$a^{100} - 2 \equiv 2 - 2 = 0 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} - 69 \equiv -4 - (-4) = 0 \pmod{73}$$

Also genügen genau alle natürlichen Zahlen $a \equiv -2 \pmod{73}$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 071042
Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, dass er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.
Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \tag{1}$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wie berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

Fall 1: Es sei $h \geq \frac{a}{2}$.

Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kanten von Pyramide und Behälter.
Wie legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AQB im Basisquadrat der Pyramide.
Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $SM = SM' = s$; $MM' = a$,
Die Höhe SP dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h, die Seiten SM, SM' sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide.
Wegen $h \geq \frac{a}{2}$ gilt $\angle MSP \leq 45°$, also $\angle MSM' \leq 90°$. Hieraus folgt $MQ \leq MS = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = M'Q$, dann gilt:

$$V_2 = a \cdot s \cdot x \tag{2}$$

Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

$$x = \frac{ah}{s} \tag{3}$$

Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

$$V_2 = a^2 h = V_1$$

d.h., die Behältervolumina sind für $h \geq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

2. Fall: Es sei $h < \frac{a}{2}$.
Die Schnittfigur ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck. Wie im Fall 1 fällen wir von M' der Lot $M'Q$ auf die Verbindungsstrecke der Punkt M und S.
Wegen $\angle MSM' > 90°$ ist $s_1 = MQYMS = s$. Für der Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = M'Q$):

$$V_2 = as_1x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{ah}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s}$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$, gilt also $V_2 > V1$.
Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 071043
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Es ist zu zeigen, dass die Diskriminante des Polynoms $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ negativ ist, also dass

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$$

gilt. Nach Kosinussatz gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ für den Winkel α zwischen den Dreiecksseiten b,c. Somit ist

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (2bc\cos\alpha)^2 - 4b^2c^2 = 4b^2c^2(\cos^2\alpha - 1) = -4b^2c^2\sin^2\alpha < 0.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 071044
Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel!
Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Wir bezeichnen die Winkel und Seiten des Dreiecks auf kanonische Weise, sodass die Hypotenuse c, die Katheten a und b sowie die ihnen gegenüberliegenden Innenwinkel mit α bzw. β lautet.

Nach der Definition der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck gilt $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und analog

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \text{also} \qquad \sin\alpha + \sin\beta = \frac{a+b}{c}$$

bzw.

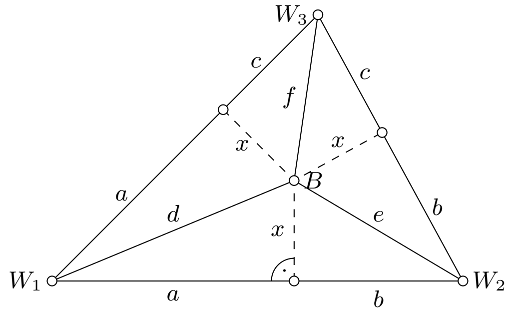
$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\cdot(2ab) = \frac{1}{4}\cdot((a+b)^2 - (a^2+b^2)) = \frac{1}{4}\cdot\left((\sin\alpha+\sin\beta)^2c^2 - c^2\right) =$$

$$= \frac{c^2}{4}\cdot((\sin\alpha+\sin\beta)^2 - 1)$$

Für feste Hypotenusenlänge c kann sich, damit das Dreieck bei C einen rechten Winkel besitzt, nach dem Satz des Thales der Punkt C nur auf einem Kreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat, bewegen. Damit ist die Höhe auf c nach unten durch 0 und nach oben durch den Umkreisradius, also $\frac{c}{2}$ beschränkt, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks im Intervall $\left(0; \frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2}\right]$ aus Stetigkeitsgründen jeden Wert annehmen kann, sodass $0 < (\sin\alpha+\sin\beta)^2 - 1 \leq 1$ gilt und damit die Sinussumme also genau die Werte aus dem Intervall $(1; \sqrt{2}]$ annimmt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 071045
Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1,W_2,W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände.
W_1,W_2,W_3 liegen nicht auf derselben Geraden.
Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken W_1W_2, W_2W_3 und W_3W_1) verbunden. Für die Strecken gilt: $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.
Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand.
Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden.
Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.
Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!



Der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, ist dessen Winkelhalbierende. Infolgedessen ist B der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle W_1W_2W_3$ (somit der Inkreismittelpunkt).
Der Radius des Inkreises sei x, die in der Abbildung eingezeichneten Berührungsradien bestimmen Abschnitte auf den Dreiecksseiten, die wegen der Kongruenz der Teildreiecke (zwei Seiten und zwei Winkel stimmen überein) paarweise die gleiche Länge haben.
Die in der Aufgabenstellung gegebene Relation zwischen den Seitenlängen des $\triangle W_1W_2W_3$ bedeutet

$$a+b > a+c > b+c \qquad \text{also} \qquad a > b > c$$

Jede zulässige Fahrtroute führt von B zu einer Werkhalle und hat dort zwei mögliche Fortsetzungen. Das ergibt insgesamt sechs Routen. Drei von ihnen unterscheiden sich nur in der Orientierung von der anderen drei:

I: $B - W_1 - W_2 - W_3 - B$ (gleiche Länge: $B - W_3 - W_2 - W_1 - B$)
II: $B - W_2 - W_1 - W_3 - B$ (gleiche Länge: $B - W_3 - W_1 - W_2 - B$)
III: $B - W_1 - W_3 - W_2 - B$ (gleiche Länge: $B - W_2 - W_3 - W_1 - B$)

Die entsprechenden Längen sind:

$$\begin{aligned} I :& d + a + b + b + c + f \\ II :& e + b + a + a + c + f \\ III :& d + a + c + c + b + e \end{aligned}$$

Nun werden die Längen der Routen I und II verglichen. Das ist gleichbedeutend mit dem Vergleich:

I	II
$b + d$	$a + e$
$b + \sqrt{a^2 + x^2}$	$a + \sqrt{b^2 + x^2}$
$b^2 + 2b\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$	$a^2 + 2a\sqrt{b^2 + x^2} + b^2 + c^2$
$b\sqrt{a^2 + x^2}$	$a\sqrt{b^2 + x^2}$
$b^2a^2 + b^2x^2$	$a^2b^2 + a^2x^2$
b^2x^2	a^2x^2
b^2	a^2
b	a

Da auf beiden Seiten nur positive Werte vorkommen, bedeuten Quadrieren und Wurzelziehen äquivalente Umformungen des Vergleichs. Es kann also aus $b < a$ geschlossen werden, dass der Weg I kürzer ist als der Weg II.
Analog zeigt man, dass III kürzer als I ist. Somit sind die beiden Varianten von III die gesuchten Routen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 071046
Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

Offensichtlich ist $x \geq \sqrt{x}$, damit $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$, wobei aber letzteres ausgeschlossen ist, da man sonst wegen $x + \sqrt{x} = 0$ einen Nullnenner im Bruch unter der Wurzel auf der rechten Seite erhalten würde. Sei also ab sofort $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $\sqrt{x + \sqrt{x}} \neq 0$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \text{bzw.} \qquad x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Nach Division durch $\sqrt{x} \neq 0$ und umsortieren erhält man $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x - 1}$. Quadriert man diese Gleichung, was wegen $x \geq 1$ und also $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ eine Äquivalenzumformung ist, führt dies auf $x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1$ bzw. $\sqrt{x} = \frac{5}{4}$, also $x = \frac{25}{16}$.

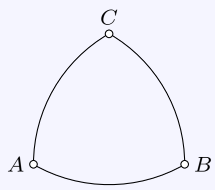
Tatsächlich bestätigt die (mathematisch nicht notwendige) Probe (da es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen gehandelt hat), dass $x = \frac{25}{16}$ Lösung der Ausgangsgleichung ist. Diese ist auch, wie gezeigt, die einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.10 VIII. Olympiade 1968

7.10.1 I. Runde 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081011



Der Flächeninhalt F der in der Abb. dargestellten Figur soll berechnet werden. Die Punkte haben untereinander die Abstände

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$$

Die Verbindungslinien sind Kreisbögen mit dem Radius a (Mittelpunkt ist jeweils der gegenüberliegende Punkt).

Die Fläche kann durch Übereinanderabdecken von drei Kreissektoren mit dem Radius a und einem Zentriwinkel der Größe 60°. erzeugt werden.
Das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ wird dabei dreifach bedeckt. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich der Differenz aus der Summe der Flächeninhalte der drei Kreissektoren und dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Da der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a bekanntlich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ beträgt, erhält man

$$F = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 081012
Ermitteln Sie alle Primzahlen p mit folgender Eigenschaft!
Addiert man zu p die Zahl 50 und subtrahiert man von p die Zahl 50, dann erhält man zwei Primzahlen.

Angenommen, eine Primzahl p habe die genannte Eigenschaft. Dann sind die Zahlen $p - 50$ und $p + 50$ ebenfalls Primzahlen.
Nun lässt $p+50 = p+48+2$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p+2$, und es lässt $p-50 = p-51+1$ bei Division durch 3 den gleichen Rest wie $p + 1$. Von den drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p, $p + 1$, $p + 2$ muss jedoch eine durch 3 teilbar sein, also auch eine von den Zahlen p, $p - 50$ und $p + 50$.

Da es genau eine durch 3 teilbare Primzahl gibt, nämlich die 3 selbst, muss sie unter diesen drei Zahlen vorkommen, und sie muss die kleinste von ihnen sein, da sonst $p - 50$ keine natürliche Zahl, also keine Primzahl, wäre. Daher folgt $p - 50 = 3$; also kann nur $p = 53$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft haben. Umgekehrt ist dies in der Tat der Fall; denn sowohl $p = 53$ als auch $p+50 = 103$ als auch $p-50 = 3$ sind Primzahlen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 081013

In einem alten Mathematiklehrbuch stößt Günter auf eine Konstruktion, von der behauptet wird, sie führe zur Errichtung der Senkrechten auf einer Geraden g in einem Punkt P. Sie beginnt folgendermaßen:

"Um einen beliebigen, jedoch nicht auf g liegenden Punkt Y wird der Kreis mit dem Radius PY geschlagen. Sein zweiter Schnittpunkt mit der Geraden g sei A. Dann ..."

Die folgende Seite fehlt jedoch.
a) Vervollständigen Sie die Konstruktionsbeschreibung durch geeigneten Text!
b) Weisen Sie die Richtigkeit des Lösungsweges nach!
c) Untersuchen Sie, ob das angegebene Vorgehen immer zum Ziel führt!

a) ... zieht man eine Gerade durch A und Y. Den anderen Punkt in dem sie den Kreis schneidet, nennen wir B. Jetzt verbindet man B und P, und man hat eine Senkrechte auf P.

b) $\angle APY = \angle YAP$, da sie Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind; das Dreieck ist gleichschenklig, da die Schenkel Radien im Kreis sind. (1)

$\angle YPB = \frac{1}{2} \cdot \angle PYA$, da $\angle YPB = \angle PBY$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, weil Radien im Kreis, $\angle PYA$ ist Außenwinkel)

$$\angle APB = \angle APY + \angle YPB = \angle APY + \frac{1}{2} \cdot \angle PYA = \frac{1}{2}(2 \cdot \angle APY + \angle PYA) =$$
$$\frac{1}{2}(\angle APY + \angle YAP + \angle PYA) = \frac{1}{2} \cdot 180^circ = 90°$$

c) Nein. Diese Konstruktion führt nur dann nicht zum Ziel, wenn Y wie laut Aufgabenstellung auf g oder auf der Senkrechten zu g durch P liegt, da P dann Berührungspunkt der Tangente g zum Kreis ist und dadurch der einzige Punkt, an dem der Kreis g schneidet.

Aufgabe gelöst von Philipp Schulz

Aufgabe 4 - 081014
Einige Schüler der Klassen 9 und 10 einer Schule nahmen an einem Schachturnier teil. Dabei spielte jeder Teilnehmer mit jedem anderen genau eine Partie. Für einen Sieg gab es einen Punkt, für ein Unentschieden einen halben Punkt. Obwohl genau 10 mal so viel Schüler der Klasse 10 wie der Klasse 9 teilnahmen, erreichten sie nur $4\frac{1}{2}$ mal so viele Punkte wie die Schüler der Klasse 9.

Wieviel Teilnehmer aus Klasse 9 waren es, und wie viele Punkte haben sie erreicht?

Vorbemerkung: $n, m \in \mathbb{N}$; P_n und P_m sind positive gebrochene Zahlen
Klasse 9: m Schüler, P_m Punkte
Klasse 10: $n = 10m$ Schüler, $P_n = 4{,}5 \cdot P_m$ Punkte

Die Anzahl aller Spiele entspricht gerade der Summe aller Punkte, weil bei jedem Spiel 1 Punkt für den Sieger und keiner für den Verlierer (zusammen: 1 Punkt) oder je 0,5 Punkte (zusammen: 1 Punkt) vergeben wurden:

$$\frac{(n+m)(n+m-1)}{2} = P_n + P_m$$
$$\frac{(10m+m)(10m+m-1}{2} = 4{,}5P_m + P_m = 5{,}5P_m$$
$$11m \cdot (11m-1) = 11P_m$$
$$P_m = m \cdot (11n-1) \qquad (1)$$

Der maximale Punktzahl der Schüler der 9. Klasse ist (Punkte der Spiele der Schüler aus der 9. Klasse untereinander + alle Spiele zwischen Schülern aus der 9. und 10. Klasse wurden gewonnen):

$$(P_m)_{\max} = 0{,}5 \cdot m \cdot (m-1) + m \cdot n = 0{,}5 \cdot m \cdot (m-1) + 10m^2$$

Offensichtlich sollte die maximal mögliche Punktzahl größer gleich der wirklich erreichten sein:

$$P_m = m(11m-1) =\leq 0{,}5 \cdot m \cdot (m-1) + 10m^2$$
$$11m^2 - m \leq 0{,}5m^2 - 0{,}5m + 10m^2$$
$$22m^2 - 2m \leq 21m^2 - m$$
$$m^2 - m = m \cdot (m-1) \leq 0$$

Diese Ungleichung ist nur für natürliche m nur bei Gleichheit eines Faktors mit Null erfüllt, also bei $m = 0$ und $m = 1$, da nie gleichzeitig gelten kann: $m < 0$ und $m - 1 > 0$ bzw. $m > 0$ und $m - 1 < 0$.
Offensichtlich ist $m = 0$ keine sinnvolle Lösung, da dies einem Schachturnier ohne jeden Teilnehmer entspräche ...
Also: Ein Schüler der Klasse 9 nahm teil ($m = 1$). Er erreichte 10 Punkte (entsprechend Gleichung (1) $P_m = 10$)

Aufgabe gelöst von Arnd Hübsch

7.10.2 II. Runde 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081021
Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1,a_2,...\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,2,...)$ einander gleich sind.
Zeigen Sie, dass es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1,2,...$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

Ist d die Differenz der arithmetischen Folge (a_n), so gilt $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1,2,....$ Es folgt

$$s_n = (a_1 + 0 \cdot d) + (a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2 \cdot d) + ... + (a_1 + (n-1) \cdot d) =$$

$$= n \cdot a_1 + (0 + 1 + 2 + ... + (n-1)) \cdot d = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$$

Es soll $s_n = n^2 + 5n$, also $n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = n^2 + 5n$ für alle $n = 1,2,...$ gelten. Es folgt $a_1 + \frac{n-1}{2} d = n + 5$ für alle $n = 1,2,....$
Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = 6$ und mit $n = 2$ dann $6 + \frac{1}{2} d = 7$, also $d = 2$.
Es handelt sich also um die arithmetische Folge 6,8,10,12,....

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

Angenommen, $a_1, a_2, ...$ sei eine Folge der gesuchten Art. Dann ergibt sich aus der Forderung an S_n für $n = 1$ und $n = 2$

$$S_1 = a_1 = 1 + 5 = 6 \quad , \quad S_2 = a_1 + a_2 = 4 + 10 = 14$$

also

$$a_2 = 14 - 6 = 8$$

Daher muss das Anfangsglied $a_1 = 6$ und die (für alle $n = 1,2,...$ gleichlautende) Differenz $d = a_{n+1} - a_n = 2$ sein.
Umgekehrt gilt für die arithmetische Folge mit $a_1 = 6$ und $d = 2$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$$

also in der Tat

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(6 + 2n + 4) = \frac{n}{2}(2n + 10) = n^2 + 5n \qquad (n = 1,2,...)$$

Übernommen aus [2]

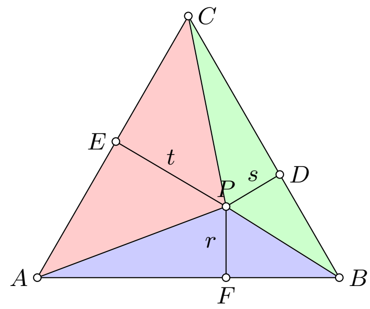
Aufgabe 2 - 081022
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $\log_2 [\log_2(\log_2 x)] = 0$ genügen!

Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir $\log_2(\log_2 x) = a$ und erhalten $\log_2 a = 0$.
Das bedeutet $2^0 = a$, also $a = 1$.
Damit ist $\log_2(\log_2 x) = 1$. Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten $\log_2 b = 1$. Das bedeutet $b = 2$.

Damit ist $\log_2 x = 2$, also muss $x = 4$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 081023
Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.
Beweisen Sie diese Aussage!



Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Summe der Abstände dieses Punktes von den Seiten konstant:

$$r + s + t + u = h = 3r$$

Dabei bezeichnet h die Höhe des Dreiecks und r den Inkreisradius.
Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist so groß wie die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke.
Für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt $\frac{gh}{2}$, wobei $g = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ die Grundseite und h die Höhe sein soll. Die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke ist

$$\frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{gh}{2} = \frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2}$$

Damit folgt die Behauptung $h = s + t + u$.

Anmerkung: Diese Aussage ist der Satz von Viviani.

Aufgabe 4 - 081024
Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A.
Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.
Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Kraftwagen!

Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2.

Dann gilt (1) $210 = v_1 t_1 = v_2 t_2$.
Ferner ist sowohl $(t_1 - 2)$ h als auch $(t2 - \frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so dass (2) $t_1 = t_2 + \frac{7}{8}$ gelten muss.

Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1 \cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2 \cdot \frac{9}{8})$ km, woraus (3) $v1 \cdot 2 + v_2 \cdot \frac{9}{8} = 210$ folgt.

Die Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ergibt sich mit

$$\begin{aligned} 210 \cdot t_2 \cdot 2 + 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{9}{8} &= 210 \cdot \left(t_2 + \frac{7}{8}\right) \cdot t_2 \\ t_2^2 - \frac{9}{4} t_2 - \frac{63}{64} &= 0 \\ t_{2_{1;2}} &= \frac{9}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{81 + 63} = \frac{9}{8} \pm \frac{12}{8} \end{aligned}$$

Davon ist allein $t_2 = \frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2 > 0$ gilt. Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter $t_1 = \frac{7}{2}$ und $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sowie $v_2 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Lösung übernommen von [5]

7.10.3 III. Runde 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081031
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei $AB = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so dass ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck $\triangle ABC$ ist.
Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

Den Flächeninhalt F_3 des Dreiecks $\triangle CDE$ erhält man als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks $\triangle ABC$ und des Trapezes $ABDE$, also $F_3 = F_1 - F_2 = \frac{2}{3} \cdot F_1$.
Da die Strecken DE und AB parallel sind, sowie E und A bzw. D und B jeweils auf einem von C ausgehenden Strahl liegen, geht das Dreieck $\triangle CDE$ aus dem Dreieck $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit Zentrum C hervor. Der Streckungsfaktor sei k. Dann gilt $F_3 = k^2 \cdot F_1$, also $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, und damit $|DE| = k \cdot |AB| = \sqrt{6} \cdot 3$ cm.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 081032
Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist.
Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?
b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.
Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:
1) für $n = 3$.
2) für beliebiges positives ganzes n.

b) Angenommen, es gäbe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n, x - n + 1, ..., x, ..., x + n$ und erfüllen die Gleichung

$$(x - n)^2 + ... + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + ... + (x + n)^2 \qquad (1)$$

Wegen $(x + k)^2 - (x - k)^2 = 4kx$ $(k = 1, ..., n)$ folgt aus Gleichung (1)

$$x^2 = 4(1 + ... + n)x = 4\frac{n(n+1)}{2}x \qquad \text{also} \qquad x(x - 2n(n + 1)) = 0 \qquad (2)$$

Daher muss $x = 0$ oder $x = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ sein, d.h., es kommen nur die Zusammenstellungen

$$-n, -n + 1, ...0, ..., n \qquad (3)$$

$$2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, ..., 2n^2 + 2n, ...2n^2 + 3n \qquad (4)$$

als Lösungen in Frage.
In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n + 1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie oben auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen $10, ..., 14$, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, ..., 2$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 081033
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6ab$ stets gilt:

$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2$$

Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 6ab \\ 2a^2 + 2b^2 - 4ab &= a^2 + b^2 + 2ab \\ 2(a-b)^2 &= (a+b)^2 \\ \sqrt{2}|a-b| &= |a+b| \end{aligned}$$

wobei ebenfalls nach Voraussetzung $a > b$ und damit $a - b > 0$ und daher $|a - b| = a - b$. Ferner gilt a, b positiv und damit $a + b = |a + b| > 0$. Es gilt also: $\sqrt{2}(a - b) = a + b$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \sqrt{2} \\ \lg \frac{a+b}{a-b} &= \lg 2^{\frac{1}{2}} \\ \lg(a+b) - \lg(a-b) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 - 081034
Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.
Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$.
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - 4q}$.
Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2 - 4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt.
Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p,q) = (-9,8)$ oder $(p,q) = (9,8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

S_y ist genau dann ein Punkt der entstehenden Parabel, wenn seine Koordinaten deren Gleichung erfüllen.
Hierfür ist $q = 8$ notwendig und hinreichend.
Nun sei $q = 8$ vorausgesetzt. Die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + 8 = 0$$

Für sie erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 8} = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 32} \end{aligned}$$

(vorausgesetzt, dass $|p| \geq 4\sqrt{2}$ ist; anderenfalls hat die Parabel keinen Punkt auf der x-Achse).
Die Bedingung $x_1 - x_2 = 7$ ist somit gleichbedeutend mit $\sqrt{p^2 - 32} = 7$ oder $p^2 - 32 = 49$ oder $p^2 = 81$, und dies damit, dass entweder $p = 9$ oder $p = -9$ gilt.

Hat man statt der bisher genannten logischen Äquivalenzen nur in einer Richtung (zu $q = 8$ und zu $p = 9$ oder $p = -9$ hin) führende Schlüsse gezogen, so eignet sich zum dann erforderlichen Nachweis der Umkehrung auch folgende Probe:

Das Bild der quadratischen Funktion

$$y = x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x + 8)$$

schneidet die x-Achse in den Punkten $S_1(8,0)$ und $S_2(1,0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0,8)$. Das Bild der quadratischen Funktion

$$y = x^2 + 9x + 8 = (x+1)(x+8)$$

schneidet die x-Achse in den Punkten $S_3(-1,0)$ und $S_4(-8,0)$, die y-Achse im Punkt $S_y(0,8)$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 081035
Beweisen Sie folgende Behauptung:
Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Es gilt der Satz:
Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.
M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen eines Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so dass G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.
Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist $\angle KGH + \angle GHL = 90°$.

Durch Übergang zu den Zentriwinkeln folgt $\angle KMH + \angle GML = 180°$. Ersetzt man hierin links jeden Summanden durch seine Ergänzung zu 180°, so folgt (da die Summe ebenfalls 180° betrug) wieder $\angle KCH + \angle GAL = 180°$.
Nach dem eingangs erwähnten Satz folgt hieraus die Behauptung.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 081036
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3, q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

Beweis:
Einerseits ist p ungerade, also $p-1$ und $p+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, sodass eine von beiden sogar durch 4, also $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar ist. Analog ist $q^2 - 1$ und damit auch $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$ durch 8 teilbar.
Andererseits ist, da q teilerfremd zu 3 ist, genau eine der drei im Abstand q aufeinander folgenden ganzen Zahlen $p-q$, p, $p+q$ durch 3 teilbar. Da es p nicht ist, muss es also eine der beiden anderen Zahlen, und damit auch $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ sein.
Da 8 und 3 teilerfremd sind, folgt aus der Teilbarkeit von $p^2 - q^2$ durch 8 und durch 3 auch die durch $8 \cdot 3 = 24$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweiter Lösungsweg:

Es gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen r und s

$$p = 2r + 1 \qquad , \qquad q = 2s + 1$$

Daraus folgt

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 4(r-s)(r+s+1)$$

Von den Zahlen $r-s$ und $r+s+1$ ist genau eine durch 2 teilbar, da ihre Summe ungerade ist. Daher ist $p^2 - q^2$ durch 8 teilbar.
Andererseits gilt mit geeigneten natürlichen Zahlen x und y

$$p = 3x + 1 \quad \text{oder} \quad p = 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad q = 3y + 1 \quad \text{oder} \quad q = 3y - 1$$

Es gibt daher genau die folgenden Möglichkeiten:

$$p = 3x + 1 \qquad \text{und} \qquad q = 3y + 1 \tag{1}$$
$$p = 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad q = 3y - 1 \tag{2}$$
$$p = 3x + 1 \qquad \text{und} \qquad q = 3y - 1 \tag{3}$$
$$p = 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad q = 3y + 1 \tag{4}$$

Für (1) und (2) gilt $p - q = 3(x - y)$.
Für (3) und (4) gilt $p + q = 3(x + y)$.
Wegen $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$ ist somit in jedem Fall $p^2 - q^2$ durch 3 teilbar. Da 8 und 3 teilerfremd sind, ist folglich $p^2 - q^2$ auch stets durch 24 teilbar.

Dritter Lösungsweg:

Eine Primzahl größer als 3 kann bei Division durch 6 nur die Reste 1 oder -1 lassen. Mit geeigneten natürlichen Zahlen m, n ist folglich $p = 6m \pm 1$ und $q = 6n \pm 1$ (wobei für p und q voneinander unabhängig je eines der Vorzeichen gilt), also

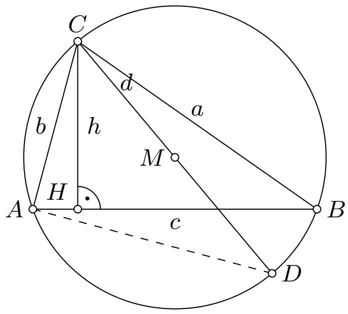
$$p^2 - q^2 = 12(m(3m \pm 1) - n(3n \pm 1)) \tag{5}$$

In den Produkten $m(3m \pm 1)$, $n(3n \pm 1)$ ist für gerades (ungerades) m bzw. n der erste (zweite) Faktor gerade; daher sind diese Produkte stets gerade, also auch ihre Differenz. Hiernach folgt aus (5) die Behauptung.

Übernommen aus [2]

7.10.4 IV. Runde 1968, Klasse 10

Aufgabe 1 - 081041
a) Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck folgender Satz gilt!
Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.
b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F = \frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!



a) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ schneide diesen im Punkt D.
Es gelte $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CH = h$, $CD = d$. Da die zu beweisende Aussage sich nicht ändert, wenn man A mit B vertauscht, so kann (eventuell durch eine solche Vertauschung) $\angle ABC < 90°$ erreicht werden.

Dann ist $D \neq A$; ferner $H \neq B$, und zwar liegen A und H auf demselben von B ausgehenden Strahl.
Nach dem Satz über die Peripheriewinkel über demselben Bogen (AC) folgt daher $\angle HBC = \angle ADC$.

Ferner ist nach der Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales $\angle BHC = \angle DAC = 90°$. Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BHC \sim \triangle DAC$ und damit $a : h = d : b$, also $ab = hd$.

b) Nach a) gilt $h = \frac{a \cdot b}{d}$. Nun ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2} c \cdot h$. Somit erhält man

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2d}$$

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 081042
Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck} \quad s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

existiert! Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Wegen $ab > 0$ sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ, also die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ in jedem Falle positiv. Dann ist deren Summe wegen $a \neq b$ echt größer als 2 und $x > 1$, sodass $\sqrt{x-1}$ definiert ist. Aufgrund der strengen Monotonie der Wurzel-Funktion ist auch $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$, sodass der Nenner von s nie verschwindet und dieser Term also für jede solche Wahl von a und b wohldefiniert ist.

Zur Vereinfachung von s erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ und erhalten

$$s = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

Dabei ist

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} - 4\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$s = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right|$$

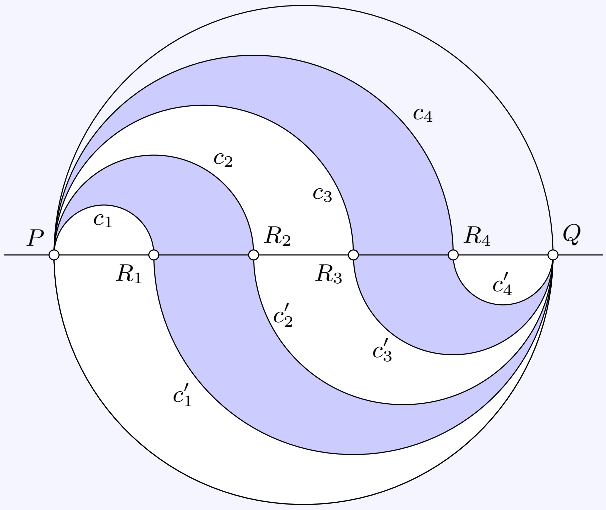
Ist $|a| > |b|$, so ist die Differenz im Betrag positiv und man erhält $s = \frac{a}{b}$, andernfalls ist sie negativ und man erhält $s = \frac{b}{a}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 081043
In einer Ebene ϵ sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n > 2$ gegeben.
Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$, so dass

$$PR_1 = R_1R_2 = ... = R_{n-2}R_{n-1} = R_{n-1}Q$$

gilt.
Eine der beiden Halbebenen, in die ϵ durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, 2, 3, ..., n-1$).



Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, ..., b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

Definieren wir zusätzlich $R_0 := P$, $R_n := Q$, sowie b_0 und b_n als Halbkreise über dem Durchmesser PQ in H' bzw. H, so ist nun allgemein nach dem Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven b_{i-1} und b_i mit $1 \leq i \leq n$ gefragt. Sei diese Fläche mit F_i bezeichnet.
Man kann F_i zerlegen in den Teil davon, der in H liegt, und den, der in H' liegt. Der erste lässt sich darstellen als die Differenz der Halbkreise in H über den Durchmessern PR_i und PR_{i-1}, der zweite als Differenz der Halbkreise in H' über den Durchmessern $R_{i-1}Q$ und R_iQ.
Damit berechnet sich der Flächeninhalt der Figur F_i zu

$$\frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} + \frac{(n-(i-1))^2}{n^2} - \frac{(n-i)^2}{n^2} \right) \cdot (2r)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot n^2} \cdot (2i - 1 + 2(n-i) + 1) = \frac{1}{n} \cdot \pi r^2$$

Der Kreis wird also in n flächengleiche Flächenstücke zerlegt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 081044
Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, dass auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.
Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, dass die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Zeichnen wir die zwölf Parallelstrecken im Abstand $\frac{1}{24}a$, $\frac{3}{24}a$, $\frac{5}{24}a$, $\dots$, $\frac{23}{24}$ zu AB in das Quadrat ein, so liegt jeder Punkt im Inneren (oder auf dem Rand) des Quadrats in einer Entfernung von höchstens $\frac{1}{24}a$

zur nächsten dieser Parallellinie, sodass das Lot des Punktes auf diese Parallellinie höchstens diese Länge besitzt.
Also ist die Summe der Länge aller dieser Lote höchstens $288 \cdot \frac{1}{24}a = 12a$. Hinzu kommen die Streckenlängen der Parallelstrecken, welche jeweils a lang sind, sodass für diese Verteilung $L \leq 24a$ folgt.

Liegt mindestens einer der 288 Punkte nicht auf einer Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit einer natürlichen Zahl $1 \leq k \leq 11$, so ist sein Lot zu seiner nächstgelegenen eingezeichneten Parallelstrecke echt kleiner als $\frac{1}{24}a$, sodass für diese Verteilung sogar $L < 24a$ folgt. (Der Punkt darf ja laut Aufgabenstellung nicht auf dem Rand liegen, sodass die Fälle $k = 0$ und $k = 12$ auch nicht möglich sind.)

Andernfalls liegen alle 288 Punkte auf einer der elf Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit $1 \leq k \leq 11$, sodass man anstatt der oben genannten nun diese 11 Parallelstrecken einzeichnen kann. Die Lote der Punkte auf die Strecke, auf der sie liegen, sind jeweils 0 lang, sodass in diesem Fall L nur aus den Längen der Parallelstrecken besteht, also man in diesem Fall sogar $L = 11a < 24a$ erreichen kann.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 081045
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

Mit $\log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ und $y := \log_2 x$ geht die Gleichung über in $[4 \cdot \frac{y}{2} + 3 = 2 \cdot \frac{1}{y}$, also

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Damit erhält man die erste Lösung $y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ und also $x_1 = 2^{y_1} = \sqrt{2}$ und als zweite $y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ und damit $x_2 = 2^{y_2} = \frac{1}{4}$.
Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt beide Werte.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, es existiert eine Lösung. Für diese muss $x > 0$ sein, da für sie $\log_4 x$ existiert. Ferner folgt wegen $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ aus der gegebenen Gleichung

$$\frac{4}{\log_x 4} + 3 = 2 \log_x 2$$

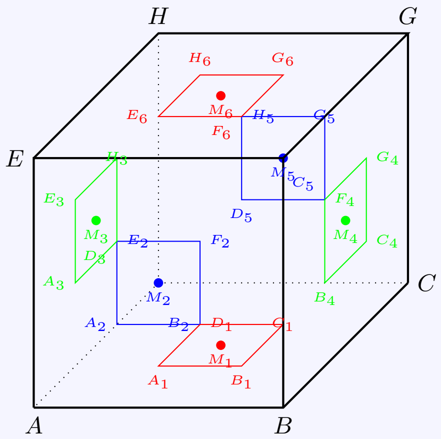
und wegen $\log_x 4 = 2 \log_x 2$

$$\frac{2}{\log_x 2} + 3 = 2 \log_x 2$$

Setzt man $u = \log_2 2$, so erfüllt u folglich die quadratische Gleichung $u^2 - \frac{3}{2}u - 1 = 0$ mit genau den beiden Lösungen $u_1 = 2$ und $u_2 = -\frac{1}{2}$.
Aus $u = \log_x 2$ folgt $x^u = 2$. Die Gleichung $x^{u_1} = 2$ hat nur die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, die Gleichung $x^{u_2} = 2$ nur die Lösung $x_3 = \frac{1}{4}$. Wegen $x > 0$ ist x_2 keine Lösung der gegebenen Gleichung.
Die Proben mit x_1 und x_3 zeigen, dass x_1 und x_3 die gegebene Gleichung erfüllen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 081046
Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate

$$A_1B_1C_1D_1, A_2B_2F_2E_2, A_3D_3H_3E_3, B_4C_4G_4F_4, D_5C_5G_5H_5, E_6F_6G_6H_6$$

einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, ..., M_6$ gelegen, und zwar so, dass die drei Geraden $g_{M_1M_6}, g_{M_2M_5}, g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden. Aus W werden die drei Quader

$$A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6, A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5, A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$$

herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Jeder der drei herausgeschnittenen Quader hat ein Volumen von $x^2 \cdot a$. Jedoch überschneiden sie sich in einem Würfel der Kantenlänge x (und Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$ und $g_{M_3M_4}$), sodass dieser Teil nur von einem Quader herausgeschnitten wird, die beiden übrigen ihn aber nicht erneut entfernen.
Also hat der Restkörper ein Volumen von $a^3 - 3ax^2 + 2x^3$. Wenn dies gleich dem halben Volumen des Ausgangswürfels entsprechen soll, muss

$$\frac{1}{2}a^3 = a^3 - 3ax^2 + 2x^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 4x^3 - 6ax^2 + a^3 = 0$$

gelten. Offenbar erfüllt $x = \frac{a}{2}$ diese Gleichung, da

$$4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 6 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^3 = \left(\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1\right) \cdot a^3 = 0$$

ist. Also kann man $4x^3 - 6ax^2 + a^3$ darstellen als $4x^3 - 6ax^2 + a^3 = (2x - a) \cdot (2x^2 - 2ax - a^2)$. Wäre $x \neq \frac{a}{2}$, so müsste der zweite Faktor $2x^2 - 2ax - a^2$ also Null ergeben. Die Lösungen für die sich so ergebende Gleichung in x lauten

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Dabei ist jedoch die eine Lösung $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot a$ negativ (für $a > 0$) und die andere $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot a$ größer als a und somit auch nicht zulässig.
Es verbleibt die einzig mögliche Wahl für x im Intervall $[0, a]$ mit $x = \frac{1}{2}a$ als einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.11 IX. Olympiade 1969

7.11.1 I. Runde 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091011
Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation.

Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert. Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer. Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfasste genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes. Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnischen am schwächsten und genau die sowjetischen am stärksten vertreten.
a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?
b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?
c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

Bezeichnungen:
x ist die Anzahl aller Fahrer, s die Anzahl der Fahrer in der Spitzengruppe, h die Anzahl der Fahrer des Hauptfeldes und l die Anzahl der Fahrer der letzten Gruppe.
Die Indizes stehen für die entsprechenden Länder: s (sowjetisch), d (deutsch), p (polnisch).

Dann gelten folgende Beziehungen:

$$x = s + m + l \quad (1) \qquad l = 14 \quad (2)$$
$$l_d = 0 \quad (3) \qquad h = 0{,}9 \cdot (x - l) \quad (4)$$
$$h_d \neq 0 \quad (5) \qquad s_d \neq 0 \quad (6)$$
$$s = \frac{1}{12}x \quad (7) \qquad s_s > s_d > s_p \quad (8)$$

Aus (1), (2), (4) und (7) folgt dann: $x = \frac{1}{12}x + 0{,}9 \cdot (x - 14) + 14 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 0{,}9x + 1{,}4 \Rightarrow x = 84$. Womit sich direkt $s = 7$ ergibt.

Aus (8) folgt, daß $s_s \geq 3$ und $s_p \geq 1$ (da $s_d \geq 2$). Nun gilt aber schon $s = 7 \geq s_s + s_d + s_p \geq 3+2+1 = 6$. Gäbe es eine vierte Mannschaft im Spitzenfeld, so wäre sie also maximal mit einem Fahrer vertreten, was dem widerspricht, dass die polnische Mannschaft die wenigsten Fahrer (mindestens einen) hat. Also besteht das Spitzenfeld aus Fahrern von genau 3 Ländern. Die Zahl 7 so in 3 Summanden aufzuteilen, dass der kleinste und größte Summand ungleich dem mittleren sind, geht einzig durch die Variante: $7 = 1 + 2 + 4$. Folglich gilt $s_d = 2$, also waren in der Spitzengruppe 2 deutsche Fahrer vertreten.
a) Es nahmen 84 Fahrer am Radrennen teil.
b) Davon waren 2 Fahrer in der Spitzengruppe.
c) In der Spitzengruppe fuhren Fahrer aus drei Mannschaften.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 091012
In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

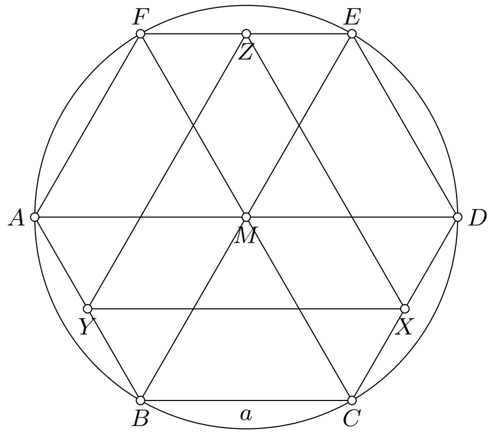
Seien p_i die Produktionskosten für E_i, dann gilt

$$5p_1 + 5p_2 + 8p_3 = 5950 \quad (1); \qquad 8p_1 + 6p_2 + 6p_3 = 6200 \quad (2); \qquad 5p_1 + 8p_2 + 7p_3 = 6450 \quad (3)$$

Auflösung des linearen Gleichungssystems ergibt: $p_2 = 300$, $p_3 = 400$ und $p_1 = 250$.

Aufgabe 3 - 091013
In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF.

Berechnen Sie das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.



Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks sei M, seine Seitenlänge a. Dann zerlegen die Strecken MA, MB, ..., MF das Sechseck in 6 gleichseitige Teildreiecke mit der Seitenlänge a. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks sei I_T.

$$I_T = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \qquad \text{folgt} \qquad I_S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

Das Dreieck $\triangle XYZ$ ist gleichseitig, denn XY, YZ und XZ sind Mittellinien in den Trapezen $ABCD$, $CDEF$ und $ABEF$, diese Trapeze sind kongruent.

Dabei gilt $XY = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$ und somit

$$I_D = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

Daher ist

$$I_S : I_D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} : \frac{9}{16}a^2\sqrt{3} = 8 : 3$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 091014
Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, dass dann $f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

Wegen

$$f(x_0 - 1) = 2(x_0 - 1)^2 - 3(x_0 - 1) + 4 = 2x_0^2 - 7x_0 + 9 \qquad \text{und}$$
$$f(x_0 + 1) = 2(x_0 + 1)^2 - 3(x_0 + 1) + 4 = 2x_0^2 + x_0 + 3 \qquad \text{gilt}$$
$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$$

w.z.b.w.

Übernommen von [5]

7.11.2 II. Runde 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091021
Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten $\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}$.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 \lg 3790 < 4$ also $[\lg 3790] = 3$.

Wegen $10^{-2} < 0{,}0379 < 10^{-1}$ ist $-2 \lg 0{,}0379 < -1$ also $[\lg 0{,}0379] = -2$.
Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1{,}5$.

Aufgabe 2 - 091022
Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, dass jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3; \quad d_2 = a_3 - a_2; \quad d_3 = a_2 - a_1; d_4 = a_4 - a_2; \quad d_5 = a_3 - a_1; d_6 = a_4 - a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

Angenommen $a_1, ..., a_4$ seien die vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, ..., d_6$ die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2, \qquad d_5 = d_2 + d_3, \qquad d_6 = d_1 + d_2 + d_3$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet der Fall aus.

II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2(, dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_6 gerade und größer als 2 ist.

IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, dass entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d6 = d_2 + 4$. Nun ist von den drei ganzen Zahlen der Form $d_2, d_2 + 2, d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber $d_2 > 1$ ist, also $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2, \qquad a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5, \qquad a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$$

Daher können $a_1, ..., a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

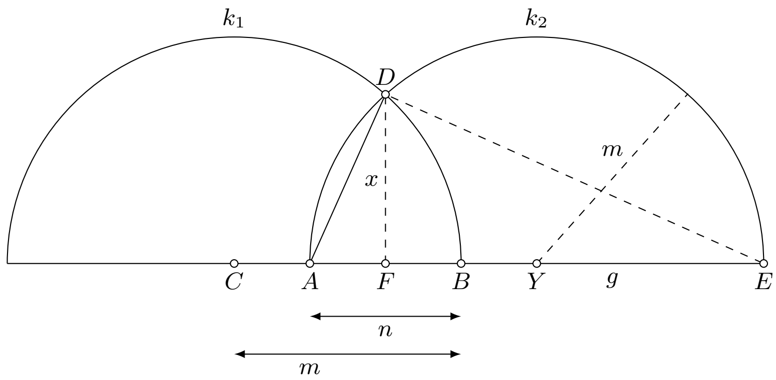
$$a_1 = 0, \qquad a_2 = n + 2, \qquad a_3 = n + 5, \qquad a_4 = n + 7 \tag{*}$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen Primzahl

$$d_1 = a_4 - a_3 = 2, \qquad d_2 = a_3 - a_3 = 3, \qquad d_3 = a_2 - a_1 = 2$$
$$d_4 = a_4 - a_2 = 5, \qquad d_5 = a_3 - a_1 = 5, \qquad d_6 = a_4 - a_1 = 7$$

Aufgabe 3 - 091023
Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).
a) Führen Sie folgende Konstruktion aus:
Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E.
Von A aus werde die Strecke AB mit $AB = n$ so auf g abgetragen, dass B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $BC = m$ so abgetragen, dass A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich). Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius BC geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.
b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild:



b) Aus der Konstruktion folgt $AB = n \quad ; \quad AY = DY = EY = m$. Ferner ist $AD = x = BD$.
Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n \qquad \text{also} \qquad x = \sqrt{m \cdot n}$$

Aufgabe 4 - 091024
Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?

(1) $-3 < x < 1$ (2) $x > -3$ (3) $x < 1$
(4) $x < 1$ oder $x > -3$ (5) $x > 1$ oder $x < -3$)

Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$
$$(x+1)^2 > 4$$
$$(x+1)^2 - 2^2 > 0$$
$$(x-1)(x+3) > 0$$

nach Fallunterscheidung erhält man als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x > 1$ oder $x < -3$.
Damit ist gezeigt, dass von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Lösungen der II. Runde 1969 übernommen aus [5]

7.11.3 III. Runde 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091031
Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei der Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

Sei n eine solche Zahl. Dann ist mit n auch $n - 66 = n - 11 \cdot 6$ durch 11 teilbar. Wenn n den Rest 1 bei der Division durch 5 lässt, dann ist $n - 66 = (n - 1) - 5 \cdot 13$ auch durch 5 teilbar. Und schließlich: Wenn n bei der Division durch 7 den Rest 3 lässt, ist $n - 66 = (n - 3) - 7 \cdot 9$ auch durch 7 teilbar.

Da 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, ist $n-66$ also sogar durch das Produkt $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ teilbar, sodass man für n die Darstellung $n = 385 \cdot k + 66$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k erhält.
Offenbar ist für $k \geq 3$ auch $n > 1000$, also nicht mehr dreistellig (und für $k = 0$ nur zweistellig), sodass man genau folgende beiden Lösungen erhält:
$n_1 = 385 \cdot 1 + 66 = 451$ und $n_2 = 385 \cdot 2 + 66 = 836$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, z sei eine natürliche Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Da z dreistellig ist, gilt

$$z = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \tag{1}$$

mit natürlichen Zahlen a_i und

$$1 \leq a_2 \leq 9, \quad 0 \leq a_1 \leq 9, \quad 0 \leq a_0 \leq 9 \tag{2}$$

Ferner gilt: a_0 kann nur 1 oder 6 sein, da z bei Division durch 5 den Rest 1 lässt. (3)
Nach dem Satz über die Teilbarkeit durch 11 folgt aus (1):

$$a_2 + a_0 - a_1 = 11n \qquad (n \text{ eine natürliche Zahl}) \tag{4}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (2): n kann nur 0 oder 1 sein. (5)
Nach (1) lässt sich z auch folgendermaßen darstellen:

$$z = a_2 \cdot 98 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 7 + a_1 \cdot 3 + a_0 \tag{6}$$

Da z bei Division durch 7 den Rest 3 lässt, folgt aus (6)

$$2a_2 + 3a_1 + a_0 = 7m + 3 \qquad (m \text{ eine natürliche Zahl}) \tag{7}$$

Nach (4) gilt

$$3a_2 - 3a_1 + 3a_0 = 33n \tag{8}$$

Aus den letzten beiden Aussagen folgt $5a_a + 4a_0 = 33n + 7m + 3$ und damit

$$33n - 4a_0 + 3 = 5a_2 - 7m \tag{9}$$

Fallunterscheidung: Nach (3) und (5) kommen nur folgende Fälle in Betracht:

a_0	n	$33n - 4a_0 + 3$	Damit gilt nach (9)	Hieraus und aus (2) folgen als Möglichkeiten für a_2	Hieraus und aus (4), (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_1
1	0	-1	$7m = 5a_2 + 1$	4	5
6	0	-21	$7m = 5a_2 + 21$	7	keine
1	1	32	$7m = 5a_2 - 32$	3	keine
6	1	12	$7m = 5a_2 + 12$	1	keine
				8	3

Hieraus folgt, dass nur 451 und 836 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen können. Wie die Probe zeigt, ist dies der Fall.

Übernommen aus [2]

Dritte Lösung:

Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art. Dann gilt $z = 5a + 1 = 7b + 3 = 11c$ mit ganzen Zahlen a, b, c. Daraus folgt

$$15a + 3 = 21b + 9 \qquad \text{also} \qquad a = 7(3b - 2a) + 6$$

d.h. $a = 7k + 6$ mit einer ganzen Zahl k. Dies führt auf $z = 35k + 31$, also folgt weiter

$$210k + 186 = 66c \qquad \text{also} \qquad k = 11(6c - 19k - 17) + 1$$

d.h. $k = 11l + 1$ mit einer ganzen Zahl l.
Somit ergibt sich $z = 385l + 66$. Die einzigen dreistelligen Zahlen dieser Form erhält man für $l = 1, 2$, nämlich $z = 451$ bzw. $z = 836$. Eine Probe zeigt, dass sie den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Übernommen aus [2]

Vierte Lösung:

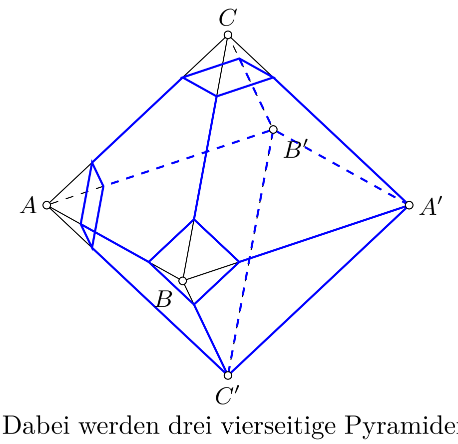
Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art, und es sei $z' = z + 11$. Dann folgt für z'

$$11 \mid z' \qquad , \qquad 7 \mid z' \tag{1,2}$$

Wegen $z = 7k + 3$ (k natürliche Zahl) gilt $z' = 7k + 14 = 7(k + 2)$. Ferner gilt: z' lässt bei Division durch 5 den Rest 2, endet also auf 2 oder 7. (3)
Aus (1) und (2) folgt, da 7 und 11 teilerfremd sind, $77 \mid z'$. (4)
Also ist z' ein Vielfaches von 77, das wegen (3) auf 2 oder 7 endet. Das sind im angegebenen Bereich die Zahlen $6 \cdot 77 = 462$ und $11 \cdot 7 = 847$ und nur diese. Daraus erhält man als Lösungen genau die Zahlen 451 und 836.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 091032
Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, dass ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.
Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!



Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muss man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).
Da 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), dass die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen.
Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch ein Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, dass unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwas die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.
Man überzeugt sich leicht, dass man damit einen Körper der geforderten Art erhält.

Übernommmen aus [5]

Aufgabe 3 - 091033
Geben Sie
a) eine notwendige und hinreichende,
b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie
c) eine hinreichende und nicht notwendige
Bedingung dafür an, da $\sqrt{1-|\log_2|5-x||}>0$ gilt!
Die anzugebenden Bedingungen sind dabei so zu formulieren, dass sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

Damit die Wurzel definiert ist, muss der Radikand nicht-negativ sein.
Dafür muss also $|\log_2|5-x||\leq 1$ bzw. $-1\leq\log_2|5-x|\leq 1$ gelten, was äquivalent ist zu $\frac{1}{2}\leq|5-x|\leq 2$.
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $5-x\geq 0$, also $x\leq 5$: Dann muss $\frac{1}{2}\leq 5-x\leq 2$ gelten, was äquivalent zu $x\in\left[3;\frac{9}{2}\right]$ ist.
2. Fall: $5-x<0$, also $x>5$: Dann ist $|5-x|=-(5-x)=x-5$ und es muss $\frac{1}{2}\leq x-5\leq 2$ gelten, was äquivalent ist zu $x\in\left[\frac{11}{2};7\right]$.

Zusammengefasst, ergibt sich also eine notwendige (und, wie wir gleich sehen werden, nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung erfüllt ist, durch

$$x\in\left[3;\frac{9}{2}\right]\qquad\text{oder}\qquad x\in\left[\frac{11}{2};7\right]$$

denn sonst wäre die Wurzel gar nicht definiert. (Dies beantwortet dann Teil b).)
Im Falle, dass die Wurzel definiert ist, die Gleichung aber nicht gilt, muss die Wurzel, und damit auch ihr Radikand, Null werden, sodass dann $|\log_2|5-x||=1$, also $\log_2|5-x|\in\{-1,1\}$ und damit $|5-x|\in\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ gelten muss. Es ergibt sich weiter $5-x\in\left\{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right\}$, also diesen Gedanken abschließend $x\in\left\{3;\frac{9}{2};\frac{11}{2};7\right\}$. Nur genau dann, wenn x einen dieser vier Werte annimmt, wird die Wurzel 0, ist also definiert, aber nicht echt positiv.
Somit ergibt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Ungleichung der Aufgabenstellung zu

$$x\in\left(3;\frac{9}{2}\right)\qquad\text{oder}\qquad x\in\left(\frac{11}{2};7\right)$$

was dann Teil a) beantwortet.

Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, wie sie Teil c) fordert, erhält man etwa dadurch, dass man nur eines der beiden Intervalle betrachtet, also z.B. ausschließlich $x\in\left(3;\frac{9}{2}\right)$ fordert.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 091034
Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b<a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a\neq -b$; denn wäre $a=-b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0=a+b=ab=-b^2$, also $b=0$, $a=0$, im Widerspruch dazu, dass nach Aufgabenstellung $b<a$ sein müsste.
Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a+b=a^2-b^2$ oder $a+b=b^2-a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a+b\neq 0$ auf $1=b-a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b<a$ führen.
Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a+b=a^2-b^2$, woraus wegen $a+b\neq 0$ weiter $1=a-b$, also $a=b+1$ folgt. Setzt man dies in $a+b=ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b+1=b^2+b$, d.h. $b^2-b-1=0$, die die Lösungen

$$b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\qquad;\qquad b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und nur diese hat. Die zugehörigen Werte für a sind

$$a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\qquad;\qquad a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Somit können höchstens die Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Lösung der Aufgabe sein, was die Probe bestätigt.

Lösung übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 091035
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, und auf AB ein Punkt D.
Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

O.B.d.A. können wir $|AD| \geq \frac{1}{2}|AB|$ annehmen. (Andernfalls vertausche man im Folgenden jeweils die Rollen von A und B.)

Ist $D = B$, so wähle man E als Mittelpunkt der Seite AC (den man mit der üblichen Konstruktionsweise erhält). Das Dreieck $\triangle DEA = \triangle BEA$ besitzt die gleiche Höhe von A auf die Grundseite auf der Geraden g_{BE} wie das Dreieck $\triangle ABC$ auf dessen Grundseite, die wegen $g_{BC} = g_{BE}$ auf der gleichen Geraden liegt, während diese Grundseite im Dreieck $\triangle BEA$ aber nach Konstruktion nur halb so lang ist wie die entsprechende im Dreieck $\triangle ABC$. Damit besitzt es also auch genau die Hälfte von dessen Flächeninhalt.
Ist D identisch mit dem Mittelpunkt M der Strecke AB, so wähle man $E = C$ und man erhält mit der gleichen Begründung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AED = \triangle ACM$ genau halb so groß ist wie der des Ausgangsdreiecks $\triangle ABC$. Diesmal wird die Höhe von C auf die Grundseiten AE bzw. AB betrachtet.

Sei im Folgenden also nun D ein innerer Punkt der Strecke MB. Dann konstruiere man E als Schnittpunkt der Parallelen zu DC durch M mit der Geraden AC. (Da M innerer Punkt der Strecke AD ist, schneidet die Parallele zu DC durch M die Gerade g_{AC} im Inneren der Strecke AC.) Dann hat das Dreieck $\triangle ADE$ genau den halben Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, wie im Folgenden gezeigt wird:

Das Dreieck $\triangle ADC$ besitzt wieder die gleiche Höhe von C auf auf die Gerade $g_{AD} = g_{AB}$ wie das Dreieck $\triangle ABC$, sodass sich

$$F_{\triangle ADC} = \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

ergibt.
Analog kann man die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADE$ in Beziehung setzen, wenn man beachtet, dass sie die gleiche Höhe von D auf die Gerade $g_{AC} = g_{AE}$ besitzen. Es ist also

$$F_{\triangle ADE} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot F_{\triangle ADC} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

Nach dem Strahlensatz (da die Geraden g_{DC} und g_{ME} nach Konstruktion parallel sind und von zwei von A ausgehenden Strahlen geschnitten werden) gilt aber $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}$, sodass man nach Einsetzen genau das gewünschte Resultat $F_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot F_{\triangle ABC}$ erhält.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 091036
Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.
Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

Aus der Funktionsgleichung und der Tabelle ergibt sich für $x = 1$ bzw. $x = 2$

$$(1) \quad a + b + c = 1 \qquad , \qquad (2) \quad 4a + 2b + c = 2$$

Subtrahiert man (1) von (2) bzw. 2 mal (1) von (2), erhält man (3) $\;3a + b = 1$ und (4) $\;2a - c = 0$ und hieraus $b = 1 - 3a$ und $c = 2a$. Für die quadratische Funktion ergibt sich somit

$$(5) \quad y = ax^2 + (1 - 3a)x + 2a$$

Einsetzen von $x = 3$ bzw. $x = 4$ liefert

$$(6) \quad n_1 = 9a + 3(1-3a) + 2a = 2a + 3 \qquad , \qquad (7) \quad n_2 = 16a + 4(1-3a) + 2a = 6a + 4$$

Da n_1 aus {0,1,...,9} sein soll, ergibt sich aus (6) und (7) folgende Tabelle

n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
n_2	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22

Da auch n_2 aus {0,1,...,9} und außerdem a nicht 0 sein soll, verbleiben für a nur die beiden Lösungen $a = -\frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$.
Für die Funktionsgleichung folgt dann aus (5):

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

Aus den gegebenen Wertepaaren erhält man die Gleichungen

$$a + b + c = 1 \tag{1}$$
$$4a + 2b + c = 2 \tag{2}$$
$$9a + 3b + c = n_1 \tag{3}$$
$$16a + 4b + c = n_2 \tag{4}$$

Durch Subtraktion ergibt sich aus (2) und (1), (3) und (2) bzw. (4) und (3)

$$3a + b = 1, \qquad 5a + b = n_1 - 2, \quad 7a + b = n_2 - n_1$$

Daraus folgt

$$2a = n_1 - 3 \qquad , \qquad 2a = n_2 - 2n_1 + 2$$

und schließlich $3n_1 - 5 = n_2$. Da n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sein sollen, kann n_1 nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen.
Es sei $n_1 = 2$. Dann ist $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}, c = -1$
Es sei $n_1 = 3$. Dann ist $a = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Es sei $n_1 = 4$. Dann ist $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 1$. Daher können nur die quadratischen Funktionen

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \tag{5,6}$$

die gestellten Bedingungen erfüllen.
Durch Aufstellen der vorgeschriebenen Tabelle stellt man fest, dass sie dies auch tun:

zu (5):

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

zu (6):

x	1	2	3	4
y	1	2	4	7

Übernommen aus [2]

7.11.4 IV. Runde 1969, Klasse 10

Aufgabe 1 - 091041
Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Gesucht sind natürliche Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ und $p,q,r,s \in \mathbb{N}$, so dass die Gleichungen

$$a + b + 41 = p^2 a + b = q^2 a + 41 = r^2 b + 41 = s^2$$

erfüllt sind. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt $41 = p^2 - q^2 = (p+q)(p-q)$. Da p,q natürliche Zahlen sind, ist die einzige Lösung $p + q = 41, p - q = 1 \iff p = 21, q = 20$ und somit $a + b = 400$.
Die beiden letzten Gleichungen ergeben direkt die Abschätzung $r,s \geq 7$. Durch Addition dieser erhalten wir $r^2 + s^2 = a + b + 82 = 482$, woraus $r,s \leq 20$ folgt. Die Endziffer einer Quadratzahl kann nur die Werte 0,1,4,5,6,9 annehmen.
Damit die Summe zweier Quadratzahlen die Endziffer 2 hat, sind für r^2,s^2 nur die Endziffern 1,6 und somit für r,s nur die Endziffern 1,4,6,9 möglich. Daher gilt $r,s \in \{9,11,14,16,19\}$ und man findet, dass $(r,s) = (11,19)$ oder $(r,s) = (19,11)$ gelten muss. Dadurch ergeben sich $(a,b) = (80,320)$ und $(a,b) = (320,80)$ als einzige Lösungen.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 2 - 091042
Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0, b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Es gilt $\ln_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ und somit

$$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b \iff \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a} \iff \left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)^2 = (\log_b x)^2 = 1$$
$$\iff x = b \vee x = \frac{1}{b} \ .$$

Zweite Lösung:

Angenommen, eine reelle Zahl x erfüllt die Gleichung. Wegen $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ gilt dann

$$\log_a x \frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a b \qquad \text{also} \qquad (\log_a x)^2 = (\log_a b)^2$$

und daher entweder

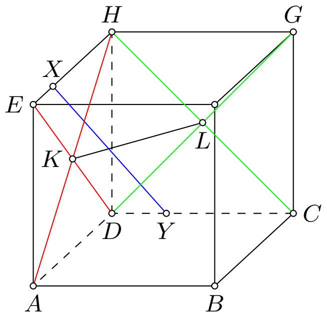
$$\log_a x = log_a b \qquad \text{oder} \qquad \log_a x = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b} \tag{1,2}$$

Aus (1) folgt $x = b$, aus (2) $x = \frac{1}{b}$. Daher können nur die Zahlen b und $\frac{1}{b}$ die vorgegebene Gleichung erfüllen.
Tatsächlich sind diese beiden Zahlen Lösungen der Gleichung; denn es gilt

$$\log_a b \log_b b = \log_a b \cdot 1 = \log_a b \qquad , \qquad \log_a \frac{1}{b} \log_b \frac{1}{b} = (-\log_a b) \cdot (-1) = \log_a b$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 091043
A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abbildung gewählt seien.
K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $DY = EX$ ist.
Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.



Vektorielle Lösung:
Wir legen den Würfel in ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $D = (0{,}0{,}0)^T$, $A = (1{,}0{,}0)$, $C = (0{,}1{,}0)^T$, $H = (0{,}0{,}1)^T$.
Dann haben wir $K = (\frac{1}{2}{,}0{,}\frac{1}{2})$, $L = (0{,}\frac{1}{2}{,}\frac{1}{2})$ und $X = (1{,}0{,}1) - r \cdot (1{,}0{,}0)^T$, $Y = r \cdot (0{,}1{,}0)^T$, $0 \leq r \leq 1$, wobei die beiden Faktoren der Richtungsvektoren wegen $|DY| = |EX|$ identisch sind.
Die Strecke $|KL|$ ist gegeben durch

$$|KL| = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-s) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq s \leq 1 \right\} .$$

Für den Mittelpunkt M der Strecke $|XY|$ gilt

$$M = \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1-r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-r) \\ \frac{1}{2}(1-(1-r)) \\ \frac{1}{2}(1-r) + \frac{1}{2}(1-(1-r)) \end{pmatrix} ,$$

welcher mit $s = r - 1$ auf der Strecke $|KL|$ liegt.

Aufgabe 4 - 091044
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$$

a,b,c sind die drei Nullstellen des normierten Polynoms $x^2 \cdot (x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1)$. Daher gilt

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2(x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1) .$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir

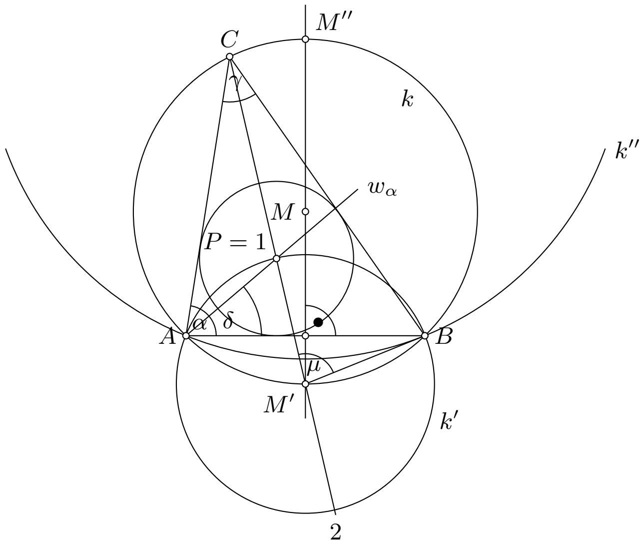
$$\begin{aligned} -a-b-c &= -1 \\ ab+bc+ac &= \frac{t}{s} \\ -abc &= \frac{t}{s} \end{aligned}$$

und somit

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (a+b+c) \cdot \frac{ab+bc+ac}{abc} = 1 \cdot \frac{\frac{t}{s}}{-\frac{t}{s}} = -1 .$$

Aufgabe 5 - 091045
Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck $\triangle ABC$ liegen.
Beweisen Sie, dass der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!

Beweis: Zunächst zeichnet man eine Planfigur (siehe Abbildung) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung.
Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2.



Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muss der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.
Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, dass der Punkt 1 auf w_α oder w_β liegt.
γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne AB. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $AM' = M'B$. Somit liegt M' auf w_γ.
Wir setzen $\angle CAB = \alpha$ und $\angle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne BC darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu \quad (1)$.
Ferner setzen wir $\angle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $B1$. Folglich gilt $\mu = 2\delta \quad (2)$.
Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$; d.h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.
Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.
Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 091046
Man beweise folgenden Satz!
Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.

Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Lösung $\frac{p}{q}$ mit ganzzahligen und teilerfremden p und q der quadratischen Gleichung. Einsetzen und multiplizieren mit q^2 liefert dann

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Wären p und q beide ungerade, dann auch ap^2, bpq und cq^2, da alle drei Koeffizienten nach Aufgabenstellung selbst ungerade sind. Also ist es auch die Summe dieser drei Produkte, was ein Widerspruch darstellt, da natürlich 0 gerade ist.

Wäre dagegen p gerade und q ungerade, so ist wieder cq^2 ungerade, aber ap^2 und bpq beide gerade, sodass die Summe wieder eine ungerade Zahl und damit nicht 0 ergibt. Widerspruch. Der analoge Widerspruch ergibt sich auch, wenn q gerade und p ungerade ist.
Und wären p und q beide gerade, so wären sie nicht mehr teilerfremd.

Also ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch zur Annahme der Existenz einer rationalen Lösung, sodass es keine rationale Lösung geben kann, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, eine Gleichung (*) mit ungeraden a, b, c besitzt eine rationale Lösung x_1. Dann lässt sich x_1 in der Form $x_1 = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen sind und $q \neq 0$ ist. Damit gilt

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0 \qquad \text{also} \qquad ap^2 + bpq + cq^2 = 0 \tag{1,2}$$

Fall 1: p und q sind ungerade.
Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade, die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind und auch die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite von (2) eine ungerade Zahl, also eine Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Eine der beiden Zahlen p, q ist gerade, die andere ungerade.
Dann ist bpq eine gerade Zahl, und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist die eine gerade, die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

Fall 3: p und q sind gerade.
Dann sind sie im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.. Da es keine weiteren Möglichkeiten gibt, ist die Behauptung bewiesen. *Übernommen aus* [2]

7.12 X. Olympiade 1970

7.12.1 I. Runde 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101011
Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel.

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

Für eine einfache Vorstellung betrachtet man das umgekehrte Problem, bei dem man mit 0 Streichhölzern anfängt und welche hinzufügt.

Wenn A 139 Streichhölzer vorsetzt, muss B spielen und A hat dann eine Anzahl von 140 bis 149 vor sich, von der er gewinnen kann. Wie kann A sicher 139 vorsetzen?

Indem A vorher 128 vorsetzt; rückwärts also 117, 106, 95, 84, 73, 62, 51, 40, 29, 18, 7; d.h., A spielt also im ersten Zug 7, im zweiten ergänzt er so viel, dass es 18 sind usw.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 101012
Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?

b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?

a) Es gilt $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl, für die $\frac{n(n+1)}{2} = 2415$ gilt. Dann folgt $n^2 + n - 4830 = 0$ und hieraus entweder $n = 69$ oder $n = -70$. Da aber $-70 < 0$ ist, kann nur $n = 69$ die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 69:

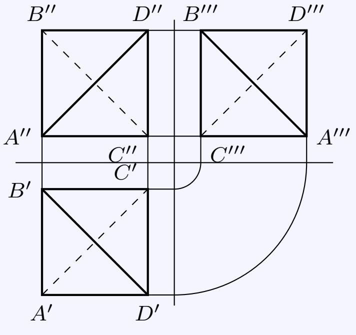
$$s_{69} = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415$$

b) Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl m, für die $\frac{m(m+1)}{2} = 69m$ gilt. Wegen $m \neq 0$ folgt daraus $\frac{m+1}{2} = 69$, also $m = 137$. Daher kann nur diese Zahl die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 137

$$s_{137} = \frac{137 \cdot 138}{2} = 137 \cdot 69$$

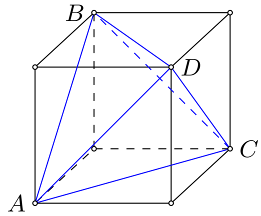
Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 101013



Die Abbildung zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriss.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriss eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$).
b) Berechnen Sie sein Volumen!

b) Der dargestellte Körper kann aus einem Würfelkörper mit der Kantenlänge a hervorgehen, indem man von diesem mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, B, C; A, B, D; A, C, D und B, C, D vier kongruente Pyramiden abtrennt.

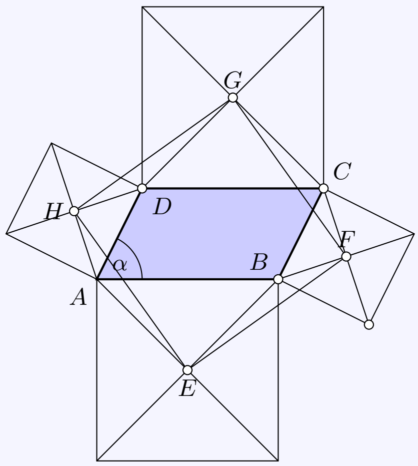


Das Volumen V des dargestellten Körpers ist also gleich der Differenz aus dem Volumen des Würfelkörpers mit der Kantenlänge a und der Summe der Volumina der vier abgetrennten Pyramidenkörper. Da jede von diesen das Volumen $V_P = \frac{1}{6}a^3$ hat, erhält man

$$V = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 101014



Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

Man beweise, dass $EFGH$ ein Quadrat ist.

Es sei $|\angle DAB| = \alpha$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $0° < \alpha \leq 90°$ gilt Dann ist

$$|\angle EAH| = |\angle GCF| = \alpha + 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{und}$$

$$|\angle EBF| = |\angle GDH| = 360° - (180° - \alpha) - 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{also}$$

$$|\angle EAH| = |\angle EBF| = |\angle GCF| = |\angle GDH| \tag{1}$$

Ferner ist (als halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten)

$$|AE| = |DG| = |BE| = |CG| \quad (2) \qquad \text{und} \qquad |AH| = |BF| = |CF| = |DH| \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$, also

$$|EH| = |EF| = |GF| = |GH| \tag{4}$$

und $|\angle AEH| = |\angle BEF|$, also $|\angle HEF| = |\angle WEB$, d.h. $|\angle HEF| = 90°$ (5). Wegen (4), (5) ist $EFGH$ ein Quadrat.

Bemerkung: Im Fall $\alpha = 90°$ entarten die Dreiecke $\triangle AEH$ usw., (4) und (5) bleiben aber trotzdem richtig.

Übernommen von [5]

7.12.2 II. Runde 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101021
Beweisen Sie, dass jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

Sei n eine k-stellige Zahl ($k > 1$) mit führender Ziffer $z > 0$.
Dann ist einerseits $n \geq z \cdot 10^{k-1}$ und andererseits das Produkt ihrer Ziffern $\leq z \cdot 9^{k-1}$, also echt kleiner als n selbst, $\Box$.

Zweite Lösung:

Jede n-stellige natürliche Zahl z mit den Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ ($n > 1$) lässt sich im dekadischen System folgendermaßen schreiben:

$$z = a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^2 + a_0 10^0$$

Dabei gilt

$$0 < a_{n-1} \leq 9 \qquad \text{und} \qquad 0 \leq a_i \leq 9 \quad (i = 0,..,n-2)$$

Daraus folgt $z \geq a_{n-1}10^{n-1}$. Das aus den sämtlichen Ziffern von z gebildete Produkt P lautet:

$$P = a_{n-1}a_{n-2}...a_2 a_1 a_0$$

Wegen $0 \leq a_i \leq 9$ ($i = 0,...,n-2$) und $a_{n-1} > 0$ sowie $n > 1$ (die Voraussetzung $n > 1$ verwendet man, um $9^{n-1} < 10^{n-1}$ zu erhalten, die Voraussetzung $a_{n-1} > 0$, um daraus $a_{n-1}9^{n-1} < a_{n-1}10^{n-1}$ zu schließen) gilt

$$P \leq a_{n-1}9^{n-1} < a_{n-1}10^{n-1} \leq z$$

also $P < z$, w.z.b.w.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 101022
Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.
B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.
C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.
D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann!
Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!
Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.
Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

a) Die Aussage D (2) ist offenbar wahr und D (3) offensichtlich falsch, da es um einen einfarbigen Ball geht. Also muss auch D (1) wahr sein und Ds Pullover hat die gleiche Farbe wie der Ball.

Wäre C (3) falsch, so wäre der Ball insbesondere weder grün noch schwarz, sodass auch Aussage C (1) falsch sein müsste. Dann hätte C aber nur höchstens eine wahre Aussage getroffen, was im Widerspruch zur Annahme dieses Aufgabenteils a) steht. Also muss C (3) richtig sein; die Farbe des Balls ist damit grün, schwarz oder gelb. Und damit nicht rot, sodass C (2) falsch ist und damit auch C (1) wahr sein muss, was die Farbe des Balls auf schwarz oder grün einschränkt.

Damit ist die Aussage B (1) falsch, denn der Ball ist weder gelb noch weiß. Demnach müssen B (2) und B (3) wahr sein, sodass der Ball (und damit auch der Pullover) grün sein muss. Tatsächlich sind dann auch die Aussagen A (1) und A (2) wahr, während A (3) falsch ist. Es handelt sich damit tatsächlich um eine Lösung.

b) Wieder sehen wir direkt ein, dass D (2) wahr und D (3) falsch ist. Nun folgt aber, dass dann auch D (1) falsch sein muss, sodass wir nur wissen, dass Ball und Pullover verschiedene Farben haben.
Da D(1) die einzige Aussage ist, die die Farbe des Pullovers thematisiert, können wir keine weiteren Schlüsse zu dieser ziehen und damit dessen Farbe auch nicht angeben.

Zur weiteren Bestimmung der Farbe des Balls betrachten wir nun die Aussage C (1): Ist der Ball entweder schwarz oder grün, so natürlich erst recht auch entweder grün oder schwarz oder gelb.
Aus der Gültigkeit von C (1) würde direkt auch die von C (3) folgen, sodass C nur höchstens eine falsche Aussage getroffen hätte, was der Annahme für diesen Aufgabenteil b) widerspricht. Also muss C (1) falsch sein, sodass der Ball weder schwarz noch grün ist. Von den beiden übrigen Aussagen von C muss genau eine wahr sein, sodass der Ball entweder rot oder gelb ist.
Damit ist aber die Aussage B (1) falsch, denn wenn der Ball nicht gelb ist, muss er ja rot sein.[2] Da der Ball weder schwarz noch grün ist, ist B (2) wahr und B (3) falsch, sodass auch B genau zwei falsche Aussagen getroffen hat.

Schließlich sind die Aussagen A (3) und A (1) falsch, sodass A (2) wahr sein muss, was, da der Ball nicht grün ist, nur geht, wenn der Ball rot ist. Damit ist der Ball also rot und das einzige, was wir über den Pullover aussagen können, ist, dass er nicht rot ist.

Aufgabe 3 - 101023
In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $AB : SM = 3 : \sqrt{6}$ gilt.
Beweisen Sie, dass das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d.h. dass alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

Da die Figur durch Drehung um die Gerade SM um 120° in sich selbst übergeht, ist $|AS| = |BS| = |CS|$ schon gegeben. Da das Dreieck $\triangle AMS$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M ist, gilt die Beziehung $|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2$. Es verbleibt also $|AM|$ zu berechnen:

Da die Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Höhen zusammenfallen, berechnet sich deren Länge zu $s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Da die Seitenhalbierenden sich im Verhältnis 2 : 1 schneiden und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit dessen Umkreismittelpunkt zusammenfällt, ist $|AM| = \frac{2}{3} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.
Einsetzen liefert nun

$$|AS^2| = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 a^2 = \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\right) \cdot a^2 = a^2$$

also $|AS| = a = |BS| = |CS| = |AB| = |AC| = |BC|$, □.

Aufgabe 4 - 101024
Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2mn; \qquad y = m^2 - n^2; \qquad z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist!

Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch x. Andernfalls sind sowohl $m^4 - 1$ als auch $n^4 - 1$ und damit auch

$$(m^4 - 1) - (n^4 - 1) = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = yz$$

[2] Es stellt sich jedoch die Frage, wie B zu dieser Schlussfolgerung gelangt.

durch 5 teilbar, sodass auch mindestens eine der Zahlen y oder z durch 5 teilbar sein muss, $\square$.

Bemerkung: Dass für eine nicht durch 4 teilbare ganze Zahl t die Zahl $t^4 - 1$ durch 5 teilbar sein muss, folgt aus dem kleinen Satz von Fermat oder auch via

$$(5s \pm 1)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 1 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 1^2 \pm 5s \cdot 1^3 + 1^4 - 1 \quad \text{und}$$

$$(5s \pm 2)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 2^2 \pm 4 \cdot 5s \cdot 2^3 + 2^4 - 1$$

welche wegen $1^4 - 1 = 0$ und $2^4 - 1 = 15$ alle durch 5 teilbare Zahlen sind.

Aufgaben der II. Runde 1970 gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch $x = 2mn$. Ist eine ganze Zahl g nicht durch 5 teilbar, so ist sie in der Form $g = 5k + r$ mit ganzzahligen k, r und $0 < |r| \leq 2$ darstellbar. Folglich lässt g^4 bei Division durch 5 den Rest 1; denn es gilt

$$(5k + r)^4 = 5(125k^4 + 100k^3 r + 30k^2 r^2 + 4kr^3) + r^4$$

und r^4 ist 1 oder 16. Also ist $g^4 = 5k' + 1$. Damit lässt sich

$$(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = m^4 - n^4$$

durch 5 teilen, und es folgt, dass mindestens einer der beiden Faktoren $m^2 + n^2$ oder $m^2 - n^2$ durch 5 teilbar ist.

Übernommen aus [2]

7.12.3 III. Runde 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101031
a) Beweisen Sie folgenden Satz!
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$.
Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

a) Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + (k-1)^2}{4} = \frac{k^2 - 2k + 1 + 4k}{2^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2^2} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

b) Ist $k = n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

sodass man mit $(x,y,z) = (2n,n^2-1,n^2+1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhält.
Setzt man hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhält man die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel $(6; 8; 10)$, $(8; 15; 17)$, $(10; 24; 26)$ und $(12; 35; 37)$.

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche "Streckungsfaktoren" ungünstig, da dann z.B. auch die Tripel $(6; 8; 10)$ und $(9; 12; 15)$ nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel $(3; 4; 5)$ verschieden sind.

Zweite Lösung:

a) Für jede Zahl k gilt

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + k^2 - 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Ist k ganz, so erhält man das Quadrat der rationalen Zahl $\frac{k+1}{2}$, womit der Satz bewiesen ist.

b) Die erhaltene Gleichung (1) führt auf ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn k eine Quadratzahl ist und $\frac{k-1}{2}$ sowie $\frac{k+1}{2}$ natürliche Zahlen sind.
Letzteres ist für alle ungeraden Quadratzahlen $k > 1$ der Fall. Man erhält so z. B. die folgenden pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z):

k	$x = \sqrt{k}$	$y = \frac{k-1}{2}$	$z = \frac{k+1}{2}$	Tatsächlich ist
9	3	4	5	$9 + 16 = 24$
25	5	12	13	$25 + 144 = 169$
49	7	24	25	$49 + 576 = 625$
81	9	40	41	$81 + 1600 = 1681$

Für jedes dieser vier Tripel gilt: In je dreien dieser vier Tripel kommt mindestens eine Zahl vor, die durch keine Zahl des vierten Tripels teilbar ist. Daher sind die vier Tripel (in dem angegebenen Sinne) voneinander verschieden.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 101032
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$.
Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

1) Die Kreise um A durch C sowie C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.
2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.
3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.
4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.
5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung:
Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AC und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte. Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser AC, sodass das Dreieck $\triangle ACP$ nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.
Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von AC, sodass $|AP| = |CP|$, also auch $\angle PAC = \angle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle APC$). Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \sin \angle PAC = \frac{|CP|}{|AC|} \qquad \text{also} \qquad |CS| = |CP| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |AC|$$

Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck $\triangle STC$ also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k := \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit Zentrum C hervor. Damit ist $F_{\triangle STC} = k^2 \cdot F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} F_{\triangle ABC}$, wie gewünscht.
Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ wurde hier nirgends benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

Aufgabe 3 - 101033
Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x gilt: $f(x) = f(x+1) - a$

Sei $f(x) = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n. Dann geht die Bedingung über in die Aussage $mx + n = m(x+1) + n - a = mx + n + (m - a)$ bzw. $m = a$. Tatsächlich erfüllen auch alle linearen Funktionen $f(x) = ax + n$ mit Anstieg a die Bedingung, wie man leicht durch Einsetzen überprüft.

Aufgabe 4 - 101034
Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$ gilt:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + ... + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

Es ist bekanntermaßen für alle positiven reellen Zahlen $a \neq 1$ und $b \neq 1$ die Identität $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ erfüllt. Setzen wir dies ein, so wird die linke Seite der zu zeigenden Gleichung zu

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots \frac{1}{\log_n x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{\ln 4}{\ln x} + \dots \frac{\ln n}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{\ln x} =$$

$$= \frac{\ln(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)}{\ln x} = \frac{\ln(n!)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln_{n!} x}$$

$\square$.

Zweite Lösung:

Es ist $\log_x(2 \cdot 3 \cdot 4 ... n) = \log_x n!$. Daraus folgt

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + ... + \log_x n = \log_x n! \qquad (1)$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen $a > 0$, $b > 0$ und $ab \neq 1$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + ... + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 101035
Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.
Nach Abschluss des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D platzierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Da bei einem Turnier, in dem jeder von n Spielern gegen jeden anderen genau einmal antritt, genau $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Partien ausgetragen werden, und in diesem Turnier genau 15 Partien gespielt wurden, nahmen an diesem also $n = 6$ Spieler teil. Diese seien mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.

Sei darüber hinaus die Punktzahl des Siegers mit x_1, die des Zweitplatzierten mit x_2 usw., die des Letzten mit x_6 bezeichnet. Dann gilt $x_1 > x_2 > \cdots > x_6$, also, da nur Vielfache von $\frac{1}{2}$ als Punktzahlen möglich sind, $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2}$, $x_2 \geq x_3 + \frac{1}{2}$, $\ldots$, $x_5 \geq x_6 + \frac{1}{2}$ und damit insbesondere auch $x_4 \geq x_6 + 1$, $x_3 \geq x_6 + \frac{3}{2}$ sowie $x_2 \geq x_6 + 2$. Da aber nach Aufgabenstellung $x_2 = x_6 + 2$ gilt, folgt auch Gleichheit in den vorherigen Ungleichungen, d.h. $x_5 = x_6 + \frac{1}{2}$, $x_4 = x_6 + 1$ und $x_3 = x_6 + \frac{3}{2}$.

Da in jeder Partie insgesamt in Summe ein Punkt an beide Spieler vergeben wird, wurden im gesamten Turnier also 15 Punkte vergeben, sodass sich $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 15$ ergibt. Setzt man die zuvor erhaltenen Werte für x_2 bis x_5 in Abhängigkeit von x_6 ein, wird dies zu $x_1 + 5 \cdot x_6 + 5 = 15$. Setzt man nun zusätzlich noch $x_1 \geq x_2 + \frac{1}{2} = x_6 + \frac{5}{2}$ ein, erhält man $6x_6 + \frac{15}{2} \leq 15$ bzw. $x_6 \leq \frac{15}{12} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$. Da auch für x_6 nur Vielfache von halben Punkten zulässig sind, folgt $x_6 \leq 1$.

Umgekehrt erhält man mit $x_1 \leq 5$ (da auch der Sieger nicht mehr als einen Punkt pro Gegner erhalten kann) die Beziehung $5 \geq x_1 = 10 - 5x_6$ bzw. $x_6 \geq 1$, zusammen mit der vorherigen Abschätzung also $x_6 = 1$ und damit auch $x_5 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 3$ und $x_1 = 5$.

Es gibt insgesamt 9 Partien, an denen mindestens einer der beiden Spieler A oder D beteiligt war (je 4 gegen die übrigen Turnierteilnehmer und eine gegeneinander). Unter diesen war kein Remis, sodass die genau 5 Remis des Turniers alle unter den 6 Partien der Spieler B, C, E und F zu finden sind.

Damit gibt es genau zwei dieser vier Spieler, nennen wir sie X und Y, die untereinander kein Remis erzielten. Für die anderen beiden Spieler gilt, dass sie sowohl untereinander als auch gegen X und Y remis spielten. Damit haben diese beiden keine ganzzahlige Punktzahlen und müssen Dritt- und Fünftplatzierter sein.
Demnach hat C als dritter sowohl gegen E, F als auch insbesondere B remisiert.

Bemerkung: Die Aussage, dass C gegen den Vierten gewonnen hat, wurde in dieser Lösung nicht verwendet.

Aufgabe 6 - 101036
Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.
Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so dass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

Wir zerlegen den Würfel durch parallele Schnitte in 27 mit je $\frac{1}{3}$ als Kantenlänge. Dann müssen in mindestens einem Teilwürfel 2 dieser 28 Punkte liegen. Der maximale Abstand, den zwei Punkte in einem Würfel haben können, entsteht, wenn sie die Endpunkte einer seiner Raumdiagonalen bilden.

Diese hat die $\sqrt{3}$-fache Länge der Kantenlänge des Würfels, woraus sich sofort die Behauptung ergibt, $\square$.

Aufgaben der III. Runde 1970 gelöst von cyrix

7.12.4 IV. Runde 1970, Klasse 10

Aufgabe 1 - 101041
Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, dass in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

Sei M eine solche Menge. Wir geben für einige Ziffern alle ein- und zweistelligen Primzahlen an, in denen sie als Ziffer enthalten sind:

$$2: \quad 2,\, 23,\, 29 \;\big|\; 4: \quad 41,\, 43,\, 47 \;\big|\; 5: \quad 5,\, 53,\, 59 \;\big|\; 6: \quad 61,\, 67 \;\big|\; 8: \quad 83,\, 89$$

Da die fünf Primzahlen insgesamt 9 Ziffern besitzen sollen, ist unter ihnen genau eine einstellige und sind die übrigen vier zweistellig.

Fall 1: Es ist $2 \in M$. Dann muss die 5 in einer zweistelligen Primzahl vorkommen.
Fall 1.1: $53 \in M$. Dann muss auch $89 \in M$ sein, da sonst die Ziffer 8 nicht mehr vorkommen kann.
Fall 1.1.1: $61 \in M$. Dann muss auch, um die Ziffer 4 abzudecken, $47 \in M$ sein. Wir erhalten $M_1 = \{2, 53, 89, 61, 47\}$.
Fall 1.1.2: $67 \in M$. Dann muss zur Abdeckung der Ziffer 4 auch $41 \in M$ sein, sodass wir $M_2 = \{2, 53, 89, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 1.2: $59 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der 8, dass $83 \in M$.
Fall 1.2.1: $61 \in M$. Zur Abdeckung der 4 muss dann auch $47 \in M$ gelten.
Wir erhalten $M_3 = \{2, 59, 83, 61, 47\}$.
Fall 1.2.2.: $67 \in M$. Für die Ziffer 4 muss dann auch $41 \in M$ sein, sodass $M_4 = \{2, 59, 83, 67, 41\}$ folgt.

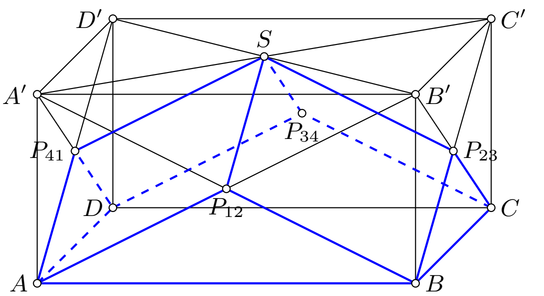
Fall 2: Es ist $23 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der Ziffer 8 auch $89 \in M$. Es folgt, dass die 5 nur allein stehen kann, also $5 \in M$. Zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6 gibt es nun wieder zwei Möglichkeiten, sodass wir die beiden Mengen $M_5 = \{23, 89, 5, 61, 47\}$ und $M_6 = \{23, 89, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 3: Es ist $29 \in M$. Dann folgt analog dem zweiten Fall, dass $83 \in M$ und $5 \in M$. Wieder ergeben sich die gleichen zwei Möglichkeiten zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6, sodass wir abschließend die beiden Mengen $M_7 = \{29, 83, 5, 61, 47\}$ und $M_8 = \{29, 83, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass es genau diese acht Mengen gibt, die der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 101042
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und den Kantenlängen $AB = a, AD = b, AA' = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten. Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.
a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\alpha = 60°, q = 1$ dar.
Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.
b) Man berechne $V_R : V_Q$.



Man bezeichne die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge.

E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $B'D'$ bzw $A'C'$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam.

E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $ABB'A'$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen AB' bzw. $A'B$.

Der Schnittpunkte P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade SP_{12} die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

Wegen der Konvexität der Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam.
Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade AP_{12} Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt BP_{12} in der Schnittgeraden von E_2 und $ABB'A'$.

Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, dass die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, dass die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte des Restkörpers erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenflächen bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte hinzu.
Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $f + f - k = 2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q der Quaders in Beziehung gesetzt werden:

Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z.B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt.

Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3A - 101043A
Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die $[log_{12}c] \leq [log_4 c]$ gilt.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Es ist $\ln 12 > \ln 4$, also $\frac{1}{\ln 12} < \frac{1}{\ln 4}$. Für $c \geq 1$ ist auch $\ln c \geq 0$ und damit $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} \leq \frac{\ln c}{\ln 4}$, woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt. Diese ist also zumindest für alle $c \geq 1$ erfüllt.

Andernfalls ist $0 < c < 1$ und $\ln c < 0$. Dann folgt $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} > \frac{\ln c}{\ln 4}$.
Damit dennoch $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gelten kann, müssen beide Logarithmen auf die gleiche ganze Zahl n abgerundet werden, d.h., es muss eine negative ganze Zahl n geben mit $n \leq \log_4 c < \log_{12} c < n + 1$. Demnach muss $4^n \leq c < 12^{n+1}$.

Für $n = -1$ liefert dies $c \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$ und für $n = -2$ die Aussage $c \in \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{12}\right)$.

Für $n \leq -3$ ist $3^n \leq \frac{1}{27} < \frac{1}{12}$, also $12^{n+1} = 12 \cdot 12^n = 12 \cdot 3^n \cdot 4^n < 4^n$, sodass die obere Intervallgrenze kleiner würde als die untere und damit keine weiteren Lösungen entstehen.
Die Gleichung ist also genau für alle c mit $\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leq c$ erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Es gilt $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$ für alle $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Für $c > 1$ ist $\log_c 4 < \log_c 12$, d.h.

$$\frac{1}{\log_4 c} < \frac{1}{\log_{12} c}$$

woraus sich nach Multiplikation mit der positiven Zahl $\log_{12} c \log_4 c$

$$\log_{12} c < \log_4 c$$

ergibt. Also ist (*) erfüllt.
Für $c = 1$ ist (*) erfüllt.

Für $\frac{1}{4} \le c < 1$ gilt $[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -1$, also ist (*) erfüllt.
Für $\frac{1}{12} \le c < \frac{1}{4}$ gilt $[\log_{12} c] = -1$, $[\log_4 c] = -2$, also ist (*) nicht erfüllt.
Für $\frac{1}{16} \le c < \frac{1}{12}$ gilt $[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -2$, also ist (*) erfüllt.

Angenommen, (*) wäre für einen Wert c mit $0 < c < \frac{1}{16}$ erfüllt. Setzt man dann $[\log_{12} c] = u$ und $[log_4 c] = v$, so gilt $12^u \le c < 12^{u+1}$, $4^v \le c < 4^{v+1}$ und weiter $4^v \le< c < \frac{1}{16}$, also $v < -2$ und $v \le -3$ und schließlich

$$12^{u+1} > c \ge 4^v = 12^v \left(\frac{1}{3}\right)^v \ge 12^v \cdot 27 > 12^{v+1}$$

was wegen $u < v$ nicht sein kann, so dass (+) in diesen Fällen nicht erfüllt ist. Daher ist (*) genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{16} \le c < \frac{1}{12} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{4} \le c$$

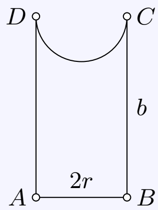
ist.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3B - 101043B

Die Abbildung zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = CD = 2r$ und $BC = AD = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.

Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.



Der Umfang u des Flächenstücks ermittelt sich zu $u = 2b + 2r + \pi r = 2b + (2+\pi)r$ und sein Flächeninhalt zu $F = b \cdot 2r - \frac{1}{2}\pi r^2$. Damit ist $2b = \frac{F}{r} + \frac{\pi}{2} r$. Einsetzen liefert $u = \frac{F}{r} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r$.

Fasst man u als Funktion von r auf, ergibt sich $u'(r) = -\frac{F}{r^2} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$. Diese Funktion besitzt die einzige Nullstelle $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$. Es ist wegen $F > 0$ die Funktion u' streng monoton wachsend für $r > 0$. Insbesondere ist also $u'(r)$ negativ und $u(r)$ streng monoton fallend für $0 < r < r_0$ sowie $u'(r)$ positiv und $u(r)$ streng monoton wachsend für $r > r_0$. Damit hat also u nicht nur ein lokales, sondern auch sein globales Minimum an der Stelle r_0. Es ergibt sich

$$b_0 = \frac{F}{2r_0} + \frac{\pi}{4} r_0 = \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}}{\sqrt{F}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} \cdot (1+\pi) = r_0 \cdot (1+\pi)$$

und damit das gesuchte Lösungspaar $(r,b) = (r_0, (1+\pi)r_0)$ mit $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$.

Bemerkung: Der Umfang ergibt sich dann zu $u_0 = 2b_0 + (2+\pi)r_0 = (4+3\pi)r_0 = 2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r_0 = 2\sqrt{F} \cdot \sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi} = 2 \cdot \frac{F}{r_0}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 101044

Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

Sei $f(x)$ die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$mit $a \neq 0$. Dann ist die Bedingung der Aufgabenstellung äquivalent zur Aussage, dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c \qquad \text{also}$$

$$ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) = ax^2 + (-b) \cdot x + c$$

bzw. $(2a+2b)x+(a+b)=0$. Da dies für alle reellen Zahlen x gelten soll, muss $2a+2b=0$, also $b=-a$ gelten.
Tatsächlich erfüllen auch alle quadratischen Funktionen $f(x)=ax^2-ax+c$ mit beliebigen, reellen Zahlen $a\neq 0$ und c die gewünschte Gleichung, denn es gilt

$$f(x+1)=a(x+1)^2-a(x+1)+c=a(x+1)(x+1-1)+c=a(x+1)x+c=a(x^2+x)+x=$$
$$=a(-x)^2-a(-x)+c=f(-x)$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 101045
Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x\neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$$

erfüllen. Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r<-6$. b) Es sei $r=-6$. c) Es sei $-6<r<0$. d) Es sei $r>0$

Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{2}{x}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}=\frac{r+6}{2r}$.
a) Ist $r<-6$, dann $r+6<0$ und $2r<0$, also $\frac{r+6}{2r}>0$. Damit wird die Ungleichung falsch für alle negativen x und nur wahr für alle positiven x, die $\frac{x}{2}<\frac{2r}{r+6}$, also $x<\frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es ist also $x\in\left(0;\frac{4r}{r+6}\right)$.

b) Für $r=-6$ ist $\frac{r+6}{2r}=0$, sodass die Ungleichung genau von allen positiven x erfüllt wird: $x\in(0;\infty)$.

c) Ist $-6<r<0$ ist $r+6>0$ aber $2r<0$, sodass $\frac{r+6}{2r}$ negativ ist. Damit ist die Ungleichung auf jeden Fall für alle positiven x wahr und darüberhinaus für alle negativen x, die $\frac{x}{2}<\frac{2r}{r+6}$ also $x<\frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es folgt $x\in\left(-\infty;\frac{4r}{r+6}\right)\cup(0;\infty)$.

d) Ist $r>0$, so auch $\frac{r+6}{2r}>0$. Damit erfüllen wieder alle negativen x automatisch die Ungleichung nicht, da dann auch $\frac{2}{x}<0$ ist. Darüber hinaus erfüllen nur diejenigen positiven x die Ungleichung, für die $\frac{x}{2}<\frac{2r}{r+6}$ gilt, sodass wir in diesem Fall die Lösungsmenge $x\in\left(\frac{4r}{r+6};\infty\right)$ erhalten.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

a) Angenommen, die reelle Zahl $x\neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung, d. h., es sei

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$$

Wegen $r<-6$ gilt $0<-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$. Daher ist

$$\frac{2}{x}>\frac{1}{2}+\frac{3}{r}>0$$

also $x>0$ und damit $2>x\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{r}\right)$ bzw. $4>x\left(\frac{6+r}{r}\right)$ bzw. wegen $\frac{6+r}{r}>0$

$$0<x<\frac{4r}{6+r}$$

Also können höchstens solche x, für die diese Ungleichung gilt, Lösung der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich ist für alle diese Werte

$$\frac{2}{x}>\frac{2}{\frac{4r}{6+r}}=\frac{3}{r}+\frac{1}{2}\qquad\text{also}\qquad\frac{2}{x}-\frac{3}{r}>\frac{1}{2}$$

b) In diesem Fall geht die gegebene Ungleichung in

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$$

über. Diese Ungleichung ist für alle $x > 0$ und nur für diese erfüllt, da genau für sie $\frac{2}{x} > 0$ gilt.

c) In diesem Fall ist

$$-\frac{3}{r} > \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

Wegen (2) ist diese Ungleichung für alle $x > 0$ erfüllt.
Es sei nun $x < 0$. Dann gilt $rx > 0$, und man erhält durch Multiplikation von (1) mit rx

$$2r - 3x > \frac{rx}{2}$$

und weiter $4r - 6x > rx$, woraus sich wegen $r + 6 > 0$

$$x < \frac{4r}{6+r}$$

ergibt. Also können im Fall c) höchstens solche x, für die $x > 0$ oder $x < \frac{4r}{6+r}$ gilt, die gegebene Ungleichung erfüllen. Tatsächlich ist für $x > 0$ wegen (2)

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

und für $x < \frac{4r}{6+r}$

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6+r}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

d) In diesem Fall gilt $-\frac{3}{r} < 0$. Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann ist

$$\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} > 0 \qquad \text{und daher} \qquad x > 0$$

Daraus folgt

$$0 < x < \frac{4r}{6+r}$$

Also können höchstens solche x, für die diese Ungleichung gilt, Lösungen der gegebenen Ungleichung sein. Tatsächlich ist in diesem Fall

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6+r}} = \frac{3}{r} + \frac{r}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 101046
Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden: Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt.
Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.
Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

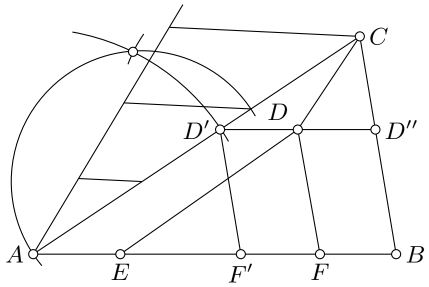
Unter der Annahme, dass in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:

(1) Dreieck EFD ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$AD' : AC = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz $2FB = F'B'$, also $FB = F'F$.



Konstruktion:
Man teilt AC im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}AC$. Die zweite Kathete sit dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}AC$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'.

Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist d, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:

Wegen $AD' = \frac{1}{3}\sqrt{3}AC$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu.
Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD.

Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss.

Übernommen aus [5]

7.13 XI. Olympiade 1971

7.13.1 I. Runde 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111011
Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z, so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgaben, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32 \quad (1) \qquad ; \qquad 40x + 60y + 75z = 1800 \quad (2)$$

sind. Angenommen x,y,z seien drei solche natürliche Zahlen. Aus (1) und (2) folgt dann

$$4y + 7z = 104 \quad (3) \qquad \text{also} \qquad z = \frac{104 - 4y}{7} \leq \frac{104}{7} = 14 + \frac{6}{7}$$

woraus sich $0 \leq z \leq 14 \quad (4)$ ergibt. Nach (3) ist ferner

$$y = 26 - \frac{7z}{4} \tag{5}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, muss also $7z$ und somit auch z durch 4 teilbar sein.

Hiernach ergibt sich aus (4), dass für z nur die Werte 0, 4, 8, 12 möglich sind. Aus (5) erhält man als zugehörige Werte für y der Reihe nach die Zahlen 26, 19, 12, 5 und aus (1) als zugehörige Werte für x die Zahlen 6, 9, 12, 15. Daher können höchstens die Ausstattungen mit folgenden Anzahlen der drei Glühlampensorten die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
6	26	0	9	19	4	12	12	8	15	5	12

Durch Einsetzen zeigt man, dass in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Aufgabe 2 - 111012
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

Der zu beweisende Satz ist äquivalent damit, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:

a) Jeder Rhombus ist sowohl ein Drachenviereck als auch ein Trapez.

b) Jedes Viereck, das sowohl Drachenviereck als auch ein Trapez ist, ist ein Rhombus.

Beweis zu a):

Ist $ABCD$ ein Rhombus, so gilt $|AB| = |BC|$ und $|CD| = |DA|$, also ist $ABCD$ auch ein Drachenviereck. Ferner gilt dann $AB \parallel CD$, und die Strecken BC und DA haben keinen Punkt gemeinsam, also ist $ABCD$ auf ein Trapez.

Beweis zu b):

Ist $ABCD$ ein Drachenviereck, so können seine aufeinanderfolgenden Ecken derart mit A, B, C, D bezeichnet werden, dass

$$|AB| = |BC| \qquad \text{und} \qquad |CD| = |DA| \tag{1}$$

gilt. Ist $ABCD$ zugleich ein Trapez, so kann die Bezeichnung außerdem noch so gewählt werden, dass $AB \parallel CD \quad (2)$ gilt.

Als Trapez ist $ABCD$ konvex. Daher wird es durch AC in zwei Dreiecke zerlegt. Dabei sind sowohl $\angle BAC$, $\angle DCA$ bezüglich AB, CD als auch $\angle DAC$, $\angle BCA$ bezüglich AD, BC Wechselwinkel. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ sind wegen (1) gleichschenklig. Daher gilt

$$\angle BAC \cong \angle BCA \qquad \text{und} \qquad \angle DAC \cong \angle DCA$$

(als Basiswinkel). Ferner ist wegen (2) $\angle BAC \cong \angle DCA$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Folglich gilt auch $\angle DAC \cong \angle BCA$.

Da die Winkel Wechselwinkel sind, gilt mithin $AD \parallel BC$. Also sit $ABCD$ ein Parallelogramm und, da es außerdem ein Paar gleichlanger Nachbarseiten besitzt, sogar ein Rhombus.

Aufgabe 3 - 111013

Es sei x eine Variable, die alle von 1 und -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann.

Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, dass die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

Es liegt nahe, für die gesuchten Quotienten der Nenner $x+1$ und $x-1$ zu wählen, weil deren Hauptnenner gleich dem Nenner des vorgegebenen Terms ist. Wir wählen also den Ansatz

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

daraus folgt

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{ax-a+bx+b}{x^2-1}$$

also nach Multiplikation mit x^2-1

$$x = ax - a + bx + b = x(a+b) - a + b \tag{1}$$

Für $x = 0$ folgt daraus, dass notwendig $-a + b = 0 \quad (2)$ gilt. Aus (1) und (2) folgt weiterhin $x = x(a+b)$ und somit, da dies auch für mindestens ein $x \neq 0$ gelten soll: $a + b = 1 \quad (3)$.

Das Gleichungssystem (2), (3) hat nur die Lösung $a = b = \frac{1}{2}$. Die Probe bestätigt die gefundene Zerlegung

$$\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{x-1+x+1}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x^2-1}$$

Aufgabe 4 - 111014

In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

	D	R	E	I
+	D	R	E	I
+	D	R	E	I
	N	E	U	N

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e, aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet. Dann gilt $e,z,h \in \{0,1,2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächstniederen Stelle 29 nicht überschreitet. Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müsste

$$3I = 10e + N \qquad \text{und} \qquad 3D + h = N$$

gelten. Durch Substitution von N erhält man $3I = 10e + h + 3D$, also $3(I - D) = 10e + h$. Daraus folgt wegen $10e + h \geq 0$ zunächst $I \geq D$, wegen $I \neq D$ also

$$I > 0 \qquad \text{und daher} \qquad 1e + h > 0 \tag{1}$$

Ferner folgt $I - D = \frac{10e+h}{3} \quad (2)$.

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage:

$$e=1 \quad , \quad h=2 \quad , \quad I-D=4 \quad (3a) \qquad ; \qquad e=2 \quad , \quad h=1 \quad , \quad I-D=7 \quad (3b)$$

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1{,}2\}$ folgt $3d < 9$, wegen $D > 0$, also $D \in \{1{,}2\}$ (4) und damit wegen (3) $I \in \{5{,}6{,}8{,}9\}$.

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher $I \in \{6{,}8{,}9\}$ (6), $N \in \{8,4,7\}$ (7). Ferner ist $3E + e = U + 10z$ und $3R + z = 10h + E$, d.h. $E = 3R + z - 10h$. Durch Substitution von E erhält man $9R + 37 - 20h + e = U + 10z$, also

$$R = \frac{30h + 7z - e + U}{9} \tag{8}$$

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Diese drei Möglichkeiten müssen der Reihe nach untersucht werden.

Fall 1: Es sei $I = 6$. Dann ist $N = 8, e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 4, R = 7, E = 1$;
$z = 1$, dann $U = 6, R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ \hline & 8 & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$. Dann ist $N = 4, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ \hline & 4 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$. Dann ist $N = 7, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4$ und $E = 3$;
$z = 2$, dann $U = 3$ $R = 5$ und $E = 7 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ \hline & 7 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

Lösungen der I. Runde 1971 übernommen von [5]

7.13.2 II. Runde 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111021
Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z.B. der Schüler A, verlässt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen. Jeder der Schüler B, C, D und E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:
(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.
(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.
A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben.
Wie kann das geschehen?

Es gilt: Jedes Quadrat ist gleichzeitig ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez. Jedes Rechteck ist zugleich ein Parallelogramm und ein Trapez.
A kann daher z.B. folgendermaßen schließen:
Angenommen, die Aussage (1) wäre falsch, d.h., es gäbe auf der Zeichnung entweder keine Quadrat oder genau 1 Quadrat.
Nach den Spielregeln wären dann die Aussagen (2) bis (4) wahr. Gäbe es genau 1 Quadrat, so gäbe es nach (2) noch ein weiteres Rechteck, also mindestens 2 Parallelogramm, im Widerspruch zu (3). Gäbe es kein Quadrat auf der Zeichnung, so nach (2) und (4) auch kein Rechteck und kein Trapez, im Widerspruch zu (3).
Also ist (1) wahr. Daher gibt es mindestens 2 Quadrate auf der Zeichnung.
Also ist (3) falsch, und (2), (4) sind wahr.
Gäbe es 3 oder mehr Quadrate auf der Zeichnung, so müsste wegen (2) und (4) die Anzahl der Trapeze mindestens 12 betragen, was nicht möglich ist. Daher gilt:
Es gibt auf der Zeichnung genau 2 Quadrate, genau 4 Rechtecke und genau 8 Trapeze.

Aufgabe 2 - 111022
Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden. Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?
b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

a) Die Entfernung von A nach B betrage s km. Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4}\frac{km}{h}$ und das zweite mit $\frac{s}{3}\frac{km}{h}$.
Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt soweit von B entfernt wie das zweite, wenn

$$s - \frac{s}{4}t = 2\left(s - \frac{2}{3}t\right)$$

gilt. Wegen $s \neq 0$ ist dies äquivalent mit $1 - \frac{t}{4} = 2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$, also mit $t = \frac{12}{5} = 2{,}4$.
Nach genau 2,4 h war daher das erste Auto doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.

b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{5}s$ genau $\frac{3}{5}s$ des Weges, das zweite wegen $\frac{s}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}s$ genau $\frac{4}{5}$ des Weges zurück.

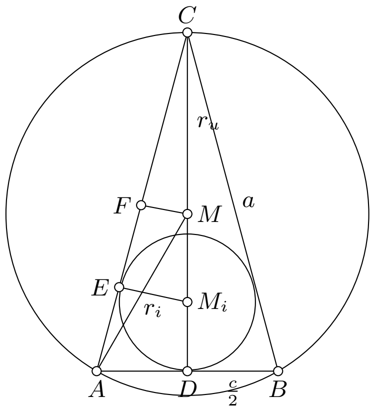
Aufgabe 3 - 111023
Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{u}{v}$, für die $\frac{u+kv}{v+ku} < 1 \quad (*)$ gilt!

Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte $(*)$, Dann ist $v + ku > 0$ und es folgt aus $(*)$:

$$(1) \quad u + kv < v + ku \qquad \text{also} \qquad (2) \quad (u - v)(1 - k) < 0$$

Wegen $u > v$ folgt daraus $k > 1$. Also können höchstens alle $k > 1$ Lösungen von $(*)$ sein.
Tatsächlich ist für $k > 1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie $(*)$ erfüllt.

Aufgabe 4 - 111024
Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $AC = BC = a$ die Basislänge $AB = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis $1 : 4$ beträgt.



Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = AB = a$. Seine Basislänge sei $AB = c$.
Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, wobei D auf AB liegen möge. Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\angle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D.

Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u. Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E, das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F.

Dann ist $AF = CF = \frac{a}{2}$, $AD = BD = AE = \frac{c}{2}$, $DM_u = \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}}$, $CM_i = \sqrt{(a - \frac{c}{2})^2 + r_i^2}$. Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle ACD$ einerseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_u \pm \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{u}} \right)^2 = a^2$$

wobei das obere und das untere Vorzeichen gilt, (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u \sqrt{4r_u^2 - c^2} = a^2 - 2r_u^2$$
$$4r_u^2 - c^2 r_u^2 = a^4 - 4a^2 r_u^2 + 4r_u^4$$
$$r_u = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \qquad (1)$$

und andererseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_i + \sqrt{a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + r_i^2} \right)^2 = a^2$$
$$r_i \sqrt{4a^2 - 4ac + c^2 + 4r_i^2} = ac - \frac{c^2}{2} - 2r_i^2$$
$$4a^2 r_i^2 - 4acr_i^2 + c^2 r_i^2 + 4r_i^4 = a^2c^2 - ac^3 - 4acr_i^2 + \frac{c^4}{4} + 2c^2 r_i^2 + 4r_i^4$$
$$r_i = \frac{c\left(a - \frac{c}{2}\right)}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \qquad (2)$$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2 : \pi r_u^2 = 1 : 4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u = 2r_i$ gilt.
Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2 = c(2a - c)$, dies mit $(a - c)^2 = 0$ und daher mit $a = c$.

Lösungen der II. Runde 1971 übernommen aus [5]

7.13.3 III. Runde 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111031
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a;b)$ reeller Zahlen a,b mit $a \neq 0, b \neq 0$, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar $(a;b)$, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt:

$$(3) \quad a+b=6 \qquad \text{und} \qquad (4) \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$$

Aus (3) folgt $b=6-a$ und $a \neq 6$, hieraus und aus (4): $\frac{1}{a}+\frac{1}{6-a}=6$.
Nach Multiplikation mit $a(6-a)$, Subtraktion von $6a(6-a)$ und Division durch 6 ergibt sich $a^2-6a+1=0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (3): $b_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$. Also können höchstens die Paare $(3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2})$ und $(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$ Lösung sein.
Tatsächlich gelten für die Gleichungen

$$3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{9-8}=6$$

sowie diejenigen Gleichungen, die durch Vertauschung von $(+2\sqrt{2})$ mit $(-2\sqrt{2})$ entstehen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 111032
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x;y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x>y$, für die folgendes gilt:
a) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
b) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x,y), das den Bedingungen a) und b) genügt. Setzt man $x=10a+b$ (mit a,b natürlich und $1\leq a\leq 9$, $1\leq b\leq 9$), denn folgt $y=10b+a$, und wegen $x>y$ auch $a>b$.
Wegen $a\neq 0, b\neq 0$ und $a>b$ ist $2\leq a\leq 9$ und $1\leq b\leq 8$.
Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen x^2 dreistellig ist. Wegen $40^2>1000$ ist dann $a\leq 3$.
Da auch $32^2=1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen erfüllen. Tatsächlich gilt

$$21^2=441 \quad \text{und} \quad 12^2=144 \qquad \text{sowie} \qquad 21^2=961 \quad \text{und} \quad 13^2=169$$

Also erfüllen die Paare $(21,12)$ und $(31,13)$ die Bedingungen a) und b).
Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a,b dieser Zahl

$$(3) \quad (10a+b)^2=1000c+100d+10e+f \qquad \text{sowie} \qquad (4) \quad (10b+a)^2=1000f+100e+10d+c$$

(mit c,d,e,f natürlich und $0\leq c,d,e,f\leq 9$; $c,f\neq 0$). Aus (3) und (4) folgt

$$100a^2+20ab+b^2=1000c+100d+10e+f \qquad ; \qquad a^2+20ab+b^2=c+10d+100e+1000f$$

Durch Subtraktion erhält man

$$99a^2-99b^2=999c+90d-90e-999f \qquad \text{also}$$

$$(5) \quad 11(a^2-b^2)=111c+10d-10e-111f$$

Da die linke Seite von (5) durch 11 teilbar ist, muss es auch die rechte Seite sein.
Addiert man zu $111c+10d-10e-111f$ die durch 11 teilbar Zahle $1111f+110e-110c$, dann erhält man $1000f+100e+10d+c=(10b+a)^2$, und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein.
Daher muss schließlich $11|(10b+a)$ gelten, was wegen $a \neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, dass es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x,x) gibt.

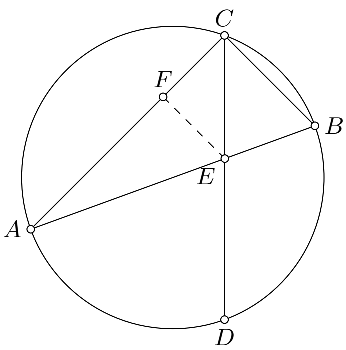
Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 111033
Gegeben sei die Kathetenlänge $BC=a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $AC:BC=2:1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\angle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a!
Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Nach Aufgabenstellung ist $AC=2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras (1) $\quad AB=a\sqrt{5}$. Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD. Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$$AE:EB=AC:BC=2:1$$

Daraus folgt wegen (1): $AE=\frac{2}{3}a\sqrt{5}$ und $EB=\frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F. Dann gilt nach einem der Strahlensätze $EF:BC=AE:AB=2:3$, woraus $EF=\frac{2}{3}a$ folgt. (siehe Abbildung)



Dreieck $\triangle EFC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\angle ACE$ eine Größe von 45° hat, auch gleichschenklig. Also gilt $EF=FC$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun $CE=\frac{2}{3}a\sqrt{2}$.
Weiter gilt: $\triangle ADE \cong \triangle BCE$; denn $\angle BEC \cong \angle AED$ (Scheitelwinkel) und $\angle CBA \cong \angle CDA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen. Daher gilt: $CE:EB=AE:ED$, woraus man

$$ED=\frac{AE\cdot EB}{CE}=\frac{\frac{2}{3}a\sqrt{5}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{5}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}}=\frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

erhält. Somit ergibt sich

$$CD=CE+ED=\frac{2}{3}a\sqrt{2}+\frac{5}{6}a\sqrt{2}=\frac{3}{2}a\sqrt{2}$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 111034
Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R=6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, dass die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt.
Wie groß muss der Radius r (R,h,r in cm gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

Der ausgebohrte Teilkörper lässt sich zerlegen in einen Zylinder mit Radius r und Höhe $h_T := \frac{R-r}{R} \cdot h$ sowie einen Kreiskegel mit Radius r und Höhe $h - h_T = \frac{r}{R} \cdot h$, da das Bohrloch (von der Grundfläche aus gesehen) in einer Höhe von h_T die Mantelfläche des gegebenen Kreiskegelkörpers durchstößt.
Für das Volumen V des Ausgangskegels ergibt sich $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$ und für den Teilkörper

$$V_T = \pi r^2 \cdot h_t + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h - h_T) = \pi r^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(3\frac{R-r}{R} + \frac{r}{R}\right) \cdot h$$

Aus $V = 2V_T$ ergibt sich damit die Gleichung

$$R^2 = 2r^2 \cdot \frac{3R - 2r}{R} \qquad \text{bzw.} \qquad 6r^2R - 4r^3 - R^3 = 0$$

Mit $R = 6$ ergibt sich $4r^3 - 36r^2 + 216 = 0$ bzw. $r^3 - 9r^2 + 54 = 0$. Es ist $r^3 - 9r^2 + 54 = (r-3) \cdot (r^2 - 6r + 18)$, was $r = 3$ als einzige Nullstelle besitzt. Also muss der Radius r des Bohrlochs 3 cm betragen.

Alternativ-Lösung:
Offensichtlich gilt, dass, je größer der Radius r des Bohrlochs gewählt wird, desto größer auch das Volumen V_T des ausgebohrten Teilkörpers ist. Wählt man $r = 0$, so ist $V_T = 0$ und für $r = R$ ist $V_T = V$ der gesamte Ausgangskörper. Variiert man also r im Intervall $[0; R]$, so gibt es genau einen Wert, für den $V_T = \frac{1}{2}V$ gilt.
Wir wählen $r = \frac{1}{2}R$ und zerlegen den ausgebohrten Teilkörper in einen geraden Kreiszylinder sowie einen Kreiskegel. Beide haben als Grundfläche $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$ und als Höhe $\frac{1}{2}h$, sodass sich das Volumen des Teilkörpers ergibt zu

$$V_T = \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{2}V$$

Damit führt die Wahl von $r = \frac{1}{2}R = 3$ cm als einzige dazu, dass der Restkörper genau das halbe Volumen des Ausgangskörpers besitzt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 111035
Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d.h. für alle reellen x gelte $f(x + p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt.
Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

$$\text{a)} \quad F(x) = \frac{1}{2}f(x) \qquad ; \qquad \text{b)} \quad G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) Die Funktion $F(x)$ hat auch die Periode p. Einerseits ist für alle reellen x die Gleichung

$$F(x + p) = \frac{1}{2}f(x + p) = \frac{1}{2}f(x) = F(x)$$

wahr, da f p-periodisch ist. Andererseits würde aber auch für jede kleinere positive Zahl q, für die für alle reellen x die Gleichung $F(x + q) = F(x)$ gilt, folgen, dass wiederum für alle reellen x auch $f(x + q) = 2 \cdot F(x + q) = 2 \cdot F(x) = f(x)$ erfüllt ist, was im Widerspruch zur Minimalität von p stünde. Also gibt es kein solches $0 < q < p$ und auch F ist p-periodisch.

b) Analog rechnet man nach, dass G $2p$-periodisch ist: Einerseits gilt für alle reellen x die Gleichung

$$G(x + 2p) = f\left(\frac{x + 2p}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + p\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = G(x)$$

da f p-periodisch ist. Und andererseits folgt aus der Existenz eines $0 < q < p$, welches für alle reellen x die Gleichung $G(x+2q) = G(x)$ erfüllt, dass auch für alle reellen x die Gleichung $f(x+q) = G(2x+2q) = G(2x) = f(x)$ erfüllt ist, was wieder der Minimalität von p widerspricht.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 111036
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Durch die Angabe zweier Innenwinkel ist das Dreieck bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Streckt man es nun noch um einen geeigneten Faktor, sodass auch die Bedingung an die Differenz der beiden Seitenlängen erfüllt ist, hat man das bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte gesuchte Dreieck konstruiert:

1) Man wähle eine beliebige, echte Strecke $A'B$, trage in A' α und in B β in die gleiche Halbebene an, sodass sich ein Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ergibt, der mit C' bezeichnet sei.

2) Man trage die Strecke $A'C'$ von C' auf der Geraden $C'B$ in Richtung B ab und erhalte damit den Punkt S'. Auf der gleichen Geraden trage man von B aus in Richtung C' die Streckenlänge $a - b$ ab und erhalte den Punkt S.

3) Die Parallele zu $A'S'$ durch S schneide die Gerade BA' in A und die Parallele zu $C'S'$ durch S schneide die Gerade BC' in C.

Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ das zu konstruierende.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle A'BC'$ ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck $\triangle ABC$. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, also auch $= \frac{a-b}{a'-b'}$ gilt, wobei a' und b' die Längen der Strecken BC' bzw. $A'C'$ seien.
Weiterhin gilt nach Konstruktionsschritt 2), dass $|BS'| = a' - b'$ und $|BS| = a - b$ ist.
Nach Strahlensatz gilt nun $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$ und analog $\frac{|CB|}{|C'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$. Damit geht das Dreieck $\triangle ABC$ aus dem Dreieck $\triangle A'BC'$ durch zentrische Streckung mit Zentrum B hervor, wobei der Streckungsfaktor genau so gewählt ist, dass die Differenz der Streckenlängen von BC und AC genau den angegebenen Wert hat.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.13.4 IV. Runde 1971, Klasse 10

Aufgabe 1 - 111041
a) Man beweise den folgenden Satz!
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zwei dieser Primzahlen durch 6 teilbar.
b) Man beweise, dass die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, dass jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird!

Die Summe von drei natürlichen Zahlen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn entweder alle drei Zahlen den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 lassen, oder aber jeder der drei möglichen Reste unter den drei Zahlen vertreten ist.

Der zweite Fall kann in der in der Aufgabe gegebenen Situation nicht vorkommen, da der Rest 0 nicht vertreten ist, da keine Primzahl die größer als 3 ist, durch 3 teilbar sein kann. Also müssen alle drei Primzahlen den gleichen Rest (1 oder 2) bei der Teilung durch 3 lassen und somit jede ihrer Differenzen durch 3 teilbar sein.
Weiterhin sind alle diese Primzahlen größer als 2 und somit ungerade. Ihre Differenzen sind damit alle gerade und insgesamt (wegen ggT(2,3)=1) durch 6 teilbar, was a) zeigt.

Für den Aufgabenteil b) betrachte man die drei Primzahlen 3, 5 und 7, deren Summe 15 durch 3 teilbar ist, die Differenz 7-5=2, aber nicht durch 6.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

a) Wenn die Summe dreier Primzahlen durch 3 teilbar ist, so gilt dasselbe für die Summe ihrer bei Division durch 3 auftretenden Reste.
Jede Primzahl, die größer als 3 ist, lässt bei der Division durch 3 einen der Reste 1, 2. Die einzigen durch 3 teilbaren Summen aus 3 Zahlen, die 1 oder 2 lauten, sind aber 3 und 6, und zwar können diese Summen nur so auftreten, dass alle drei Reste 1 bzw. alle drei Reste 2 lauten.

In beiden Fällen lässt die Differenz je zweier der betrachteten Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 0, ist also durch 3 teilbar. Da ferner jede Primzahl größer als 3 eine ungerade Zahl ist, sind alle betrachteten Differenzen gerade Zahlen, also durch 2 teilbar.
Daraus folgt wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3, dass alle Differenzen durch 6 teilbar sind.

b) Es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels: Die Summe der drei Primzahlen 3, 5, 7 ist durch 3 teilbar, aber die Differenz $5 - 3$ ist nicht durch 6 teilbar.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 111042
Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.
b) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.
c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120000.
d) Der größter gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000.

Es ist $82944000000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$, sodass nur die Primzahlen 2, 3 und 5 in der Primfaktorzerlegung der x_i vorkommen. Wir können also schreiben $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i}$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen a_i, b_i, c_i für $i \in \{1,2,3,4\}$.
Dann ist nach a) $a_1 + \cdots + a_i = 16$, $b_1 + \cdots + b_4 = 4$ und $c_1 + \cdots + c_4 = 6$.

Es ist $24 = 2^3 \cdot 3^1$, sodass nach b) alle $a_i \geq 3$ und alle $b_i \geq 1$ sind. Aus letzterem folgt mit der Summenbedingung an die b_i sofort $b_1 = \cdots = b_4 = 1$. weiterhin ist mindestens eines der c_i gleich 0, da sonst der ggT auch durch 5 teilbar wäre. Analog ist auch mindestens eines der a_i genau gleich 3.

Es ist $120000 = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach c) alle $a_i \le 6$ und alle $c_i \le 4$ sind, wobei diese Maximalwerte auch jeweils mindestens einmal angenommen werden. Aus der Summenbedingung an die a_i, diese obere und die zuvor gezeigte untere Schranke für deren Größe folgt, dass genau eines der a_i den Wert 6, ein zweites den Wert 4 und die beiden übrigen den Wert 3 annehmen müssen.

Es ist $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, sodass nach d) $a_1 \ge 4$, $a_2 \ge 4$, $c_1 \ge 2$ und $c_2 \ge 2$ folgt. Insbesondere folgt damit $a_3 = a_4 = 3$. Da mindestens eines der c_i den Wert 4 hat, ist die Summenbedingung an die c_i nur zu erfüllen, wenn $c_3 = c_4 = 0$, einer der beiden Werte c_1 und c_2 gleich 4 und der andere gleich 2 ist.

Es ist $30000 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach e) $a_2 \le 4$, $a_3 \le 4$, $c_2 \le 4$ und $c_3 \le 4$ folgt, wobei jeweils mindestens einer der a- bzw. c-Werte die Schranke auch annimmt. Aufgrund der zuvor gewonnenen Abschätzung an a_2 gilt $a_2 = 4$ und analog wegen $c_3 = 0$ auch $c_2 = 4$. Es folgt $c_1 = 2$ und abschließend $a_1 = 6$.
Zusammen erhalten wir
$x_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1} = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, $\quad x_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2} = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$
$x_3 = 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{c_3} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$, $\quad x_4 = 2^{a_4} \cdot 3^{b_4} \cdot 5^{c_4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei ein Quadrupel mit den Eigenschaften a) bis e). Wegen a) und $82944000000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$ gilt dann

$$x_1 = 2^{u_1} \cdot 3^{v_1} \cdot 5^{w_1}, \quad x_2 = 2^{u_2} \cdot 3^{v_2} \cdot 5^{w_2}, \quad x_3 = 2^{u_3} \cdot 3^{v_3} \cdot 5^{w_3}, \quad x_4 = 2^{u_4} \cdot 3^{v_4} \cdot 5^{w_4}$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen u_i, v_i, w_i ($i = 1,2,3,4$).
Wegen b) und $24 = 2^3 \cdot 3$ ist $v_i \ge 1$, wegen c) und $120000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^4$ aber $v_i \le 1$, also

$$v_i = 1 \tag{1}$$

Aus a) folgt $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$, aus d) und $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ aber $w_1, w_2 \ge 2$. Also gilt

$$w_3 = 2 \tag{2}$$

Nach e) und $30000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ ist w_2 oder w_3 gleich 4, hiernach und nach (2) muss

$$w_2 = 4 \tag{3}$$

sein. Aus $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$ folgt wegen (3) $w_1 + w_3 + w_4 = 2$. Wegen d), also $w_1 \ge 2$, ist dies nur für $w_1 = 2, w_3 = w_4 = 0$ möglich.
Wegen d) ist $u_2 \ge 4$, wegen c) aber $u_2 \le 4$, also

$$u_2 = 4 \tag{4}$$

Aus a) folgt $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$, aus d) und b) aber $u_1, u_2 \ge 4$ und $u_3 \ge 3$. Also gilt

$$u_4 \le 5 \tag{5}$$

Nach c) ist eins der u_i gleich 6, nach e) gilt aber $u_2, u_3 \le 4$; hiernach und nach (5) muss

$$u_1 = 6 \tag{6}$$

sein. Aus $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$ folgt wegen (4), (6) $u_3 + u_4 = 6$. Wegen b), also $u_3, u_4 \ge 3$, ist dies nur für $u_3 = u_4 = 3$ möglich. Daher kann höchstens das Quadrupel aus den Werten

$$x_1 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4800, \quad x_2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 = 30000, \quad x_3 = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad x_4 = 2^3 \cdot 3 = 24$$

die Eigenschaften a) bis e) besitzen. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3A - 111043A
Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $AB = AD > BC = CD$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $AB : BC = BC : FB$ gilt.
Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $EC = BC (= CD)$ und $FE = FB$ gilt.
Beweisen Sie, dass E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

Aus $EC = BC$ und $FE = FB$ folgt, dass $EBCF$ ebenfalls ein Drachenviereck ist. Die Dreiecke ABC und FBC haben eine gemeinsamen Winkel in B.
Aus $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{FB}$ folgt, dass diese und somit die beiden Drachenvierecke kongruent sind mit $FE = FB < EC = BC$.

Definiere $\alpha := \angle DAB := \angle BCF$, $\beta = \angle ABC = \angle BCD = \angle EBC = \angle CFB$ und $\gamma := \angle BCD = \angle FEB$. Dann erhalten wir $\angle ECD = \gamma - \alpha$. Da das Dreieck ECD gleichschenklig mit Basis ED ist, gilt $\angle CDE = 90° - \frac{\gamma-\alpha}{2}$ und somit

$$\angle EDA = \angle CDA - \angle CDE = \beta - (90° - \frac{\gamma - \alpha}{2}) = \frac{2\beta + \gamma + \alpha - 2\alpha}{2} - 90° = 90° - \alpha = 90° - \angle DAB$$

Also schneidet die Gerade ED die Strecke AB im rechten Winkel.

Aufgabe 3B - 111043B
Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe:
Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, dass A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.
Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert! Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $AB = a$ und $BC = b$ bedeutet.
Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, dass er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.
Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Es ist $F = ab + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und $u = 3a + 2b$, also $b = \frac{u-3a}{2}$ und damit

$$F = a \cdot \frac{u}{2} - \frac{3}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{1}{a} \cdot \left(2F + 3a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \frac{2F}{a} + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

Es gilt für positive reelle Zahlen x und y die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ bzw. nach Multiplikation mit 2: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, wobei Gleichheit für $x = y$ eintritt. Setzt man $x := \frac{2F}{a} > 0$ und $y := \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a > 0$ in diese Ungleichung ein, erhält man

$$u = x + y \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{2F}{a} \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a} = 2 \cdot \sqrt{(6 - \sqrt{3})F}$$

Dabei nimmt u also seinen minimalen Wert genau dann an, wenn

$$\frac{2F}{a} = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

bzw. $4F = (6 - \sqrt{3})a^2$, also $a = 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$ und $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \cdot F$, sodass wir

$$ab = F - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = F \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}\right) = F \cdot \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$$

und schließlich

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{4\frac{F}{6-\sqrt{3}}}{F \cdot \frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}} = \frac{4}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

erhalten.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 111044
Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$-2x + 3y = 2m \quad (1) \qquad ; \qquad x - 5y = -11 \quad (2)$$

Aus (2) folgt $5y - 11 = x < 0$, also wegen $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ direkt $y = 1$ oder $y = 2$. Im ersten Fall ist $x = -6$ und $m = \frac{15}{2}$, im zweiten $x = -1$ und $m = 4$.
Damit ergeben sich die beiden Lösungstripel (4, – 1,2) und $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$. Die Probe bestätigt, dass beide angegebenen Tripel Lösungen des Gleichungssystems sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

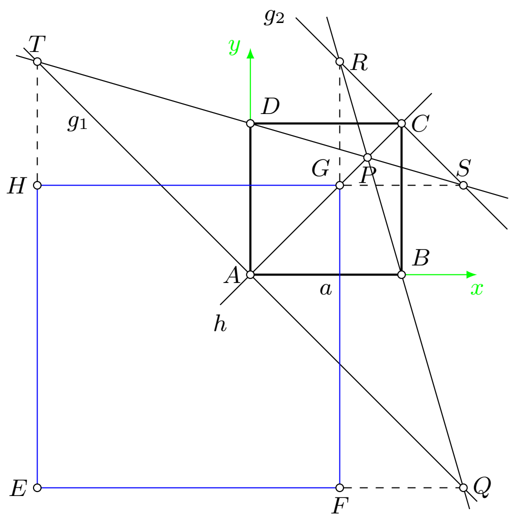
Angenommen, es gibt ein Tripel (m, x, y) mit den geforderten Eigenschaften. Dann ist

$$x = 5y - 11 < 0 \tag{1}$$

also $y < \frac{11}{5}$. Daher ist y einer der Werte 1, 2. Hierzu gehören nach (1) für x die Werte -6 bzw. -1 und nach (*) für m die Werte $\frac{15}{2}$ bzw. 4. Also können höchstens die Tripel $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$ und $(4, -1, 2)$ Lösung der Aufgabe sein.
Eine Probe zeigt, dass diese beiden Tripel das Gleichungssystem erfüllen und die übrigen geforderten Eigenschaften haben.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 111045
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrates verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2.
Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt.
Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, dass $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$.



Zur Lösung der Aufgabe wird ein Koordinatensystem derart eingeführt, dass A im Koordinatenursprung liegt und AB auf der x-Achse sowie AD auf der y-Achse liegen.

Dann haben die Punkte die Koordinaten: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$ und $D(0;a)$. Der Punkt P auf AC (Funktion $y=x$) habe die Koordinaten $P(p;p)$. Die Gerade h liegt dann auf der linearen Funktion $y=x$, die Gerade g_1 durch A auf $y=-x$ (1) und die Gerade g_2 durch C auf $y=-x+2a$ (2). Für die Gerade durch B und P ermittelt man

$$g(BP): \quad y=\frac{p}{p-a}x-\frac{pa}{p-a} \tag{3}$$

und für die Gerade durch D und P

$$g(DP): \quad y=\frac{p-a}{p}x+a \tag{4}$$

Lösen der Gleichungssysteme aus (2) und (3) bzw. (4) ergibt die Koordinaten der Punktes R und S zu:

$$R\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p};\frac{ap}{2p-a}\right) \qquad ; \qquad S\left(\frac{ap}{2p-a};\frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

Auf Grund der symmetrischen Lage beider Punkte zu $y=x$ sind deren x- und y-Koordinaten vertauscht. Analog ergibt sich aus den Gleichungssystemen aus (1) und (3) bzw. (4):

$$Q\left(\frac{ap}{2p-a};\frac{ap}{a-2p}\right) \qquad ; \qquad T\left(\frac{ap}{a-2p};\frac{ap}{2p-a}\right)$$

Wie man der Darstellung entnimmt, folgen daraus die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks $EFGH$ zu:

$$E\left(\frac{ap}{a-2p};\frac{ap}{a-2p}\right); F\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p};\frac{ap}{a-2p}\right); G\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p};\frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right); H\left(\frac{ap}{a-2p};\frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

und für die Seitenlängen des Rechtecks

$$EF=FG=GH=HE=2a$$

Damit ist der Flächeninhalte $I_2=4a^2$ des Rechtecks $EFGH$ viermal so groß, wie der Flächeninhalt $I_1=a^2$ des Ausgangsquadrates $ABCD$, d.h. $I_1:I_2=1:4$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 6 - 111046

Es seien A,B,C,D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A',B',C',D' die Schnittpunkte der aus A,B,C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$. Man beweise, dass dann gilt

$$\frac{SA'}{AA'}+\frac{SB'}{BB'}+\frac{SC'}{CC'}+\frac{SD'}{DD'}=1$$

Es sei L_D der Höhenfußpunkt von D auf die Tetraederfläche $\triangle ABC$ sowie L_{SD} analog der von S auf die gleiche Fläche. Dann sind nach Konstruktion die Geraden DL_D und SL_{SD} parallel, sodass nach Strahlensatz $\frac{|SL_{SD}|}{|DL_D|}=\frac{|SD'|}{|DD'|}$ gilt.
Da diese Strecken die Höhen der Tetraeder $ABCS$ bzw. $ABCD$ über der gleichen Grundfläche $\triangle ABC$ sind, stehen ihre Volumina V_D bzw. V im gleichen Verhältnis, also $V_D=\frac{|SD'|}{|DD'|}\cdot V$.
Auf analoge Weise berechnen sich die Volumina V_A,V_B und V_C der Tetraeder $SBCD$, $SACD$ bzw. $SABD$ zu $V_A=\frac{|SA'|}{|AA'|}\cdot V$, $V_B=\frac{|SB'|}{|BB'|}\cdot V$ und $V_C=\frac{|SC'|}{|CC'|}\cdot V$.

Die vier Tetraeder $SABC$, $SABD$, $SACD$ und $SBCD$ zerlegen den Tetraeder $ABCD$ vollständig in vier Teilkörper, sodass sich ihre Volumina zum Volumen des Gesamt-Tetraeder aufaddieren. Es gilt also

$$V=V_A+V_B+V_C+V_D=\left(\frac{|SA'|}{|AA'|}+\frac{|SB'|}{|BB\prime|}+\frac{|SC'|}{|CC'|}+\frac{|SD'|}{|DD'|}\right)\cdot V$$

was wegen $V\neq 0$ direkt das Gewünschte zeigt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

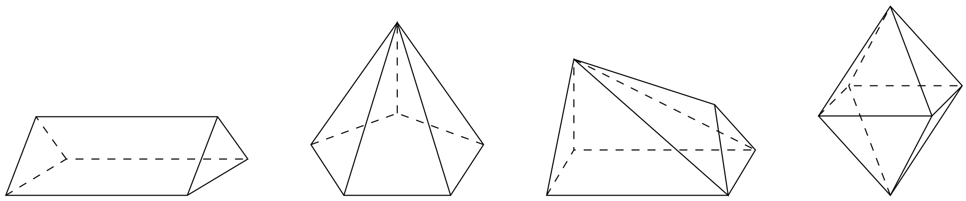
7.14 XII. Olympiade 1972

7.14.1 I. Runde 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121011
Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!

Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!

Es könnten zum Beispiel die in der Abbildung gezeigten Körper mit 9, 10, 11 bzw. 12 Kanten gezeichnet werden.



Aufgabe 2 - 121012
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y-Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!

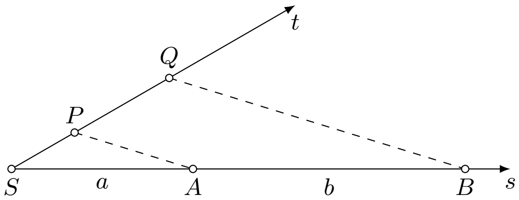
Die Bedingung, nicht parallel zur y-Achse zu verlaufen, wird genau dann von einer Geraden erfüllt, wenn sie eine Gleichung der Form $y = mx + b$ hat. Jede Gerade mit einer solchen Gleichung hat genau dann gemeinsame Punkte mit der Parabel $y = x^2$ wenn die Gleichung

$$x^2 - mx - b = 0$$

reelle Lösungen besitzt, und zwar sind die Lösungen dann die Abszissen der gemeinsamen Punkte. Daher erfüllen m, b genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die Gleichung (1) genau die Lösung $x = 3$ besitzt, also genau dann, wenn (1) die Form $(x - 3)^2 = 0$ hat, d. h, $m = 6$ und $b = -9$ ist. Demnach erfüllt genau die Gerade $y = 6x - 9$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 3 - 121013
Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b.

Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\dfrac{a \cdot b}{a + b}$!



Man zeichne zwei von, einem Punkt S ausgehende, nicht auf derselben Gemden liegende Strahlen s, t.

Auf s trage man die Strecke SA der Länge a und auf deren Verlängerung über A hinaus die Strecke AB der Länge b ab.

Auf t trage man die Strecke SQ der Länge b ab.

Die Parallele durch A zu BQ schneidet t in einem Punkt P. Dann hat die Strecke SP die Länge $\frac{ab}{a+b}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $|SQ| = b$, $|SA| = a$, $|SB| = a + b$.. Ferner ist $AP \parallel BQ$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$|SP| : |SQ| = |SA| : |SB|$$

d.h. $\frac{|SP|}{b} = \frac{a}{a+b}$ und somit $|SP| = \frac{ab}{a+b}$.

Aufgabe 4 - 121014

In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte.

Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Der ursprüngliche Preis p_1 wird um $p_1\% = \frac{p_1}{100}$ gesenkt. Also ist der neue Preis p_2 gleich $p_2 = p_1 - p_1 \cdot \frac{p_1}{100} = p_1 - \frac{p_1^2}{100}$. Da p_2 21 Groschen beträgt, gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{p_1^2}{100} + p_1 &= 21 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2100 &= 0 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2500 &= 400 \\ (p_1 - 50)^2 &= 400 \\ p_1 &= 50 \pm 20 \end{aligned}$$

Also war der ursprüngliche Preis p_1 30 oder 70 Groschen. Zu diesem ursprünglichen Preis konnte der Bauer genau drei Tiere kaufen. Zu 21 Groschen kann er n Tiere kaufen, wobei er jeweils sein ganzes Geld ausgibt. Also gilt: $3 \cdot p_1 = 21 \cdot n \Leftrightarrow n = \frac{p_1}{7}$. Da n eine natürliche Zahl ist, muss p_1 durch 7 teilbar sein. Dies gilt für 70, aber nicht für 30 Groschen. Also betrug der ursprüngliche Preis 70 Groschen. Der Bauer kann nun 10 Tiere kaufen.

Lösungen der I. Runde 1972 übernommen von [5]

7.14.2 II. Runde 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121021
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Bildet man aus irgendeiner im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

Es sei $z_1 = [a_1a_2...a_n]$ eine o.B.d.A. n-stellige natürliche Zahl, wobei $[a_1a_2...a_n]$ die Ziffernfolge im dekadischen System darstelle.
Mit $z_2 = [b_1b_2...b_n]$ sei die Ziffernfolge von z_2 bezeichnet, wobei die b_i $(i = 1{,}2{,}...{,}n)$ eine beliebige Permutation der a_i $(i = 1{,}2{,}...{,}n)$ sind, d.h. für jedes a_i aus z_1 existiert ein b_j in z_2 $(i{,}j = 1{,}2{,}...{,}n)$.
Für die Differenz $z_1 - z_2$ sei die Ziffernfolge $[c_1c_2...c_n]$, wobei auch $c_1 = 0$ auftreten kann.

Bei der ziffernweisen Subtraktion von z_1 und z_2 können zwei Möglichkeiten auftreten:

1. Für ein a_i und das entsprechende b_i aus z_2 gilt $a_i \geq b_i$. Das c_i in $z_1 - z_2$ ist dann gleich $c_i = a_i - b_i$.
2. Für ein a_i und das entsprechende b_i in z_2 gilt $a_i < b_i$. Bei der Subtraktion tritt damit ein Überlauf auf, d.h. das a_{i-1} wird um 1 gesenkt. Ist in diesem Fall $i = 1$ wird das Ergebnis insgesamt negativ. Für die Ziffer c_i ergibt sich $c_i = 10 - (b_i - a_i)$.

Die Zahl $|z_1 - z_2|$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Quersumme ist

$$Q = |c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n|$$

Nun wird sowohl in z_1 als auch die z_2 die Nummerierung der Ziffern geändert, ohne ihre tatsächliche Position zu verschieben.

Es seien dann genau $m \leq n$ Ziffern a_i die größer oder gleich den b_i sind. Für die $\{a_{m+1}, ..., a_n\}$ sei a_i kleiner als b_i. Für die Quersumme wird

$$Q = |(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_m - b_m) + (10 - (b_{m+1} - a_{m+1}) + ... + (10 - (b_n - a_n)) - (n - m)|$$

wobei der letzte Summand die Gesamtzahl der Überträge charakterisiert. Durch Umformen wird

$$= |(a_1 + ... + a_m) - (b_1 + ... + b_m) - (b_{m+1} + ... + b_n) + (a_{m+1} + ... + a_n) + 10(m - n) - (n - m)|$$
$$= |(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (b_1 + b_2 + ... + n) + 9(m - n)|$$

Da es für jedes a_i $(i = 1{,}2{,}...{,}n)$ ein entsprechende Ziffer b_i in z_2 gibt, heben sich die Summen der a_i und b_i gegenseitig auf und die Quersumme wird zu $Q = |9(m - n)|$.
Diese ist offensichtlich durch 9 teilbar, so dass $|z_1 - z_2|$ durch 9 teilbar ist. w.z.b.w.

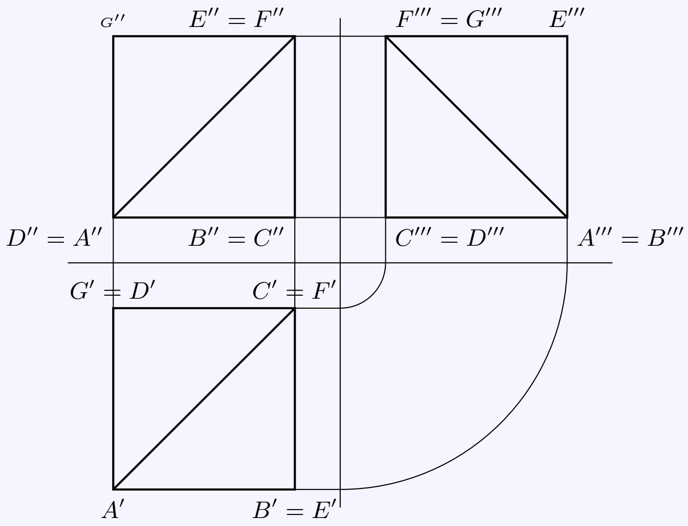
Zweite Lösung:

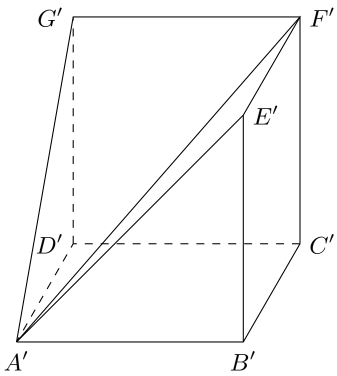
Da z_1 und z_2 aus den gleichen Ziffern bestehen, haben sie auch die gleiche Quersumme q. Daher lassen beide Zahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest r $(0 \leq r < 9)$. Somit gilt $z_1 = 9n+r$ sowie $z_2 = 9m+r$ (n, m natürliche Zahlen).
Daraus folgt $|z_1 - z_2| = 9|n - m|$, d. h., $|z_1 - z_2|$ ist durch 9 teilbar.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 121022

In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°; q = \frac{1}{2}\right)$.
b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!





Der Körper entsteht, in dem aus einem Würfel eine Pyramide mit der Grundfläche $EFGH$ (H wäre der Punkt senkrecht über A, der zum Würfel ergänzt) und der Höhe a herausschneidet.
Damit wird für das Volumen V des Körpers

$$V = W_{\text{Würfel}} - V_{\text{Pyamide}} = a^3 - \frac{1}{3}a \cdot a^2 = \frac{2}{3}a^3 = 144cm^3$$

Aufgabe 3 - 121023
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0; 6)$.
Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

Auf Grund der Symmetrie zur y-Achse und ihres Scheitelpunktes muss die zweite Parabel eine Gleichung der Form $y = ax^2 + 6$ mit einem reellen a haben.
Die Schnittpunkte von $y = x^2$ und $y = ax^2 + 6$ haben die Abszissen

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}} \qquad ; \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}$$

Damit das Vierecke A_1B_1BA ein Quadrat wird, muss o.B.d.A. für x_1 die Ordinate gleich $2x_1$ sein. Aus

$$2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}\right)^2$$

ergibt sich $a_1 = -\frac{1}{2}$. Die Funktion $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ hat ihre Nullstellen bei

$$x_1 = 2\sqrt{3} \qquad ; \qquad x_2 = -2\sqrt{3}$$

Die gesuchten Punkte sind also $S_1(2\sqrt{3}; 0)$ und $S_2(-2\sqrt{3}; 0)$.

Aufgabe 4 - 121024

a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ grafisch zu ermitteln.
Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so dass diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?

b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, dass $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

Seien a, b, c, q, p, h die üblichen Bezeichnungen in einem rechtwinkligen Dreieck. Mit p,q ist auch c rational. Also sind für die Wurzeln nur die Strecken a, b, h möglich. Insbesondere gilt, dass $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 - h^2 = p^2$ und $b^2 - h^2 = q^2$ Quadrate rationaler Zahlen sind.

a) Da $\sqrt{133}^2 + \sqrt{12}^2 = 145$ keine Quadratzahl ist und $\sqrt{12} < \sqrt{133}$ gilt, bleibt nur die Möglichkeit $a = \sqrt{133}$, $h = \sqrt{12}$ (oder symmetrisch dazu $b = \sqrt{133}$). Das Gleichungssystem aus dem Höhen- und Kathetensatz

$$pq = 12p(p + q) = 133$$

lässt sich eindeutig lösen durch $p^2 = 121 \Rightarrow p = 11$ und $q = \frac{12}{11}$

b) Da $\sqrt{133}^2 - \sqrt{11}^2 = 122$ kein Quadrat ist, bleibt nur der Ansatz $a = \sqrt{133}$, $b = \sqrt{11}$. Durch Addition der beiden Kathetengleichungen

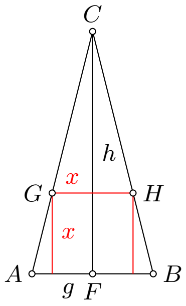
$$p(p + q) = 133q(p + q) = 11$$

erhalten wir $(p + q)^2 = 144 \Rightarrow p + q = 12$. Einsetzen der Summe ergibt $p = \frac{133}{12}$ und $q = \frac{11}{12}$.
Bemerkung: Wurzeln zweier rationaler Zahlen sind simultant konstruierbar, falls die Summe oder Differenz das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Aufgaben der II. Runde 1972 gelöst von Steffen Polster

7.14.3 III.Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121031
Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $|CD| = h$ und die Basislänge $|AB| = g$ genannt.
Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, dass EF auf AB, G auf BC und H auf AC liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9 : 4$ verhalten.



Nach dem Strahlensatz gilt für die Grundseite g, die Höhe h und die Länge x der Quadratseiten

$$\frac{h-x}{x} = \frac{h}{g} \Rightarrow g = \frac{hx}{h-x} \tag{1}$$

Anderseits soll für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und der Flächeninhalt des Quadrats gelten:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{\frac{1}{2}gh}{x^2} = \frac{9}{4} \tag{2}$$

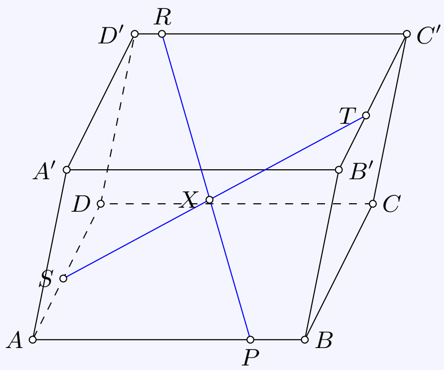
Einsetzen von (1) in (2) ergibt

$$18x^2 - 18hx + 4h^2 \Rightarrow x_1 = \frac{h}{3}; \quad x_2 = \frac{2h}{3}$$

Für die Lösungen wird (2) dann zu x_1: $g = \frac{h}{2}$ und x_2: $g = 2h$.
Für das Verhältnis $g : h = 1 : 2$ (spitzwinkliges Dreieck) bzw. $g : h = 2 : 1$ (stumpfwinkliges Dreieck) wird das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ gleich $9 : 4$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 121032



Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d.i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.
Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wenn P ein Punkt auf AB, R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist.

Wir legen so ein Koordinatensystem in den Raum des Parallelepipeds, dass A in dessen Ursprung liegt. Weiterhin identifizieren wir alle Punkte mit ihren jeweiligen Ortsvektoren und bezeichnen mit $\vec{a} := \vec{B}$, $\vec{b} := \vec{D}$ und $\vec{c} := \vec{A'}$, sodass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

Dann gibt es eine reelle Zahl $0 \leq s_1 \leq 1$ mit $\vec{P} = s_1 \cdot \vec{a}$. Analog gibt es reelle Zahlen s_2, t_1 und t_2, die jeweils zwischen 0 und 1 liegen, sodass $\vec{R} = s_2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{S} = t_1 \cdot \vec{b}$ und $\vec{T} = \vec{a} + t_2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$ gilt.

Für jeden Punkt X auf der Strecke PR gibt es eine reelle Zahl $0 \leq k \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{P} + k \cdot (\vec{R} - \vec{P}) = (1-k) \cdot s_1 \cdot \vec{a} + k \cdot s_2 \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} = (s_1 - ks_1 + ks_2) \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c}$$

Analog gibt es für jeden Punkt X auf der Strecke ST eine reelle Zahl $0 \leq \ell \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{S} + \ell \cdot (\vec{T} - \vec{S}) = (1-\ell) \cdot t_1 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{a} + \ell \cdot t_2 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c} = \ell \cdot \vec{a} + (t_1 - \ell t_1 + \ell t_2) \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c}$$

Da X auf beiden Strecken liegt und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, müssen ihre jeweiligen Koeffizienten in beiden Darstellungen von $\vec{X}$ übereinstimmen, insbesondere also die von $\vec{c}$, sodass $k = \ell$ folgt.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar k) sein müssen, während aus der zweiten Darstellung folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar $\ell = k$) sind, sodass tatsächlich die Koeffizienten aller drei Vektoren übereinstimmen und X auf der Geraden $k \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, also der Raumdiagonalen AC' liegt.

Nun ist noch zu überprüfen, ob tatsächlich jeder Punkt auf der Raumdiagonalen AC' als Schnittpunkt X angenommen werden kann. Da das Parallelepiped konvex ist, schneiden sich je zwei Strecken, die durch Punkte auf dessen Oberfläche begrenzt werden, wieder im Innern oder auf dessen Oberfläche, sodass nur Punkte, die auf der Strecke AC' liegen, in Frage kommen, was $0 \leq k \leq 1$ bedeutet.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ erhalten wir $k = s_1 - ks_1 + ks_2$ bzw. $k \cdot (1 - s_2 + s_1) = s_1$, also für $s_2 - s_1 \neq 1$ die Darstellung $k = \frac{s_1}{1-s_2+s_1}$.

Setzt man hierbei $s_1 := s_2$, so ergibt sich $k = s_1$, was mit s_1 das gesamte Intervall $[0,1]$ durchläuft, sodass auch tatsächlich alle Punkte auf der Strecke AC' als Schnittpunkte X angenommen werden.

Alternativlösung:

Die zueinander parallelen, aber verschiedenen Geraden AB und $D'C'$ spannen eine Ebene ϵ_1 auf. Damit liegt auch PR in dieser Ebene. Analog spannen auch die parallelen, aber verschiedenen Geraden AD und $B'C'$ eine Ebene ϵ_2 auf, in der dann die Strecke ST liegt.

Damit muss der Schnittpunkt X der zu betrachtenden Strecken auf der Schnittgerade der beiden Ebenen liegen. (Es sind ϵ_1 und ϵ_2 nicht identisch, da B' auf ϵ_2, nicht aber auf ϵ_1 liegt.) Da sowohl A als auch C' in beiden Ebenen enthalten sind, ist AC' genau deren Schnittgerade, sodass X auf dieser Gerade liegen muss.

Aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds muss sich X innerhalb oder auf der Oberfläche des Parallelepipeds befinden, sodass nur Punkte auf der Strecke AC' in Frage kommen.

Wählt man jedoch für einen beliebigen Punkt X auf dieser Strecke die Punkte P und R als Schnitt der zu $ADD'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AB bzw. $D'C'$, so liegen diese Schnittpunkte (wieder aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds) auf den Strecken AB bzw. $D'C'$ und X auf PR. Wählt man für den gleichen Punkt X die Punkte S bzw. T als Schnittpunkte der zu $ABB'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AD bzw. $B'C'$, so liegen diese wieder auf den entsprechenden Strecken und X auch auf ST, sodass für jeden Punkt X auf der Strecke AC' Strecken PR und ST gemäß den Vorgaben gefunden werden können, die sich in X schneiden.

Damit ist genau die Strecke AC' die gesuchte Punktmenge.

Beide Lösungen von cyrix

Aufgabe 3 - 121033
Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend nummeriert; es mögen also nummeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, dass dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Für die Primzahlen mit Nummern (in dieser Liste) 1 und 2, also 5 und 7, gilt die Aussage offenbar. Wenn sie darüber hinaus für die Primzahl mit Nummer (in dieser Liste) k für eine positive ganze Zahl k gilt, dann zeigen wir nun, dass sie auch für die mit Nummer $k+2$ gilt, womit sie induktiv für alle Primzahlen ≥ 5 gezeigt ist.

Sei also p die Primzahl mit Nummer k und es gelte $p > 3k$. Da $p > 2$ ungerade ist, können $p+1$, $p+3$ und $p+5$ keine Primzahlen sein.
Von den drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, $p+2$ und $p+4$ ist darüber hinaus eine durch drei teilbar. Da es $p > 3$ nicht ist, ist neben den genannten drei geraden noch mindestens eine der zwei ungeraden Zahlen unter $p+1$ bis $p+5$ keine Primzahl. Es kann also nach p höchstens eine weitere Primzahl geben, die $\leq p+5$ ist.
Demzufolge hat die nun noch nächstgrößere Primzahl – also jene mit Nummer $k+2$ – mindestens den Wert $p+6 > 3k+6 = 3(k+2)$, was zu beweisen war.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Jede natürliche Zahl $z \geq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$ mit natürlichem $m \geq 1$. Da $6m$, $6m+2$, $6m+4$ durch 2 teilbar und (wegen $z \geq 5$) größer als 2 sind und da $6m+3$ durch 3 teilbar und größer als 3 ist, folgt: Jede Primzahl $p \geq 5$ ist von einer der Formen $6m-1$, $6m+1$ ($m \geq 1$).

Nummeriert man alle diese Zahlen auf dieselbe Weise wie die Primzahlen $p \geq 5$ der Größe nach und bezeichnet dabei die mit der Nummer n versehene Zahl mit f_n, dagegen die Primzahl mit der Nummer n mit p_n, so gilt also

$$p_n \geq f_n, \qquad n = 1,2,3,... \tag{1}$$

Die Zahlen f_n ergeben sich nun, indem man der Reihe nach für jedes $m = 1,2,3,...$ erst $6m-1$ und dann $6m+1$ bildet. Die Nummern n kann man ebenso dadurch erhalten, dass man der Reihe nach für jedes $m = 1,2,3,...$ erst $2m-1$ und dann $2m$ bildet. Da aber für $m = 1,2,3,...$ stets $6m-1 > 3(2m-1)$ und $6m+1 > 3 \cdot 2m$ gilt, ergibt sich

$$f_n > 3n, \qquad n = 1,2,3,... \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $p_n > 3n$ für alle $n = 1,2,3,...$, w. z. b. w.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 121034
Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, dass er eine Verspätung von genau 4 min hatte.
Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

Für den Weg gilt $s = 20$ km. Sind v_1 die vorgesehene Geschwindigkeit im Abschnitt s und t_1 die vorgesehene Zeit, so ist

$$v_1 = \frac{20km}{t_1} \tag{1}$$

Der Lokomotivführer fährt mit $v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h}$ und benötigt die Zeit t_2, die 4 min $= \frac{1}{15}$ h kürzer ist als t_1. Das ergibt

$$v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h} = \frac{20km}{t_1 - \frac{1}{15}h} = t_2$$

Einsetzen von (1) führt zum Ergebnis $t_1 = \frac{2}{5}$ h = 24 min und der vorgesehenen Geschwindigkeit $v_1 = 50\frac{km}{h}$. Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Zweite Lösung:

Es seien t bzw. t' die Maßzahlen der in Stunden gemessenen Zeiten für das fahrplanmäßige bzw. für das tatsächliche Durchfahren der Strecke s, ferner seien v bzw. v' die Maßzahlen der in km/h gemessenen fahrplanmäßigen bzw. tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit. Dann gilt

$$tv = 20 \qquad , \qquad t'v' = 20 \tag{1,2}$$

ferner

$$t' = t - \frac{1}{15} \quad , \quad v' = v + 10 \tag{3,4}$$

Aus (3) und (1) folgt $t' = \frac{20}{v} - \frac{1}{15}$; setzt man dies und (4) in (2) ein, so ergibt sich $\left(\frac{20}{v} - \frac{1}{15}\right)(v+10) = 20$, also $(300-v)(v+10) = 300v$, d.h.

$$v^2 + 10v - 3000 = 0 \tag{5}$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $v_{1,2} = -5 \pm \sqrt{3025}$, d.h. $v_1 = 50$, $v_2 = -60$. Wegen $v > 0$ betrug daher die fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h.
Da die Erfüllbarkeit der Bedingungen aus der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine "Probe" nicht erforderlich.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 121035
Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + ... + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg\frac{606}{625}$$

Es ist

$$\lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lg\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \lg(k^2-1) - 2\lg(k) = \lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k) \qquad \text{also}$$

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + \cdots + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \sum_{k=25}^{100} \lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=25}^{100} (\lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k)) = \sum_{k=25}^{100} \lg(k-1) + \sum_{k=25}^{100} \lg(k+1) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \sum_{k=24}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{101} \lg(k) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(25) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \lg(100) + \lg(101) - 2\lg(25) - 2\lg(100) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(101) - \lg(25) - \lg(100) = \lg\left(\frac{24 \cdot 101}{25 \cdot 100}\right) = \lg\left(\frac{606}{625}\right)$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Nach den Logarithmengesetzen lässt sich die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + ... + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg\left(\left(1 - \frac{1}{25^2}\right)\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)\right)$$

Nach Verwendung einer binomischen Formel ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung also gleich

$$\lg\left(\frac{(25-1)(25+1)}{25^2} \cdot \frac{(26-1)(26+1)}{26^2} ... \frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\right)$$
$$= \lg\frac{24 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 27 \cdot ... \cdot 98 \cdot 97 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 101}{25^2 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot ... \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100^2}$$
$$= \lg\frac{24 \cdot 25 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot ... \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100 \cdot 101}{25^2 \cdot 26^2 \cdot 27^2 \cdot ... \cdot 98^2 \cdot 99^2 \cdot 100^2} = \lg\frac{24 \cdot 101}{25 \cdot 100} = \lg\frac{606}{625}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 121036
Beweisen Sie den folgenden Satz! Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem "Goldenen Schnitt" geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem "Goldenen Schnitt" in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und $\angle ACB = 36°$. Dann sind die beiden Basiswinkel $\angle BAC = \angle CBA$ jeweils $\frac{1}{2} \cdot (180° - 36°) = 72°$ groß. Da dem größeren Winkel in einem Dreieck die größere Seite gegenüberliegt, ist also auch $|AC| > |AB|$.

Sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei A durch BC.
Da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten schneidet, gilt $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ und insbesondere $|CW| > |WB|$.

Es ist $\angle BAW = \frac{1}{2}\angle BAC = 36°$, sodass das Dreieck $\triangle BAW$ ähnlich ist zum Dreieck $\triangle ABC$ und damit $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|WB|}$, also $|AB| = |CW|$ gilt. Damit ist die Basis AB genauso lang wie der größere Abschnitt der durch W geteilten Strecke AC.
Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Punkt W den Schenkel AC tatsächlich im Goldenen Schnitt teilt:

Setzt man diese Gleichheit sowie $|AC| = |BC| = |CW| + |WB|$ in das zuvor erhaltene Verhältnis ein, so ergibt sich $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|CW|+|WB|}{|CW|}$, sodass W die Strecke AC im Goldenen Schnitt teilt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.14.4 IV.Stufe 1972, Klasse 10

Aufgabe 1 - 121041
a) Zeigen Sie, dass es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist!
Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitz sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

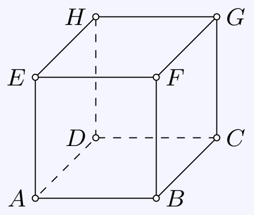
a) In einem konvexen n-Eck beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2)\cdot 180°$. Da in einem solchen konvexen n-Eck alle Innenwinkel kleiner als 180° und die spitzen jeweils kleiner als 90° sind, folgt also $(n-2)\cdot 180° < m\cdot 90° + (n-m)\cdot 180°$ bzw. $n-2 < n - \frac{m}{2}$ und damit $m < 4$.

b) Es ist $m = 3$, wie etwa ein gleichseitiges Dreieck zeigt.

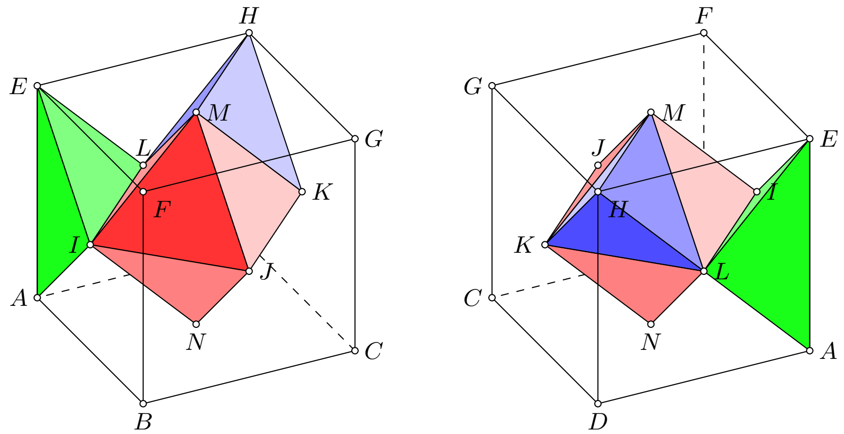
c) Sei $n \geq 3$ gegeben und der Winkel ϵ definiert als $\epsilon = \frac{90°}{n}$, dann gilt $0 < \epsilon < 90°$. Wählt man nun drei Winkel mit der Größe $90° - \epsilon$ und für $n-3$ Winkel jeweils die Größe $180° - \epsilon$, dann ist deren Summe genau $3\cdot 90° + (n-3)\cdot 180° - n\cdot\epsilon = (n-2)\cdot 180°$, sodass man diese $3+(n-3) = n$ Winkel als Innenwinkel eines konvexen n-Ecks verwenden kann.
Dies hat dabei wegen $180° - \epsilon > 180° - 90° = 90°$ auch nur genau drei spitze Innenwinkel.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 121042
Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.
a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!



Der Würfel wird zerlegt in drei Arten von Körpern, siehe nachfolgendes Bild:



1. Ein regelmäßiges Oktaeder im Zentrum des Würfels (rot).
Die Eckpunkte des Oktaeders liegen jeweils in der Mitte der äußeren Würfelflächen, die Kantenlänge des Oktaeders ist eine halbe Würfelflächendiagonale. Die quadratische Grundfläche eines halben Oktaeders (Pyramidengrundfläche) ist dann genau eine halbe Würfelfläche, die Höhe einer Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass sich als Volumen des Oktaeders ergibt:

$$V_O = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3$$

2. Auf jeder Oktaederfläche sitzt ein regelmäßiges Tetraeder (blau), dessen Spitze der Eckpunkt eines Würfels ist. Es gibt daher acht dieses Tetraeder. Er besitzt die gleiche Kantenlänge wie der Oktaeder, also eine halbe Würfelflächendiagonale $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$.

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders wird als bekannt vorausgesetzt und wird hier nicht hergeleitet. Das Volumen dieser Tetraeder ist dann

$$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{24}a^3$$

3. Die Würfelkanten bilden mit zwei Tetraederflächen und jeweils einer Viertel-Würfelfläche eine schiefe, wenngleich symmetrische Pyramide (grün). Die Grundfläche (z.B. ELA) ist $\frac{1}{4}a^2$, die Höhe der Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass das Volumen der Pyramide

$$V_P = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{24}a^3$$

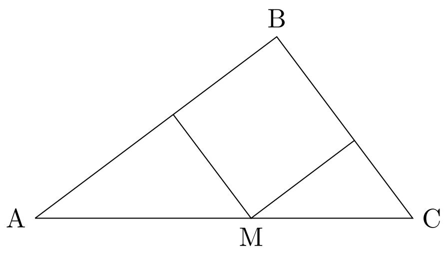
beträgt. Das Volumen der Pyramide entspricht also der des Tetraeders. Da eine solche Pyramide an jeder Würfelkante liegt, gibt es derer zwölf.
Der Würfel wird also in 21 Teile geteilt, 1 Oktaeder, 8 Tetraeder und 12 schiefe Pyramiden. Kontrolle:

$$V_{ges} = V_O + 8V_T + 12V_P = \frac{1}{6}a^3 + \frac{8}{24}a^3 + \frac{12}{24}a^3 = a^3$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 121043A
a) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat!
b) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $AB = AD = x$, $CB = CD = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat!
c) Man beweise! Sind M und U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt:

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$



a,b) Der Inkreismittelpunkt ist durch den Schnittpunkt der Diagonale AC und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ gegeben. Falls $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist, so liegt B auf dem Thaleskreis über AC, welcher dann der Umkreis des Drachenvierecks ist.
c) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt: $\frac{xy}{2} = \rho^2 + \frac{(x-\rho)\rho}{2} + \frac{(x-\rho)\rho}{2}$ und somit $\rho = \frac{xy}{x+y}$. Wegen der Kongruenz der Dreiecke in der Skizze erhalten wir $\frac{|MC|}{\rho} = \frac{2r}{x} \Rightarrow |MC| = \frac{2\rho r}{x}$ und somit

$$|MU|^2 = (r - |MC|)^2 = \left(r - \frac{2\rho r}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2\rho}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2y}{x+y}\right)^2 = r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt: Aus $r = \frac{1}{2}AC$, $\rho < x + y$ und

$$4r^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2\rho(x+y) \Rightarrow \rho^2 + 4r^2 = (x+y-\rho)^2$$

folgt

$$\begin{aligned}
r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2+4r^2} &= r^2 + \rho^2 - \rho(x+y-\rho)\\
&= r^2 + 2\rho^2 - xy = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} - xy\\
&= \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x+y)^2\right)\\
&= \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 - 4x^3y - 4xy^3\right)\\
&= \frac{x^2+y^2}{4(x+y)^2}\left((x+y)^2 - 4xy\right)\\
&= r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 - 121043B
Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:
Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen "Zug". Ein "Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen.
Dabei darf keiner der Spieler den gleichen "Zug" zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am "Zug" befindliche Spieler aber keinen "Zug" nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Nein, kein Spieler kann den Sieg erzwingen. Dies wird im Folgenden bewiesen:
Sei o.B.d.A. Dirk der anziehende Spieler.

a) Dirk kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Indem Dirk in seinem ersten Zug drei Hölzchen nimmt, verbleiben Jens noch vier, sodass er nicht direkt gewinnen kann.

Wählt Jens nun zwei oder drei Hölzchen, verbleiben für Dirks zweiten Zug noch höchstens zwei, sodass er durch deren Wegnahme gewinnen würde. Also hat Jens nur die Möglichkeit, Dirks Sieg zu verhindern, indem er in seinem ersten Zug genau ein Hölzchen zieht. Dann hat Dirk für seinen zweiten Zug genau drei Hölzchen vor sich liegen, die er aber nicht alle gleichzeitig nehmen kann, da er im vorherigen Zug drei Hölzchen genommen hatte.

Würde Dirk nun ein Hölzchen ziehen, verblieben für Jens zwei, die dieser auch nehmen und damit gewinnen kann. Also muss Dirk zwei der letzten drei Hölzchen wegnehmen, sodass Jens sich nur noch einem einzigen Hölzchen gegenüber sieht, was er aber nicht nehmen kann, da er im letzten Zug auch nur ein einzelnes gezogen hatte.
Dirk kann also durch die Wahl dieses Startzugs (und der weiteren Züge wie hier angegeben) verhindern, dass er verliert und zumindest ein Unentschieden erzwingen.

b) Jens kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Wenn Dirk im ersten Zug drei Hölzchen wegnimmt, kann Jens – wie eben gesehen – auch verhindern, dass er verliert, und mindestens ein Unentschieden erzwingen. Nimmt Dirk dagegen im ersten Zug zwei Hölzchen, so verbleiben für Jens' ersten Zug noch fünf. Indem er nun ein Hölzchen zieht, kann er auch in diesem Fall erzwingen, dass er nicht verliert:
Für Dirks zweiten Zug liegen noch vier Hölzchen da. Nimmt dieser nur ein Hölzchen, kann Dirk im zweiten die verbleibenden drei wegnehmen und gewinnen. Also muss Dirk in seinem zweiten Zug drei Hölzchen (zwei ist aufgrund seines ersten Zugs verboten) wegnehmen, sodass Jens nur eines verbleibt, was er aber nicht nehmen kann. Das Spiel endet hier also unentschieden.

Abschließend ist noch zu betrachten, wie Jens agieren sollte, wenn Dirk in seinem ersten Zug nur ein Hölzchen genommen hat. Dann kann Jens in seinem ersten Zug auch ein Hölzchen ziehen, sodass für Dirks zweiten Zug noch genau fünf Hölzchen daliegen. Dirk muss nun zwei oder drei Hölzchen ziehen (da eines aufgrund seines ersten Zugs verboten ist), sodass drei oder zwei verbleiben, die aber Jens in jedem Fall dann in seinem zweiten Zug nehmen und damit gewinnen kann.

Also kann in jedem Fall, egal wie Dirk zieht, Jens durch seine Spielweise erreichen, dass er nicht verliert.
Da beide Spieler erreichen können, dass sie nicht verlieren, kann keiner den Sieg erzwingen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 121044
In einer Ebene mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$.
Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, dass k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$!

Es sei $P(s; t)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Sein Abstand von der Geraden g erhält man leicht als

$|t-(-1)| = |t+1|$, da der Fußpunkt des Lots von P auf g die Koordinaten $(s;-1)$ besitzt. (Es ist g parallel zur x-Achse, also jede dazu senkrechte Gerade – wie etwa das Lot von P auf diese Gerade – parallel zur y-Achse, sodass auf dieser Senkrechten dann alle Punkte die gleiche x-Koordinate besitzen.)

Und der Abstand von P und F ergibt sich durch Anwenden des Satzes von Pythagoras (man zeichne ggf. Parallelen zur x- und y-Achse durch F und P ein, um das entsprechende rechtwinklige Dreieck zu sehen) zu $\sqrt{(s-0)^2+(t-1)^2} = \sqrt{s^2+(t-1)^2}$.

Der Punkt P hat also genau dann denselben Abstand von g wie von F, wenn $|t+1| = \sqrt{s^2+(t-1)^2}$ bzw. $(t+1)^2 = s^2+(t-1)^2$, also $s^2 = (t+1)^2-(t-1)^2 = 4t$ und schließlich $t = \frac{1}{4}s^2$ gilt.
Die Menge der Punkte, für die die y-Koordinate ein Viertel des Quadrats der x-Koordinate ist, wird genau durch den Graphen k angegeben, was das zu Zeigende beweist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 121045
Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe!
Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, dass sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt und dass man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Sei $g > 2$ eine fest gewählte natürliche Zahl. ($g > 2$, damit die Zahl 12 überhaupt g-adisch aufgefasst werden kann.) Für eine zweistellige Zahl darf die führende (= Nicht-Einer-) Stelle nicht 0 sein. Damit dies für die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl genauso gilt, müssen also beide Ziffern verschieden von 0 sein. Seien a und b diese Ziffern. Dann gilt demnach $1 \leq a,b < g$ und es ergibt sich die zu lösende Gleichung $(a\cdot g+b)-(b\cdot g+a) = g+2$ bzw. $(a-b)\cdot(g-1) = g+2$.

Wenn diese Gleichung eine Lösung hat, dann muss $g-1 \geq 2$ ein Teiler von $g+2$ sein, also auch einer von $(g+2)-(g-1) = 3$. Demnach ist $g-1 = 3$ und man erhält nach Einsetzen $a-b = 2$, also (aufgrund der Größenbeschränkungen für a und b) $a = 3$ und $b = 1$. Tatsächlich ist auch $31_4 - 13_4 = 12_4$, wobei z_4 dafür stehen soll, dass die Ziffernfolge z im System zur Basis 4 zu lesen ist.

Zusammenfassung: Die zu betrachtende Gleichung ist ausschließlich im Vierersystem lösbar und besitzt dann dafür die einzige Lösung 31_4.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, in einem g-adischen System gäbe es eine Lösung der genannten Aufgabe. Ihre Ziffern seien in dieser Reihenfolge mit a, b bezeichnet. Dann gilt

$$0 < a, \qquad b < g, \qquad ag+b-bg-a = g+2 \tag{1,2}$$

Hiernach ist $(a-b)(g-1) = g+2 > 0$,

$$a > b \tag{3}$$

Aus (2) und (3) erhält man $a-b-1)g = a-b+2 > 0$, also

$$a-b-1 > 0 \tag{4}$$

Aus (1) folgt ferner $a \leq g-1$ und $b \geq 1$, also $a-b \leq g-2$ und somit

$$a-b-1 = \frac{a-b+2}{g} \leq 1 \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) muss $a-b-1 = 1$, d.h.

$$a-b = 2 \qquad \text{und damit} \qquad g = 4 \tag{6,7}$$

gelten.
Zusammen mit $0 < a$, $b < 4$ sind (3) und (6) nur durch $a = 3$, $b = 1$ erfüllbar. Somit kann es nur im 4-adisch Lösungen der angegebenen Aufgabe geben und dort nur die Lösung $3\cdot 4+1$.

Tatsächlich ist das die Lösung, da erstens auch $1 \cdot 4 + 3$ eine 4-adisch zweistellige Zahl ist und diese zweitens, von $3 \cdot 4 + 1$ subtrahiert, $1 \cdot 4 + 2$ ergibt, wie es verlangt war.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 121046
Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.
Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein.
Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

Es sei $n = 4q + r$ mit $n,q,r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0 \leq r < 4$ die Anzahl der Tage, die beide Karawanen von A nach B unterwegs sind. Da die erste Karawane in C nicht nach einer durch 4 teilbaren Tagesanzahl ankommt (das wäre ja einer ihrer Ruhetage), kann n nicht gerade sein (da sie nach $2n$ Tagen C erreicht). Also ist r entweder 1 oder 3.
Letzteres kann aber nicht sein, da die zweite Karawane an allen solch darstellbaren Tagen einen Ruhetag einlegt, also dann nicht gleichzeitig mit der ersten Karawane in B hätte eintreffen können. Es gibt also eine nicht-negative ganze Zahl q, sodass beide Karawanen nach genau $4q + 1$ Tagen den Ort B erreichen.

Die erste Karawane ist also nach $12q + 3$ Tagen am Ziel angekommen und ist in dieser Zeit an $9q + 3$ Tagen marschiert; davon an $3q + 1$ Tagen von A nach B, sodass die Gesamtstrecke von A nach D genau drei mal solang ist wie die Teilstrecke von A nach B.
Dieses Teilstück hat die zweite Karawane mit $2q + 1$ Marschtagen bewältigt, sodass sie für die Gesamtstrecke von A nach D insgesamt $6q + 3$ Marschtage benötigt. Dabei ist der $6q + 3$-te Marschtag genau der $2 \cdot (6q + 2) + 1 = 12q + 5$-te Tag nach Abreise in A, sodass diese zweite Karawane genau zwei Tage nach der ersten in D eintrifft.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.15 XIII. Olympiade 1973

7.15.1 I. Runde 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131011
Ermitteln Sie alle Mengen $\{a,b,c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, dass $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a,b,c\}$ ist!

Zu lösen sind die Gleichungssysteme

I. $a+b=10/3 \quad ; \quad a+c=-5/12 \quad ; \quad b+c=9/4$

II. $a+b=10/3 \quad ; \quad a+c=9/4 \quad ; \quad b+c=-5/12$

III. $a+b=-5/12 \quad ; \quad a+c=10/3 \quad ; \quad b+c=9/4$

IV. $a+b=-5/12 \quad ; \quad a+c=9/4 \quad ; \quad b+c=10/3$

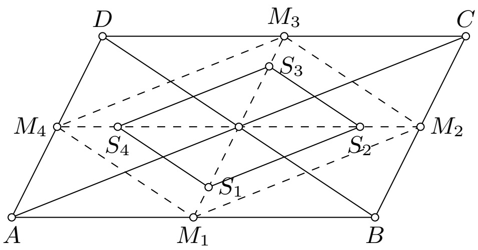
V. $a+b=9/4 \quad ; \quad a+c=10/3 \quad ; \quad b+c=-5/12$

VI. $a+b=9/4 \quad ; \quad a+c=-5/12 \quad ; \quad b+c=10/3$

Jedes dieser Gleichungssysteme hat die Lösungen 3, -3/4 und 1/3. Die gesuchte Menge ist also $\{-3/4, 1/3, 3\}$.

Aufgabe 2 - 131012
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.

Man beweise, dass dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist!



Es seien M_1,M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA. Da S_1, S_2, S_3, S_4 die Seitenhalbierenden MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 im Verhältnis 2:1 teilen, folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes

$$S_1S_2 \parallel M_1M_2 \parallel AC \parallel M_4M_3 \parallel S_4S_3$$

$$S_2S_3 \parallel M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4 \parallel S_1S_4$$

Also ist $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 3 - 131013
Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, dass als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben!

Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{n(n+1)}{2}$. Daher sind für natürliche Zahlen n, x genau dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn

$$\frac{n(n+1)}{2} = 448 + x \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 0 \leq x \leq n \quad (2)$$

ist. Gelten (1), (2), so folgt $448 < \frac{n^2+n}{2} \leq 448 + n$, also

$$896 < n^2 + n \leq 896 + 2n$$

Aus $896 < n^2 + n$ ergibt sich $n > 29$; denn wäre $0 < n \leq 29$, so wäre $n(n+1) \leq 29 \cdot 30 = 870 < 896$. Aus $n^2 + n \leq 896 + 2n$ ergibt sich $n(n-1) \leq 896$ und hieraus $n < 31$; denn wäre $n \geq 31$, so wäre

$$n(n-1) \geq 31 \cdot 30 = 930 > 896$$

Aus beiden Bedingungen für n folgt $n = 30$, hieraus und aus (1)

$$x = \frac{30 \cdot 31}{2} - 448 = 17$$

Daher können nur $n = 30$, $x = 17$ den Forderungen der Aufgabe genügen. Wegen $\frac{30 \cdot 31}{2} = 448 + 17$ und $0 < 17 \leq 30$ erfüllen sie sie tatsächlich.

Aufgabe 4 - 131014
Jens und Dirk spielen das folgende Spiel

Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen a ($\neq 0$), b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein "ungerechtes Spiel" handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmöglichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind nach der Lösungsformel bekanntlich:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sollen sie symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, so muss gelten: $x_1 = -x_2$. Setzt man dies in die Lösungsformel ein, ergibt sich:

$$-\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dies führt zu $-b = b$, was genau dann erfüllt ist, wenn $b = 0$. Das heißt, dass, falls Nullstellen existieren, diese immer symmetrisch zum Ursprung liegen, wenn b von Dirk mit dem Wert $b = 0$ gewählt wird.

Dirk kann dennoch nicht den Sieg erzwingen, da Jens mit der Wahl von c für beliebige Werte von a und b erzwingen kann, dass es keine Nullstellen gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null ist: $b^2 - 4ac < 0$. Damit handelt es sich um kein ungerechnetes Spiel.

Lösungen der I. Runde 1973 übernommen von [5]

7.15.2 II. Runde 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131021
Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

Da eine mehrstellige Primzahl nur auf 3 oder 7 enden kann, muss wegen (1) die Endziffer und wegen (2) auch die mittlere Ziffer in $\{3,7\}$ liegen. Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl muss daher 37 oder 73 sein, da die beiden anderen Möglichkeiten 33 und 77 durch 11 teilbar sind, was der Bedingung (2) widerspricht.
Damit kommt aber auch für die erste Ziffer, die nach (1) in $\{2,3,5,7\}$ liegen muss nur mehr 3 oder 7 in Frage, da sonst die Ziffernsumme und damit auch die Zahl selbst durch 3 teilbar wäre.

Nach dem bisher Bewiesenen müssen also sämtliche Ziffern der Zahl in $\{3,7\}$ liegen, wobei niemals zwei aufeinanderfolgende Ziffern gleich sein können, da dies der Bedingung (2) widersprechen würde. Von den beiden dann nur noch verbleibenden Möglichkeiten 373 und 737 ist aber die 737 durch 11 teilbar und damit nicht prim, während 373 dann tatsächlich als einzige Zahl sämtliche Bedingungen hier erfüllt.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Wegen a) können nur drei der Ziffern 2, 3, 5, 7 vorkommen. Aus diesen vier Ziffern kann man genau die zweistelligen Primzahlen 23, 37, 53, 73 bilden. Aus ihnen lassen sich auf die in der Aufgabe angegebenen Weise b) genau folgende dreistellige Zahlen bilden: 237, 373, 537, 737.

Nun sind 237 und 537 durch 3 teilbar, und 737 ist durch 11 teilbar. Die Zahl 373 dagegen ist weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 oder 19 teilbar. Wegen $373 < 20^2$ ist sie (dann auch durch keine größere Primzahl teilbar und) somit selbst Primzahl.
Folglich ist 373 die einzige dreistellige Primzahl, die a) und b) erfüllt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 131022
Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab.
In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz.
Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen vergeben.
Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe $22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 = 133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie damit zusammen 347 Punkte für die ersten, zweiten und dritte Plätze.
Es sei g die Anzahl der errungenen Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt

$$7g + 5s + 4b = 347 \tag{1}$$

Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z

$$g = k + x, \quad s = k + y, \quad b = k + z \tag{2}$$

wobei (3) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0 = x,y,z = 3$ gilt.
Aus (1), (2) folgt

$$16k + 7x + 5y + 4z = 347 \tag{6}$$

Wegen (3), (4), (5) gilt $7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \geq 7 + 5y + 4z \geq 4 \cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt

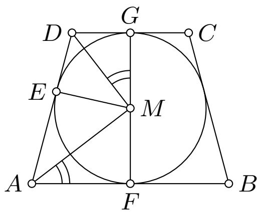
$$16k + 36 \geq 347 \geq 16k + 12 \tag{7}$$

Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16k \geq 311 > 304$, also (8) $k > 19$. Aus der rechten Ungleichung in (6) folgt $16k \leq 335 < 336$, also (9) $k < 21$.
Wegen (8), (9) gilt (10) $k = 20$.
Hieraus und aus (6) folgt $7x + 5y + 4z = 27$. Wäre $z = 0$, so müsste $7x = 27 - 5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y = 0$, so müsste $7x = 27 - 4z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft.
Also ist (11) $x = 0$, und $5y = 27 - 4z$ muss durch 5 teilbar sei, was unter den Möglichkeiten $z = 0, 1, 2, 4$ nur für (12) $z = 3$ zutrifft und auf (13) $y = 3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13), folgt die zu beweisende Behauptung, dass s, g, b durch die Bedingung der Aufgabe eindeutig bestimmt sind, nämlich $g = 20$, $s = b = 23$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 131023
Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ρ.
Man berechne diesen Inkreisradius ρ!

Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmatrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD.
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel CDE und EAF. Wegen $\angle GDE + \angle EAF = 180°$ gilt daher (1) $\angle MDG + \angle MAF = 90°$.
Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklige sind, gilt (2) $\angle MDG + \angle DMG = 90°$. Aus (1) und (2) folgt $\angle MAF = \angle DMG$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.



Wegen $DG = 1$ cm, $AF = 4$ cm und $MG = MF = \rho$ folgt daraus $DG : MG = MF : AF$ bzw. 1 cm $: \rho = \rho : 4$ cm, woraus man $\rho^2 = 4$ cm^2 und wegen $\rho > 0$ schließlich $\rho = 2$ cm erhält. Der Inkreisradius ρ hat die Länge 2 cm.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 131024
Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70°$! Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$.

Im Sehnenviereck ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel zu 180°, sodass der Winkel $\gamma = DCB = 110°$ betragen muss. So kann man das gesuchte Viereck wie folgt konstruieren:
1) Konstruiere einen Winkel von $\gamma = 110°$ (ggf. als Nebenwinkel eines gegebenen 70°-Winkels) und nenne den Scheitelpunkt C.

2) Trage auf dem einen Scheitel dieses Winkels die Streckenlänge b von C aus ab und erhalte den Punkt B, sowie analog auf dem anderen Schenkel des Winkels die Streckenlänge c von C aus und erhalte den Punkt D.

3) Man konstruiere den Umkreis k des Dreiecks $\triangle BCD$ (durch Schnitt der Mittelsenkrechten von zwei der Seiten dieses Dreiecks und Kreis um diesen Schnittpunkt durch einen der Eckpunkte).

4) Der Kreis um B mit Radius a schneide k in zwei Punkten. Man wähle einen aus, sodass das Viereck $ABCD$ konvex ist. Dies ist dann das gesuchte.

Begründung:

Da nach Konstruktion alle vier Punkte auf k liegen, ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Die Längen der Strecken AB, BC und CD haben nach Konstruktion (Schritte 4 bzw. 2) die geforderte Länge und aufgrund der Winkeleigenschaft von Sehnenvierecken hat mit Schritt 1) und der Vorüberlegung auch $\angle BAD$ als dem Winkel $\angle DCB$ gegenüberliegender Weinkel die gewünschte Größe.

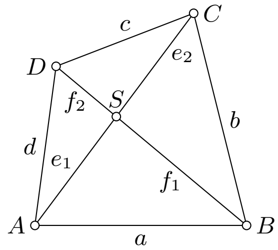
Aufgabe gelöst von cyrix

7.15.3 III. Runde 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131031
Man beweise, dass für alle konvexen Vierecke $ABCD$

$$\frac{1}{2}u < e + f < u$$

gilt! Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.



In der Abbildung seien die Diagonalen $AC = e = e_1 + e_2$ sowie $BD = f = f_1 + f_2$.
Die Dreiecksungleichungen für die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB ergeben

$$a + b > e \quad ; \quad b + c > f \quad ; \quad c + d > e \quad ; \quad d + a > b$$

Deren Summe wird $2a + 2b + 2c + 2d = 2e + 2f$, also $u = a + b + c + d > e + f \quad (1)$.
Andererseits wird für die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS mit den Dreiecksungleichungen

$$e_1 + f_1 > a \quad ; \quad e_2 + f_1 > b \quad ; \quad e_2 + f_2 > c \quad ; \quad e_1 + f_2 > d$$

Erneute Addition der vier Ungleichungen ergibt

$$2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 = 2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow e + f > \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{u}{2}$$

Mit (1) ist damit die Behauptung gezeigt.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 131032
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

Die Gleichung ist äquivalent zu $x \cdot (2x^2 + y) = 7$, sodass x ein ganzzahliger Teiler von 7 ist und damit nur die folgenden vier Fälle zu möglich sind:

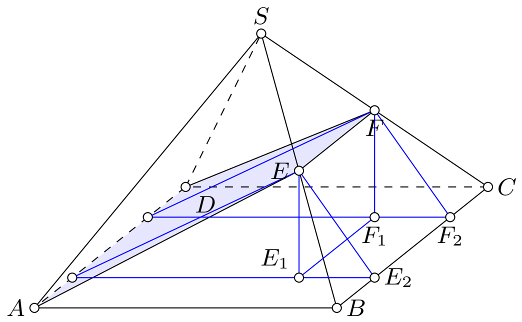
1. Fall: $x = 1$. Dann folgt $y = \frac{7}{1} - 2 \cdot 1^2 = 5$.
2. Fall: $x = -1$. Dann folgt $y = \frac{7}{-1} - 2 \cdot (-1)^2 = -9$.
3. Fall: $x = 7$. Dann folgt $y = \frac{7}{7} - 2 \cdot 7^2 = -97$.
4. Fall: $x = -7$. Dann folgt $y = \frac{7}{-7} - 2 \cdot (-7)^2 = -99$.

Die Proben bestätigen jeweils die Ergebnisse, sodass wir vier Lösungspaare erhalten, nämlich $(x,y) \in \{(-7, -99), (-1, -9), (1,5), (7, -97)\}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 131033
Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die Länge a.
E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

Berechnung des unteren Teilkörpers:
Der untere Teilkörper ist - geeignet zerlegt - auffassbar als Dreiecksprisma T_1 und zwei zusammenschiebbare Pyramiden T_2. Es ist die Grundfläche des Prismas $G = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ und die Prismenhöhe $h = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Damit wird



$$V_{T_1} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{16}\sqrt{2}$$

Für die zwei Pyramiden ergibt sich analog

$$V_{T_2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$$

und für den unteren Teilkörper

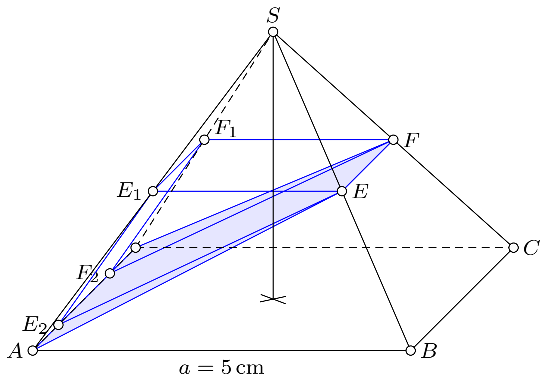
$$V_{\text{unten}} = V_{T_1} + V_{T_2} = \frac{5}{48}a^3\sqrt{2}$$

Für den oberen Teilkörper verbleiben damit noch

$$V_{\text{oben}} = V_{\text{Pyramide}} - V_{\text{unten}} = \frac{1}{16}a^3\sqrt{2}$$

und ein Verhältnis von $V_{\text{oben}} : V_{\text{unten}} = 3 : 5$.

Aufgabe gelöst von Stephan Hauschild



2.Lösung:
Durch den Schnitt mit der Ebene $AEFB$ entstehen zwei Teilkörper, der "obere" Teilkörper K_1, eine Pyramide, mit den Eckpunkten A, B, E, F und S, und der "untere" K_2 mit den Eckpunkten A, B, C, D, E und F.

Die Gesamtpyramide ist ein halbes Oktaeder der Kantenlänge a und besitzt damit ein Volumen $V_1 = \frac{a^3}{6}\sqrt{2}$.

Der Teilkörper K_1 kann aus folgenden weiteren Teilkörpern zusammengesetzt werden:

(a) K_3: einer Pyramide EFF_1E_1, wobei E_1 und F_1 die Mittelpunkte der Kanten AS und DS sind,
(b) K_4: einem dreiseitigem Prisma mit der Dreiecksfläche EE_1E_2 und der Höhe $EF = \frac{a}{2}$ (nach Strahlensatz), wobei E_2 und F_2 die Lote von E_1 und F_1 auf AD sind und
(c) K_5, K_6: zwei zueinander kongruenten dreiseitigen Pyramiden, zum einen mit der Dreiecksfläche EE_1E_2 als Grundfläche und $AE_2 = \frac{a}{4}$ als Höhe, zum anderen mit der Dreiecksfläche FF_1F_2 und der Spitze in D.

K_3 ist nach dem räumlichen Strahlensatz ein Achtel des Volumens der Ausgangspyramide, da $EF = \frac{a}{2}$ ist, d.h.

$$V_{K_3} = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3$$

Das Dreieck EE_1E_2 hat zur Grundkante $EE_1 = \frac{a}{2}$ die Höhe von E über der Fläche $ABCD$ als Dreieckshöhe. Diese Höhe ist die Hälfte der Pyramidenhöhe des Ausgangskörpers, d.h. $h_\triangle = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. Mit der Prismenhöhe $\frac{a}{2}$ wird

$$V_{K_4} = \frac{\sqrt{2}}{32}a^3$$

K_5 und K_6 haben jeweils eine Höhe von $\frac{a}{4}$ und die eben ermittelte Dreiecksfläche als Grundfläche. Damit wird

$$V_{K_5} = V_{K_6} = \frac{\sqrt{2}}{192}a^3$$

Für die Teilkörper ergibt sich somit

$$V_{K_1} = V_{K_3} + V_{K_4} + 2 \cdot V_{K_5} = \frac{\sqrt{2}}{16}a^3 \qquad ; \qquad V_{K_2} = V_{\text{Pyramide}} - V_{K_1} = \frac{5\sqrt{2}}{48}a^3$$

Das gesuchte Verhältnis ist $V_{K_1} : V_{K_2} = 3 : 5$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 131034
Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

Wegen $(\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $(\pm 2)^3 \equiv \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ und $(\pm 3)^3 \equiv \pm 27 \equiv \pm 1 \pmod 7$ lassen die Kuben von nicht durch 7 teilbaren Zahlen bei der Teilung durch 7 nur die Reste 1 oder -1.

Bildet man nun von drei solchen Zahlen die Summe, so kann diese nur die Reste ± 1 oder ± 3 bei der Teilung durch 7, nicht aber 0 annehmen, sodass umgekehrt gelten muss, dass, wenn die Summe dreier Kuben durch 7 teilbar ist, nicht alle Basen (und damit auch nicht alle Kuben) nicht durch 7 teilbar sein können.
Es muss demnach dann mindestens eine Basis (und damit auch ihre zugehörige Kubikzahl) durch 7 teilbar sein.

Bemerkung: Man kann diese Lösung auch ohne Verwendung von Kongruenzbetrachtungen formulieren, indem man die Zahlen $(7k \pm 1)^3$, $(7k \pm 2)^3$ und $(7k \pm 3)^3$ per binomischen Satz explizit ausrechnet und an diesen Termen die Reste, die sie bei der Teilung durch 7 lassen, direkt abliest.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Es sei a eine natürliche Zahl und

$a \equiv 0 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv 0 \pmod 7$,
$a \equiv 1 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod 7$,
$a \equiv 2 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod 7$,
$a \equiv 3 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod 7$,
$a \equiv 4 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv 1 \pmod 7$,
$a \equiv 5 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod 7$,
$a \equiv 6 \pmod 7$, dann ist $a^3 \equiv -1 \pmod 7$

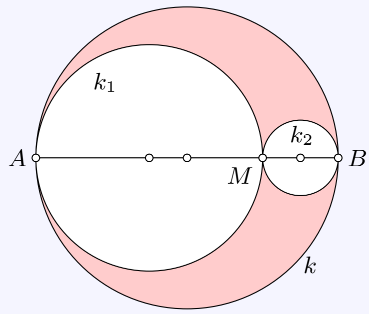
Eine Kubikzahl a^3 kann bei Division durch 7 also nur einen der Reste 0, 1, -1 haben. Angenommen, keine der drei Kubikzahlen wäre durch 7 teilbar. Dann könnte die Summe der drei Kubikzahlen nur einen der folgenden Reste bei Division durch 7 haben und keinen anderen:

$$1+1+1=3, \quad 1+1-1=1, \quad 1-1-1=-1, \quad -1-1-1=-3$$

In keinem dieser Fälle wäre aber die Summe der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss wenigstens eine der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar sein, w. z. b. w.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 131035
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, dass sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so dass also $AM + MB = AB$ gilt. Dabei sei $AM \geq MB$.
Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.
Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser farbigen Fläche am größten ist!



Die Länge der Strecke AM sei x. Dann wird der Flächeninhalt der farbigen Fläche

$$A = A_k - A_{k_1} - A_{k_2} = \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}(d-x)^2$$

Der Flächeninhalt A ist damit eine Funktion von x. Vereinfachen ergibt:

$$A = -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi d}{2}x = -\frac{\pi}{2}(x^2 - dx) = -\frac{\pi}{2}\left(\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\pi d^2}{8}$$

Der Flächeninhalt A wird maximal, wenn $\left(x - \frac{d}{2}\right)^2$ Null wird, d.h. für $x = \frac{d}{2}$. Der Flächeninhalt der farbigen Fläche wird somit maximal, wenn der Berührungspunkt M im Mittelpunkte des Kreises k liegt, d.h. $AM = \frac{d}{2}$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

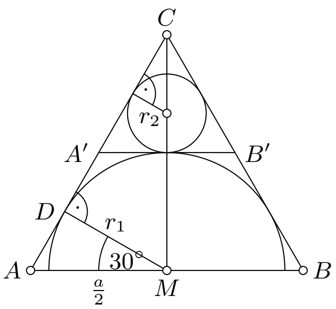
Aufgabe 6 - 131036
Man beweise, dass die Ungleichung $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1, b \neq 1$ gilt!

Es ist $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ und umgekehrt $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$. Also ist mit $x = |\log_a b| \in \mathbb{R}_{>0}$ der zweite Summand $|\log_b a| = \frac{1}{x}$, sodass für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ zu zeigen verbleibt. Diese ist aber äquivalent zu $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$ bzw. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, was offenbar wahr ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.15.4 IV. Runde 1973, Klasse 10

Aufgabe 1 - 131041
In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, dass sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, dass dann $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.



Hat das gleichseitige Dreieck ABC die Seitenlänge a, so ist seine Höhe $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (nach Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck AMC).
Im rechtwinkligen Dreieck AMD ist der Winkel $\angle AMD = 30°$, die Seite $AM = \frac{a}{2}$ und $DM = r_1$. Dann wird

$$r_1 = \frac{a}{2}\cos 30° = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

Zieht man parallel zu AB die zweite Tangente an den Kreis k_1, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C$ (Ähnlichkeitslage zu $\triangle ABC$). Für die Höhe h' von $\triangle A'B'C$ wird

$$h' = h - r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{h}{2}$$

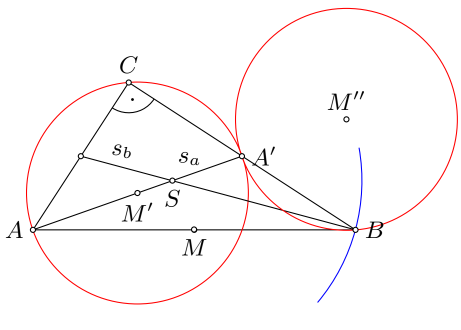
Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C$ ist der Inkreismittelpunkt mit dem Schwerpunkt identisch. Daher wird die Höhe bzgl. des Inkreismittelpunktes im Verhältnis 1:2 geteilt. Damit wird für den Radius des Kreises k_2:

$$r_2 = \frac{1}{3}h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{12}\sqrt{3}$$

Folglich gilt $r_1 > r_2$ und für das Verhältnis ergibt sich: $r_1 : r_2 = 3 : 1$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 131042
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus s_a = 6 cm, s_b = 8 cm!
Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die Länge der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



In der Abbildung ist AA' die Seitenhalbierende s_a des Dreiecks ABC. Da bei C ein rechter Winkel vorliegt, befindet sich C auf dem Thaleskreis k' über der Strecke AA'. M' sei der Mittelpunkt dieses Thaleskreises.

Der Punkt B ist dann das Spiegelbild von C an dem Seitenmittelpunkt A'. Damit liegt B auf einem weiteren Kreis k'' (rot in der Abbildung) mit dem Mittelpunkt M''. Dieser Mittelpunkt ist das Spiegelbild von M' an A'. Der Kreis k'' hat den gleichen Radius wie der Thaleskreis k'.

Der Schwerpunkt S, d.h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2. Der Punkt B liegt auf einem Kreisbogen (blau) um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Somit ist B eindeutig bestimmt. Der Punkt C ist der Schnittpunkt der verlängerten Strecke BA' mit dem Thaleskreis k'.

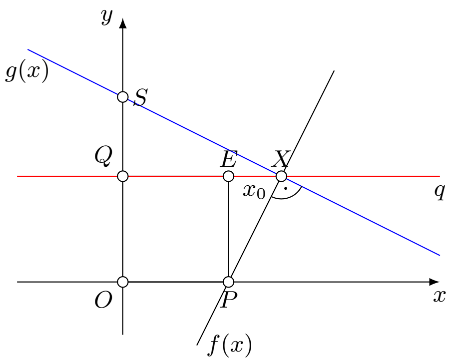
Konstruktion:
1. Zeichne eine Strecke AA' mir $AA' = s_a$.
2. Konstruiere über der Strecke AA' den Thaleskreis k' mit dem Mittelpunkt M'.
3. Spiegele den Punkt M' am Punkt A'. Das Ergebnis ist M''.
4. Zeichne einen Kreis k'' um M'' mit dem Radius des Kreises k'.
5. Teile die Strecke AA' im Verhältnis 2:1, so dass der Teilungspunkt S näher an A' als zu A liegt.
6. Konstruiere einen Kreis um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis k'' ist der Punkt B.
7. Zeichne eine Gerade BB'. Diese schneidet den Kreis k' in einem Punkt, dem gesuchten Punkt C.

Der blaue Kreis schneidet den grünen k'' in zwei Punkten. Die Konstruktion ist eindeutig, da der zweite Punkt eine kongruente Lösung ergibt. Es gibt eine Lösung, da $s_a < 2s_b$ und $s_b < 2s_a$.
Dieses ist gerade die Bedingung, dass der blaue und grüne Kreis einen Schnittpunkt haben. Im Fall $s_a = 2s_b$ bzw. $s_b = 2s_a$ bekommen wir den Grenzfall mit einer Seite des Dreiecks gleich 0.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster und einem weiteren Autor

Aufgabe 3A - 131043A
a) Beweisen Sie, dass man zu gegebenem reellen x_0 die Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann!
Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten $(1; 1)$ hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen.
Auf q zeichnet man einen Punkt X so, dass die gerichtete Strecke EX die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2 + x_0 + 1$ als Ordinate.

b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, dass die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!



Die Darstellung des Koordinatensystems zeigt die Aufgabenstellung für einen o.B.d.A. gewählten reellen Wert $x_0 = \frac{1}{2}$.
Die lineare Funktion $f(x)$ sei die durch die Punkte P und X verlaufende Funktion. Für ein beliebiges reelles x_0 ($x_0 \neq 0$) ergibt sich als Anstieg der Funktion $m_{f(x)} = \frac{1}{x_0}$ und die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{x_0} \cdot x + 1 - \frac{1}{x_0}$$

Die zu $f(x)$ im Punkt X senkrechte lineare Funktion sei $g(x)$. Deren Anstieg ist $m_{g(x)} = \frac{1}{m_{f(x)}} = -x_0$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $X(1 + x_0; 1)$ in die Gleichung $g(x) = -x_0 \cdot x + n$ ergibt für n:

$$n = 1 + x_0 + x_0^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x_0 \cdot x + 1 + x_0 + x_0^2$$

n ist die Ordinate des Schnittpunktes S der Senkrechten in X zu $f(x)$ mit der Ordinatenachse.
Für den Fall $x_0 = 0$ schneidet die Senkrechte in X zu PX die Ordinatenachse in $(0; 1)$, was ebenfalls der Behauptung entspricht. w.z.b.w.

b) Angenommen $f(x) = 1+x+x^2$ hätte eine reelle Nullstelle x_0, so müsste nach a) der Schnittpunkt S für x_0 eine Ordinate gleich 0, d.h. $S(0; 0)$, besitzen. Für die Lage des Punktes X existieren drei Möglichkeiten:

1. Fall: X liegt rechts von E, d.h. $x_0 > 0$
In diesem Fall hat die Gerade durch P und X einen positiven Anstieg m. Die dazu Senkrechte durch X hat einen negativen Anstieg. Da X im 1. Quadranten liegt und $y_X > 0$ ist, kann die Senkrechte nie durch den Koordinatenursprung verlaufen. Für ein $x_0 > 0$ hat $f(x)$ keine Nullstelle.

2. Fall: X liegt auf E, d.h. $x_0 = 0$
Wie schon in a) gezeigt, verläuft die Senkrechte durch X zu PX durch $S(0; 1)$. Also liegt auch hier keine Nullstelle vor.

3. Fall: X liegt links von E, d.h. $x_0 < 0$
Für $x_0 < -1$ ist X im 2. Quadranten. Die durch X verlaufende Gerade, senkrecht zu PX, hat einen positiven Anstieg, womit sie nicht durch den Ursprung verlaufen kann.
Für $x_0 = -1$ ist X auf der Ordinatenachse und der Schnittpunkt S gleich $Q(0;1)$. Auch hier liegt folglich keine Nullstelle von $f(x)$ vor.

Für $-1 < x_0 < 0$ beträgt der Anstieg der Geraden durch X und P nach a) $m = \frac{1}{x_0}$. Die Senkrechte dazu durch X hat somit einen Anstieg $-x_0$. Da $-1 < x_0 < 0$ ist, entspricht diesem Anstieg $-x_0$ (> 0) ein Anstiegswinkel kleiner als 45° ($\tan 45° = 1$).
Jede Gerade durch X und den Ursprung, mit X links von E und $x_X > 0$, hat aber einen Anstieg größer 45°. Damit kann die Senkrechte durch X zu PX auch hier nicht durch den Ursprung verlaufen.
Jede Möglichkeit der Wahl eines reellen x_0 führt zu einem Widerspruch. $f(x) = 1+x+x^2$ hat keine reelle Nullstelle. w.z.b.w.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3B - 131043B
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x;y)$, die die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen!

Ist $y = 0$, dann $(x+2)^4 = x^4$, also $|x+2| = |x|$. Da $x+2 \neq x$ gilt, muss dann $x+2 = -x$ und also $x = -1$ sein. Tatsächlich bestätigt die Probe das Lösungspaar $(-1{,}0)$.
Sei ab nun $y \neq 0$.
Es ist

$$y^3 = (x+2)^4 - x^4 = ((x+2)^2 + x^2) \cdot ((x+2)^2 - x^2) = (2x^2+4x+4) \cdot (4x+4) = 2 \cdot (x^2+2x+2) \cdot 4 \cdot (x+1)$$

Also ist y^3 durch 8 und damit y durch 2 teilbar. Sei $t \neq 0$ die ganze Zahl mit $y = 2t$. Dann geht die Gleichung über in $t^3 = (x^2+2x+2) \cdot (x+1)$. Insbesondere sind mit $t \neq 0$ auch beide Faktoren ungleich Null. Damit besitzen diese Zahlen alle bis auf die Reihenfolge eindeutige Primfaktorzerlegungen. (Für negative Zahlen sei dies die Primfaktorzerlegung ihres Betrags multipliziert mit (-1).)

Wegen $x^2+2x+2 = (x+1) \cdot (x+1) + 1$ sind die beiden Faktoren teilerfremd. Sei nun p ein Primteiler von t. Dann ist diese auch Teiler von genau einem der beiden Faktoren x^2+2x+2 und $x+1$. Wenn p in der Primfaktorzerlegung von $t \neq 0$ mit der Vielfachheit a vorkommt (d.h. $p^a | t$, aber $p^{a+1} \nmid t$), dann in t^3 mit der Vielfachheit $3a$. Da nur einer der beiden Faktoren x^2+2x+2 und $x+1$ durch p teilbar ist, muss also in der Primfaktorzerlegung dieses Faktors dann p auch in der gleichen Vielfachheit $3a$ enthalten sein.

Da dies für jeden Primteiler von t und damit $t^3 = (x^2+2x+2) \cdot (x+1)$ gilt, müssen also aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegungen alle in den Primfaktorzerlegungen von x^2+2x+2 bzw. $x+1$ auftauchenden Primzahlen eine durch drei teilbare Vielfachheit besitzen. Damit sind aber x^2+2x+2 und $x+1$ Kubikzahlen. Mit $x+1$ ist auch $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ eine Kubikzahl, sodass x^2+2x+1 und x^2+2x+2 zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, die beide Kubikzahlen sind.

Dafür gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich -1 und 0 bzw. 0 und 1. Die erste fällt wegen $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$ weg, sodass nur $x^2+2x+1 = 0$ und $x^2+2x+2 = 1$ verbleibt. Beide Gleichungen führen auf $(x+1)^2 = 0$, d.h. $x = -1$, was zu $t = y = 0$ führt, also schon oben betrachtet wurde.
Es gibt also genau eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung, nämlich $(x{,}y) = (-1{,}0)$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, (x,y) sei ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^3 &= (x+2)^4 - x^4 = ((x+2)^2 + x^2)(((x+2)^2 - x^2) \\ &= (2x^2+4x+4)(4x+4) = 8(x+1)((x+1)^2+1) \end{aligned}$$

Daher ist y gerade, also $y = 2v$ mit ganzzahligem v. Hierfür und für die ganze Zahl $u = x+1$ gilt somit $8v^3 = 8u(u^2+1)$, also

$$v^3 = u^3 + u \tag{1}$$

Wäre $u > 0$, so folgte aus (1) zunächst $v^3 > u^3$, also $v > u$, wegen der Ganzzahligkeit von v und v mithin $v \geq u+1$ und damit

$$v^3 \geq u^3 + 3u^2 + 3u + 1 > u^3 + u$$

im Widerspruch zu (1).

Wäre $u < 0$, so folgte $v^3 < u^3$, also $v < u$, wegen der Ganzzahligkeit von u und v mithin $n \leq u - 1$ und damit

$$v^3 \leq u^3 - 3u^2 + 3u - 1 < u^3 + u$$

im Widerspruch zu (1).

Daher kann nur für $v = 0$, d.h. $x = -1$, ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften existieren. Aus (1) folgt hierfür $v = 0$, also $y = 0$.
Da umgekehrt $(-1, 0)$ die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllt, hat genau dieses Zahlenpaar die verlangten Eigenschaften.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 131044
Man untersuche, ob die Zahl

$$x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

positiv, negativ oder gleich Null ist!

Es ist

$$x + \sqrt{2} = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) \cdot \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{4+\sqrt{7} - (4-\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

Dann ist

$$x = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 14 = (4+\sqrt{7}) + (4-\sqrt{7}) + 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{(4+\sqrt{7}) \cdot (4-\sqrt{7})} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{16-7} = \sqrt{9} = 3$$

was eine wahre Aussage ist. Also ist $x = 0$.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:
Aus $4+\sqrt{7} > 4-\sqrt{7} > 0$ folgt $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} > 0$. Daher folgt aus

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2 = 4+\sqrt{7} - 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{9} = 2$$

bereits $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$ und somit $x = 0$.

3. Lösung:
Zunächst sind die auftretenden Wurzeln alle definiert, da wegen $2 < \sqrt{7} < 3$ die Radikanden nichtnegativ sind. Wir multiplizieren x mit der positiven Zahl $r = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel

$$r \cdot x = 4 + \sqrt{7} - 2 - \sqrt{16-7} - \sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 1 - \sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

Betrachte nun die Gleichung $y - 1 = \sqrt{2}\sqrt{4-y}$ für $2 < y < 3$. Beide Seiten sind positiv, daher ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und liefert

$$y - 1 = \sqrt{2}\sqrt{4-y} \iff (y-1)^2 = 8 - 2y \iff y^2 - 7 = 0 \Longleftarrow y = \sqrt{7}$$

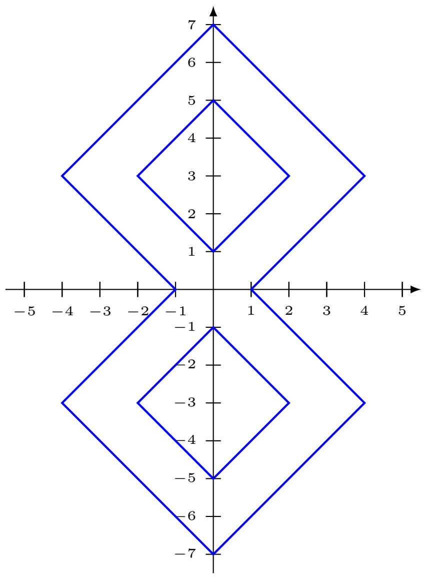
Daraus folgt $r \cdot x = 0$ und da r positiv war also $x = 0$.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 5 - 131045
Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$$

Zunächst stellen wir fest, dass $f(x,y) = f(-x,y)$ und $f(x,y) = f(x,-y)$, es liegt also eine Symmetrie zur x-Achse und zur y-Achse vor. Wir können uns also auf den ersten Quadranten beschränken. Es gilt dann $x,y > 0$ und die Gleichung geht über in $|x + |y - 3| - 3| = 1$.
Sei nun $0 < y < 3$. Wir erhalten $|x - y + 3 - 3| = 1 \iff |x - y| = 1$. Für $x > y$ erhalten wir dann $y = x - 1$ und für $y > x$ folgt $y = x + 1$. Sei nun $y \geq 3$.
Dann geht unsere Gleichung über in $|x + y - 6| = 1$. Für $x + y < 6$ erhalten wir $y = -x + 5$ und für $x + y \geq 6$ folgt $y = 7 - x$.
Zeichnen wir die 4 Geraden und spiegeln diese, so erhalten wir also folgendes schönes Bild:



Aufgabe 6 - 131046
Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a.

Wegen $AC = AD$ liegt A auf der mittelsenkrechten Ebene ϵ von CD. Ebenso liegt B auf ϵ.
Daher ist ϵ diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $SA = SB = SC = SD$, dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d.h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S, diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungsebenen von je einer Tetraederkante und S überein.

Jeder der an S angrenzenden Seitenflächen des Tetraeders $SBCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen. Entsprechende gilt für die Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Tetraeder $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittkanten Anlass, die (außer durch S) durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen durch innere Punkte des Dreiecks ABC gehen, also diejenigen, die durch D, einer der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen.
Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen.
Demnach wird das Tetraeder $ABCS$ in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Tetraeder.
Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K = \frac{1}{24}V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders $ABCD$ ist. Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also

$$V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2}$$

Übernommen von [5]

7.16 XIV. Olympiade 1974

7.16.1 I. Runde 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141011
Jemand wählt eine natürliche Zahl n, addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1+2+...+n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z.B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft!

Angenommen, n sei eine natürliche Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt einerseits

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

andererseits lässt sich die laut Aufgabe entstehende Summe in der Form $111x$ schreiben, wobei x eine natürliche Zahl ist, für die $1 \leq x \leq 9$ gilt. Daher ist

$$n(n+1)=2\cdot 111x=2\cdot 3\cdot 37x$$

Da 37 Primzahl ist, folgt, dass entweder n oder $n+1$ durch 37 teilbar ist; Ferner gilt, da die Summe $1+2+...+n$ dreistellig sein soll, $n(n+1)<2000$, also erst recht $n^2<2000$ und daher $n<45$. Folglich kann n nur eine der Zahlen 36, 37 sein.

Wegen $\frac{36\cdot 37}{2}$ und $\frac{37\cdot 38}{2}=703$ erhält man somit genau dann eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, wenn $n=36$ ist.

Aufgabe 2 - 141012
Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, dass die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Mal gleich sein.

a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d.h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?
b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

Mit Hilfe der Zinseszinsformel erhält man $P_{1979}=P_{1975}\cdot(1+p)^4$. Diese liefert mit $P_{1979}=4\cdot P_{1975}$ nach Umstellen: $p=\sqrt[4]{4}-1=\sqrt{2}-1$ den Wert $p=0{,}41=41\%$.

Damit folgt:
$P_{1976}=P_{1975}\cdot 1{,}41=14142$ Stück $\qquad P_{1977}=P_{1976}\cdot 1{,}41=20000$ Stück
$P_{1978}=P_{1977}\cdot 1{,}41=28283$ Stück $\qquad P_{1979}=P_{1978}\cdot 1{,}41=40000$ Stück

Aufgabe 3 - 141013
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2};0)$ und $B(\frac{1}{2};0)$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i $(i=1,2,3,4)$ so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!
   (1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.
   (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.
b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Angenommen, für einen Punkt P seien $|AP|=a$ und $|BP|=b$ ganzzahlig. Wegen $|AB|=1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a-1\leq b=a+1$.

Ist $a-1=b$ oder $b=a+1$, so bilden A,B,P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A,B und P enthält; dann liegt also P auf der x-Achse.

Ist $a-1<b<a+1$, so folgt, da a,b ganzzahlig sind, $a=b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von AP, d. h. auf der y-Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i einer Menge mit den Eigenschaften I und II höchstens zwei Punkte auf der x-Achse und höchstens zwei Punkte auf der y-Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies kann man folgendermaßen finden:

Für einen Punkt $P(x,0)$ auf der x-Achse sind

$$|AP| = \left|x+\frac{1}{2}\right| \qquad \text{und} \qquad |BP| = \left|x-\frac{1}{2}\right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x-\frac{1}{2}=m$ ganzzahlig ist, also $x=m+\frac{1}{2}$ (1) mit ganzem m gilt. Für einen Punkt $P(0,y)$ auf der y-Achse ist

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\frac{1}{4}+y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}$$

mit ganzem n gilt.

Daher erhält man z.B. dadurch vier derartige Punkte, dass man $(x,0)$ mit x aus (1) für $m=-1$ und $m=0$ sowie $(0,y)$ mit y aus (2) für $n=1$ wählt. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

$$P_1\left(-\frac{1}{2},0\right)=A \quad , \quad P_2\left(\frac{1}{2},0\right)=B \quad , \quad P_3\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad , \quad P_4\left(0,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung 1. Sie erfüllen aber auch die Bedingung II; denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht.

Aufgabe 4 - 141014

In einem konvexen n-Eck $A_1A_2...A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120° haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ... , A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130°, ... betragen.

Man zeige, dass für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann!

Angenommen, $A_1A_2...A_n$ sei ein konvexen n-Eck mit den verlangten Innenwinkelgrößen. Ihre Summe beträgt nach einer bekannten Formel $(n-2)\cdot 180°$.

Andererseits haben die Innenwinkel bei $A_1,A_2,...,A_n$ der Reihe nach Größen, die mit 120° beginnen und immer um 5° größer sind als die vorhergehende. Dies sind folglich die Größen

$$120°, \quad 120°+1\cdot 5°, \quad ..., \quad 120°+(n-1)\cdot 5°$$

Ihre Summe ist

$$n\cdot 120° + (1+...+(n-1))\cdot 5° = n\cdot 120° + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 5°$$

Somit folgt

$$(n-2)\cdot 180° = n\cdot 120° + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 5°$$

also (unter Weglassung des Zeichens $\circ$)

$$360n-720 = 240n+5n^2-5n \qquad , \qquad n^2-25n+144=0$$

d.h. entweder $n=9$ oder $n=16$. Da das n-Eck $A_1A_2...A_n$ konvex ist, gilt $120°+(n-1)\cdot 5° < 180°$, so dass $n=16$ ausscheidet. Daher kann höchstens für $n=9$ ein solches n-Eck existieren.

Lösungen der I. Runde übernommen von [5]

7.16.2 II. Runde 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141021
Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass $z_1 > z_2$ ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2!

Bei der Addition der beiden Zahlen z_1 und z_2 kann bei ihrer Addition an keiner Stelle ein Übertrag stattgefunden haben, sonst wären etwa die Einer- und Zehnerstelle ihrer Summe 2555 nicht gleich.

Aus der Tatsache, dass genau die letzten 3 Stellen von 2555 gleich sind, können wir ferner schließen, dass z_1 vierstellig und z_2 dreistellig sein muss. Ist also die Dezimaldarstellung von z_1 von der Bauart $xyxy$, wobei x und y die beiden fraglichen alternierenden Ziffern sind, so muss die Dezimaldarstellung von z_2 dann von der Form xyx sein, wobei $x = 2$ und $x + y = 5$, also dann $y = 3$ gelten muss. Und tatsächlich erfüllen die beiden Zahlen $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$ alle Bedingungen der Angabe.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 141022
Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) $x - y = 96$,
(2) $y - z = 96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Wir bestimmen zunächst alle Paare $(u,v) \in \mathbb{N}^2$, für welche $u^2 - v^2 = 96$ ist. Wegen $(u + v)(u - v) = 96$ müssen wir dazu einfach alle Zerlegungen $96 = a \cdot b$ von 96 mit $a > b > 0$ durchgehen, wobei die beiden komplementären Teiler a,b von 96 auch noch die gleiche Parität haben müssen. Damit ist dann garantiert, dass

$$u := \frac{a+b}{2},\ v := \frac{a-b}{2}$$

ein Paar $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ mit obigen Eigenschaften ist. Dies führt auf die folgenden 4 Fälle:

- $(a,b) = (48,2) \mapsto (u,v) = (25,23)$; • $(a,b) = (24,4) \mapsto (u,v) = (14,10)$
- $(a,b) = (16,6) \mapsto (u,v) = (11,5)$; • $(a,b) = (12,8) \mapsto (u,v) = (10,2)$

Die einzige Möglichkeit, die Gleichungen (1)-(3) in der Aufgabenstellung für $x,y,z \in \mathbb{N}$ zu erfüllen, besteht somit darin $x = 14^2 = 196$, $y = 10^2 = 100$, $z = 2^2 = 4$ zu setzen.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel mit den verlangten Eigenschaften. Aus (*) und (**) folgt dann

$$x > y > z \tag{1}$$

Nach (***) gilt $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind. Aus (1) folgt dann

$$a > b > c \tag{2}$$

Wegen (*) und (**) gilt weiter $a^2 - b^2 = 96$ sowie $b^2 - c^2 = 96$ und damit

$$(a + b)(a - b) = (b + c)(b - c) = 96$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (1), dass höchstens die folgenden Möglichkeiten bestehen:

$a+b$ bzw. $b+c$	96	48	32	24	16	12
$a-b$ bzw. $b-c$	1	2	3	4	6	8

Hiervon scheiden die Fälle mit ungeraden $(a+b)+(a-b)=2a$ aus, und in den übrigen Fällen folgt:

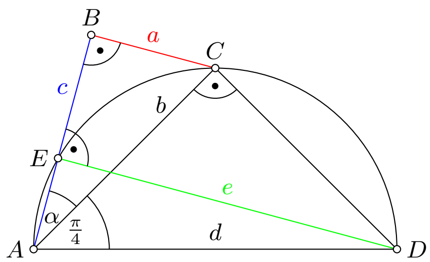
(a,b) bzw. (a,c)	(25,23)	(14,10)	(11,5)	(10,2)

Die einzige Zahl, die sowohl erste als auch zweite Zahl in je einem dieser Paare ist, lautet 10. Damit verbleibt nur die Möglichkeit $a=14$, $b=10$, $c=2$. Das führt auf $x=196$, $y=100$, $z=4$.

Umgekehrt hat das Tripel (x,y,z) aus diesen Zahlen die verlangten Eigenschaften; denn es ist $196-100=100-4=96$.
Das Tripel $(196,100,4)$ ist daher die einzige Lösung der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 141023
Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels.
Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, dass der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A,B zwischen A und B liegt.
Man beweise, dass dann $DE=AB+BC$ gilt!



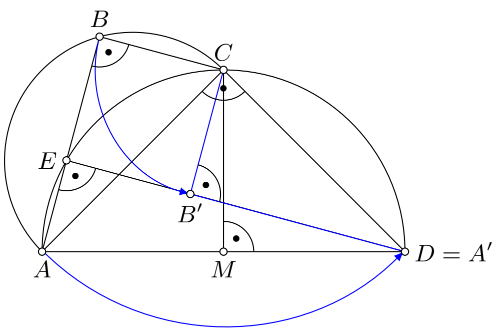
Es gilt

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}d \qquad \text{und} \qquad e=d\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$e=d\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+d\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}d\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}d\cos\alpha$$

$$e=b\sin\alpha+b\cos\alpha=a+c$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras



2.Lösung:
Auf Grund der Aufgabenstellung ist $AC=DC$. Wird das Dreieck ABC um 90° um C so gedreht, dass A auf D zu liegen kommt, so liegt das Bild B' von B auf der Strecke ED (der Winkel $\angle CDE$ ist gleich dem Winkel $\angle CAB$).

Auf Grund der rechten Winkel $\angle DEB=\angle EBC$ sind BC und ED parallel. Da $BC=B'C$ ist, ist das Viereck $EBCB'$ ein Quadrat.
Damit sind $B'D=AB$ und $EB'=BC$, so dass folgt

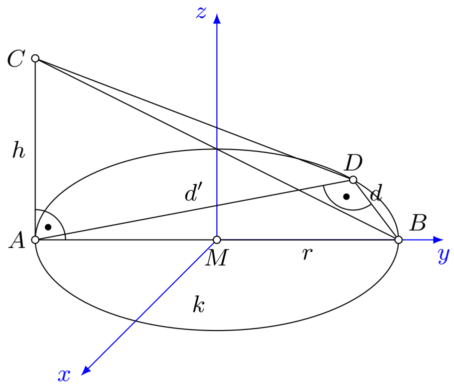
$$ED=EB'+B'D=BC+AB$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 141024
Gegeben seien positive Streckenlängen h,r,d mit $d<2r$. Es bezeichne ϵ eine Ebene und k einen in ϵ gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$.
Auf der Senkrechten zu ϵ durch A sei C ein Punkt mit $AC=h$. Auf k sei D ein Punkt mit $BD=d$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C,D,A,B!
b) Man beweise, dass $BD\perp CD$ gilt!

Wir führen wie in der Abbildung ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem ein und legen den Mittelpunkt M des Kreises k in den Koordinatenursprung. Die Ebene ϵ sei die $x-y$-Koordinatenebene, so dass der Kreis k in ihr liegt.
Dann haben laut Aufgabenstellung die Punkte A,B,C die Koordinaten:

$$A(0;-r;0) \qquad ; \qquad B(0;r;0) \qquad ; \qquad C(0;-r;h)$$



$D(x; y)$ liegt auf dem Kreis k mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (1). Sein Abstand d vom Punkt B ist

$$d = \sqrt{(0-x)^2 + (r-y)^2 + 0^2}$$

Einsetzen von (1) nach x^2 umgestellt, ergibt nach Auflösen die Koordinate y von D:

$$d = \sqrt{r^2 - y^2 + (r-y)^2} \Rightarrow y = \frac{2r^2 - d^2}{2r}$$

Für die x-Koordinate des Punktes D folgt

$$x_{1;2} = \pm\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

O.B.d.A. wählen wir das positive x_1. Für den Abstand $AD = d'$ wird dann

$$d' = \sqrt{x^2 + (-r-y)^2}$$

$$d' = \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2-d^2}\right)^2 + \left(-r - \frac{2r^2-d^2}{2r}\right)^2}$$

$$d' = \sqrt{4r^2 - d^2}$$

Wählen wir o.B.d.A. den positiven Wert x_1, so wird der Flächeninhalt des Grunddreiecks der gesuchten Pyramide $A_\Delta = \frac{d \cdot d'}{2}$, da das Dreieck rechtwinklig ist. Der Punkt D liegt nämlich auf dem Thaleskreis des Durchmessers AB. Für das Volumen der Pyramide ergibt sich somit

$$V = A_\Delta \cdot \frac{h}{3} = \frac{d \cdot h}{6}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

Die Strecke CD steht auf BD senkrecht, wenn das Dreieck CDB rechtwinklig ist, mit dem rechten Winkel bei D. Dann muss nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung

$$CD \perp BD \quad \Leftrightarrow \quad CD^2 + BD^2 = CB^2 \tag{2}$$

gelten. Für die Quadrate der drei Strecken ergibt sich durch Einsetzen der für D ermittelten Koordinaten

$$\begin{aligned} CB^2 &= 4r^2 + h^2 \\ DB^2 &= d^2 \\ CD^2 &= \left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2-d^2}\right)^2 + \left(\frac{2r^2-d^2}{2r} + r\right)^2 + h^2 \\ &= -d^2 + h^2 + 4r^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort (2) und CD und BD sind senkrecht zueinander. w.z.b.w.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

7.16.3 III. Runde 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141031

In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{A} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} \\ & \text{A} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} \\ \hline \text{Ä} & \text{R} & \text{Z} & \text{T} & \text{E} \end{array}$$

Indem wir nachfolgend die oben auftretenden Buchstaben gleich als Variablennamen mit den ihnen entsprechenden Zahlenwerten verwenden, können wir, da offenbar $\ddot{A} = 1$ gelten muss, sofort die Gleichung

$$2(1000A + 100R + 10Z + T) = 10000 + 1000R + 100Z + 10T + E$$

aufstellen, aus welcher sich nach einer einfachen Umformung

$$100R + 10Z + T = 250(A - 5) - \frac{E}{8}$$

ergibt. Aus dieser kann man zunächst unmittelbar folgern, dass E durch 8 teilbar sein muss, und da $E = 0$ sofort auf den Widerspruch $T = E$ führen würde, bleibt als nur mehr die Möglichkeit $E = 8$.
Da $100R+10Z+T$ jedenfalls positiv ist, bleiben dann für A nur mehr eine der Möglichkeiten $A \in \{6,7,8,9\}$, wobei auch die Fälle $A = 7$ und $A = 9$ sofort ausscheiden, da sie auf den Widerspruch $Z = T = 9$ führen würden und auch $A = E = 8$ natürlich nicht geht. Es bleibt also nur mehr der Fall

$$A = 6,\ 100R + 10Z + T = 249$$

übrig, welcher dann auch tatsächlich eine Lösung der Aufgabe ist:

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 2 & 4 & 9 \\ & 6 & 2 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 8 \end{array}$$

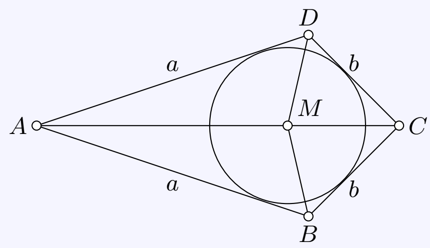
Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 141032

Beweisen Sie folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit $AB = AD = a$, $BC = DC = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM}$$



Wegen der Symmetrie im Drachenviereck gilt $BM = DM$. Somit ist nur

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM}$$

zu zeigen. Im Dreieck ABM bezeichnen β,μ die Winkel bei B,M. Nach dem Sinussatz gilt $\frac{a}{AM} = \frac{\sin\mu}{\sin\beta}$.
Im Dreieck BCM erhalten wir analog $\frac{b}{CM} = \frac{\sin(180° - \mu)}{\sin\beta}$.
Aus $\sin(180° - \mu) = \sin\mu$ folgt $\frac{a}{AM} = \frac{b}{CM}$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 3 - 141033

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $x^{\log_a x} = a^2 x$ erfüllen!

Damit $\log_a x$ definiert ist, muss x positiv sein. Durch Anwendung von $\log_a$ auf beide Seiten erhalten wir die äquivalente Gleichung $(\log_a x)^2 = 2 + \log_a x$.
Dies ist eine quadratische Gleichung in $\log_a x$ mit Lösungen $\log_a x = -1$ und $\log_a x = 2$.
Damit erfüllt x die Gleichung genau dann, wenn $x = \frac{1}{a}$ oder $x = a^2$ gilt.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Zweite Lösung:

Angenommen, es gibt eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt. Dann ist $x > 0$, da $\log_a x$ existiert, und es folgt, wenn man die Gleichung logarithmiert,

$$\log_a x \cdot \log_a x = log_a a^2 x$$

und somit

$$(\log_a x)^2 = \log_a a^2 + \log_a x$$

Setzt man $\log_a x = z$, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$z^2 - z -^2 = 0$$

die genau die beiden Lösungen $z = 2$ und $z = -1$ hat. Aus $\log_a x = z = 2$ erhält man $x = a^2$, und aus $\log_a x = z = -1$ erhält man $x = \frac{1}{a}$.
Also kann nur $x = a^2$ oder $x = \frac{1}{a}$ Lösung der gegebenen Gleichung sein. Die Proben

$$(a^2)^{\log_a a^2} = (a^2)^2 = a^4 = a^2 a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{\log a \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a = a^2 \frac{1}{a}$$

bestätigen, dass diese beiden Zahlen tatsächlich Lösungen sind.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 141034
Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$$f(n) = a^n + b^n + (a+b)^n$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass dann $[f(2)]^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

Betrachte die Polynome $p(x) = (a^2 + x^2 + (a+x)^2)^2$ und $q(x) = 2(a^4 + x^4 + (a+x)^4)$.
Wir beobachten:

1.) $p(x)$ und $q(x)$ sind beide Polynome vierten Grades in x und haben den Leitkoeffizienten 4.
2.) Es ist $p(0) = 4a^4 = q(0)$.
3.) Es ist $p(-a) = 4a^4 = q(-a)$
4.) Es ist $p(a) = 36a^4 = q(a)$
5.) Es ist $p(2a) = (1+4+9)^2 a^4 = 196a^4 = 2 \cdot (1+16+81)a^4 = q(2a)$.
6.) Da a positiv ist, sind $0, -a, a, 2a$ vier paarweise verschiedene Zahlen.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist

$$[f(2)]^2 = p(b) = q(b) = 2 \cdot f(4)$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 5 - 141035
Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl $n^2 + 6n - 187$ ohne Rest durch 19 teilbar ist!

Wegen $-187 \equiv 3 \mod 19$ geht es hier als um die Auflösung der quadratischen Kongruenz

$$n^2 + 6n + 3 \equiv 0$$

oder nach der einfachen Umformung

$$(n+3)^2 \equiv 6 \mod 19 \qquad (*)$$

dann im Folgenden eigentlich nur mehr um die Frage, ob 6 ein quadratischer Rest mod 19 oder nicht, und falls ja, wie man die beiden Wurzeln aus 6 mod 19 bestimmt.

Aus der Theorie der quadratischen Reste weiß man nun, dass die Lösungen einer Kongruenz $x^2 \equiv a \mod p$ für eine Primzahl $p \equiv 3 \mod 4$ die Gestalt $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \mod p$ haben müssen, falls a quadratischer Rest mod p ist.
In unserem Fall hier ist $6^5 \equiv 5 \mod 19$, und ja, $x \equiv \pm 5 \mod 19$ sind tatsächlich Lösungen von $x^2 \equiv 6 \mod 19$, was dann auch sofort auf die beiden Lösungen $n \equiv 2 \mod 19$ und $n \equiv 11 \mod 19$ der Kongruenz (*) führt. Auf die ursprüngliche Frage bezogen heißt das, dass genau die Zahlen $n \in \{2,11,21,30\}$ die Aufgabe hier lösen.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, n sei eine Zahl mit den verlangten Eigenschaften. Dann muss wegen $n^2 + 6n - 187 = (n-11)(n+17)$ mindestens einer dieser beiden Faktoren durch 19 teilbar sein, da 19 eine Primzahl ist.

Fall 1: Es gelte $n - 11 = m \cdot 19$ mit ganzzahligem m. Daraus folgt

$$n = 19m + 11$$

Für $m < 0$ ist n keine natürliche Zahl. Aus $m = 0$ folgt $n = 11$. Aus $m = 1$ folgt $n = 30$. Für $m \geq 2$ ist $n > 40$.

Fall 2: Es gelte $n + 17 = r \cdot 19$ mit ganzzahligem r. Daraus folgt

$$n = 19r - 17$$

Für $r \leq 0$ ist n keine natürliche Zahl. Aus $r = 1$ folgt $n = 2$. Aus $r = 2$ folgt $n = 21$. Für $r \geq 3$ ist $n \geq 40$.
Also können höchstens die Zahlen 11, 30, 2, 21 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
&11^2 + 6 \cdot 11 - 187 = 11(11 + 6 - 17) = 0 \cdot 19\\
&30^2 + 6 \cdot 30 - 187 = 30 \cdot 36 - 187 = 893 = 47 \cdot 19\\
&2^2 + 6 \cdot 2 - 187 = 16 - 187 = -9 \cdot 19\\
&21^2 + 6 \cdot 21 - 187 = 21 \cdot 27 - 187 = 380 = 20 \cdot 19
\end{aligned}$$

Genau die Zahlen 11, 30, 2, 21 genügen daher den Bedingungen der Aufgabe.

Dritte Lösung:

Genau dann ist $(n^2 + 6n - 187) = (n+3)^2 - 196$ durch 19 teilbar, wenn $(n+3)^2$ bei Division durch 19 den Rest 6 lässt. (Es ist also die Kongruenz $(n+3)^2 \equiv 6 \pmod{19}$ zu lösen.)
Lässt nun $n + 3$ bei Division durch 19 den Rest r, so lässt $(n+3)^2$ jeweils den in der folgenden Tabelle unter r^2 genannten Rest:

r	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9
r^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5

Daher ist genau dann $n^2 + 6n - 187$ durch 19 teilbar, wenn $n + 3$ einen der Reste 5, -5 oder, gleichwertig hiermit, n einen der Reste 2, 11 lässt. Unter den natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ trifft dies genau für die Zahlen 2, 11, 21, 30 zu.
Daher genügen genau diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 141036
Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben:

Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.
Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren!
Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt!

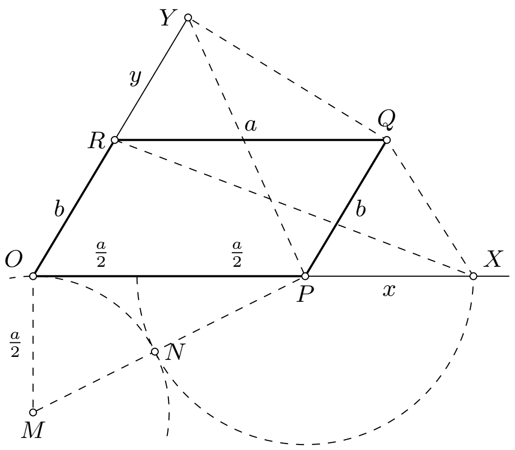
(I) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $OP = a$, $OR = b$, $PX = x$, $RY = y$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a+b} \tag{1}$$

denn wegen $\angle ROP = \angle YRQ$ und $\angle ORX = \angle RYQ$ ist $\triangle ORX \sim \triangle RYQ$. Außerdem gilt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b+y} \tag{2}$$

weil wegen $\angle OPY = \angle OXQ$ und $\angle OYP = \angle PQX$ $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ gilt.



Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b + \frac{ab}{a+x}} \tag{3}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{4}$$

und hieraus wegen $x > 0$

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreiecke mit den Katheten OP und $OM = \frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius PN, so ist $PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgaben, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

(a) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.

(b) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.

(c) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MO. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann

(d) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius PN. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.

(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt

$$MP = \sqrt{OM^2 + OP^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Daher ist nach Konstruktion

$$PX = PN = PM - MN = PM - MO = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Folglich gilt $x = PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und damit (4) und (3).
Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, dass $YQ \parallel RX$ ist, so gilt $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ und hieraus $\angle OPY = \angle PXQ$. Folglich ist $\angle PXQ + \angle YPX = 180°$.
Daher können die PY bzw XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt, sind also parallel.

(IV) Die angegeben Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

Übernommen von [5]

7.16.4 IV. Runde 1974, Klasse 10

Aufgabe 1 - 141041
Es sei
$$z = \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{4}{199^2}\right)$$
Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist!

Es ist
$$1 - \frac{4}{(2k-1)^2} = \frac{4k^2 - 4k - 3}{(2k-1)^2} = \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1}$$
Daraus folgt
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = -\frac{2n+1}{2n-1}$$
Nun ist $\text{ggT}(2n+1{,}2n-1) = 1$, dieses folgt z.B. leicht mithilfe des euklidischen Algorithmus:
$2n + 1 = 1 \cdot (2n - 1) + 2$
$2n - 1 = (n - 1) \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
Der Produktwert z folgt mit $n = 100$: $z = -\frac{2\cdot 100+1}{2\cdot 100-1} = -\frac{201}{199}$

Zweite Lösung:

Laut Aufgabe gilt
$$\begin{aligned} z &= \frac{1-4}{1^2} \cdot \frac{3^2-2^2}{3^2} \cdot \frac{5^2-2^2}{5^2} ... \frac{197^2-2^2}{197^2} \cdot \frac{199^2-2^2}{199^2} \\ &= -3 \cdot \frac{(3-2)(3+2)}{3^2} \cdot \frac{(5-2)(5+2)}{5^2} ... \frac{(197-2)(197+2)}{197^2} \cdot \frac{(199-2)(199+2)}{199^2} \\ &= -3 \cdot \frac{1 \cdot 5}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5^2} ... \cdot \frac{195 \cdot 199}{197^2} \cdot \frac{197 \cdot 201}{199^2} \end{aligned}$$
Dabei durchlaufen in den Zählern die ersten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 1 bis 197, die zweiten Faktoren die Folge der ungeraden Zahlen von 5 bis 201. Also ist
$$z = \frac{-1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 197^2 \cdot 199 \cdot 201}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 195^2 \cdot 197^2 \cdot 199^2}$$
und damit $z = -\frac{201}{199}$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 141042
Beweisen Sie folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt:
$$\frac{a}{c} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$$

Der Beweis erfolgt ähnlich zur Aufgabe 2 - 141032.
Seien die Innenwinkel des Tangentenvierecks durch $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ gegeben, so dass z.B. das Dreieck ABM die Innenwinkel α,β und $180° - \alpha - \beta$ hat. Nach dem Sinussatz in den Dreiecken ABM und BCM gilt
$$\frac{a}{AM} = \frac{\sin(180° - \alpha - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{b}{CM} = \frac{\sin(180° - \beta - \gamma)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta} \ .$$

Division der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{a}{AM} \cdot \frac{CM}{b} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \iff \frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \ .$$

Für b,c erhalten wir entsprechend

$$\frac{b}{c} = \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\gamma+\delta)} \ .$$

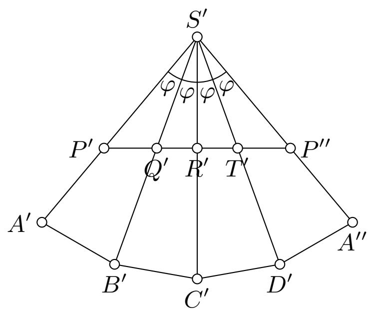
Multiplikation beider Gleichungen ergibt

$$\frac{a}{c} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\delta)} \overset{!}{=} \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM} \ .$$

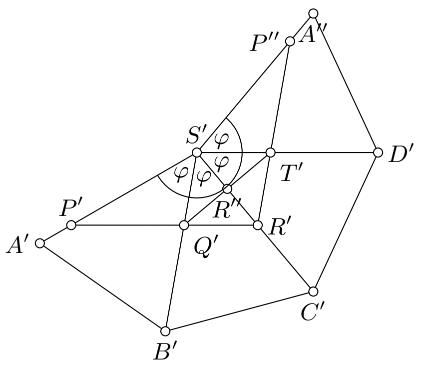
Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$, also

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180° - \gamma - \delta) = \sin(\gamma+\delta)$$

Aufgabe 3A - 141043A
Es sei $ABCDS$ eine geraden vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen ρ ($0° < \rho < 90°$), für die folgendes gilt:
Hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe ρ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzügen $PQRTP$ ein kürzester.



$0° < \varphi < 45°$



$45° < \varphi < 90°$

Wir denken uns den Pyramidenmantel längs der Kanten SA aufgeschnitten und in eine Ebene so "abgewickelt", dass eine Figur wie in der Abbildung entsteht, also ein Sechseck $S'A'B'C'D'A''$, bei dem

$$\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB \quad ; \quad \triangle S'B'C' \cong \triangle SBC \quad ; \quad \triangle S'C'D' \cong \triangle SCD \quad ; \quad \triangle S'D'A'' \cong \triangle SDA$$

und für den bei S' gelegenen Innenwinkel $\angle A'S'A''$ des Sechsecks $\angle A'S'A'' = 4\varphi$ gilt. Dabei gilt ferner:

(1) Jeder der betrachteten geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$ geht dabei in einen gleichlangen nicht geschlossenen Streckenzug $P'Q'R'T'P''$ über, wobei P', Q', R', T', P'' jeweils innere Punkte von SA', SB', SC', SD', SA'' sind und $S'P' = S'P''$ gilt.
Umgekehrt entspricht jedem der in (1) genannten Streckenzüge $P'Q'R'T'P''$ ein gleichlanger Streckenzug $PQRTP$ auf dem Pyramidenmantel.

Damit ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, alle φ mit $0° < \varphi < 90°$ zu ermitteln, für die unter alle bei (1) genannten Streckenzügen ein kürzester existiert.
Wir untersuchen dazu zwei Fälle:

1) $0° < 4\varphi < 180°$, d.h. das Sechseck $S'A'B'C'D'A''$ ist konvex.
2) $180° < 4\varphi < 360°$, d.h. das Sechseck S' eine einspringende Ecke oder ist zu einem Fünfeck ausgeartet.

Fall 1: Wegen der Konvexität des Sechsecks schneidet die Strecke $P'P''$ jede der Strecken $S'B'$, $S'C'$,

$S'D'$ in genau einem inneren Punkt, die in dieser Reihenfolge mit Q', R', T' bezeichnet seien.

Beweis: Da der Innenwinkel des Sechsecks bei S' die Größe 4φ hat, liegen P' und P'' auf verschiedenen Seiten jeder der Geraden durch S' und B', durch S' und C', sowie durch S' und D'. Folglich schneidet $P'P''$ jede dieser Geraden, und zwar im Innern des Sechsecks, also im Innern der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$, da das Sechseck konvex ist.

Daher ist $P'Q'R'T'P''$ in diesem Falle einer der Streckenzüge (1) und hat die Länge $P'P''$, ist also der kürzeste.

Fall 2: In diesem Fall enthält entweder $P'P''$ den Punkt S' (wenn $4varphi = 180°$) oder $P'P''$ enthält keinen Punkt einer der Strecken $S'B', S'C', S'D'$.
Ist daher $P'Q'R'T'P''$ einer der zulässigen Streckenzüge (1), so liegen bei wenigstens einem der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ nicht alle drei angegebenen Punkte auf derselben Geraden.
Ersetzt man daher einen solchen Streckenzug durch die Verbindungsstrecke seiner Endpunkte, so hat diese eine kleinere Länge als der Streckenzug und liegt wegen $2\varphi < 180°$ innerhalb des Sechsecks und bildet mit den restlichen beiden Strecken von $P'Q'R'T'P''$ zusammen einen anderen zulässigen Streckenzug (1) von kleinerer Länge.
Daher gibt es im Fall 2 keinen kürzesten unter den Streckenzügen (1).
Die gesuchte Menge der Winkelgrößen φ ist die Menge aller φ mit $0° < \varphi < 45^{\varphi}$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 141043B
Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining. Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände:
Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, dass jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: "Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht."
Monika: "Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht."
Peter: "Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht."
Klaus: "Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift."
Ilona: "Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift."

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen! Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

Die Aussage von Uwe ist genau dann wahr, wenn die Aussage von Monika wahr ist. Ebenso sind die Aussagen von Uwe und Peter logisch äquivalent.
Da genau zwei der fünf Aussagen falsch sind, müssen also Uwe, Monika und Peter jeweils die Wahrheit gesagt haben und es müssen Klaus und Ilona gelogen haben.

Da Klaus lügt, muss Klaus das Lineal haben.
Nach Peters Aussage muss somit Peter den Zirkel haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	?	Zirkel	Lineal	?

Uwe bzw. Ilona können den Bleistift nicht haben, denn sonst hätten Klaus bzw. Ilona die Wahrheit gesagt. Also muss Monika den Bleistift haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

Da Ilona lügt, kann sie nicht den Füller haben. Also muss Uwe den Füller haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

Somit kann nur Ilona den Radiergummi haben.
Also lassen sich alle Verstecke ermitteln. Sie lauten

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	Radiergummi

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 141044
Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r = 4$$

Wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ist $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^r$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{x} = 4$, womit also dann

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r = 2 \pm \sqrt{3}$$

gilt. Diese Gleichung hat aber einerseits für jede Vorzeichenwahl eine eindeutig bestimmte Lösung $r \in \mathbb{R}$, andererseits sind $r = \pm 2$ jeweils offensichtlich Lösungen, welche dann auch tatsächlich die gesuchten rationalen Lösungen der Aufgabe sind.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Nach einem der Wurzelgesetze gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1, \qquad \text{also} \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Angenommen nun, eine rationale Zahl r erfülle die in der Aufgabe genannte Gleichung. Für die Zahl $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r$ ist dann $\frac{1}{z} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r$, und folglich erfüllt z die Gleichung $z + \frac{1}{z} = 4$, woraus folgt, dass entweder $z = 2+\sqrt{3}$ oder $z = 2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ gilt.

Aus $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r$ folgt nun $r = 2$; denn wäre $r < 2$, so wäre $z < 2+\sqrt{3}$, und wäre $r > 2$, so wäre $z > 2+\sqrt{3}$.
Aus $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ folgt entsprechend $r = -2$.

Daher können nur die Zahlen $r = 2$ und $r = -2$ die genannte Gleichung erfüllen. Tatsächlich gilt

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$$

sowie

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-2} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2} = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4$$

Die gegebene Gleichung hat daher genau die Lösungen $r = 2$ und $r = -2$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 141045
In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, dass beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und dass die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist.
Annemarie folgert nun daraus: "Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion."

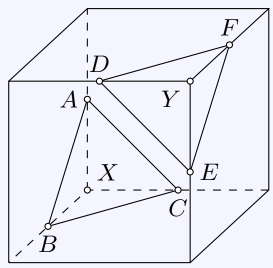
Brigitte widerspricht: "Es lässt sich nur schließen, dass g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist."
Christa meint: "Ihr habt beide nicht recht."
Wer von diesen Schülern hat nun recht?

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Christa hat recht.
Ist zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, so ist f streng monoton wachsend und es gilt $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Aber $g(x)$ ist weder streng monoton wachsend, noch streng monoton fallend, denn $g(-1) = g(1)$, obwohl $-1 < 1$ ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 141046

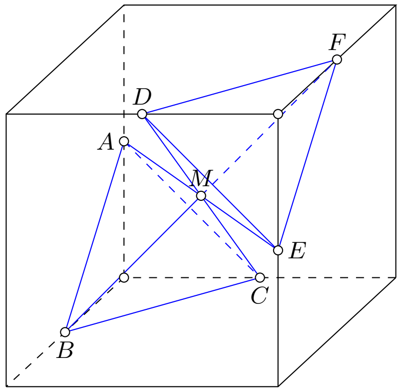


Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y.
Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, die Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, dass A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.

a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, dass folgendes gilt!
Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (das ist ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.
b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen!

a) I. Angenommen, eine Zuordnung zwischen A, B, C und D, E, F habe die geforderte Eigenschaft. Wir bezeichnen dabei jetzt mit A', B', C' den A, B und C zugeordneten Punkt.
Da AB Kanten sein soll, muss AB mindestens zwei Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gegen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der mithin auch AB und $A'B$ liegen.

Wir beachten jetzt, dass EF und AB in einer gemeinsamen Ebene ϵ liegen. Der Mittelpunkt des Würfels liegt nämlich aus Symmetriegründen sowohl auf AE als auch auf BF, so dass AE und BF in einer gemeinsamen Ebene ϵ liegen.
Die Ebene ϵ enthält D nicht; weil die Ebene durch D, E, F nicht A, B, C enthält. Daher kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es muss also $A'B' = EF$, d.h. entweder $A' = E$ und $B' = F$ oder $A' = F$ und $B' = E$, und aus Symmetriegründen $B'C' = FD$ und $C'A' = DE$ sein. Daraus folgt, dass $A' = E$, $B' = F$, $C' = D$ sein muss.



II. Umgekehrt hat in der Tat diese Zuordnung die geforderte Eigenschaft, dass die Strecken AE, BF, CD, AB, BC, CA, DE, EF, FD die sämtlichen Kanten einer aus Polyedern zusammensetzbaren Figur sind.
Der Mittelpunkt von AE ist aus Symmetriegründen zugleich der von BF, der von CD sowie der der Würfels. Daher besteht die gesuchte Figur aus den beiden Tetraedern $ABCM$ und $DEFM$.

b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Wegen $AE = BF = CD = a\sqrt{2}$ haben auch AM, BM, CM, DM, EM, FM die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Daher sind die beiden Tetraeder regelmäßig, zueinander kongruent und haben nach einer bekannten Formel das Volumen

$$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$$

Die gesamte Figur hat das Volumen $\frac{a^3}{12}$.

Übernommen von [5]

7.17 XV. Olympiade 1975

7.17.1 I. Runde 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151011
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft!

a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.

b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.

Die Summe S der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist laut Zahlentafel $s = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Angenommen, für eine natürlich Zahl n sei s eine zweistellige Zahl aus zwei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $s = n(n+1)$ durch 11 teilbar. Da 11 Primzahl ist, ist somit entweder n oder $n+1$ durch 11 teilbar. Wäre $n \geq 14$, so wäre $s \geq 7 \cdot 15 > 100$, also nicht zweistellig. Daher ist $n < 14$, $n+1 < 15$, so dass entweder $n = 11$ oder $n+1 = 11$, d.h. $n = 10$ folgt.

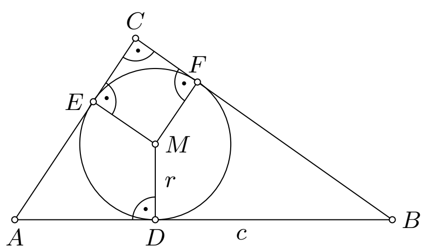
   Tatsächlich erhält man für $n = 11$ den Wert $s = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ und für $n = 10$ entsprechend 55; also ist für $n = 10$ und $n = 11$ die Bedingung a) erfüllt.

b) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s = n(n+1)$ durch 111 teilbar. Wäre $n \geq 45$, so wäre $s \geq 45 \cdot 23 > 1000$, also nicht dreistellig. Daher ist $n < 45$, $n+1 < 46$.

   Also muss wegen $111 = 3 \cdot 37$ und, weil 3 und 37 Primzahlen sind, einer der beiden Faktoren $n, n+1$ durch 3 teilbar und der andere gleich 37 sein. Da $n+1$ für $n = 37$ nicht durch 3 teilbar ist, verbleibt nur $n+1 = 37$. Tatsächlich erhält man dabei $s = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$, also eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern als einzige Lösung.

Aufgabe 2 - 151012
Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.

Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!



Es sei Dreieck ABC rechtwinklig mit $\angle ACB = 90°$. Ferner seien M der Mittelpunkt des Inkreises und D, E und F die Fußpunkte der von M auf die Seiten AB, AC und BC (in dieser Reihenfolge) gefällten Lote.

Da der Inkreis die Seiten in diesen Punkten berührt, sind D, E und F innere Punkte der Seiten. Nun gilt für den Umfang u des Dreiecks

$$u = AD + DB + AE + EC + BF + CF \qquad (1)$$

Ferner gilt

$$AD = AE, \qquad DB = BF, \qquad EC = CF \qquad (2)$$

als Abschnitte der Tangenten an den Inkreis. Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$u = 2AD + 2DB + 2EC \qquad \text{oder} \qquad u = 2(AD + DB) + 2EC \qquad (3)$$

Das Viereck $MFCE$ enthält drei rechte Winkel und mit EM und MF ein Paar kongruenter Nachbarseiten. Es ist demnach ein Quadrat. Folglich hat EC die Länge r.

Unter Berücksichtigung von $AD + DB = AB$ folgt dann aus (3) $u = 2c + 2r$ oder $u = 2(c + r)$.

Aufgabe 3 - 151013
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a : b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a < b$ so zu wählen, daß folgendes gilt!

Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt 60% ihres arithmetischen Mittels.

Angenommen, für zwei Zahlen a und b mit $0 < a < b$ sei $\sqrt{ab}$ gleich 60 % von $\frac{a+b}{2}$. Dann gilt

$$\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{ab} \qquad \text{also} \qquad a + b = \frac{10}{3}\sqrt{ab} \tag{1}$$

Sei nun $\frac{a}{b} = m$ das gesuchte Verhältnis, dann gilt $bm = a < b$, wegen $b > 0$, also $m < 1$.

Durch Einsetzen in (1) erhält man ferner

$$bm + b = \frac{10}{3}\sqrt{b^2m} \qquad \text{wegen } b > 0 \text{ also}$$

$$b(m + 1) = \frac{10}{3}b\sqrt{m} \qquad ; \qquad m + 1 = \frac{10}{3}\sqrt{m}$$

Durch Quadrieren und Subtraktion von $\frac{100}{9}m$ erhält man daraus

$$m^2 - \frac{82}{9}m + 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $m_1 = 9$ und $m_2 = \frac{1}{9}$ von denen nur die zweite die Eigenschaft $m < 1$ hat.

Also können zwei Zahlen nur dann die gestellten Bedingungen erfüllen, wenn ihr Verhältnis $m = a : b = 1 : 9$ ist. Umgekehrt folgt hieraus $b = 9a$, also $\frac{a+b}{2} = \frac{9a+a}{2} = 5a$ sowie, da $a > 0$ ist, $\sqrt{ab} = \sqrt{9a^2} = 3a$, und $3a$ sind genau 60 % von $5a$.

Also erfüllen a, b genau dann die gestellten Bedingungen, wenn $a : b = 1 : 9$ gilt.

Aufgabe 4 - 151014
In

$$\begin{array}{cccccc} & & H & A & U & S \\ + & & H & A & U & S \\ + & & H & A & U & S \\ \hline S & & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen an!

Die Spalten seien, von der Einerstelle beginnend, mit 1 bis 5 bezeichnet.

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung. Dann kann für diese Ersetzung S nur eine der Ziffern 1 oder 2 sein, da die Summe dreier vierstelliger Zahlen kleiner als 30000 ist und die fünfstellige natürliche Zahl "STADT" nicht mit 0 beginnen kann.

Fall 1: Es sei $S = 1$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 3$.

Da die Summe mit den Ziffern 1 und 3 beginnt, und unter den Zahlen, die gleich 13 oder um 1 oder 2 kleiner als 13 sind, nur $12 = 3 \cdot 4$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 4$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 1 entstehen.

Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die das Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen 10,...,19 ist. Von allen derartigen Ziffern 3, 4, 5 oder 6, scheiden 3 und 4 aus, da sie bereits vergeben sind. Da aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 6 = 18$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer 6 entstehen kann, entfällt $A = 6$.

A kann demnach nur 5 sein, und damit nur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 5 entsteht, darf Spalte 2 keinen Übertrag liefern, also kann U nur eine der Ziffern 0, 1, 2 oder 3 darstellen. Davon sind 1 und 3 bereits vergeben.

Für $U = 0$ entstünde $D = 0$ und damit ein Widerspruch. Also kann U nur 2 sein, woraus weiter $D = 6$ folgt.

Fall 2: Es sei $S = 2$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 6$.

Da die Summe mit den Ziffern 2 und 6 beginnt und unter den Zahlen, die gleich 26 oder um 1 oder 2 kleiner als 26 sind, nur $24 = 3 \cdot 8$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 8$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 2 entstehen. Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die des Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen 20,...,29 ist.

Von allen derartigen Ziffern, 6, 7, 8 oder 9, scheiden 6 und 8 aus, da 1 sie bereits vergeben sind. Weil aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 7 = 21$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer entstehen kann, entfällt $A = 7$.

A kann demnach nur 2 sein, und damit zur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 9 entsteht, muss aus Spalte 2 ein Übertrag von 2 zur Verfügung stehen.

Demnach kann nur U eine der Ziffern 7, 8 oder 9 sein. Davon ist 7 die einzige noch nicht vergebene Ziffer, woraus weiter $D = 1$ folgt.

Somit können nur die Einsetzungen $A = 5$, $D = 6$, $H = 4$, $S = 1$, $T = 3$, $U = 2$, und $A = 9$, $D = 1$, $H = 8$, $S = 2$, $T = 6$, $U = 7$ zu Lösungen führen.

II. In der Tat sind bei diesen Einsetzungen verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehenden Additionsaufgaben

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & 2 & 1 \\ + & 4 & 5 & 2 & 1 \\ + & 4 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 8 & 9 & 7 & 2 \\ + & 8 & 9 & 7 & 2 \\ + & 8 & 9 & 7 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 1 & 6 \end{array}$$

richtig gelöst sind, erfüllen diese Einsetzungen alle gestellten Forderungen.

Lösungen der I. Runde 1975 übernommen von [5]

7.17.2 II. Runde 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151021
Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.
Zuschauer (1): "A oder C gewinnt."
Zuschauer (2): "Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."
Zuschauer (3): "Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."
Zuschauer (4): "A oder B wird Zweiter."
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, dass die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und dass alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?

Aus der Aussage (1) folgt, dass entweder A oder oder C gewinnt; auf keinen Fall aber B. Damit ergibt sich aus (2), dass A nicht Zweiter wird, da sonst im Widerspruch zu (1) B gewinnen müsste.
Da (3) gilt, wird aus A Dritter, dass C nicht gewinnt und somit B Sieger wäre, im Widerspruch zu (1). Damit kann A nur noch Platz 1 belegen.
Nach der Aussage (4) ist dann B Zweiter und folglich C Dritter. Der Einlauf lautet damit A-B-C.

Aufgabe 2 - 151022
Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält.
Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind.
Danach stellt er fest, dass in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

Zu Beginn seine im 1.Kastchen a Kugeln, im zweiten b Kugeln und im dritten c Kugeln. Die drei Umlegungen verändern die Inhalte der Kästchen wie folgt:

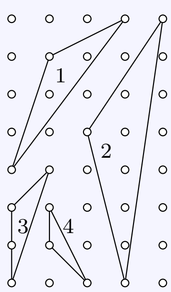
Aktion	1.Kästchen	2.Kästchen	3.Kästchen
	a	b	c
I	$a-b-c$	$2b$	$2c$
II	$2a-2b-2c$	$3b-a-c$	$4c$
III	$4a-4b-4c$	$6b-2a-2c$	$-a-b+7c$

Alle Kästchen enthalten dann 64 Kugeln. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$4a-4b-4c=64 \qquad -2a+6b-2c=64 \qquad -a-b+7c=64$$

mit der Lösung $a=104$, $b=56$ und $c=32$. Im ersten Kästchen waren zu Beginn 104 Kugeln, im zweiten 56 und im dritten 32 Kugeln.

Aufgabe 3 - 151023
Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse identisch sind. Mit der Festlegung a ist die kleinste, b die mittlere und c die größte Seite, ergibt sich unter der Annahme, dass der waagerechte und senkrecht Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten x ist, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras für die Dreiecke:

Dreieck	a	b	c	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
1	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{25}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
2	$\sqrt{13}x$	$\sqrt{17}x$	$\sqrt{50}x$	$\sqrt{\frac{17}{13}}$	$\sqrt{\frac{50}{13}}$
3	$\sqrt{2}x$	$2x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
4	x	$\sqrt{2}x$	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$

Die Dreiecke 1, 3 und 4 sind paarweise zueinander ähnlich. Das Dreieck 2 ist zu keinem anderen der Dreiecke ähnlich.

Aufgabe 4 - 151024
Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2 \qquad (1)$$

Es ist zu beweisen, dass dann für diese Zahlen $a+b \geq 2 \quad (2)$ gilt.
Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a,b) zu ermitteln, für die (1) gilt und für die in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

Umformen von (1) ergibt, da $a>0$, $b>0$

$$a+b=2ab \quad (2) \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{b}{2b-1} \quad (3)$$

Da $a>0$ nach Aufgabenstellung ist, wird aus (3): $\frac{b}{2b-1}>0 \Rightarrow b>\frac{1}{2}$ (analog aus Symmetriegründen $a>\frac{1}{2}$), womit (3) für alle möglichen b definiert ist. Einsetzen von (3) in (2) ergibt

$$a+b=2\frac{b^2}{2b-1} \qquad (4)$$

Für alle möglichen $b>\frac{1}{2}$ wird

$$\frac{b^2}{2b-1}\geq 1 \Leftrightarrow b^2\geq 2b-1 \Leftrightarrow b^2-2b+1\geq 0 \Leftrightarrow (b-1)^2\geq 0 \qquad (5)$$

Da $(b-1)^2$ für $b>\frac{1}{2}$ stets positiv ist, kann (4) abgeschätzt werden

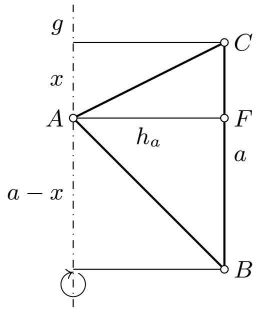
$$a+b=2\frac{b^2}{2b-1}\geq 2$$

w.z.b.w.
Die Zahlenpaare $(a;b)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, $b>\frac{1}{2}\wedge a=\frac{b}{2b-1}$ erfüllen Gleichung (1).
Die Gleichheit in (2) gilt für $\frac{b^2}{2b-1}=1$, d.h. nach (5) für $(b-1)^2=0$, also $b=1$ und somit $a=1$, d.h. das Zahlenpaar $(1,1)$.

Aufgaben der II. Runde 1975 gelöst von Steffen Polster

7.17.3 III. Runde 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151031
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $BC = a$ und der Höhenlänge $AD = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

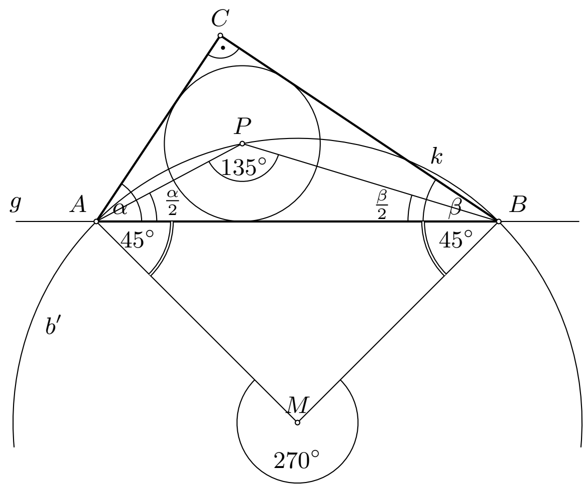


Rotiert das Dreieck um die Gerade g, so entsteht ein zylinderförmiger Körper, aus dem auf den Seiten der Grund- und Deckfläche ein Kegel herausgeschnitten wurde. Zylinder Z und beide Kegel K_1, K_2 haben als Radius die Höhe h_a. Die Höhe des Zylinders ist s, die der zwei Kegel x und $a - x$. Für das Volumen des gesuchten Körpers wird dann:

$$V = V_Z - V_{K_1} - V_{K_2} = \pi \cdot h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot x - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot (a - x) = \frac{2}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 151032
Gegeben sei eine Strecke AB mit $AB = 5$ cm.
Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein!



I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB. Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B. Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck ABC, so ist

$$\alpha + \beta = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle BAP = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ABP = \frac{\beta}{2}$$

also $\angle BAP + \angle ABP = 45°$ und daher $\angle APB = 135°$.
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von $\triangle ABP$, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b' = \overset{\frown}{AB}$ von k gehört, die Größe 270°.

Also ist $\triangle ABM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, folglich gilt $\angle BAM = \angle ABM = 45°$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b', d.h. nicht auf derselben Seite von g wie P (siehe Abbildung).

Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ϵ_1 und ϵ_2.

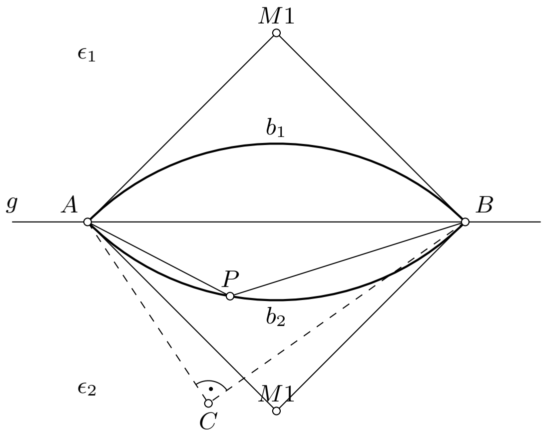
(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ϵ_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $M_1A = M_1B$. Der in ϵ_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ϵ_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $M_2A = M_2B$. Der in ϵ_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.

(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.



III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an.

Beweis:
Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.
Liegt P ($\neq A, B$) auf b_1, so ist $\angle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $M_1A = M_1B$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d.h. in ϵ_1 gelegenen Bogen $b_1' = \overset{\frown}{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpf, da auch M_1 in ϵ_1 liegt.

Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270°, folglich gilt $\angle SPB = 135°$, also $\angle BAP + \angle ABP = 45°$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAP$ bzw. $2 \cdot \angle ABP$ so an, dass die freien Schenkel in ϵ_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C, für den $\angle BAC + \angle ABC = 90°$, also $\angle ACB = 90°$ gilt.

In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierender, also der Inkreismittelpunkt. Daher gehört P der gesuchten Menge an.

IV. Analog beweist man, dass jeder Punkt P ($\neq A$,B) auf b_2 der gesuchten Menge angehört.
Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 151033
Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt $(1 + a^2x^2) : x^2 = b$ (mit gegebenen Zahlen a, b) versehentlich die Gleichung $(1 + a^2x^2) \cdot x^2 = b$ (mit denselben Zahlen a, b) gedruckt.
Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge!

Wir nehmen an, dass $a, b \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Aus der ersten, "eigentlich richtigen" Aufgabe folgt einerseits:

$$(1) \qquad 1 + a^2x^2 = bx^2$$

Die zweite, "falsch gedruckte" Aufgabe lautet andererseits: (2) $\qquad (1 + a^2x^2) \cdot x^2 = b$, (1) in (2) eingesetzt ergibt:

$$(3) \qquad bx^2 \cdot x^2 = b$$

$b = 0$ erfüllt zwar diese Gleichung, würde aber wegen (1) erfordern, dass

$$1 + a^2x^2 = 0$$

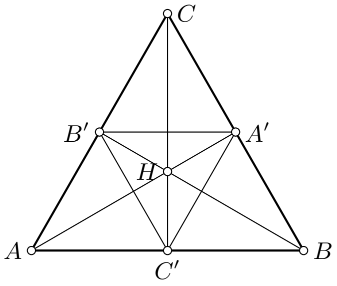
ist, was in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist. Daher muss in (3) gelten: $x^4 = 1$. Da $x \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 151034
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'} = \frac{CH}{HC'}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.



Aus den Bedingungen folgt durch Umkehrung des Strahlensatzes, dass $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Beispielsweise folgt aus der Gleichheit $\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'}$ durch Umstellen $\frac{|HA|}{|HB|} = \frac{|HA'|}{|HB'|}$, sodass nach Umkehrung des Strahlensatzes mit dem Zentrum H die Parallelität von AB und $A'B'$ folgt.
Das $\triangle A'B'C'$ ist somit Mittendreieck von $\triangle ABC$, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 5 - 151035
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt!
Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x.
(Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

x habe die Zifferndarstellung $x = ab$; $1 \leq a,b < n$ zur Basis n. Dann gilt

$$b \cdot n + a = 2(a \cdot n + b) \iff b(n-2) = a(2n-1) \iff b = 2a + \frac{3a}{n-2} \ .$$

Damit $\frac{3a}{n-2}$ ganz ist, muss es ein $l \in \mathbb{Z}$ geben mit $3a = l(n-2)$. Da $a > 0$ ist, folgern wir $l \geq 1$ (und $n \neq 2$). Dann ist $b = l + \frac{2l(n-2)}{3}$. Da $b \leq n-1$, folgt

$$l = \frac{b}{1 + \frac{2(n-2)}{3}} \leq \frac{n-1}{1 + \frac{2(n-2)}{3}} = \frac{3n-3}{2n-1} < \frac{3n-3}{2n-2} = \frac{3}{2} < 2.$$

Also ist $1 \leq l < 2$ und somit folgt $l = 1$.
Folglich ist $a = \frac{n-2}{3}$; $n-2$ durch 3 teilbar und $b = 2a + \frac{3a}{n-2} = 2a+1$. Daher erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$; $k > 0$ mit $n = 3k+2$, $a = k$, $b = 2k+1$ und $x = an + b = 3k^2 + 4k + 1$ genau eine Lösung.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 151036
Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist: $[x] \leq x < [x] + 1$.
Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4{,}2] = -5$, $[5] = 5$.

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so dass für alle x gilt: $f(x+p) = f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f.
Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f.
Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z.B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.
a) Beweisen Sie, dass durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!
b) Beweisen Sie, dass die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!
c) Weisen Sie nach, dass diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!
d) Stellen Sie f graphisch dar!

a) Die Funktion $g\colon \mathbb{Z} \to \{-1,1\}$, $k \mapsto (-1)^k$ ist durch

$$g(k) = \begin{cases} 1, & 2 \mid k \\ -1, & 2 \nmid k \end{cases}$$

erklärt. Weiter ist die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$ wie in der Aufgabenstellung erklärt. Da der Definitionsbereich von g eine Teilmenge des Wertebereichs von h ist, ist auch deren Komposition $f = g \circ h$ erklärt.

b) Offenbar gilt für jede reelle Zahl x und jede ganze Zahl k

$$[x + k] = [x] + k,$$

da $[x] + k$ ganzzahlig ist und $[x] + k \leq x + k < [x] + k + 1$ gilt.
Insofern folgt für alle reellen Zahlen x

$$f(x + 2) = (-1)^{[x+2]} = f(x + 2) = (-1)^{[x]+2} = (-1)^{[x]} \cdot (-1)^2 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 eine Periode von f.

c) Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl p mit $0 < p < 2$ und $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden die Fälle, ob $0 < p < 1$ oder $1 \leq p < 2$ gilt.
Falls $0 < p < 1$ gilt, setzen wir $x = 1 - p$, so folgt $0 < x < 1$ und insbesondere

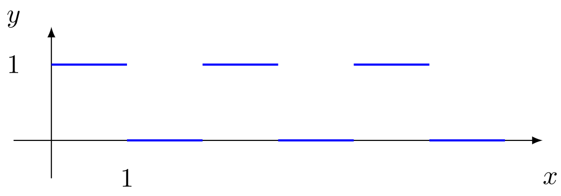
$$f(x + p) = (-1)^{[p+(1-p)]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Falls $1 \leq p < 2$ gilt, betrachten wir $x = 0$, so folgt

$$f(x + p) = f(p) = (-1)^{[p]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 die kleinste Periode von f.

d)

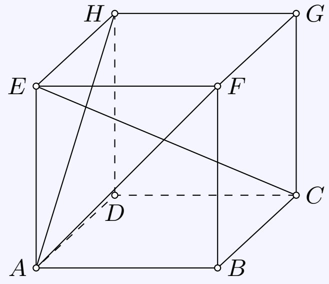


Aufgabe gelöst von ochen

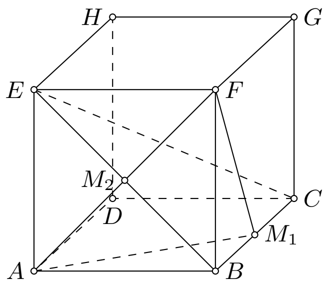
7.17.4 IV. Runde 1975, Klasse 10

Aufgabe 1 - 151041

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, dass sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.
Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!



Es sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke BC und M_2 des des Quadrates $ABFE$. Nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes ist dann $M_1M_2 \parallel CE$. Die zu CE parallele Ebene durch A und F geht durch M_2 und enthält somit die zu CE parallele Gerade durch M_2. Also geht sie durch M_1.



Der Teilkörper, den sie vom Würfel $ABCDEFGH$ abschneidet, ist folglich das Tetraeder $ABFM_1$. Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM_1 als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt, dass sein Volumen

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

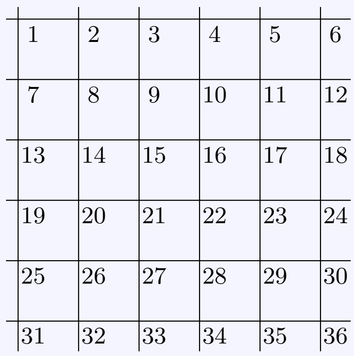
beträgt.
Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

Wegen $3V_T = \frac{1}{4}a^3$ beträgt infolgedessen das Volumen des Restkörpers $V_R = \frac{3}{4}a^3$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 151042

In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in der Abbildung dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, dass
(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.
Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, dass es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!



Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen. Zwei enthalten Diagonalen und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.
Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen die die Diagonalen enthalten, jeweils 6 Gitterpunkte.
Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s eine Teil-Streckenzug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte.
Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t' vor. Dieser würde aber mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilde, ohne dass alle gegebenen Punkte auf ihm liegen.
Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.

Die restlichen zwei Achsen teilen nun das Quadrat in vier Teilquadrate.
Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q (Abbildung 1) eingetreten ist und dort einen Teil-Streckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle 9 Punkte von q durchlaufen zu haben.

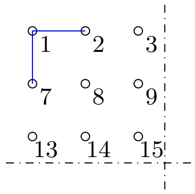


Abbildung 1

Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug T' sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t, T' entstehenden Streckenzüge t'', t'''.
Die Streckenzüge t, t', t'', t''' würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teil-Streckenzüge zu untersuchen, die alle 9 Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug s liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.
Der Streckenzug von 2 nach 1 und von da nach 7 kann bereit eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist.

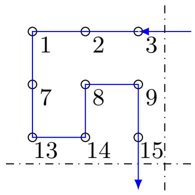


Abbildung 2

Fall 1:
Der Streckenzug komme vom rechten Quadrat und erreiche den Punkt 3, verlaufe zu 2, 1, 7 und von dort weiter zum Punkt 13.
Dann liegt der restliche Verlauf des Streckenzuges eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muss (Abbildung 2).

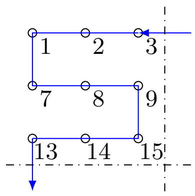


Abbildung 3

Fall 2:
Der Streckenzug verlaufe wie im Fall 1 bis zum Punkt 7 und weiter zum Punkt 8. Von dort an liegt der restliche Streckenzug eindeutig fest (Abbildung 3)

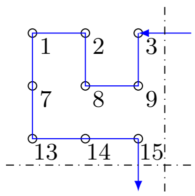


Abbildung 4

Fall 3:
Der Streckenzug verlaufe vom Punkt 3 zum Punkt 9. Eine Verlängerung zum Punkt 15 würde den in Abbildung 3 gezeichneten, an einer Diagonalen gespiegelten Streckenzug ergeben. Bei einer Weiterführung von Punkt 9 zum Punkt 8 ist der übrige Verlauf eindeutig festgelegt. (Abbildung 4)

Damit sind alle Möglichkeiten, mit dem Punkt 3 zu beginnen, ausgeschöpft. Der Streckenzug beginne im Punkt 9.
Bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Quadrat weitergeführt werden soll.

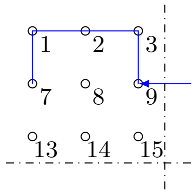


Abbildung 5

Fall 4:
Verlaufe der Streckenzug also über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 (Abbildung 5). Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein,
Es gibt in diesem Falle also keinen derartigen Streckenzug.

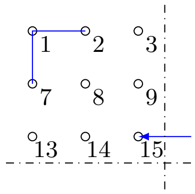
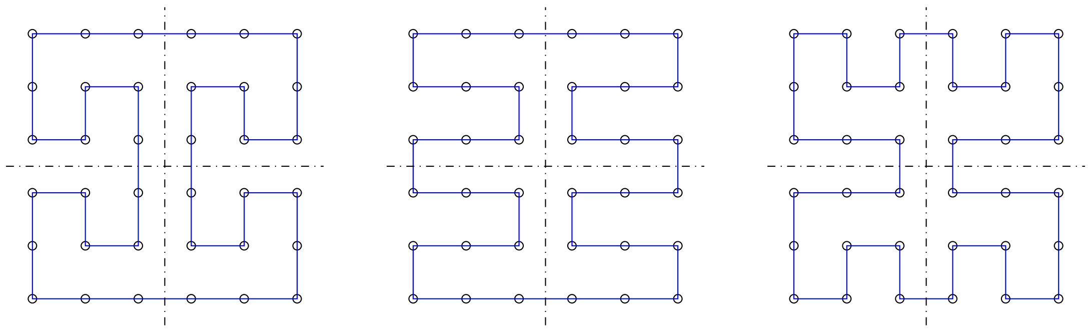


Abbildung 6

Fall 5:
Der Streckenzug beginne im Punkt 15. Bei der Weiterführung nach 9 ergibt sich die gespiegelte Abbildung 4. Bei der Weiterführung nach 14 ergibt sich gespiegelte Abbildung 1. Andere Möglichkeiten, den Streckenzug von Punkt 15 aus weiterzuführen, gibt es nicht.

Damit ist gezeigt, dass es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Form:



Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 151043A
Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $-10 \leq x \leq 2$ und $[x^2] = [x]^2$ gilt!

Offenkundig wird durch $[x]$ die reelle Zahl x auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet. Gemäß Definition gilt:

$$[x^2] \leq x^2 < [x^2] + 1$$

Und laut Aufgabenstellung $[x^2] = [x]^2$, so dass gelten muss:

$$[x]^2 \leq x^2 < [x]^2 + 1$$

Es sei nun $x = g + f$, wobei $g = [x]$ der nächstkleineren ganzen Zahl entspreche, und es gilt darüber hinaus $0 \leq f < 1$. Daher:

$$g^2 \leq (g + f)^2 < g^2 + 1$$

$$g^2 \leq g^2 + 2gf + f^2 < g^2 + 1$$

$$0 \leq 2gf + f^2 < 1$$

Die Gleichung ist schon einmal grundsätzlich erfüllt für $f = 0$, so dass alle ganzzahligen $x \in \{-10, -9,...,1,2\}$ die Gleichung erfüllen. Sei nun x nicht ganzzahlig, also $f > 0$. Aufgeteilt auf zwei Ungleichungen muss gelten:

$$(1) \qquad 2gf + f^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad (2) \qquad 2gf + f^2 < 1$$

Da $f > 0$ ist, folgt aus (1) als weitere Voraussetzung

$$2g + f > 0$$

woraus man schon einmal schließen kann, dass $g \geq 0$ sein muss, da $f < 1$ ist. Somit kommt grundsätzlich nur $x > 0$ in Frage, und damit nur $g = 0$ oder $g = 1$. Aus (2) folgt:

$$-g - \sqrt{g^2+1} < f < -g + \sqrt{g^2+1}$$

Da außerdem $f > 0$ gelten muss, die linke Seite hier aber kleiner als null ist, folgt als schärfere Bedingung:

$$0 < f < -g + \sqrt{g^2+1} \qquad \text{oder} \qquad g < x < \sqrt{g^2+1}$$

Für $g = 0$ bedeutet das $0 < x < 1$, für $g = 1$ folgt $1 < x < \sqrt{2}$.
Gesamtlösung: Vereinigt man diese Lösungsintervalle mit den ganzzahligen Lösungen $x = 0$ und $x = 1$, gilt allgemein $0 \leq x < \sqrt{2}$, sowie alle ganzen Zahlen im Intervall $[-10,2]$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 151043B
In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x; y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.
Man beweise:
Es gibt eine Zahl c, so dass k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c!

Ein Punkt auf dem Graphen k sei gegeben durch die Koordinate $(x,\frac{1}{x})$. Der Abstand d_1 zum Punkt F_1 ist:

$$d_1 = \sqrt{\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2}$$

Wurzelausdruck vereinfachen:

$$d_1 = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{x} + 2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

Wir substituieren:

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \qquad ; \qquad B = 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

so dass gilt:

$$d_1 = \sqrt{A - B}$$

In analoger Weise erhält man

$$d_2 = \sqrt{A + B}$$

Es muss nun gelten:

$$|\sqrt{A+B} - \sqrt{A-B}| = c$$

Quadrieren:

$$A + B + A - B - 2\sqrt{(A+B)(A-B)} = c^2$$

$$c^2 = 2A - 2\sqrt{A^2 - B^2}$$

Es ist

$$A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

$$A^2 - B^2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2$$

Da $(x + \frac{1}{x})^2 \geq 4$, folgt:

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

und somit:

$$c^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) = 8$$

Also ist die gesuchte Zahl $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 151044
Man ermittle alle ungeordneten Paare (x, y) aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt!
Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

Es sei $\frac{x+y}{2} = u$ und $\sqrt{xy} = v$. Nach Voraussetzungen gibt es $a,b \in \{0,1,\ldots,9\}$ mit $u = 10a + b$ und $v = 10b + a$.
Aus $x + y = 2u$ und $xy = v^2$ folgt nach Vieta, dass x,y die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2uz + v^2 = 0$ sind. Diese sind gegeben durch $z = u \pm \sqrt{u^2 - v^2}$.
Somit muss $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 11(a + b) \cdot 9(a - b)$ eine Quadratzahl sein.

Da $a - b$ wegen $a \neq b$ (da $x \neq y$) nicht durch 11 teilbar ist, muss also $a + b$ durch 11 teilbar sein. Das ist nur möglich, wenn $a + b = 11$ gilt. Es folgt, dass $a - b$ ebenfalls eine Quadratzahl sein muss, also $a - b \in \{1,4,9\}$. Da $a + b = 11$ ungerade ist, muss auch $a - b$ ungerade sein, also ist $a - b \neq 4$. Wäre $a - b = 9$, so müsste $a = 9$ und $b = 0$ gelten, im Widerspruch zu $a + b = 11$. Also ist $a - b = 1$.
Damit erhalten wir jetzt $a = 6$ und $b = 5$, also $u = 65$ und $v = 56$, woraus wir letztendlich erhalten, dass

$$\{x,y\} = \{u \pm \sqrt{u^2 - v^2}\} = \{65 \pm 11 \cdot 3\} = \{32,98\}.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 5 - 151045
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an der Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert!
Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I.
Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einem Kreis:

$$BS = BU, \qquad AS = AT, \qquad CT = CU$$

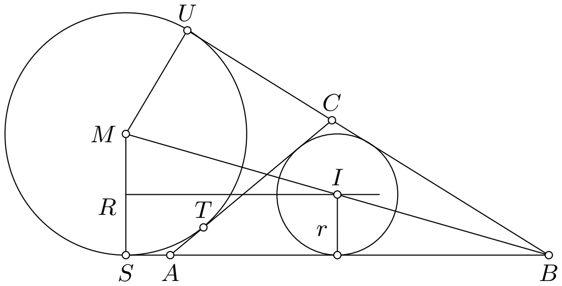
Ferner gilt

$$AB = BS - AS = BU - AS, \qquad BC = BU - CU, \qquad CA = CT + AT = CU + AS$$

und mithin

$$AB + BC + CA = BU - AS + BU - CU + CU + AS = 2BU \qquad \text{also} \qquad s = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = BU$$

Da die Strahlen aus B durch S bzw. Z die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einen bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\angle SBU$ (Abbildung).



Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.

(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Eckpunkt dieser Strecke sei M.

(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.

(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise und M bzw. I mit den Radien R bzw. r.

(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. B die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. SU.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Lauf Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner

$$s = BS = BU = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R > r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar.

Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $MI \geq R + r$ gilt. Wegen $MI = MB - BI$ und $MB = \sqrt{s^2 + R^2}$ (Pythagoras) sowie $BI = \frac{MB \cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Beziehung gleichwertig mit $MB - MI \geq R + r$, also auch mit

$$\sqrt{s^2 + R^2}(1 - \frac{r}{R}) \geq R + r \qquad (*)$$

Für $MI = R + r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC. Für $MI > R + r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke. Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.

Übernommen [5]

Aufgabe 6 - 151046
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, dass f nullstellenfrei ist, d.h., dass keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, dass auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

Dies gilt nicht, was man an folgendem Gegenbeispiel sieht:
Wähle $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $f(2) = -1$. Dann erfüllt f die Bedingungen der Aufgabenstellung, aber es ist $F(1) = f(2) + f(3) = -1 + 1 = 0$.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

7.18 XVI. Olympiade 1976

7.18.1 I. Runde 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161011
In das Kryptogramm sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1,..., 9) so einzusetzen, dass eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.

$$\begin{array}{cccccc} & K & A & T & E & R \\ + & K & A & T & Z & E \\ \hline & T & I & E & R & E \end{array}$$

Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

Man stelle sich die Spalten der Aufgabe von links nach rechts fortlaufend nummeriert vor. Dann gilt:

(1) Aus $r + E = E$ folgt $R = 0$ (Spalte 5).
(2) Wegen $R \neq 0$ und daher $E \neq 0$ folgt $E + z = 10$ (Spalte 4).
(3) Wegen $E \neq z$ und (2) folgt $E \neq 5$, $Z \neq 5$.
(4) Wegen (2) gilt $2T + 1 = E$ oder $2T + 1 = 10 + E$ (Spalte 3).
(5) Wegen (3) und (4) gilt $T \neq 2$ und $T \neq 7$.
(6) Wegen (1) gilt $K > 0$ und damit $T \neq 7$ (Spalte 1).
(7) Wegen (4) und $T \neq E$ folgt $T \neq 9$.

Somit kann T nur eine der Zahlen 3, 4, 5, 6 oder 8 sein.

(I) Es sei $T = 3$. Dann wäre $E = 7$ und $Z = 3$, was wegen $Z \neq T$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 3$.

(II) Es sei $T = 4$. Dann ist $E = 9$ und $Z = 1$. Da T gerade ist, kann aus der Spalte 2 kein Übertrag in Spalte 1 erfolgt sein. Also ist $K = 2$ und $A < 5$, was unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen nach den Bedingungen der Aufgabe aus $A = 3$ und $I = 6$ führt. Damit erhält man die folgende Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ + & 2 & 3 & 4 & 1 & 9 \\ \hline & 4 & 6 & 9 & 0 & 9 \end{array}$$

(III) Es sei $T = 5$. Dann erhält man $E = 1, Z = 9$ und $K = 2$, da bei ungeradem T ein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgen muss. Wegen $T = 5$ ist $2A + 1 = 10 + I$, also unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahl $I = 7$ und damit $A = 8$. Damit erhält man als weitere Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ + & 2 & 8 & 5 & 9 & 1 \\ \hline & 5 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(IV) Es sei $T = 6$. Dann wäre $E = K = 3$, was wegen $E \neq K$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 6$.

(V) Es sei $T = 8$. Dann erhält man $E = 7$, $Z = 3$ und $K = 4$, da in diesem Falle kein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgt sein kann. Aus $I = 2A + 1$ und unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen folgt $I = 5$ und $A = 2$. Damit erhält man als dritte Lösung der Aufgabe:

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \\ + & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 8 & 5 & 7 & 0 & 7 \end{array}$$

Die angegebenen Lösungen sind auch alle möglichen Lösungen.

Aufgabe 2 - 161012
Geben Sie alle reellen Zahlen x ($x \neq -3$) an, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3} - \frac{1}{10} \qquad (1)$$

Eins reelle Zahl x ($\neq -3$) erfüllt genau dann (1), wenn

$$-\frac{2}{5} \geq \frac{3}{x+3} \qquad (2)$$

gilt. Für alle $x > -3$ ist $\frac{3}{x+3}$ positiv, also (2) nicht erfüllt.

Für $x < -3$ ist (2) gleichbedeutend mit jede der Ungleichungen

$$-2(x+3) \leq 15 \quad ; \quad x+3 \geq -7{,}5 \quad ; \quad x \geq -10{,}5$$

Also wird (2) und folglich ebenso auch (1) genau von denjenigen Zahlen x erfüllt, für die $-10{,}5 \leq x < -3$ gilt.

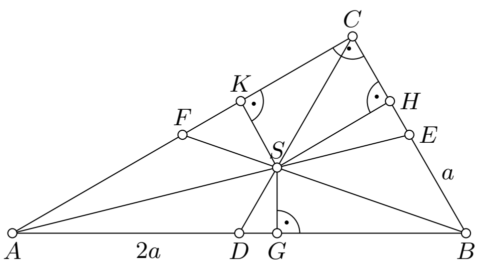
Aufgabe 3 - 161013
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, dass nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird!

Diese Möglichkeit besteht nicht. Von jedem der 8 Eckpunkte eines jeden Würfels gehen genau 3 Kanten, also eine ungerade Anzahl von Kanten, aus.

Gäbe es einen in der Aufgabe geforderten (räumlichen) Streckenzug; dann müssten mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes die Anzahlen der zu einander übrigen 6 Punkte führenden Kanten gleich der von diesem Punkte fortführenden Kanten sein, d.h. in jedem dieser 6 Punkte müsste eine gerade Anzahl von Kanten enden, was nicht der Fall ist. Folglich gibt es keinen derartigen Streckenzug.

Aufgabe 4 - 161014
Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{\angle ACB} = 90°$.

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. Darin seien d, E und F die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und AC, und es sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Dann gilt:

(1) Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt C auf einem Halbkreis über AB. Damit gilt $CD = a$.

(2) Da $\triangle DBC$ gleichseitig ist, folgt $\angle DCB = \angle CDB = \angle DBC = 60°$ und somit $\angle DCF = 30°$.

(2) Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks diese im Verhältnis 2 : 1 teilt, ist ferner $SD = \frac{a}{3}$ und $SC = \frac{2}{3}a$.

(2) Sei nun G der Fußpunkt des von S auf AB gefällten Lotes, dann ist SC der Abstand des Punktes S von der Seite AB.

Wegen $\angle SDG = 60°$ kann SG als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SD = \frac{a}{3}$ aufgefasst werden. Demnach gilt $SG = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

(2) Sei H der Fußpunkt des von S auf die Seite BC gefällten Lotes, dann ist SH der Abstand des Punktes S von der Seite BC.

Wegen $\angle SCH = 60°$ kann SH als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Somit gilt $SH = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

(2) Sei nun K der Fußpunkt des von S auf AC gefällten Lotes, dann ist SK der Abstand des Punktes S von der Seite AC.

Wegen $\angle SCF = 30°$ kann SK als halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Daher ist SK halb die lang wie SC. Somit gilt $SK = \frac{a}{3}$.

Lösungen der I. Runde 1976 übernommen von [5]

7.18.2 II. Runde 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161021
Es sei q eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\frac{q^3-q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

Es gilt:

$$q^3 - q = q(q^2 - 1) = q(q-1)(q+1)$$

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q-1, q, q+1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkte $q^3 - q$ durch 6 teilbar, d.h. $\frac{q^3-q}{6}$ ist eine ganze Zahl.

Aufgabe 2 - 161022
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = AC = 4$ cm und die Länge $p = BD = 1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $CD = h$ und die Länge $q = AD$.

Für die gesuchten Längen $a = BC$, $c = AB$, h,q gilt: (1) $^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras)
(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz)
(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz)
(4) $p + q = c$ (da D auf AB liegt).
Aus (2), (4) folgt $q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1{,}8x - 16 = 0$ sowie $x > 0$. Mit den Lösungen

$$x_{1,2} = -0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 + 16} = -0{,}9 \pm 4{,}1$$

folgt $q = 3{,}2$ cm und damit für restlichen Größen $c = 5$ cm, $a = 3$ cm und $h = 2{,}4$ cm.

Aufgabe 3 - 161023
In der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} \text{L} & \text{O} & \text{T} & \text{T} & \text{O} \\ + & \text{T} & \text{O} & \text{T} & \text{O} \\ \hline \text{S} & \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{L} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 nummeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte (5)

$$L + 1 = S \qquad (1)$$

und damit aus Spalte 4 zunächst

$$Q + T \geq 9 \qquad (2)$$

Wäre nun $T \geq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$. Also ist

$$T \leq 4 \qquad (3)$$

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muss folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d.h., es gilt sogar

$$Q + T \geq 10 \quad (2a) \qquad \text{wegen (3) also} \qquad Q \geq 6 \quad (4)$$

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$. Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5, I = 0, P = 1$. Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ im Widerspruch zu $S = 7$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ mit Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt $L = 2$ und $S = 3$. Es kann nur $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9, I = 0, P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ + & 2 & 8 & 2 & 8 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ + & 4 & 8 & 4 & 8 \\ \hline 7 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ + & 4 & 6 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 9 & 2 \end{array}$$

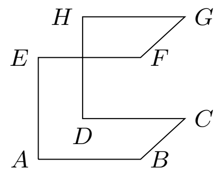
die geforderten Eigenschaften haben. Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

Aufgabe 4 - 161024
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$.
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben!
(1) Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
(2) Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.
Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

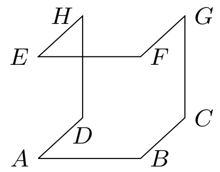
Jeder der gesuchten Streckenzüge muss genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei kanten AB, AD, AE. Der Durchlauf kann so gewählt werden, dass er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

1. Beginnt er mit AB, so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Würfelkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF.

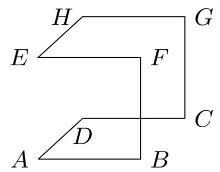
1.1 Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten $ABCD$ und $ABCG$.
1.1.1 Bei der Wahl von $ABCD$ gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Dann sind alle Punkte erfasst und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden.
Also gibt es im Fall 1.1.1 nur die Möglichkeit $ABCDHGFEA$:



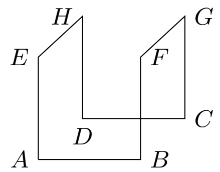
1.1.2 Angenommen, bei der Wahl von $ABCG$ könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfassten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung $ABCGHEF$, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf Wege über einen bereit erfassten Punkt erreichen, da F und D nicht Eckpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind.
Wegen dieses Widerspruchs kann auf $ABCG$ nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an: $ABCGFEHDA$:



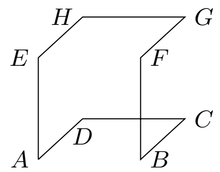
1.2 Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten $ABFE$, $ABFG$.
1.2.1 Zu $ABFE$ existiert wie in 1.1.1 nur die Fortsetzung $ABFEHGCDA$



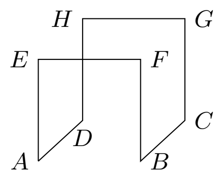
1.2.2 Zu $ABFG$ existiert mit analoger Begründung wie im Fall 1.1.2 nur die Fortsetzung $ABFGCDHEA$



2. Beginnt der Streckenzug mit AD, so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.
2.1 Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen $ADCB$ und $ADCG$. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1 bzw. 1.1.2 nur eine Weiterführung. Da ein mit $ADCG$ beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1 vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von $ADCB$, d.h.: $ADCBFGHEA$



2.2 Nach ADH gibt es nur $ADHE$ und $ADHG$ und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt $ADHE$ bereits in 1.1.2 vor, und es verbleibt nur $ADHGCBFEA$



Damit ist gezeigt, dass nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelkanten genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten.
Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wir folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

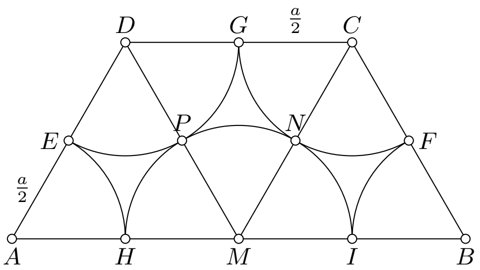
	1.1.2	1.2.1	1.2.2	2.1	2.2
1.1.1	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2		BC	BC	AB	AB
1.2.1			FE	AB	AB
1.2.2				AB	AB
2.1					DC

Lösungen der II. Runde 1976 übernommen aus [5]

7.18.3 III. Runde 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161031
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ und $AB > CD$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA.
Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, dass
der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,
der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,
der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und
der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.
Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P. Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

Wegen $AE = ED$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise $\frac{a}{2}$.
Sei x die gesuchte Länge der Seite AB, dann gilt $HI = x - a$ da wegen $AB > CD$ der Punkt H zwischen A und I liegt.
Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI, so ist $HM = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI.



Da M, N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$$MC = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}$$

Ebenso folgt $MD = \frac{x}{2}$, also $MA = MB = MC = MD$.
Somit sind die Dreiecke AMD, DMC und CMB gleichschenklig und wegen Kongruenzsatz sss kongruent. Die Winkel $\angle AMD, \angle DMC$ und $\angle CMB$ sind folglich ebenfalls kongruent und da $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$ ist, ist jeder von ihnen $60°$ groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig und somit ist $MA = MB = a$. Die Seite AB hat also die Länge $2a$.

Aufgabe 2 - 161032
Von einer Gleichung

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

werde vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 ganze Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass dann folgender Satz gilt!
Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p, die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach ist

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad \text{also}$$

$$p^4 = -a(a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3)$$

Daher ist q ein Teiler von p^4, Da aber q zu p und folglich auch zu p^4 teilerfremd ist, ergibt sich, dass q nur $+1$ oder -1 sein kann.
Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 161033
Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ & + & \mathrm{J} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ & + & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{E} & \mathrm{S} \\ \hline & \mathrm{N} & \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!
b) Zeigen Sie, dass die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!
Hinweis: Sind $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, ..., n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n...a_2a_1a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$$z = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + ... + a_2 8^2 + a_1 8^1 + a_0 8^0$$

Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n...a_2a_1a_0]_8$ bezeichnen.

a) Angenommen, es gäbe eine Lösung. Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe.
Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten.
Daher kommt wegen $I + J + A(+Ü) = A + 10N$ und $I + J + Ü = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage. Daraus folgt $S = 7$. Nun müsste in der zweitletzten Spalte $SE + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung.
Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$ dass ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2 betrage kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. Wegen

$$3 \cdot 0 = 0 \qquad 3 \cdot 1 = 3 \qquad 3 \cdot 2 = 6 \qquad 3 \cdot 3 = [11]_8 \qquad 3 \cdot 4 = [14]_8$$
$$3 \cdot 5 = [17]_8 \qquad 3 \cdot 6 = [22]_8 \qquad 3 \cdot 7 = [25]_8$$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte $2E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält.
In der zweiten Spalte entsteht dabei bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1. Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$.
Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern $0, 2, 4, 5, 7$ ist dies wegen $I \neq 0$, $J \neq 0$ nur dadurch möglich, dass entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt.

Damit verbleiben für A $(\neq 0)$ nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 4 - 161034
Beweisen Sie, dass gilt

$$\lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{3}\right) + ... + \lg\left(1 + \frac{1}{99}\right) = 2$$

Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg n \qquad (n > 0)$$

Summiert man nun von $n = 1$ bis $n = 99$, so erhält man

$$\lg\left(1+\frac{1}{99}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{98}\right)...+\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)=\lg 100-\lg 99+\lg 99-+...-\lg 2+\lg 2-\lg 1=$$

$$=\lg 100-\lg 1=2-1=0$$

Die Behauptung ist damit bewiesen.

Aufgabe 5 - 161035
Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrundegelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.
Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrundegelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat!

Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a. Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H, so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2$$

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

$$M_1 = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}$$

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt $M_2 = 3ah$. Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$$3ah = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}$$
$$2h = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}$$
$$4h^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2$$
$$h = \frac{1}{6}a$$

Aufgabe 6 - 161036
Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $AD = CD$, $AB = CB$ aus $a+b = 12$ cm, $f = 9$ cm und $\beta + \delta = 172°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\angle ADC$.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert, und beweisen Sie, dass alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $AB = BC = a$ und $AD = CD = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\angle CBA$ und $\angle ADC$.
Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E. Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

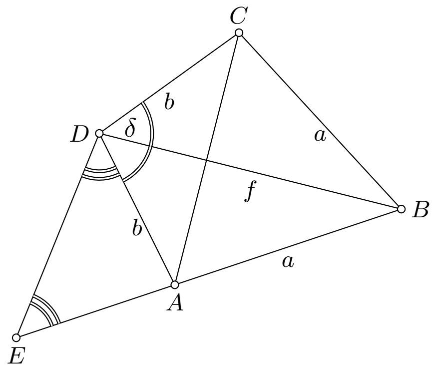
$$\angle DAE = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$$

Da $AE = AD$ nach Konstruktion gilt, ist $BE = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenklig. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$$\angle AED = \angle EDA = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}(\beta+\delta)\right) = 90° - \frac{1}{4}(\beta+\delta)$$

Daraus ergibt sich, dass das Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

(1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.
(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an.



(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B. Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so ist D einer der Schnittpunkte.
(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE, so sei A der Schnittpunkt.
(5) Man zeichne die Kreise um D mit DA und um B mit BA. Der Schnittpunkte dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BD = f$. Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, dass das Dreieck EDA gleichschenklig ist (*).
Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$$\angle EAD = \frac{1}{2}(\beta+\delta) \qquad \text{und} \qquad \angle ABD + \angle ADB = \frac{1}{2}(\beta+\delta)$$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD. (**) Daraus folgt:

$$\angle CBA + \angle ADC = \beta + \delta$$

Aus (**) folgt, dass das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit $AD = DC$, $AB = CB$ ist.

Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a+b$, der Winkel $\angle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar.

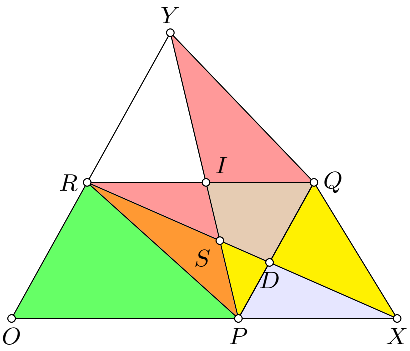
Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte D_1 und D_2. Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.
Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.
Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent, denn es gilt:

$BD_1 = BD_2 = f$, $\angle BA_1D_1 = \angle D_2A_2B$, wegen $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ als Stufenwinkel, weiter gilt $\angle BED_1 + \angle EBD_1 = \angle D_2D_1B$ (Außenwinkelsatz) sowie $\angle ED_1A_2 + \angle A_2D_2B = \angle D_1D_2B$, woraus wegen $\angle D_2D_1B = \angle D_1D_2B$ dann $\angle A_1BD_1 = \angle A_2D_2B$ folgt.

Lösungen der III. Runde 1976 übernommen aus [5]

7.18.4 IV. Runde 1976, Klasse 10

Aufgabe 1 - 161041
Man beweise den folgenden Satz!
Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf seiner Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf seiner Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.



Die Hauptüberlegung bei dieser Aufgabe ist, dass die gelben und roten Dreiecke $\triangle RPD$ und $\triangle QDX$ sowie $\triangle RPI$ und $\triangle YIQ$ flächeninhaltsgleich sind. Das überlegt man sich wie folgt (ich zeige das für die gelben):

Das $\triangle RPQ$ ist flächeninhaltsgleich zum $\triangle RXQ$, da hier nur eine Scherung stattfindet (beide Dreiecke haben die gleiche Grundseite und Höhe). Diese beiden Dreiecke setzen sich jeweils nun aus dem Dreieck RDQ und einem gelben Dreieck zusammen, womit die Behauptung folgt. Für die roten Dreiecke läuft es analog.

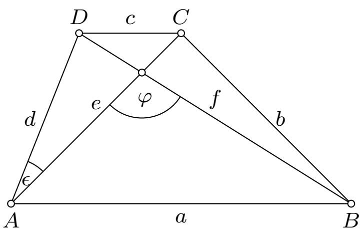
Der Flächeninhalt des Vierecks OPSR setzt sich nun zusammen aus dem halben Parallelogramm und dem Dreieck RSP. Die Fläche des Viereck $SXQY$ berechnet sich als

$$A = A_{\text{rot}} + A_{\text{gelb}} + (A_{\text{halbes Parallelogramm}} - A_{\text{rot}} - A_{\text{gelb}} + A_{\triangle RSP})$$

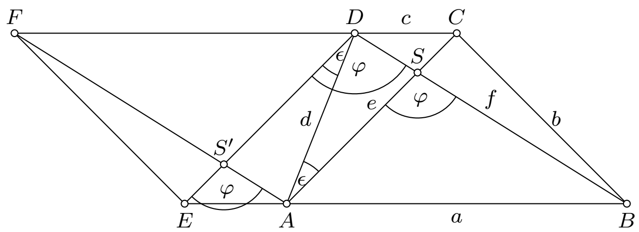
womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 2 - 161042
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\varphi = 100°$ und $\epsilon = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ϵ die Größe des Winkels $\angle DAC$ und φ die Größe des Winkels $\angle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.
Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Angenommen $ABCD$ wäre das gesuchte Trapez (Abbildung a).



a)



b)

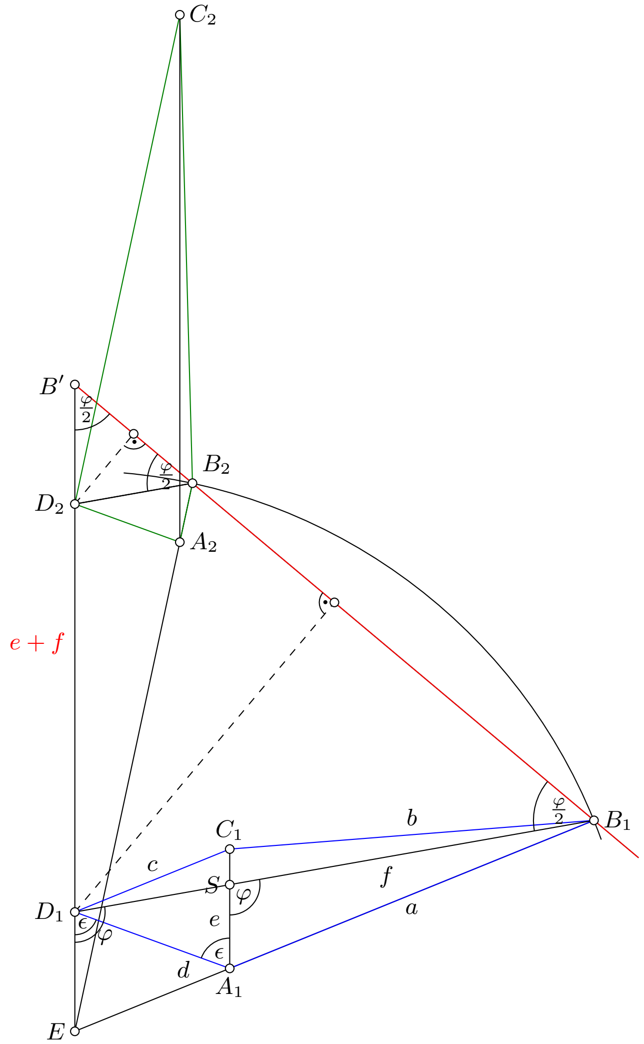
Wir setzen an das Trapez links ein um 180° gedrehtes Trapez $EADF$ an, so dass EA gleich $a + c$ wird (Abbildung b).
Die Winkel $\angle ES'A$ und $\angle EDB$ sind dann gleich dem Winkel φ (Winkel an geschnittenen Parallelen und Scheitelwinkel). Wir klappen die Strecke BD um D so heraus, dass der Bildpunkt B' auf der Geraden durch E und D liegt. Dann gilt $DB = DB'$ und $\angle DBB' = \angle DB'B = \frac{\varphi}{2}$. Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

a) Zuerst wird das Dreieck EBB' konstruiert. (aus $EB = a + c$, $EB' = e + f$ und $\angle BB'E = \frac{\varphi}{2}$, da das Dreieck $\triangle BB'D$ gleichschenklig ist). Diese Konstruktion ist allerdings mehrdeutig und liefert eine zweite Lösung B_2.

b) Der Schnitt der Mittelsenkrechten von BB' mit EB' ergibt den Punkt D.

c) Der Punkt A wird mit Hilfe des Winkels ϵ konstruiert.

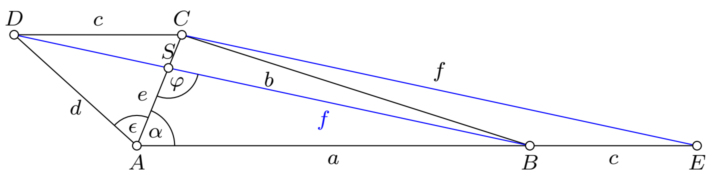
d) Der Punkt C ergibt sich dann durch Parallelverschiebung von DE durch A.



Die Punkte D_2, A_2, C_2 werden analog aus B_2 gewonnen. Damit ergeben sich 2 nicht kongruente Trapeze.

Aufgabe gelöst von Stephan Hauschild

Rechnerischer Nachweis der Lösung:



Es seien $a + c = l_1$ und $e + f = l_2$. Dann gilt in dem Dreieck AEC wegen des Kosinussatzes:

$$(a + c)^2 = l_1^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos\varphi$$

Mit $f = l_2 - e$:

$$l_1^2 = e^2 + (l_2 - e)^2 - 2e(l_2 - e)\cos\varphi$$

$$2e^2 - 2l_2 e + l_2^2 - 2l_2 e\cos\varphi + 2e^2\cos\varphi - l_1^2 = 0$$

$$2(1 + \cos\varphi)e^2 - 2l_2(1 + \cos\varphi)e + l_2^2 - l_1^2 = 0$$

$$e^2 - l_2 e + \frac{l_2^2 - l_1^2}{2(1 + \cos\varphi)} = 0 \qquad ; \qquad e_{1,2} = \frac{l_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{l_2^2 - 2\cdot\frac{l_2^2 - l_1^2}{1 + \cos\varphi}}$$

Der Winkel α ist nun bestimmbar. Wegen des Sinussatzes gilt: $\sin\alpha = \frac{f}{l_1}\sin\varphi$. Da CD parallel zu AB sein soll, muss gelten:

$$e\sin\alpha = d\sin(\alpha+\varepsilon) \qquad ; \qquad d = \frac{e\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varepsilon)}$$

c erhält man nun per Kosinussatz aus d, e und ε.

Damit ergibt sich mit $l_1 = 13$cm, $l_2 = 15$cm, $\epsilon = 70°$ und $\varphi = 100°$:

	1. Lösung	2. Lösung		1. Lösung	2. Lösung
a	1,40 cm	9,12 cm	e	12,23 cm	2,77 cm
b	10,87 cm	8,47 cm	f	2.77 cm	12,23 cm
c	11,60 cm	3,88 cm	α	12,12°	67,88°
d	2,59 cm	3,83 cm			

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 161043A
Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...).
In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, dass die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war.
Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.
Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, dass die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge).
Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte nach zwei Wettkämpfen 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D. Zweiter wurde der Sportler C.
Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen!

Nach 2 Wettkämpfen haben die Sportler A,B,C mit den jeweils errungenen Plätzen von 1 bis 3 insgesamt 50 Punkte (17/17/16) erreicht.
Unter den Voraussetzungen kann die Aufteilung der Platzierungen nur folgendermaßen aussehen: A und B die Plätze 1./3. und 3./1. und für C zwei mal der 2. Platz. Sei $x \in \mathbb{N}$ die Punktzahl für Platz 1 und mit C=16: $(x-k) = 8$.

$$2x + 2(x-k) + 2(x-(k+l)) = 50 \qquad ; \qquad 2x + 16 + 16 - 2l = 50$$

$$\Longrightarrow x - l = 9 \qquad \Longrightarrow l = k - 1 \quad (1)$$

Die Summe P bildet die Gesamtpunkte der drei Wettkämpfe bestehend aus den 75 Punkten für die ersten drei Plätze plus der Punkte für die Plätze vier und fünf:

$$P = 75 + 3(x-(k+2l)) + 3(x-(k+3l) \qquad \Longrightarrow P = 123 - 15l \quad (2)$$

Die Punkte pro Wettkampf: $P/3 = 41 - 5l$ bzw. für die Plätze vier und fünf $P_{4;5}/3 = 41 - 25 - 5l = 16 - 5l$
Nun lässt sich leicht abschätzen das $l < 3$ sein muss und nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.
Sportler D muss für den Sieg mehr als 18 Punkte erreichen damit C mit mindestens 18 Punkten Platz 2 erreicht.
Die Punkte für D: $D_p = 2(x-(k+2l)) + x \geq 19$ Mit $x = 9 + l$ und $k = l + 1$

$$D_p = 2(9 + l - (l + 1 + 2l)) + 9 + l = 25 - 3l$$

Für $l = 1$ ergibt sich für C: $\{2; 2; 5\}$ und für D: $\{4; 4; 1\}$
Für $l = 2$ ergibt sich ebenfalls für C: $\{2; 2; 5\}$ und für D: $\{4; 4; 1\}$
Punkteverteilung $l = 1 :$ 10,8,7,6,5 und $l = 2 :$ 11,8,6,4,2

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 3B - 161043B
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die a) leer ist,
b) genau ein Element enthält,
c) aus mehr als einem Element besteht!

Sicher muss $x \neq p$ gelten. Schrittweises Umformen liefert

$$3x^2 - 2px + p(3p - 1) = 3(x - p)$$
$$3x^2 - x \cdot (2p + 3) + p \cdot (3p + 2) = 0$$
$$x^2 - \frac{2p + 3}{3}x + \frac{p(3p + 2)}{3} = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die von p abhängigen Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{2p + 3}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)}$$

Die Diskriminante ist $D = \frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)$. Für $D < 0$ existiert keine reelle Lösung x, für $D = 0$ genau eine Lösung x_0 und für $D > 0$ zwei Lösungen x_1, x_2.

$$-32p^2 - 12p + 9 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{3}{4}; \quad p_2 = \frac{3}{8}$$

Die Funktion $f(p) = -32p^2 - 12p + 9$ wäre in einer grafischen Darstellung eine nach unten geöffnete Parabel (Koeffizient vor p^2 ist negativ), hätte ein lokales Maximum und zwischen p_1 und p_2 positive Funktionswerte.
Damit ergibt sich als Lösung:
1. für $p < -\frac{3}{4}$ oder $p > \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung keine reelle Lösung x.
2. für $p_1 = -\frac{3}{4}$ und $p_2 = \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau eine reelle Lösung x.
3. für $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau zwei reelle Lösungen x_1 und x_2.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 161044
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

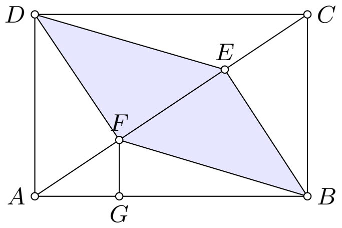
$$xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Es kann keine Lösung geben, in der $x = 2$ gilt, denn sonst wäre $0 = 2y + 6 - 2y - 3 = 3$.
Also können wir äquivalent umformen zu $y = \frac{3-3x}{x-2} = -3 - \frac{3}{x-2}$.
Damit y ganz ist, muss also $x - 2$ ein Teiler von 3 sein. Somit ist $x \in \{2 \pm 1, 2 \pm 3\} = \{-1,1,3,5\}$.
Folglich ist (x,y) genau dann ein ganzzahliges Lösungspaar, wenn $(x,y) \in \{(-1, -2), (1,0), (3, -6), (5,-4)\}$ gilt.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 5 - 161045
Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q-mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.
Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$!

Da die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a die Länge $d = a\sqrt{2}$ besitzt und die Diagonalen im Quadrat senkrecht aufeinander stehen, verschwindet das Viereck $FBED$ für $q = \sqrt{2}$. Wir unterscheiden nun die Fälle $q > \sqrt{2}$ und $q < \sqrt{2}$:



1. Fall: $q > \sqrt{2}$
Zunächst einmal definieren wir folgende Variablen: Sei $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{EC}| = |\overline{AF}|$ und $h := |\overline{FG}|$, wobei G der Lotfußpunkt von F auf die Seite AB ist.

Aus Symmetriegründen reicht es, dass wir den Flächeninhalt von Dreieck FBE berechnen und diesen anschließend verdoppeln.

Dafür stellen wir zunächst einmal fest, dass die Dreiecke ABF und CEB offensichtlich den gleichen Flächeninhalt haben, da sie zusammen mit Dreieck FBE jeweils ein Dreieck mit gleicher Höhe und Grundseite bilden. Wir berechnen nun zunächst den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ in Abhängigkeit von a und q. Laut Voraussetzung ist $x = q \cdot b$. Nun ist $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Einsetzen und quadrieren liefert:

$$a^2 + b^2 = q^2 b^2$$
$$a^2 = q^2 b^2 - b^2 = b^2(q^2 - 1)$$
$$b^2 = \frac{a^2}{q^2 - 1} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2 - 1}$$

Damit:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}}{2(q^2 - 1)}$$

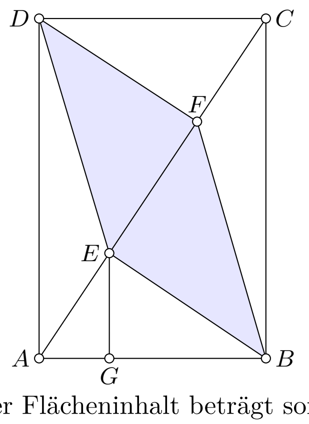
Laut Kathetensatz gilt im Dreieck ABC nun $b^2 = zx \iff z = \frac{b^2}{x}$.

Nach Strahlensatz gilt $\frac{b}{h} = \frac{x}{z} \iff h = \frac{bz}{x}$. Einsetzen liefert:

$$h = \frac{b \cdot \frac{b^2}{x}}{x} = \frac{b^3}{x^2} = \frac{b^3}{q^2 b^2} = \frac{b}{q^2} = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2(q^2 - 1)}$$

Der Flächeninhalt des Vierecks beträgt also:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}}{2(q^2 - 1)} - 2 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{q^2 - 1}}{2q^2(q^2 - 1)} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}(q^2 - 2)}{q^2(q^2 - 1)}$$



2. Fall: $q < \sqrt{2}$
Für $q < \sqrt{2}$ ändert sich die Reihenfolge von E und F auf der Diagonalen. Sei nun also $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{FC}| = |\overline{AE}|$ und $h := |\overline{EG}|$, wobei G der Lotfußpunt von E auf die Seite AB ist.

Nun gilt nach Kathetensatz $a^2 = zx \iff z = \frac{a^2}{x}$. Eingesetzt:

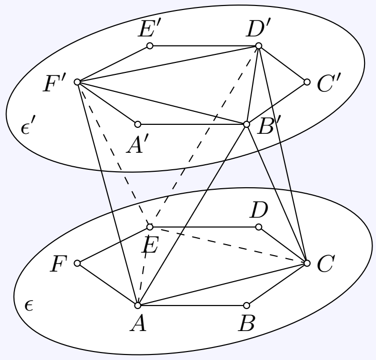
$$h = \frac{b \cdot \frac{a^2}{x}}{x} = \frac{a^2 b}{x^2} = \frac{a^2 b}{q^2 b^2} = \frac{a^2}{q^2 b} = \frac{a^2(q^2 - 1)}{q^2 a\sqrt{q^2 - 1}} = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2}$$

Der Flächeninhalt beträgt somit:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}}{2(q^2 - 1)} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{q^2 - 1} \cdot a}{2q^2} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}(q^2 - 2(q^2 - 1))}{q^2(q^2 - 1)} = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}(2 - q^2)}{q^2(q^2 - 1)}$$

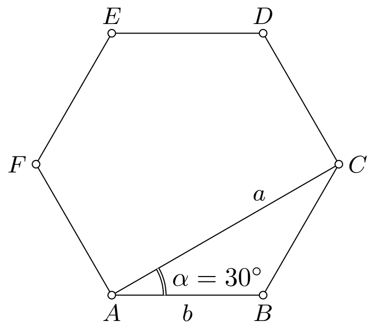
Somit folgt für den Flächeninhalt $A = \dfrac{a^2\sqrt{q^2 - 1}|q^2 - 2|}{q^2(q^2 - 1)}$

Aufgabe 6 - 161046



In einer Ebene ϵ sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ϵ' sei zu ϵ parallel.
In ϵ' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, dass die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ϵ senkrecht stehen.
Gegeben seien die Seitenlänge $a = AC$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ϵ und ϵ'.
Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat.

Wenn man den Körper durch sechs Pyramiden ergänzt, ergibt sich ein einfaches Prisma mit sechseckiger Grundfläche. Die zu ergänzenden Pyramiden sind zum Beispiel $ABCB'$, $AEFF'$ oder $A'B'F'A$. Alle diese Pyramiden sind gleich groß. Das Sechseck stellt sich wie folgt dar:



Es gilt $a = \sqrt{3}\, b$. Die Fläche des Sechsecks ist dann:

$$A_S = ab + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}ab$$

Die Grundfläche einer der sechs zu ergänzenden Pyramiden ist:

$$A_P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$$

Das Volumen einer Pyramide ist:

$$V_P = \frac{1}{3}hA_P = \frac{1}{12}abh$$

Dann ergibt sich für das Volumen des gesuchten Körpers:

$$V_K = hA_S - 6V_P = \frac{3}{2}abh - 6 \cdot \frac{1}{12}abh = abh$$

$$V_K = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a^2 h$$

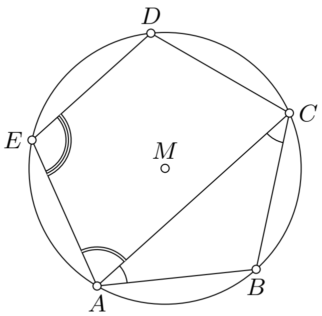
Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

7.19 XVII. Olympiade 1977

7.19.1 I. Runde 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171011
Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.



Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Dann hat jeder seiner Innenwinkel die Größe $\frac{540°}{5} = 108°$. Da man durch Drehung des Fünfecks um seinen Mittelpunkt um jeweils $\frac{360°}{5} = 72°$ jede seiner Diagonalen der Reihe nach mit jeder anderen zur Deckung bringen kann, genügt es, den Satz für eine beliebige dieser Diagonalen, z.B. für AC, zu beweisen.

Wegen $AB = BC$ und $\angle ABC = 108°$ gilt $\angle BAC = \angle ACB = 36°$ und folglich

$$\angle CAE + \angle AED = (\angle BAE - \angle BAC) + \angle AED = (108° - 36°) + 108° = 180°$$

Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden folgt hieraus $AC \parallel ED$, w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 171012
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\dfrac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ definiert ist!

Der Term $\sqrt{33-8x-x^2}$ ist genau dann definiert, wenn $33-8x-x^2 \geq 0$ ist.

Der Term $\frac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ ist genau dann definiert, wenn $\sqrt{33-8x-x^2}$ definiert ist und $\sqrt{33-8x-x^2} \neq 0$ gilt. Diese Forderungen sind der Reihe nach gleichwertig mit

$$33-8x-x^2 > 0 \quad \to \quad x^2+8x+16 < 49 \quad \to \quad (x-4)^2 < 49 \quad \to \quad |x-4| < 7$$

$$0 \leq x+4 < 7 \qquad \text{oder} \qquad -7 < x+4 < 0 \quad \to \quad -4 \leq x < 3 \qquad \text{oder} \qquad -11 < x < -4$$

Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller x, für die $-11 < x < 3$ gilt.

Aufgabe 3 - 171013
Sind a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, 1, ...n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + ... + a_1 \cdot 8 + a_0,$$

so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z.B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leq 2; 0; 7 \leq 7$ und $2 > 0$.

a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{rccccl} [& \text{E} & \text{I} & \text{N} & \text{S} &]_8 \\ +[& \text{E} & \text{I} & \text{N} & \text{S} &]_8 \\ \hline [& \text{Z} & \text{W} & \text{E} & \text{I} &]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, daß im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist.

Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, daß die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

a) Die höchste Potenz von 8, die nicht größer als 214 ist, ist $8^22 = 64$. Das größte Vielfache von 64, das nicht größer als 214 ist, ist $3 \cdot 64 = 192$. Ferner gilt $214 = 192 + 22$ sowie $22 = 2 \cdot 8 + 6$. Damit erhält man $214 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$ und somit, weil $0 \leq 3; 2; 6 \leq 7$ und $3 > 0$ ist, $2140[326]_8$.

b) Eine Lösung ist z. B.

$$\begin{array}{rccccl} [& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ +[& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ \hline [& 6 & 1 & 3 & 0 &]_8 \end{array}$$

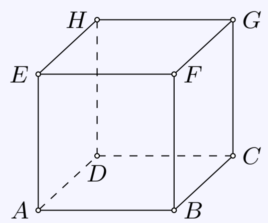
Diese Lösung hat die verlangten Eigenschaften: Für die verschiedenen Buchstaben E, I, N, S, Z, W sind die verschiedenen Ziffern 3, 0, 5, 4, 6, 1 eingesetzt, für gleiche Buchstaben immer gleiche Ziffern.
Sie erfüllen die Bedingungen $0 \leq a_i \leq 7$ und die als Anfangsziffern stehenden Ziffern 3, 6 sind nicht 0. Die dargestellten Zahlen sind

$$[3054]_8 = 3 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 = 1580$$

$$[6130]_8 = 6 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 0 = 3160$$

und für sie ist 1580 + 1580 = 3150 eine wahre Aussage.

Aufgabe 4 - 171014



Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H. Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, daß der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung bezeichnet. Dann ist

$$M = \{AB, AC, AD, AE, AF, AH, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CF, CG, CG, DE, DG, ...$$

$$...DH, EF, EG, EH, FG, FH, GH\}$$

Die Folge $(A, B, C, A, D, B, E, A, F, B, G, C, D, E, F, C, H, D, G, E, H, F, D, H, A)$ gibt einen Streckenzug an.
Unterstreicht man etwa in der Aufzählung der Elemente von M eine Strecke genau dann, wenn sie in dem angegebenen Streckenzug auftritt, so erhält jedes Element von M genau eine Unterstreichung. Ferner tritt keine Strecke auf, die nicht in M enthalten ist. Daher erfüllt der angegebene Streckenzug die Bedingungen der Aufgabe.

Lösungen der I. Runde 1977 übernommen von [5]

7.19.2 II. Runde 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171021
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, dass sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von k_1 erfüllt sind, so haben k_2, k_3 und k_4 Durchmesser der Länge $(d+1)$ cm, $(d+2)$ cm bzw. $(d+3$ cm und es gilt

$$\frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2$$

Hieraus erhält man $d^2 + d^2 + 2d + 1 + d^2 + 4d + 4 = d^3 + 6d + 9$, also $2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.
Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen.
Eine Kontrolle über die Summen der Kreisflächeninhalte bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 2 - 171022
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d.h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis (direkt):
B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.
In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $BM > AM$.
Da AM Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises. Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam. Sie ist mithin Tangente des Kreises k.

Aufgabe 3 - 171023
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ definiert ist!

Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 30 + \frac{49}{4}$$
$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{169}{4}$$
$$\left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{13}{2}$$
$$x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{7}{2} < -\frac{13}{2}$$

und damit $x > 3$ oder $x < -10$. Die gesuchte Menge ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

Aufgabe 4 - 171024
Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0, ..., n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe

$$Q(Z) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$$

und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt

$$P(Z) = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0 < Z < 1000$, für die $Q(Z) + P(Z) = Z$ gilt!

1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Wenn eine zweistellige Zahl die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 a_0 = 9a_1$$

wegen $a_1 \neq 0$ also $a_0 = 9$.
Daher kann ein zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingungen (1) erfüllen, wenn sie mir der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl in der Tat

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = a_1 + 0 - 9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_0$$

also ist die Bedingung (1) erfüllt.

3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte

$$a_2 + a_1 + a_0 + a_2 a_1 a_0 = 100a_2 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_2 a_1 a_0 = 99a_2 + 9a_1$$

wegen $9 \geq a_0$ mithin $9a_1 a_2 \geq 99a_2 + 9a_1 \geq 99a_2$. Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geq 11$.
Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).

Lösungen der II. Runde 1977 übernommen aus [5]

7.19.3 III. Runde 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171031
Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, dass dann $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$ gilt!

Es sei o.B.d.A. $a \leq b$. Dann gilt, da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wird

$$(a+b)^n = (2b)^n \qquad \Rightarrow \qquad (a+b)^2 = 2^n b^n$$

Ferner gilt $(a+b)^2 \leq 2^n b^n + 2^n a^n \quad (*)$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde also auch $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$. w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 171032
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von $110°$ hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge UV, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

Durch die Angaben über AB, BC, $\angle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als radius genau zwei Schnittpunkte.
Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Gerade durch A und C wie B, dieser sei d genannt, der andere D^*.
Die Konstruktion ergibt, dass $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über AB, BC, CD, AD, $\angle ABC$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$ den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}AC \cdot BB' + \frac{1}{2}AC \cdot DD' = AC \cdot \frac{1}{2}(BB' + DD')$$

Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen AC und $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Rechteck $EFGH$, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.
Ist etwa $EF > FG$, liegt G' so auf EF, dass $FG' = FG$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz

$$FV^2 = EF \cdot FG' = EF \cdot FG$$

also ein über FV errichtetes Quadrat zu $EFGH$ flächeninhaltsgleich.
Daher führt (z.B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge UV:

(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.
(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.
(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird $EFGH$ ein Rechteck mit $EF > FG$.
(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.
(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.
(6) Man setze $F = U$. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat $UVWX$ ist zu $ABCD$ flächeninhaltsgleich.

Aufgabe 3 - 171033
Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7-4\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}$$

definiert werden soll.
Jens sagt, dass z eine natürliche Zahl ist; Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl; Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, dass der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie wer recht hat!

Es gilt $2-\sqrt{3} > 0$, also ist $\lg(2-\sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2-\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

also ist auch $7-4\sqrt{3} > 0$ und folglich $\lg(7-4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2-\sqrt{3} \neq 1$, also $\lg(2-\sqrt{3}) \neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z = \frac{\lg(2-\sqrt{3})^2}{\lg(2-\sqrt{3})} \qquad \text{also} \qquad z = \frac{2\lg(2-\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})} = 2$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

Aufgabe 4 - 171034
Geben Sie alle Primzahlen p an für die $3p+4 = z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$$3p + 4 = z^2 \qquad \text{also} \qquad 3p = z^2 - 4 = (z+2)(z-2)$$

Da $3p$ und $z+2$ positiv sind, ist auch $z-2$ eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, $3p$ in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, dass die Faktoren entweder 1 und $3p$ oder 3 und p lauten.
Ferner haben $z+2$ und $z-2$ die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiter Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form $3p$.
Also bleibt nur die Möglichkeit, dass ein Faktor 3 und folglich der andere $p = 7$ lautet. Tatsächlich erfüllt $p = 7$ die Bedingung $3 \cdot 7 + 4 = 25 = 5^2$. Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

Aufgabe 5 - 171035
Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, dass bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so dass die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist $(101-m)$ die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen.
Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten $101-m$ ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein.
Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

2.Lösung:
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl (in der Aufgabe geht es speziell um $n = 100$).
Nehmen wir nun an, wir könnten eine Auswahl von $n+1$ verschiedenen Zahlen aus $\{1,...,2n\}$ treffen, sodass keine Zahl dieser Auswahl ganzzahliges Vielfaches einer anderen Zahl dieser Auswahl ist. Wir

betrachten nun so eine Auswahl. Diese besteht aus $a \geq 0$ Zahlen aus $A := \{1,...,n\}$ und $b \geq 0$ Zahlen aus $B := \{n+1,...,2n\}$. Nach Voraussetzung gilt $a + b = n + 1$.

Jedes natürliche $m \in A$ kann durch Multiplikation mit einer Zweierpotenz auf eine Zahl in B abgebildet werden: Ansonsten gäbe es nämlich ein natürliches $r \geq 0$ mit $m \cdot 2^r < n + 1$ und $m \cdot 2^{r+1} > 2n$, woraus dann $2n < m \cdot 2^{r+1} < 2n + 2$ folgen würde, Widerspruch.

Weiterhin sind für beliebige $m_1, m_2 \in A$ (aus der Auswahl der a Zahlen aus A) die Zahlen $m_1 \cdot 2^{r_1} \in B$ und $m_2 \cdot 2^{r_2} \in B$ verschieden, da sonst aus $m_1 \cdot 2^{r_1} = m_2 \cdot 2^{r_2}$ (nach Division durch die kleinste der beiden Zweierpotenzen) $m_1|m_2$ oder $m_2|m_1$ folgen würde, Widerspruch zur speziellen Auswahl der $n+1$ Zahlen. Ebenso stimmt auch keine der b Zahlen aus B mit einem $m \cdot 2^r \in B$ überein, wobei m eine der a Zahlen aus A sei.

Daraus folgt nun $a+b \leq n$, da B genau n Elemente besitzt. Dies steht aber im Widerspruch zu $a+b = n+1$. Daher kann es keine solche spezielle Auswahl geben, was die Behauptung der Aufgabenstellung beweist.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

3. Lösung:
Sei im Folgenden $M = \{1,2,...,200\}$ und $U = \{2k - 1 \mid k \in \{1,2,...,100\}\}$ die Teilmenge aller ungeraden Zahlen in M. Indem wir jedem $u \in U$ die nichtleere Teilmenge $M_u := \{u2^v \mid v \in \mathbb{N}\} \cap M$ von M zuordnen, erhalten wir eine dann eine Partition

$$P := \{M_u \mid u \in U\}$$

von M mit genau $100(= |U|)$ Klassen, wobei für je zwei verschiedene Elemente einer Klasse gilt, dass immer das kleinere das größere teilt. Bei einer beliebigen Auswahl von 101 verschiedenen Elementen in M müssen daher dann nach dem Schubfachprinzip zwei Elemente dieser Auswahl in der gleichen Klasse M_u für ein $u \in U$ liegen, d.h., sie sind nach obigem dann bez. der Teilbarkeitsrelation vergleichbar.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 171036
Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, dass A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, dass unter allen so entstandenen Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und dass diese für genau einen Wert r'_1 von r' zustande kommen!
Drücken Sie diesen Wert r'_1 und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, dass für den Wert r'_1 auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben!
Beweisen Sie, dass es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt, und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, dass es genau einen Wert r'_2 von r' mit folgender Eigenschaft gibt:
Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt!
Drücken Sie diesen Wert r'_2 und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn BC maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist:
Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r.
Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $B_1C_1 = 2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $MA_1 = r\sqrt{3}$ als Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $R' = r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt sich

$$F_1 = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot MA_1 = r^2\sqrt{3}$$

b) Sind $M, r'_1, A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1, bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_0 bzw C_0. Bei

Spiegelung an der Geraden durch A, und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_0 in C_0 über.
Daher ist $\triangle A_1B_0C_0$ gleichschenklig mit $A_1B_0 = A_1C_0$, wegen $\angle B_0A_1C_0 = 60°$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt.

Weiter ist $\triangle MB_1B_0$ gleichschenklig mit $MB_1 = MB_0$, wegen $\angle MB_1B_0 = 60°$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_0$. Daher wird auch $\triangle MB_0C_0$ mit MB_00MC_0 und $\angle B_0MC_0 = 60°$ gleichseitig, folglich ist $B_0C_0 = r$ und $\triangle A_1B_0C_0$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt

$$F_0 = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} < F_1$$

c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt:
Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt.
Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben.
Damit ist gleichwertig, dass es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2, C_2 mit $B_2C_2 = A_2B_2$ oder, wegen $A_2B_2 = A_2C_2$ äquivalent hierzu, mit $\angle B_2A_2C_2 = 60°$ schneidet.

Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\angle MA_2B_2 = 30°$.
Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von $30°$ bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d.h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, dass r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel $30°$ beträgt.
Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r'_2 bestimmt, und zwar ergibt sich:

Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r'_2 = MA_2 = 2MB_2 = 2r$. Die Höhenlänge $A_2B_2 = r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\triangle A_2B_2C_2$; folglich beträgt

$$F_2 = \frac{1}{4}AB^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$$

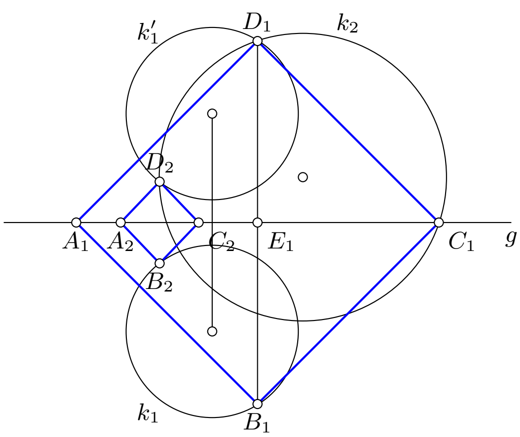
Lösungen der III. Runde 1977 übernommen aus [5]

7.19.4 IV. Runde 1977, Klasse 10

Aufgabe 1 - 171041
In einer Ebene ϵ sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

I. Analysis: Angenommen, es existiert ein Quadrat $ABCD$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates die Gerade g eine seiner Symmetrieachsen, und die nicht auf g liegenden Eckpunkte B und D liegen bezüglich g symmetrisch.
Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1', der durch Spiegelung von k, an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt E von g und BD der Diagonalenschnittpunkt des Quadrates $ABCD$, der von allen vier Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Daraus ergibt sich:

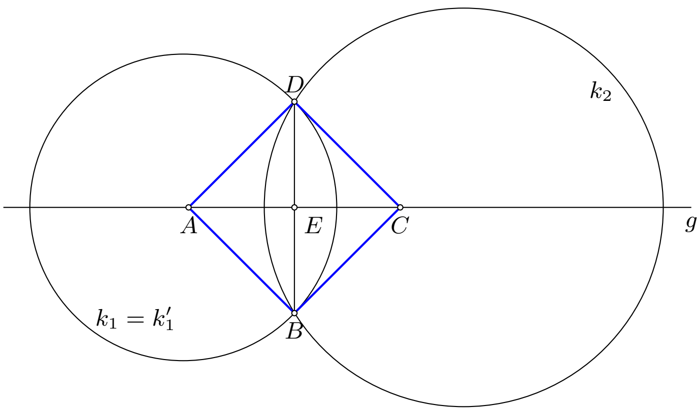
Wenn ein Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann es durch folgende Konstruktion erhalten werden:



II. Konstruktion:
(1) Man spiegelt k_1 an g; das Bild sei k_1'.
(2) Wenn k_1' und k_2 einen gemeinsamen, nicht auf g liegenden Punkt besitzen, so werde ein solcher mit D bezeichnet.
(3) Man spiegelt D an g, der Bildpunkt sei B.
(4) Die Gerade g schneidet als Mittelsenkrechte die Strecke BD in deren Mittelpunkt E. Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $EB = \frac{1}{2}BD$ ab. Die so konstruierten Punkte seien mit A bzw. C bezeichnet.

III. Beweis: Die unter II. beschriebene Konstruktion führt stets zu einem Quadrat der geforderten Art: A, C liegen auf g. Wegen der geforderten Eigenschaft von D liegt D auf k_2 und B als Spiegelpunkt auf k_1. Wegen $DE = EB = EC = EA \neq 0$ und $DB \perp AC$ ist $ABCD$ ein Quadrat.

IV. Determination: Entsprechend der Lage von k_1, k_2 und g zueinander können folgende Fälle unterschieden werden:
1. k_1' und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam.
2. k_1' und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
2.1. der auf g liegt
2.2. der nicht auf g liegt.
3. k_1' und k_2 haben genau zwei Punkte gemeinsam,
3.1. die beide nicht auf g und nicht symmetrisch zu g liegen,
3.2. die beide nicht auf g, aber symmetrisch zu g liegen,
3.3. von denen genau einer auf g liegt,
3.4. die beide auf g liegen.
4. k_1' und k_2 fallen zusammen.



A) Im Fall 4. gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen.
B) Im Fall 3.1. gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (siehe Abbildung oben).
C) In den Fällen 2.2., 3.2., 3.3. gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (eine Möglichkeit die zweite Abbildung). D) In den Fällen 1., 2.1., 3.4. gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, die Fälle schließen einander aus. Also gilt:
Genau in den unter A), B) und C) genannten Fällen existiert ein solches Quadrat, dessen Existenz genau in den unter C) genannten Fällen eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 - 171042
Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist!

Angenommen eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze zueinander teilerfremde Zahlen p, q mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$$

Daraus folgt $p^2 = q(-p - 6q + n^2 q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müsste diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. Daher ist $q = 1$ und es gilt:

$$p^2 + p + 6 = n^2$$
$$\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 - \frac{23}{4}$$
$$23 = 4n^2 - (2p+1)^2 = (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1)$$

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich $4n$, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23 = 1 \cdot 23 = (-l) \cdot (-23)$ die zweite aus, und es gilt entweder

$$2n - 2p - 1 = 1, \qquad 2n + 2p + 1 = 23 \qquad \text{oder} \qquad 2n - 2p - 1 = 23, \qquad 2n + 2p + 1 = 1$$

Im ersten Fall folgt $n - p = 1$, $n + p = 11$ und daraus $p = 5$, im zweiten folgt $n - p = 12$, $n + p = 0$ und daraus $p = -6$.
Folglich können nur die Zahlen $x = 5$ und $x = -6$ die geforderten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist sowohl $25 + 5 + 6 = 36$ als auch $36 - 6 + 6 = 36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 3A - 171043A
Sind $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq ai \leq 3$ $(i = 0, 1, ..., n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + ... + a_1 \cdot 4 + a_0$$

so sagt man, z sei im 4adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz $z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_4$.
Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4adischen System) $(n + 1)$-stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl

$$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + ... + a_1^2 + a_0^2$$

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'' u.s.w.

Beispiel: z = 54: Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 = [312]_4$, d.h., die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4^1 + 2 = [32]_4$, $z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4^1 + 1 = [31]_4$ u.s.w.

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und lässt bei Darstellungen im 4adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben: $312 \to 32 \to 31$ u.s.w.
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche, im 4adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, dass man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

Es sei z eine im 4-adischen Zahlensystem mindestens dreistellige Zahl. Dann ist

$$z = \sum_{i=0}^{n} a_i 4^i \qquad \text{und} \qquad z' = \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

mit $n \geq 2$, $0 \leq a \leq 3$ für $i = 0, 1, ..., n$ und $a_n \neq 0$, woraus

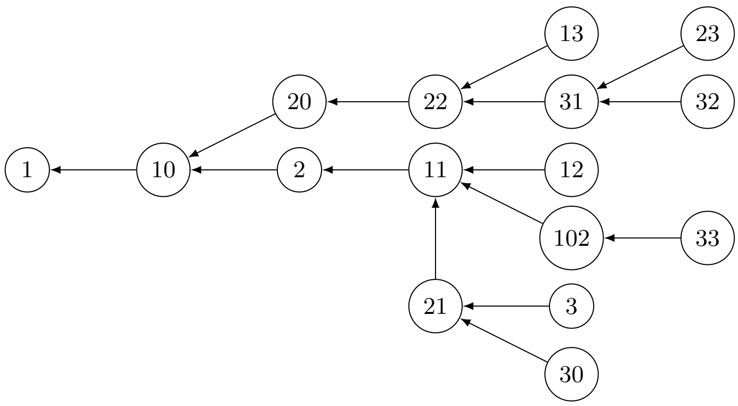
$$z - z' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(4^i - a_i) \right) - a_0(a_0 - 1)$$

folgt. Da $a_0(a_0 - 1) \leq 6$, $a_i(4^i - a_i) \geq 0$ für $i = 1, 2, ..., n-1$ und $a_n(4^n - a_n) \geq 4^2 - a_n \geq 16 - 3 = 13$ ist, gilt
Somit entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Glieder, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Somit muss schließlich eine ein- oder zweistellige Zahl auftreten. (Damit ist auch die Teilbehauptung a) bewiesen.)

Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistellige Zahlen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$), wobei jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortgelassen sei:

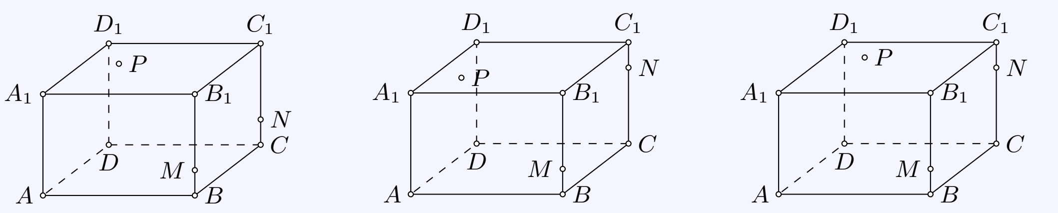
$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33 \qquad (1)$$

Nun gilt, wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z \to z'$ dargestellt wird:



Hier treten alle Zahlen aus (1) auf, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Aufgabe 3B - 171043B

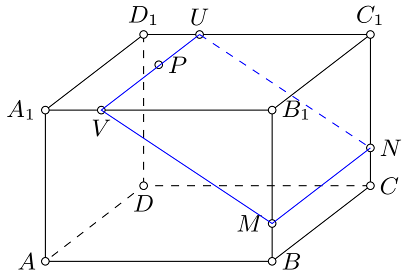


$CN = BM$ $\qquad$ $CN > BM$ $\qquad$ $CN > BM$

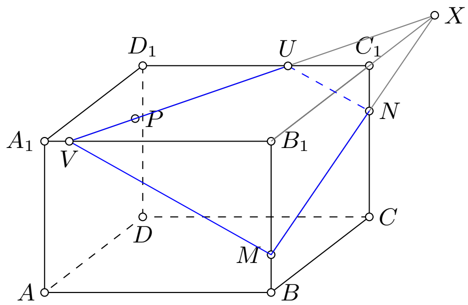
Auf den Abbildungen ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt.
Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechteckfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.
Konstruieren Sie (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ϵ durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Für den 1. Fall ist insbesondere folgender grundlegender Satz der räumlichen Geometrie von Bedeutung:

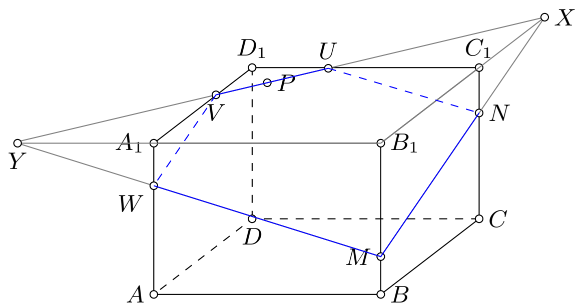
(i) Liegen eine Gerade g und ein Punkt P in einer Ebene ϵ und ist h die Parallele zu g durch P, so liegt auch h in ϵ.
Aus der Voraussetzung $CN = BM$ folgt zunächst $MN \parallel B_1C$. Die Parallele h zu B_1C_1 durch P liegt nach (i) in der Ebene $\epsilon(A_1,B_1,C_1D_1)$ und auch in der Ebene $\epsilon(M,N,P)$ wegen $MN \parallel h$; sie ist also die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.



Da bei der Parallelprojektion — die ja der Kavalierperspektive zugrunde liegt — parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man in der vorliegenden Kavaliersperspektive selbst die Schnittfigur $MNUV$ (siehe obere Abbildung), indem man die Parallele zu MN durch P mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt bringt.



Im 2. Fall ist $MN \nparallel B_1C_1$ wegen $CN > BM$; da diese Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt X. Die Gerade PX ist nun offensichtlich der Schnitt der Ebene $\epsilon(A_1, B_1, C_1, D_1)$ mit $\epsilon(M, N, P)$.
Diese Schnittgerade kann in der Darstellung selbst konstruiert werden (siehe oberes Bild); sie schneidet auf Grund der Lage von P die Kanten C_1D_1 und A_1B_1 in Punkten U und V Damit ist $MNUV$ die gesuchte Schnittfigur.



Im 3. Fall kann zunächst in gleicher Weise verfahren werden. Die Gerade PX schneidet zwar auch hier die Kante C_1D_1 in einem Punkt U, aber nur die Verlängerung der Strecke A_1B_1 über A_1 hinaus in einem Punkt Y (siehe 3.Abbildung); folglich schneidet PX die Kante A_1D_1 in einem Punkt V.
Die Gerade YM schneidet schließlich die Kante AA_1 in einem Punkt W. Damit ist jetzt das Fünfeck $MNUVW$ die gesuchte Schnittfigur.

Aufgabe 4 - 171044
Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehenden Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

Sei s' die Gerade, die auf s in C senkrecht steht und t' die Gerade, die auf t in C senkrecht steht. s' zerlegt die Ebene ϵ, die von s und t aufgespannt wird, in die Halbebene $\epsilon_s(1)$ und $\epsilon_s(2)$, wobei $\epsilon_s(1)$ die Halbebene ist, in der sich s befindet. Analog erhalten wir $\epsilon_t(1)$ und $\epsilon_t(2)$, wobei in $\epsilon_t(1)$ t liege.

Behauptung: $L = \epsilon_s(1) \cap \epsilon_t(1)$ ist die gesuchte Menge.

Beweis: Ist P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A \in s$ und $B \in t$, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich in L schneiden, da die Mittelsenkrechten in $\epsilon_s(1)$ bzw. $\epsilon_t(1)$ liegen.
Liegt P in L, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf die Geraden, die s und t enthalten, auf s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Wir verlängern die Strecken CQ und CR um ihre eigene Länge über Q bzw. R hinaus. Wir erhalten die Punkte A und B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck bilden. Nach Konstruktion gilt $PA = PB = PC$, da PQ und PR auf den Mittelsenkrechten von CA bzw. CB liegen. Damit gehört P der gesuchten Menge an.

Aufgabe 5 - 171045
Beweisen Sie, dass der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2}-7)}{\lg(3-2\sqrt{2})} \qquad (1)$$

eine reelle Zahl definiert und dass diese rational ist!

Um zu zeigen, dass der Term (1) eine reelle Zahl definiert, benutzt man, dass die Funktion $\lg x$ für alle $x > 0$ reelle Werte annimmt, und dass $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Daher reicht es, die Ungleichungen

$$5\sqrt{2}-7 > 0, \qquad 3-2\sqrt{2} > 0, \qquad 3-2\sqrt{2} \neq 1 \qquad (2)$$

zu beweisen, etwa so:

$$50 > 49 \to \sqrt{50} > \sqrt{49} \to 5\sqrt{2}-7 > 0$$
$$9 > 8 \to \sqrt{9} > \sqrt{8} \to 3-2\sqrt{2} > 0$$

Wäre $3-2\sqrt{2} = 1$, so wäre $\sqrt{2} = 1$ oder $2 = 1$.
Um nun zu zeigen, dass (1) sogar rational ist, stellt man fest, dass

$$5\sqrt{2}-7 = (\sqrt{2}-1)^2 \qquad 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \qquad (3)$$

bzw. $(5\sqrt{2}-7)^2 = (3-2\sqrt{2})^3$ (4) gilt. Benutzt man z.B. (4), so erhält man

$$\frac{\lg(5\sqrt{2}-7)}{\lg(3-2\sqrt{2}} = \frac{\lg((3-2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}{\lg(3-2\sqrt{2})} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lg((3-2\sqrt{2})}{\lg(3-2\sqrt{2})} = \frac{3}{2}$$

Das Kürzen der Logarithmen ist nach (2) erlaubt. Da $\frac{3}{2}$ eine rationale Zahl ist, ist alles gezeigt.

Aufgabe 6 - 171046
Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$x + xy + y = 2 + \sqrt{3}$$
$$x^2 + y^2 = 6$$

Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y), dann folgt mit

$$z = x + y \qquad \text{aus (1)} \qquad (3)$$
$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \qquad (4) \qquad \text{bzw. mit}$$
$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{aus (2)}$$
$$z^2 - 2xy = 6$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen (6) und (7)

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad z_2 = -4 - \sqrt{2}$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$x + y = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 2\sqrt{2} \qquad (6')$$
$$x + y = -4 - \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 6 + 4\sqrt{2} \qquad (7')$$

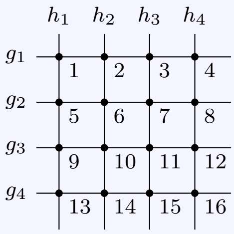
In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x. Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y-Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$.
Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Lösungen der IV. Runde 1977 übernommen aus [5]

7.20 XVIII. Olympiade 1978

7.20.1 I. Runde 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181011



Die Abbildung zeigt vier zueinander parallele Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist.

Ferner zeigt die Abbildung eine Nummerierung der entstehenden Schnittpunkte.

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur nummerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.

b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 nummerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden nummerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), daß für die Ecken jedes in a) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten!

a) Die genannten Quadrate sind genau die folgenden:
9 Quadrate der Seitenlänge a,
4 Quadrate der Seitenlänge 2a,
1 Quadrat der Seitenlänge 3a
zusammen also genau 14 Quadrate.

b) Angenommen, es gäbe eine solche Färbung. Bezeichnet darin
A die Farbe des Punktes 1,
B die Farbe des Punktes 3,
C die Farbe des Punktes 11,
D die Farbe des Punktes 9,
so sind A,B,C,D in geeigneter Reihenfolge alle vier Farben Rot, Blau, Grün, Gelb. Ferner folgt:

Der Punkt 6 kann nicht die Farbe A haben, da diese sonst für zwei Ecken des Quadrates 1/2/6/5 aufträte, so dass eine der anderen Farben bei seinen Ecken fehlen müsste.

Ebenso ergibt sich durch Betrachtung der Quadrate 2/3/7/6, 6/7/11/10, 5/6/10/9, dass der Punkt 6 auch nicht die Farben B,C,D haben kann.
Dieser Widerspruch beweist, dass es keine Färbung der in (b) genannten Art gibt.

Aufgabe 2 - 181012
In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: "Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ..."

Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: " ... ist a negativ."

Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... sind a und b negativ."

Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... ist b negativ."

Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: "... braucht weder a noch b negativ zu sein."

Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist!

Die Zahlen $a = 1$ und $b = -2$ sind von 0 verschieden; sie haben die Eigenschaft $a > b$ und wegen $|1| = 1, |-2| = 2$ auch die Eigenschaft $|a| < |b|$.

Da $a = 1$ jedoch nicht negativ ist, ist sowohl die von Antje als auch die von Bernd zur Diskussion gestellte Aussage falsch.
Ferner gilt: Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt; so ist b negativ; denn wäre b nicht negativ, so folgte $a > b > 0$, also $|a| = a > b = |b|$ im Widerspruch zu $|a| < |b|$.

Damit ist bewiesen, dass die von Cornelia zur Diskussion gestellte Aussage wahr und die von Doris zur Diskussion gestellte Aussage falsch ist.

Aufgabe 3 - 181013
Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:

Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, daß auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und daß jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten.

Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein "Paar" und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.

Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines "Paares" oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten "Paare" besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, dass das Spiel stets damit enden muß, daß sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

Beim Ziehen zweier Karten sind genau die folgenden Fälle möglich:

A: Es werden zwei gerade Zahlen gezogen. Dann scheiden Sie entweder als "Paar" aus dem Spiel aus oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier gerader Zahlen eine gerade Zahl ist:

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung bleibt unverändert.

B: Es werden zwei ungerade Zahlen gezogen. Dann scheiden sie entweder als "Paar" aus dem Spiel aus, oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist.

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung vermindert sich um genau 2.

C: Es wird eine gerade und eine ungerade Zahl gezogen. Dann scheiden sie aus dem Spiel aus und an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Sie trägt eine ungerade Zahl, da die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ist.

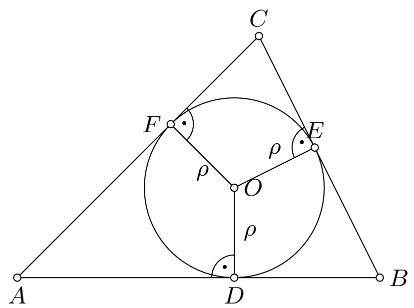
Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung verändert sich nicht.

Nun gilt einerseits:
Bei jedem Ziehen (mit evtl. anschließendem Hinzufügen einer Reservekarte) wird die Gesamtzahl der im Spiel befindlichen Karten kleiner. Also muss das Spiel stets damit enden, dass sich keine oder genau eine Karte im Spiel befindet.

Andererseits waren anfangs im Spiel genau 15 ungeradzahlig beschriftete Karten, und deren Anzahl hat sich nach den Feststellungen in A, B, C stets um eine gerade Zahl (0 oder 2) geändert. Somit ist auch am Spielende eine ungerade Anzahl von Karten mit ungeradzahliger Beschriftung im Spiel. Daher ist der Fall, dass am Spielende überhaupt keine Karte mehr im Spiel ist, nicht möglich, und es verbleibt als einzige Möglichkeit das Spielende mit genau einer im Spiel befindlichen Karte, w.z.b.w.

Aufgabe 4 - 181014

Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel ACB.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muß sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

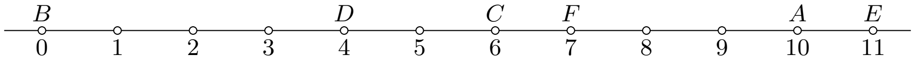


Der Inkreismittelpunkt sei O.
Dann steht gewiss der Radius ρ
stets senkrecht einmal auf AB,
zum zweiten tut er's mit BC.
Auch mit AC, der dritten Strecke,
da bildet er 'ne rechte Ecke;
Die Punkte, wo jeweils der Treff,
bezeichnet man mit D, E, F.
Das Dreieck ABO dabei,
des Inhalt $c \cdot \rho : 2$
wird durch DO nochmals geteilt.
Wenn man bei $\triangle ADO$ verweilt
und es mit $\triangle AFO$ vergleicht,
so sieht man - wie so üblich "leicht"
dass beide Flächen kongruent,
falls man den Kongruenzsatz kennt,
den man mit ssw beschreibt,
AO sich nämlich selbst gleich bleibt;
dann ist CD genau gleich ρ
und für OF gilt's ebenso;
der Winkel $\angle ADO$ ist Rechter,
und $\angle AFO$ macht's auch nicht schlechter.
Auch für das Dreieck BOD
stimmt der Vergleich mit $\triangle BOE$.
Das Viereck mit $FCEO$
bleibt noch als Rest.
Jetzt denkt man so:
Da drei der Winkel 90 Grad,
wohl auch der vierte soviel hat.
Darum muss es ein Rechteck sein.
Setzt man die Seitenlängen ein,
erkennt man, dass es folglich hat
den Flächeninhalt ρ^2.
Und unsre Lösung heißt nun so:
$\rho^2 + c \cdot \rho$.

Lösungen der I. Runde 1978 übernommen von [5]

7.20.2 II. Runde 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181021
Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, dass $AB = 10$ cm; $BC = 6$ cm; $BE = 11$ cm; $CD = 2$ cm; $FD = 3$ cm; $AF = 3$ cm und $DE = 7$ cm gilt.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind!



Angenommen, eine Anordnung von Punkten $A, ..., F$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefasst.
Wegen $BE = 11$ cm kann dabei erreicht werden, dass die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $BC = 6$ cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $DE = 7$ cm der Zahl 4 oder der Zahl 18.
Hiernach kann aber $CD = 2$ cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht.
Nun folgt weiter: Wegen $AB = 10$ cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $FD = 3$ cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7.
$AF = 3$ cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung im Bild die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.
In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E. (Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.)

Aufgabe 2 - 181022
Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:
Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius BC. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.
Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge CD ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.

Nach Konstruktion gilt $DC = DE = DB$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\angle CBE$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 3 - 181023
Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere $a + 1$, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s = a^2 + (a + 1)^2 = 2a^2 + 2a +^{=} 2a(a + 1) + 1$$

Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 Oder 2.

Fall 1: a ist durch 3 teilbar.
Dann ist auch $2a(a + 1)$ durch 3 teilbar, und s lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 2: a lässt bei Division durch 3 den Rest 2.
Dann ist $a + 1$ durch 3 teilbar; damit auch $2a(a + 1)$, und somit lässt s bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 3: a lässt bei Division durch 3 den Rest 1.
Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form $3n + 1$ darstellbar. Man erhält mithin

$$s = 2(3n + 1) \cdot (3n + 2) + 1 = 2(9n^2 + 9n + 2) + 1 = 18n^2 + 18n + 5$$

und $18n^2 + 18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.
Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

Aufgabe 4 - 181024
Von einem Dreieck ABC mit $\angle CAB = \alpha = 120°$ und $\angle BCA = \gamma = 30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt $\angle ABC = \beta = 30°$, und damit $AB = AC \quad (1)$
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt

$$AM = BM = CM = r \qquad (2)$$

Wegen (l) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\angle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig.
Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist $CABM$ ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist BC die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang

$$CA + AB + BC = r + r + 2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})r$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus $CABM$, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Lösungen der II. Runde 1978 übernommen aus [5]

7.20.3 III. Runde 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181031
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x = 0, x = 3, x = -3$, so erhält man:

$$0 \cdot f(2) = -9 \cdot f(0), \quad \text{also} \quad f(0) = 0$$
$$3 \cdot f(5) = 0 \cdot f(3), \quad \text{also} \quad f(5) = 0$$
$$-3 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-3), \quad \text{also} \quad f(-1) = 0$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Aufgabe 2 - 181032
Beweisen Sie:
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d.h., es gelte $AB = AC = BC$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss: $\triangle AMC \cong \triangle BMC$.
Also gilt $\angle ACM = \angle BMC$, d.h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende. Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.

B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB, und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$AM = MB \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle ACM = \angle MCB \quad (2)$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C', und hierfür ist $AC'BC$ ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M.
Somit sind $\angle MCB$ und $angle AC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt $\angle ACM = \angle AC'M$.
Also ist das Dreieck $AC'C$ gleichschenklig mit $AC = AC'$. Hieraus und aus $AC' = CB$ folgt $AC = BC$. (3)

Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $AB = CB$. (4)
Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

Aufgabe 3 - 181033
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20} + \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

Für jede reelle Zahl a gilt

$$\begin{aligned} a^2-3a+2 &= (a-1)(a-2) \quad &;& \quad a^2-5a+6 = (a-2)(a-3) \\ a^2-7a+12 &= (a-3)(a-4) \quad &;& \quad a^2-9a+20 = (a-4)(a-5) \\ a^2-11a+30 &= (a-5)(a-6) \quad &;& \quad a^2-13a+42 = (a-6)(a-7) \\ a^2-8a+7 &= (a-1)(a-7) \end{aligned}$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen $1, 2, ..., 7$ ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für $k = 1,...,6$

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))} = -\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a-(k+1)}$$

Also ist für reelles $a \neq 1,2,...,7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-7} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1, 2, ..., 7$ gleichbedeutend hiermit

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)} = \frac{6}{a^2-8a+7} = \frac{a^2+5a}{a^2-8a+7}$$
$$a^2+5a-6=0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a = 1$ und $a = -6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1, 2, ..., 7$ äquivalent mit $a = -6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 181034
Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen Sie folgende Aussagen:
(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.
Ist es möglich, dass a) alle vier Aussagen b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind?

Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

A B D	wahre Aussagen	falsche Aussagen
b r w	(1),(2), (3)	(4)
b w r	(2),(4)	(l), (3)
r b w	(l), (2)	(3),(4)
r w b	(l), (2)	(3),(4)
w b r	(1),(2)	(3),(4)
w r b	(l)	(2),(3),(4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass a) und e) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

Aufgabe 5 - 181035
Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt:
Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ definierte Funktion ist, so gilt $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$ und $f(3) = 1$.
Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

Für alle reellen a, b, c, d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$d = 10 \quad (1) \quad ; \quad a+b+c+d = 12 \quad (2)$$
$$8a+4b+2c+d = 4 \quad (3) \quad ; \quad 27a+9b+3c+d = 1 \quad (4)$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a, b, c, d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$a+b+c = 2 \quad \text{also} \quad c = 2-a-b \quad (5)$$
$$8a+4b+2c = -6 \quad \text{also} \quad 4a+2b+c = -3 \quad (6)$$
$$27a+9b+3c = -9 \quad \text{also} \quad 9a+3b+c = -3 \quad (7)$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a + b = -5 \quad \text{also} \quad b = -5 - 3a \qquad (8) \qquad \text{und} \qquad 8a + 2b = -5 \qquad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a = 5$, woraus man $a = \frac{5}{2}$ (10) erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich $b = -\frac{25}{2}$ (11).
Daraus und aus (10) und (5) folgt

$$x = 2 - \frac{5}{2} + \frac{25}{2} = 12 \qquad (12)$$

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.
II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen. Die gesuchten Zahlen lauten somit $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{25}{2}, c = 12, d = 10$.

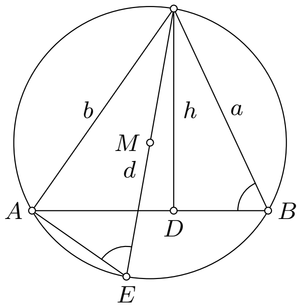
Aufgabe 6 - 181036
Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $CM = 6$ cm, $CS = 7$ cm und $MS = 1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, dass sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB, so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis $1 : 2$, also liegt H im Abstand $HS = \frac{1}{2}SC$ auf der Verlängerung von CS.
Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB. MH verläuft also senkrecht zu AB.
Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d.h. dem Kreis um M durch C. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}CS$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H.
(2) Man konstruiert die Gerade durch H, die auf MH senkrecht steht.
(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C. Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, da A, B und C nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $MA = MB$ und $\angle AHM = \angle BHM = 90°$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ssw; dieser ist anwendbar, da $\angle AHM, \angle BHM$ als rechter Winkel jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen).
Somit gilt $AH = BH$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $HS : SC = 1 : 2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.



IV. Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, dass H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in zwei Punkten.
Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\angle MHC < 90°$ ist, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B. Also existiert zu den gegebenen Punkten M, S, C genau ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Lösungen der III. Runde 1978 übernommen aus [5]

7.20.4 IV. Runde 1978, Klasse 10

Aufgabe 1 - 181041
Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$$

erfüllt?

Für die genannte Zahl x gilt $\log_{12}(\log_{11} x) = 13$, also $\log_{11} x = 12^1 3$ und daher

$$x = 11^{12^{13}}$$

Wir ermitteln von den Potenzen von 11^s $(s = l, 2, ...)$ jeweils die letzten beiden Ziffern:

letzte Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
von 11^s	11	21	31	41	51	61	71	81	91	01	...

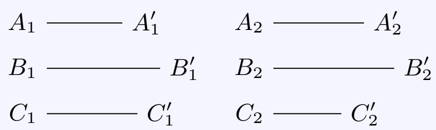
Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl t mit 11^{10}, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl t.
Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl n die letzte Ziffer w, so hat 11^u dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^w; denn mit einer natürlichen Zahl v ist $u = 10v + w$, also entstehe $11^u = (11^{10}) \cdot 11^w$ aus 11^w durch v-maliges Multiplizieren mit 11^{10}.

Wir ermitteln nun von den Potenzen 12^y $(y = 1, 2, ...)$ jeweils die letzte Ziffer:

y	1	2	3	4	...
letzte Ziffer von 12^y	2	4	8	6	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl z, die die letzte Ziffer 2 hat, mit 12^4, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.
Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u = 12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w = 2$; denn $12^{13} = (12^4)^3$. 12 entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit 12^4.
Somit hat $x = 11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^2, d.s. die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

Aufgabe 2 - 181042
In einer Ebene ϵ seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte 6 Strecken A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' gegeben:



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = A_1A_1'$, $b_1 = B_1B_1'$, $c_1 = C_1C_1'$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = A_2A_2'$, $b_2 = B_2B_2'$, $c_2 = C_2C_2'$ hat.
a) Beschreiben Sie eine in ϵ durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (1)!
Falls $P_1Q_1 < P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 < V_2$;
falls $P_1Q_1 = P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 = V_2$;
falls $P_1Q_1 > P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 > V_2$ (1)
Dass P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (!) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.
b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A_1', ..., C_2C_2'$ auf der Abbildung auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

a) Wir gehen von den Volumen $V_1 = a_1b_1c_1$ und $V_2 = a_2b_2c_2$ der Quader aus. Offenbar ist $V_1 \lesseqgtr V_2$; gleichwertig mit

$$\frac{a_1b_1}{c_2} \lesseqgtr \frac{a_2b_2}{c_1} \qquad (1)$$

Damit ist aber bereits eine einfache Lösung vorgezeichnet. Die Terme auf den beiden Seiten von (1) sind nämlich Strecken. Sie können anhand der Strahlensätze konstruiert werden.
Wir wählen also als Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 der Länge $\frac{a_1b_1}{c_2}$ bzw. $\frac{a_2b_2}{c_1}$.
Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen zwei von einem Punkt S_1 ausgehende Strahlen s_1, t_1, die nicht auf einer Geraden liegen. Entsprechend wählen wir zwei Strahlen s_2, t_2 mit gemeinsamem Scheitelpunkt S_2.
Durch Streckenabtragung konstruieren wir die Punkte $P_1 \in s_1$, $R_1, T_1 \in t_1$ und $P_2 \in s_2$ sowie $R_2, T_2 \in t_2$, für die $S_1P_1 = a_1$, $S_1R_1 = c_2$, $R_1T_1 = b_1$ und R_1 zwischen S_1, T_1 liegt sowie $S_2P_2 = a_2$, $S_2R_2 = c_1$, $R_2T_2 = b_2$ und R_2 zwischen S_2, T_2 liegt.
Die Parallele zu P_1R_1 durch T_1 schneidet s_1 in Q_1, und die Parallele zu P_2R_2 durch T_2 schneidet s_2 in Q_2.

Beweis: Nach dem Strahlensatz ist $P_1Q_1 : a_1 = b_1 : c_2$ und $P_2Q_2 : a_2 = b_2 : c_1$.
Nun gilt $P_1Q_1 \lesseqqgtr P_2Q_2$ genau dann, wenn (1) und damit $V_1 \lesseqqgtr V_2$.
Damit ist gezeigt, dass die oben konstruierten Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (*) der Aufgabenstellung besitzen.

b) Die in a) beschriebene Konstruktion führt auf $P_1Q_1 < P_2Q_2$ und damit auf $V_1 < V_2$.

Aufgabe 3A - 181043A
Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.
Man beweise, dass f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g!

Es sei y eine beliebige reelle Zahl. Für x gelte die Gleichung

$$\frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = y \qquad (1)$$

Durch Multiplikation mit a^x erhalten wir eine quadratische Gleichung in $t = a^x > 0$:

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

Diese hat die Lösungen

$$t_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} \qquad \text{und} \qquad t_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

Nun ist $y - \sqrt{y^2 + 1} << 0$ im Widerspruch zu $t = ax > 0$. Daher gilt

$$a^2 = y + \sqrt{y^2 + 1} \qquad \text{bzw.} \qquad x = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Damit ist für beliebiges reelles y ein reelles x eindeutig bestimmt, denn es ist

$$\sqrt{y^2 + 1} > |y| \geq -y \qquad \text{und somit} \qquad y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

so dass $\log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$ als reelle Zahl definiert ist. Diese reelle Zahl x erfüllt auch die Gleichung (1).
Die Funktion $f(x)$ besitzt also eine Umkehrfunktion und dies ist

$$g(y) = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Aufgabe 3B - 181043B
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist!

Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen gelten:

$$x \geq 1 \quad (1) \quad ; \quad x + 3 \geq 4\sqrt{4-1} \quad (2) \quad ; \quad x + 3 \geq 6\sqrt{x-1} \quad (3)$$

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \qquad (4)$$

Dann folgt

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$
$$x+3-4\sqrt{x-1} = 1 - 2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + x + 6 - 6\sqrt{x-1}$$
$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 3 - \sqrt{x-1} \qquad (5)$$

also $\sqrt{x-1} \leq 3 \quad (6)$.
Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 2 \quad \text{also} \quad \sqrt{x-1} \geq 2 \quad (7)$$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leq x-1 \leq 9 \quad (9) \qquad \text{also} \qquad 5 \leq x \leq 10 \quad (10)$$

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl x die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8); ferner gilt

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \geq 0$$

also

$$x^2 + 6x + 9 \geq 16x - 16 \qquad \text{d.h.} \qquad (x+3)^2 \geq 16(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x + 3 > 0$ folgt) die Ungleichung (2).
Weiterhin gilt

$$x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2 \geq 0$$

also

$$x^2 + 16x + 64 \geq 36x - 36 \qquad \text{d.h.} \qquad (x+8)^2 \geq 36(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x + 8 > 0$ folgt) die Ungleichung (3). Ferner gilt

$$(\sqrt{x-1} - 2)^2 = x - 1 - 4\sqrt{x-1} + 4 = x + 3 - 4\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (8) folgt (7). Weiterhin gilt

$$(3 - \sqrt{x-1})^2 = 0 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 = x + 8 - 6\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (6) folgt (5).
Aus (5) und (7) aber ergibt sich, dass x auch (4) erfüllt. Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 4 - 181044
Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

$$\text{a)} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

a) Es gilt

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0 \qquad \text{also} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

also wegen $a > 0, b > 0$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad ; \qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man

$$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \qquad (2)$$

sowie für die Zahlen

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{c+d}{2} \quad (3) \qquad \text{auch} \qquad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad (4)$$

Aus (1), (2), (3) und (4) folgt

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

d.h. die zweite Behauptung.

Aufgabe 5 - 181045
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ gilt!

Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2 - 2^n = 153 \qquad (1)$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(N; z)$ sei (1) erfüllt.
1. Fall: n ist gerade, d.h., es gilt $n = 2m$ mit natürlichem m. Aus (1) folgt dann

$$(z - 2^m)(z + 2^m) = 153 \qquad (2)$$

Da $153 = 3^2 \cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur $1 \cdot 153$, $3 \cdot 51$ und $9 \cdot 17$ besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$z - 2^m = 1 \quad , \quad z + 2^m = 153 \qquad (3)$$
$$z - 2^m = 3 \quad , \quad z + 2^m = 51 \qquad (4)$$
$$z - 2^m = 9 \quad , \quad z + 2^m = 17 \qquad (5)$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m = 76$ und (4) auf den Widerspruch $2^m = 24$; (5) führt auf $z = 13$, $2^m = 4$, also $m = 2$, $n = 4$.

2. Fall: n ist ungerade, Es gilt $2 \equiv 1(\mod 3)$, also $2^n \equiv -1(\mod 3)$. Ist nun $z \equiv 0(\mod 3)$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 0 + 1(\mod 3) \qquad (6)$$

ist aber $z \equiv -1(\mod 3)$, so folgt

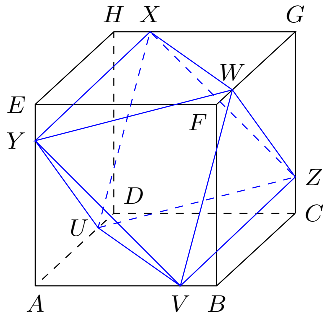
$$z^2 - 2^n \equiv 1 + 1(\mod 3) \qquad (7)$$

Wegen $153 \equiv 0(\mod 3)$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1). Daher kann (1) nur durch $(4; 13)$ erfüllt werden.
(II) In der Tat erfüllen diesen Zahlen (1), denn er gilt $2^4 + 12^2 = 160 = 169 - 9$. Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

Aufgabe 6 - 181046
Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.
Beweisen Sie, dass auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

Angenommen, wir haben ein regelmäßiges Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften konstruiert.
Wir betrachten die Umkugel K dieses Oktaeders. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ist infolge des Strahlensatzes mit dem Würfelmittelpunkt identisch. Daraus folgt, dass der Würfelmittelpunkt M mit dem Kugelmittelpunkt notwendig zusammenfällt.

Die Kugel um M mit dem Radius r mit $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ schneidet die Kanten des Würfels u.a. in den Punkten U, V, W, X, Y, Z (siehe Bild).



$UVWX$ ist ein Parallelogramm, da UV und XW zueinander parallel und gleichlang sind. Da $UVWX$ symmetrisch zur Ebene durch A, C, G liegt, gilt $UW = VX$ damit ist $UVWX$ ein Rechteck. Sei nun $x = AV = AU = GW = GX$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$VW = \sqrt{a^2 + 2(a-x)^2}$$

Aus der Bedingung $VW = UV = \sqrt{2}x$ ergibt sich $x = \frac{3}{4}a$. $UVWX$ ist dann nach Konstruktion ein Quadrat.
Wir wählen nun noch Y auf AE und Z auf GC mit $AY = GZ = \frac{3}{4}a$. Es folgt analog $YU = YV = YW = ZU = ZV = ZW = ZX$.
Daher sind die Dreiecke UVY, VWY, WXY, XUY, UVZ, VWZ, WXZ, XUZ gleichseitig. Der eingeschlossene Körper ist somit aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen zusammensetzbar, d.h., er ist ein regelmäßiger Oktaeder.
Wir berechnen V. Das Oktaeder setzt sich aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a\sqrt{2}\frac{1}{2}$ und der zugehörigen Höhe $\frac{a}{2}$ zusammen. Damit ist

$$V = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}a^3$$

Analog berechnen wir das Volumen des konstruierten Oktaeders. Es ist

$$\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 \frac{3}{4}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{16}a^3 > \frac{1}{2}a^3 = 3V$$

Damit erfüllt das konstruierte Oktaeder alle gestellten Bedingungen.

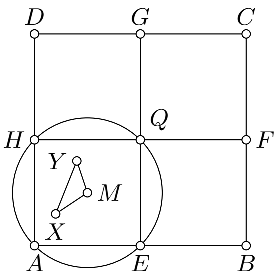
Lösungen der IV. Runde 1979 übernommen aus [5]

7.21 XIX. Olympiade 1979

7.21.1 I. Runde 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191011
Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 22 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, dass kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.

Wie groß muss Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?



Es gilt die folgende Aussage:

(*) Wenn ein Kreis mit dem Radius r zwei Punkte X und Y überdeckt, so ist $XY \leq 2r$. Das Quadrate sei $ABCD$, sein Mittelpunkt sei Q. Angenommen, vier Kreise mit dem Radius $r < 1$ cm haben die verlangte Eigenschaft. Jede Ecke des Quadrates muss dann von einem dieser Kreise überdeckt werden, und der betreffende Kreis kann wegen (*) keine andere Ecke überdecken.
Also muss jeder der vier Kreise eine Ecke des Quadrates überdecken.

Nun gibt es einen der vier Kreise, der Q überdeckt; auch dieser Kreis muss eine Ecke des Quadrates überdecken. Ist dies o.B.d.A. die Ecke A, so folgt nach (*)

$$\sqrt{2}\text{ cm} = AQ \leq 2r \qquad \text{also} \qquad r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ cm}$$

(Haben ferner vier Kreise mit einem Radius $r \geq 1$ cm die verlangte Eigenschaft, so gilt wegen $1 > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ für sie erst recht $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$).

Damit ist in jedem Fall bewiesen:

(I) Vier Kreise der verlangten Eigenschaft haben stets einen Radius $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm.

Ferner gilt:
(II) Wählt man $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm, so haben vier geeignet gelegene Kreise mit diesem Radius bereits die verlangte Eigenschaft.

Um dies zu zeigen, wähle man die Lage der Kreise so, dass sie die Strecken AQ, BQ, CQ bzw. DQ als Durchmesser haben. Sind nämlich E,F,G,H die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD bzw. DA, so überdecken vier so ausgewählte Kreise die Flächen von $HAEQ$, $EBFQ$, $FCGQ$, $GDHQ$ und damit jeden Punkt der Fläche des Quadrates $ABCD$.

Aus (I) und (II) folgt: Möglichst kleine Kreise mit der verlangten Eigenschaft liegen genau dann vor, wenn ihr Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm beträgt; d.h. Dirk muss $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm als Radius der Kreise wählen.

Aufgabe 2 - 191012
Es seien b und c von Null verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $a < b$ und $b + 1 = c$ gilt!

Nach Voraussetzung ist $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$ in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegbar, von denen der erste wegen $b > 0$ kleiner als der zweite und dieser, also auch der erste, positiv ist.

Da a Primzahl ist, ist dies nur möglich mit $c - b = 1$ und $c + b = a^2$.

Mit (1) ist bereits die Behauptung $b + 1 = c$ bewiesen. Aus $a^2 = c^2 - b^2$ und $b > 0$ folgt ferner $a^2 < c^2$; hieraus folgt wegen $c > 0$ auch $a < c$, also $a \leq c - 1 = b$. Wäre nun $a = b$, so ergäbe sich $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also wäre die Quadratzahl c^2 das Produkt der drei Primfaktoren $2, a, a$. Da dies unmöglich ist, folgt auch $a < b$.

Aufgabe 3 - 191013
Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$, für die der Term $x^2 + 3x + 4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt!

Für alle reellen x gilt

$$x^2 + 3x + 4 = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$$

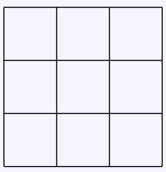
für $-1 \leq x \leq 1$ gilt ferner $x^2 \leq 1, 3x \leq 3$, also

$$x^2 + 3x + 4 \leq 1 + 3 + 4 < 9$$

Daraus folgt: Wenn der Term für reelles x mit $-1 \leq x \leq 1$ eine ganzzahlige Quadratzahl ergibt, so kann dies nur die Zahl 4 sein.
Die Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 4$ ist nun gleichwertig mit $x(x + 3) = 0$.

Daher hat sie genau die Lösungen $x = 0$ und $x = -3$. Von diesen erfüllt genau die erstgenannte die Bedingung $-1 \leq x \leq 1$. Also hat genau die Zahl $x = 0$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 4 - 191014



In die neun quadratischen Felder der Abbildung sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und dass in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.

Wenn eine Eintragung der genannten Art vorliegt, so gilt:
Da die Summe aller eingetragenen Zahlen $1 + ... + 9 = 45$ beträgt, ergibt sich in jeder der drei Spalten (und folglich auch in jeder Zeile und in jeder Diagonale) die Summe 15. Nun gibt es genau 8 Darstellungen der Zahl 15 als Summe von drei zueinander verschiedenen der Zahlen $1, ..., 9$ nämlich

$$1+5+9, \quad 2+4+9, \quad 3+4+8, \quad 4+5+6, \quad 1+6+8, \quad 2+5+8, \quad 3+5+7, \quad 2+6+7 \tag{1}$$

In diesen 8 Darstellungen tritt nur die Zahl 5 viermal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art muss folglich die Zahl 5 im mittleren Feld stehen, da dieses viermal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.

Ferner treten in den Darstellungen (1) (außer der Zahl 5) nur die Zahlen 2, 4, 6, 8 je dreimal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art müssen folglich diese Zahlen in den Eckfeldern stehen, da jedes dieser Felder dreimal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.
Liegt eine derartige Eintragung vor, so kann daher durch eine Drehung erreicht werden, dass die Zahl 2 im linken oberen Eckfeld steht. Im rechten unteren Eckfeld muss dann 8 stehen.
Also stehen 4 bzw. 6 im rechten oberen bzw. linken unteren Feld oder umgekehrt. Falls 4 nicht im rechten oberen Eckfeld steht, kann dies folglich durch eine Spiegelung erreicht werden, die die Felder der Zahlen 2, 5, 8 unverändert lässt.
Daher ist jede Eintragung der genannten Art kongruent zu einer Eintragung, bei der die in der nachfolgenden Abbildung angegebenen Besetzungen von Feldern vorliegen:

2		4
	5	
6		8

Es gibt aber genau eine solche Eintragung, nämlich:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Die gesuchte größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen der genannten Art ist daher 1.

Lösungen der I. Runde 1979 übernommen von [5]

7.21.2 II. Runde 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191021
Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten, soll einen überall gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Bildes.
Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Längenverhältnisses der Außenkanten des Rahmens, die diese Forderung erfüllen!

Es sei $2a$ die Länge der kürzeren Seite des Bildes, dann ist $3a$ die Länge seiner längeren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens, dann sind $2a + 2d$ bzw. $3a + 2d$ die Längen der Außenkanten des Rahmens.
Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d.h. genau dann, wenn

$$(2a + 2d)(3a + 2d) = 2 \cdot 2a \cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2 + 4ad + 6ad + 4d^2 = 12a^2$$
$$4d^2 + 10ad - 6a^2 = 0$$
$$d^2 + \frac{5}{2}ad - \frac{3}{2}a^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2} = -\frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a + \frac{24}{16}a^2}$$

von denen genau $d = \frac{a}{2}$ nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten die Längen $2a + 2\frac{a}{2} = 3a$ und $3a + 2\frac{a}{2} = 4a$ haben.
Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt:
Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a+2d) : (3a+2d) = 3 : 4$, so folgt $8a+8d = 9a+6d$, also $2d = a$ und damit $d = \frac{a}{2}$. Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 2 - 191022
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ bzw. 8, so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest $0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4$ bzw. 1; d.h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7.
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.
Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

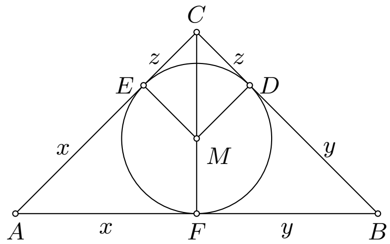
$$0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 0 + 4 = 4; 0 + 7 = 7; 1 + 4 = 5; 1 + 7 = 8; 4 + 7 = 11$$

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass auch die beiden anderen Reste 0 sind; d.h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

2., 3. und 4. Fall: Einer der Reste ist $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right\}$

Dann ergibt die Summe der beiden anderen Rest bei Division durch 9 den Rest $\left\{\begin{matrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}\right\}$. Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, dass die beiden anderen Reste $\left\{\begin{matrix} 1 \text{ und } 7 \\ 1 \text{ und } 4 \\ 4 \text{ und } 7 \end{matrix}\right\}$ lauten. In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 3 - 191023
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ und gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D, die Seite CA in E und die Seite AB in F.
Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte BD, DC, CE, EA, AF und FB, in Abhängigkeit von a, b und c ausgedrückt!



Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $ME \perp AC$ und $MF \perp AB$. Weiter folgt $\triangle AEM \cong \triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $AM = AM; ME = MF$ und in der Größe $\angle AEM = \angle AFM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $AE = AF$.
Entsprechend lässt sich zeigen, dass $BF = BD$ und $CD = CD$ gilt. Für die gesuchten Seitenabschnitte

$$AE = AF = x, \qquad BF = BD = y, \qquad CD = CE = z$$

gilt somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + z &= a \qquad (1) \\ x + z &= b \qquad (2) \\ x + y &= c \qquad (3) \end{aligned}$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

Entsprechend ergibt sich

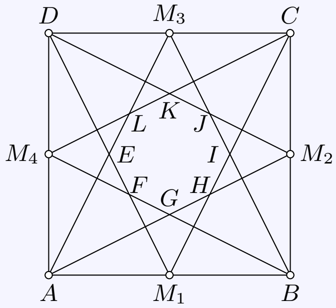
$$y = \frac{1}{2}(c + a - b) \qquad ; \qquad z = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Die gesuchten Längen sind also

$$AE = AF = \frac{1}{2}(b + c - a); \qquad BF = BD = \frac{1}{2}(c + a - b); \qquad CD = CE = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

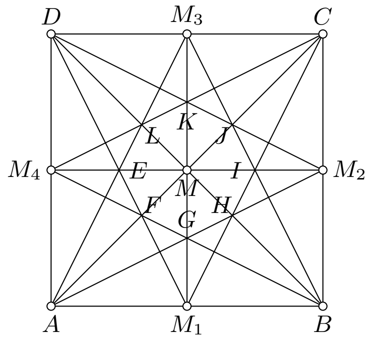
Da die Existenz des Inkreises und folglich auch der gesuchten Längen als bekannt verwendet werden darf, ist eine Probe oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x,y,z nicht erforderlich.

Aufgabe 4 - 191024



Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ enthält.
Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da M_4M_2 Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf M_4M_2, und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M.



Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC. Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{M_4E}{DM_3} = \frac{AM_4}{AD} = \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad M_4E = \frac{a}{4}; \quad EM = \frac{a}{4}$$

und

$$\frac{FM}{FA} = \frac{M_4M}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad FM = \frac{AM}{3}$$

Da AM die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $AM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $MF = \frac{a}{6}\sqrt{2}$.
Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2} \neq \frac{1}{4}$ folgt $ME \neq MF$ und hieraus nach der Seiten—Winkel-Relation $\angle MEF \neq \angle MFE$.
Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt $\angle LEF = 2\angle MEF$ und $\angle EFG = 2\angle MFE$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\angle LEF = \angle EFG$. Da somit in dem Achteck $EFGHIJKL$ zwei verschieden große Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

Lösungen der II. Runde 1979 übernommen aus [5]

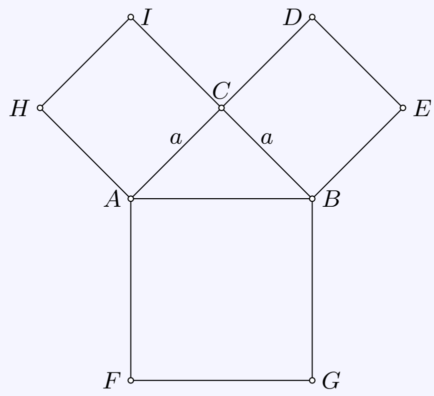
7.21.3 III. Runde 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191031

Die Abbildung zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit gegebener Kathetenlänge a, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.

a) Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen!
Ermitteln Sie (zu gegebenem a) den Durchmesser dieses Kreises!

b) Beweisen Sie:
Jeder Kreis, der die Punkte D, E, F, G, H und J in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!



a) Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die Gerade g durch C und M ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt

$$MD = MJ, ME = MH, MG = MF \qquad (1)$$

Ferner ist CM zugleich Höhe in ABC, also hat $\triangle BCM$ bei B bzw. M Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $MB = MC$. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von BC; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von DE, hiernach gilt $MD = ME \quad (2)$.

$\triangle BCD$ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\angle DBC = 45°$, also ist $\angle DBM = 90° = \angle GBM$; ferner gilt $BD = a\sqrt{2} = BG$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle DBM \cong \triangle GBM$, also $MD = MG \quad (3)$.
Aus (1), (2), (3) folgt, dass der Kreis k um M durch D auch durch E, F, G, H, J geht. Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

$$2MG = 2\sqrt{MB^2 + MG^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{10}$$

b) Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $M' \neq M$ jeder Kreis um M', der in seiner Fläche oder auf seinem Rande die Punkte D, E, F, G, H, J enthält, einen größeren Radius als k hat.
O.B.d.A. liege M' auf g oder in derjenigen durch g begrenzten Halbebene, die A enthält. Das Lot von M' auf g habe den Fußpunkt L.
Ist $L = M$ (also M' nicht auf g gelegen), so gilt $M'D > MD$. Ist $L \neq M$ und liegt L auf dem Strahl aus M durch C, so gilt $M'G \geq LG > MG$. Liegt L auf der Verlängerung von CM über M hinaus, so gilt $M'D \geq LD < MD$.
Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Aufgabe 2 - 191032

Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung erfüllt ist!

Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1 + x - 3y \geq 0 \quad (2) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 \geq 0 \quad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geq 1 \quad (4) \qquad ; \qquad 3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geq 1 \quad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

$$1 + x - 3y = 0 \quad (6) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 = 0 \quad (7)$$

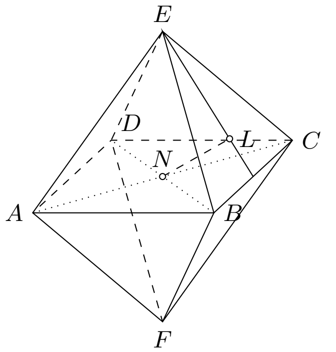
gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

als Lösung. Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 3 - 191033
Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d.h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel (d.h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt).
Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, dass die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1 : r_2$, wobei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

Der Mittelpunkt M eines Würfels, d.i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist a die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von M zu den Ecken, d.h. der Umkugelradius $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von M zu den Seitenflächen, d.h. der Inkugelradius, ist $r = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Weiter sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Oktaeder (siehe Bild).



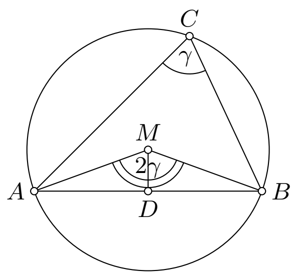
Sein Mittelpunkt N, d.i. der Schnittpunkt von AC, BD und EF, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist b die Kantenlänge des Oktaeders, also $BD = b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r = NB = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: $BCEN$ ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche BCE; für ihre Spitze N gilt $NB = NC = NE$, also handelt es sich um eine gerade Pyramide.

Der Fußpunkt L des Lotes von N auf, die Fläche BCE ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $LE = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.
Daraus und aus $NE = \frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, dass der Inkugelradius

$$r_2 = NL = \sqrt{NE^2 - LE^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

ist. Somit gilt $r_1 : r_2 = 1 : 1$.

Aufgabe 4 - 191034
Beweisen Sie folgende Aussage!
Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius r und hat $\angle ACB$ die Größe γ, so gilt $\sin\gamma = \frac{AB}{2r}$.



Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel $\angle AMB = 2\gamma$.
Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Es gilt $2\gamma \neq 180°$
In dem gleichschenkligen Dreieck ABM ist die Höhe MD zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist $\triangle ADM$ bei D rechtwinklig; es gilt $AD = \frac{1}{2}AB$ und $\angle AMD = \gamma$ in Falle $2\gamma < 180°$ bzw. $\angle AMD = 180° - \gamma$ im Fall $2\gamma > 180°$.

Wegen $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

$$\sin\gamma = \frac{AD}{AM} = \frac{AB}{2r}$$

2. Es gilt $2\gamma = 180°$. Dann ist $AB = 2r, \sin\gamma = \sin 90° = 1 = \frac{AB}{2r}$, w.z.b.w.

Aufgabe 5 - 191035
Von einer Funktion f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, dass folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1) = 1$.
(2) Für jedes $x \neq 0$ ist

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

(3) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Beweisen Sie, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, gilt:

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Aus (1) und (3) folgt

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 \quad ; \quad f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3$$
$$f(5) = f(3+2) = f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2) = 5 + 2 = 7$$

Aus (2) folgt daher

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$
$$f\left(\frac{3}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$
$$f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Aufgabe 6 - 191036
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Es gilt

$$(a^2+b^2+c^2) - 4a^2c^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2 \geq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = (a^2+b^2-c^2)^2$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2) - 4a^2c^2} \geq a^2 + b^2 - c^2$$
$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2 \cdot \sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)} + a^2 - 2ac + c^2 \geq 4a^2 + 4b^2$$
$$(\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2})^2 = 4(a^2 + b^2)$$

Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a \pm c)^2 + b^2 \geq 0$. Wegen $(a^2 + b^2) \geq 0$ und $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Lösungen der III. Runde 1979 übernommen aus [5]

7.21.4 IV. Runde 1979, Klasse 10

Aufgabe 1 - 191041
Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax} \qquad , \qquad g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen.
Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

Gegeben sind die reellen Zahlen a, b, c, d. Die Graphen von f und g haben genau dann den Punkt mit dem Koordinatenpaar (x_0,y_0) gemeinsam, wenn

$$y_0 = c \cdot 10^{ax_0} = 10^{bx_0+d} \qquad (1)$$

gilt.
I. (Analyse) Angenommen, es gäbe ein Paar (x_0, y_0), das (1) erfüllt.
Im Fall $c \leq 0$ ist dies wegen $10^{ax_0} > 0$, und $10^{bx_0+d} > 0$ unmöglich, und somit die Annahme falsch.
Im Fall $c > 0$ existiert $\lg c$, und aus (1) ergibt sich

$$10^{ax_0+\lg c} = 10^{bx_0+d} \qquad (2)$$

Hieraus folgt (wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion)

$$ax_0 + \lg c = bx_0 + d \qquad (3)$$

Im Unterfall $a \neq b$ folgt weiter

$$x_0 = \frac{d - \lg c}{a - b} \qquad (4)$$

so dass höchstens das Paar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$ mit x_0 aus (4) die Gleichungen (1) erfüllen kann.
Ist aber $a = b$ und auch noch $\lg c \neq d$, so stellt (3) einen Widerspruch dar, d.h., die eingangs gemachte Annahme ist falsch.

II. (Synthese, "Probe")
Im Fall $c > 0, a = b, \lg c = d$ ist die Gleichung (2) für beliebiges x_0 erfüllt, so dass die Paare (x_0, y_0), x_0 beliebig reell und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllen.
Im Fall $c > O, a \neq b$ stellen die Übergänge von der rechten Gleichung (1) über (2), (3) nach (4) äquivalente Umformungen dar, so dass das Paar (x_0, y_0), x_0 aus (4) und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$ die Gleichungen (1) erfüllt.

III. Ergebnis:
Im Fall $c \leq 0$ und im Fall $c > 0$, $a = b$, $ßlgc \neq d$ haben die Graphen von f und g keinen gemeinsamen Punkt.
Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ haben die Graphen von f und g die Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x, c \cdot 10^{ax})$, x beliebig reell, gemeinsam (die Graphen fallen zusammen).
Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ haben die Graphen von f und g genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$, x_0 aus (4), gemeinsam.

Aufgabe 2 - 191042
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + ... + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}$$

Wir formen die Gleichung in der Aufgabenstellung äquivalent um wie folgt

$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} = \frac{2}{234} + \frac{1}{236} + ... + \frac{2}{466}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} = \frac{1}{117} + \frac{1}{118} + ... + \frac{1}{233}$$

$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} = \frac{2}{118} + \frac{2}{120} + ... + \frac{2}{232}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} = \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + ... + \frac{1}{116}$$

Entsprechend ergeben sich folgende weitere Zwischenergebnisse

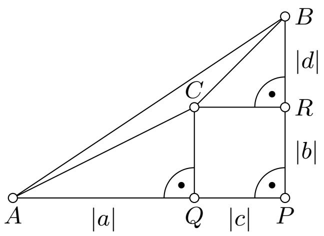
$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{58} = \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + ... + \frac{1}{58}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{29}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{14}$$
$$1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7}$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Die letzte Gleichung ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Aufgabe 3A - 191043A
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Für reelle Zahlen a,b,c,d kann man als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck APB mit Katheten der Längen $AP = |a| + |c <$ und $BP = |b < +|d|$ betrachten.
Q und R seien die Punkte auf den Katheten mit $AQ = |a|$ und $BR = |d|$. Der Punkt C ergänze das Dreieck QPR zu einem Rechteck (siehe Skizze).



Im Dreieck ABC gilt dann $AC + BC \geq AB$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(|a|+|c|)^2 + (|b|+|d|)^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad (1)$$

Wählt man entsprechen der Aufgabe $a = 2\cos x \cos y$. $c = 2\sin x \sin y$, $b = d = \sin(x-y)$, so gilt nach einem Additionstheorem

$$a + c = 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2\cos(x-y)$$

und nach dem trigonometrischen Pythagoras

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 4(\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)) = 4$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man die Behauptung.

Aufgabe 3B - 191043B
Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$ nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen lässt!

Da z die Summe dreier Quadratzahlen, nämlich $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$, sein soll, bietet es sich an, Teilbarkeitsbetrachtungen für solche Zahlen anzustellen. Dabei gelangt man zur Untersuchung der Restklassen von Quadratzahlen bezüglich 8 und erhält:
Falls $x \equiv 0 \pmod 8$ oder $x \equiv 4 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 0 \pmod 8$
Falls $x \equiv 1 \pmod 8$ oder $x \equiv 3 \pmod 8$ oder $x \equiv 5 \pmod 8$ oder $x \equiv 7 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$
Falls $x \equiv 2 \pmod 8$ oder $x \equiv 6 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 4 \pmod 8$

Also können die drei Summanden jeweils nur einen der Rest 0, 1 oder 4 lassen, wenn sie durch 8 dividiert werden. Dann kann systematisch probiert werden:

$$\begin{array}{cccc} 0+0+0=0 & 0+0+1=1 & 0+1+1=2 & 1+1+1=3 \\ & 0+0+4=4 & 0+1+4=5 & 1+1+4=6 \end{array}$$

dass die Summe $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$ in keinem Fall bei Division durch 8 den Rest 7 lassen kann.
Hiermit haben wir bereits unendlich viele Zahlen z, nämlich all jene, für die eine natürliche Zahl z' existiert, so dass $z = 8z' + 7$ ist, gefunden.

Aufgabe 4 - 191044
Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$.
Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r, die die Eigenschaft haben, dass ein Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

Die Lösung besteht aus zwei Teilen. Erstens ist r durch a, b und F auszudrücken, und zweitens ist die Existenz eines Dreiecks mit a, b, r und F nachzuweisen.

I. Angenommen, es existiert ein Dreieck ABC mit $a = BC, b = AC$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r. Nun gilt mit $c = AB$ und $\gamma = \angle ACB$: $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$ (siehe Bezirksolympiade Aufgabe 191034),

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad ; \qquad \cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma} \qquad (1)$$

und nach dem Kosinussatz $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ (2). Damit ergibt sich

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4F} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2}} \qquad (3)$$

II. Wegen $0 < F \leq \frac{1}{2}ab$ ist $a^2b^2 > a^2b^2 - 4F^2 \geq 0$ und

$$a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2} \geq a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4F^2} > a^2+b^2-2ab \geq 0$$

d.h., jeder der in (3) angegebenen r-Werte existiert. Da $0 \leq \frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} < 1$ gilt, existiert ein γ mit $0 < \gamma < \pi$ und

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} \qquad (4)$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen entsprechend (3) gewählt wird. Hierzu gibt es ein Dreieck ABC, in dem (2) mit $c = AB$ gilt. Wegen $\sin\gamma > 0$ und (4) folgt

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{a^2b^2-4F^2}{ab}} = 2\frac{F}{ab}$$

also ist $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Aus (3), (4) und (2) folgt

$$r = \frac{abc}{4F}$$

d.h., r (mit dem entsprechenden Vorzeichen) ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Damit haben genau die durch (3) angegebenen Längen r die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 5 - 191045
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2+5x+28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}$$

erfüllen!

Angenommen, eine reelle Zahl x habe die genannten Eigenschaften. Dann gilt $x^2+5x+28 \geq 0$, und, wenn man $y=\sqrt{x^2+5x+28}$ setzt, $y^2-24=5y$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $y=8$ und $y=-3$, so dass eine der Gleichungen

$$x^2+5x+4=40 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2+5x+4=-15$$

folgt. Von diesen beiden Gleichungen besitzt nur die erste reelle Lösungen, und zwar $x=-9$ und $x=4$. Also können höchstens diese beide Zahlen die geforderten Eigenschaften haben.
Sie habe diese Eigenschaften auch, denn es gilt

$$(-9)^2+5(-9)+28=64 \geq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 4^2+5\cdot 4+28=64 \geq 0$$

also existiert für diese Zahlen x die Wurzel $\sqrt{x^2+5x+28}$ und es gilt

$$(-9)^2+5(-9)+4=40=5\cdot 8=5\sqrt{(-9)^2+5(-9)+28} \qquad \text{bzw.}$$

$$4^2+5\cdot 4+4=40=5\cdot 8=5\sqrt{4^2+5\cdot 4+28} \qquad (2)$$

Daher erfüllen genau die Zahlen $x=-9$ und $x=4$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 6 - 191046
Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, dass jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt.
Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder.
Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r!

Die vier Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge $2r$.
Es sei Z der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d.h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge

$$h=\frac{2}{3}r\sqrt{6} \qquad (1)$$

Z teilt jedes Lot im Verhältnis $3:l$. (2)
Den Satz (2) kann man z.B. über Volumenbetrachtungen (bei Zerlegung des Tetraeders in vier kongruente Tetraeder) oder durch Anwendung des Strahlensatzes beweisen. (Man darf (2) auch als bekannt voraussetzen.)
Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders $ABCD$ sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $M_1M_2M_3M_4$ im Abstand r. Damit ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z. Es kommt nun darauf an, die Höhe h' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h zu ermitteln, weil damit dann auch das Volumen V' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h und nach (1) in Abhängigkeit von r zu berechnen ist.

Wir geben dafür zwei Möglichkeiten an:
1. $ABCD$ geht durch zentrale Streckung mit dem Streckenzentrum Z aus $M_1M_2M_3M_4$ hervor. Das Streckungsverhältnis K ist wegen (2) (mit (D)

$$K=\left(\frac{1}{6}r\sqrt{6}+r\right):\frac{1}{6}r\sqrt{6}=1+\sqrt{6} \qquad (3)$$

2. Wir verlängern die Kanten M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 bis zu den Durchstoßpunkten A', B', C' mit der Ebene durch A, B, C.
Das Tetraeder $M_4A'B'C'$ ist wegen der Parallelität der Ebenen durch A, B, C bzw. M_1, M_2, M_3 wieder regulär und hat die Höhe $h+r$. Wiederholen wir diesen Prozess noch dreimal (bzgl. der anderen Flächen), so erhalten wir schließlich das Tetraeder $ABCD$ mit

$$h' = h + 4r \qquad (4)$$

Mit (3) bzw. (4) berechnet man das Volumen

$$V' = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3$$

Lösungen der IV. Runde 1979 übernommen aus [5]

7.22 XX. Olympiade 1980

7.22.1 I. Runde 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201011
a) Geben Sie ein Paar (x, y) reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leq 100 \qquad (1)$$
$$5y - 5x > 0 \qquad (2)$$
$$y + x \geq 21 \qquad (3)$$

b) Beweisen Sie, daß es mehr als zehn verschiedene derartige Paare (x, y) gibt!

b) Ein Paar (x,y) erfüllt dann die Ungleichungen (1),(2),(3), wenn es die Ungleichungen

$$10y - 100 \leq x \quad (4) \qquad ; \qquad x < y \quad (5) \qquad ; \qquad 21 - y \leq x \quad (6)$$

erfüllt. Ferner hat eine Zahl y die Eigenschaft, dass es zu ihr Zahlen mit (4), (5), (6) gibt, wenn y die Ungleichungen

$$10y - 100 < y \qquad ; \qquad 21 - y < y$$

erfüllt. Dies ist der Fall, wenn die Ungleichungen

$$9y < 100 \qquad ; \qquad 21 < 2y$$

bestehen; dies wiederum trifft dann zu, wenn

$$\frac{21}{9} < y < \frac{100}{9}$$

gilt. Beispielsweise erfüllt $y = 11$ diese Ungleichungen. Für diesen Wert von y geht sowohl das System (4), (5) als auch das System (5), (6) über in $10 \leq x < 11$ (7).
Nun gibt es mehr als zehn verschiedene reelle Zahlen x, die (7) erfüllen. Die mit diesen Zahlen x gebildeten Paare $(x, 11)$ sind somit bereits mehr als zehn verschiedene Paare, die (1), (2) und (3) erfüllen.

Zu a) genügt es, ein Paar (x,y) anzugeben und nachzuweisen, dass es (1), (2),(3) erfüllt.

Aufgabe 2 - 201012
Beweisen Sie, dass $\frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2}$ für alle ganzen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$

a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar

b) eine ganze Zahl ist!

a) Es gilt

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2 \geq y^2$$

Wegen $y \neq 0$, also $y^2 > 0$, ist somit

$$x^2 - 2xy + 2y^2 \neq 0 \qquad \text{also} \qquad \frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2}$$

als reelle Zahl definiert.

b) Es gilt

$$(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$$

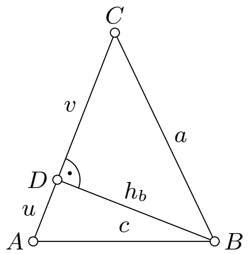
also ist wegen der Ganzzahligkeit von x und y auch

$$\frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2} = x^2 + 2xy + 2y^2$$

eine ganze Zahl.

Aufgabe 3 - 201013
Gegeben seien die Seitenlängen $a = \overline{BC} = 15cm$, $b = \overline{AC} = 14cm$, $c = \overline{AB} = 13cm$ eines Dreiecks ABC.

Berechnen Sie die Länge h_b der durch B verlaufenden Höhe und den Flächeninhalt F dieses Dreiecks!



Der Fußpunkt der genannten Höhe sei D; es sei $u = AD$, $v = CD$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_b^2 + v^2 = a^2 \quad (1) \qquad ; \qquad h_b^2 + u^2 = c^2 \quad (2)$$

Daraus folgt

$$v^2 - u^2 = a^2 - c^2 \qquad ; \qquad (v-u)(v+u) = 56 \text{ cm} \qquad (3)$$

Läge D nicht zwischen A und C, so wäre $v - u = b = 14$ cm; hieraus und aus (3) folgte $v + u = 4$ cm, so dass der Widerspruch $v + u < v|u$ entstünde. Daher liegt D zwischen A und C, es gilt

$$v + u = b = 14 \text{ cm} \qquad (4)$$

hieraus und aus (3) folgt $v - u = 4$ cm (5), aus (4) und (5) ergibt sich $2v = 18$ cm, $v = 9$ cm; hieraus und aus (1) folgt

$$h_b = \sqrt{a^2 - v^2} = 12 \text{ cm}$$

Damit erhält man auch $F = \frac{b \cdot h_b}{2} = 84 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 4 - 201014

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: "Musst dich nicht quälen!
's sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag' dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier'
des Abstand kleiner ist als vier"
(Er meint natürlich Zentimeter.)
"Und dies beweis mir mal!" sagt Peter:
"Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht."

Zehn Zentimeter ist das Kantenmaß
des Würfelkörpers ganz aus purem Glas.
Das heißt, es gibt dann immer 5^3
der Würfel von der Kantenlänge 2,
in die der Würfel sei zerlegt gedacht,
was in Gedanken keine Mühe macht.
Da 126 dargestellt
als $5^3 + 1$, weiß alle Welt,
dass zwei der Punkte letztlich man zum Schluss
im gleichen kleinen Würfel finden muss.

Nun fragt man nach dem Abstand maximal
in einem kleinen Würfel dieser Wahl.
Das muss die Raumdiagonale sein,
die nach Pythagoras man findet fein
als $2 \cdot \sqrt{3}$; und jetzt ist klar,
dass der Beweis schon fast vollendet war.
Denn $2 \cdot \sqrt{3}$ liegt unter 4,
und dies zu zeigen, überlass ich dir.

Lösungen der I. Runde 1980 übernommen von [5]

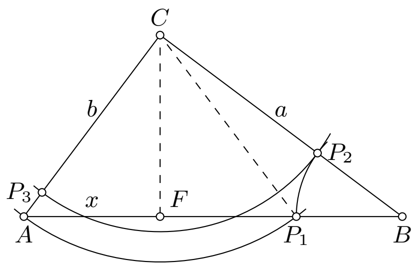
7.22.2 II. Runde 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201021
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $1+4\cdot 9^{2n}$ eine Primzahl ist!

Es gilt
$$1+4\cdot 9^{2n} \equiv 1+4\cdot(-1)^{2n} \equiv 1+4 \equiv 0 \pmod 5$$
Daher ist $1+4\cdot 9^{2n}$ nur für $n=0$ prim.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 2 - 201022
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $BC=4$ cm und $AC=3$ cm.
Der Kreis um C mit dem Radius AC schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.
Berechnen Sie das Verhältnis $AP_3 : CP_3$!



Wir lösen die Aufgabe allgemein. Aus den bekannten Sätzen am rechtwinkligen Dreieck (Satz des Pythagoras, Kathetensätze, Höhensatz) wird $CF=h=\frac{ab}{c}$. Der 1. Kreis um C hat den Radius b und schneidet AB auch in P_1. $\triangle ACP_1$ ist gleichschenklig, so dass $x=AF=FP_1$ gilt. x ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras zu $x=\sqrt{b^2-h^2}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und somit
$$BP_1 = c-2\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in P_2. Es wird
$$CP_2 = CP_3 = a-\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}-a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in P_3. Jetzt wird
$$AP_3 = a-CP_3 = -\frac{(a-b)\sqrt{a^2+b^2}-a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
und für das Verhältnis
$$\frac{AP_3}{CP_3} = -\frac{(a-b)\sqrt{a^2+b^2}-a^2+b^2}{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}-a^2+b^2}$$
Setzt man die gegebenen Größen $a=4$ und $b=3$ ein, wird für das Verhältnis $AP_3 : CP_3 = 2:13$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 201023
Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen so existiert, dass gilt:
$$(a+n)(b+n)(c+n)=1980$$
Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

Sei (a,b,c) ein Tripel natürlicher Zahlen, so dass für das gesuchte maximale n gilt

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

Dann muss $\min\{a,b,c\} = 0$ sein, denn sonst gäbe es zu $n' := n+1$ das Tripel $(a',b',c') = (a-1,b-1,c-1) \in \mathbb{N}^3$ mit $(a'+n')(b'+n')(c'+n') = 1980$.

Also ist n ein Teiler von $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Es gilt $n \geq 11$, denn $(0+11)(1+11)(4+11) = 1980$. Angenommen es wäre $n \geq 12$. Da 12^2 kein Teiler von 1980 ist, wäre dann

$$1980 = (a+n)(b+n)(c+n) \geq 12 \cdot 13 \cdot 13 = 2028$$

Somit muss $n = 11$ gelten.
Sei o.B.d.A. $a \leq b \leq c$. Insbesondere ist dann $a = 0$, also $(b+11)(c+11) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Da 11 kein Teiler von 180 ist, müssen $b,c \geq 1$ sein.
Die einzigen Teiler t von 180 mit der Eigenschaft, dass $t \geq 12$ und $\frac{180}{t} \geq 12$ ist, sind 12 und 15 (13 und 14 sind keine Teiler von 180 und für $t > 15$ ist $\frac{180}{t} < 12$).
Also muss $b + 11 = 12$ und $c + 11 = 15$ gelten.

Demnach ist (a,b,c) genau dann ein Tripel mit $(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$, wenn (a,b,c) eine der sechs Permutationen von $(0,1,4)$ ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 201024
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0 < z < 1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

Da $z > 0$ ist, kann umgeformt werden

$$z + \frac{1}{z} \geq 4 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1 \geq 4z \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 1 \geq 0$$

Die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 1 =$ hat die Lösungen

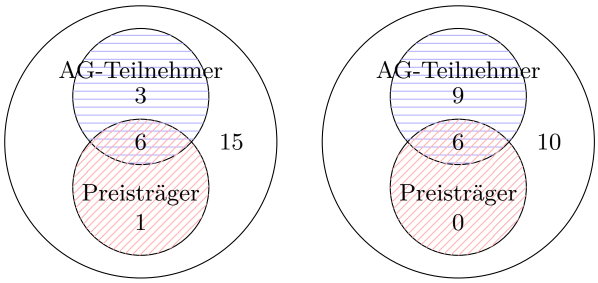
$$0 < z_1 = 2\sqrt{3} < 1 \qquad \text{und} \qquad 1 < z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Eine quadratische Funktion $y = z^2 - 4z + 1 = (z-2)^2 - 3$ hat ihre Nullstellen bei z_1 und z_2 und ist eine nach oben geöffnete Parabel. Damit hat die Funktion im Intervall $(z_1; 1)$ negative Funktionswerte.
Die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung sind damit alle reellen Zahlen $0 < z \leq 2 - \sqrt{3}$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

7.22.3 III. Runde 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201031
In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:
(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden "Preisträger" genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.
Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!



Jungen *Mädchen*

Aus dem Aufgabentext ergibt sich sofort für die Anzahl Mädchen M und die Anzahl Jungen J: $M = J = 25$. Für die Preisträger gilt, dass jeweils 6 Mädchen und 6 Jungen Preise errangen, die gleichzeitig AG-Mitglied sind. Da kein weibliches AG-Mitglied ohne Preis blieb, muss ein Junge aus einer AG keinen Preis errungen haben.
Eintragen der Daten in zwei Diagramme ergibt dann: 15 Jungen sind kein Preisträger und in keiner AG.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 201032
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y + x < 20 \qquad (1)$$
$$y - x < 4 \qquad (2)$$
$$y - ax \geq 6 \qquad (3)$$

Wir formen die Ungleichungen jeweils nach y um:

$$y < -\frac{1}{2}x + 10 \quad (1) \qquad ; \qquad y < x + 4 \quad (2) \qquad ; \qquad y \geq ax + 6 \quad (3)$$

Kombiniert man (1) mit (3), so muss gelten:

$$-\frac{1}{2}x + 10 > ax + 6 \qquad \to \qquad \left(a + \frac{1}{2}\right) x < 4 \qquad (4)$$

Kombiniert man (2) mit (3), so folgt:

$$x + 4 > ax + 6 \qquad \to \qquad (a - 1)x < -2 \qquad (5)$$

Wenn $\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und $(a-1)$ das gleiche Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall unendlich viele Lösungen, da ich Ungleichungen (4) und (5) jeweils durch die Klammerausdrücke teilen kann und die jeweils schärfere Bedingung die Lösungsmenge bestimmt.
Wenn $a = 1$ ist, ist Ungleichung (5) nicht erfüllbar.
Wenn $a = -\frac{1}{2}$, dann ist Ungleichung (4) auf jeden Fall erfüllt und es gibt unendlich viele Lösungen. Es ist neben $a = 1$ nur dann möglich, dass es keine Lösung gibt, wenn die beiden Klammerausdrücke

unterschiedliche Vorzeichen haben und die Ungleichungen (4) und (5) sich widersprechen. Ungleiche Vorzeichen liegen vor für $-\frac{1}{2} < a < 1$, denn dann ist $a + \frac{1}{2} > 0$ und $a - 1 < 0$. Somit gilt laut Ungleichung (4):

$$x < \frac{4}{a + \frac{1}{2}}$$

und laut Ungleichung (5):

$$x > \frac{-2}{a-1}$$

und in Kombination:

$$\frac{4}{a + \frac{1}{2}} > \frac{-2}{a-1}$$

Wir multiplizieren mit beiden Nennern. Das Produkt der beiden Nenner ist voraussetzungsgemäß kleiner als null, so dass sich die Richtung der Relation umdreht:

$$4(a-1) < -2\left(a + \frac{1}{2}\right) \qquad \to \qquad a < \frac{1}{2}$$

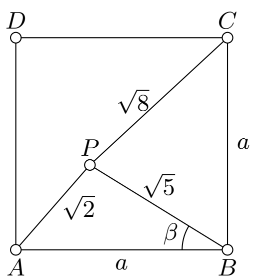
Für diese a widersprechen sich die Ungleichungen (4) und (5) nicht. Es gibt daher unendlich viele Lösungen für $a < \frac{1}{2}$ oder $a > 1$, dazwischen gibt es keine Lösung.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 201033

Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ϵ. Untersuchen Sie, ob es in ϵ ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{5}$ cm, $PC = \sqrt{8}$ cm gilt!

Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!



Die gesuchte Seitenlänge sei a. Mit dem Kosinusssatz erhält man im Dreieck ABP einerseits:

$$2 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \cos\beta \qquad \to \qquad (1) \qquad 2\sqrt{5}\, a\cos\beta = a^2 + 3$$

und andererseits im Dreieck PBC:

$$8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad \to \qquad 8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \sin\beta$$

$$(2) \qquad 2\sqrt{5}\, a\sin\beta = a^2 - 3$$

Quadriert man die Gleichungen (1) und (2) und addiert sie, dann folgt:

$$20a^2 = a^4 + 6a^2 + 9 + a^4 - 6a^2 + 9$$

$$a^4 - 10a^2 + 9 = 0$$

$$a^2 = 5 \pm \sqrt{25 - 9} \qquad \to \qquad a_1^2 = 9 \qquad a_2^2 = 1$$

Positive Seitenlängen vorausgesetzt, kann die Seitenlänge des Dreiecks entweder $a = 3$ oder $a = 1$ betragen (in letzterem Falle liegt P natürlich außerhalb des Quadrats).

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 201034

Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!

Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

Das Volumen ist

$$x = \frac{1}{3}a^2h$$

Die Oberfläche ist

$$x = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}\right) = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Somit muss gelten:

$$\frac{1}{3}a^2h = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Dabei müssen beide Seiten der Gleichung ganzzahlig sein. Man kann durch a teilen, und auch dann noch müssen beide Seiten ganzzahlig sein:

$$\frac{1}{3}ah = a + \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

(Begründung: a^2h muss durch 3 teilbar sein. Entweder a ist ein Vielfaches von 3, dann ist auch $\frac{1}{3}ah$ immer noch ganzzahlig, oder h ist durch drei teilbar, dann ist $\frac{1}{3}ah$ auf jeden Fall auch ganzzahlig). Wir lösen zunächst die Gleichung nach a auf:

$$\left(\frac{1}{3}h - 1\right)a = \sqrt{a^2 + 4h^2} \qquad \to \qquad \frac{1}{9}h^2a^2 - \frac{2}{3}ha^2 + a^2 = a^2 + 4h^2$$

$$a^2 = \frac{4h}{\frac{1}{9}h - \frac{2}{3}} = \frac{36h}{h-6} \qquad \to \qquad a = 6\sqrt{\frac{h}{h-6}}$$

Somit muss $\frac{h}{h-6}$ eine Quadratzahl sein. Offensichtlich muss $h > 6$ gelten, aber andererseits auch

$$\frac{h}{h-6} \geq 4$$

denn $\frac{h}{h-6} = 1$ ist nicht möglich. Daraus folgt: $h \geq 4h - 24$ und $h \leq 8$.
Daher kommen für h nur die Zahlen 7 und 8 in Frage, wobei für $h = 7$ keine Quadratzahl vorliegt. Somit gilt $h = 8$, und durch Einsetzen erhält man $a = 12$ und $x = 384$. Das einzige Tripel, was die Bedingungen erfüllt, lautet also $(a; h; x) = (12; 8; 384)$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 201035
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 3$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $x_n > 2$ gilt!

Für den Nachweis wird hier folgende Aussage verwendet:
Für eine positive reelle Zahl a gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$, wobei Gleichheit nur im Fall $a = 1$ gilt.

Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion. Für $k = 1$ gilt die Behauptung, da $a_1 = 3 > 2$ nach Aufgabenstellung ist.
Angenommen die Aussage gelte für n, dann ist $x_n > 2$. Für $n + 1$ wird dann

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{\frac{x_n}{2}}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{x_n}{2} > 0$ und $\neq 1$ ist, wird nach der Hilfsaussage $\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} > 2$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

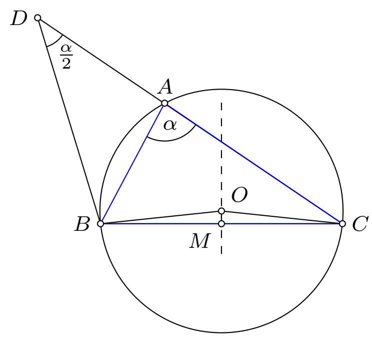
Anmerkung: Die Hilfsaussage kann einfach bewiesen werden.

$$\forall a > 0: \; a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn der Klammerausdruck 0, d.h., $a = 1$ ist.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster und weird

Aufgabe 6 - 201036
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ die Bedingungen $a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$ erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, dass alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!
Hinweis:
In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als "einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgendeiner anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.



Analyse:
Ist die Winkelsumme $\beta + \gamma$ bekannt, so ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz für den Winkel $\alpha = 80°$. Damit sind von dem gesuchten Dreieck die Stücke Seite a, die Seitensumme $b + c$ und der Winkel α bekannt.

Angenommen das Dreieck ABC ist gegeben, so sei der Punkt D die Verlängerung von CA, so dass $|CD| = c + b$ ist. Dann ergibt sich im Dreieck ABD der Winkel δ bei D zu

$$\delta = \frac{1}{2}(180° - (180° - \alpha)) = \frac{1}{2}\alpha$$

Der Winkel α ist Peripheriewinkel des Umkreises von ABC über der Sehne BC. Damit ist der Punkt A Schnittpunkt des Umkreisbogens BC mit der Strecke CD.

Konstruktion:
1. Das Dreieck BCD ist somit nach dem Kongruenzsatz SSW (Seiten a und $b + c$, Innenwinkel $\frac{\alpha}{2}$) konstruierbar.
2. Über BC wird ein gleichschenkliges Dreieck BCO konstruiert, für das der Winkel $\angle BAO = 10°$ ist. Damit wird der Winkel $\angle AOB = 160°$. Der Kreis um O mit dem Radius OA schneidet dann die Strecke CD außer in C in dem gesuchten Punkt A.

Der 1. Konstruktionsschritt ist im Sinne der Aufgabenstellung nach Kongruenzsatz SSW eindeutig ausführbar.
Die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks ABC ist nach dem 2. Konstruktionsschritt ebenfalls eindeutig ausführbar.
Als Schnittpunkt des Umkreises mit der Strecke CD entsteht genau ein Punkt A. A liegt dann auf dem Kreis um O mit einem Peripheriewinkel gleich dem halben Zentriwinkel $\angle AOB$. Damit ist $\alpha = 80°$.
Das Dreieck ABC ist damit, bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

7.22.4 IV. Runde 1980, Klasse 10

Aufgabe 1 - 201041
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und b für die gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b^2$$

Zum Beweis kann die Methode der vollständigen Induktion herangezogen werden.
Für $n = 2$ gilt wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ die Aussage mit $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b = 5$. Sei nun k eine natürliche Zahl, so dass die Aussage für $n = k$ gilt, d.h., es gebe von Null verschiedene natürliche Zahlen c_1, c_2, ..., c_k, d mit $d > l$ und

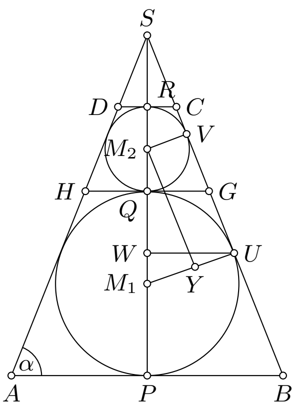
$$c_1^2 + c_2^2 + ... + c_k^2 = d^2 \qquad (1)$$

Wir können jedenfalls $k = 2$ setzen. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Multiplikation mit 2^2 die Beziehung

$$(2c_1)^2 + (2c_2)^2 + ... + (2c_k)^2 = (2d)^2 = (d^2 + 1)^2 - (d^2 - 1)^2$$

Setzt man $a_1 = 2c_1$, ..., $a_k = 2c_k$, $a_{k+1} = d^2 - 1$ und $b = d^2 + 1$ so erhält man von Null verschiedene Zahlen $a_1, ..., a_{k+1}, b$ mit $b > 1$ und der Eigenschaft $a_1^2 + ... + a_{k+1}^2 = b^2$, d.h., die Aussage gilt auch für $n = k + 1$.
Durch den Beweis für $n = 2$ und den Schluss von $n = k$ auf $n = k + 1$ ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n, die ≥ 2 sind, bewiesen.

Aufgabe 2 - 201042
Gegeben sei eine Länge r_1.
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $CD < AD = AB = BC$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, dass sie einander von außen berühren und dass k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt!
Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!



I. Angenommen, ein Trapez $ABCD$ mit den Kreisen k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$) habe die geforderten Eigenschaften.
Gilt $AD \parallel BC$, so ist $ABCD$ wegen $AD = BC$ ein Parallelogramm im Widerspruch zu $AB > CD$. Also gilt $AB \parallel CD$ und das Trapez ist wegen $AD = BC$ gleichschenklig.
Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich in S schneiden, liegen M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden m des $\angle ASB$, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von AB und CD ist.
Ferner liegt auch Q (der Berührungspunkt von k_1 und k_2) auf m. Die Parallele zu AB durch Q ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1 und k_2, die AD in H und BC in G schneidet.

Das Trapez $HGCD$, dessen Seiten von k_2 berührt werden, geht durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez $ABGH$ über, dessen Seiten von k_1 berührt werden.

Es sei $x = r_2 : r_1$m $a = AB$, $b = HG$, $C = DC$. Es ist $x = DC : HG = HG : AB$, also $b = ax$, $c = bx = ax^2$. U und V seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC.
Es gilt

$$a = AB = BC = BU + UG + GV + VC = BP + QG + QG + CR =$$

nach dem über de Gleichheit der Tangentenabschnitte

$$= \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$$

Diese Gleichung wird wegen $x > 0$ nur von $x = \sqrt{2} - 1$ erfüllt. Also kann das Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen genügen, wenn gilt:

$$r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$$

II. Konstruktionsbeschreibung
(1) Aus r_1 konstruiere man $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$.
(2) Man konstruiere die sich von außen in Q berührenden Kreise k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$).
(3) Man konstruiere die beiden äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2.
(4) Die Gerade durch M_1 und M_2 schneide die Kreise k_1, k_2 zusätzlich in R und P. Man errichte die Senkrechten auf dieser Geraden in R und P. Diese schneiden t und t' in A, D und B, C.
$ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Nach Konstruktion ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AD = BC$. Die Kreise k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2 < r_1$ ist $CD < AB$. Wie in I. kann man herleiten, dass mit $x = r_2 : r_1$ die Gleichung $BC = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$ gilt.
Da nach Konstruktionsschritt (1) $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 2$, und es folgt $BC = a = AB$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig ausführbar. (2) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, und (3) und (4) sind es anschließend auch. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 3A - 201043A
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \log_y(5 - \sqrt{24}) \qquad (1)$$

$$y - x = 2 \qquad (2)$$

Angenommen, ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$ erfülle (1) und (2). Wegen

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24} \quad \text{folgt dann} \quad x^2 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Da $\sqrt{3} \neq \sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq 1$ ist, ist $\log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ definiert und ungleich Null. Daraus folgt $x^2 = 4$. Wegen (2) und $y > 0$ ist $x = y - 2 > -2$, also muss $x - 2$ sein. Nach (2) ergibt sich $y = 4$. Folglich kann nur das Paar $(x; y) = (2; 4)$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Wegen

$$2 \cdot \log_4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5 - \sqrt{24})$$

und $4 - 2 = 2$ erfüllt es diese beiden Gleichungen tatsächlich. Daher ist genau das Paar $(2; 4)$ das gesuchte.

Aufgabe 3B - 201043B
Beweisen Sie, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $625 + 4(9^{2n})$ eine Primzahl sein kann!

Der Versuch, eine Produktdarstellung mit Hilfe binomischer Formeln zu erreichen, führt auf folgendes: Für jede natürliche Zahl n gilt

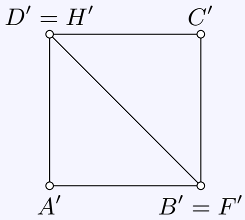
$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= [(5 + 3^n)^2 + 3^{2n}] - [(5 - 3^n)^2 + 3^{2n}] \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass beide Faktoren größer als 1 sind. Es gilt jedoch

$$(5 + 3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5 + 3^0)^2 > 1$$

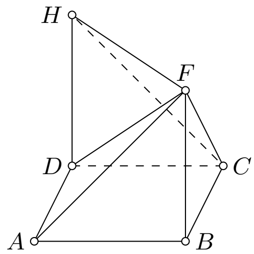
und $5 \neq 3^n$, also $(5 - 3^n)^2 > 0$, $(5 - 3^n)^2 + 3^{2n} > 0 + 3^0 = 1$, womit auch dieser Teil der Lösung erbracht ist: Die Zahl $625 + 4 \cdot (9^{2n})$ ist in zwei ganzzahlige Faktoren, die beide größer als 1 sind, zerlegbar und ist somit keine Primzahl.

Aufgabe 4 - 201044

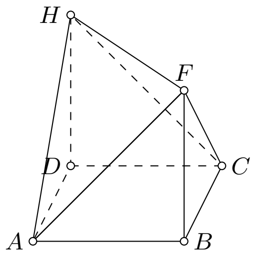


Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriss haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.)
Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrissebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.
Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrissebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.

Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$) dar!
Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!



I



II

Der Körper I (siehe Bild) erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da er genau sechs Ecken (A, B, C, D, F, H) und den angegebenen Grundriss besitzt. Letzteres folgt aus der Lage von AF über AB, von HF und DF über BD, von FC über BC, von HC über CD sowie die Lage von F über B und der von H über D.
Damit wird jede Kante entweder auf einer der Seiten des Quadrates $ABCD$, aus dessen Diagonale BD oder - bei senkrechter Lage zur Grundrissebene - als Punkt auf A, B, C oder D im Grundriss abgebildet.
Nach Konstruktion liegt F (bzw. H) im Abstand a über B (bzw. D). Der Körper I ist auch - wie gefordert - ebenflächig begrenzt, da alle Seitenflächen Dreiecke sind und die Fläche $ABCD$ nach Voraussetzung eben ist.
Analoge Betrachtungen zeigen, dass auch der Körper II den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es ist noch zu zeigen, dass die Körper I und II unterschiedliches Volumen haben, und es sind diese Volumina zu berechnen.
Ergänzt man den Körper I durch die Pyramide $AFDH$, so erhält man offensichtlich den Körper II, damit unterscheiden sich die Volumina V_I und V_{II} der Körper um das Volumen V_p der Pyramide $AFDH$ und sind damit auch unterschiedlich.

$$V_{II} = V_I + V_P \tag{1}$$

Den Körper I kann man sich aus den drei Pyramiden $ABDF$, $DBCF$ und $DCHF$ zusammengesetzt denken. Ergänzt man den Körper I zu einem Würfel mit der Kantenlänge a, so erkennt man, dass für jede dieser Pyramiden als Grundfläche eine halbe Seitenfläche des Würfels und als Höhe die Kantenlänge a gewählt werden kann. Das gilt auch für die Pyramide $AFDH$ (mit der Grundfläche ADH). Damit gilt

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{6}a^3 \tag{2}$$

Daher folgt

$$V_I = \frac{1}{2}a^3 \qquad \text{und} \qquad V_{II} = \frac{2}{3}a^3$$

Aufgabe 5 - 201045
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 5$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $4 \leq x_n \leq 5$ gilt!

Die endliche Folge $\{x_1, ..., x_{1000}\}$ ist induktiv vorgegeben, indem das erste Glied und jedes weitere Glied mit Hilfe des vorhergehenden angegeben wird:

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

($n = 1, ..., 999$). Diese Vorgabe in der Aufgabe setzt stillschweigend voraus, dass stets $x_n \neq 0$ ist.
Zum Beweis der Behauptung $4 \leq x_n \leq 5$ für alle $n = 1, ..., 1000$ bietet sich damit die Methode der vollständigen Induktion an, wobei dann diese Ungleichung sogar für jede natürliche Zahl n bewiesen werden kann.

a) Beweis von $x \geq 4$.
Wir zeigen die Verschärfung $x_n > 4$. Für $n = 1$ gilt diese Behauptung wegen $x_1 = 5 > 4$. Es sei jetzt $x_k > 4$. Dann ergibt sich für das folgende Glied x_{k+1} ebenfalls

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 16}{2x_k} = \frac{(x_k - 4)^2}{2x_k} + 4 > 4$$

Demnach gilt $x_n > 4$ für alle natürlichen Zahlen.

b) Beweis von $x_n \leq 5$.
Aus $x_n > 4$ folgt $x_n^2 + 16 < 2x_n^2$ und damit weiter

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} < x_n$$

d.h., die Folgt x_n ist streng monoton fallend. Wegen $x_1 = 5$ gilt dann sogar $x_n < 5$ für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Aufgabe 6 - 201046
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$y > x^2 - 2x + c \quad (1) \qquad ; \qquad y < x + c \quad (2) \qquad ; \qquad y < -2x + 1 \quad (3)$$

Angenommen, für ein reelles c habe das System (1), (2), (3) eine Lösung (x, y). Dann ergibt sich aus (1) und (3) die Beziehung

$$x^2 - 2x + c < -2x + 1 \qquad \text{d.h.} \qquad c < 1 - x^2$$

und somit $c < 1$. Eine Lösung kann daher höchstens für $c < 1$ existieren. Umgekehrt hat das System (1), (2), (3) für jedes c mit $c < 1$ eine Lösung, z.B. eine mit $y = c$. Für diesen Wert von y ist es nämlich äquivalent zu

$$x^2 - 2x < 0 \quad (4) \qquad ; \qquad 0 < x \quad (5) \qquad ; \qquad c < -2x + 1 \quad (6)$$

(4) und (5) sind äquivalent mit den Ungleichungen $0 < x < 2$ (7) und (6) ist äquivalent mit

$$x < \frac{1 - c}{2} \tag{8}$$

Wegen $c < 1$ gilt $\frac{1-c}{2} > 0$, und demnach sind (7) und (8) durch reelle x erfüllbar.
Das System (1), (2), (3) hat folglich genau für alle reellen Zahlen c, die kleiner als 1 sind, eine Lösung.

Lösungen der IV. Runde 1981 übernommen aus [5]

7.23 XXI. Olympiade 1981

7.23.1 I. Runde 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211011
Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.

Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, dass er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.

Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

Die mit dem PKW zurückgelegte Strecke sei x km, die mit dem Zug zurückgelegte Strecke y km. Die Gesamtstrecke war dann $(x+y)$ km lang, und es gilt

$$x + \frac{y}{5} = \frac{x+y}{3} \quad (1) \qquad \text{sowie} \qquad \frac{x+y}{2} = x + (x+20) \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$15x + 3y = 5x + 5y \quad ; \quad y = 5x \tag{3}$$

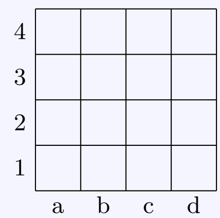
aus (2) folgt

$$x + y = 2x + 2x + 40 \quad ; \quad y = 3x + 40 \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4) folgt $5x = 3x + 40$ und daraus $x = 20$. Nach (3) ergibt sich damit $y = 100$.

Der Reisende legte folglich mit dem PKW 20 km und mit dem Zug 100 km zurück, Die Gesamtstrecke betrug also 120 km.

Aufgabe 2 - 211012



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... , $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

I. Angenommen, eine Markierung erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann folgt:

Falls von den Feldern a1, a4, d1, d4 keines markiert wäre, so wäre eines der Felder b3, c2 und eines der Felder b2, c3 markiert, da jede Diagonale ein markiertes Feld enthalten müsste. Dann lägen jedoch diese beiden markierten Felder in derselben Zeile oder in derselben Spalte, was beides den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Also ist von den Feldern a1, a4, d1, d4 eines markiert. Durch eine Drehung kann etwa erreicht werden, dass a4 markiert ist.

Auf der Diagonalen a1 - d4 muss nun genau eines der Felder b2, c3 markiert sein. Man kann erreichen, dass c3 markiert ist, indem man, wenn dies nicht zutrifft, die Spiegelung an der Diagonalen a4 - d1 durchführt. (Bei dieser Spiegelung bleibt das markierte Feld a4 an seinem Platz.)

In der b-Spalte kann nun nur noch das Feld b1 markiert sein; als viertes markiertes Feld kommt schließlich nur noch d2 in Frage.

Also kann eine Markierung nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch Drehung, Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen aus der Markierung a4, b1, c3, d2 hervorgeht.

II. Umgekehrt ist ersichtlich, dass bei dieser Markierung in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Mit I. und II. ist geneigt: Es gibt bis auf Drehungen und Spiegelungen genau eine Markierung mit den verlangten Eigenschaften, nämlich die Markierung a4, b1, c3, d2 (oder eine im Sinne der Aufgabenstellung nicht davon verschiedene).

Aufgabe 3 - 211013
Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff des Durchmessers definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine "längste Strecke" als "Durchmesser" bezeichnen.[1)]

Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann lässt sich beweisen, dass für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geq \overline{XY}$ ist.

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!

(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

[1)] Das heißt man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, daß für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der "Durchmesser" von F.

Eine Dreiecksfläche F wird nur dann durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen zerlegt, wenn diese Gerade durch einen Eckpunkt von F geh , da andernfalls nur Zerlegungen entstehen können, bei denen eine Teilfläche ein Viereck ist.

Zu (1): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB = AC \geq BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB = AC$. Bei jeder Zerlegung von F in zwei Dreiecksflächen F', F'' hat mindestens eine dieser beiden Dreiecksflächen noch eine Seite mit der Länge d als längste Seite; d.h., sie hat denselben Durchmesser d wie F.

Also ist die Aussage (1) wahr.

Zu (2): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB > AC$ und $AB > BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB$. Eine Gerade, die durch C und einen Punkt P zwischen A und B geht, zerlegt F in zwei Dreiecksflächen F', F'', für die folgendes gilt:

Mindestens einer der Winkel $\angle APC, \angle BPC$ ist größer oder gleich 90°, also in den Dreiecken APC bzw. BPC der größte Winkel. Daher gilt mindestens eine der Ungleichungen $AC > PC$, $BC > PC$ und somit wegen $AB > AC$ und $AB > BC$ jedenfalls $AB > PC$.

Ferner gelten die beiden Ungleichungen $AB > AP$ und $AB > BP$. Also sind in den beiden Dreiecken APC, BPC alle Seitenlängen kleiner als $d - AB$.

Folglich hat jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser als F. Somit ist auch Aussage (2) wahr.

Aufgabe 4 - 211014

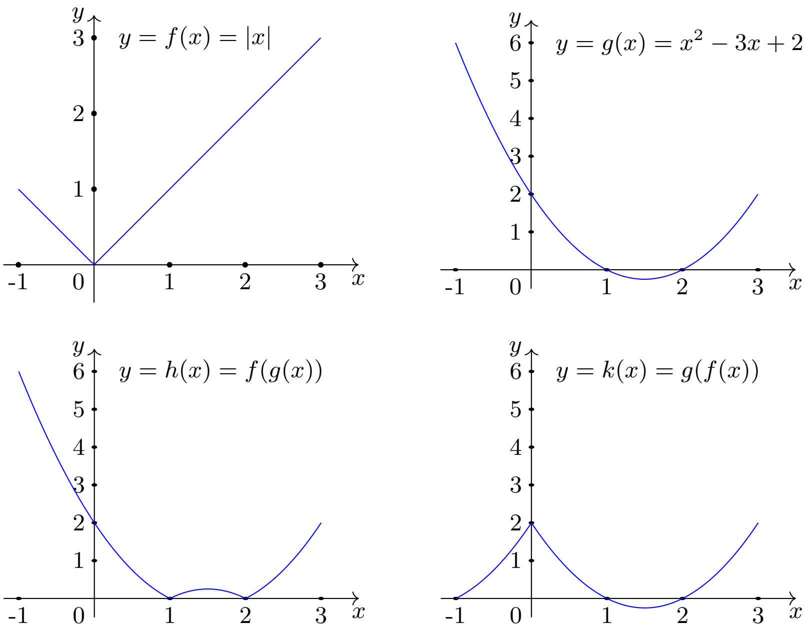
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ durch $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ definiert sind!

b) Im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ seien nun durch $h(x) = f(g(x))$, $k(x) = g(f(x))$ zwei weitere Funktionen h und k definiert.

Hinweis: Man erhält also z.B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, dass man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f(g(x)) = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g(f(-1)) = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, dass man auf Teilstücke des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

a) siehe Abbildungen



b) Es ist

$$h(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } g(x) \geq 0 \text{ ist} \\ -g(x) & \text{, falls } g(x) < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von h aus dem von g dadurch, dass man die unterhalb der x-Achse gelegenen Teilstücke des Graphen von g durch diejenigen Kurven ersetzt, die sich ergeben, wenn man diese Teilstücke an der x-Achse spiegelt.
Für $g(x) = x^2 - 3x + 2$ betrifft dies genau das eine Teilstück im Intervall $1 < x < 2$.

Ferner ist

$$k(x) = g(|x|) = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } x \geq 0 \text{ ist} \\ g(-x) & \text{, falls } x < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von k aus dem von g dadurch, dass man das zum Intervall $-1 < x < 0$ gehörende Teilstück des Graphen von g durch diejenige Kurve ersetzt, die sich ergibt, wenn man das zum Intervall $0 < x < 1$ gehörende Teilstück des Graphen von g an der y-Achse spiegelt.

Lösungen der I. Runde 1981 übernommen von [5]

7.23.2 II. Runde 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211021
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB. Für den Höhenfußpunkt D gilt $AD < DB$.
In welchem Verhältnis $AD : DB$ teilt er die Hypotenuse?

Für die Längen $AB = c$, $DC = h$, $AD = q$, $DB = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \quad (1) \quad \text{sowie} \qquad p + q = c \quad (2) \quad \text{und} \quad q < p \quad (3)$$

Ferner gilt nach dem Höhensatz $pg = h^2 \quad (4)$. Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2 \qquad (5)$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$p(c-p) = \frac{4}{25}c^2$$
$$p_{1,2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25-16)}$$
$$= \frac{c}{10}(5 \pm 3)$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$ oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{4}{5}c$. Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $AD : DB = q : p = 1 : 4$.

Aufgabe 2 - 211022
Über das Ergebnis eines 100 m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:
(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.
(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.
(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.
(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, dass
a) alle vier Aussagen (1) bis (4),
b) genau drei dieser Aussagen,
c) genau zwei dieser Aussagen,
d) genau eine dieser Aussagen,
e) keine dieser Aussagen
gleichzeitig wahr sind!

a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (l) falsch. Daher ist es nicht möglich, dass alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, dass die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A, B, C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) $BAxCxx$ (genau (1), (2) und (4) sind wahr),
zu c) $xAxCBx$ (genau (2) und (4) sind wahr),
zu d) $BACxxx$ (genau (1) ist wahr)
zu e) $CAxBxx$ (alle Aussagen sind falsch).

Aufgabe 3 - 211023
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die $x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es $(x-y)(x+y) = l98l$ (1) erfüllt.
Wegen der Primzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen $x-y$ und $x+y$ genau die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, dass nur die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen $x-y$ bzw. $x+y$ ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, dass sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

$x-y$	$x+y$	x	y
1	1981	991	990
-1	-1981	-991	-990
1981	1	991	-990
-1981	-1	-991	990
7	283	145	138
-7	-283	-145	-138
283	7	145	-138
-283	-7	-145	138

Daher haben genau die Paare $(991; 990)$, $(-991; -990)$, $(991; -990)$, $(-991; 990)$, $(145; 138)$, $(-145; -138)$, $(-145; 138)$, $(145; -138)$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 4 - 211024
Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.
Beweisen Sie, dass die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF. Wegen
$$\angle FCA + \angle ACB + \angle BCE = 45° + 90° + 45° = 180°$$
liegt C auf der Geraden durch E und F.
Die Mittelpunkte von BC, CA, AB seien U, V bzw. W. Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes, von Thales durch C, ist also der Umkreis des Dreiecks ABC. Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC.
Somit ist $WUCV$ ein Rechteck; E, F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV, und es gilt:
$$WE = WU + UE = WU + UC = WV + VC = WV + VF = WF \qquad (1)$$
Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G. Dann gilt
$$\angle FWG = 90° - \angle AWV = 90° - \angle WBU = \angle EWB \qquad (2)$$
und $\angle GFW = 45° = \angle BEW$ (3).
Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle FGW \cong \triangle EBW$, also $WG = WB$. Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E, F, w.z.b.w.

Lösungen der II. Runde 1981 übernommen aus [5]

7.23.3 III. Runde 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211031
Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.
(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

(2) bedeutet, dass die Gleichung $4(a+b+c) = abc$ zu lösen ist. Wegen (1) ist $abc = 4(a+b+c) \leq 12c$, also $ab \leq 12$ und damit $a \leq 3$.

Fall 1: $a = 1$. Dann ist die Gleichung $bc = 4(1+b+c)$ mit $b \leq 12$ zu lösen.
Fall 1.1: $b = 4$. Dann erhält man $4c = 4(5+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 1.2: $b \neq 4$. Es gilt $c = \frac{4(b+1)}{b-4}$. Wegen $ggT(b+1, b-4) = ggT(b-4, 5) \in \{1, 5\}$ kann c höchstens dann eine natürliche Zahl sein, wenn $b-4$ ein Teiler von $4 \cdot 5 = 20$ ist. Tatsächlich liefern die verbleibenden Möglichkeiten $8 = 12 - 4 \geq b - 4 = 1, 2, 4, 5$ die Lösungen $(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9)$ und $(1,9,8)$, wobei die letzte wegen $c < b$ entfällt.

Fall 2: $a = 2$. Dann ist die Gleichung $2bc = 4(2+b+c)$ bzw. $bc = 2(2+b+c)$ mit $2 \leq b \leq 6$ zu lösen.
Fall 2.1: $b = 2$. Dann ist $2c = 2(4+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 2.2: $b \neq 2$. Man erhält $c = \frac{2(b+2)}{b-2} = 2 + \frac{8}{b-2}$, was nur für $b-2|8$ natürliche Zahlen ergibt. Wegen $4 = 6 - 2 \geq b - 2$ erhält man für $b - 2 = 1, 2, 4$ die Lösungen $(2,3,10), (2,4,6)$ und $(2,6,4)$, wobei die letzte wieder wegen $c < b$ entfällt.

Fall 3: $a = 3$. Dann ist die Gleichung $3bc = 4(3+b+c)$ mit $3 \leq b \leq 4$ zu lösen.
Fall 3.1: $b = 3$. Dann ist $9c = 4(6+c)$ bzw. $5c = 24$, was keine Lösung in natürlichen Zahlen besitzt.
Fall 3.2: $b = 4$. Dann ist $12c = 4(7+c)$ bzw. $3c = 7+c$, also $c = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Insgesamt erhalten wir also die folgenden fünf Lösungstripel:

$$L = \{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\} \; .$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 211032
Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)!
Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AG}{BG} = 1$$

Es seien a, b und c die Längen der Lote von A, B und C auf g. Da diese Lote alle senkrecht zu g und damit untereinander parallel sind, können wir die Strahlensätze anwenden und erhalten

(von E aus gesehen) $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{b}{c}$,

(von F aus gesehen) $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{c}{a}$ und

(von G aus gesehen) $\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{a}{b}$, also

$$\frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} \cdot \frac{|AG|}{|BG|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \; , \square.$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 211033
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6{,}6$$
$$[2a] + 3b = 11{,}9$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g+1$ gilt.
So ist z.B. $[4{,}01] = 4$, da $4 \leq 4{,}01 < 5$ gilt; $[7] = 7$, da $7 \leq 7 < 8$ gilt; $[-\pi] = -4$, da $-4 \leq -\pi < -3$ gilt.

Wegen $[a] \in \mathbb{Z}$ ist nach der ersten Gleichung der Nachkommaanteil von b entweder 0,3 oder 0,8, da nur für diese $2b$ den Nachkommaanteil 0,6 besitzt. Aber nur die erste Möglichkeit führt nicht zu einem Widerspruch mit der zweiten Gleichung, da der Nachkommaanteil von $3b$, und damit auch von $11{,}9 = [2a] + 3b$, bei der zweiten Möglichkeit wegen $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ also 0,4 betragen würde, was ein Widerspruch ist.

Also gilt $b = [b] + 0{,}3$ und die beiden Gleichungen gehen über in $[a] + 2[b] = 6$ sowie $[2a] + 3[b] = 11$.
Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich des Nachkommaanteils von a:

1. Fall: Es ist $0 \leq a - [a] < \frac{1}{2}$. Dann ist $0 \leq 2a - 2[a] < 1$, also $2[a] \leq 2a < 2[a]+1$ und damit $[2a] = 2[a]$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a];[b]) = (4;1)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a;b) = (4+c;1{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.

2. Fall: Es ist $\frac{1}{2} \leq a - [a] < 1$. Dann ist $1 \leq 2a - 2[a] < 2$, also $2[a] + 1 \leq 2a < 2[a] + 2$ und damit $[2a] = 2[a] + 1$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 1 + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a];[b]) = (2;2)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a;b) = (2{,}5+c;2{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.
Zusammenfassend ergibt sich also folgende Lösungsmenge:

$$\left\{(a,b) \middle| \exists 0 \leq c \leq \frac{1}{2} : (a = 4 + c \wedge b = 1{,}3) \vee (a = 2{,}5 + c \wedge b = 2{,}3)\right\}.$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 211034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 1$$

Offensichtlich kann x nicht 0 sein, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Analog muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten, da für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sofort $x^2 > \frac{1}{3}$ und damit $1 - 3x^2 < 1 - 1 = 0$ folgen würde, sodass der Radikand negativ und die Wurzel nicht mehr definiert wäre.

Sei also im Folgenden $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Dann ist $1 - 3x^2 < 1$, also $\sqrt{1-3x^2} < 1$ und damit $1 - \sqrt{1-3x^2} > 0$. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x. Ist dieser negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, sodass wir ein erstes Lösungsintervall erhalten, nämlich $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$.

Ist dagegen $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von

1 äquivalent zu $-\sqrt{1-3x^2} < x-1$ bzw. $\sqrt{1-3x^2} > 1-x$. Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu $1-3x^2 > (1-x)^2 = 1-2x+x^2$ bzw. $0 > -2x+4x^2 = (-2x)(1-2x)$.
Wegen $x > 0$ ist $-2x < 0$, die Ungleichung also äquivalent zu $1-2x > 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, sodass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).
Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ die Ungleichung erfüllen.

Aufgabe gelöst von cyrix

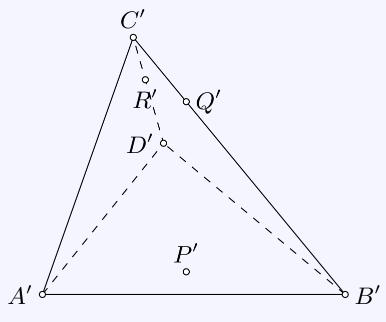
Aufgabe 5 - 211035
In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:
"Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen: Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile u.s.w.
Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?"
Als Lösung musste bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.
Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

Mit jeder Teilung erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um $n-1$. Nach t Teilungen sind es also $n+t(n-1)$ Papierstücke.
Gesucht sind also alle n mit $1 \leq n < 1976$, für die ein $t \in \mathbb{N}$ existiert mit $n+t(n-1) = 1976$.
Wegen $1976 = n+t(n-1) = (n-1)(t+1)+1$, ist dies genau dann der Fall, wenn $n-1 < 1975$ ein Teiler von $1977 = 3 \cdot 659$ ist (659 ist prim), also genau dann, wenn $n-1 \in \{1,3,659\}$.
Also ist so eine Zerlegung möglich, genau dann, wenn $n \in \{2,4,660\}$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 211036
Die Eckpunkte A,B,C,D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A',B',C',D' bzw. P' haben.
Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R'. Die Ebene durch P,Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211036



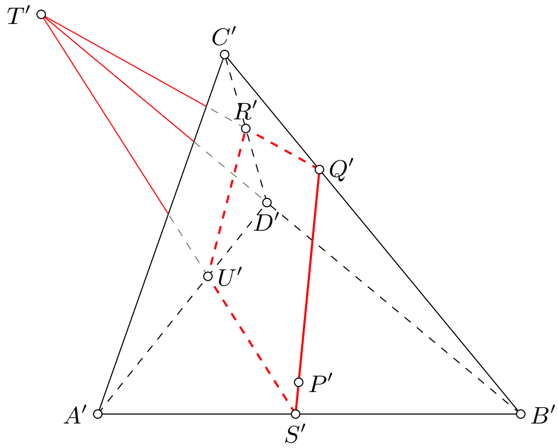
I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert die Gerade durch Q', P' und bringt sie zum Schnitt S' mit $A'B'$.

(2) Man konstruiert die Gerade durch R', Q' und bringt sie zum Schnitt T' mit der Geraden durch B', D'.

(3) Man konstruiert die Gerade durch S', T' und bringt sie zum Schnitt U' mit $A'D'$.

(4) Man konstruiert die Strecke $R'U$'.



II. Beweis, dass die so konstruierte Figur $R'Q'S'U'$ die Projektion der Schnittfigur ist:
Die Gerade durch Q, P liegt in der Ebene e durch P, Q, R. Sie verläuft außerdem durch die Seitenflächen AB; daher schneidet sie den Rand von ABC in einem weiteren Punkt S, der zu e gehört. Folglich ist der in (1) konstruierte Punkt S' der Bildpunkt von S, und S liegt, wie die Konstruktion ergibt, auf AB.

Die Gerade durch R, Q liegt sowohl in e als auch in der Ebene durch B, C, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist sie auch nicht parallel zu BD (denn auch $RQ \parallel BD$ würde auch $R'Q' \parallel B'D'$ folgen). Also schneidet sie die Gerade durch B, D in einem Punkt T, der zu e gehört. Folglich ist der in (2) konstruierte Punkt T' der Bildpunkt von T.

Die Punkte S und T liegen sowohl in e als auch in der Ebene durch A, B, D; denn S liegt auf der Geraden durch A, B; T liegt auf der Geraden durch B, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist ferner die Gerade durch S,T nicht parallel zu AD, Also schneidet die Gerade durch S,T die (Gerade durch A,D und sogar, wie die Konstruktion zeigt, die) Strecke SD in einem Punkt$U$m der zu e gehört. Folglich ist der in (3) konstruierte Punkt U' der Bildpunkt von U.

De Strecke RQ liegt sowohl in e als auch in der Seitenfläche BCD, sie gehört also der Schnittfigur an. Ebenso gehören QS, SU und UR der Schnittfigur an. Diese vier Strecken bilden ein geschlossenes Vieleck und somit die gesamte Schnittfläche; das Viereck $R'Q'S'U'$ ist folglich deren gesuchte Projektion.

Übernommen von [5]

7.23.4 IV. Runde 1981, Klasse 10

Aufgabe 1 - 211041
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ aus positiven ganzen Zahlen a,b, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!
Die Aussagen lauten:

$$b|(a+1), \quad (1) \quad ; \quad a=2b+5, \quad (2)$$
$$3|(a+b), \quad (3) \quad ; \quad a+7b \quad \text{ist eine Primzahl.} \quad (4)$$

Angenommen (2) wäre falsch. Dann müsste einerseits nach (4) gelten, dass $a+7b \geq 8$ prim ist, andererseits müsste wegen (3) aber auch $a+7b=(a+b)+6b$ durch 3 teilbar sein. Also ist (2) wahr.
Dann ist $a+b=3b+5$ nicht durch drei teilbar, also ist (3) falsch. Demnach müssen (1) und (4) wahr sein.
Aus (2) folgt $a+1=2b+6$ und mit (1) ist daher genau dann erfüllt, wenn $b \mid 6$, also $b \in \{1,2,3,6\}$.
Wegen (2) ist $a+7b=9b+5$. Also kann $a+7b$ höchstens dann prim sein, wenn b gerade ist. Für $b=2$ ist dies der Fall, denn $9\cdot 2+5=23$ ist prim. Für $b=6$ ebenso: $9\cdot 6+5=59$ ist prim.
Also sind $(a,b)=(9,2)$ und $(a,b)=(17,6)$ alle gesuchten Paare.

Aufgabe 2 - 211042
Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X,Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $XY \leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P,Q aus M, deren Abstand $PQ=d$ beträgt.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob man jede Viereckfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!
Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

So eine Zerlegung ist nicht immer möglich.
Es seien A,B,C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und es sei M der Mittelpunkt dieses Dreiecks. Dann hat das konkave Viereck $AMBC$ Durchmesser 1.
Zerlegt man $AMBC$ in zwei Teilflächen, so muss nach Schubfachprinzip eine dieser Teilflächen mindestens zwei der Punkte A,B,C enthalten und hat somit einen Durchmesser von mindestens 1.

Aufgabe 1 und 2 gelöst von Nuramon

Aufgabe 3A - 211043A
In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.
Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man die Funktion F für alle reellen x durch $F(x)=f(g(x))$ definieren.
Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f,g,F periodisch sind.
(Bekanntlich heißt eine Funktion ρ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p>0$ so existiert, dass für alle x die Gleichung $\rho(x+p)=\rho(x)$ gilt.)
Jens behauptet: Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.
Dirk behauptet: Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets die Funktion F periodisch.
Christa behauptet: Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.
Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

Jens hat Recht, während Dirk und Christa falsch liegen:
zu Jens: Ist g eine periodische Funktion mit Periode p, dann gilt für alle reellen x auch $F(x+p) = f(g(x+p)) = f(g(x)) = F(x)$, sodass auch F mit der gleichen Periode wie g periodisch ist.

zu Dirk: Es sei $f(x) = \sin(x)$ eine periodische Funktion und $g(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ sowie $g(0) = \frac{\pi}{2}$. (Dann ist g eine nichtkonstante Funktion.) Damit ist aber $F(x) = f(g(x)) = \sin(0) = 0$ für alle $x \neq 0$ und $F(0) = f(g(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, sodass es keine reelle Zahl $p > 0$ geben kann, die $F(x+p) = F(x)$ für alle x erfüllt, denn zumindest für $x = 0$ gilt immer $F(0+p) = F(p) = 0 \neq 1 = F(0)$.

zu Christa: Es sei $g(x)$ wie bei Dirk definiert und $f(x) = g(x-1)$ für alle reellen Zahlen x. Dann sind (in analoger Weise wie bei der Betrachtung von F bei Dirk) beide Funktionen f und g nichtkonstant und nicht periodisch, erfüllen also Christas Voraussetzung. Weiterhin ist für alle rellen Zahlen $x \neq 0$ dann $F(x) = f(g(x)) = f(0) = g(-1) = 0$ und

$$F(0) = f(g(0)) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0$$

sodass für alle reellen Zahlen x und p die Gleichung $F(x+p) = 0 = F(x)$ gilt, also F periodisch (mit beliebiger Periodenlänge p) ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3B - 211043B
Beweisen Sie, dass man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, ..., P_{12}$ so verteilen kann, dass für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!
Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

Wir bezeichnen die Kugel der Anschaulichkeit halber wie einen Globus. Der Äquator liege in der xy-Ebene, der Nordpol auf der positiven z-Achse. Wir haben insgesamt 12 Punkte zu platzieren, davon platzieren wir sechs auf der nördlichen Hemisphäre und sechs auf der südlichen.
Der Punkt P_1 liege am Nordpol. Die 5 weiteren Punkten in der nördlichen Hemisphäre werden so angeordnet, dass sie alle auf derselben Höhe ("Breitengrad") liegen und ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Der Punkt P_2 liege auf dem Nullmeridian, also in der xz-Ebene. Die Höhe werde so bestimmt, dass der geradlinige Abstand zum Nordpol P_1 genau gleich r ist. Dann gilt

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Da der Punkt P_2 mit dem Nordpol P_1 und dem Urspung der Kugel ein gleichseitiges Dreieck bildet, kann man unmittelbar schlussfolgern, dass die Koordinaten des Punktes P_2 lauten:

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} r \\ 0 \\ \frac{1}{2} r \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass die Seiten dieses regelmäßigen Fünfecks länger sind als r. Die Koordinaten von P_3 lauten

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos 72^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r \sin 72^\circ \\ \frac{1}{2} r \end{pmatrix}$$

Die Strecke P_2P_3 hat demnach eine Länge von

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r (1 - \cos 72^\circ)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \sin 72^\circ\right)^2$$

$$d^2 = r^2 (\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 2 \cos 72^\circ + \frac{3}{4})$$

$$d^2 = \frac{3}{2}(1 - \cos 72^\circ) r^2$$

$$d = r\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos 72°)} \approx 1{,}018r > r$$

Alle Punkte werden jetzt an der Äquatorebene gespiegelt. Die gespiegelten Punkte erhalten ein Apostroph. Dementsprechend ist P_1' der Südpol, und jeder andere gespiegelte Punkt hat die gleichen x- und y-Koordinaten, aber die negative z-Koordinate, also

$$\vec{p_2'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass die Punkte P_2 bis P_6, die das nördliche Fünfeck bilden, jeweils einen Abstand r zu ihrem gespiegelten Pendant haben, weil der eine bei der Höhe $\frac{1}{2}r$ und der andere bei der Höhe $-\frac{1}{2}r$ liegt. Wir haben daher 12 Punkte so angeordnet, dass sie, wenn man einem Meridian vom Nordpol zum Südpol folgt, jeweils einen Abstand von r haben. Der Abstand vom Punkt P_2 zu dem Nachbarn seines Pendants, also zu P_3' ist dementsprechend deutlich größer als r. Man kann nun die Abstände vergrößern, indem man die Punkte auf der südlichen Halbkugel um einen bestimmten Winkel um die z-Achse dreht.
Dadurch wächst der Abstand von P_2 zu seinem ehemals gespiegelten Gegenüber P_2'. Diesen Abstandszuwachs kann man nutzen, um den Abstand der Fünfeckpunkte zum Pol zu vergrößern, womit der Beweis erbracht wäre, dass man einen Abstand zwischen zwei Punkten größer als r einstellen kann.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 211044
Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor.
Nach jedem Wurf muss der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.
Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, dass mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

$$AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG$$

gebildet werden können!
Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d.h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

Da die Wörter BEI,BEN gebildet wurden, liegen I,N auf demselben Würfel, ebenso R wegen der Wörter TOR,NOT. Die Buchstaben A,B,C,D,E,G,H,M,O,S,T treten in Wörtern mit I,N,R auf. Daher bleiben für den ersten Würfel nur die Buchstaben F,P,U,Z.

Wegen der Wörter ZUG,CUP liegt U nicht auf diesem und wir haben die Belegung **I**,**N**,**R**,**F**,**P**,**Z**. Damit bleiben die folgenden Kombinationen für die anderen beiden Würfel übrig:

$$AU, BE, CU, GE, CH, DA, ST, MA, OT, UG.$$

Aus den Wörtern mit U folgt, dass A,C,G auf demselben Würfel liegen. Weitere Vergleiche ergeben, dass U,E,H,D,M auf dem zweiten und A,C,G,B auf dem dritte Würfel liegen.
Aus den beiden Wörtern ST,OT folgt dann, dass diese eindeutig zu **U**,**E**,**H**,**D**,**M**,**T** und **A**,**C**,**G**,**B**,**S**,**O** ergänzt werden.

Aufgabe 5 - 211045
Ermitteln Sie alle Mengen a, b, c aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Gleichung erfüllen

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 2s$$

Anmerkung: Sind a,b,c die Seitenlängen eines Dreiecks, dann ist $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ sein Flächeninhalt. Andererseits ist der Flächeninhalt des Dreiecks auch gleich dem Produkt aus Inkreisradius und halbem Umfang. In der Aufgabe geht es also darum alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, die den Inkreisradius 2 haben.

Es seien $p := s-a$, $q := s-b$ und $r := s-c$. Die zu lösende Gleichung ist dann

$$\sqrt{spqr} = 2s.$$

Wir zeigen zunächst, dass p,q,r positiv sein müssen:
Sei dazu o.B.d.A. $c \geq b \geq a$. Dann ist $b+c > a$ und $a+c > b$. Somit ist auch $p = s-a = \frac{1}{2}(b+c-a) > 0$ und $q = s-b = \frac{1}{2}(a+c-b) > 0$. Wäre $r = s-c < 0$, dann wäre wegen $s > 0$ der Term unter der Wurzel negativ und somit könnte die Gleichung nicht erfüllt sein. Es kann aber auch nicht $s-c = 0$ gelten, denn sonst erhielten wir den Widerspruch $0 = 2s > 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass p,q,r ganz sind:
Es ist klar, dass $2p, 2q, 2r, 2s \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $2s-2p = 2a, 2s-2q = 2b, 2s-2r = 2c$ und $a,b,c \in \mathbb{N}$, müssen $2p, 2q, 2r, 2s$ alle die gleiche Parität haben.
Durch quadrieren und multiplizieren mit 2^4 erhalten wir:

$$(2s)(2p)(2q)(2r) = 16(2s)^2.$$

Rechts steht eine gerade Zahl. Also muss auch links eine gerade Zahl stehen, und folglich müssen $2s, 2p, 2q, 2r$ alle gerade sein. Insbesondere folgt, dass $p,q,r \in \mathbb{N}$.

Nach obigen Bemerkungen und wegen $s = p+q+r$, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$pqr = 4(p+q+r).$$

Auflösen nach p liefert

$$p = \frac{4(q+r)}{qr-4}.$$

(Es ist $qr-4 \neq 0$, denn sonst wäre $0 = p(qr-4) = 4(q+r) > 0$.) Wegen $p > 0$, stellen wir fest, dass $qr-4 > 0$ gelten muss. Also gilt $qr \geq 5$.

Als nächstes finden wir alle Lösungen dieser Gleichung, in der mindestens eine der Variablen p,q,r den Wert 1,2 oder 3 hat. O.B.d.A. sei q diese Variable.

1. Fall: $q = 1$.
Dann ist

$$p = \frac{4(1+r)}{r-4} = 4 + \frac{20}{r-4}.$$

Es muss also $r-4$ ein Teiler von 20 sein. Wegen $r = qr \geq 5$, ist das genau dann erfüllt, wenn $r \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24\}$. Demnach ist (p,q,r) ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(24,1,5), (14,1,6), (9,1,8), (8,1,9), (6,1,14), (5,1,24)\}.$$

2. Fall: $q = 2$.
Dann ist

$$p = \frac{4(2+r)}{2r-4} = 2 + \frac{8}{r-2}.$$

Also muss $r-2$ ein Teiler von 8 sein. Da außerdem $2r = qr \geq 5$ ist, muss $r \geq 3$ gelten. Somit ist $r \in \{3,4,6,10\}$. Daher ist (p,q,r) ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(10,2,3), (6,2,4), (4,2,6), (3,2,10)\}.$$

3. Fall: $q = 3$.
Dann ist

$$p = \frac{4(3+r)}{3r-4} = 1 + \frac{r+16}{3r-4}.$$

Insbesondere ist $p \geq 2$. Wegen $3r = qr \geq 5$ ist auch $r \geq 2$. Lösungen, in denen $p = 2$ oder $r = 2$ gilt, haben wir oben bereits erfasst. Damit $p \geq 3$ gilt, muss $r+16 \geq 2(3r-4)$, also $5r \leq 24$ und somit $r \leq 4$

gelten. Durch explizites Einsetzen, sehen wir, dass weder $r = 3$ noch $r = 4$ zu einem ganzzahligem p führen.
Für $q = 3$ finden wir also keine weiteren Lösungen, die wir nicht bereits in einem der oberen beiden Fällen erfasst haben.

Gäbe es eine Lösung von $pqr = 4(p + q + r)$, in der $p,q,r \geq 4$ sind, dann wäre

$$1 = \frac{4(p+q+r)}{pqr} = 4\left(\frac{1}{qr} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{pq}\right) \leq 4 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4}\right) = \frac{3}{4},$$

was offenbar falsch ist.
Damit sind alle positiv ganzzahligen Lösungen (p,q,r) von $pqr = 4(p + q + r)$, in denen $p \leq q \leq r$ gilt, gegeben durch

$$(p,q,r) \in \{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\}.$$

Mit $s = p+q+r = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $(a,b,c) = (s-p, s-q, s-r)$ erhalten wir daher, dass alle positiven, ganzzahligen Lösungen (a,b,c) mit $a \geq b \geq c$ von

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s$$

gegeben sind durch

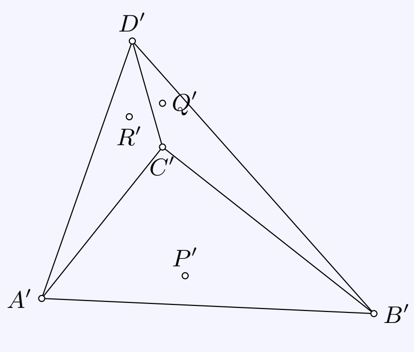
$$(a,b,c) \in \{(29,25,6), (17,10,9), (20,15,7), (13,12,5), (10,8,6)\}.$$

Alle anderen Lösungstripel (a,b,c) erhält man durch Permutation dieser Tripel.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 211046
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Abbildung). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211046

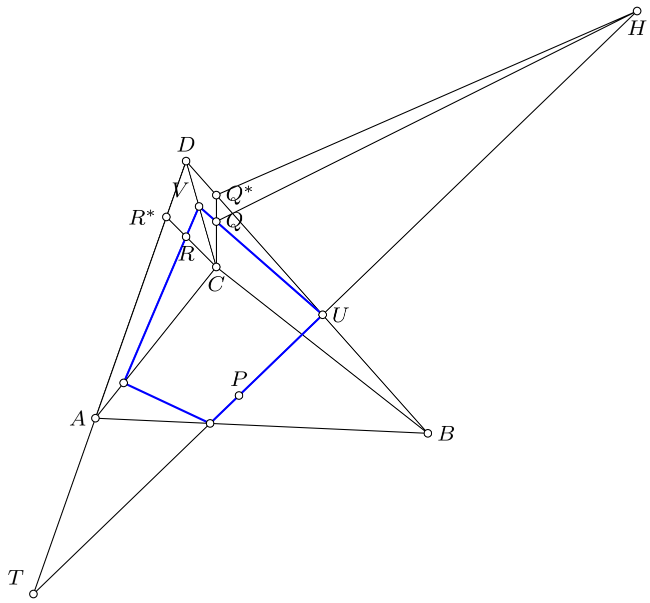


Da sich die Lösung in der projektiven Geometrie abspielt, muss die Lösung durch reine Inzidenz (nur Schnittpunkte von Geraden) konstruierbar sein.

Meine Konstruktion findet im Raum statt, deshalb spreche ich von den Punkten A, B, C etc. und nicht von den Projektionen A', B', C' etc.

Es ist klar, dass es genügt, z.B. die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR zu konstruieren. (Ich gehe im Folgenden vom Fall aus, dass die Schnittfigur ein Dreieck ist, die anderen Fälle gehen analog.) Dann schneidet man s mit AD und erhält T, man schneidet s mit BD und erhält U. Man schneidet UQ mit CD und erhält V. Das Dreieck TUV, wobei R auf TV liegen muss(!), ist dann die Schnittfigur.

Wie erhält man nun die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR?
Da P in der Ebene ABD liegt, liegt P schon auf s. Ich konstruiere jetzt einen weiteren Punkt von s. Dazu projiziere ich die Punkte Q und R von C aus auf die Seiten BD resp. AD und erhalte die Punkte Q^* und R^*. Der Schnittpunkt H der Geraden QR und Q^*R^* ist dann ein weiterer Schnittpunkt der Ebenen ABD und PQR.



Konkrete Konstruktionsanleitung für Dreieck TUV:

1. Schneide CQ mit BD: Q^*
2. Schneide CR mit AD: R^*
3. Schneide QR mit Q^*R^*: H $\quad (s = HP)$
4. Schneide HP mit AD: T
5. Schneide HP mit BD: U
6. Schneide QU mit CD: V

Aufgabe gelöst von moudi

7.24 XXII. Olympiade 1982

7.24.1 I. Runde 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221011
In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, daß alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden!

Beweisen Sie, dass durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für			Insgesamt zur Verfügung
	E_1	E_2	E_3	stehende Mittel in Mark
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

Die Mittel werden genau dann bei Festsetzung von Stückzahlen e_1, e_2, e_3 für E_1, E_2 bzw. E_3 ausgeschöpft, wenn die Gleichungen

$$6e_1 + 7e_2 + 9e_3 = 4950 \qquad (1)$$
$$e_1 + 2e_2 + 2e : 3 = 1100 \qquad (2)$$
$$5e_1 + 6e_2 + 8e_3 = 4300 \qquad (3)$$

gelten. Angenommen, für Stückzahlen e_1, e_2, e_3 treffe diese zu. Dann folgt, indem man (1) von der Summe aus (2) und (3) subtrahiert, $e_2 + e_3 = 450 \quad (4)$.

Subtrahiert man (1) von der mit 6 multiplizierten Gleichung (2), so erhält man $5e_2 + 3e_3 = 1650 \quad (5)$.

Subtrahiert man (5) von der mit 5 multiplizierten Gleichung (4), so ergibt sich $2e_3 = 600$, also $e_3 = 300$.

Hieraus und aus (4) folgt $e_2 = 150$ und unter Berücksichtigung von (2) $e_1 = 200$.

Daher können nur diese Stückzahlen die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen diese Gleichungen, wie eine Probe zeigt.

Damit ist bewiesen, dass es möglich ist, die gesamten Mittel auszuschöpfen, und dass die Stückzahlen durch diese Forderung eindeutig bestimmt sind. Für E_1, E_2, E_3 betragen sie 200, 150 bzw. 300.

Aufgabe 2 - 221012
In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind.

Peter meinte: "Dann muss auch $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ irrational sein." "Wie beweist du das?" fragte Katrin. "Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x + y$ irrational sein muß, wenn x und y irrational sind." "Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, daß auch ihre Summe $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ irrational ist", erwiderte Peter.

a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, dass es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x + y$ gibt!

b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

a) Die Zahlen $x = \sqrt{2}$ und $y = -\sqrt{2}$ beispielsweise sind irrational, aber ihre Summe $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ ist rational.

b) Angenommen, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ wäre rational. Dann gäbe es ganze Zahlen a,b mit $b \neq 0$ und $\sqrt{2}+\sqrt{5} = \frac{a}{b}$. Wegen $\sqrt{2}+\sqrt{5} > 0$ wäre auch $a \neq 0$. Weiter folgte

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} - \sqrt{2} \quad ; \quad 5 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b}\sqrt{2} + 2$$
$$\frac{2a}{b}\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2} - 3 \quad ; \quad \sqrt{2} = \frac{a}{2b} - \frac{3b}{a} = \frac{a^2-3b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ rational wäre. Daher war die eingangs gemachte Annahme falsch, d.h., $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ist irrational.

Aufgabe 3 - 221013

Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
"Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen."
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
"Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen."
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da 's möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, dass zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei'n 's von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreun!
Und jede Ziffer treffe man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen E n d beträge!
Dabei beweise man recht rege,
daß es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)

Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

Lösung:

In dem Ergebnis mit vier Stellen
wird jedem Löser gleich erhellen,
dass vorn stets nur die 1 kann sein:
Sie kommt vom Übertrag herein,
den man erhält in Spalte "Hundert"
(Wenn's anders wär', wär' man verwundert.)
Die 0, die kann in den Summanden
auf keinen Fall hier sein vorhanden,
da eine andre Ziffer man
ja niemals zweimal nehmen kann;
denn, wie soeben wurd' verraten,
der Übertrag ist schon "verbraten".
Auch bei den Einern und bei Zehn
darf im Ergebnis 0 nicht stehn,
sonst gäb's den zweiten Übertrag,
den, wie wir wissen, keiner man.
Nun ist die Lösung halb gewonnen,
es wird mit 1 und 0 begonnen.

		-	-	-
+		-	-	-
=	1	0	-	-

Jetzt denkt man nach bei den Summanden,
was ist an Hunderten vorhanden?
Zunächst hat man vielleicht gedacht
so an die Ziffern 2 und 8

jedoch es geh'n auch 3 und 7;
und 4 und 6 sind noch geblieben.
Darum mach man sich "auf die Schnelle"
aus diesen eine Art Tabelle:

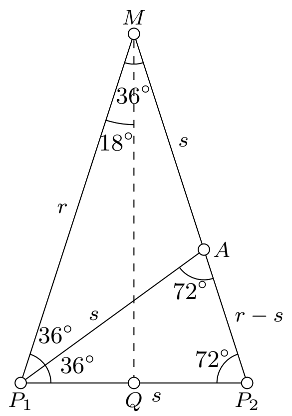
Verbrauchte Ziffern	Restliche Ziffern	Einzig brauchbare Summenbildungen	
0,1,2,8	3,4,5,6,7,9	-	
0,1,3,7	2,4,5,6,8,9	$2+6=8$	$4+5=9$
0,1,4,6	2,3,5,7,8,9	$2+7=9$	$3+5=8$

Nun muss man schließlich noch probieren,
so den Rest zu kombinieren,
dass kein Übertrag entsteht,
wenn man ans Addieren geht.
Überlegt man eine Weile,
sieht man bei der ersten Zeile,
dass es hier nicht funktioniert,
wie und was man auch probiert.

Zeile zwei und drei sodann
bieten je 'ne Lösung an:
Erstens 1, 0, 9 und 8.
Und, falls man es anders macht,
kann man zweitens sich erfreu'n
auch an 1, 0, 8 und 9.
Diese beiden Summen sind
einzig möglich. Jedes Kind
sieht, dass es nur so kann sein,
wenn man hält die Regeln ein.

Aufgabe 4 - 221014
Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2...P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks.

Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!



Zwei benachbarte Eckpunkte P_1, P_2 des Zehnecks bilden mit dem Mittelpunkt M des Umkreises die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Seitenlängen

$$P_1M = P_2M = r \qquad r \qquad P_1P_2 = s$$

Für den Winkel $\angle P_1MP_2$ gilt, da er ein Zehntel eines Vollwinkels ist $\angle P_1MP_2 = 36°$. Folglich gilt nach dem Innenwinkelsatz und dem Satz über Basiswinkel, angewandt auf Dreieck P_1MP_2,

$$\angle MP_1P_2 = \angle MP_2P_1 = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$$

Die Halbierende des Winkels $\angle MP_1P_2$ schneidet die Gegenseite MP_2 in einem Punkt A. Für ihn gilt $\angle MP_1A = \angle AP_1P_2 = 36°$ und daher nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck P_1P_2A

$$\angle P_1AP_2 = 180° - 36° - 72° = 72°$$

Also sind die Dreiecke P_1MA und P_1P_2A gleichschenklig mit $AM = AP_1 = P_1P_2 = s$. Daraus folgt $AP_2 = MP_2 - AM = r - s$.

Ferner sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die Dreiecke MP_1P_2 und P_1P_2A einander ähnlich. Also gilt $P_1M : P_1P_2 = P_1P_2 : AP_2$, d.h. $\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$ und daher $s^2 + rs - r^2 = 0$ und da $s > 0$

$$s_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r^2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618r$$

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen von [5]

7.24.2 II. Runde 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221021
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

I. Wenn ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllt, so gilt $x(2x^2 + y) = 7$.
Da x und $2x^2 + y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

(1) entweder $x = 1$ und $2x^2 + y = 7$
(2) oder $x = 7$ und $2x^2 + y = 1$
(3) oder $x = -1$ und $2x^2 + y = -7$
(4) oder $x = -7$ und $2x^2 + y = -1$

Aus (1) folgt $y = 5$; aus 82) folgt $y = -97$; aus (3) folgt $y = -9$; aus (4) folgt $y = -99$.
Also können höchstens $(1; 5)$, $(7; -97)$, $(-1; -9)$, $(-7; -99)$ Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung erfüllen.
Die Probe bestätigt, dass genau diese vier Paare die geforderten Eigenschaften haben.

Aufgabe 2 - 221022
Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, dass in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:
1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b:
"Wenn $a \neq b$ ist, dann muss sogar stets $a > b$ gelten."
Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt.
Für sie gilt $a \geq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c \geq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a \geq b$, für $a \neq b$ also sogar $a > b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

Aufgabe 3 - 221023
Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2.
Beweisen Sie, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und dass die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind!
Geben Sie diese Seitenlängen an!

Ein Dreieck mit den Maßzahlen a, b, c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklige mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn $a^2 + b^2 = c^2 \quad (3)$ gilt.
Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus der Gleichungen

$$a + b + c = 132 \tag{4}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 6050 \tag{5}$$

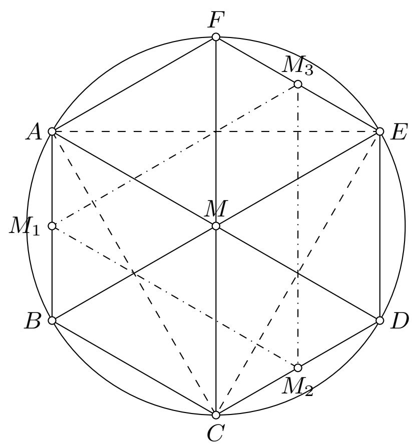
gelten.
I. Wenn (3), (4), (5) erfüllt sind, so folgt:
Nach (3) und (5) gilt $2c^2 = 6050, c^2 = 3025$, wegen $c > 0$ als $c = 55$ und damit nach (4) und (3)

$$a + b = 77 \tag{6}$$
$$a^2 + b^2 = 3025 \tag{7}$$

Aus (6) folgt $b = 77 - a$ und damit aus (7) $a^2 - 77a + 1452 = 0$ (8) mit der Lösung $a = \frac{77}{2} \pm \frac{11}{2}$, d.h. entweder $a = 44$ und $b = 33$ oder $a = 33$ und $b = 44$.
Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1) und (2) genügen.
Ein Probe zeigt, dass sie den Bedingungen genügen. Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 4 - 221024
Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, daher ist $F_1 = 6D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.
Jede der Seitenlänge des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge es gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Daher ist $s = AC = CE = EA = a\sqrt{3}$ und folglich $F_2 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.



Wegen $\angle BAD = 60°$ und $\angle ABC = 2 \cdot 60°$ ist $AD \parallel BC$ (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen).
Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $2a$ bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1; daher ist

$$t = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = \frac{3}{2}a$$

und folglich

$$F_3 = \frac{t^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

Somit gilt $F_1 : F_2 : F_3 = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{9}{16} = 8 : 4 : 3$.

Lösungen der II. Runde 1982 übernommen aus [5]

7.24.3 III. Runde 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221031
Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v \qquad \text{und} \qquad x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Es gibt offenbar keine Lösung, in der $x = y = z = u = v$ gilt. Daher ist $5v > x + y + z + u + v = xyzuv$, also $xyzu < 5$. Es bleiben vier Fälle:

1. Fall: $xyzu = 1$.
Das ist nur möglich, wenn $x = y = z = u = 1$. Also müsste $1 + 1 + 1 + 1 + v = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot v$ gelten, was unmöglich ist.

2. Fall: $xyzu = 2$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,2)$ und daher $1 + 1 + 1 + 2 + v = 2v$, also $v = 5$.

3. Fall: $xyzu = 3$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,3)$ und daher $1 + 1 + 1 + 3 + v = 3v$, also $v = 3$.

4. Fall: $xyzu = 4$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,2,2)$ oder $(x,y,z,u) = (1,1,1,4)$.

Im ersten Fall folgt aus $1 + 1 + 2 + 2 + v = 4v$, dass $v = 2$. Im anderen Fall steht $1 + 1 + 1 + 4 + v = 4v$ im Widerspruch zu $v \in \mathbb{N}$.

Insgesamt erhalten wir also, dass $(1,1,1,2,5), (1,1,1,3,3)$ und $(1,1,2,2,2)$ alle gesuchten Quintupel sind.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 2 - 221032
Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, dass M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.
Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!
Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\angle APB$ halb so groß ist wie $\angle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

Die Tangenten an k durch A und B schneiden sich in einem Punkt, der nicht in der gleichen Halbebene bezüglich g wie M, und damit auch P liegt. Also kann P nicht auf beiden Tangenten gleichzeitig liegen, sodass wir o.B.d.A. annehmen können, dass P nicht auf der Tangenten an k durch A liegt.

Es sei S der neben A zweite Schnittpunkt der Geraden AP mit k.
Dann gilt nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AMB = \angle APB$. Weiterhin stimmen die beiden Dreiecke $\triangle ASB$ und $\triangle APB$ auch im Winkel $\angle BAS = \angle BAP$ und der Seite AB überein, sind also kongruent. Damit folgt aufgrund der gleichen Lage auch direkt $S = P$, sodass P auf k liegt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 221033
Beweisen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

Sei

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

Dann folgt:

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} = r - \sqrt{2}$$

Quadrieren:

$$12 + 2\sqrt{35} = r^2 + 2 - 2r\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{35} = (r^2 - 10) - 2r\sqrt{2}$$

Noch einmal quadrieren:

$$140 = r^4 - 20r^2 + 100 + 8r^2 - 4r(r^2 - 10)\sqrt{2}$$
$$4r(r^2 - 10)\sqrt{2} = r^4 - 12r^2 - 40$$
$$\sqrt{2} = \frac{r^4 - 12r^2 - 40}{4r(r^2 - 10)}$$

Wenn r eine rationale Zahl wäre, dann wäre die rechte Seite dieser Gleichung eine rationale Zahl. Dann müsste aber auch $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein, was nicht der Fall ist. Aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$, die als bekannt vorausgesetzt wird, folgt somit die Irrationalität von $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 221034
Beweisen Sie folgende Aussage:
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

Wir starten auf einer der Kanten des Quadrates und wählen deren Endpunkte und den Mittelpunkt aus. Je zwei benachbarte dieser ausgewählten Punkte haben einen Abstand von $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$.

Auf der Parallele zu dieser Grundseite im Abstand $\frac{1}{3}a$ wählen wir zwei Punkte aus, jeweils im Abstand $\frac{1}{4}a$ zum jeweiligen Seitenrand des Quadrats. Dann haben diese beiden Punkte untereinander den Abstand $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$. Jeder der beiden Punkten bildet mit den zwei "benachbarten" Punkten der Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge $\frac{1}{2}a$ und Höhe $\frac{1}{3}a$ auf dieser.

Damit haben die beiden Schenkel eine Länge von $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot a = \sqrt{\frac{9+16}{4^2 \cdot 3^2}} \cdot a = \frac{5}{12}a > \frac{2}{5}a$, sodass auch hier keine zwei Punkte einen zu kleinen Abstand zueinander besitzen.

Auf der Parallele zu Grundseite im Abstand von $\frac{2}{3}a$ wählen wir die Punkte wieder aus wie auf der Grundseite selbst, sodass diese an der Parallelen im Abstand $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite gespiegelt wurde. Es ergeben sich dadurch die gleichen Abstände wie in der eben durchgeführten Überlegung.

Schließlich wählen wir die letzten zwei noch fehlenden Punkte auf der Parallelen zur Grundseite im Abstand von $\frac{3}{3}a$, also der gegenüberliegenden Quadratseite, wieder genauso aus wie auf der Parallelen im Abstand von $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite, sodass sich das Muster entsprechend fortsetzt.

Damit haben wir 10 Punkte in bzw. auf dem Rand des Quadrats angegeben, sodass keine zwei verschiedene einen Abstand von $\frac{2}{5}a$ oder weniger zueinander haben, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 221035
Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

Man zerlege die Funktion wie folgt:

$$f(x) = 2 + 1978(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x^2(3x^2 + x + 4)$$
$$f(x) = 2 + 1978 \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1} + x^2 \left(3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4 - \frac{1}{12}\right)$$

Der Term $\frac{x^5-1}{x-1}$ hat keine Nullstelle, denn $x^5 - 1$ hätte nur die Nullstelle $x = 1$, die aber künstlich erzeugt wurde durch die Erweiterung mit dem Nenner $x-1$. Eine eventuelle andere Nullstelle von $1+x+x^2+x^3+x^4$ müsste dann aber auch Nullstelle von $x^5 - 1$ sein.

Daher ist der ganze Ausdruck $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 0$ für alle x. Alle anderen Terme sind auch immer größer als null, so dass man insgesamt festhalten kann, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und daher keine Nullstellen aufweist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6 - 221036
Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, dass es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt!
Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

Die Endpunkte zweier nicht-parallelen Flächendiagonalen auf den gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels bilden ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge $\sqrt{2}a$. (Dies prüft man leicht nach.)

Der Umkugelradius eines regulären Tetraeders beträgt das $\frac{\sqrt{6}}{4}$-fache seiner Kantenlänge, wie man leicht nachrechnet. (Der Umkreismittelpunkt fällt mit dem Schwerpunkt, also dem Schnittpunkt der Schwerelinien, die gleichzeitig Höhen sind, zusammen.)

Für ein reguläres Tetraeder mit Kantenlänge $> \sqrt{2}a$ wäre also auch der Umkugelradius größer als $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, was den Umkugelradius des Würfels darstellt. Da aber alle Punkte des Teraeders auch zum Würfel gehören, muss die Entfernung aller Tetraederpunkte zum Umkugelmittelpunkt des Würfels kleiner oder gleich dem Umkugelradius des Würfels sein (wie dies für alle Punkte in oder auf dem Würfel gilt). Damit kann aber auch der Umkugelradius des Tetraeders höchstens so groß sein wie der Umkugelradius des Würfels.
Also kann es kein größeres reguläres Teraeder geben, welches man aus dem Würfel herausschneiden kann, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.24.4 IV. Runde 1982, Klasse 10

Aufgabe 1 - 221041
Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$, für die

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

gilt.

Für $n = 2$ wähle $a_1 = a_2 = 2$. Für $n \geq 3$ wähle $a_1 = ... = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = n$, dann wird

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-2 \text{ Summanden}} + 2 + n = n - 2 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{n-2 \text{ Faktoren}} \cdot 2 \cdot n$$

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 221042
In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Es ist

$$z - \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Quadrieren:

$$z^2 + x + y - 2z\sqrt{x+y} = x + y + 2\sqrt{xy}$$
$$z^2 - 2z\sqrt{x+y} = 2\sqrt{xy}$$

Erneut quadrieren:

$$z^4 + 4z^2(x+y) - 4z^3\sqrt{x+y} = 4xy$$
$$\sqrt{x+y} = \frac{z^4 + 4z^2(x+y) - 4xy}{4z^3} = \frac{1}{4}z + \frac{x+y}{z} - \frac{xy}{z^3}$$

Eva hat recht: wenn z rational wäre, dann müsste immer $\sqrt{x+y}$ rational sein, was offenkundig nicht sein kann, denn wann immer $x + y$ keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x+y}$ irrational und damit auch z. Es gibt aber unendlich viele Zahlenpaare (x,y), für die $x + y$ keine Quadratzahl ist.
Was Rolfs Meinung betrifft, so setzt man $x = (n^2 - 1)^2$ und $y = 4n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$z = (n^2 - 1) + 2n + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2} = n^2 - 1 + 2n + n^2 + 1 = 2n^2 + 2n = 2n(n+1)$$

z ist in diesem Fall also immer ganzzahlig und damit rational. Damit gibt es auch unendlich viele Zahlenpaare (x,y), für die z rational ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 221043A
a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

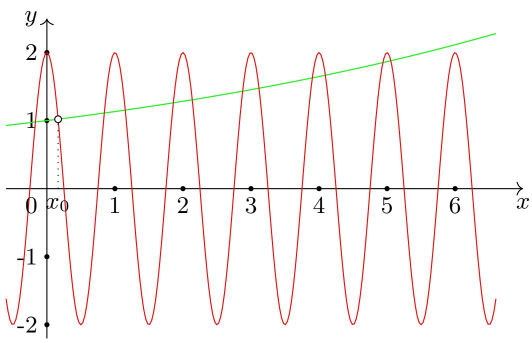
$$a^x = b \cdot \cos x \qquad (1)$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).
Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, dass es die genannte Eigenschaft besitzt!
b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g + 1$ gilt!
c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, dass für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?

Hinweise:
1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}1416$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch grafisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

Die Zahl der positiven reellen Lösungen ist nur dann beschränkt, wenn $a > 1$ ist, weil nur dann mit wachsendem x irgendwann $a^x > |b|$ ist, und damit die Anzahl der Lösungen endlich ist. Bei $a < 1$ würde a^x gegen null gehen und unendlich viele Schnittpunkte mit $b \cos x$ haben. Da $a^x > 1$ für $x > 0$ ist, muss außerdem $|b| > 1$ sein, um überhaupt Schnittpunkte zu produzieren. Damit ist Aufgabenteil c) schon beantwortet.

Aufgrund der relativ großen Beliebigkeit kann man für Aufgabenteile a) und b) "angenehme" Zahlen wählen. Zeichnet man beispielhaft die Graphen der Kurven a^x und $b \cos x$, stellt sich das Problem wie folgt dar:



In grün dargestellt ist die Funktion $f(x) = a^x$, in rot die Funktion $g(x) = b \cos x$, wobei allerdings auf der x-Achse hier Vielfache von 2π gezählt werden.

Man erkennt leicht, dass innerhalb eines Intervalls von der Breite 2π immer genau zwei Schnittpunkte liegen. Die Kurve f schneidet immer einen positiven Peak der Kosinusfunktion doppelt, so dass in diesem Beispiel eine ungerade Anzahl von positiven Schnittpunkten vorliegt. Man muss die Zahlen a und b also so wählen, dass die "grüne" Kurve zwischen zwei positiven Peaks der "roten" Kurve austritt. In diesem Beispiel tritt sie nach Peak Nummer 5 aus und wir haben 11 Schnittpunkte.

Da wir genau 1983 positive Nullstellen wollen, muss der Austritt erfolgen nach Peak Nummer 991. Daher muss gelten:

$$a^{991 \cdot 2\pi} = a^{1982\pi} < b$$

und

$$a^{992 \cdot 2\pi} = a^{1984\pi} > b$$

Wir setzen daher einfach

$$b = a^{1983\pi}$$

mit $a{,}b > 1$. Damit ist Aufgabenteil a) immer erfüllt. Wir geben nun $b = 2$ vor, so dass

$$a = 2^{\frac{1}{1983\pi}}$$

Dann ist a nur geringfügig größer als 1. Die "grüne" Kurve beginnt also sehr flach, es ist $f(x) \approx 1$ für kleine x. Der erste Schnittpunkt liegt also etwa bei

$$1 \approx 2 \cos x_0$$

$$x_0 \approx \frac{\pi}{3} \approx 1.047$$

Daher gilt $[x_0] = 1$, was Aufgabenteil b) erfüllt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 221043B
Fünf Kugeln $K_1, ..., K5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte $M_1, ..., M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden.
Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1, ..., K_5$.
Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1, ..., M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Es sei $M_1M_2M_3M_4M_5$ das in der Aufgabenstellung beschriebene regelmäßige Fünfeck. Dann hat dieses die Kantenlänge $2r$. Sei M dessen Mittelpunkt. Dann ist das Dreieck $\triangle M_1M_2M$ gleichschenklig mit Basislänge $|M_1M_2| = 2r$ und $\angle M_1MM_2 = \frac{360°}{5} = 72°$ sowie $|M_1M| = |M_2M| =: R$.

Nach dem Kosinussatz ist dann

$$4r^2 = |M_1M_2| = |M_1M|^2 + |M_2M|^2 - 2|M_1M||M_2M| \cos \angle M_1MM_2 =$$

$$= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 72° = 2R^2 \cdot (1 - \cos 72°)$$

Es ist $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, also $4r^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} R^2$ bzw.

$$R^2 = \frac{8}{5-\sqrt{5}} r^2 = \frac{8(5+\sqrt{5})}{25-5} r^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{5} r^2$$

Aus Symmetriegründen ist M auch der Fußpunkt des Lots von M_6 auf die Ebene durch die Mittelpunkte der anderen Kugeln. Also ist das Dreieck $\triangle M_1MM_6$ rechtwinklig in M und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$|MM_6|^2 = |M_1M_6|^2 - |M_1M|^2 = 4r^2 - \frac{10+2\sqrt{5}}{5} r^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5} r^2$$

also wegen $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$ und damit $10 - 2\sqrt{5} > 10 - 5 = 5$ ist damit

$$|MM_6|^2 < \frac{5}{5} r^2 = r^2$$

also $|MM_6| < r$, sodass der Mittelpunkt M des Fünfecks echt innerhalb der Kugel K_6 liegt, diese also die Ebene durch $M_1, \ldots, M_5$ schneidet.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 221044
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

Also sei $A(0{,}0)$, $B(a{,}0)$, $C\left(\frac{a}{2}{,}b\right)$ und $D\left(\frac{a}{2}{,}0\right)$ mit $a{,}b \in \mathbb{R}^+$.
Die Gerade durch C und B hat die Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{-2b}{a}x + 2b$. Die Lotgerade durch D berechnet sich zu $f_2(x) = \frac{a}{2b}x - \frac{a^2}{4b}$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir dann den Schnittpunkt

$$D'\left(\frac{8ab^2 + a^3}{2a^2 + 8b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + 4b^2}\right)$$

Die Steigung der proportionalen Funktion durch A und D' lässt sich leicht berechnen zu

$$m_3 = \frac{2a^3b + 8ab^3}{a^4 + 12a^2b^2 + 32b^4}$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$ berechnet sich zu $H\left(\frac{6ab^2+a^3}{2a^2+8b^3}, \frac{a^2b}{2a^2+8b^2}\right)$. Die Steigung der Geraden durch C und H ermittelt sich nach etwas Algebra dann zu

$$m_4 = -\frac{a^4 + 12a^2b^2 + 32b^4}{2a^3b + 8ab^3}$$

womit die Behauptung folgt.

2. Lösung:
Wir zeichnen zunächst eine Parallele zu $\overline{DD'}$ durch A, der Schnittpunkt mit $\overline{BC}$ sei E. Nun ist nach Winkelsummensatz im Dreieck DBD' $\angle 2 = 90° - \angle 1$.
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung gleichschenklig ist und D Mittelpunkt der Seite c ist, ist $\overline{DC}$ die Höhe auf der Seite c. Es gilt somit $\angle D'DC = 90° - \angle 2 = \angle 1$.
Da $\angle DD'C = 90°$ nach Voraussetzung ist, folgt somit die Ähnlichkeit der Dreiecke $DD'C$ und ABE. Nach Strahlensatz ist D' Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$. Die Strecke $\overline{AD'}$ ist somit Seitenhalbierende im Dreieck ABE. Nun war H laut Voraussetzung Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$, also ist die Strecke $\overline{CH}$ entsprechende Seitenhalbierende im Dreieck $DD'C$.

Nun können wir das Dreieck ABE wie folgt auf das Dreieck $DD'C$ abbilden: Wir drehen zunächst das Dreieck um B um 90° und erhalten danach das Dreieck BIG.
Anschließend verschieben wir noch B auf D und Strecken anschließend das Dreieck. Da Verschiebung und Achsenstreckung winkeltreue Abbildungen sind, ändern sich die Winkel entsprechender Strecken nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 5 - 221045
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = x^4 - 16 + 5x^3 + 6x^2 - 4x = (x^2-4)(x^2+4) + 5x \cdot x^2 + 6x^2 - 4x \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x+3x) \cdot x^2 + (2x) \cdot (3x) + (2x - 3x) \cdot 4 \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x) \cdot (x^2+4) + (3x) \cdot (x^2-4) + (2x) \cdot (3x) \\ &= (x^2 - 4 + 2x) \cdot (x^2 + 4 + 3x) = (x^2 + 2x - 4) \cdot (x^2 + 3x + 4)\ . \end{aligned}$$

Da $x^2 + 3x + 4 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ stets positiv ist, folgt also aus der Gleichung der Aufgabenstellung $x^2 + 2x - 4 = 0$ bzw. $(x+1)^2 = 5$, also $x = -1 \pm \sqrt{5}$, sodass die Gleichung genau zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 221046
Beweisen Sie, dass sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!

Die Eckpunkte der Grundfläche des würfelförmigen Hohlkörpers mit der Kantenlänge a seien mit A,B,C,D und die Diagonale $\overline{BD}$ zwischen den Punkten B und D mit d_w bezeichnet.

$$d_w = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Die Eckpunkte der Grundfläche Tetraeders mit der Kantenlänge a seien mit X,Y,Z und die den Eckpunkten gegenüberliegenden Flächen seien mit x,y,z bezeichnet.

Die Anordnung des ersten Tetraeders erfolgt auf seiner Grundfläche im Hohlkörper auf dessen Grundfläche stehend und zwar mit der Höhenlinie seiner Grundfläche (des gleichseitigen Dreiecks) gleich der Diagonalen d_w mit seinem Eckpunkt X auf dem Eckpunkt des Hohlkörpers D. Die Anordnung des zweiten Tetraeders erfolgt um 180° gedreht auf seiner Spitze stehend, so dass die Flächen x_1,x_2 der beiden Tetraeder plan aufeinander liegen.

Die Bestimmung der Länge der diagonalen $\overline{X_1X_2} = 2d_t - \frac{1}{3}d_t$ dieser beiden so (für die Berechnung außerhalb des Hohlkörpers) angeordneten Tetraeder ergibt sich aus den beiden Höhen der Grundflächen abzüglich deren Überlappung.

$$\frac{5}{3}d_t = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{4}a} = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{3a}}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{3}\cdot a$$

Mit

$$d_w^2 = 2a^2 < (\frac{5}{3}d_t)^2 = \frac{75}{36}a^2 = (\frac{5}{3}d_t)^2$$
$$d_w < \frac{5}{3}d_t$$

folgt dass der zweite Tetraeder nicht so in den Hohlkörper passt, dass seine Spitze dessen Boden trifft. Es ist daher zu überprüfen ob der hochstehende Teil des zweiten Tetraeders auch innerhalb des Hohlkörpers liegt.

Mit $d_t = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ergibt sich für die Höhe des Tetraeders $h_t^2 = a^2 - (\frac{2}{3}d_t^2)$ und nach Umformung

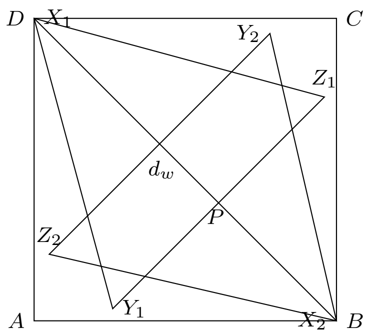
$$h_t = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Die Höhe des würfelförmigen Hohlkörpers ist mit $h_w = a$ gegeben.
Die Bestimmung der Höhendifferenz Δh erfolgt mit der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\Delta h = (\frac{5}{3}d_t - d_w)\frac{3h_t}{d_t} \quad &; \quad \Delta h \leq h_w - h_t \\
\frac{5d_t h_t}{d_t} - \frac{3h_t d_w}{d_t} \leq a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad &; \quad 5h_t - \frac{3h_t d_w}{d_t} \leq a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \\
\frac{5}{3}\sqrt{6}a - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \leq a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad &; \quad \frac{5}{3}\sqrt{6}a - 4a \leq a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \\
a(\frac{5}{3}\sqrt{6} - 4 \leq a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad &; \quad a(5\sqrt{6} - 12) \leq a(3 - \sqrt{6}) \\
6\sqrt{6}a \leq 15a \quad &; \quad a \leq \frac{15}{6\sqrt{6}}a \approx 1{,}02a
\end{aligned}$$

Die Höhe der beiden so angeordneten Tetraeder passt in den Hohlkörper.
Da ein Kreisbogen mit dem Radius a abgetragen an Punkt D vollständig im Inneren des Hohlkörpers liegt, liegen auch die Punkte $Y1$,$Y2$ und $Z1$,$Z2$ im Inneren des Hohlkörpers.

Es ist somit möglich zwei Tetraeder mit der Kantenlänge a in einem würfelförmigen Hohlkörper mit der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterzubringen. □



Aufgabe gelöst von OlgaBarati

7.25 XXIII. Olympiade 1983

7.25.1 I. Runde 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231011
Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n, so stellt Anne fest, dass sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt.

Gilt das immer?

Es gilt nicht immer. Setzt man nämlich sowohl für a als auch für b dieselbe Zahl ein, so erhält man $n = 0$, und es ergibt sich nicht $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl, da Brüche mit dem Nenner 0 nicht existieren.

Aufgabe 2 - 231012
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

Es gilt
$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$$
Damit lässt sich die linke Seite der Ungleichung als Produkt dreier Faktoren darstellen. Ein Produkt dreier Faktoren ist genau dann positiv, wenn

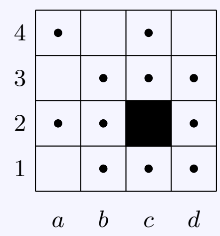
(a) alle drei Faktoren positiv sind oder
(b) zwei Faktoren negativ sind und der dritte positiv ist.

Fall (b) tritt genau dann ein, wenn der zweitgrößte Faktor x negativ und der größte Faktor $x+3$ positiv ist, d.h. genau dann, wenn die Ungleichungen $x < 0$ und $x > -3$ gelten, Fall (a) genau dann, wenn $x - 3$ positiv ist, also $x > 3$ gilt.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x die zu ermittelnden, für die gilt:
$$-3 < x < 0 \qquad \text{oder} \qquad x > 3$$

Aufgabe 3 - 231013
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

In der Abbildung ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z.B. die Dame in der Abbildung auf c2.



Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

I. Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann muss in jeder Reihe und in jeder Spalte genau eine Dame stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass in der Zeile 4 die Dame auf a4 oder auf b4 steht.

Fall 1: Die erste Dame stehe auf a4.

Dann kann in der Zeile 2 die zweite Dame entweder auf b2 oder d2 gestellt werden.

Fall 1a: Die Dame stehe auf b2.

4	■	•	•	•
3	•	•	•	
2	•	■	•	•
1	•	•	•	•
	a	*b*	*c*	*d*

Dann kann in Zeile 1 keine Dame mehr aufgestellt werden. Es gibt in diesem Falle mithin keine Lösung.

Fall 1b: Die Dame stehe auf d2.

4	■	•	•	•
3	•	•	•	•
2	•	•	•	■
1	•		•	•
	a	*b*	*c*	*d*

Dann kann in Zeile 3 keine Dame mehr aufgestellt werden. Folglich gibt es in diesem Falle ebenfalls keine Lösung.

Fall 2: Die erste Dame stehe auf b4.

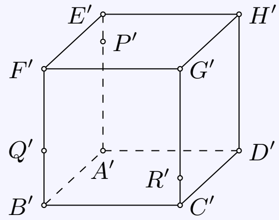
4	•	■	•	•
3	•	•	•	
2		•		•
1		•		
	a	*b*	*c*	*d*

Dann folgt zwangsläufig für die Standorte der restlichen drei Damen Zeile 3 : d3, Zeile 2 : a2, Zeile 1 : c1. Also kann es (bis auf Drehung und Spiegelung) nur die Aufstellung der Abbildung als Lösung geben.

4		■		
3				■
2	■			
1			■	
	a	*b*	*c*	*d*

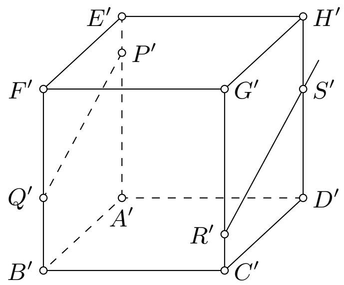
II. In der Tat erfüllt diese Aufstellung die Bedingungen der Aufgabe. Daher erfüllt (bis auf Drehung und Spiegelung) genau diese Aufstellung die Bedingungen.

Aufgabe 4 - 231014



Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, dass $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht, die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, dass der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!



Beschreibung der Konstruktion von S':

Man konstruiert auf den Strecken $A'E'$, $B'F'$ und $C'G'$ mittels Hilfskonstruktion (Strahlensatz) diejenigen Punkte P',Q' und R', für die

$$A'P' : P'E' = 4 : 1 \quad ; \quad B'Q' : Q'F' = 2 : 3 \quad ; \quad C'R' : R'G' = 1 : 4$$

gilt. Dann konstruiert man (Abbildung) die Parallele durch R' zu $Q'P'$ und bringt sie zum Schnitt mit der Geraden durch $D'H'$. Der Schnittpunkt ist S'.

Beweis, dass S den so konstruierten Punkt S' als Bild hat:

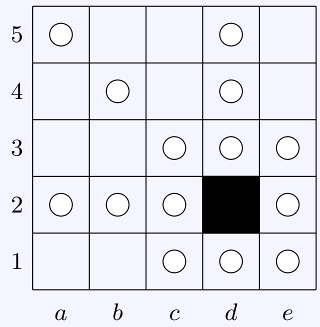
Da bei Parallelprojektion Teilverhältnisse unverändert bleiben, sind die konstruierten Punkte P',Q',R' die Bilder von P,Q bzw. R.
Da die Ebene durch A, B, F, E parallel zur Ebene durch D, C, G, H ist, werden diese beiden Ebenen von der Ebene durch P, Q, R in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten. Weil bei Parallelprojektion parallele Geraden parallele Bildgeraden haben, ist die konstruierte Parallele durch R' zu $Q'P'$ die Bildgerade der Geraden durch R, S. Ihr Schnittpunkt S' mit $D'H'$ ist folglich das Bild des Punktes S.

Lösungen der I. Runde 1983 übernommen von [5]

7.25.2 II. Runde 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231021

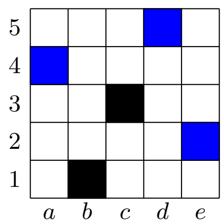
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann.
In der Abbildung ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z.B. die Dame auf d2).



Auf einem Quadrat aus 5×5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

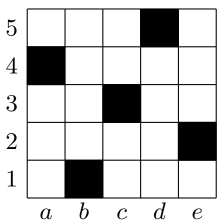
I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muss.
Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

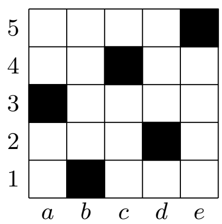
(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.
In Zeile 1 muss dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Aus dem Bild ist ersichtlich, dass drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können.



(2) Auf den Feld c3 steht keine Dame.
Stünde dann in keinem der Felder b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 $(*)$ eine Dame, so müsste von den beiden Zeile 1 und 5 die eine in einem Eckfeld (Spalte a oder e), die andere in ihrem Mittelfeld (Spalte c) besetzt sein.
Das Entsprechende würde für die beiden Spalten a und e gelten.

Dies ergäbe einen Widerspruch, da die Dame auf dem Mittelfeld der Zeile 1 oder 5 die Dame auf dem Mittelfeld der Spalte a oder e erreichen könnte.
Also steht eine Dame auf einem der Felder(*).
Durch eventuelle Drehung oder Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Auf e3 kann dann keine Dame stehen, da von den Damen auf b1, e3 alle Felder der Zeile 2 erreicht würden.
Also muss in Zeile 3 eine Dame auf a3 stehen. Aus dem Bild ist dann ersichtlich:
Auf d4 kann keine Dame stehen (keine Möglichkeit für Zeile 5), also steht auf c4 eine, und dann können zwei weitere Damen nur noch auf d2 und e5 stehen.
Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Spiegelung und Drehung höchstens die beiden Aufstellungen der Bilder.





II. Diese beiden Aufstellungen erfüllen auch die Bedingung, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Sie lassen sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen, da bei jeder Drehung oder Spiegelung des Quadrates das Feld c3 in sich übergeht, das im linken Bild besetzt ist, im rechten Bild aber nicht.

Somit gibt es bis auf Drehung und Spiegelung genau die beiden Aufstellungen der geforderten Art, die in den letzten beiden Bildern angegeben sind.

Aufgabe 2 - 231022
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $[g;r]$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung erfüllen:

$$\frac{3}{3r^2+1} = g$$

I. Wenn ein Zahlenpaar $[g;r]$ die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Da das Quadrat jeder reellen Zahl ≥ 0 ist, gilt

$$3r^2 + 1 \geq 1 \qquad (1)$$

Hieraus folgt einerseits $3r^2 + 1 > 0$; daher und wegen $3 > 0$ ist

$$\frac{3}{3r^2+1} > 0$$

Andererseits folgt aus (1), dass

$$\frac{3}{3r^2+1} \leq \frac{3}{1} = 3$$

gilt. Somit erfüllt die ganze Zahl g die Ungleichung $0 < g \leq 3 \quad (2)$.
Aus $\frac{3}{3r^2+1} = g$ folgt weiter

$$3gr^2 + g = 3 \qquad ; \qquad r^2 = \frac{3-g}{3g}$$

Diese Gleichung lautet für die ganzzahligen Lösungen von (2), wie in der Tabelle angegeben:

g	$r^2 = \frac{3-g}{3g}$
1	$r^2 = \frac{2}{3}$
2	$r^2 = \frac{1}{6}$
3	$r^2 = 0$

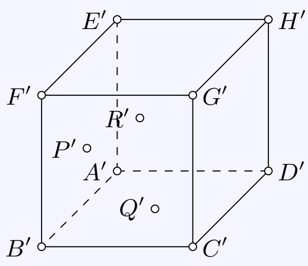
Daher können nur die Paare

$$\left[1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \quad \left[1; \sqrt{-\frac{2}{3}}\right], \quad \left[2; \sqrt{\frac{1}{6}}\right], \quad \left[2; \sqrt{-\frac{1}{6}}\right], \quad [3; 0]$$

die verlangten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften, denn 1, 2 und 3 sind ganze Zahlen und $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{6}}, 0$ sind reelle Zahlen.
Ein Probe durch Einsetzen der Zahlen bestätigt die Lösung.

Aufgabe 3 - 231023
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben.
Ferner sind die Bilder P', Q' und R' dreier Punkte P, Q bzw. R gegeben, wobei P auf der Seitenfläche $ABFE$, Q auf der Seitenfläche $BCGF$, R auf der Seitenfläche $DAEH$ liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P, Q und R!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Arbeitsblatt:

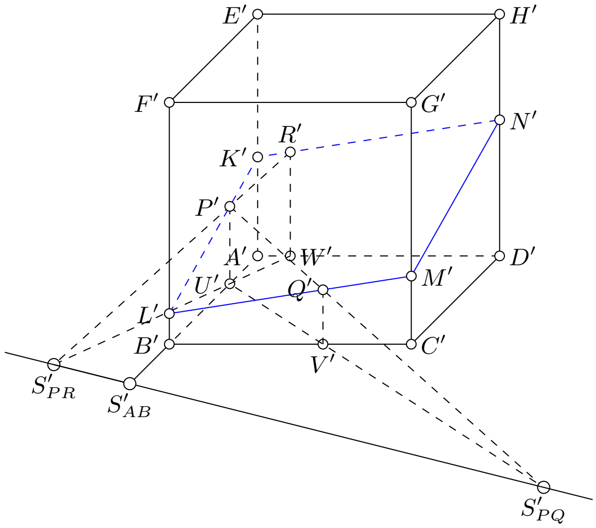


Die Parallelen durch P, Q, R zu FB liegen in den Seitenflächen $ABFE$, $BDGF$ bzw. $DAEH$. Sie schneiden daher die Strecken AB, BC bzw. DA; die Schnittpunkte seien U, V bzw. W. Da parallele Geraden bei Parallelprojektion wieder in parallele Geraden übergehen, folgt:

(1) Man konstruiere die Parallelen durch P', Q', R' zu $F'B'$ und ihre Schnittpunkte U', V' bzw. W' mit $A'B'$, $B'V'$ bzw. $D'A'$ dann sind U', V', W' die Bildpunkte von U, V bzw. W.
Wegen $PU \parallel QV$ liegen P, Q, U, V in derselben Ebene. Die Geraden durch P, Q bzw. U, V sind nicht zueinander parallel (denn wie die Konstruktion ergibt, ist $P'Q' \nparallel U'V'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{PQ}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da P und Q und folglich ihre Verbindungsgerade in dieser Ebene liegen) und in der Ebene durch A, B, C, D (da U und V in dieser liegen). Daraus folgt:

(2) Man konstruiere die Geraden durch P', Q' bzw. U', V' und ihren Schnittpunkt S'_{PQ}; dann ist S'_{PQ} der Bildpunkt eines Punktes S_{PQ} auf der Schnittgeraden$s$ der Ebene durch P, Q, R bzw. A, B, C, D.

(3) Man konstruiere die Geraden durch P', R' bzw. U', W' und ihren Schnittpunkt S'_{PR}; dann ist S'_{PR} der Bildpunkt eines Punktes S_{PR} auf der Schnittgeraden s.



(4) die Gerade s' durch S'_{PQ}, S'_{PR}, so ist s' die Bildgerade von s.
Die Gerade durch A, B und die Gerade s liegen in der Ebene durch A, B, C, D. Sie sind auch nicht parallel zueinander (dann es ist $A'B' \nparallel s'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{AB}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da s in dieser Ebene liegt) und in der Ebene durch A, B, F, E. Das gilt auch von P.
Also ist die Gerade durch S_{AB} und P die Schnittgerade der Ebenen durch P, Q, R bzw. A, B, F, E. Die im Quadrat $ABFE$ gelegene Teilstrecke dieser Geraden ist folglich ein Teil der gesuchten Schnittfigur.

Daraus folgt: Konstruiert man
(5) die Gerade durch A', B' und ihren Schnittpunkt S'_{AB} mit s',
(6) die Gerade durch S'_{AB}, P' und ihre in $A'B'F'E'$ gelegene Teilstrecke $K'L'$ ('K' auf $A'E'$m L' auf $B'F'$, so ist $K'L'$ das Bild des Teiles der Schnittfigur (K auf AE, L auf BF).

Damit folgt weiter:
(7) Man verlängere $L'Q'$ bis zum Schnitt M' mit $C'G'$ sowie $K'R'$ bis zum Schnitt N' mit $D'H'$.
Dann ist das Viereck $K'L'M'N'$ das Bild der Schnittfigur $KLMN$.

Aufgabe 4 - 231024
Beweisen Sie, dass es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt!

Es gilt $3^3 = 27$.
Aus $0 < x < 1$ folgt auch $x^x < 1$; denn da x rational ist, gibt es natürliche Zahlen $p, q > 0$ mit $x = \frac{p}{q}$, und damit ist $x^x = \frac{p}{x^q} = \sqrt[q]{x^p}$. Aus $x < 1$ folgt somit $x^p > 1$ und daraus $\sqrt[q]{x^p} < 1$.
Aus $x = 1$ folgt $x^x = 1$.
Aus $1 < x < 3$ folgt $x^x < x^3$, da für Potenzen mit einer Basis oberhalb 1 gilt: Je größer ihr Exponent ist, um so größer ist ihre Potenz. Weiter folgt analog $x^3 < 3^3$.
Mit den gleichen Begründungen folgt aus $x > 3$, dass $x^x > x^3 > 3^3$ gilt.

Aus (I) bis (IV) folgt, dass unter allen positiven rationalen Zahlen x genau die Zahl $x = 3$ die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt.

Lösungen der II. Runde 1983 übernommen aus [5]

7.25.3 III. Runde 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231031
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g; r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2-6r+10}=g$$

gilt!

1. Wenn $(g; r)$ ein Paar mit den verlangten Eigenschaften ist, so folgt:
Ist $g = 0$, so ist $r = 0$. Ist $g \neq 0$, so folgt: r erfüllt die Gleichung

$$r^2-(6+\frac{1}{g})r+10=0$$

Deren Diskriminante ist folglich nichtnegativ, d.h., es gilt

$$\left(3+\frac{1}{2g}\right)^2-10\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|3+\frac{1}{2g}\right|\geq\sqrt{10}$$

Da g ganzzahlig und von 0 verschieden ist, gilt $|g| \geq 1$, also $\frac{1}{|g|} \leq 1$ und daher $\frac{1}{g} \geq -1$, $3+\frac{1}{2g} \geq 3-\frac{1}{2} > 0$
Also ist $|3+\frac{1}{2g}| = 3+\frac{1}{2g}$ und es folgt weiter

$$3+\frac{1}{2g}\geq\sqrt{10} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2g}\geq\sqrt{10}-3$$

Wegen $\sqrt{10}-3>0$ also einerseits $\frac{1}{2g}>0$, $g>0$, andererseits $2g \leq \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \sqrt{10}+3 < 8$, $g < 4$.
Daher verbleiben (im Fall $g \neq 0$) nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

g	$r^2-(6+\frac{1}{g}r)+10=0$	Lösungen	
1	$r^2-7r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$	$r_1=5$, $r_2=2$
2	$r^2-6{,}5r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{13}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$	$r_1=4$, $r_2=\frac{5}{2}$
3	$r^2-\frac{19}{3}r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{19}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$	$r_1=\frac{10}{3}$, $r_2=3$

Also können höchstens folgende geordnete Paare die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

$$(0;0),\quad (1;5),\quad (1;2),\quad (2;4),\quad (2;\frac{5}{2}),\quad (3;\frac{10}{3}),\quad (3;3)$$

2. Diese Paare $(g; r)$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; denn in ihnen ist jeweils g ganzzahlig und es gilt:

g	r	$r^2-6r+10$	$\frac{r}{r^2-6r+10}$
0	0	10	0
1	5	$25-30+10=5$	1
1	2	$4-12+10=2$	1
2	4	$16-24+10=2$	2
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}-\frac{60}{4}+\frac{40}{4}=\frac{5}{4}$	2
3	$\frac{10}{3}$	$\frac{100}{9}-\frac{180}{9}+\frac{90}{9}=\frac{10}{9}$	3
3	3	$9-18+10=1$	3

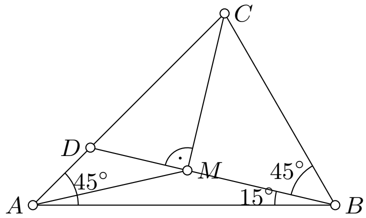
Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 231032
Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, dass

$$\angle BAC=\angle CBD=45° \quad \text{und} \quad \angle ABD=\frac{1}{3}\angle BAC$$

gilt. Beweisen Sie, dass dann $AD=\frac{1}{3}AC$ gilt!

Nach Voraussetzung ist $\angle ABD = 15°$. Nach dem Innenwinkelsatz folgt $\angle ACB = 75°$, $\angle ADB = 120°$ und daher als Nebenwinkel $\angle BDC = 60°$.



Es sei CM das Lot von C auf BD. Dann ist nach dem Innenwinkelsatz $\angle DCM = 30°$, $\angle BCM = 45°$, und daher ist $\triangle BDM$ gleichschenklig mit $MB = MC \quad (1)$.
In dem Dreieck DCM, das durch sein Spiegelbild an CM zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe (zugleich Seitenhalbierende) CM ergänzt wird, gilt $DC = 2MD \quad (2)$.
Der Kreis um M durch B, der wegen (1) auch durch C geht, geht nach der Umkehrung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes auch durch A. Also ist auch $\triangle ACM$ gleichschenklig mit $\angle CAM = \angle ACM = 30°$.
Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle AMD = 30°$; daher ist $\triangle AMD$ gleichschenklig mit $AD = AM \quad (3)$.
Aus (2) und (3) folgt $DC = 2AD$ und damit die Behauptung $AD = \frac{1}{3}AC$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 231033
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, dass jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, dass in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a+d$, $a+2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, dass (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

Angenommen es gäbe solche Mengen A,B. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $0 \in A$. Um langatmige Formulierungen zu vermeiden, benutzen wir im Folgenden Matrizen wie beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & X & Y & Z \end{pmatrix}$, um auszudrücken, dass $0 \in A, 1 \in X, 2 \in Y, 3 \in Z$.

Wir unterscheiden nach allen möglichen Verteilungen von 0,1,2,3 auf A und B und zeigen jeweils, dass 8 sowohl in A als auch in B liegen müsste, was einen Widerspruch darstellt.

Fall 1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & A \end{pmatrix}$
Die arithmetischen Folgen (0,3,6) und (1,3,5) zeigen, dass dann $5,6 \in B$. Die Folgen (4,5,6) und (5,6,7) zeigen, dass $4,7 \in A$. Also $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$
Wegen (0,4,8) müsste $8 \in B$ sein. Wegen (2,5,8) müsste andererseits aber $8 \in A$ gelten. Widerspruch!

Fall 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (2,3,4) folgt $4 \in A$. (1,4,7) zeigt dann $7 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & & & B \end{pmatrix}$
(3,5,7) zeigt jetzt $5 \in A$. (4,5,6) zeigt dann $6 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (6,7,8) folgt $8 \in A$, was im Konflikt mit der Folge (0,4,8) steht.

Fall 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & A \end{pmatrix}$.
Mit (2,3,4) folgt direkt $4 \in B$. (0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (4,5,6) folgt dann $5 \in A$. (1,4,7) zeigt $7 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & A & B & A & B & A \end{pmatrix}$
Nun stehen aber (2,5,8) und (4,6,8) im Konflikt zueinander.

Fall 4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & B \end{pmatrix}$

(0,2,4) zeigt $4 \in B$. (1,3,5) zeigt $5 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ A & B & A & B & B & A \end{pmatrix}$

(1,4,7) zeigt $7 \in A$, woraus mit (5,6,7) dann $6 \in B$ folgt: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & B & B & A & B & A \end{pmatrix}$

Der Widerspruch folgt jetzt aus (4,6,8) und (2,5,8).

Fall 5: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ A & B & B & A & \end{pmatrix}$

(0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (2,4,6) folgt dann $4 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & B & A & A & & B \end{pmatrix}$

(3,4,5) zeigt $5 \in B$. Mit (5,6,7) ist dann $7 \in A$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$

Der Widerspruch folgt aus (0,4,8) und (2,5,8).

In allen anderen Fällen gäbe es schon unter den Zahlen 0,1,2,3 eine arithmetische Folge der Länge 3, die ganz in A oder ganz in B liegt.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 231034
Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein. Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

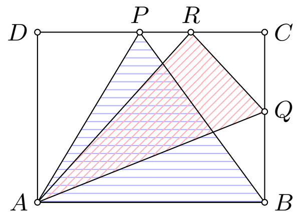
$$1983 + 23 \cdot x^2 = 5 \cdot y^2 \qquad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

Gäbe es solche ganze Zahlen, so müsste die Gleichung auch bei der Betrachtung modulo 8 erfüllt sein.
Da Quadratzahlen bei der Teilung durch 8 nur die Reste 0, 1 oder 4 lassen können, ist die linke Seite der Gleichung $1983 + 23 \cdot x^2 \equiv 7 + 7 \cdot x^2 \pmod 8$ in einer der Restklassen 7, 6 oder 3 modulo 8, während die rechte in einer der Restklassen 0, 5 oder 4 modulo 8 liegt.
Es kann also keine Gleichheit modulo 8 und damit auch nicht in den ganzen Zahlen gelten, sodass diese Gleichung keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 231035
Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, dass für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt;
Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.
Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!



Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck ABP unabhängig von der Wahl des Punktes P immer flächeninhaltsgleich ist und $A_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}ab$ gilt. Nun können wir die Punkte R und Q wählen und definieren einmal die Länge der Strecken $|\overline{CR}| =: x$ und $|\overline{CQ}| =: y$.

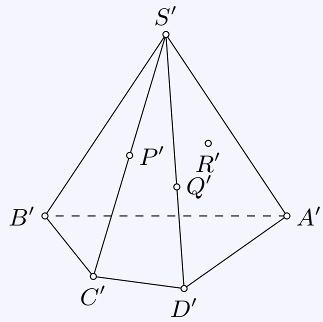
Der Flächeninhalt des Dreiecks AQR ist somit $A_{\triangle AQR} = ab - \frac{xy}{2} - \frac{(a-x)b}{2} - \frac{(b-y)a}{2} = \frac{1}{2}(ay + bx - xy)$.
Nun überprüfen wir einmal Ulrike: Aus $F_1 < F_2$ folgt somit:

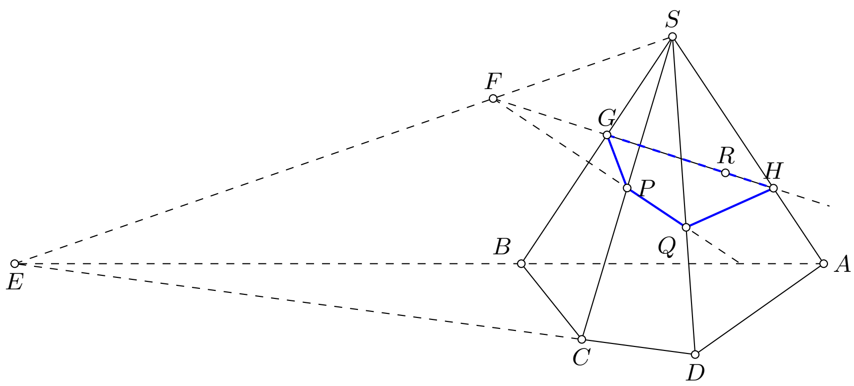
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab &< \frac{1}{2}(ay + bx - xy) \\ ab &< ay + bx - xy \\ ab - bx &< y(a - x) \\ b(a - x) &< y(a - x) \end{aligned}$$

Da $x \neq a$ laut Voraussetzung (R ist innerer Punkt der Strecke) und $a > x$ folgt somit $b < y$. Dieses ist also unmöglich. Analog folgt für Vera $b = y$, was auch unmöglich ist, da auch Q ein innerer Punkt sein soll. Für Waltraud folgt $y < b$, was möglich ist.

Aufgabe 6 - 231036

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.





Konstruktionsanweisung:

1. E ist der Schnittpunkt von AB und CD.
2. Zeichne eine Gerade durch E und S.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.
4. F ist der Schnittpunkt der Geraden PQ und ES.
5. Zeichne eine Gerade durch F und R.
6. G ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante BS.
7. H ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante AS.

Das Viereck $PQHG$ ist die gesuchte Schnittfigur, die Strecke GH ist eine verdeckte Kante.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

7.25.4 IV. Runde 1983, Klasse 10

Aufgabe 1 - 231041
Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form

$$z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$$

mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

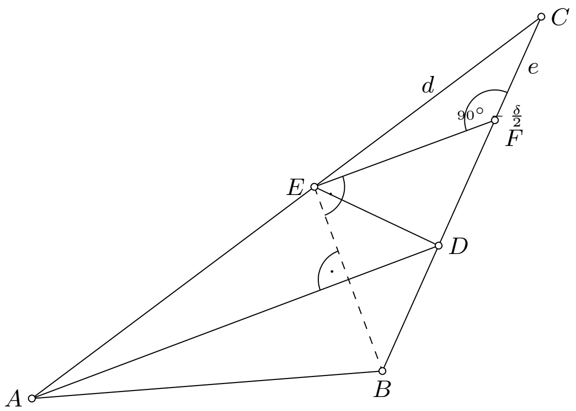
Nein, die gibt es nicht.
Die Quadratzahl z lässt bei der Teilung durch 4 den Rest 0 oder 1, während für gerade n der Term $n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n = z - 3$ offenbar durch 4 teilbar ist, also z den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lassen würde, und für ungerade n wegen $n^2 \equiv 1 \pmod 4$, genauso auch

$$z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3 \equiv 1 + 3n - 5 - 15n + 4 + 12n + 3 = 3 \pmod 4$$

den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lässt.
Demnach gibt es kein n, sodass $n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 231042
"Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80°$ und der Differenz $u - v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a!"
Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80°$.
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\angle ABC$, $\angle ACB$ sind, so gilt:
$b - c = d$, $u - v = e$, $\beta - \gamma = \delta$.
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Es sei $\angle BAC = \alpha$, auf AC sei E der Punkte mit $AE = c$, azf DC sei F der Punkt mit $DF = v$. Dann ist $EC = d$ und $FC = e$.
Die Dreiecke ADB und ADE sind nach Kongruenzsatz sws kongruent, also liegen B und E symmetrisch zur Geraden durch A, D. Hieraus folgt einerseits $BE \perp AD$, andererseits $DE = v$. Also ist nach dem Thalessatz auch $BE \perp EF$ und folglich $EF \parallel AD$. Hiernach gilt $\angle CEF = \angle CAD = \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen, Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$) und nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle EFC$ daher

$$\angle EFC = 180° - \gamma - (90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = 90° + \frac{\delta}{2}$$

II. Daher entspricht ein Dreiecke ABC nur dann den Bedingungen der Aufgaben, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck EFC aus $EC = d$, $FC = e$ und $\angle EFC = 90° + \frac{\delta}{2}$.

(2) Man errichtet die Senkrechte in E auf EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CF über F hinaus sei B.

(3) Man konstruiert den Mittelpunkt D von BF.

(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CE über E hinaus sei A.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (2), (3) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt E auf dem Kreis um D durch B und F, also ist $DE = DB$ und daher $\triangle BED$ gleichschenklig mit - wegen (2), (4) - auf DA gelegener Höhe zu BE. Somit liegen B und E symmetrisch bezüglich der Geraden durch A, D; also gilt $AB = AE$ und daher $b - c = AC - AB = EC = d$ (siehe (1)).

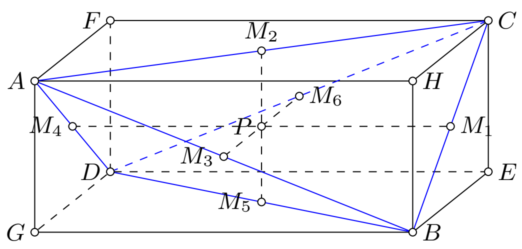
Ferner folgt $\angle BAD = \angle EAD$; d.h., AD ist die Winkelhalbierende von $\angle BAC$. Wegen (3), also $BD = DF$, folgt somit $u - v = CD - BD = FC = e$ (siehe (1)).
Nach (4) ist für $\alpha = \angle BAC$ schließlich $\frac{\alpha}{2} = \angle CEF$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen), woraus nach dem (auf $\triangle ABC$ und $\triangle EFC$ angewandten) Innenwinkelsatz und (1) auch folgt:

$$\beta - \gamma = 180° - \alpha - 2\gamma = 180° - 2(\angle CEF + \angle ECF) = 2\angle EFC - 180° = \delta$$

IV. Da für die gegebenen Größen $d > e$ und $90° + \frac{\delta}{2} < 180°$ gilt, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $\angle EFC > 90°$ schneidet die in (2) konstruierte Senkrechte die Verlängerung von CF über F hinaus; d.h., Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig ausführbar.
Auch Konstruktionsschritt (3) ist eindeutig ausführbar und Konstruktionsschritt (4) ebenfalls; denn da D auf der Verlängerung der Seite CF des Dreiecks EFC liegt, schneidet die in (4) zur Dreiecksseite EF konstruierte Parallele die Verlängerung der Seite CE dieses Dreiecks.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 231043A
Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $BC = AD$, $CA = BD$ und $AB = CD$ vorausgesetzt.
Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und dass dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d.h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!



Die durch BC gehende und gleichzeitig zu AC parallele Ebene sowie die durch AC gehende und gleichzeitig zu BC parallele Ebene bilden ein Paar zueinander paralleler Ebenen.
Dasselbe gilt für die durch CA gehende und zu VD parallele Ebene sowie die durch BD gehende und zu CA parallele Ebene.
Ein drittes Paar zueinander paralleler Ebenen bilden die durch AB gehende zu CD parallele Ebene und die durch CD gehende zu AB parallele Ebene.

Diese drei Ebenenpaare ergeben ein Parallelepiped [3] $AGBHFDEC$. Darin ist $HE = AD$, wegen der Voraussetzung $BC = AD$ also $HE = BC$ und somit das Parallelogramm $BECH$ ein Rechteck.
Entsprechend weist man die anderen Seitenflächen des Parallelepipeds als Rechteck nach; diese ist somit ein Quader.

Die Punkte $M_1, ..., M_6$ sind die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) seiner Seitenflächen. Legt man

[3] Zu den Kanten dieser Körper kann auch gelangen, indem man die durch $A, B, C, D, M_1, ..., M_6$ gehenden, zu M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 parallelen Geraden verwendet.

die drei jeweils zu einem Paar gegenüberliegender Seitenflächen paralleler Ebenen durch M_2, M_3, M_5, M_6 bzw. durch M_3, M_1, M_6, M_4 bzw. durch M_1, M_2, M_4, M_5, so folgt einerseits:
Die Gerade durch M_1, M_4, die Gerade durch M_2, M_5 und die Gerade durch M_3, M_6 sind jeweils Schnittgerade von zwei dieser drei Ebenen. Der Schnittpunkt P der drei Ebenen liegt somit auf allen drei Strecken M_1M_4, M_2M_5 und M_3M_6.

Andererseits zerlegen die drei Ebenen den Quader $AGBHFDEC$ in acht kongruente Teilquader. Der Punkt P ist gemeinsame Ecke dieser Teilquader; in jedem Teilquader führt die von P ausgehende Körperdiagonale zu einem der Punkte A, G, B, H, F, D, E, C.
Daher hat P von diesen acht Punkten gleiche Abstände, insbesondere gilt: $PA = PB = PC = PD$. Folglich ist P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 231043B
a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \tag{1}$$

hat!
Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z \leq g+1$ gilt.
Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat!
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!
b) Beweisen Sie, dass jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muss, d.h., dass sie für jedes reelle x die Gleichung $f(x+2) = f(x)$ erfüllt!

a) Es sei die Funktion f definiert als $f(x) := [x] \pmod 2 := [x] - 2 \cdot \left[\frac{[x]}{2}\right]$. Dann ist $f(x)$ gleich 0, wenn $[x]$ gerade ist und 1, wenn $[x]$ ungerade ist. Diese Funktion ist offenbar für alle reellen Zahlen x definiert. Wir führen zum Nachweis von (1) eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $[x]$ ist gerade.
Dann ist $f(x) = 0$, $[x+1]$ ungerade, $f(x+1)$ also 1 und damit auch $f(x+1) = 1 = 0 + (-1)^0 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

2. Fall: $[x]$ ist ungerade.
Dann ist $f(x) = 1$, $[x+1]$ gerade, $f(x+1)$ also 0 und damit auch $f(x+1) = 0 = 1 + (-1)^1 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

Also erfüllt die angegebene Funktion f die Bedingung (1). Sie ist stückweise konstant, immer genau 0 in jedem Intervall $[2n, 2n+1)$ und immer genau 1 in jedem Intervall $[2n+1, 2n+2)$ für jede ganze Zahl n.

b) Sei f eine Funktion, die die Bedingung (1) erfüllt. Es ist dann für jedes x der Wert

$$[f(x+1)] = [f(x)] + (-1)^{[f(x)]} = [f(x)] \pm 1$$

sodass $[f(x+1)]$ und $[f(x)]$ niemals gleiche Parität haben können, d.h., von diesen beiden Werten ist immer genau einer gerade und genau einer ungerade.
Damit ist für jedes x der Term

$$(-1)^{[f(x+1)]} + (-1)^{[f(x)]} = (-1) + 1 = 0$$

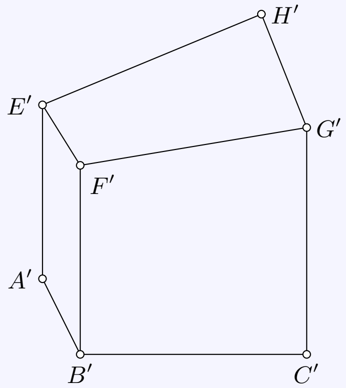
wobei die -1 durch den ungeraden und die 1 durch den geraden Exponenten erzeugt wird.
Also ist für alle x

$$f(x+2) = f(x+1) + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x) + (-1)^{[f(x)]} + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x), \square$$

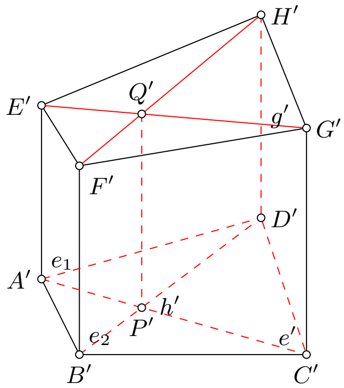
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 231044

Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und dass die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.
Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!
Arbeitsblatt:



Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Die Strecke $E'G'$ schneidet die Strecke $F'H'$ in einem Punkt Q'.

(2) Die Parallele durch Q' zu $A'E'$ schneidet die Strecke $A'C'$ in einem Punkt P'.

(3) Die Parallele durch H' zu $A'E'$ schneidet die Gerade durch B', P' in einem Punkt D'.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt D' das Bild von D ist:
Da $EFGH$ ein ebenes Viereck ist, schneiden sich EG und F in einem Punkt Q, und der in (1) konstruierte Punkt Q' ist sein Bild.
Die Ebene e_1 durch A, E, G und die Ebene e_2 durch B, F, H gehen beide durch Q, und sie sind beide parallel zu AE. Also ist die durch Q parallel zu AE gehende Gerade die Schnittgerade von e_1 und e_2. Sie schneidet somit die in e_1 liegende Strecke AC in einem Punkt P, und der in (2) konstruierte Punkt P' ist sein Bild.
Zugleich ist P als ein Punkt auf der Schnittgeraden h von e_2 mit der Ebene e durch A, B, C nachgewiesen. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden h ist B. Da aber auch D in e und (wegen $DH \parallel BF$) in e_2 liegt, ist D ebenfalls ein Punkt von h, d.h., die Gerade h durch B und P geht auch durch D; ihr Bild ist die in (3) konstruierte Gerade durch B', P'.
Andererseits liegt D auch auf der Parallelen g durch H zu AE, und deren Bild ist die in (3) konstruierte Parallele zu H' zu $A'E'$. Daher ist der in (3) konstruierte Punkt D' das Bild von D.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 231045

Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die $0° \leq x \leq 180°$ (1) und

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \qquad (2)$$

gilt!

Die Gleichung ist äquivalent zu $\sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} = 1 + \sin^2 x$.

Für den angegebenen Bereich für x ist $0 \leq \sin x \leq 1$. Also ist $\sqrt{\sin x} \leq 1$ und damit $2^{\sqrt{\sin x}} \leq 2$, wobei Gleichheit nur genau für $\sin x = 1$, also $x = 90°$ eintritt.

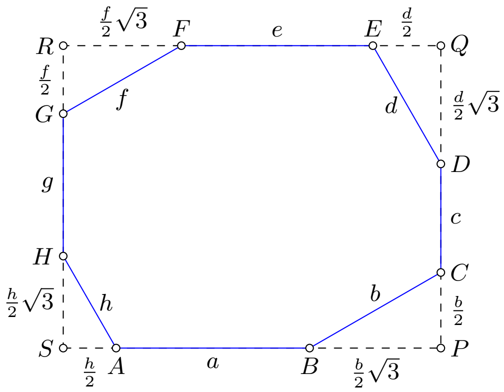
Für alle reellen Zahlen z gilt $2z \leq 1 + z^2$, wobei Gleichheit nur für $z = 1$ eintritt, da diese Ungleichung äquivalent ist zu $0 \leq 1 - 2z + z^2 = (1 - z)^2$.
Also ist für $x \neq 90°$ und damit $z := \sin x \neq 1$

$$1 + \sin^2 x = \sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} < \sin x \cdot 2 < 1 + \sin^2 x$$

was ein Widerspruch darstellt. Also kann x nicht verschieden von $90°$ sein.
Für $x = 90°$ und damit $\sin x = 1$ folgt aber schnell die Identität $\left(2^{\sqrt{1}} - 1\right) \cdot 1 = (2^1 - 1) = 1$, sodass es genau eine Lösung für x im vorgegebenen Intervall gibt, nämlich $x = 90°$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 231046
Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:
(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.
(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:
In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$ und $DE = HA$.



Die Geraden durch A und B bzw. C und D bzw. E und F bzw. G und H mögen einander in den Punkten S, P, Q, R schneiden, wie es die Abbildung zeigt.
Dann ist $SPQR$ ein Rechteck, da die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG wegen der Sätze über Nebenwinkel und über die Winkelsumme im Dreieck rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei S, P, Q und R sind. Es gilt nämlich:

Die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG haben nach dem Nebenwinkelsatz je einen Winkel von 30° und einen Winkel von 60°, und zwar so, dass o.B.d.A.

$$\angle SAH = \angle PCB = \angle QED = \angle RGF = 60° \qquad \text{sowie}$$

$$\angle SHA = \angle PBC = \angle QDE = \angle RFG = 30°$$

gilt. Es sei nun ferner $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $EF = e$, $FG = f$, $GH = g$ und $HA = h$.
Nach einem bekannten Satz über gleichseitige Dreiecke gilt dann: $AS = \frac{h}{2}$, $PC = \frac{b}{2}$, $EQ = \frac{d}{2}$, $GR = \frac{f}{2}$ sowie

$$SH = \frac{h}{2}\sqrt{3}, \quad BM = \frac{b}{2}\sqrt{3}, \quad DQ = \frac{d}{2}\sqrt{3}, \quad RF = \frac{f}{2}\sqrt{3}$$

Da $SPQR$ ein Rechteck ist, gilt $SP = QR$ und $SR = PQ$, also

$$\frac{h}{2} + a + \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{f}{2}\sqrt{3} + e + \frac{d}{2} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{h}{2}\sqrt{3} + g + \frac{f}{2} = \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

woraus man

$$\sqrt{3}\left(\frac{b}{2} - \frac{f}{2}\right) = e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{3}\left(\frac{h}{2} - \frac{d}{2}\right) = \frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2}$$

erhält. Da die Maßzahlen von a,b,c,d,e,f,g,h laut Aufgabe rationalen Zahlen sein sollen, muss $\frac{b}{2} - \frac{f}{2} = 0$ und $\frac{h}{2} - \frac{d}{2} = 0$, also $b = f$ und $h = d$ gelten.
Wegen $e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} = 0$ und $\frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2} = 0$ folgt schließlich $e = a$ und $c = g$.
Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Übernommen von [5]

7.26 XXIV. Olympiade 1984

7.26.1 I. Runde 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241011
Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich *im Kopf* nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, dass dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

Die beiden zu multiplizierenden Zahlen lassen sich in der Gestalt $10 + a$ bzw. $10 + b$ schreiben, wobei a bzw. b ihre Einerziffern sind. Nach dem beschriebenen Verfahren hat man zuerst $10 + a + b$, dann $10 \cdot (10 + a + b)$ und schließlich $10 \cdot (10 + a + b) + a \cdot b$ zu bilden. Diese Zahl ist gleich

$$100 + 10a + 10b + ab$$

Andererseits ist das gesuchte Produkt

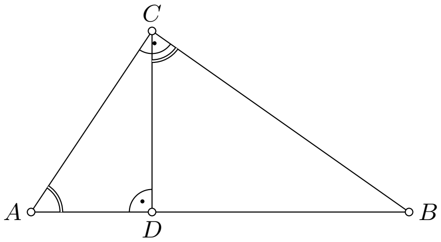
$$(10 + a) \cdot (10 + b) = 100 + 10a + 10b + ab$$

Es stimmt also mit der nach den Verfahren berechneten Zahl überein. w.z.b.w.

Aufgabe 2 - 241012
In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D. Für ihn gelte.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!



Da in dem Dreieck ABC die Innenwinkel bei A und B spitz sind, liegt die Höhe CD innerhalb des Dreiecks. Nach Voraussetzung gilt $\angle CDA = \angle BDC = 90°$.

Aue der Voraussetzung folgt ferner $AC : CD = CB : BC$.
Daher sind die Dreiecke ACD und CBD nach dem Ähnlichkeitssatz "ssw" einander ähnlich, da der jeweils genannte Winkel, in dem sie übereinstimmen, ein rechter Winkel ist, so dass ihm die größere der beiden jeweils genannten Seiten gegenüberliegt.

Daraus folgt $\angle DAC = \angle DCB \qquad (1)$.

Ferner gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ADC nach dem Winkelsummensatz $\angle ACD = 90° - \angle DAC$. Wegen (1) erhält man damit

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 90°$$

Aufgabe 3 - 241013
Ermitteln Sie alle Tripel $(x,\ y,\ z)$ reeller Zahlen x, y, z, für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x \cdot (y+z) = 0. \qquad (5)$$
$$y \cdot (x+z) = 0. \qquad (6)$$

(1) Wenn ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt, eo folgt:

So liegt genau einer der vier folgenden Fälle (A),(B),(C),(D) vor:

(A) Es gilt $x = 0$ und $y = 0$.

(B) Es gilt $x = 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fall folgt aus (2), dass $z = -x = 0$ gilt.

(C) Es gilt $x \neq 0$ und $y = 0$. In diesem Fall folgt aus (1), dass $z = -y = 0$ gilt.

(D) Es gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fell folgt aus (1) und (2), dass $z = -x = -y$ gilt.

Daher können nur die folgenden Tripel (1) und (2) erfüllen:

(a) Alle Tripel $(0{,}0{,}z)$ mit beliebigem reellem z.
(b) alle Tripel $(0{,}y{,}0)$ mit beliebigem reellem $y \neq 0$,
(c) alle Tripel $(x{,}0{,}0)$ mit beliebigem reellem $x \neq 0$,
(d) alle Tripel $(x{,}x{,}-x)$ mit beliebigem reellem $x \neq 0$.

(II) Es gilt für jedes Tripel

in (a): $0 \cdot (0+z) = 0$;
in (b): $0 \cdot (y+0) = 0$, $y \cdot (0+0) = 0$;
in (c): $x \cdot (0+0) = 0$, $0 \cdot (x+0) = 0$;
in (a): $x \cdot (x+x) = 0$;

womit in allen Fällen (1) und (2) bestätigt sind.

Aus (I) und (11) folgt, dass genau die in (a),(b),(c) und (d) genannten Tripel die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 4 - 241014
Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k, die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, dass jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und daß jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

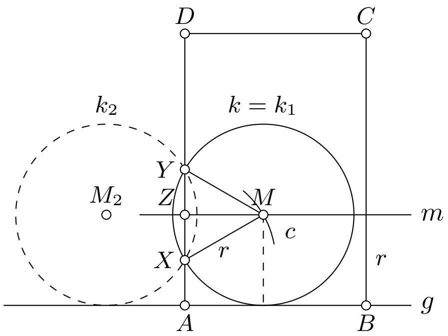
Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

I. Wenn ein Kreis k die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

Für den Mittelpunkt M und den Radius r von k gilt $MX = MY = r$, also liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY sowie auf dem Kreis c um X mit r.

Da die Gerade g berührt, hat M von g den Abstand r. Wegen $AB \perp AD$ steht g senkrecht auf der Geraden durch X,Y und ist folglich parallel zu m. Daher ist der Abstand r, den M von g hat, auch der Abstand der beiden Parallelen g, m voneinander. Da der Mittelpunkt Z von XY auf m liegt und $ZA \perp g$ ist, gilt somit auch $AZ =$.

II. Daher hat ein Kreis k nur dann die geforderten Eigenschaften, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert den Mittelpunkt Z und die Mittelsenkrechte m von XY.

(2) Man konstruiert den Kreis c um X mit $r = AZ$.

(3) Man wählt einen Schnittpunkt M von c mit m und konstruiert den Kreis k um M durch X.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) und (3) liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY, also gilt $MX = MY$. Daher geht der nach (3) durch X gehende Kreis k auch durch Y. Wegen $AB \perp AD$ ist M zu g parallel und hat den Abstand AZ von g. Somit hat auch M den Abstand AZ von g.

Andererseits ist der Radius MX von k gleich AZ, da M nach (3) auf dem in (2) konstruierten Kreis c um X mit AZ liegt.
Also berührt k die Gerade g.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind wegen $X \neq Y$ und $Z \neq A$ (was aus X,$Y \neq A$ und der Lage von X, Y auf AD folgt) eindeutig ausführbar. Da X und Y auf der Seite AD des Rechtecks $ABCD$ liegen, aber nicht in A, liegt A auf der Verlängerung der Strecke XY, deren Mittelpunkt Z ist; also gilt $XZ = YZ < AZ$.

Der Punkt Z durch den die Gerade m geht, ist folglich ein innerer Punkt des in (2) konstruierten Kreises c. Daher schneidet m den Kreis c in zwei verschiedenen Punkten M_1, M_2; jeden von ihnen kann man in (3) als M wählen.

Somit gibt es genau zwei Kreise k_1, k_2 mit den geforderten Eigenschaften.

Lösungen der I. Runde 1984 übernommen von [5]

7.26.2 II. Runde 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241021
Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a,b,c,d) von reellen Zahlen a,b,c,d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2 + bc = 0 \tag{1}$$
$$ab + bd = 0 \tag{2}$$
$$ac + cd = 0 \tag{3}$$
$$bc + d^2 = 0 \tag{4}$$

(I) Wenn reelle Zahlen a,b,c,d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b = 0$, so folgt aus (1) und (4), dass $a = 0$ und $d = o$ gilt. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), dass $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.
Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem erfüllen:
(A) Alle Quadrupel (0,0,c,0) mit beliebigem reellen c,
(B) alle Quadrupel $\left(a,b,-\frac{a^2}{b},-a\right)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem $b \neq 0$.
Die Probe durch Einsetzen der Werte in die Gleichungen des Systems bestätigt die Lösungen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 241022
Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, dass es nicht stumpfwinklig ist und dass für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung $CD \cdot AC = AD \cdot BC$ gilt.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\angle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ!

Laut Voraussetzung sind dann die Dreiecke ADC und DBC ähnlich, da sie im Verhältnis zweier Seiten und im gegenüberliegenden Winkel der größeren Seite übereinstimmen. Damit ist $\gamma = \alpha + \beta = 90°$.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 3 - 241023
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:
Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

Entsprechend der Aufgabenstellung muss z mindestens zweistellig sein. Dann kann z dargestellt werden durch $z = 10a + b$, wobei $0 \leq b \leq 9$ und $a = \left[\frac{z}{10}\right]$ ist. Nach dem Streichen verbleibt als Zahl a.
D.h., damit a Teiler von z ist, muss

$$\frac{10a+b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$$

ganzzahlig sein. Die ist genau dann möglich, wenn entweder $b = 0$ oder b ein Vielfaches von a ist. Da im Fall $b \neq 0$ b maximal 9 werden kann, gibt es nur für $1 \leq a \leq 9$ folgende Möglichkeiten

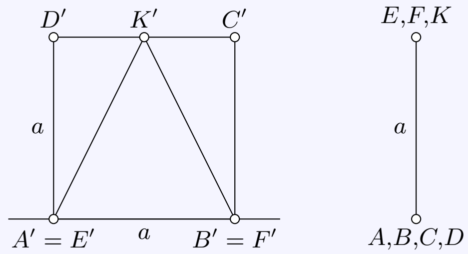
a	b	a	b	a	b	a	b
1	1,2,...,9	2	2,4,6,8	3	3,6,9	4	4, 8
5...9	jeweils $b = 2a$						

Damit sind folgende Zahlen z Lösung der Aufgabe:

1. alle auf 0 endenden natürlichen Zahl mit $z > 0$ und
2. $z \in \{11,12,13,14,15,16,17,18,19,22,24,26,28,33,36,39,44,48,55,66,77,88,99\}$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 241024



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.
Zeigen Sie, dass es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriss, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!
Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben:
Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, dass $UV...Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken $U, V, ..., Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

Die Abbildungen a) bis e) zeigen fünf Beispiel für Körper der gesuchten in schräger Parallelprojektion. Als Lösung genügt es, zwei derartige Darstellungen und die zugehörigen Angaben aufzuführen.

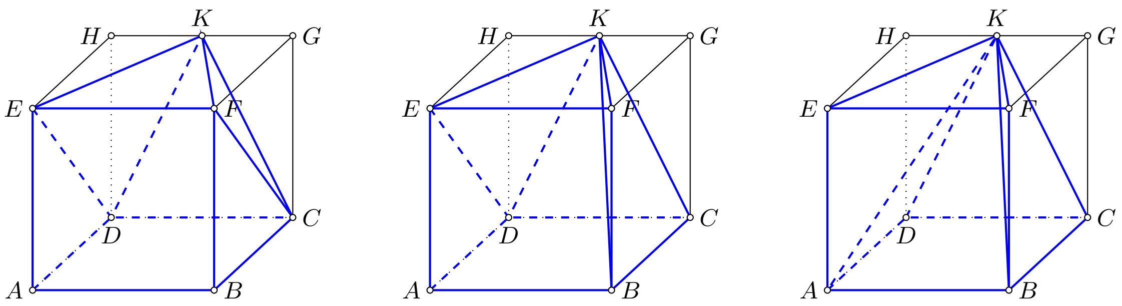


Abbildung a) Abbildung b) Abbildung c)

Zu a):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BCF, CFK, CDK, DEK, EFK$
Der Körper kann gebildet werden, indem man von dem Würfel $ABCDFEGH$ die Pyramiden $CGFK$ (Grundfläche CGF mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$, Länge der zugehörigen Höhe $GK = \frac{1}{2}a$, also Volumen $\frac{1}{12}a^3$) und $DHEK$ (zu $CGFK$ spiegelbildlich) abschneidet.
Daher beträgt das Volumen des Körpers $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

Zu b):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BFK, BCK, CDK, DEK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (Grundfläche $BCDGF$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $DEHK$ (Grundfläche DHE mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge $HK = \frac{1}{2}a$.
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 = \frac{3}{4}a^3$.

Zu c):
Seitenfächen $ABCD, ADK, AEK, ABFE, BFK, BCK, CDK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (wie in b)) mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $ADHEK$ (spiegelbildlich)
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.

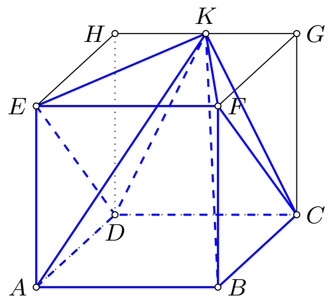


Abbildung d)

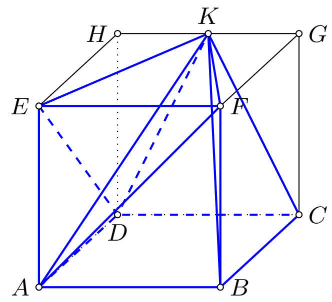


Abbildung e)

Zu d):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, ABK, BFK, BCF, CFK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$CGFK, DHEK$ (wie in a)), $ABFEK$ (Grundfläche $ABFE$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge a (Lot von K auf EF))
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

Zu e):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, AFK, ABF, BFK, BCK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$BCGFK, DHEK$ (wie in b)), $AEFK$ (Grundfläche AEF mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge a)
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{7}{12}a^3$.

Übernommen von [5]

7.26.3 III. Runde 1984, Klasse 10

Aufgabe 1 - 241031
In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$:
"Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte."
Bernd behauptet dagegen: "Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat."
Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Die Aussage von Anne ist falsch. Die Funktion $y = \cos x$ hat unendlich viele Nullstellen, sie ist nach oben beschränkt ($y \leq 1$).
Eine beliebige quadratische Parabel kann z.B. die Gleichung $y = ax^2$ aufweisen. Lässt man a sehr klein werden, wird die Parabel extrem flach und nähert sich zumindest für relativ kleine x der Funktion $y = 0$, so dass es beliebig viele Schnittpunkte geben kann. Erst, wenn $ax^2 > 1$ wird, also $|x| > \frac{1}{\sqrt{a}}$, gibt es keine weiteren Schnittpunkte.
Es ist also nur eine Frage der Wahl des Parameters a, wie viele Schnittpunkte es zwischen den Funktionen gibt. Daher ist die Aussage von Bernd korrekt, wobei durch Hinzufügen eines konstanten Summanden $y = ax^2 + b$ auch möglich ist, beliebig viele Parabeln zu erzeugen, die genau 10 Schnittpunkte mit der Funktion $y = \cos x$ haben.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 241032
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \qquad (1)$$

Zunächst die linke Ungleichung:

$$2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \to \qquad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} - x < \frac{1}{2}$$

$$\to \qquad x(x+1) < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \to \qquad x^2 + x < x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt. Die rechte Ungleichung nach dem gleichen Prinzip:

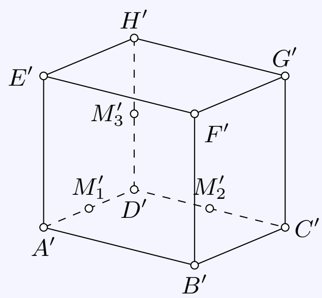
$$\frac{1}{\sqrt{x}} < 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) \qquad \to \qquad \frac{1}{2} < x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$$

$$\to \qquad x(x-1) < \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \to \qquad x^2 - x < x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Auch diese Ungleichung ist immer erfüllt (die Einschränkung $x \geq 1$ ist wegen $\sqrt{x-1}$ notwendig).

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

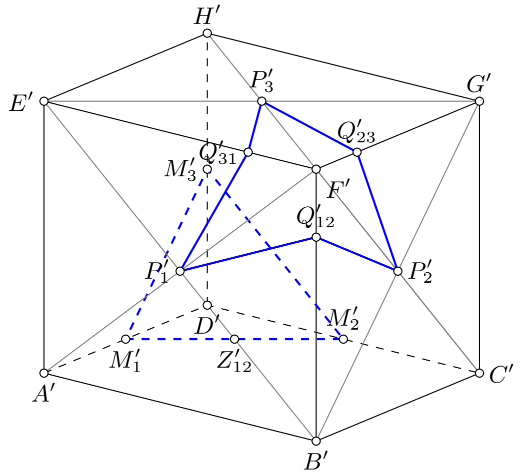
Aufgabe 3 - 241033
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten die Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen.
Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, dass das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.



Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

Die Grundfläche $M_1M_2M_3$ des Prismas hat mit der Oberfläche des Würfels genau die Strecken M_1M_2, M_2M_3 und M_3M_1 gemeinsam. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ enthält keinen Punkt der Würfeloberfläche.

Legt man einen Würfel des Kantenlänge $\frac{1}{2}AB$ so, dass er A als Ecke hat und dass seine von A ausgehenden Kanten Teilstrecken von AB, AD und AE sind, so ist M_1 eine Ecke dieses Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich der Mittelpunkt P_1 des Quadrates $ABFE$.



Daher gilt $M_1P_1 \parallel DF$; d.h., P_1 ist derjenige Punkt, in dem die Prismenkante M_1N_1 die Würfeloberfläche zum zweiten Mal (außer in M_1) durchstößt. Entsprechend durchstoßen die Kanten M_2N_2 und M_3N_3 die Würfeloberfläche in den Mittelpunkten P_2 bzw. P_3 der Quadrate $BCGF$ bzw. $EFGH$.

Legt man einen Würfel der Kantenlänge $\frac{3}{4}AB$ so, dass er B als Ecke hat und dass seine von B ausgehenden Kanten Teilstrecken von BA, BC und BF sind, so ist der Mittelpunkt Z_{12} der Strecke M_1M_2 eine Ecke des Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich derjenige Punkt Q_{12} auf BF, für den $BQ_{12} = \frac{3}{4}AB$ gilt.

Daher gilt $Z_{12}Q_{12} \parallel DF$, also liegt die Strecke $Z_{12}Q_{12}$ in der Seitenfläche $M_1M_2N_2N_1$ des Prismas. Somit sind P_1Q_{12} und $Q_{12}P_2$ die (außer M_1M_2 noch auftretenden) Schnittlinien dieser Seitenfläche mit der Oberfläche des Würfels.
Entsprechend gilt: Sind Q_{23} und Q_{31} diejenigen Punkte auf FG bzw. EF, für die $GQ_{23} = EQ_{31} = \frac{3}{4}AB$ gilt, so sind P_2Q_{23}, $Q_{23}P_3$ bzw. P_3Q_{31}, $Q_{31}P_1$ die (außer M_2M_3, M_3M_1 auftretenden) Schnittlinien des Flächen $M_2M_3N_3N_2$ bzw. $M_3M_1N_1N_3$ mit der Oberfläche des Würfels.

Damit ist bewiesen, dass eine nach der folgenden Beschreibung durchgeführt Konstruktion die gesuchten Bilder der Schnittlinien ergibt:
Man konstruiere die Bilde P_1', P_2', P_3' der Mittelpunkte P_1, P_2, P_3 der Quadrate $ABFE$, $BCGF$, $EFGH$, d.s. die Diagonalenschnittpunkte P_1', P_2', P_3' der Vierecke $A'B'F'E'$, $B'C'G'F'$, $E'F'G'H'$.
Ferner konstruiere man diejenigen Punkte Q_{12}', Q_{23}', Q_{31}' auf $F'B'$, $F'G'$ bzw. $F'E'$, für die $F'Q_{12}' = \frac{1}{4}F'B'$, $F'Q_{23}' = \frac{1}{4}F'G'$ bzw. $F'Q_{31}' = \frac{1}{4}F'E'$ gilt.

Dann sind das Dreieck $M_1'M_2'M_3'$ und das Sechseck $P_1'Q_{12}'P_2'Q_{23}'P_3'Q_{31}'$ die gesuchten Bilder der Schnittlinien.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 241034
Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.
Er findet z.B., dass sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, dass sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen lässt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

a) Es ist $89 = 64 + 25 = 8^2 + 5^2$, $90 = 81 + 9 = 9^2 + 3^2$ und (nach Aufgabenteil b) $8010 = 57^2 + 69^2$. Tatsächlich $57^2 = 3249$ und $69^2 = 4761$, sodass man die behauptete Gleichung leicht nachrechnet.

b) Seien $s = s_1^2 + s_2^2$ und $t = t_1^2 + t_2^2$. Dann ist

$$(s_1t_1 - s_2t_2)^2 + (s_1t_2 + s_2t_1)^2 = s_1^2t_1^2 - 2s_1t_1s_2t_2 + s_2^2t_2^2 + s_1^2t_2^2 + 2s_1t_2s_2t_1 + s_2^2t_1^2 =$$
$$= s_1^2t_1^2 + s_2^2t_2^2 + s_1^2t_2^2 + s_2^2t_1^2 = (s_1^2 + s_2^2) \cdot (t_1^2 + t_2^2) = s \cdot t$$

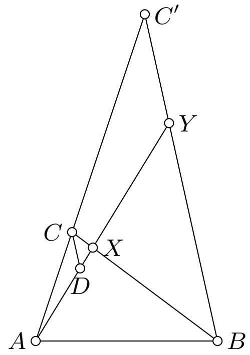
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 241035

a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $AC' = 3 \cdot AC$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $BY = 2 \cdot C'Y$ gilt!

Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.

b) Beweisen Sie, dass die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $BX : CX$ führt! Ermitteln Sie diesen Wert!



b) Für jedes Dreieck ABC und die hierzu nach a) konstruierten Punkte C', Y und X gilt:

Ist D der Schnittpunkt von AY mit der Parallelen durch C zu BC', so folgt aus dem Strahlensatz $CD = \frac{1}{3}C'Y = \frac{1}{6}BC$ und daher

$$BX : CX = BY : CD = 6$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt und der gesuchte Wert von $BX : CX$ ermittelt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 241036

Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f(\frac{3}{7})$.

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.

(2) Es gilt $f(1) = 2$.

(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

Wegen (3):

$$f(1+0) = f(1) \cdot f(0) \qquad ; \qquad f(0) = \frac{2}{2} = 1$$

Ebenfalls wegen (3):

$$f(0) = f(1) \cdot f(-1) \qquad ; \qquad f(-1) = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

Allgemein gilt:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2$$
$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) \cdot f(x) = f(x)^3$$

Auf diese Weise folgt allgemein weiter

$$f(nx) = f(x)^n \qquad ; \qquad f(nx)^{\frac{1}{n}} = f(x) \tag{4}$$

Wenn $nx = y$, gilt auch

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = f(y)^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

Wegen (4) folgt:

$$f(k \cdot 1) = f(1)^k = 2^k$$

Zusammen mit (5):

$$f\left(\frac{k}{n} \cdot 1\right) = (2^k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{k}{n}}$$

Und somit:

$$f\left(\frac{3}{7}\right) = 2^{\frac{3}{7}}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

7.26.4 IV. Runde 1984, Klasse 10

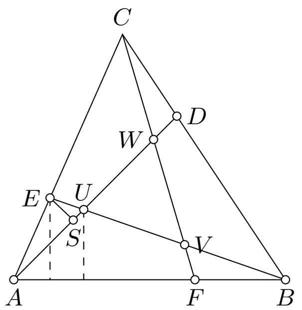
Aufgabe 1 - 241041
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1985}$ gilt!

Offensichtlich sind (0,1985) und (1985,0) Lösungen aus $\mathbb{Z}$. Dieses sind auch die einzigen Lösungen, wie wir nun zeigen.
Sei $x \neq 0$. Äquivalentes Quadrieren liefert: $x + y + 2\sqrt{xy} = 1985 \quad (*)$.
Sei nun $y = xt^2$ mit $t \in \mathbb{Q}$. Einsetzen in $(*)$ liefert:

$$x + xt^2 + 2xt = 1985 \iff x = \frac{1985}{(t+1)^2}$$

Teiler von 1985 sind $\{1; 5; 397; 1985\}$. Nur $(t+1)^2 = 1$ liefert jedoch für rationales t eine Lösung. Die haben wir oben jedoch schon notiert.

Aufgabe 2 - 241042
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $BD = 2 \cdot CD$, $CE = 2 \cdot AE$, $AF = 2 \cdot BF$ gilt.
Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!



Nach Voraussetzung ist $AE = \frac{1}{3}AC$. Da die Dreiecke ABE, ABC bezüglich der Grundlinie AE bzw. AC dieselbe Höhe haben, folgt [4]

$$J(ABE) = \frac{1}{3} \cdot J(ABC)$$

Der Schnittpunkt von AD mit der Parallelen durch E zu BC sei S. Dann folgt aus dem Strahlensatz $ES = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{6}BC$ und weiter

$$DE : DB = ES : SD = 1 : 6 \qquad \text{also} \qquad UE = \frac{1}{7}BE$$

Ferner ergibt der Strahlensatz für die Längen h_U, h_E der von U bzw. E auf die Gerade durch A und B gefällten Lote $h_U : h_E = BU : BE = 6 : 7$. Hiernach und nach (1) gilt

$$J(ABU) = \frac{6}{7} \cdot J(ABE) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

Analog folgt

$$J(BCV) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC) \qquad , \qquad J(CAW) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

und damit, wie behauptet

$$J(UVW) = J(ABC) - J(ABU) - J(BCV) - J(CAW) = \frac{1}{7} \cdot J(ABC)$$

Übernommen aus [5]

[4] Ist XYZ ein Dreieck, so bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 3A - 241043A
a) Man beweise, dass für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leq x < 4$ gilt $f(x) = p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2) = \frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

a) Wegen (3) gilt:

$$f(x) = \frac{f(x-2)}{5f(x-2)-1}$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x) = f(x-2)$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x-2) = f(x)$$

$$f(x-2)(5f(x)-1) = f(x)$$

$$f(x-2) = \frac{f(x)}{5f(x)-1} = f(x+2)$$

Die Funktion ist also periodisch mit der Periodenlänge 4, sie ist wegen (2) definiert auf $[2;4[$. Durch (3) ist sie auch auf $[4;6[$ definiert, wenn

$$p' = \frac{p}{5p-1}$$

eine reelle Zahl ergibt. Das ist für alle $p \neq \frac{1}{5}$ der Fall. Da laut Aufgabenstellung $1 \leq p \leq 2$, ist die Funktion auf dem Intervall $[2;6[$ definiert, und damit wegen der Periodizität auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Wegen der Periodizität gilt $f(1985) = f(5)$. Es ist $f(3) = p$, und daher

$$f(1985) = f(3+2) = \frac{p}{5p-1}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 241043B
Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann nicht entartet, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

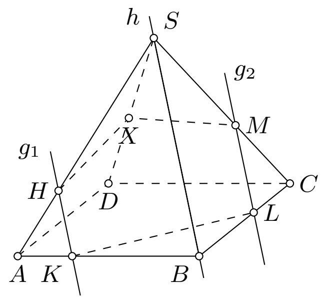
Der Durchschnitt von P mit E sei das nicht entartete Parallelogramm $HKLM$; für die Gerade g_1 durch H und K sowie die Gerade g_2 durch M und LL gilt hiernach $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$.

Die Grundfläche der Pyramide sei $ABCD$, die Spitze S; die Oberfläche P besteht somit aus der Quadratfläche $ABCD$ und den Dreiecksflächen ABS, BCS, CDS, ADS. Keine zwei der Ebenen, in denen diese fünf Flächen liegen, sind zueinander parallel, also auch nicht diejenigen beiden Ebenen E_1, E_2, die g_1 bzw. g_2 als Durchschnitt mit E haben. Somit ist der Durchschnitt von E_1 mit E_2 eine Gerade h.

Für diese gilt $g_1 \parallel h$ und $g_1 \neq h$; denn andernfalls hätten g_1 und h, da sie in E_1 liegen, einen gemeinsamen Punkt; dieser würde (da er auf h läge) auch zu E_2 und folglich (da er in E läge) zu g_2 gehören, was wegen $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$ nicht möglich ist.
Ebenso beweist man $g_2 \parallel h$ und $g_2 \neq h$.

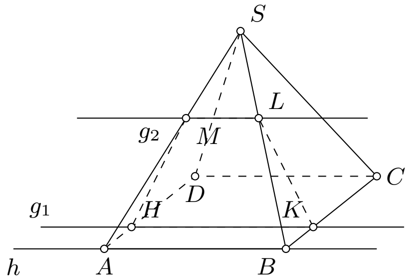
Für E_1 und E_2 liegt nun einer der folgenden Fälle (1), (2), (3), vor:

(1) In E_1, E_2 liegen zwei benachbarte Dreiecksflächen aus P, o.B.d.A.; In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt BCS. Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch B und S, und es läge (o.B.d.A.) H zwischen A und S, K zwischen A und B, L zwischen B und C, M zwischen C und S. (siehe Abbildung)



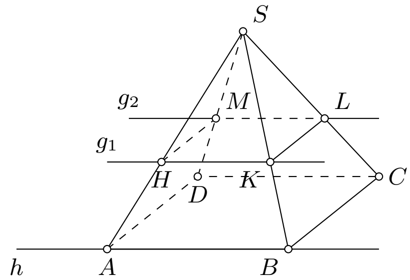
Da g_1 zwar durch H, aber wegen $g_1 \parallel h$, $g_1 \neq h$ nicht durch S ginge, also von der Geraden durch A und S verschieden wäre, schnitte E die Ebene durch A, D, S in einer Geraden, die mit der Dreiecksfläche ADS eine Strecke HX gemeinsam hätte.
Die Schnittfigur von E mit der Pyramidenoberfläche P hätte somit außer H, K, L, M einen weiteren Eckpunkt X, wäre also nicht, wie angenommen, ein nicht entartetes Parallelogramm. Daher ist Fall (1) nicht möglich.

(2) In E_1, E_2 liegen eine Dreiecksfläche und die Quadratfläche aus P, o.B.d.A.: In E_1 liegt $ABCD$, in E_2 liegt ABS.
Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch A und B, und es läge (o.B.d.A.) H zwischen A und D, K zwischen B und C, L zwischen BB und S, M zwischen A und S (siehe Abbildung).



Wegen $HA \perp AB$, $KB \perp AB$ und $HK \parallel AB$ wäre $ABKH$ ein Rechteck. Ferner wäre $MS < AS$, also wegen $ML \parallel AB$ nach dem Strahlensatz $ML < AB = HK$; somit wäre $HKLM$ kein Parallelogramm. Also ist auch der Fall (2) nicht möglich.

(3) In E_1, E_2 liegen zwei nicht benachbarte Dreiecksflächen aus P, o.B.d.A.: In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt CDS.



In diesem Fall ist h die zu AB und DC parallele Gerade durch S, und es liegt (o.B.d.A.) H in A oder zwischen A und S, K in B oder zwischen B und S, L in C oder zwischen C und S, M in D oder zwischen D und S (siehe Abbildung).

Aus $HK \parallel AB$, $HK = ML$, $ML \parallel DC$ und dem Strahlensatz folgt

$$HS : AS = HK : AB = ML : DC = MS : DS$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $HM \parallel AD$. Also ist die Ebene E parallel zur Ebene durch A, B, C, D und schneidet P folglich in einer zu $ABCD$ ähnlichen Figur, d.h. in einem Quadrat.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 241044
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen, für die $a! + b! = (a + b)!$ gilt!
Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1 \leq k \leq n$ gilt; ferner ist $0! = 1$ definiert.

Aufgrund der Symmetrie gilt allgemein, dass $(b; a)$ eine Lösung ist, wenn $(a; b)$ eine Lösung ist. Wir betrachten nachfolgend daher nur Fälle, für die $a \leq b$ ist. Da $0! = 1$ ist, ist offensichtlich, dass $a > 0$ sein muss, denn sonst müsste $1 + b! = b!$ gelten, was nicht möglich ist. Man kann die Fakultät-Funktion darstellen als

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Allgemein soll gelten: $a! + b! = (a + b)!$

$$\prod_{k=1}^{a} k + \prod_{k=1}^{b} k = \prod_{k=1}^{a+b} k$$

Wir teilen durch $b!$:

$$\frac{\prod_{k=1}^{a} k}{\prod_{k=1}^{b} k} + 1 = \frac{\prod_{k=1}^{a+b} k}{\prod_{k=1}^{b} k}$$

Da $b \geq a$ und $(a+b) > b$, kann man kürzen:

$$\frac{1}{\prod_{k=a+1}^{b} k} + 1 = \prod_{k=b+1}^{a+b} k$$

Rechts steht eine natürliche Zahl, so dass der Bruch links auch eine natürliche Zahl ergeben muss. Das ist für $b > a$ nicht möglich. Es bleiben also nur noch die Fälle $a = b > 0$ zu untersuchen. Dann muss gelten

$$2\prod_{k=1}^{a} k = \prod_{k=1}^{2a} k \qquad \rightarrow \qquad 2 = \frac{\prod_{k=1}^{2a} k}{\prod_{k=1}^{a} k} \qquad \rightarrow \qquad 2 = \prod_{k=a+1}^{2a} k$$

Das ist nur für $a = 1$ erfüllt, für größere a gilt immer

$$2 \cdot a! < (2a)!$$

Daher ist das Paar $(1;1)$ die einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2.Lösung:
O.B.d.A. sei $a \leq b$. Dann ist wegen $0! + b! = b! + 1 > b! = (0+b)!$ sicherlich $a > 0$, also $a \geq 1$ und damit

$$(a+b)! \geq (b+1)! = (b+1) \cdot b! \geq 2b!$$

wobei Gleichheit nur für $a = b = 1$ gilt, also $a! = (a+b)! - b! \geq 2b! - b! = b! \geq a!$, woraus eben $(a;b) = (1;1)$ folgt.
Einsetzen bestätigt $a! + b! = 1 + 1 = 2 = 2! = (a+b)!$, sodass dies die einzige Lösung ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 241045
Es sei

$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{999998}} + \frac{1}{\sqrt{999999}} + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$

Weisen Sie nach, dass dann $1998 < T < 1999$ gilt!

Offensichtlich ist:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = -1 + \sqrt{n+1}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > -2 + 2\sqrt{n+1} > -2 + 2\sqrt{n}$$

Für die obere Schranke ergibt die Abschätzung für

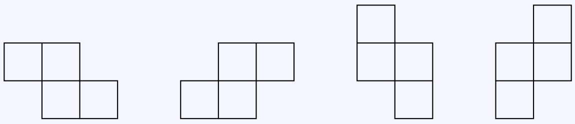
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

analog das geforderte

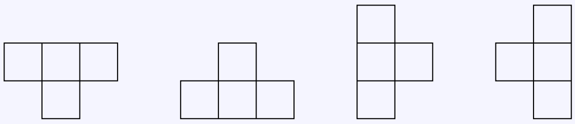
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad \text{für } (n > 1)$$

Mit $n = 100000$ ergibt sich dann die Behauptung.

Aufgabe 6 - 241046
a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen $1, 2, ..., 64$ zu nummerieren, dass für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



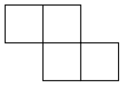
die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.
b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.

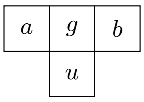
a) es genügt, die Aufgabe für die Reste mod 4 der Zahlen 1,2,...,64 zu lösen, von denen es 16 in jeder Klasse gibt. Indem wir die Reste gemäß der Tabelle

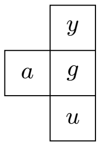
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

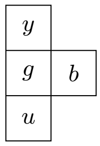
verteilen, sehen wir, dass die Bedingung erfüllt ist. Für die Teilfigur  können die beiden oberen Felder mit (3,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,1), (1,0) bzw. (0,3) belegt sein. Dann sind die beiden unteren mit (1,0), (0,3), (3,2), (2,1), (1,2), (2,3), (3,0) bzw. (0,1) belegt und 4 teilt die Summe.
Analog diskutiert man die anderen Teile oder führt entsprechende Symmetriebetrachtungen an.

x	y	z
a	g	b
c	u	d
e	f	h

b) Angenommen die verlangte Nummerierung existiert.
Da das Schachbrett nur 28 Randfelder hat und auf jeweils 32 Feldern gerade bzw. ungerade Zahlen eingetragen sind, muss es zwei benachbarte Felder geben, von denen keines auf dem Rand liegt und eines eine gerade Zahl g, das andere Feld eine ungerade Zahl u enthält.
Wir betrachten die Teilfiguren:

Wegen 

gilt $a \neq b \pmod 2$ (1). Wegen 

gilt $a \neq b \pmod 2$ (2). Wegen 

gilt $b \neq y \mod 2$ (3).
Die Beziehungen (1), (2), (3) liefern einen Widerspruch. Folglich existiert die verlangte Nummerierung nicht.

Übernommen aus [5]

7.27 XXV. Olympiade 1985

7.27.1 I. Runde 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251011

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$ gilt!

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

a) Aus den Angaben im Tafelwerk ergibt sich, dass für die Wurzeln jedenfalls folgende Ungleichungen gelten

$$2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24 \tag{1}$$
$$2{,}82<\sqrt{8}<2{,}83 \tag{2}$$
$$2{,}44<\sqrt{6}<2{,}45 \tag{3}$$
$$2{,}64<\sqrt{7}<2{,}65 \tag{4}$$

Aus (1) und (2) bzw. (3) und (4) folgt

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}<5{,}07 \qquad \text{bzw.} \tag{5}$$
$$5{,}08<\sqrt{6}+\sqrt{7} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt unmittelbar

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7} \qquad \text{(w.z.b.w.)}$$

b) Es gilt

$$\sqrt{40}<\sqrt{42} \tag{8}$$

Daraus folgt

$$2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}<2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7} \tag{9}$$
$$5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}+8<6+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}+7 \tag{10}$$
$$(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2<(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2 \tag{11}$$

Da $\sqrt{6}+\sqrt{7}>0$ ist, folgt aus (11) weiter

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7} \qquad \text{(w.z.b.w)}$$

Aufgabe 2 - 251012

Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest.

Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag.

Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: "Ich bin heute $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie mein Sohn und 11 mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie sie und 4 mal so alt wie mein Sohn."

Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, dass diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen. Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: "Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind."

Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

I. Wenn die von einem der drei Lehrer gemachten Aussagen zutreffen und x das Alter seines jüngeren Kindes ist, dann ist $11x$ das Alter dieses Lehrers und somit, de er $\frac{11}{2}$ mal so alt ist wie sein älteres Kind, $2x$ das Alter des älteren Kindes.

Daher können die Altersangaben für die drei Lehrer nur durch 11 teilbare Zahlen sein. Da es zwischen 20 und 50 nur die drei durch 11 teilbaren Zahlen 22, 33 und 44 gibt und die Lehrer sämtlich verschieden alt sind, können die Aussagen folglich nur dann zutreffen, wenn (*)

der älteste Lehrer 44 Jahre alt ist und seine Kinder 4 bzw. 8 Jahre alt sind,

der zweite Lehrer 33 Jahre alt ist und seine Kinder 3 bzw. 6 Jahre alt sind,

der jüngste Lehrer 22 Jahre alt ist und seine Kinder 2 bzw. 4 Jahre als sind.

II. Wenn einer der Lehrer $11x$ Jahre alt ist und seine Kinder x bzw. $2x$ Jahre alt sind, so ist er $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie sein älteres und 11 mal so alt wie sein jüngeres Kind.

Ferner ist sein jüngeres Kind in genau x Jahren so alt wie sein älteres jetzt, nämlich $2x$ Jahre, und dann ist sein älteres Kind $3x$ Jahre alt und der Lehrer $12x$ Jahre, d.h. aber 6 mal so alt wie sein jüngeres und 4 mal so alt wie sein älteres Kind.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle in der Aufgabe genannten Aussagen zutreffen und dass durch diese Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind. Sie lauten wie in (*) angegeben.

Aufgabe 3 - 251013

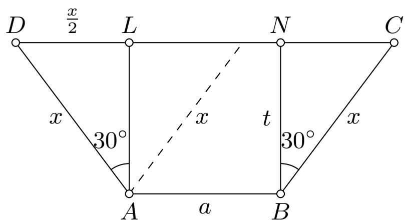
Der Querschnitt einen Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt.

Wegen der geforderten Durchflussmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitte (Sohle des Grabens) vorgegeben.

Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F!

Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.

Man gebe eine derartige Lösung an.



Das genannte Trapez sei ABC mit $AB \parallel DC$ und $AB < DC$.

Die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf DC seien L bzw. N. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$AD = BC \quad ; \quad \angle DAL = \angle CBN = 30^\circ \quad ; \quad AB = LN = a \quad ; \quad AL = BN = t$$

und das Trapez $ABCD$ hat den Flächeninhalt F.

Verschiebt man das Dreieck BCN längs BA so, dass das Bild von BN mit AL zusammenfällt, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel zwischen den Schenkeln 60° groß ist.

Damit sind die Basiswinkel auch jeweils 60° groß. Das betrachtete Dreieck ist also gleichseitig. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, dann gilt (nach dem Satz von Pythagoras oder der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck)

$$t = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

Daraus folgt

$$DL + NC = x = \frac{2t}{\sqrt{3}} \qquad \text{also}$$

$$DC = DL + LN + NC = a + \frac{2t}{\sqrt{3}}$$

Hieraus ergibt sich

$$F = \frac{1}{2}(AB + DC)t = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)t = at + \frac{t^2}{\sqrt{3}}$$

$$t^2 + at\sqrt{3} - F\sqrt{3} = 0$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung scheidet die negative aus, und es folgt

$$t = \frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + F\sqrt{3}}$$

Aufgabe 4 - 251014
Stellen Sie die Zahl 1985

a) im 2adischen Positionasystem (*Dualsystem*)

b) im 3adischen Positionssystem dar!

c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, dass die Zahl ungerade ist?

Anmerkung : Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern 0, 1, ..., $m-1$ benutzt.

a) Es gilt

$$1985 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Damit hat die Zahl 1985 im Dualsystem die Darstellung $[11111000001]_2$.

b) Es gilt

$$1985 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Damit hat die Zahl 1985 3adischen System die Darstellung $[2201112]_3$.

c) Da alle Potenzen von 2 mit Ausnahme von $2^0 = 1$ durch 2 teilbar sind, ist eine natürliche Zahl genau dann durch 2 teilbar, wenn in ihrer 2adischen Darstellung der Summand $1 \cdot 2^0$ auftritt, d.h., sie ist ungerade genau dann, wenn die Darstellung auf 1 endet.

Die Zahl 3 ist ungerade; alle ihre Potenzen sind folglich ebenfalls ungerade. Daher ist eine natürliche Zahl genau dann ungerade, wenn in ihrer 3adischen Darstellung die (einzige) ungerade Ziffer 1 in ungerader Anzahl auftritt.

Gleichwertig hiermit kann man auch das Kennzeichen verwenden, dass die "Quersumme" der Zahl in ihrer 3adischen Darstellung ungerade ist. (Die für das Dezimalsystem bekannte "Neunerregel" wird also im 3adischen System zur "Zweierregel".)

Lösungen der I. Runde 1985 übernommen von [5]

7.27.2 II. Runde 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251021
Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit $a \leq b \leq c$ und $a \cdot b \cdot c = 1985$ an!

Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet $5 \cdot 397 = 1985$.
Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a,b,c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1 \cdot 5 \cdot 397 = 1985$ (2) $1 \cdot 1 \cdot 1985 = 1985$

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:
Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen $(-1) \cdot (-5) \cdot 397$, $(-19 \cdot 5 \cdot (-397)$ und $1 \cdot (-5) \cdot (-397$.
Aus (2) ergeben sich die Darstellungen $(-1) \cdot (-1) \cdot 1985$ und $1 \cdot (-1) \cdot (-1985)$.
Insgesamt gibt es genau die sieben genannten Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 2 - 251022
Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$$

Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung der Wurzelgesetze und Addition von $2a + 3b$ erhält man

$$a + (a+3b) + 2\sqrt{a}\sqrt{a+3b} < (a+b) + (a+2b) + 2\sqrt{a+b}\sqrt{a+2b}$$

Unter Benutzung der binomischen Formel ergibt sich daraus

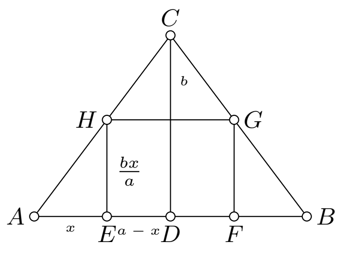
$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}\right)^2 < \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}\right)^2$$

Weil aus $u2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$$\left|\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}\right| < \left|\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}\right|$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich die ursprüngliche Behauptung. w.z.b.w.

Aufgabe 3 - 251023
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $AB = 20$ cm und der Höhenlänge $CD = 8$ cm.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben werden, dass E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und dass dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, dass es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!



Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $AD = BD = 10$ cm.
Es sei $AD = a$ und $DC = b$ (siehe Bild).
Für jedes Rechteck $EFGH$, das dem Dreieck ABC (mit E und F aus AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $AE = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt aus dem Strahlensatz

$$EH : DC = AE : AD \qquad \text{also} \qquad EH = \frac{bx}{a}$$

Da $EFGH$ ein Rechteck ist, gilt somit $FG = EH = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz

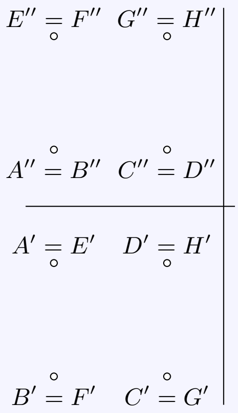
$$BF : BD = FG * DC$$

und damit $BF = x$. Hiernach ergibt sich $EF = ED + FD = 2(a - x)$. Der Flächeninhalt J des Rechtecks $EFGH$ ist folglich

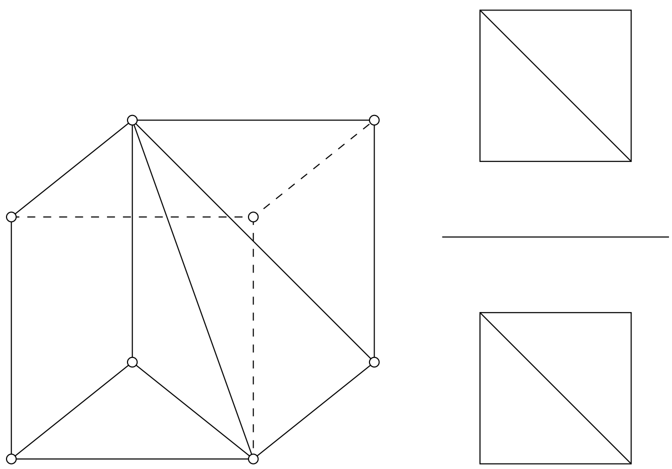
$$J = 2(a-x)\frac{bx}{a} = \frac{2b}{a}(ax - x^2) = \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right) = \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Daraus folgt: Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$, also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.
Somit wird für genau dasjenige Rechteck $EFGH$, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind $EF = 10$ cm, $EH = 4$ cm, sein Flächeninhalt beträgt $J = 40$ cm^2.

Aufgabe 4 - 251024



Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es die Abbildung in Zweitafelprojektion zeigt.
Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch Herausschneiden eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist.
Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.



Lösungen der II. Runde 1985 übernommen aus [5]

7.27.3 III. Runde 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251031
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a+b=(a-b)^2$ erfüllen!

Angenommen, (a,v) sei ein Paar von ganzen Zahlen, die die genannte Gleichung erfüllen. Da a und b ganze Zahlen sind, ist auch ihre Differenz eine ganze Zahl g.
Damit gilt $a-b=g$ sowie $a+b=g^2$ und damit

$$a=\frac{1}{2}(g^2+g)=\frac{1}{2}g(g+1) \qquad ; \qquad b=\frac{1}{2}(g^2-g)=\frac{1}{2}g(g-1)$$

Also erfüllen höchstens alle Paar

$$\left(\frac{1}{2}g(g+1);\frac{1}{2}g(g-1)\right)$$

mit ganzzahligem m die in der Aufgabe genannte Gleichung. Sie erfüllen diese Gleichung tatsächlich, denn es ist

$$\frac{1}{2}g(g+1)+\frac{1}{2}g(g-1)=g^2=\left(\frac{1}{2}g(g+1-g+1)\right)^2$$

und sowohl $\frac{1}{2}g(g+1)$ als auch $\frac{1}{2}g(g-1)$ sind ganze Zahlen.

Aufgabe 2 - 251032
a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall $0\leq x\leq a$ (1) durch

$$f(x)=\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} \qquad (2)$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird!
Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1,x_2 in B gilt: Aus $x_1<x_2$ folgt $f(x_1)>f(x_2)$.

a) Aus $0\leq x_1<x_2\leq a$ (3) folgt

$$x_1^2<x_2^2\leq a^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2-x_1^2>a^2-x_2^2\geq 0 \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{a^2-x_1^2}>\sqrt{a^2-x_2^2}$$

Multipliziert man hierin beide Seiten mit 2 und addiert $2a$, so folgt weiter

$$a+x_1+2\sqrt{a+x_1}\sqrt{a-x_1}+a-x_1>a+x_2+2\sqrt{a+x_2}\sqrt{a-x_2}+a-x_2$$
$$(\sqrt{a+x_1}+\sqrt{a-x_1})^2>(\sqrt{a+x_2}\sqrt{a-x_2})^2$$

Wegen $\sqrt{a+x_1}+\sqrt{a-x_1}>0$ folgt hieraus

$$\sqrt{a+x_1}+\sqrt{a-x_1}>\sqrt{a+x_2}+\sqrt{a-x_2}$$

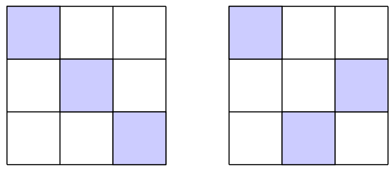
b) Durch (2) wird für genau diejenigen reellen Zahlen x eine Zahl $f(x)$ definiert, für die $a+x\geq 0$ und $a-x\geq 0$ gilt. Diese Bedingung ist gleichwertig mit $-a\leq x\leq a$ $(*)$.

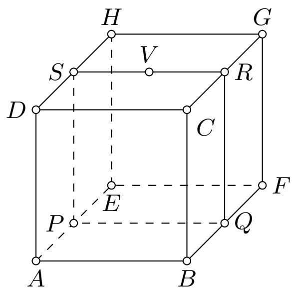
Also gibt (*) den gesuchten größtmöglichen Definitionsbereich D an. Da beispielsweise $-a<0$ und $f(-a)=\sqrt{2a}<2\sqrt{a}=f(0)$ gilt, ist f in D nicht streng monoton fallend.

Aufgabe 3 - 251033
Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen.
Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.

Ermitteln Sie
a) die kleinste, b) die größte Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

Für die auf den Seitenflächen der großen Würfels geforderten Muster gibt es als zueinander nicht kongruente Möglichkeiten, genau diejenigen beiden, die in der nachfolgenden Abbildung dargestellt sind:





Weiterhin gilt:
(1) Mit weniger als acht schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

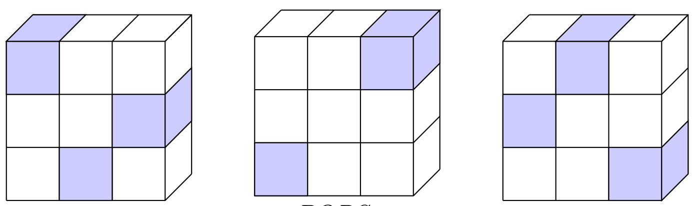
Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Zusammensetzung mit sieben oder weniger schwarzen Würfeln. In der "vorderen" (d.h. das Quadrat ABC ausfüllenden) Schicht wären dann genau drei schwarze Würfel, ebenso in der "hinteren" (das Quadrat $EFGH$ ausfüllenden) Schicht.
Für die "mittlere" (das Quadrat $PQRS$ ausfüllenden) Schicht verbliebe somit höchstens ein schwarzer Würfel. Wäre er, falls vorhanden, einer der drei nach Voraussetzung in der Zeile PQ auftretenden schwarzen Würfel, so enthielte die Zeile RS keinen schwarzen Würfel. Da dies den Voraussetzungen widerspricht, ist die Aussage (1) bewiesen.

(2) Mit mehr als elf schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein solche Zusammensetzung miz zwölf oder mehr schwarzen Würfeln. In der vorderen und der hinteren Schicht wären je genau drei schwarze Würfel, außerdem wäre möglicherweise der den Mittelpunkt des großen Würfels enthaltende kleine Würfel schwarz.

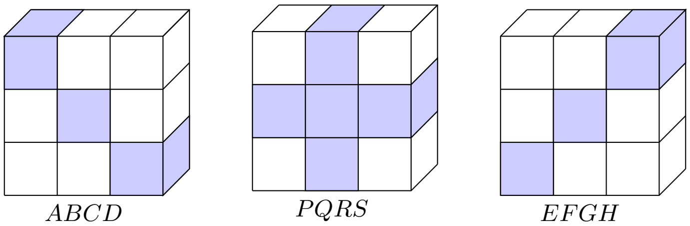
Unter den acht Würfeln, die die Randlinie der Quadrates $PQRS$ ausfüllen befänden sich daher mindestens 5 schwarze Würfel. Unter ihnen könnte es nur vier geben, die keinen der Punkte P, Q, R, S enthalten. Also müsste mindestens einer dieser Punkte, o.B.d.A. der Punkt P, in einem schwarzen Würfel enthalten sein. Es verbleiben noch mindestens 4 schwarze Würfel; von ihnen dürtfe nach Voraussetzung keiner mehr der Streckenzug SPQ erreichen.
Das führt aus den Widerspruch, dass für diese mindestens 4 schwarzen Würfel nur noch die drei Plätze bei U, R und V frei wären; somit ist auch Aussage (2) bewiesen.

(3) Mit acht Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



$ABCD$ $PQRS$ $EFGH$

(4) Mit elf Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



Aus (1) und (3) folgt: Die in a) gesuchte kleinste Anzahl ist 8. Aus (2) und (4) folgt: Die in b) gesuchte größte Anzahl ist 11.

Aufgabe 4 - 251034
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.
(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

I. Wenn eine natürliche Zahl x die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Wegen (1) und 84) ist $2^9 \leq x$ und $x < 5^4$, d.h.

$$512 \leq x \leq 625 \tag{6}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 3^5 = 586$ und $3^6 = 729$ ergibt sich aus (6), dass x im Dreiersystem genau sechs Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (2) ist somit $x \geq 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4$, d.h.

$$567 \leq x \tag{7}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 4^4 = 512$ und $3 \cdot 4^4 = 768$ ergibt sich aus (6), dass x im Vierersystem genau fünf Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (3) ist somit $x < 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3$, d.h.

$$x < 576 \tag{8}$$

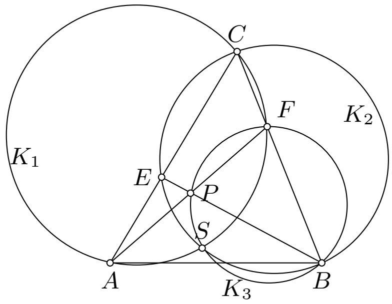
Die Bedingungen (7), (8) und (5) werden nur von $x = 572$ erfüllt. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen (1) bis (5) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn sie hat folgende Darstellungen:
Zweiersystem: 1000111100 (10 Stellen)
Dreiersystem: 210012 (Ziffer 1 an der zweiten Stelle)
Vierersystem: 20330 (Ziffer 0 an der zweiten Stelle)
Fünfersystem: 4242 (4 Stellen)
Zehnersystem: 572 (Ziffer 2 an der letzten Stelle)

Mit I. und II. ist der geforderte Beweis erbracht; die zu ermittelnde Zahl ist $x = 572$.

Aufgabe 5 - 251035
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

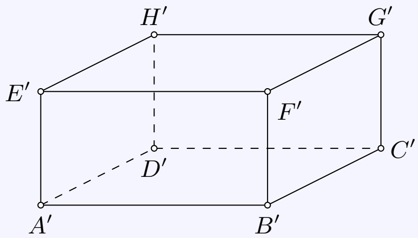
Die Umkreise K_1 und K_2 der Dreiecke AFC bzw. EBC haben den Punkt C gemeinsam, während z.B. der auf K_2 gelegene Punkt E im Innern von K_1 und der auf K_1 gelegene Punkt F im Innern von K_2 liegt.
Folglich haben K_1 und K_2 außer C genau einen weiteren Punkt S gemeinsam. Für ihn gilt:



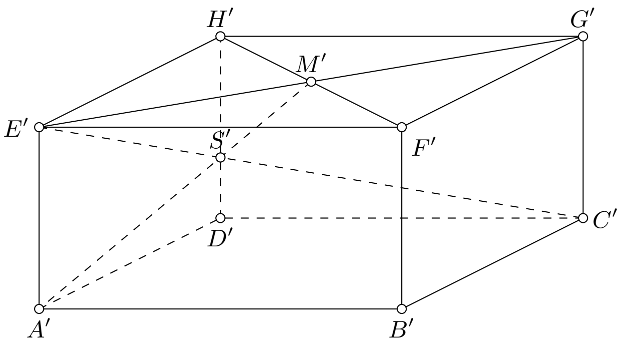
- $\angle PFS = \angle AFS$ (da P zwischen A und F liegt)
- $= \angle ACS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da F und C auf K_1 über dem Bogen $\widehat{AS}$ liegen)
- $= \angle ECS$ (da E zwischen A und C liegt)
- $= \angle EBS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da C und B auf K_2 über dem Bogen $\widehat{ES}$ liegen)
- $= PBS$ (da P zwischen E und B liegt).

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen somit P, F, S und B auf einem Kreis K_3, d.h., der Umkreis des Dreiecks PFB geht auch durch S.
Durch C geht er nicht, da er mit der Geraden durch B und C bereits die beiden von C verschiedenen Punkte B und F gemeinsam hat.
Also haben die Umkreise der Dreiecke AFC, EBC und PFB genau den Punkt S gemeinsam. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 6 - 251036
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.
a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecken EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!
Arbeitsblatt:



a) Konstruktion siehe Abbildung



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M' der Strecken $E'G'$ und $F'H'$.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt S' der Strecken $A'M'$ und $E'C'$.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt S' das Bild des in der Aufgabe genannten Punktes S ist:
Wegen $AE \parallel CG$ liegen A, E, C und G in einer Ebene η. Diese enthält mit E und G auch den Schnittpunkt M der Rechteckdiagonalen EG un FH; dabei hat M als Bild den in (1) konstruierten Schnittpunkt von $E'G'$ und $F'H'$.

Die Ebene ϵ durch A, F, H enthält mit F und H auch M. Da somit die Ebenen η und ϵ beide die Punkte A und M enthalten, ist die Gerade g durch A und M die Schnittgerade von η und ϵ.
Ferner enthält η die Strecke EC; folglich enthält g den Schnittpunkt S von EC und ϵ. Dessen Bild S' ist somit der in (2) konstruierte Schnittpunkt der Bildgeraden g' mit der Strecke $E'C'$.

b) Da die Rechteckdiagonalen EG und FH einander halbieren, ist M der Mittelpunkt von HF; also AM Seitenhalbierende im Dreieck AFH. Ferner ist $EM = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}AC$. Daraus und aus dem Strahlensatz folgt $SM : SA = EM : AC = 1 : 2$.
Also ist S der Schwerpunkt des Dreiecks AFH. Folglich ist S genau dann der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, wenn dessen Seitenhalbierenden zugleich Höhen sind. Das trifft genau im Fall $AF = HF = AH$ zu.

Aus $AF = HF$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz ssw; dem rechten Winkel $\angle AEF = \angle HEF$ liegt als größtem Innenwinkel die längere Dreiecksseite gegenüber) und daher $AE = HE$.
Umgekehrt gilt: Aus $AE = HE$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz wsw), also $AF = HF$. Analog gilt: Aus $HF = AH$ folgt $EF = AE$ und umgekehrt.

Analog ist S für genau diejenigen Quader $ABCDEFGH$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, für die $EF = AE = HE$ gilt, d.h. für genau diejenigen Quader, die Würfel sind.

Lösungen der III. Runde 1985 übernommen von [5]

7.27.4 IV. Runde 1985, Klasse 10

Aufgabe 1 - 251041
Beweisen Sie, dass

$$\frac{1281^3+1282^3+1283^3+1284^3+1285^3+1286^3+1287^3}{639\cdot 640+641\cdot 642+642\cdot 643+644\cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

Mit $u := 642$ wird die in der Aufgabenstellung beschrieben Zahl z zu

$$z=\frac{(2u-3)^2+(2u-2)^3+(2u-1)^3+(2u)^3+(2u+1)^3+(2u+2)^3+(2u+3)^3}{(u-3)(u-2)+(u-1)u+u(u+1)+(u+2)(u+3)}=$$

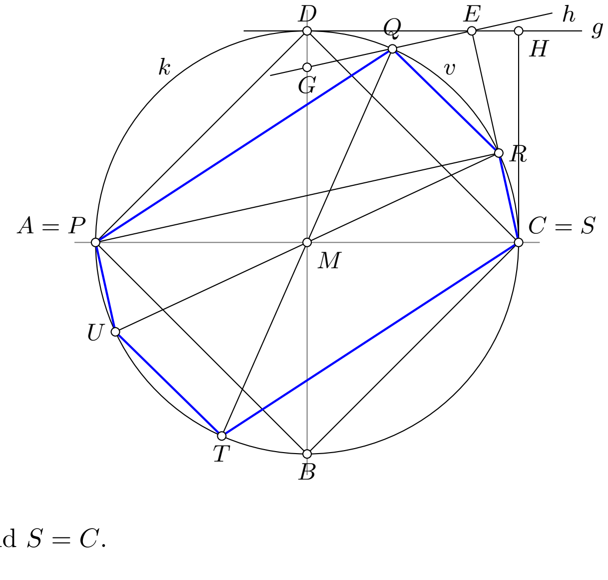
$$=\frac{7\cdot 8u^3+3\cdot(2u)^2\cdot(-3-2-1+1+2+3)+3\cdot(2u)\cdot(3^2+2^2+1^2+1^2+2^2+3^2)+(-3^3-2^3-1^3+1^3+2^3+3^3)}{4u^2+u\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}$$

$$=\frac{56u^3+168u}{4u^2+12}=\frac{14\cdot u\cdot(u^2+3)}{u^2+3}=7\cdot 2u=7\cdot 1284\in 7\mathbb{N},\square$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 251042
Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k.
Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist!
Beweisen Sie, dass jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Die Lösung ist nicht eindeutig; eine Lösungsmöglichkeit ist die folgende:
a) Konstruktionsbeschreibung:



(1) Man wählt $P = A$ und $S = C$.

(2) Man wählt auf dem von C nach D führenden Viertelkreisbogen v des Kreises k einen Punkt R ($\neq C, \neq D$).

(3) Man konstruiert die Parallele g durch D zu AC und ihren Schnittpunkt E mit der Geraden durch C und R. Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt, da R nicht auf der Geraden durch A und C liegt, also die Gerade durch C und R nicht parallel zu g ist.

(4) Man konstruiert die Parallele h durch E zu AR und ihren Schnittpunkt Q mit dem Viertelkreisbogen v. Dieses Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt; denn ist M der Mittelpunkt von k und H derjenige Punkt, für den $DMCH$ ein Quadrat ist, so schneidet h die Quadratseiten DH und MD in inneren Punkten E bzw. G (das erste wegen $45° < \angle MCR = \angle MCE < 90°$, das zweite wegen $AR \perp CR$, also $h \perp CE$).

(5) Man konstruiert den Strahl aus R durch M und seinen Schnittpunkt U mit k.

(6) Man konstruiert den Strahl aus Q durch M und seinen Schnittpunkt T mit k.

b) Beweis der geforderten Eigenschaften:
Nach (2) und (4) ist $ACRQ$ ein konvexes Viereck, mit einem Durchmesser AC von k als einer Seite und einem Halbkreis über diesem Durchmesser einbeschrieben. Zentralsymmetrisch bezüglich M liegt hierzu nach (5) und (6) das Viereck $CAUT$. Damit und mit (1) ergibt sich $PQRSTU$ als ein konvexes Sechseck, dessen sämtlich Eckpunkte auf k liegen.
Wegen (3), also $DE \parallel AC$, ist

$$F(ACE) = F(ACD) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

Wegen (4), also $EQ \parallel AR$, ist $F(ARQ) = F(ARE)$. Damit folgt

$$F(ACRQ) = F(ACR) + F(ARQ) = F(ACR) + F(ARE) = F(ACE) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

und somit wegen der genannten Zentralsymmetrie

$$F(PQRSTU) = 2F(ACRQ) = F(ABCD)$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 251043A
Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:
- Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).
Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen lässt!
Beweisen Sie, dass durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!
Hinweis: Unter P_iP_j ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

Offenbar ist $P_1P_2P_3P_4$ ein reguläres Tetraeder mit Umkugel K.
Besitzt dieses Tetraeder die Kantenlänge a und ist M_{12} der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2, so hat die von P_3 im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ ausgehende Höhe als Kathete im rechtwinkligen Dreieck $\triangle P_1P_3M_{12}$ die Länge

$$|P_3M_{12}| = \sqrt{|P_1P_3|^2 - |P_1M_{12}|} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ist S_{123} der Schwerpunkt im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, so gilt also $|P_3S_{123}| = \frac{2}{3} \cdot |P_3M_{12}| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, da der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende (und P_3M_{12} ist im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende) im Verhältnis 2:1 teilt.

Weiterhin steht im regulären Tetraeder die Schwerelinie P_4S_{123} senkrecht auf P_3S_{123}, sodass das Dreieck $\triangle P_4P_3S_{123}$ rechtwinklig in S_{123} ist. Damit ergibt sich

$$|P_4S_{123}| = \sqrt{|P_3P_4|^2 - |P_3S_{123}|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Sei schließlich M der Schnittpunkt der Schwerelinien im Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$. Da dieses regulär ist, ist es auch gleichzeitig dessen Umkugelmittelpunkt. Da M die Schwerelinien im Verhältnis 3:1 teilt, ist der Umkugelradius $r = |P_4M| = \frac{3}{4} \cdot |P_4S_{123}| = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.
Damit ist $d = 2r = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ bzw. $a = \frac{2}{\sqrt{6}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot d\right)$

Errichtet man also auf B über der Strecke DE mit Länge $|DE| = d$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DEF$ sowie dessen Schwerpunkt S als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden, dann erhält man die Strecke DS mit Länge $|DS| = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, siehe vorherige Berechnung. Errichtet man nun über dieser Strecke DS das Quadrat $DSXY$, so hat dessen Diagonale DX die Länge $|DX| = \sqrt{2} \cdot |DS| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d = a$.

Nimmt man also nun die gerade auf B konstruierte Streckenlänge $|DX|$ in die Zirkelspanne, zeichnet auf K um einen beliebigen Punkt P_1 auf K einen Kreis k_1 mit Radius $a = |DX|$ sowie um einen beliebigen Punkt P_2 auf k_1 (und damit auf K) einen Kreis k_2 mit gleichem Radius, dann schneiden sich diese beiden Kreise in zwei Punkten, die P_3 und P_4 benannt seien.

Nach Konstruktion gilt $|P_1P_2| = a = |P_1P_3| = |P_1P_4| = |P_2P_3| = |P_2P_4|$, da P_2, P_3 und P_4 auf k_1 bzw. P_3 und P_4 auch auf k_2 liegen. Damit ist das Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ eindeutig festgelegt. Da jedoch das reguläre Tetraeder mit Kantenlänge a den gleichen Umkugeldurchmesser wie $P_1P_2P_3P_4$ besitzt, muss auch dieses ein reguläres Tetraeder sein, sodass auch $|P_3P_4| = a$ folgt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3B - 251043B
Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4.
Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, ..., a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, dass es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + x_3^2 &= b_1 \qquad (1)\\ x_2^2 + a_3x_3^2 &= b_2 \qquad (2)\\ x_2^2 + a_4x_3^2 &= b_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

Das Gleichungssystem ist linear in x_1^2, x_2^2 und x_3^2, sodass mit einem Lösungstripel (x_1,x_2,x_3) auch jedes Tripel der Form $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$, wobei die Vorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können, eine weitere Lösung ist. Damit es nur eine eindeutig bestimmte Lösung gibt, muss also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gelten.
Damit das Tripel (0,0,0) aber überhaupt eine Lösung ist, muss $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ gelten, denn sonst würde für ein $b_i \neq 0$ das Lösungstripel $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die i-te Gleichung nicht erfüllen.

Ergo hat das Gleichungssystem der Aufgabenstellung genau dann genau eine Lösung, wenn $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ist und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1y_1 + a_2y_2 + y_3 &= 0\\ y_2 + a_3y_3 &= 0\\ y_2 + a_4y_3 &= 0 \end{aligned}$$

allein die triviale Lösung $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ besitzt, also die drei Gleichungen linear unabhängig sind. Dafür muss $a_3 \neq a_4$ gelten, denn sonst wären die zweite und dritte Gleichung identisch. Ist aber $a_3 \neq a_4$, so folgt aus diesen beiden Gleichungen direkt $y_2 = y_3 = 0$. Damit folgt, dass $a_1 \neq 0$ sein muss, denn sonst wäre etwa auch $(y_1,y_2,y_3) = (1,0,0)$ Lösung des betrachteten Gleichungssystems. Ist aber $a_1 \neq 0$, so folgt wieder direkt mit $y_2 = y_3 = 0$ auch $y_1 = 0$.

Zusammenfassend gilt also:

Ist $a_1 = 0$ oder $a_3 = a_4$, so gibt es kein Tripel (b_1,b_2,b_3), sodass das Gleichungssystem der Aufgabenstellung genau eine Lösung (x_1,x_2,x_3) besitzt. Ist aber sowohl $a_1 \neq 0$ als auch $a_3 \neq a_4$, so ist dies genau für $(b_1,b_2,b_3) = (0,0,0)$ der Fall. (Die Lösung lautet dann $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$.)

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 251044
Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x-r+6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen, b) genau eine reelle Lösung, c) keine reelle Lösung besitzt!

Ist $x \neq -r$ und $x \neq 2r$, so geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner äquivalent über in

$$4x - r + 6 = (2x)(x-2r) + r(x+r) = 2x^2 - 4rx + rx + r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2x^2 - (3r+4)x + r^2 + r - 6 = 0$$

also $x^2 - \frac{3r+4}{2} \cdot x + \frac{r^2+r-6}{2} = 0$. Diese quadratische Gleichung in x hat genau die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3r+4}{4} \pm \sqrt{\frac{D}{16}} \qquad \text{mit}$$

$$D = (3r+4)^2 - 8(r^2+r-6) = 9r^2 + 24r + 16 - 8r^2 - 8r + 48 = r^2 + 16r + 64 = (r+8)^2$$

also $x_{1/2} = \frac{3r+4\pm(r+8)}{4}$, d.h. $x_1 = \frac{3r+4-r-8}{4} = \frac{r}{2} - 1$ und $x_2 = \frac{3r+4+r+8}{4} = r+3$.

Diese beiden Lösungen fallen genau für $r = -8$ zusammen.
Nun müssen noch die Scheinlösungen dieser quadratischen Gleichung ausgeschlossen werden, für die $x = -r$ oder $x = 2r$ ist:

Fall 1.1: Es ist $-r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = 2$.
Fall 1.2: Es ist $-r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{3}{2}$.
Fall 2.1: Es ist $2r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{2}{3}$.
Fall 2.2: Es ist $2r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = 3$.

Zusammenfassend ergibt sich also, dass die Gleichung der Aufgabenstellung genau für $r \in \left(\{-8, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 2, 3\right\}$ genau eine Lösung besitzt, für alle anderen von Null verschiedenen r genau zwei und nie gar keine Lösung besitzt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 251045
Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, dass als Schnittfigur a) ein regelmäßiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Viereck, c) ein regelmäßiges Fünfeck entsteht!

a) Schneidet man etwa durch die drei mit einem Eckpunkt des Würfels durch Kanten verbundenen Eckpunkte, so erhält man als Schnittfigur ein gleichseitiges (und damit regelmäßiges) Dreieck. Dies ist also möglich.

b) Schneidet man etwa den Würfel parallel zu einer seiner Seitenflächen, erhält man ein Quadrat, also regelmäßiges Viereck, als Schnittfläche. Dies ist also möglich.

c) Werden durch die Schnittebene nur die drei Seitenflächen des Würfels, die einen Eckpunkt gemeinsam haben, in ihrem Inneren geschnitten, entstehen nur drei Schnittkanten mit dem Würfel, also als Schnittfigur nur ein Dreieck. Demzufolge muss ein ebener Schnitt, der ein Fünfeck erzeugt, mindestens ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels in deren Inneren schneiden. Die auf diesen entstehenden Schnittkanten sind aber – wie die Seitenflächen – zueinander parallel, was im regelmäßigen Fünfeck nicht vorkommen kann.

Also ist es nicht möglich, ein regelmäßiges Fünfeck als Schnittfigur eines ebenen Schnitts durch einen Würfel zu erhalten.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 251046
Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, ...)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:
(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.
Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

Wir zeigen im Folgenden, dass die Folge (rein)periodisch ist, dass also unendlich oft die Sequenz (1,9,8,6) in der Folge wiederholt auftritt:

Für jedes $n \geq 1$ betrachten wir das Quadrupel $q_n := (a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3})$. Da alle Folgenglieder nach Definition Ziffern sind, kann es höchstens 10^4 verschiedene solcher Quadrupel geben. Also muss es nach spätestens $10^4 + 1$ Folgengliedern ein Quadrupel wiederholt erscheinen.
Sei also $q_m = q_n$ mit $m > n$, also $q_{m+i} = q_{n+i}$ für $i = 0,1,2,3$. Dann ist aber auch $q_{m+4} = q_{n+4}$, da sich beide als Einerziffer der Summe $q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} = q_n + q_{n+1} + q_{n+2} + q_{n+3}$ berechnen. Analog folgt induktiv für alle natürlichen $k \geq 0$, dass $a_{m+k} = a_{n+k}$ gilt, sodass die Folge F ab a_n periodisch mit Periodenlänge $m - n$ (bzw. eines Teilers davon) ist.

Umgekehrt lässt sich aber auch aus vier aufeinanderfolgenden Folgengliedern das davor liegende (sofern existent) eindeutig berechnen: Es ist a_{m-1} die eindeutig bestimmte Ziffer, für die die Summe $a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2}$ die Einerziffer a_{m+3} besitzt. Stimmen aber q_m und q_n überein, gilt also, wie oben, $a_{m+i} = a_{n+i}$ für $i = 0,1,2,3$, so muss also auch $a_{m-1} = a_{n-1}$ gelten, sofern $n > 1$ ist. Induktiv folgt nun für jedes natürliche k mit $k < n$, dass auch $a_{m-k} = a_{n-k}$ ist.

Insbesondere ist dann für jedes natürliche ℓ

$$a_{\ell\cdot(m-n)+1} = a_{m-n+1} = a_1 = 1 \quad , \quad a_{\ell\cdot(m-n)+2} = a_{m-n+2} = a_2 = 9$$

$$a_{\ell\cdot(m-n)+3} = a_{m-n+3} = a_3 = 8 \quad \text{und} \quad a_{\ell\cdot(m-n)+4} = a_{m-n+4} = a_4 = 6$$

sodass sich die Teilfolge (1,9,8,6) in F unendlich oft wiederholt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.28 XXVI. Olympiade 1986

7.28.1 I. Runde 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261011
Auf welche Ziffer endet die Zahl

$$z = 4444^{444^{44^4}}?$$

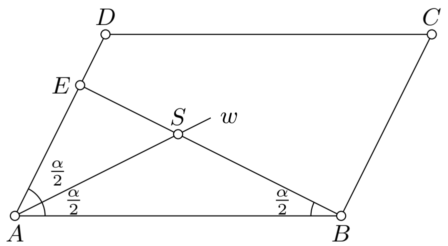
Die Potenzen von 4444 enden jeweils auf die gleiche Ziffer wie dieselben Potenzen von 4. Diese enden auf 6, falls der Exponent gerade ist, und sie enden auf 4, falls der Exponent ungerade ist. Der Exponent

$$n = 444^{44^4}$$

ist eine gerade Zahl, da n selbst eine Potenz ist, deren Basis gerade ist. Also endet $z = 4444^{444^{44^4}}$ auf 6.

Aufgabe 2 - 261012
Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle BAD$ hat. Jörg behauptet, dass sich allein aus diesen Angeben die Größe des Winkels $\angle CBA$ ermitteln lässt.

Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CBA$!



Aus den genannten Angaben folgt:

Bezeichnet man die Größe des Winkels $\angle BAD$ mit α, dann gilt $\angle EAS = \angle SAB = \frac{\alpha}{2}$, da w den Winkel $\angle BAD$ halbiert und durch S verläuft.

Ferner gilt $AS = SB$, da S auf der Mittelsenkrechten s von AB liegt. Mithin ist des Dreieck ASB gleichschenklig, woraus

$$\angle SAB = \angle SBA = \frac{\alpha}{2}$$

folgt (Basiswinkel). Da das Lot BE durch S verläuft, ist ABE ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle AEB = 90°$ und $\angle ABE = \frac{\alpha}{2}$. Folglich gilt nach den Innenwinkelsatz $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90°$, also $\alpha = 60°$.

Wegen $\angle CBA = 180° - \alpha$ (benachbarte Winkel im Parallelogramm) gilt daher $\angle CBA = 120°$.

Damit ist Jörgs Behauptung als wahr erwiesen und die gesuchte Winkelgröße ermittelt.

Aufgabe 3 - 261013
Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.

In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden? Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

Es gibt genau die folgenden Fälle für drei Ebenen durch den Kugelmittelpunkt M:

1. Fall: Alle drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall entstehen genau zwei Teilflächen (die zwei Halbkugelflächen, deren gemeinsamer Rand der Großkreis ist, in dem die Ebene die Kugeloberfläche schneidet).

2. Fall: Genau zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall schneiden sich die beiden Großkreise, die durch den Schnitt der nicht identischen Ebenen mit der Kugeloberfläche entstehen, in genau zwei Schnittpunkten P und Q.

   Jede der beiden Halbkugelflächen, in die die Kugeloberfläche durch den einen Großkreis zerlegt wird, wird durch den zweiten Kreis nochmals in je zwei Teilflächen geteilt. Es entstehen daher insgesamt vier Teilflächen.

3. Fall: Keine zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesen Fall entstehen zunächst durch zwei der Ebenen wie im 2. Fall zwei Großkreise, die sich in zwei Punkten P, Q schneiden und die Kugeloberfläche in vier Teilflächen zerlegen. Die Gerade g durch P und Q enthält den Mittelpunkt M der Kugel, da sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ist und diese durch M gehen.

   Nun gibt es genau die beiden folgenden Unterfälle:

   3.1. Die Gerade g ist auch in der dritten Ebene enthalten. Dann verläuft der dritte Schnittkreis durch P und Q. Genau zwei der bereits entstandenen vier Teilflächen werden dabei nochmals geteilt. Es entstehen mithin genau sechs Teilflächen.

   3.2. Die Gerade g ist nicht in der dritten Ebene enthalten. Dann geht der dritte Schnittkreis weder durch P noch durch Q. Er schneidet die beiden anderen Schnittkreise in jeweils zwei von P und Q verschiedenen Punkten. Das sind insgesamt vier Punkte, durch die dieser dritte Kreis in vier Teile zerlegt wird. Jeder dieser vier Teilbogen wirkt als neue Begrenzung für je zwei neue Teilflächen, die aus einer alten entstanden sind. Also entstehen insgesamt $2 \cdot 4 = 8$ Teilflächen.

Die gesuchten sämtlichen Möglichkeiten lauten daher: Es können zwei, vier, sechs oder acht Teilflächen entstehen.

Aufgabe 4 - 261014
Jürgen behauptet, dass es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 7 & 0 & 1 & \cdot & 3 & 4 \\ \hline
2 & 5 & 0 & 3 & & & \\
 & 3 & 4 & 0 & 4 & & \\ \hline
3 & 0 & 4 & 3 & 4 & &
\end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!

Hinweis : In einen Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern 0, 1, ..., $m-2$, $m-1$. Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen noch fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.

Da in der Rechnung als größte verwendete Ziffer die 7 auftritt, kann eine natürliche Zahl m nur dann die Basis eines Positionssystems sein, in dem die Rechnung richtig ist, wenn $m \geq 8$ gilt. Da in der Teilrechnung

$$\begin{array}{ccccc}
2 & 5 & 0 & 3 & \\
 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ \hline
3 & 0 & 4 & 3 & 4
\end{array}$$

ein Übertrag auftritt, der die Bedeutung $5 + 3 = 0 + 1 \cdot m$ hat, folgt $m = 8$. Also kann die Rechnung nur im Oktalsystem richtig sein.

II. In der Tat ergibt sich bei Übertragung der Faktoren und des in der Rechnung enthaltenen Produktes aus den Oktalsystem ins Dezimalsystem

$$[701]_8 = 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 449$$
$$[34]_8 = 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 28$$
$$[30434]_8 = 3 \cdot 8^4 + 0 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 12572$$

und es gilt $449 \cdot 28 = 12572$.

Aue I. und II. folgt: Die angegebene Rechnung ist genau im Positionssystem mit der Basis $m = 8$ richtig.

Lösungen der I. Runde 1986 übernommen von [5]

7.28.2 II. Runde 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261021
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0 \qquad (1)$$

gilt!

Mittel quadratischer Ergänzung wird aus (1)

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \qquad (2)$$

Da x, y ganze Zahlen sind, müssen $(x-3), (y+2)$ ebenfalls ganzzahlig sein. Außerdem sind bei Summanden von (2) garantiert > 0. 4 lässt sich als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen durch $4 = 0+4 = 4+0$ darstellen. Daraus ergeben sich zwei Fälle.

1. Fall: $(x-3)^2 = 0$ und $(y+2)^2 = 4$
Das ergibt $x = 3$ und $y + 2 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(3; 0)$ und $(3; -4)$.

2. Fall: $(x-3)^2 = 4$ und $(y+2)^2 = 0$
Das ergibt $y = -2$ und $x - 3 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(1; -2)$ und $(5; -2)$.

Ein Probe bestätigt die vier gefundenen Paare als Lösungen.

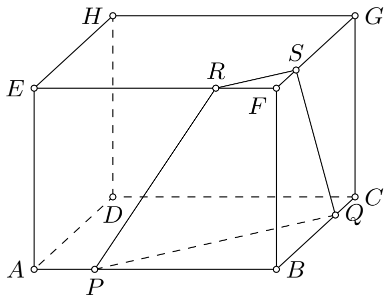
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 261022
Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.
a) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?
b) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

(a) Für jede Ebene E, die den Quader in einem n-Eck schneidet gilt:
Jedes Seite dieses n-Ecks ist der Durchschnitt der Ebene E mit mindestens einer Seitenfläche des Quaders. Dabei sind zwei verschiedene Seiten des n-Ecks nur dann in derselben Seitenfläche des Quaders enthalten, wenn diese Seitenfläche ganz in der Ebene E liegt und daher die gesamte Schnittfigur ist.
In diesem Fall also ist das n-Eck ein Rechteck und somit ein Trapez. In jedem anderen Fall aber, in dem ein Viereck entsteht, gibt es folglich vier paarweise verschiedene Seitenflächen des Quaders, deren Durchschnitt mit E die vier Vierecksseiten sind.

Da der Quader nicht mehr als drei paarweise nichtparallele Seitenflächen besitzt, müssen sich unter den genannten Seitenflächen mindestens zwei zueinander parallele befinden. Die (zueinander parallelen) Ebenen, in denen zwei solche Seitenflächen liegen, werden von der Ebene E in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten; das Viereck hat also (mindestens) zwei zueinander parallele Seiten und ist folglich ein Trapez.

Die in (a) gestellte Frage muss daher mit nein beantwortet werden.



(b) Die in (b) gestellte Frage ist zu bejahen, wie man durch ein Beispiel der folgenden Art beweisen kann: Auf den Seiten AB und BC eines Quaders $ABCDEFGH$ (Abbildung) wähle man je einen Punkt P bzw. Q; auf den entsprechenden Seiten EF und FG der $ABCD$ gegenüberliegenden Fläche $EFGH$ zwei Punkte R bzw. S mit $FR < BP$ und $RS \parallel PQ$.

Wegen $FR \parallel BP$ wird dann $\angle FRS = \angle BPQ$; hieraus und aus $\angle RFS = 90° = \angle PBQ$ folgt $\triangle FRS \cong \triangle BPQ$, also $FS : BQ = FR : BP < 1$, d.h. $FS < BQ < BC = FG$, also ist die genannte Wahl von S auf FG tatsächlich möglich, und es gilt $RS : PQ = FR : BP < 1$, d.h. $RS < PQ$.

Wegen $RS \parallel PQ$ liegen P, Q, R, S in einer und derselben Ebene; diese hat als Schnittfigur mit dem Quader das Viereck $PQSR$, das wegen $RS < PQ$ kein Parallelogramm ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 261023
Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar.
Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen. Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine klein angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an!
Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[110001]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

b) Eine natürliche Zahl heiße dekadische Spiegelzahl, wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.

Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

a) Es ist

$$47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = [101111]_2$$

Für $[110001]_2$ wird

$$[110001]_2 = 2^0 + 2^4 + 2^5 = 48$$

b) Systematisches Probieren der zweistelligen Spiegelzahlen 11, 22, ... liefert Zahlen, die gleichzeitig dekadische als auch dyadische Spiegelzahl sind:

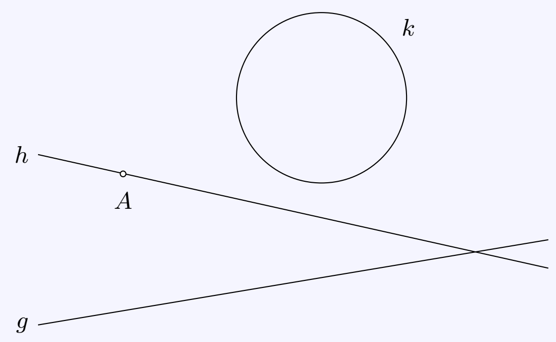
$$33 = [100001]_2 \qquad ; \qquad 99 = [1100011]_2$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

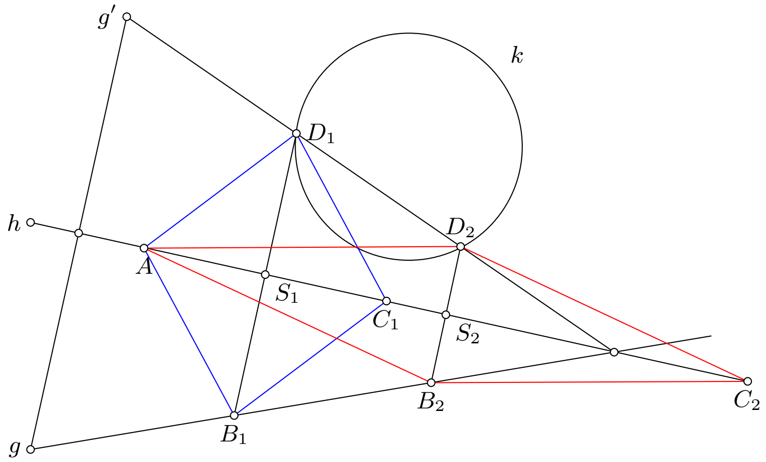
Aufgabe 4 - 261024
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.
Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!
Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!
Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?

Hinweis:
Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g, h, k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist.
Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.

Arbeitsblatt:



Konstruktion auf dem Arbeitsblatt:



Wenn es einen Rhombus ABC mit den genannten Eigenschaften gibt, so liegt seine Diagonale AC in der Geraden h, also geht B bei der Spiegelung an h in D über. Konstruiert man also diejenige Gerade g', die aus g durch die Spiegelung an h entsteht, so muss D ein Schnittpunkt von g' mit k sein.

Wie die Konstruktion auf dem Arbeitsblatt zeigt, schneiden sich g' und k in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Für jeden dieser beiden Punkte gilt:

Spiegelt man ihn an h, so liegt der erhaltene Punkt B_1 bzw. B_2 wieder auf g. Ferner gilt: Schneidet h die Strecke B_1D_1 bzw. die Strecke B_2D_2 in S_1 bzw. S_2 und verlängert man die Strecke AS_1 bzw. AS_2 um ihre eigene Länge bis C_1 bzw. C_2, so liegt der erhaltene Punkt C_1 bzw. C_2 auf h, und sowohl $AB_1C_1D_1$ als auch $AB_2C_2D_2$ ist je ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, also je ein Rhombus.

Es gibt also mehr als einen Rhombus mit den genannten Eigenschaften; ferner wird (bei der auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Lage) offensichtlich $AD_1 \neq AD_2$, d.h., die beiden Rhomben ABC_1D_1 und ABC_2D_2 haben voneinander verschiedene Seitenlänge. Sie sind folglich nicht zueinander kongruent.

Übernommen von [5]

7.28.3 III. Runde 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261031
Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Eine Zahl, die im Zweiersystem siebenstellig ist, ist mindestens $[1000000]_2 = 64$ und höchstens $[1111111]_2 = 127$.
Eine Zahl, die im Fünfersystem vierstellig ist, ist mindestens $[1000]_5 = 5^3 = 125$ und höchstens $[1111]_5 = 5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0 = 624$.
Da (1) und (3) gleichzeitig gelten sollen, kann die gesuchte Zahl nur 125, 126 oder 127 sein. Für diese 3 Zahlen ermittelt man die Darstellung im Dreiersystem

$$125 = [11122]_3 \qquad ; \qquad 126 = [11200]_3 \qquad ; \qquad 127 = [11201]_3$$

Entsprechend (2) ist die gesuchte Zahl 126.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 261032
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen $0, 1, ..., 6$ je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht).
Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!
b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustande kommen können!
c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.)
Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen.
Beispielsweise gelten die beiden Ketten (2, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (1, 2) und (5, 4), (4, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 5) als einander gleich.

(a) Aus zwei verschiedenen Steine eines Dominospiels kann man keine geschlossene Kette bilden, denn in jeder geschlossenen Kette (a,b),$(b.a)$ aus zwei Steinen sind diese einander gleich.
Aus drei Steinen eines Dominospiels kann man eine geschlossene Kette bilden, z.B. (0,1),(1,2),(2,0). Also ist die in (a) gesuchte kleinste Anzahl $k = 3$.

(b) In jeder geschlossenen Kette (a,b),(b,c),(c,a) aus 3 verschiedenen Steinen eines Dominospiels sind a, b und c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$.

Die Anzahl aller derjenigen Steine eines Dominospiels, die ein Paar verschiedener Zahlen tragen, ist $28 - 7 = 21$. Wegen $21 : 3 = 7$ lassen sich daher höchstens 7 Ketten in der geforderten Art bilden.

Dass sich 7 Ketten in dieser Art bilden lassen, zeigt das Beispiel

$$(0,1),(1,2),(2,0); \quad (0,3),(3,4),(4,0); \quad (0,5),(5,6),(6,0);$$
$$(1,3),(3,5),(5,1); \quad (1,4),(4,6),(5,2); \quad (2,3),(3,6),(6,2); \quad (2,4),(4,5),(5,2)$$

Also ist die in (b) gesuchte Anzahl $g = 7$.

(c) Wie in (b) gezeigt wurde, enthält jede geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels drei paarweise verschiedene Zahlen. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedener Zahlen a, b, c genau drei Steine mit je einem Paar verschiedener dieser Zahlen, und es gibt (nach der Erklärung, welche geschlossenen Ketten als gleich zu gelten haben) genau eine geschlossene Kette aus diesen drei Steinen, nämlich die Kette $(a,b),(b,c),(c,a)$.
Also gibt es genau so viele geschlossene Ketten aus je drei verschiedenen Steinen, wie es Mengen aus je drei paarweise verschiedenen der Zahlen 0, ..., 6 gibt.

Drei Elemente aus einer Menge mit sechs verschiedenen Zahlen auszuwählen, ohne Bedeutung der Reihenfolge der Wahl und ohne wiederholte Wahl eines Elements, entspricht einer Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse mit $n = 6$ und $k = 3$, d.h.

$$\binom{6}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Die gesuchte Anzahl von Ketten ist 35.

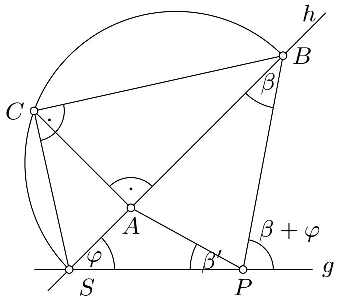
Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 261033
Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, dass A zwischen S und B liegt.
Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, dass sie h in S schneidet.
Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf g.
b) Der Innenwinkel $\angle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.
(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.
(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage (I) zutrifft!
(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

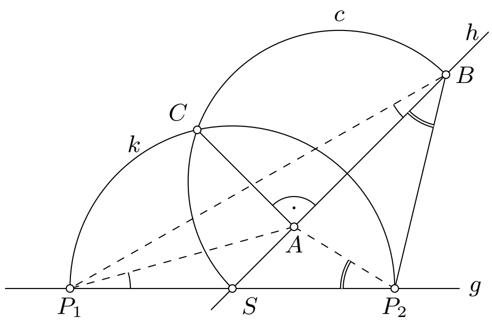
(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a), (b) erfüllt (Abbildung), so folgt: Ist β die Größe des Innenwinkels $\angle SBP$ im Dreieck SBP, β' die Größe des Innenwinkels $\angle SPA$ im Dreieck SPA sowie φ die Größe des gemeinsamen Innenwinkels $\angle PSA = \angle PSB$ (1) in den Dreiecken SPA, SBP so ist

$$\beta < \beta + \varphi < 180° - \beta'$$

Also kann die Bedingung (b) (nicht mit $\beta = 180° - \beta'$, sondern) nur mit $\beta = \beta'$ (2) erfüllt sein.



Aus (1) und (2) folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daraus $PS : AS = BS : PS$, also $PS^2 = AS \cdot BS$. Daher gilt nach dem Kathetensatz $PS = CS$ (3) für einen Punkt C, der so gelegen ist, dass SBC ein rechtwinkliges Dreieck (4) ist, das SB als Hypotenuse (5) und darauf A als Höhenfußpunkt (6) hat.
Nach der Umkehrung des Thalessatzes folgt aus (4), (5): C liegt auf dem Kreis, der SB als Durchmesser hat.
Hiernach und nach (6), (3) ergibt sich, dass P ein Punkt ist, der durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) Konstruktionsbeschreibung:
(7) Man konstruiert den Kreis c der SB als Durchmesser hat.
(8) Man errichtet in A die Senkrechte auf SB. Einen der Punkte, in denen sie c schneidet, bezeichnet man mit C.
(9) Man konstruiert den Kreis k um S mit dem Radius CS. Jeder der beiden Punkte P_1, P_2, in denen er g schneidet, kann als Punkt P gewählt werden.

(III) Wenn ein Punkt P nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (Abbildung mit $P = P_1$ oder $P = P_2$):
Nach (9) liegt P auf g, also ist (a) erfüllt.
Nach (7), (8) und dem Thalessatz ist SBC ein rechtwinkliges Dreieck, das SB als Hypotenuse hat. Nach (8) ist A der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse. Also gilt nach dem Kathetensatz

$$CS^2 = AS \cdot BS$$

Hiernach und nach (9) ist $PS^2 = AS \cdot BS$ also

$$PS : AS = BS : PS$$

Hieraus und aus $\angle PSA = \angle PSB$ folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daher $\angle SBP = \angle SPA$, und hiermit ist auch (b) erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 261034
Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!
Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

Umformen von (1) ergibt

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 = (x + 1)^2 + y^2 - 23$$

Damit z eine natürliche Zahl wird, muss $(x + 1)^2 + y^2 - 23 \geq 0$ sein. Die kleinste natürliche Zahl ist 0, d.h. es müsste $(x + 1)^2 + y^2 = 23$ sein.
Eine Darstellung der 23 als Summe zweier Quadratzahlen existiert aber nicht, ebenso nicht für 24. Erst die 25 kann als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen dargestellt werden, d.h. $z = 2$ ist der kleinste Wert, der eine natürliche Zahl ist.

Zur Bestimmung der entsprechenden Paare (x, y) wird die 25 zerlegt

$$(x+1)^2 + y^2 = 25 = 0 + 25 = 25 + 0 = 9 + 16 = 16 + 9$$

Damit sind folgende Möglichkeiten und die daraus resultierenden Paare möglich:

$(x+1)^2$	$x+1$	x_i	y^2	y_i	Paare (x, y)
0	0	-1	25	± 5	$(-1{,}5); (-1, -5)$
25	± 5	$-6; 4$	0	0	$(-6{,}0); (4{,}0)$
9	± 3	$-4; 2$	16	± 4	$(-4, -4); (-4, 4); (2, -4); (2, 4)$
16	± 4	$-5; 3$	9	± 3	$(-5, -3); (-5, 3); (3, -3); (3, 3)$

Damit existieren 12 Paare (x, y) für die z den kleinstmöglichen Wert 2 annehmen kann.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - 261035
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt:
Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

Wird die Kugel von einer Ebene e_1 geschnitten, so entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_1, der die Kugeloberfläche in genau zwei Teilflächen zerlegt.
Beim Schnitt mit eine zweiten Ebene $e_2 \neq e_1$ entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_2. Er kann mit e_1 (wie jeder Kreis mit jeder Ebene, in der er nicht liegt) höchstens zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens zwei Teilbögen zerlegt.
Jeder dieser Teilbögen zerlegt seinerseits diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz (in sich geschlossen oder sie durchquerend) enthalten ist, in genau zwei neue Teilflächen, vermehrt also die Anzahl der bereits vorliegenden Teilflächen um genau 1. Somit entstehen höchstens $2 + 2 = 4$ Teilflächen.

Entsprechend folgt schrittweise weiter:
Beim Schnitt mir einer dritten/vierten/fünften Ebene $e_3/e_4/e_5$, die verschieden ist von allen vorangehenden Ebenen, entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis $k_3/k_4/k_5$.
Er kann mit e_1 und e_2 / mit e_1, e_2, e_3 / mit e_1, e_2, e_3, e_4 höchstens je zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens 4 / 6 / 8 Teilbögen zerlegt. Fügt man diese Teilbögen schrittweise einzeln zu der jeweils erreichten Zerlegung der Kugeloberfläche hinzu, so ergibt sich:

Jeder Teilbogen bewirkt für diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz enthalten ist, entweder eine Aufteilung in genau zwei neue Teilflächen oder aber keine neue Aufteilung (nämlich falls die Teilfläche noch an einer anderen, von dem Teilbogen nicht durchquerten Stelle zusammenhängt). Somit entstehen höchsten $4 + 4 = 8$ / $8 + 6 = 14$ / $14 + 4 = 22$ Teilflächen. w.z.b.w.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 261036
Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

Durch Division durch $x^{\frac{2}{3}} > 0$ geht die zu zeigende Ungleichungskette äquivalent über in

$$\frac{3}{2}\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Wegen $1 < x$ ist $0 < \frac{1}{x} < 1$, sodass aufgrund der Bernoulli-Ungleichung $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$ sowie $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$ gilt, woraus sofort die zu zeigende Ungleichungskette folgt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.28.4 IV. Runde 1986, Klasse 10

Aufgabe 1 - 261041
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge.
Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

Sei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann bildet die Drehung um U um den Drehwinkel $120°$ aufgrund der Gleichseitigkeit das Dreieck $\triangle ABC$ auf sich selbst ab, also auch Geraden durch zwei seiner Eckpunkte wieder auf eine solche Gerade.
Da auch Längen bei dieser Kongruenzabbildung erhalten bleiben, wird somit auch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ auf sich selbst abgebildet, sodass dies auch für dessen Umkreismittelpunkt U' gelten muss. Da aber U der einzige Fixpunkt bei dieser Drehung ist, folgt $U' = U$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 261042
Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

E habe n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.
Dann hat n genau $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ verschiedene Teiler, da man aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung unabhängig für jede Primzahl p_i einen Exponenten $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ auswählen kann, um so die Primfaktorzerlegung $t = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ eines beliebigen Teilers t von n zu erhalten.

Also gilt $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 144 = 2^4 \cdot 3^2$. Damit kann n höchstens sechs verschiedene Primteiler besitzen, sodass $k \leq 6$ gilt.

Von 10 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer mindestens je eine der Zahlen durch $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, 5 bzw. 7 teilbar. Also ist n durch $f := 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar. O.B.d.A. seien also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ und $p_4 = 7$ sowie $\alpha_1 \geq 3$, $\alpha_2 \geq 2$, $\alpha_3 \geq 1$ und $\alpha_4 \geq 1$.

Jede natürliche Zahl, die f als Teiler besitzt, ist damit insbesondere durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 teilbar, sodass Bedingung (2) für diese Zahlen immer erfüllt ist.

Weiterhin hat jedes Vielfache von f immer mindestens $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot(\alpha_4+1) \geq 4\cdot3\cdot2\cdot2 = 48$ Teiler.

Hätte n noch zwei verschiedene Primfaktoren p_5 und p_6, die beide verschieden von den bisherigen p_1 bis p_4 sind, so hätte n mindestens $48 \cdot (\alpha_5 + 1) \cdot (\alpha_6 + 1) \geq 48 \cdot 2 \cdot 2 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht zutreffen kann.

Hat n noch einen weiteren Primfaktor $p_5 \notin \{p_1, \ldots, p_4\}$, der in einer Vielfachheit $\alpha_5 \geq 3$ in n enthalten ist, so hätte n mindestens $48 \cdot (\alpha_5 + 1) \geq 48 \cdot 4 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht vorkommen kann.

Ist dieser Primfaktor jedoch in der Vielfachheit $\alpha_5 = 2$ in n enthalten, so hat n mindestens $48 \cdot (\alpha_5 + 1) = 48 \cdot 3 = 144$ Teiler, sodass jede Zahl der Form $f \cdot p_5^2$ auch Bedingung (1) erfüllt. (Dabei dürfen die Primfaktoren $p_1^{\alpha_1}$ bis $p_4^{\alpha_4}$ keine höheren Exponenten als die oben angegebenen unteren Schranken besitzen, da sonst das Produkt echt mehr als $48 \cdot 3 = 144$ Teiler hätte.) Die kleinste unter den natürlichen Zahlen dieser Form ist $n_1 = f \cdot 11^2$, da $p_5 = 11$ die kleinste noch nicht verwendete Primzahl ist.

Ist der fünfte Primfaktor p_5 jedoch nur in der ersten Potenz in n enthalten, so hätte es, wenn alle Exponenten α_1 bis α_4 ihren minimal möglichen Wert annehmen, nur $48 \cdot (\alpha_5 + 1) = 48 \cdot 2 = 96 = \frac{2}{3} \cdot 144$ verschiedene Teiler. Also muss mindestens einer der Exponenten von p_1 bis p_4 erhöht werden, um genau 144 Teiler zu erreichen. Erhöht man α_4 von 1 auf den nächstmöglichen Wert 2, so steigt die Teileranzahl um den Faktor $\frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$, sodass dann schon die 144 Teiler erreicht wären, also alle anderen Exponenten unverändert bleiben müssen.

Damit erfüllt jede Zahl der Form $f \cdot 7 \cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_2 = f \cdot 7 \cdot 11$ die kleinste ist. Ein analoges Vorgehen zeigt auch, dass eine Erhöhung von α_3 nur möglich ist, wenn diese um den kleinstmöglichen Wert geschieht, und alle anderen Exponenten unverändert bleiben, sodass jede Zahl der Form $f \cdot 5 \cdot p_5$ beide Bedingungen erfüllt, wovon $n_3 = f \cdot 5 \cdot 11$ der kleinste ist.

Eine Erhöhung von $\alpha_2 = 2$ auf den nächsthöheren Wert 3 würde dagegen die Teileranzahl nur um den Faktor $\frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ steigern, sodass eine weitere Erhöhung (von α_2 oder α_1 notwendig wäre. Dann jedoch hätte jede Zahl dieser Form mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 3 \cdot p_5 \geq f \cdot 6 \cdot 11 > n_3$, muss also nicht weiter betrachtet werden.

Eine Erhöhung von ausschließlich α_1 vom bisherigen Wert 3 müsste also bis 5 geschehen, sodass sich die Teileranzahl um den gewünschten Faktor $\frac{5+1}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ erhöht. Damit erfüllt auch jede Zahl der Form $f \cdot 2^2 \cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_4 = f \cdot 4 \cdot 11$ die kleinste ist.

Von den bisher gefundenen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen, ist $n_4 = 44 \cdot f$ die kleinste.
Es verbleibt noch der Fall, dass n keine weiteren außer den vier Primteilern p_1 bis p_4 besitzt.

Eine gemeinsame Erhöhung von α_4 und α_3 könnte jeweils höchstens um den Wert 1 erfolgen, da man sonst schon Zahlen konstruieren würde, die mindestens die Größe $f \cdot 5^2 \cdot 7 = f \cdot 245$ besitzen, also größer als n_4 sind und damit nicht mehr betrachtet werden müssen.
Erhöht man jedoch beide um genau 1, so steigt die Teileranzahl nur auf $48 \cdot \frac{2+1}{1+1} \cdot \frac{2+1}{1+1} = 48 \cdot \frac{9}{4} < 48 \cdot 3 = 144$, sodass noch mindestens ein weiterer Exponent erhöht werden müsste.
Dann jedoch hätte die Zahl mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 \cdot f > n_4$, sodass dieser Fall auch nicht weiter betrachtet werden muss. Demnach wird nur höchstens einer der beiden Werte α_4 und α_3 erhöht, sodass zur Konstruktion einer möglichst kleinen Zahl also α_4 konstant bleibt und höchstens α_3 erhöht wird.

Eine Erhöhung von α_3 von derzeit 1 auf 3 würde würde die Teileranzahl um den Faktor $\frac{3+1}{1+1} = 2 < 3$ erhöhen, sodass noch nicht genügend Teiler vorhanden wären, also eine weitere Erhöhung mindestens eines Exponenten α_1 bis α_3 nötig wäre. Dann jedoch würden Zahlen entstehen, die mindestens den Wert $f \cdot 2 \cdot 5^2 = 50 \cdot f > n_4$ besitzen, sodass dieser Fall nicht weiter betrachtet werden muss. Damit ist $1 \leq \alpha_3 \leq 2$.

Ist $\alpha_3 = 1$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{4} = 36$$

gelten. Nach der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel ist damit

$$6 = \sqrt{36} = \sqrt{(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)} \leq \frac{(\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1)}{2}$$

also $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 10$, wobei Gleichheit nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ eintritt. Im Gleichheitsfall entsteht die Zahl $n_6 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot f = 108 \cdot f > n_5$. Sonst gilt $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 11$, sodass α_1 und α_2 von ihren bisherigen Werten 3 und 2 in Summe um mindestens 6 erhöht werden müssen, was dann Zahlen ergibt, die mindestens die Größe $2^6 \cdot f = 64 \cdot f > n_4$ besitzen, also nicht weiter beachtet werden brauchen.

Ist dagegen $\alpha_3 = 2$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{6} = 24$$

gelten. Wegen $p_2^2 \cdot p_3 = 3^2 \cdot 5 = 45 > 44$ würde eine Erhöhung von α_2 um 2 schon Zahlen liefern, die größer sind als n_4. Also ist $\alpha_2 \leq 2 + 1 = 3$. Ist $\alpha_2 = 2$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{\alpha_2+1} = \frac{24}{3} = 8$, sodass wir die Zahl $n_7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot f = 80 \cdot f > n_4$ erhalten. Ist dagegen $\alpha_2 = 3$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{4} = 6$, sodass wir die Zahl $n_8 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot f = 120 \cdot f > n_4$ erhalten.

Da diese Fallunterscheidung vollständig ist, ist damit sicher $n_4 = 44 \cdot f = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ die kleinste natürliche Zahl, die beide Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3A - 261043A
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \qquad (1)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \qquad (2)$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \qquad (3)$$

I. Wenn ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen das Gleichungssystem erfüllt, so folgt: Setzt man aus (1) $x_3 = 3 - x_1 - x_2 \quad (4)$ in (2) ein, so ergibt sich

$$x_1^3 + x_2^3 + 27 - 27(x_1 + x_2) + 9(x_1 + x_2)^2 - x_1^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 - x_2^3 = 3$$

nach Division durch 3 also

$$9(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8 \qquad (5)$$

Setzt man (4) in (3) ein, so folgt

$$3x_1 x_2 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 \qquad (6)$$

Für die beiden Zahlen

$$p = x_1 x_2 \quad (7) \qquad ; \qquad s = x_1 + x_2 \quad (8)$$

besagen (5) und (6) also

$$9s - 3s^2 + ps = 8 \quad (9) \qquad ; \qquad 3p - ps = 1 \quad (10)$$

Nach Addition und anschließender Division durch 3 folgt

$$p = s^2 - 3s + 3 \quad \Rightarrow \quad p = s^2 - 3s + 3 \qquad (11)$$

Einsetzen in (9) ergibt

$$9s - 3s^2 + s^3 - 3s^2 + 3s = 8 \quad \Rightarrow \quad (s-2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2$$

Nach (11), (7), (8) folgt hieraus

$$p = 1 \qquad ; \qquad x_1 x_2 = 1 \qquad ; \qquad x_1 + x_2 = 2 \qquad (12,13)$$

Setzt man $x_2 = 2 - x_1$ aus (13) in (12) ein, so folgt $x_1 = 1$ und damit aus (3) und (4) $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Also kann nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, was die Probe bestätigt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 261043B
a) Beweisen Sie, dass fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, dass stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

a) Notwendig und hinreichend für die Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus drei Seitenlängen ist, dass diese drei positiv sind und die Dreiecksungleichung erfüllen, also die Summe von je zwei dieser drei Längen größer ist als die dritte. Ist dabei die Summe der beiden kleineren Längen größer als die größte, dann folgen die anderen beiden Ungleichungen automatisch.

Seien nun $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ die fünf paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Dann lässt sich aus je drei von diesen fünf genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn $0 < s_1$ und $s_1 + s_2 > s_5$ gilt. Alle anderen Ungleichungen folgen dann direkt.
Offensichtlich gibt es solche reellen Zahlen, z.B. $s_i := 3 + i$ für $1 \leq i \leq 5$.

b) Da sich zwei Auswahlen von je drei dieser Streckenlängen immer in mindestens einer Streckenlänge unterscheiden, lassen sich genau so viele paarweise inkongruente Dreiecke aus diesen Streckenlängen konstruieren, wie es Auswahlen von drei verschiedenen Elementen aus einer fünf elementigen Menge ohne Beachtung der Reihenfolge gibt, also $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ Stück.

c) Ein Dreieck ist genau dann spitzwinklig, wenn sein größter Innenwinkel kleiner als 90°, dessen Kosinus also positiv ist. Nach dem Kosinussatz ist dies genau dann der Fall, wenn das Quadrat der größten Seitenlänge kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen.

Wir nehmen indirekt an, es gäbe reelle Zahlen $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ mit $s_1 + s_2 > s_5$ (sodass die Bedingung aus Aufgabenteil a) erfüllt ist), aus denen sich kein spitzwinkliges Dreieck bilden ließe.
Dann sind insbesondere die Dreiecke mit den Seitenlängen s_1,s_2,s_3, s_2,s_3,s_4 sowie s_3,s_4,s_5 nicht spitzwinklig, sodass

$$s_1^2 + s_2^2 \leq s_3^2 \quad , \quad s_2^2 + s_3^2 \leq s_4^2 \quad \text{und} \quad s_3^2 + s_4^2 \leq s_5^2$$

gilt. Einsetzen liefert

$$s_5^2 \geq s_4^2 + s_3^2 \geq (s_3^2 + s_2^2) + s_3^2 = 2s_3^2 + s_2^2 \geq 2(s_2^2 + s_1^2) + s_2^2 = 2s_1^2 + 3s_2^2$$

Mit $s_1 + s_2 > s_5$ folgt also

$$s_1^2 + 2s_1s_2 + s_2^2 = (s_1 + s_2)^2 > s_5^2 \geq 2s_1^2 + 3s_2^2$$

bzw. $0 > s_1^2 - 2s_1s_2 + 2s_2^2 = (s_2 - s_1)^2 + s_2^2$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Damit war die Annahme, es gäbe kein spitzwinkliges Dreieck falsch und somit ist die Existenz eines solchen bewiesen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 261044
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung $\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz}$, worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1, \qquad 1 \leq y \leq k-1 \qquad 1 \leq z \leq k-1 \qquad 1 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

I. Wenn k, x, y, z, t natürliche Zahlen sind, für die $k \geq 2$ sowie $1 \leq x,y,z \leq k-1$ und $0 \leq t \leq k-1$ sowie die geforderte Gleichung, d.h.

$$k \cdot x + +k \cdot z + t = k \cdot y + z \tag{1}$$

gilt, so folgt: Es gilt

$$k \cdot x + t = (k-1) \cdot (y - z) \tag{2}$$

wegen $x \geq 1$ und $t \geq 0$ also

$$y - z \geq \frac{k \cdot 1 + 0}{k - 1} > 1 \qquad \text{und daher} \qquad y - 1 > z \tag{3}$$

Wegen $z \geq 1$ gilt folglich $y > 2 \quad (4)$ und wegen $k - 1 \geq y$ demnach $k > 3$. Gemäß (4) ist also y eine der Zahlen 3,4,...,$k-1 \quad (5)$
Gemäß (3) ist z eine der Zahlen 1,2,...,$y-2 \quad (6)$.

II. Umgekehrt folgt, wenn $k > 3$ ist, und (5), (6) sowie (2) gelten: y und Z erfüllen erst recht die Bedingungen $1 \leq y,z \leq k-1$; daher gilt einerseits

$$(k-1) \cdot (y - z) < (k-1) \cdot (k-0) < k^2$$

Andererseits gilt wegen (6), also (3) auch

$$(k-1)\cdot(y-z) > k-1$$

also ist $(k-1)\cdot(y-z)$ eine im Positionssystem der Basis k zweistellige Zahl. Durch (2) sind folglich zu y,z jeweils natürliche Zahlen x,t mit $1 \leq x \leq k-1$m $0 \leq t \leq k-1$ eindeutig bestimmt, und für diese y,z,x,t ist mit (2) auch die geforderte Gleichung (1) erfüllt.

III. Nach I. und II. ergibt sich: Für $k=2$ und für $k=3$ ist die gesuchte Lösungsanzahl 0; im Fall $k \geq 4$ ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der Anzahl aller derjenigen Paare (y,z), die gemäß (5) und (6) zu bilden sind. Dabei durchläuft z jeweils

für $y=3$ den Wert $z=1$,
für $y=4$ den Wert $z=1,2$
...
für $y=k-1$ den Wert $z=1,2,...,k-3$ (9)

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1+2+...+(k-3) = \frac{1}{2}(k-3)(k-2)$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 261045
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, 2, ... , 6 je genau einmal vor.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen.
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz Dreierkette genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus den selben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1,...,K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1,...,K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1,...,K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen M= $\{K_1,...,K_7\}$ und $M'=\{K'_1,...,K'_7\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

In jeder Dreierkette (a,b),(b,c),(c,a) sind a,b,c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a=b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a=c$ und $b=c$.
Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau eine Dreierkette, die diese Zahlen enthält. Ferner gilt:

I. Wenn $M=\{K_1,...,K_7\}$ eine Menge mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften ist, so folgt: Da in den Dreierketten $K_1,...,K_7$ kein Stein mehrmals auftritt, enthalten sie 21 Steine. Da das Dominospiel aber nur 21 Steine (a,b) mit $a \neq b$ enthält, kommt jeder dieser Steine in genau einer der Ketten $K_1,...,K_7$ vor.
Also enthält einer dieser Ketten, o.B.d.A. die Kette K_1, den Stein (0,1). Man kann daher eine eventuelle Umbenennung der Zahlen 2,3,4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser fünf Zahlen die neue Benennung 2 (1) erhält, mit der

$$K_1 = (0{,}1),(1{,}2),(2{,}0) \tag{2}$$

ist. Weiter enthält nun eine der Ketten K_2,...,K_7, o.B.d.A. die Kette K_2 den Stein (0,3). Da K_2 außerdem keinen der in (2) genannten Steine enthält, folgt somit: In K_2 kommt außer 0 und 3 als dritte Zahl weder 1 noch 2 vor. Man kann daher eine Umbenennung der Zahlen 4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser drei Zahlen die neue Benennung 4 (3) erhält, mit der

$$K_2 = (0{,}3)(3{,}4),(4{,}0) \tag{4}$$

ist. Danach folgt:

O.B.d.A. enthält K_3 den Stein (0,5) und außerdem keinen der Steine in (2), (4), also außer 0, 5 keine der Zahlen 1,2,3,4. Somit ist

$$K_3 = (0,5)(5,6),(6,0) \tag{5}$$

O.B.d.A. enthält K_4 den Stein (1,3) und außerdem keinen der Steine in (2), (4). Als kann man eine Umbenennung der Zahlen 5,6 so vornehmen, dass diejenige Zahle dieser zwei Zahlen die neue Bezeichnung 5 (6) erhält mit der

$$K_4 = (1,3)(3,5),(5,1) \tag{7}$$

O.B.d.A. enthält K_5 den Stein (1,4) und außerdem keinen der Steine in (2), (4),(7). Somit ist

$$K_5 = (1,4)(4,6),(6,1) \tag{8}$$

O.B.d.A. enthält K_6 den Stein (2,3) und außerdem keinen der Steine in (4),(7). Somit ist

$$K_6 = (2,3)(3,6),(6,2) \tag{9}$$

Für K_7 verbleibt nur

$$K_7 = (2,4)(4,5),(5,2) \tag{10}$$

Also können nur solche Mengen $M = \{K_1,...,K_7\}$ die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben, die nach Ausführung von Umbenennungen gemäß (1), (3), (6) die in (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) genannten Ketten enthalten.

II. Jede solche Menge hat diese Eigenschaften, da eine Umbenennung gemäß (3) die Kette (2) nicht ändert und ebenso eine Umbenennung gemäß (6) keine der Ketten (2), (4), (5) ändert, so dass die an M gestellten Forderungen der Aufgabe sich - nach diesen Umbenennungen - aus den Angaben (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) bestätigen lassen.

III. Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau alle diejenigen Mengen $M = \{K_1,...,K_7\}$, die gemäß (1) - (10) zu erhalten sind, die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften haben.
Ferner folgt: Je zwei solche Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwei unterschiedliche Wahlen in (1) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da diejenige Kette, die nach der zu M führenden Wahl (1) die in (2) genannte Kette K_1 ist, nicht in M' vorkommt.

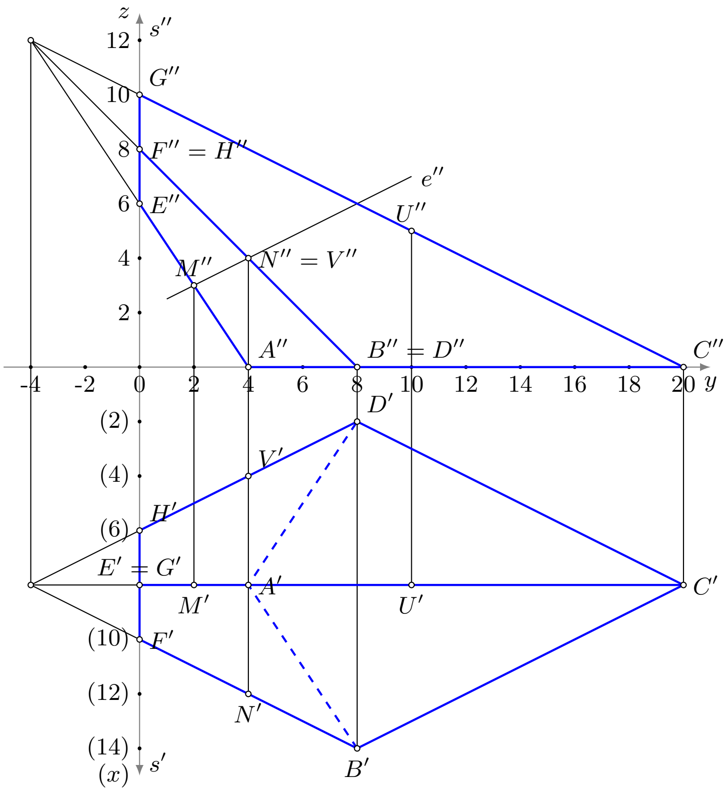
Ebenso folgt: Je zwei Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwar dieselbe Wahl in (1), aber unterschiedliche Wahlen in (3) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da die in M gemäß (4) enthaltene Kette K_2 nicht in M' vorkommt. Entsprechend sind auch je zwei Mengen voneinander verschieden, bei deren Gewinnung in (1) sowie in (3) jeweils gleichlautende Wahlen, aber in (6) unterschiedliche Wahlen getroffen wurden.

Somit ergibt sich insgesamt: Man erhält bei allen nur den $5 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten, die Wahlen in (1), (3), (6) zu treffen, Mengen mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften, jede dieser Mengen genau einmal. Also beträgt die gesuchte Anzahl dieser Mengen $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 261046
Beweisen Sie, dass es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Es genügt, einen Körper K zu beschreiben und aus seiner Beschreibung herzuleiten, dass er die Eigenschaften (1) bis (4) hat.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende: K sei der Restkörper, der verbleibt, wenn man einer Pyramide $P = ABCDS$ vermittels einer geeigneten Schnittebene s eine Pyramide $EFGHS$ abschneidet.
Dabei seien P und s gegegen durch ihre Darstellung in Zweitafelprojektion (siehe Abbildung), wobei die Aufrissebene und die (noch nicht in die Zeichenebene heruntergeklappte) Grundrissebene zugleich die y,z-Ebene bzw. die x,y-Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems seien.



In diesem Koordinatensystem sei

$$A = (8{,}4{,}0), \quad B = (14{,}8{,}0), \quad C = (8{,}20{,}0), \quad D(2{,}8{,}0), \quad S = (8,-4{,}12)$$

Als Schnittebene s sei die $x-z$-Ebene gewählt. Für ihre Schnittpunkte E,F,G,H mit den Kanten AS, BS, CS, DS erhält man

$$E = (8{,}0{,}6), \quad F = (10{,}0{,}8), \quad G = (8{,}0{,}10), \quad H = (6{,}0{,}8)$$

Für den so definierten Restkörper K gilt in der Tat, wie gefordert:

(1) Die Oberfläche von K besteht genau aus den sechs ebenen Vierecken $ABCD$ (Grundfläche P in der $x-y$-Ebene), $EFGH$ (Schnittfläche von P mit der Ebene s), $ABFE$, $BDGF$, $CDHG$, $DAEH$ (Teilflächen der Seitenflächen ABS, BCS, CDS, DAS von P).
(2) Die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ haben die Seitenkanten AB, BC, CD, DA bzw. EF, FG, GH, HE, also keine gemeinsame Seitenkante.
(3) Außer diesen hat der Körper K noch genau die 4 Seitenkanten AE, BF, CG, DH.
(4) Deren Mittelpunkte sind

$$M = (8{,}2{,}3), \quad N = (12{,}4{,}4), \quad U = (8{,}10{,}5), \quad V = (4{,}4{,}4)$$

Dass diese vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, kann man z.B. folgendermaßen nachweisen:

Wegen der Gleichheit der Aufrisse $N'' = V''$ steht die durch M,N,V gelegte Ebene e senkrecht zur Aufrissebene; bei senkrechter Projektion von e auf die Aufrissebene ergibt sich also eine Gerade e''; sie geht durch M'', N''. Diese Gerade e'' in der $y-z$-Ebene hat den Anstieg $(4-4):(4-2) = \frac{1}{2}$. Dagegen hat die Gerade durch N'', U'' den Anstieg $(5-4):(10-4) = \frac{1}{6}$.
Also liegt U'' nicht auf e''; folglich kann auch U nicht auf e liegen.
Übernommen von [5]

7.29 XXVII. Olympiade 1987

7.29.1 I. Runde 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271011
Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

Die Zahl 1987 ist durch keine der Zahlen

$$2, 3, 5, 6, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$$

teilbar (wie man z.B. durch Berechnen der 14 Divisionen 1987 : 2, 1987 : 3, ... mit einem Taschenrechner feststellen kann. Wegen $\sqrt{1987} < 44$ besagt dies, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt.

Damit ist bewiesen: 1987 ist eine Primzahl. Daraus folgt, dass es genau die folgenden vier geordneten Paare ganzer Zahlen $(x; y)$ mit $x \cdot y = 1987$ gibt:

$$(1{,}1987) \quad , \quad (-1, -1987) \quad , \quad (1987, 1) \quad , \quad (-1987, -1)$$

Aufgabe 2 - 271012

a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt?

b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt!

a) Für jede ganze Zahl x gilt entweder $x = 1$ oder $x \geq 2$ oder $x \leq 0$.

Wenn $x = 1$ ist, so existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht.

Wenn $x \geq 2$ ist, so ist $x - 1 \geq 1$; für den Kehrwert gilt daher $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

Wenn $x \leq 0$ ist, so ist $x - 1$ negativ und daher auch $\frac{1}{x-1}$ negativ.
Damit ist bewiesen, dass es keine ganze Zahl x gibt, für die $\frac{1}{x-1} > 1987$ gilt.

(1) b) Für jede reelle Zahl $x \leq 1$ gilt entweder $x = 1$, und dann existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht, oder es gilt $x < 1$, also $x - 1 < 0$ und folglich $\frac{1}{x-1} < 0$.

Für alle reellen $x \leq 1$ ist damit bewiesen, dass sie die Ungleichung $\frac{1}{x-1} > 1987$ nicht erfüllen.

(2) Für reelle $x > 1$, ist $x - 1$ positiv und daher die Ungleichung $\frac{1}{x-1} > 1987$ der Reihe nach äquivalent mit

$$1 > 1987 \cdot (x - 1) \Rightarrow \frac{1}{1987} > x - 1 > 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{1988}{1987} \tag{1}$$

Alle diejenigen x aus (1) erfüllen die gegebene Ungleichung.

Aufgabe 3 - 271013

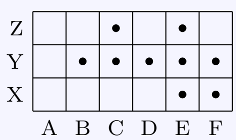


Abbildung a)

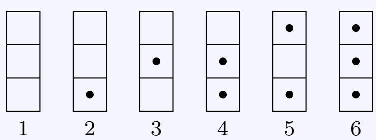


Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Abbildung b) zusammengesetzt werden.

Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!

Hinweis: Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die in der Abbildung a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z.B. das rechte obere Feld mit FZ bezeichnet.

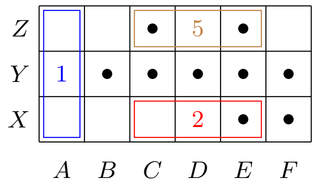
Durch systematisches Erfassen aller möglichen Stellungen einzelner Teile erkennt man, dass es für Teil 5 nur eine Lagemöglichkeit gibt, für Teil 2 dagegen zwei Möglichkeiten, für Teil 1 drei und für alle anderen Teile sogar vier Lagemöglichkeiten.
Folglich ist es günstig, die Einpassungsmöglichkeiten der sechs Teile in der angegebenen Reihenfolge zu untersuchen.

Teil 5 kann nur eine Lage einnehmen, nämlich CZ, DZ, EZ.

Teil 2 kann nur zwei Lagen einnehmen. Die Lage AZ, BZ, CZ entfällt, weil das Feld CZ bereits von Teil 5 belegt ist. Also muss Teil 2 die Lage CX, DX, EX einnehmen.

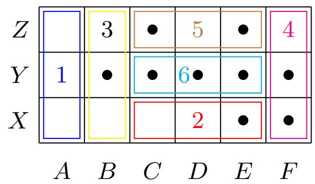
Teil 1 kann nur drei Legen einnehmen. Die Lagen AX, BX, CX und BX, CX, DX entfallen, weil das Feld CX bereits von Teil 2 belegt ist. Also muss Teil 1 die Lage AX, AY, AZ einnehmen.

Die auf diese Weise erhaltene Teilung ist in der Abbildung festgehalten. Danach folgt unmittelbar weiter:



Für Teil 3 ist nur noch BX, BY, BZ möglich, für Teil 4 nur noch FX, FY, FZ und für Teil 6 nur noch CY, DY, EY.

Damit ist als eine Möglichkeit des Zusammensetzens die in der nachfolgenden Abbildung gezeigte gefunden, und zugleich ist bewiesen, dass sie die einzige ist.



Aufgabe 4 - 271014
Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

Angenommen, es gäbe solche Würfel mit einer Kantenlänge a, so müsste (u.a. auch)

$$x \cdot a = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad y \cdot a = \sqrt{3} \tag{1}$$

gelten. Dabei müssten x und y ganze Zahlen sein, da sie die Anzahl der Würfel längs der Kanten des Quaders angeben würden.

Aus (1) folgte $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Das ist ein Widerspruch, da links eine rationale und rechts eine irrationale Zahl stehen würde. Die Frage muss also verneint werden.

Lösungen der I. Runde 1987 übernommen von [5]

7.29.2 II. Runde 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271021

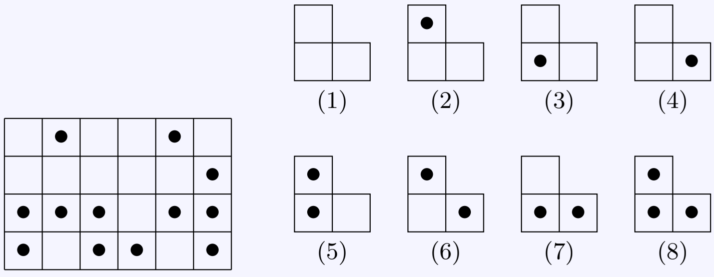
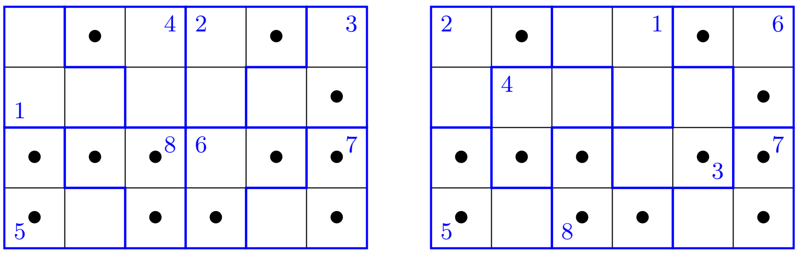


Abbildung a) Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) soll aus den Teilen der Abbildung b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechteckes, die auf diese Weise entstehen können!
Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

Es gibt sogar genau die beiden nachfolgenden Lösungen:



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 271022
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n+2} \qquad (1)$$

eine natürliche Zahl ist!

Polynomdivision von Zähler und Nenner ergibt

$$(n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6) : (n+2) = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$$

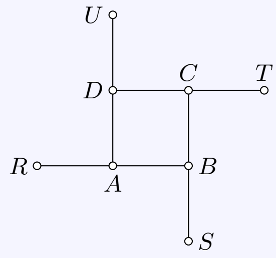
Der Term $a_n = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$ (n natürliche Zahl) wächst ab einem n_0 streng monoton. Es wird $a_0 = -3, a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 3, \ldots$ (2) und

$$a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 5n + 2 > 0 \quad \text{für} \quad n \geq 2; n_0 = 2$$

Damit wird (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ zu einer natürlichen Zahl.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

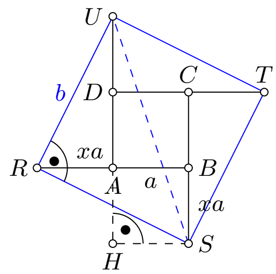
Aufgabe 3 - 271023



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie in der Abbildung um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.

a) Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!



In der Abbildung sei $AB = BC = CD = DA = a$, $RA = UD = CT = BS = x \cdot a$ und die Strecke $RU = b$. Der Punkt H sei der Endpunkt der Verlängerung von DA um xa über A hinaus. Der Winkel $\angle SHA$ ist dann offensichtlich ein rechter Winkel.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck SBR mit den Katheten xa und $a + xa$ ergibt sich für die Hypotenuse

$$RS^2 = (xa)^2 + (a + xa)^2 = a^2(2x^2 + 2x + 1) \to RS = b = a\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Aus Symmetriegründen muss $RS = ST = TU = UR = b$ gelten (bzw. durch analoge Rechnung nachzuweisen). Damit das Viereck $RSTU$ Quadrat ist, müssen die Innenwinkel rechte Winkel sein. Im rechtwinkligen Dreieck HSU mit den Katheten a und $a + 2xa$ wird für die Hypotenuse

$$US^2 = a^2 + (a + 2xa)^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) \to US = a\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras wird im Dreieck SRU aus

$$US^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) = RS^2 + RU^2$$

dass SRU ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle SRU = 90°$ ist. Analog weißt man die rechten Winkel bei S, T und U nach. Das Viereck $RSTU$ ist damit ein Quadrat.

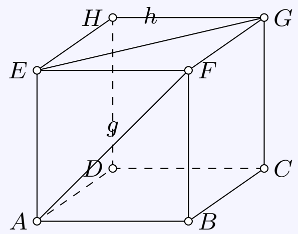
b) Der Flächeninhalt des Quadrates $RSTU$ ist $A_{RSTU} = b^2$, der des Quadrates $ABCD$ gleich $A_{ABCD} = a^2$. Es wird

$$A_{RSTU} = 5A_{ABCD}$$
$$(a\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = 5a^2$$
$$2a^2 \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \to x_1 = 1; x_2 = -2$$

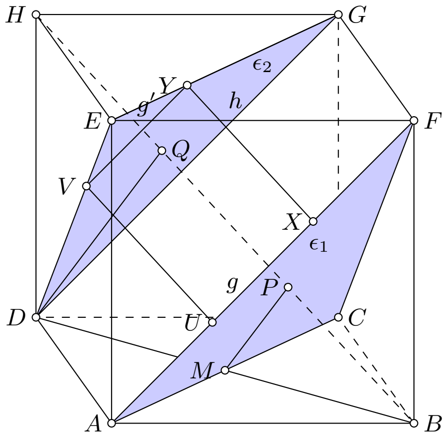
$x_2 < 0$ entfällt, so dass für $x = 1$ das Quadrat $RSTU$ den fünffachen Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ hat.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 271024



Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet.
Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.
Ermitteln Sie den Abstand von g und h!
Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.



Die Ebenen ϵ_1 durch A, C, F und ϵ_2 durch D, E, G sind parallel zueinander; die Raumdiagonale BH die sie in P und Q schneide, steht auf diesen Ebenen senkrecht.
Alle von Punkte aus ϵ_1 auf ϵ_2 gefällten Lote haben somit die Länge PQ. Zu diesen Loten gehört auch XY mit der im Aufgabentext beschriebenen Lange.

Die Fußpunkte aller von Punkten aus g gefällten Lote bilden nämlich eine zu g parallele Gerade g' in ϵ_2. Wegen $g \parallel g' \nparallel h$ schneidet sie h in einem Punkt Y, dieser ist Fußpunkt eines X auf g, und wegen $XY \perp \epsilon_1$, $XY \perp \epsilon_2$ gilt $XY \perp g$, $XY \perp h$.
Also ist PQ gleich dem gesuchten Abstand XY. Ist nun M der Schnittpunkt von AC mit BD, so gilt: Die Ebene durch B,F,H,D schneidet ϵ_1 bzw. ϵ_2 in der Geraden durch P, P bzw. der Geraden durch D, Q.
Wegen $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ ist daher $MP \parallel DQ$, nach dem Strahlensatz und wegen $BM = MD$ also $BP = PQ$.
Ebenso folgt $HQ = PQ$. Also ist der gesuchte Abstand

$$XY = PQ = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

Übernommen von [5]

7.29.3 III. Runde 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271031
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

Die Bedingungen (1) bis (4) sind genau dann erfüllt, wenn als Ziffern von x drei natürliche Zahlen a,b,c auftreten, für die folgendes gilt: Es ist

$$1 \leq a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c \tag{5}$$

und die Bedingung (4) wird erfüllt durch die Zahl $x = 100a + 10b + c$ und diejenige Zahl y, für die genau einer der folgenden Fälle I bis V vorliegt:

(I) Es gilt $y = 100a + 10c + b$

(II) Es gilt $y = 100b + 10a + c$ und außer (5) auch $b \neq 0$. (6)

(III) Es gilt $y = 100b + 10c + a$ und außer (5) auch (6).

(IV) Es gilt $y = 100c + 10a + b$ und außer (5) auch $c \neq 0$. (7)

(V) Es gilt $y = 100c + 10b + a$ und außer (5) auch (7).

Im Fall I ist (4) wegen $x - y = 9(b - c9$ äquivalent mit $b - c = 5$, was unter den Bedingungen (5) genau durch

$$(b; c) = (5; 0), (6; 1), (7,2), (8; 3), (9; 4)$$

erfüllt wird, jeweils zusammen mit denjenigen der Zahlen $a = 1,...,9$, die auch $a \neq b$ und $aneqc$ erfüllen. Für jede der 9 Zahlen $a = 1,...,9$ verbleiben damit genau 4 Paare $(b; c)$.

Im Fall II ist (4) wegen $x - y = 90(a - b)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 90 ist.

Im Fall III ist (4) wegen $x - y = 9(11a - 10b - c)$ äquivalent mit $11a - 10b - c = 5$ und dies mit $11a - 5 = 10b + c$.

Wegen (5), (6) scheiden hierfür die Werte $a \geq 5$ aus; denn für diese Werte würde sich bei Berechnung von $11a - 5$ eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer a und damit der Widerspruch $a = b$ ergeben. Ferner scheidet $a = 1$ aus, denn hierfür würde $11a - 5$ eine einstellige Zahl.
Die verbleibenden Werte $a = 2,3,4$ erfüllen wegen $11a - 5 = 17, 28, 39$ jeweils zusammen genau mit

$$(b; c) = (1; 7), (2; 8), (3; 9)$$

alle Bedingungen (5), (6). Also werden (1) bis (4) im Fall III durch genau 3 Paare $(x; y)$ erfüllt.

Im Fall IV ist (4) wegen $x - y = 9(10a + b - 11c)$ äquivalent mit $10a + b - 11c = 5$ und dies mit $11c + 5 = 10a + b$.
Wegen (5), (7) scheiden hierfür die Werte $c \leq 4$ und der Wert $c = 9$ aus, den $c = 0$ erfüllt nicht (7), und für $1 \leq c \leq 4$ bzw. $c = 9$ würde sich $11c + 5$ als zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer $a = c$ bzw. als dreistellige Zahl ergeben.
Die verbleibenden Werte $c = 5,6,7,8$ erfüllen wegen $11c + 5 = 60, 71, 82, 93$ jeweils zusammen genau mit

$$(a; b) = (6; 0), (7; 1), (8; 2), (9; 3)$$

alle Bedingungen (5), (7). Also werden (1) bis (4) im Fall IV durch genau 4 Paare $(x; y)$ erfüllt.

Im Fall V ist (4) wegen $x - y = 99(a - c)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 99 ist.
Als gesuchte Anzahl aller Paare $(x; y)$, die (1) bis (4) erfüllen, ergibt sich somit $36 + 3 + 4 = 43$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 271032
Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl.
Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x + a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so dass für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f.
Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f.
Hinweis:
Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

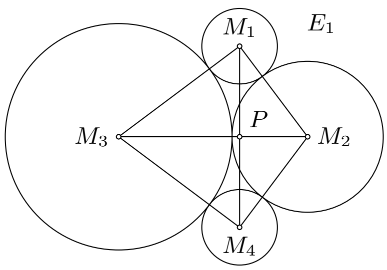
Es ist nach (1) für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + a) = 1 - f(x)$ gegeben, sodass für alle rellen Zahlen x die Gleichheit $f(x + 2a) = 1 - f(x + a) = 1 - (1 - f(x)) = f(x)$ folgt, sodass f periodisch ist.

Wir zeigen indirekt, dass $2a$ bereits die kleinste Periode dieser Funktion ist, indem wir annehmen, dass $p < 2a$ eine weitere Periode von f wäre, also für alle x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.

Nach (2) gibt es eine reelle Zahl c mit $f(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $c < x \leq c+a$. Insbesondere ist dann $f(c+a) > \frac{1}{2}$, also nach (1) $f(c) = 1-f(c+a) < \frac{1}{2}$, sodass $f(c) \neq f(c+p)$ für alle $0 < p \leq a$ gilt. Also muss $2a > p \geq a$ sein. Dann ist aber $0 < 2a - p \leq a$, also $f(c + 2a - p) = f(c + 2a) = f(c) < \frac{1}{2}$ im Widerspruch zu (2), da $c < c + 2a - p \leq c + a$ und damit $f(c + 2a - p) > \frac{1}{2}$ gilt.
Demnach gibt es keine Periode $p < 2a$, sodass $2a$ die kleinste Periode von f ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 271033
Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, dass sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren.
Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4.
Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d.h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.
Folgende Maße seien gegeben: $r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.
Wie groß muss dann h_4 sein?



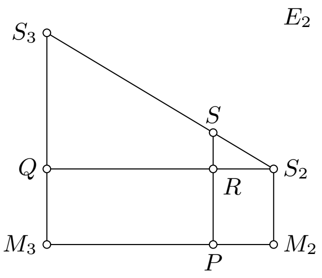
Für die Mittelpunkte der Kreise gilt nach Voraussetzung $M_1M_2 = M_4M_2 = 3$ cm (1), $M_1M_3 = M_4M_3 = 4$ cm (2) und $M_2M_3 = 5$ cm (3), siehe Abbildung.
Der Schnittpunkt der Diagonalen M_1M_4, M_2M_3 des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ sei P. Wegen (1), (2) in $M_1M_2M_3M_4$ ein Drachenviereck; daher gilt

$$M_1P = PM_4 \quad (4) \qquad \text{und} \qquad \angle M_1PM_2 = 90^\circ \quad (5)$$

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ folgt weiterhin nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras aus (1), (2), (3) $\angle M_2M_1M_3 = 90°$ (6).
Aus (5), (6) und $\angle M_1M_2P = \angle M_3M_2M_1$ folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle M_2PM_1 \sim \triangle M_2M_1M_3$, also

$$M_2P : M_2M_1 = M_2M_1 : M_2M_3 \qquad \Rightarrow \qquad M_2P = \frac{9}{5}\text{cm} \tag{7}$$

Da die Strecken M_2S_2 und M_3S_3 auf der Ebene E_1 senkrecht, also zueinander parallel sind, liegen die Punkte M_2, M_3, S_2, S_3 in einer gemeinsamen Ebene und bilden ein Trapez $M_2M_3S_3S_2$, in dem die Seitenlängen $M_2S_2 = h_2$, $M_3S_3 = h_3$ und (3) auftreten. (siehe Abbildung)



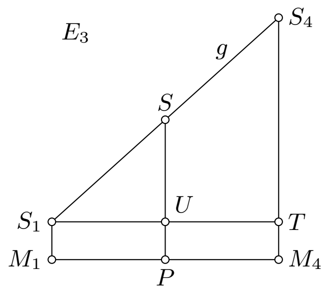
Die Parallele durch S_2 zu M_2M_3 schneidet M_3S_3 in einem Punkt Q, und da hiermit $M_2M_3QS_2$ ein Parallelogramm wird, ergibt sich

$$QS_3 = h_3 - h_2 = 2{,}5\text{cm} \tag{8}$$

Errichtet man die Senkrechte in P auf der Ebene E_1, so ist sie parallel zu M_2S_2 und M_3S_3, schneidet also S_2Q und S_2S_3 in Punkten R und S. Damit wird auch M_2PRS_2 ein Parallelogramm; ferner ergibt sich nach dem Strahlensatz und (3), (7), (8)

$$RS : QS_3 = S_2R : S_2Q = M_2P : M_2M_3 \quad \Rightarrow \quad RS = 0{,}9\text{cm}; \quad PS = h_2 + RS = 3\text{cm} \tag{9}$$

Da M_1S_1 und M_4S_4 ebenfalls auf E_1 senkrecht stehen, liegen M_1, M_4, S_1, S_4 in einer gemeinsamen Ebene E_3; in dieser liegt auch die Strecke PS. (siehe Abbildung)



Daher ist wieder $M_1M_4S_4S_1$ ein Trapez, und die Strecke PS ist parallel zu M_1S_1 und M_4S_4. Ihr Endpunkt S liegt nach seiner Definition auf S_2S_3, also in E_2 und damit auf der Schnittgeraden g von E_3 mit E_2. Auch S_1 und S_4 gehören sowohl zu E_2 als auch zu E_3; also ist g die Gerade durch S_1, S_4; folglich liegt S auf S_1S_4.

Die Parallele durch S_1 zu M_1M_4 schneidet M_4S_4 und PS in Punkten T bzw. U, und da hiermit $M_1M_4TS_1$ und M_1PUS_1 Parallelogramme werden, ergibt sich wegen (9)

$$US = PS - h_1 = 2\text{cm} \tag{10}$$

Aus dem Strahlensatz und (4), (10) erhält man damit

$$TS_4 : US = S_1T : S_1U = M_1M_4 : M_1P = 2 : 1$$
$$TS_4 = 2 \cdot US = 4\text{cm}$$

also die gesuchte Höhe $h_4 = h_1 + TS_4 = 5$ cm.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 271034
Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die $x^{2x} = \frac{1}{2}$ gilt!

Jede positive rationale Zahl x hat seine Darstellung

$$x = \frac{p}{q} \tag{1}$$

mit natürlichen Zahlen $p, q > 0$, die zueinander teilerfremd sind. Hierfür ist die geforderte Gleichung der Reihe nach äquivalent mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\left(\frac{2p}{q}\right)} = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{q}$$
$$2^q \cdot p^{2p} = q^{2p} \tag{2}$$

Wegen der Teilerfremdheit von p, q folgt aus (2), dass in der Primfaktorzerlegung von q nur der Primfaktor 2 auftreten kann und in der von p überhaupt kein Primfaktor, d.h., es muss

$$q = 2^m \tag{3}$$

mit einer natürlichen Zahl m und $p = 1$ (4) gelten. Für diese p,q ist (2) äquivalent mit

$$2^{2^m} = 2^{2m} \quad \text{mit} \qquad 2^m = 2m \tag{5}$$

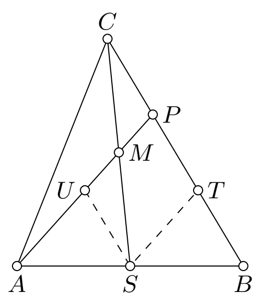
Unter den natürlichen Zahlen $m = 0{,}1{,}2$ gilt (5) genau für $m = 1$ und $m = 2$, Vergrößert man m für $m \geq 2$ jeweils um 1, so wird die rechte Seite von (5) um 2 vergrößert, die linke Seite aber verdoppelt, d.h. um 2^m und damit um mindestens 4 vergrößert. Für alle $m \geq 3$ ist somit (5) nicht erfüllt. Demnach ist $m = 1$ oder $m = 2$.

Folglich sind nach (1), (3), (4) diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die die geforderte Gleichung gilt, genau die Zahlen

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{1}{4}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 271035
Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $BP : PC$ und $AM : MP$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.



Die Parallele durch S zu AP bzw. zu BC schneide BC bzw. AP in T bzw. U (siehe Abbildung).
Nach dem Strahlensatz ist dann

$$BT : TP = BS : SA = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad BT = TP$$

$$TP : PC = SM : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad TP = PC$$

Daher gilt $BT = TP = PC$, also $BP : PC = 2 : 1$. Ferner ist nach dem Strahlensatz

$$AU : UP = AS : SB = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad AU = UP$$

$$MU : MP = MS : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad MU = MP$$

Daher gilt $MP = \frac{1}{2}UP = \frac{1}{4}AP$, also

$$AM : MP = 3 : 1$$

Übernommen von [5]

2. Lösung:

Nach dem Satz von Menelaus gilt $\frac{AB}{SB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{MS} = 1$ und somit $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{1}$.

Außerdem gilt ebenso nach Menelaus $\frac{BC}{PC} \cdot \frac{PM}{MA} \cdot \frac{AS}{SB} = 1$ und somit $\frac{AM}{MP} = \frac{3}{1}$.

Gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 6 - 271036

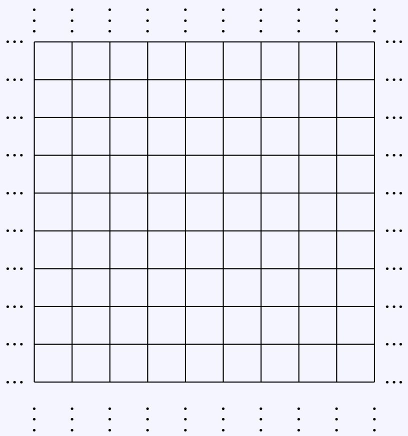


Abbildung a)

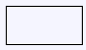


Abbildung b)

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abbildung a).

Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abbildung b) so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

Kein Punkt der Ebenen soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.

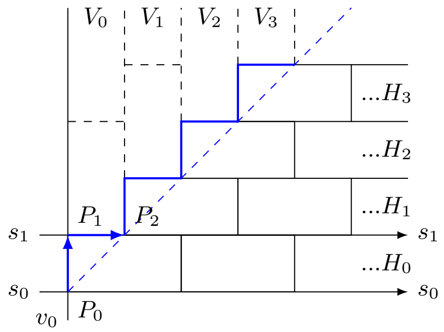
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Ein derartiges Ausfüllen der Ebene E ist möglich, wie sich z.B. folgendermaßen nachweisen lässt:

Auf einer der horizontalen Geraden g_0 betrachte man ihren Schnittpunkt P_0 mit einer vertikalen Geraden v_0 und einen Strahl s_0, der auf g_0 von P_0 ausgeht. (siehe Abbildung)

Eine zu g_0 benachbarte horizontale Gerade g_1 schneide v_0 in P_1; der von P_1 ausgehende zu g_0 gleichsinnig parallele Strahl sei s_1. Die Strahlen s_0, s_1 und die Strecke P_0P_1 begrenzen einen Halbstreifen H_0, der mit Rechtecken der genannten Art ausgefüllt werde.



Er werde ferner längs des Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_0P_1}$ und dann längs eines Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_1P_2}$, der um 1 cm in Richtung s_1 verläuft, verschoben; dabei entsteht ein ebenfalls ausgefüllter Halbstreifen H_1. Aus H_1 bilde man entsprechend H_2, aus H_2 ebenso H_3 ... usw.

Es entsteht eine treppenförmige Lagerung L von Rechtecken.
Verschiebt man sie längs $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spiegelt dann an der Geraden durch P_0, P_2, so erhält man eine Lagerung, die sich aus ausgefüllten vertikalen Halbstreifen V_0, V_1, V_2,... zusammensetzt und zusammen mit der Lagerung L einen Quadranten der Ebene E ausfüllt.

Durch Spiegelung an g_0 und v_0 erhält man schließlich eine Ausfüllung der gesamten Ebene E. Für sie gilt:

1. Jede der gegebenen horizontalen Geraden hat mit jedem Halbstreifen H_i der Lagerung L höchstens Randpunkte gemeinsam, zerlegt also keines der Rechtecke, die H_i ausfüllen, in kleinere Flächenstücke.

2. Jede der gegebenen vertikalen Geraden hat wegen des treppenförmigen Aufbaus der Lagerung L höchstens mit endlich vielen der Halbstreifen H_i gemeinsame Punkte und kann daher auch höchstens endlich viele der Rechtecke, die L ausfüllen, in kleinere Flächenstücke zerlegen.

Entsprechende Aussagen gelten für die durch Verschiebung und Spiegelung aus L entstehenden Lagerungen; dabei ist für diejenigen Lagerungen, die aus vertikalen Halbstreifen bestehen, überall "horizontal" und "vertikal" zu vertauschen.

Daraus folgt insgesamt, wie gefordert, dass jede der gegebenen vertikalen und horizontalen Geraden nur endlich viele der zur Ausfüllung von E verwendeten Rechtecke in kleinere Flächenstücke zerlegt.

Übernommen von [5]

7.29.4 IV. Runde 1987, Klasse 10

Aufgabe 1 - 271041
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = (x-2)^4 + x^2 - 2x - 6 = (x-2)^4 + (x-1)^2 - 7$$

definierte Funktion. Für sie gilt:

(1) Es ist $f(0) = 10 > 0$.
(2) Für alle x im Intervall $1 \leq x \leq 2$ ist

$$\begin{array}{rcccl} -1 \leq x-2 \leq 0 & \text{also} & (x-2)^4 \leq 1 & \text{und} \\ 0 \leq x-1 \leq 1 & \text{also} & (x-1)^2 \leq 1 & \text{also} \end{array}$$
$$f(x) \leq 1 + 1 - 7 < 0$$

(3) Es ist $f(4) = 16 + 9 - 7 > 0$.
(4) Im Intervall aller $x < 1$ ist f streng monoton fallend, denn aus $x_1 < x_2 < 1$ folgt

$$\begin{array}{ccccc} x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 & \text{also} & (x_1-2)^4 > (x_2-2)^4 & \text{und} & \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 & \text{also} & (x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 & \text{also} & f(x_1) > f(x_2) \end{array}$$

(5) Im Intervall aller $x > 2$ ist f streng monoton steigend, denn aus $2 < x_1 < x_2$ folgt

$$\begin{array}{ccccc} 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 & \text{also} & (x_1-2)^4 < (x_2-2)^4 & \text{und} & \\ 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 & \text{also} & (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 & \text{also} & f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Wegen (1), (2) gibt es im Intervall $(0;1)$ und wegen (2), (3) im Intervall $(2;4)$ aufgrund der Stetigkeit von f je mindestens eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Wegen (4) gibt es unter allen $x < 1$ und wegen (5) unter allen $x > 2$ auch jeweils keine weitere Lösung; wegen (2) liegt auch im Intervall $[1;2]$ keine Lösung. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 271042
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Wir beweisen zuerst ein
Lemma: Ist für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gegeben, dass $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ist, so ist auch $f(x_1 \cdot x_2) = 0$.

Beweis: Es ist nach (2) $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 = 0$, $\square$.

Zur eigentlichen Aufgabe:
Es ist mit $x_1 = x_2 = 1$ nach (2) $f(1) = f(1 \cdot 1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) = 2 \cdot f(1)$, also $f(1) = 0$.
Mit gleichen Werten für x_1 und x_2 folgt damit aus (1), dass

$$f(2) = f(1+1) = f(1^3) + f(1^3) = f(1) + f(1) = 0$$

ist. Nach dem Lemma folgt nun sukzessive, dass für alle positiven ganzen Zahlen n auch $f(2^n) = 0$ ist. Insbesondere ist $f(4) = 0$ und $f(4^3) = 0$.
Nach (1) ist dann mit $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ auch $f(5) = f(4+1) = f(4^3) + f(1^3) = 0 + 0 = 0$.
Nach (2) ist mit $x_1 = x_2 = \sqrt{5} \neq 0$ auch

$$0 = f(5) = f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5})$$

also auch $f(\sqrt{5}) = 0$.
Nach dem Lemma ist dann auch $f(\sqrt{5}^3) = 0$ und $f(2^3) = 0$, also nach (1) mit $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{5}$ auch $f(2+\sqrt{5}) = f(2^3) + f(\sqrt{5}^3) = 0 + 0 = 0$.

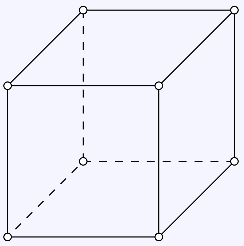
Aufgabe gelöst von cyrix

Anmerkung:
Aus (2) können wir $f(x^3) = 3x^2 f(x)$ herleiten. Es gilt $f(2x) = xf(2) + 2f(x) = 2f(x)$ und $f(x+x) = f(x^3) + f(x^3) = 6x^2 f(x)$. Aus $f(x)(6x^2 - 2) = 0$ und

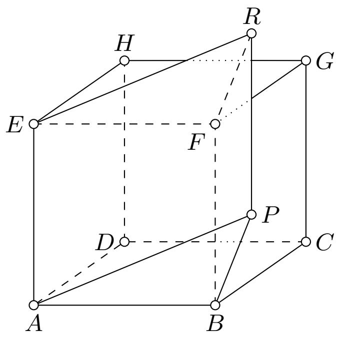
$$0 = f(\frac{1}{3}) = \pm\sqrt{1/3} f(\pm\sqrt{1/3}) \pm \sqrt{1/3} f(\pm\sqrt{1/3})$$

folgt somit $f \equiv 0$.

Aufgabe 3A - 271043A

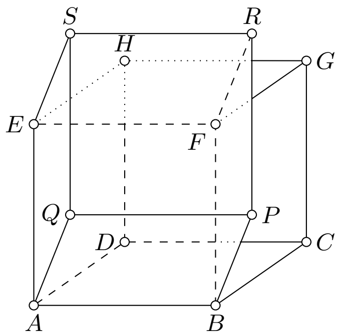


Die Abbildung wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.
Zeigen Sie, dass dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!
Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen!
Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der die Abbildung entstehen würde!
Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.



Zehneckiger Körper:

Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, R$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PA, FR, RE, AE, BF, CG, DH, PR$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABP, EFR, BCGF, CDHG, DAEH, APRE, PBFR$



Zwölfeckiger Körper:

Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PQ, QA, FR, RS, SE, AE, BF, CG, DH, PR, QS$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABPQ, EFRS, BCGF, CDHG, DAEH, AQSE, QPRS, PBFR$

Für beide Körper: Gerade in Projektionsrichtung z.B. die Gerade durch P und B.
Zu beiden Teilaufgaben gibt es noch zahlreiche andere Lösungen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 271043B
Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt:
Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2 \quad (1) \qquad ; \qquad b' = 2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird):
Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d.h.

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt.

Die zu diskutierende Ungleichung

$$\left|\frac{a^2 + 2b^2}{2ab} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt wegen a,$b > 0$ genau dann, wenn

$$|a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}| < |2a^2 - 2ab\sqrt{2}|$$

und dies ist äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}|^2 < 2a \cdot |a - b\sqrt{2}| \tag{3}$$

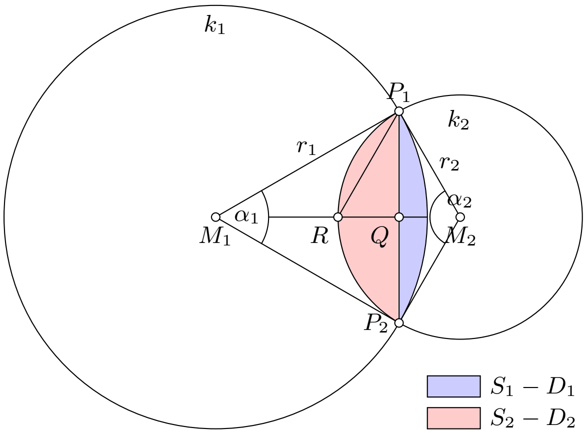
Da für ganze a,b wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ stets $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$, also $|a - b\sqrt{2}| > 0$ gilt, ist (3) äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}| < 2a \quad \Rightarrow \quad -2a < a - b\sqrt{2} < 2a \quad \Rightarrow \quad -a < b\sqrt{2} < 3a \tag{4}$$

Für $b > 0$ ist (4) äquivalent mit $b\sqrt{2} < 3a$. Also führen (1), (2) genau für alle $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\sqrt{2}$ auf einen besseren Näherungswert.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 271044
Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, dass der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und dass sich k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $P_1P_2 = 10$ cm gilt.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!
Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z.B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.



Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2. Die Gerade durch M_1, M_2 schneide P_1P_2 in Q.
Das Dreieck $P_1P_2M_1$ ist gleichseitig mit $P_1P_2 = M_1P_1 = M_1P_2 = r_1 = 10$ cm; daher gilt

$$\angle P_1M_1P_2 = \angle P_2P_1M_1 = \angle P_1P_2M_1 = 60°$$

Da die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte die Schnittsehne halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist $QP_1 = \frac{1}{2}r_1$ und $\angle M_2QP_1 = 90°$; hieraus und aus $M_2P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}r_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$M_2Q = r_1\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}r_1 = \frac{1}{2}r_2$$

Verlängert man M_2Q über Q hinaus um seine eigene Länge bis R, so liegt folglich R auf k_2; außerdem aber ist P_1Q im Dreieck M_2RP_1 sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende. Dieses Dreieck ist daher auch mit $M_2P_1 = RP_1$ gleichschenklig, also sogar gleichseitig.
Da Q (als Punkt der Schnittsehne) innerhalb k_1 liegt, M_2 aber nach Voraussetzung außerhalb k_1, folgt wegen $r_2 < r_1$, dass R innerhalb k_1 liegt. Daraus und aus der Symmetrie bezüglich M_1M_2 ergibt sich: Es gilt

$$A = (S_1 - D_1) + (S_2 - D_2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

S_1: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_1$ von k_1 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_1 = \angle P_1M_1P_2 = 60°$,
S_2: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_2$ von k_2 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_2 = \angle P_1M_2P_2 = 2 \cdot \angle P_1M_2R = 120°$,
D_1: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_1$,
D_2: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_2$, wegen $\triangle M_2QP_2 \cong \triangle M_2QP_1 \cong \triangle RQP_1$ auch Flächeninhalt des Dreiecks M_2RP_1.

Hiernach und wegen $r_2^2 = \frac{1}{3}r_1^2$ erhält man nach den Flächeninhaltsformeln für Kreissektoren und gleichseitige Dreiecke

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r_1^2 \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{4}r_1^2\sqrt{3} \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \quad ; \quad D_2 = \frac{1}{4}r_2^2\sqrt{3}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right) r_1^2 = \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 100\text{cm}^2$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 271045
Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:
(1) Endet das Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.
(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in umgekehrter Reihenfolge besteht.
(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.
(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.
Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendung sind zugelassen.
Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

Es gibt hier zwei Start-Szenarien, einmal mit Regel (1) ESR und einmal mit Regel (2) ESSE welche sich mit den Regeln (2),(3),(4) beliebig fortsetzen lassen.
z.B. ES ESSE ESSEESSE ESSSSE ERRRSE ERSE.
z.B. ESR ESRRSE ESSE

Entscheidend ist jedoch, jedes nachfolgende Wort beginnt stets mit E und endet mit E.
Die zwischen E....E liegenden Buchstaben S sind mit den gegebenen Regeln nicht vollständig zu eliminieren, da bedingt durch die Regeln (2) und (4) S stets aus 2er-Potenzen besteht und daher mit Regel (3) nicht vollständig zu eliminieren ist.

Sei 2^n der Anzahl der Buchstaben S die durch Anwendung der Regeln (2),(4) gebildet wird und $2^m \cdot 3$ die Anzahl der Buchstaben S die durch Regel (3) eliminiert werden.

$$n,m \in \mathbb{N}_0 \qquad ; \qquad 2^n - 2^m * 3 \neq 0$$

$$2^n \neq 2^m \cdot 3 \qquad ; \qquad 2^{n-m} \neq 3$$

Man gelangt also nicht zu E, EE bzw. EEEE woraus über ERRR dann ER werden könnte. Es ist nicht möglich mit den gegebenen Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 6 - 271046
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ gilt, dass jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leq x \leq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5) \leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_5^2 + b_5^2 \leq \frac{5}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5)$$

1. Es gilt stets $(a_i - b_i)^2 \geq 0$, also

$$2a_ib_i \leq a_i^2 + b_i^2 \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die linke der behaupteten Ungleichungen.

2. Da nach Voraussetzung

$$a_i \leq 10 \leq 2b_i, \quad \text{also} \quad 2b_i - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad b_i \leq 10 \leq 2a_i, \quad \text{also} \quad 2a_i - b_i \geq 0$$

gilt, folgt ferner

$$(2b_i - a_i)(2a_i - b_i) \geq 0$$

$$5a_ib_i - 2b_i^2 - 2a_i^2 \geq 0$$

$$a_i^2 + b_i^2 \leq \frac{5}{2}a_ib_i \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die rechte der behaupteten Ungleichung.

Übernommen von [5]

7.30 XXVIII. Olympiade 1988

7.30.1 I. Runde 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281011

a) Bernd hörte, dass der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies:

Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen.

Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!

b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

a) Es genügt z.B., mindestens für zehn der genannten Zahlen x die unten angegebenen Feststellungen I., II., III. auszuführen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 - x + 41$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x^2 - x + 41$	151	173	197	23	251	281	313	347	383	421
x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x^2 - x + 41$	461	503	547	593	641	691	733	797	853	911
x	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$x^2 - x + 41$	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

I. Die Quadratwurzeln aller hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ sind kleiner als 41.

II. Alle Primzahlen unterhalb 41 sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

III. Für jede der hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ gilt: Sie ist durch keine der in II. genannten Primzahlen teilbar.

Aus I., II., III. folgt nämlich, dass alle diese Zahlen $x^2 - x + 41$ selbst Primzahlen sind.

b) Nicht für jedes ganzzahlige x ist $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Zum Beweis dieser Aussage genügt es, eine ganze Zahl x zu nennen, für die sich erweist, dass $x^2 - x + 41$ keine Primzahl ist. Ein solches Beispiel ist etwa $x = 41$; denn hierfür wird $x^2 - x + 41 = 41^2$.

Aufgabe 2 - 281012

Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.

Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

I Wenn z den geforderten Bedingungen genügt und a, b die erste bzw. dritte Ziffer von z sind, so folgt aus (1), (2): a und b sind natürliche Zahlen mit

$$1 \leq a \leq 9 \qquad , \qquad 0 \leq b \leq 9 \tag{4}$$

$$z = 1000a + 100a + 1ob + b = 11(100a + b) \tag{5}$$

Ferner gibt es nach (3) eine natürliche Zahl n mit $n^2 = z$, also $n^2 = 11(100a + b)$. Die Primzahl 11 ist also Teiler von n^2 und folglich auch Teiler von n; es gibt somit eine natürliche Zahl m mit $n = 11m$, also

$$11^2 m^2 = 11(100a + b) \qquad ; \qquad 11m^2 = 100a + b \qquad ; \qquad 11(m^2 - 9a) = a + b \tag{6}$$

d.h., $a+b$ ist durch 11 teilbar. Da nach (4) aber $1 \leq a+b \leq 18$ gilt, ist dies nur mit

$$a+b=11 \tag{7}$$

möglich. Damit führt (6) auf

$$11m^2 = 99a+11 \qquad ; \qquad m^2 = 9a+1 \tag{8}$$

Für $a = 1,...,9$ hat $9a+1$ die Werte 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82; danon ist nur der für $a=7$ entstehende Wert 64 eine Quadratzahl, Daher und wegen (7), (5) können die Bedingungen der Aufgabe nur mit $a=7, b=4, z=7744$ erfüllt werden.

II Die Zahl z erfüllt (1), (2) und wegen $88^2 = 7744$ auch (3).

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau die Zahl $z=7744$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 3 - 281013
Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h=10cm$. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P*$ abgetrennt werden, deren Volumen $V*$ ein Drittel des Volumens V der ursprünglichen Pyramide P ist. Wie groß ist die Höhenlänge h^* dieser abgetrennten Pyramide P^*?

Hinweis : Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm

liegen?

Ist S die Spitze beider Pyramiden, so geht P^* aus P durch zentrische Streckung hervor. Ist k der Streckungsfaktor, so gilt für die Volumina $V^* = k^3 V$. Daher wird die Forderung $V^* = \frac{1}{3}V$ genau dann erfüllt, wenn $k^3 = \frac{1}{3}$, d.h. $k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ und damit für die Höhenlänge gilt:

$$h^* = k \cdot h = \frac{10}{\sqrt[3]{3}} \text{ cm} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 4 - 281014
Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor:

Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.

1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45893127, in Gruppen 045 893 127.
Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme $7+3\cdot 2+2\cdot 1=15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme $3+3\cdot 9+2\cdot 8=46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme $5+3\cdot 4+2\cdot 0=17$.

Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl $+15-46+17=-14$; diese ist durch 7 teilbar.

2. Beispiel: Zu der Zahl 45693127 findet man entsprechend die Gesamtsumme $+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die *Gesamtsumme* durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.
Beweisen Sie diese Aussage!

Bei der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl sind die Ziffern der Reihe nach (von rechts nach links) zu multiplizieren mit den Zehnerpotenzen $10^0, 10^1, 10^2, ...$ Das sind die Zahlen

$$\begin{aligned}
&10^0 && = 1\\
&10^1 && = 7+3\\
&10^2 = 70+30 = 7(10+4)+2 && = 7a+2 \text{ mit } a = 10+4\\
&10^3 = 70a+20 = 7(10a+3)-1 && = 7b-1 \text{ mit } b = 10a+3\\
&10^4 = 70b-10 = 7(10b-1)-3 && = 7c-3 \text{ mit } c = 10b-1\\
&10^5 = 70c-30 = 7(10c-4)-2 && = 7d-2 \text{ mit } d = 10c-4\\
&10^6 = 70d-20 = 7(10d-3)+1 && = 7e-1 \text{ mit } e = 10d-3\\
&\;...
\end{aligned}$$

Anschließend wiederholen sich in der gleichen Reihenfolge die Darstellungen der Zehnerpotenzen als Sonne aus einem Vielfachen von 7 und einer (jeweils der nächsten) der Zahlen 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Die zu untersuchende Zahl ist damit gleich der Summe aus einem Vielfachen von 7

und den Produkt der (von rechts gezählt) 1. Ziffer mit 1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 2. Ziffer mit 3 (*)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 3. Ziffer mit 2
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 4. Ziffer mit -1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 5. Ziffer mit -3 (**)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 6. Ziffer mit -2 .....

Die Summe der hier genannten Produkte ist aber gerade die "Gesamtsumme", wie man an der Gliederung in Dreiergruppen und dem dabei auftretenden Vorzeichenwechsel in (*), (**), ... feststellt.

Da sich somit die zu untersuchende zahl von ihrer "Gesamtsumme" nur um ein Vielfaches von 7 unterscheidet, erhält man, wie verlangt, die Aussage, dass die zu untersuchende Zahl genau dann durch 7 teilbar ist, wenn die "Gesamtsumme" es ist.

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen von [5]

7.30.2 II. Runde 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281021
Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

Für natürliche Zahlen, deren Zifferndarstellung nur us Ziffern 0 und 1 besteht, gilt:

1. Eine solche Zahl ist genau dann positiv, wenn die Anzahl der Ziffern 1 nicht Null ist.
2. Sie ist genau dann durch 450 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 50 teilbar ist, da 9 und 50 zueinander teilerfremd sind.
3. Sie ist genau dann durch 50 teilbar, wenn ihre Ziffernfolge auf ...00 endet; da die Teilbarkeit durch auch bei Endung ...50 möglich ist, da hier aber nur 0 und 1 vorkommen.
4. Sie ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist; ihre Quersumme ist hier gleich der Anzahl der Ziffern 1 in der Zifferndarstellung.

Die Zifferndarstellung der kleinsten Zahl, die alle diese Bedingungen erfültt, besteht folglich aus genau neun Ziffern 1 und zwei anschließenden Ziffern 0. D.h., die gesuchte Zahl lautet 11111111100.

Aufgabe 2 - 281022
Weisen Sie nach, dass es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6} = x^2 - 3 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und dass diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

Wenn eine quadratische Funktion f, d.h. eine mit reellen $a \neq 0$, b, c durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ für alle reellen x definierte Funktion f die Bedingung (*) erfüllt, so folgt: Wegen

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = ax^2 + 4ax + bx + 4a + 2b + c \qquad \text{also}$$

$$f(x) + f(x+2) = 2ax^2 + 2(2a+b)x + 2(2a+b+c)$$

gilt für alle reellen x die Gleichung $f(x) + f(x+2) = 6^2 - 18$, d.h. die Gleichung

$$2ax^2 + 2(2a+b)x + 2(2a+b+c) = 6x^2 + 0 \cdot x - 18 \qquad (**)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich aus (**) die Gleichungen

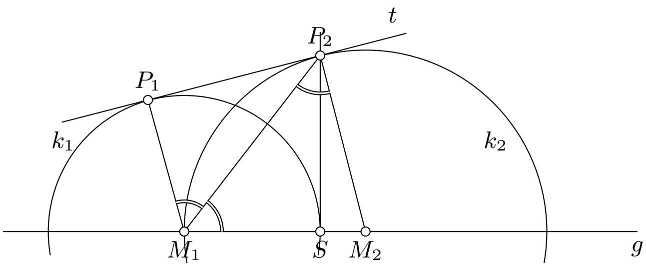
$$2a = 6; \qquad 2(2a+b) = 0; \qquad 2(2a+b+c) = -18$$

Aus ihnen folgt $a = 3$, $b = -6$, $c = -9$ und somit die Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Diese Funktion erfüllt die Bedingung (*), wie eine Probe bestätigt.
Die Gleichung $f(x) = 0$, d.h. $3x^2 - 6x - 9 = 0$, hat genau die Lösungen

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}; \qquad x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1$$

Da dies zwei ganze Zahlen sind, ist damit auch der zweite geforderte Nachweis geführt.

Aufgabe 3 - 281023
Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, dass k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:
Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.



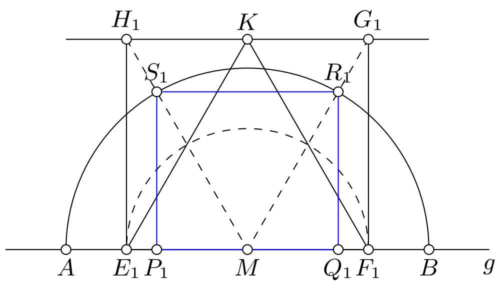
Nach Voraussetzung gilt: $\angle M_1SP_2 = 90°$ sowie nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $\angle M_1P_1P_2 = 90°$ (1).
Hieraus sowie aus $M1S = M_1P_1$ (Radien von k_1) folgt $\triangle M_1SP_2 \cong \triangle M_1P_1P_2$. Daher gilt $\angle P_2M_1S = \angle P_2M_1P_1$ (2).
Da ferner $M_2M_1 = M_2P_2$ (Radien von k_2) gilt, folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle P_2M_1S = \angle M_1P_2M_2$ (3).
Aus (2) und (3) folgt $\angle P_2M_1P_1 = \angle M_1P_2M_2$ und daraus nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes $M_1P_1 \parallel M_2P_2$.
Daher und wegen (1), d.h. $M_1P_1 \perp t$, ist auch $M_2P_2 \perp t$. Nach der Umkehrung des Satzes über Tangente und Berührungsradius folgt daraus, wie behauptet, dass t auch Tangente an k_2 ist.

Der Beweis verläuft ohne jede Änderung für die folgenden Fälle:
(1) S ist innerer Punkt von M_1M_2, (2) S ist äußerer Punkt von M_1M_2 und (3) $S = M_2$.

Aufgabe 4 - 281024
Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$.
a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, dass die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

a) Der Durchmesser des Halbkreises sei AB, sein Mittelpunkt M, die Gerade durch A und B sei g, der Halbkreis h.
Man konstruiert zunächst folgendermaßen ein Rechteck $EFGH$: (4) Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck EFK mit beliebiger Seitenlänge.
(5) Die Parallele durch K zu EF schneidet die in E und F auf EF errichteten Senkrechten in h bzw. G.

Man konstruiert dann folgendermaßen ein Viereck $P_1Q_1R_1S_1$:
(6) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}EF$ schneidet g in E_1 und F_1; man konstruiert auf derjenigen Seite von g auf der h liegt, das zu $EFGH$ kongruente Rechteck $E_1F_1G_1H_1$.
(7) Die Strahlen aus M durch G_1 bzw. H_1 schneiden h in R_1 bzw. S_1; man konstruiert die Lote R_1Q_1 bzw. S_1P_1 von R_1 bzw. S_1 auf g.



Schließlich konstruiert man folgendermaßen ein Viereck $P_2Q_2R_2S_2$:
(8) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}FG$ schneidet g in F_2 und G_2; man konstruiert auf derjenigen Seite von g, auf der h liegt, fas zu $FGHE$ kongruente Rechteck $F_2G_2H_2E_2$. (9) Die Strahlen aus M durch H_2 bzw. E_2

schneiden h in R_2 bzw. S_2; man konstruiert die Lote R_2Q_2 bzw. S_2P_2 von R_2 bzw. S_2 auf g.

c) Beweis, dass $P_1Q_1R_1S_1$ die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt:
Das nach (5) konstruierte Rechteck $EFGH$ hat als Seitenlänge FG die Höhenlänge des nach (4) konstruierten gleichseitigen Dreiecks EFK. Daher gilt

$$FG : EF = \frac{1}{2}\sqrt{3EF} : EF = \sqrt{3} : 2$$

Nach (6) ist $\angle ME_1H_1 = \angle MF_1G_1 = 90°$ und $E_1H_1)F_1G_1$ (Winkel bzw. Gegenseiten im Rechteck $E_1F_1G_1H_1$) sowie $ME_1 = MF_1 = \frac{1}{2}EF$. Damit folgt $\triangle ME_1H_1 \cong \triangle MF_1G_1$ 8sws), also $\angle E_1MH_1 = \angle F_1MG_1$.
Wegen (7) besagt das auch $\angle P_1MS_1 = \angle Q_1MR_1$.
Nach (7) liegen ferner P_1, Q_1 auf AB und R_1, S_1 auf h, also ist (1) erfüllt. Weiterhin folgt $\angle MP_1S_1 = \angle MQ_1R_1 = 90°$ und $MS_1 = MR_1$ (Radien von h). Also gilt $\triangle MP_1S_1 \cong \triangle MQ_1R_1$ (Innenwinkelsatz und wsw).
Damit folgt $P_1S_1 = Q_1R_1$ und $P_1Q_1R_1S_1$ ist als Rechteck nachgewiesen, erfüllt also (2).
Schließlich folgt aus dem Strahlensatz

$$Q_1R_1 : MQ_1 = F_1G_1 : MF_1$$

hiernach und wegen (6) gilt

$$Q_1R_1 : P_1Q_1 = F_1G_1 : E_1F_1 = FG : EF = \sqrt{3} : 2$$

also (3).
Entsprechend beweist man aus (8), (9): $P_2Q_2R_2S_2$ erfüllt (1), (2) und mit

$$P_2Q_2 : Q_2R_2 = FG : GH = \sqrt{3} : 2$$

auch (3).

Lösungen der I. Runde 1988 übernommen von [5]

7.30.3 III. Runde 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281031
Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 u.s.w. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

Damit die gesuchte Zahl n in jedem Stellenwertsystem zu den Basen 2 bis 10 an letzter Stelle eine Ziffer 1 hat, muss n bei Division durch 2, 3, 4, ..., 10 stets den Rest 1 lassen.
Es muss $n-1>0$ durch $2,3,4,\dots,10$ teilbar sein. Per Definition ist also $n-1$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $2,3,\dots,10$, also ist $n-1 = 8\cdot 9\cdot 5\cdot 7 = 2520$. Die gesuchte Zahl ist $n = 2521$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster und Nuramon

Aufgabe 2 - 281032
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (f, g) von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt $f(x+1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

Nach (1) hat die Funktion f die Gleichung $f(x) = x^2 + bx + c$ mit noch unbekannten reellen Zahlen b und c. Nach (2) wird

$$g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + b(x+1) + c = x^2 + (b+2)x + b + c + 1 \qquad (5)$$

Damit (3) erfüllt wird, muss der Term $x^2 + bx + c$ ein vollständiges Quadrat sein, d.h. es wird

$$0 = x^2 + bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c \quad \Rightarrow \quad -\frac{b^2}{4} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b^2}{4} \qquad (6)$$

Setzt man (6) in (5) und anschließend entsprechend (4) für $x = 5$ und den Funktionswert $g(x) = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (b+2)x + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ g(5) &= 5^2 + (b+2)5 + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ 4 &= \frac{1}{4}(b^2 + 24b + 144) \end{aligned}$$

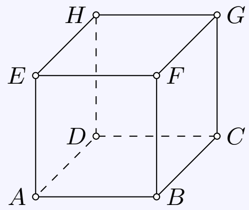
Die letzte Gleichung hat die Lösungen $b_1 = -16$ und $b_2 = -8$. Rückrechnen ergibt $c_1 = 64$ und $c_2 = 16$ mit den 2 Lösungen

$$\begin{aligned} &1) \qquad f(x) = x^2 - 16x + 64 \qquad ; \qquad g(x) = x^2 - 14x + 49 \\ &2) \qquad f(x) = x^2 - 8x + 16 \qquad ; \qquad g(x) = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

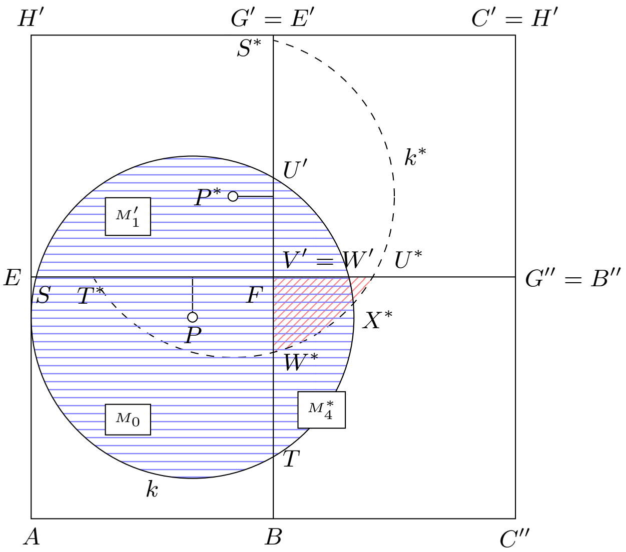
Die Probe bestätigt die Lösungen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 281033



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm.
Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!
Hinweis:
Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen.
Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, dass sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.



Zur Angabe von Flächenstücken in einer Seitenfläche f des Würfels (oder einer Bildfläche f hiervon) bezeichne stets $\overset{\frown}{XY}Z$ das Flächenstück mit derjenigen Randkurve, die aus dem in f enthaltenen Boden $\overset{\frown}{XY}$ eines zuvor angegebenen Kreises und den Strecken YZ, ZX besteht. Entsprechend sei die Bezeichnung $\overset{\frown}{XY_1}\overset{\frown}{Y_1Y_2}Z$ verwendet.

Die gesuchte Menge M lässt sich in folgenden Schritten ermitteln (siehe Abbildung).
(0) In der Fläche $ABFE$ sind mindestens alle diejenigen Punkte auf die geforderte Weise erreichbar, die der Kreisfläche K um P mit dem Radius $r = 4$ cm angehören.
Die Kreislinie k um P mit r schneidet EF in einem Punkt S und BF in einem Punkt T. Die Punkte in $ABFE$, die der Kreisfläche K angehören, bilden dann das Flächenstück $M_0 = \overset{\frown}{TS}F$.

(1) Durch Überqueren der Strecke EF sind in der Fläche $EFGH$ alle Punkte eines Flächenstückes M_1 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe die Fläche $EFGH$ um EF in die durch $A; B; FE$ gehenden Ebene e in die Lage $EFG'H'$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG' in einem Punkt U'. Die Punkte in $EFG'H'$, die der Kreisfläche K angehören, bilden das Flächenstück $M_1' = \overset{\frown}{SU'}F$. Durch Zurückdrehen von $EFG'H'$ in

$EFGH$ geht U' in einen Punkt U und damit $\overset{\frown}{SU'}$ in einen Kreisboden $\overset{\frown}{SU}$ sowie M_1' in das Flächenstück $M_1 = \overset{\frown}{SU}F$ über.

(2) Durch Überqueren von BF sind in $BFGC$ alle Punkte eines Flächenstücks M_2 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ um BF in die Ebene e in die Lage $BFG''C''$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG'' in einem Punkt V''. Durch Zurückdrehen von $BFG''C''$ in $BFGC$ geht das Flächenstück $M_2'' = \overset{\frown}{TV''}F$ aller in $BFG''C''$ zu K gehörenden Punkte über in $M_2 = \overset{\frown}{TV}F$.

(3) Durch Überqueren erst von EF und dann von FG sind in $BFGC$ auch alle Punkte eines Flächenstücks M_3 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ erst um FG in die Ebene durch E,F,G,H in die Lage außerhalb $EFGH$ und wende dann die in (1) genannte Drehung um EF an. Dadurch kommt $BFGC$ in die Lage $B'FG'C'$ außerhalb $EFG'H'$.
Der Kreis k schneidet FB' in einem Punkt W' (der wegen $B' = G''$ mit dem schon in (2) genannten Punkt V'' zusammenfällt). Die Punkte $B'FG'C'$, die K angehören, bilden das Flächenstück $M_3' = \overset{\frown}{U'W'}F$. Durch Zurückdrehen von $B'FG'C'$ in $BFGC$ geht $M_3' = \overset{\frown}{UW}F$ über.

(4) Man kann aber auch $B'FG'C'$ durch eine in der Ebene e ausgeführte Drehung um F in die Lage $BFG''C''$ bringen. Dabei gehen U', W' in die Punkte U^*, W^* über. Diese sind die Schnittpunkte von FG'' bzw. FB mit demjenigen Kreis k^*, der bei der genannten Drehung aus k entsteht.
Sein Mittelpunkt P^* entsteht bei dieser Drehung aus P, sein Radius ist r. Das Flächenstück M_3' geht bei dieser Drehung in $M_3'' = \overset{\frown}{U^*W^*}F$ über.

(5) Aus (2), (3), (4) folgt:
In $BFGC$ sind alle Punkte der Vereinigungsmenge $M_4 = M_2 \cup M_3$ auf die geforderte Weise erreichbar. Da die Kreise k und k^* in $BFG''C''$ genau einen Schnittpunkt X^* haben ergibt sich die Vereinigungsmenge $M_4^* = M_2'' \cup M_3 = \overset{\frown}{TX^*}\overset{\frown}{X^*U^*}F$.
Geht bei dem Zurückdrehen von $BFG''C''$ und $BFGC$ der Punkt X^* in X über, so geht M_4^* in $M_4 = \overset{\frown}{YX}\overset{\frown}{XU}F$ über.

(6) Durch Überqueren erst von EF, dann von FG und dann von BF sind in $ABFE$ keine neuen Punkte mehr erreichbar.
Dies ist daraus ersichtlich, dass die Menge $\overset{\frown}{T^*M^*}F$ aller in $ABFE$ zur Kreisfläche k^* um P^* mit r gehörenden Punkte bereits in M_0 liegt. Ebenso folgt:

Durch Überqueren erst von BF, dann von FG sind in $EFGH$ keine neuen Punkte erreichbar; denn man kann $EFG'H'$ durch die in (5) genannte Drehung in die Lage $E''FG''H''$ bringen; dabei geht M_1' in die Menge $\overset{\frown}{S^*U^*}F$ aller in $E''FG''H''$ zu k^* gehörenden Punkte über, auch in ihr liegen bereits alle in $E''FG''H''$ zu k gehörenden Punkte (die wegen $G''FE''H'' = B'FG'C'$ das schon in (1) genannte Flächenstück M_3' bilden).

Damit ist auch gezeigt, dass durch weiter fortgesetztes Überqueren von Kanten keine neuen Punkte mehr erreichbar sind.
Die gesuchte Menge ist also die Vereinigungsmenge der in (0), (1) und (5) durch Angabe ihrer Randkurven und deren konstruktiver Gewinnung beschriebenen Flächenstücke M_0, M_1 und M_4.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 281034
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \qquad (1)$$

Durch Polynomdivision folgt $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ und mittels binomischer Formel $a^2 - b^2 =$

$(a-b)(a+b)$. Dann wird aus (1)

$$\begin{aligned}a^3-b^3-a^2+b^2+a-b &= (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a+b)+(a-b)=0\\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2+a+b+1)=0\end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllen damit alle Paare (a,b) mit $a=b$ die Gleichung (1). Der zweite Faktor kann nicht Null werden, da gilt

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2+a+b+1 = a^2+a(b+1)+b^2+b+1 &= 0\\ a_{1;2} &= -\frac{b+1}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2+2b+1-(4b^2+4b+4)}{4}}\\ &= -\frac{b+1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}(b^2+\frac{2}{3}b+1)} = -\frac{b+1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\left(\left(b+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right)}\end{aligned}$$

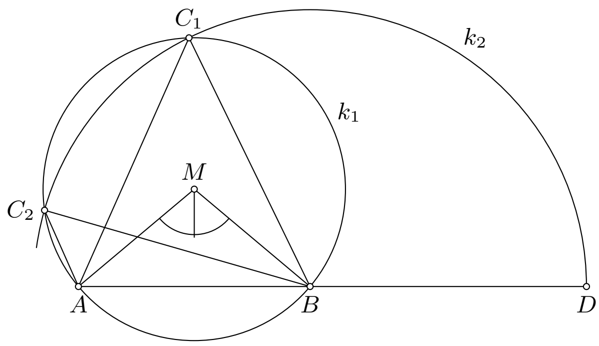
Der Radikand ist damit stets negativ. Damit gibt es kein reelles Paar (a,b) mit $(a^2+ab+b^2+a+b+1)=0$. (1) hat ausschließlich alle Paare (a,b) mit $a=b$ als Lösungen.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - 281035
Gegeben seien die Streckenlängen $r=5$ cm, $s=16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma=50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlänge $c=AB$ und $a=BC$ haben die Summe $c+a=s$.
(3) Der Winkel $\angle ACB$ hat die Größe γ.
I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Anzahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenanten Fall diese Zahl!

I. Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so folgt:
Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1): $MA=MB=r$, sowie nach (3) und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle AMB=2\gamma$.
Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis k_1, andererseits auf dem Kreis k_2 um B mit dem Radius a; dabei gilt nach (2) $a=s-AB$.

Damit ist bewiesen, dass jedes Dreieck, das (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann (siehe Abbildung):



II. 1. Man konstruiert einen Winkel der Größe 2γ; sein Schenkel sei M.
2. Man konstruiert den Kreis k_1 um M mit r, er schneidet die Schenkel des in 1. konstruierten Winkels in A bzw. B.

3. Man konstruiert die Länge $a = s - AB$ (z.B. indem man den Kreis um A mit s konstruiert, ihn mit dem von A aus durch B gehenden Strahls zum Schnitt D bringt und damit $a = BC$ erhält).
4. Man konstruiert den Kreis k_2 um B mit a. Er schneidet den Kreis k_1 in zwei Punkten C_1, C_2; jeder von ihnen kann als Endpunkt C in einem damit konstruierten Dreieck ABC genommen werden.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreiec ABC den Bedingungen (1), (2), (3) genügt:
Nach Konstruktionsschritt 2. und 4. liegen A, B und C_1 als auch C_2 auf einem Kreis mit dem Radius r, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3. und 4. gilt (wieder sowohl für $C = C_1$ als auch für $C = C_2$) $BC = s - AB$, also $AB + BC = s$, d.h., (2) ist erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1., 2. und 4. und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz gilt auch $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB = \gamma$, also (3).

IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2., 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt 4. führt, wie oben bemerkt, auf zwei Dreiecke ABC_1, ABC_2. Für sie gilt $\angle ABC_1 \neq \angle ABC_2$, also sind $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 281036
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n + 2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis:
Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.

Durch Kontrolldivisionen mit dem Taschenrechner findet man schnell, dass die kleinste nur aus Ziffern 3 bestehende natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist, die $333333 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ist.
Für $1 \leq n \leq 6$ kann man durch schrittweises Permutieren der $(n - 2)$ Ziffern 3 und der einen 4 sowie der einen 6 durch Testdivisionen die gesuchte Zahl z_n ermitteln:

n	z_n	n	z_n
1	$364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$	2	$3346 = 2 \cdot 7 \cdot 239$
3	$34363 = 7 \cdot 4909$	4	$343336 = 2^3 \cdot 7 \cdot 6131$
5	$3333463 = 7 \cdot 29 \cdot 16421$	6	$33334336 = 2^6 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 2011$

Für $n > 6$ ergibt sich das gesuchte z_n durch gegebenenfalls wiederholtes Anfügen der Ziffern '333333' an die Ziffernfolge von $z_{n \bmod 7}$, bis die gesuchte Länge der Zahl z_n erreicht wird; wobei hier unter z_0 die leere Ziffernfolge verstanden wird.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

7.30.4 IV. Runde 1988, Klasse 10

Aufgabe 1 - 281041
Zeigen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!

I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$$

$$2^n = k^2 - (1+8) \cdot 2^8 = k^2 - (3 \cdot 2^4)^2 = (k-48)(k+48) \qquad (1)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung muss

$$k - 48 = 2^i \qquad ; \qquad k + 48 = 2^j \qquad (2)$$

mit natürlichen Zahlen i, j sein. Daraus folgt $i < j$ sowie

$$2^j - 2^i = 96 \qquad ; \qquad 2^i \cdot (2^{j-i} - 1) = 2^s \cdot 3$$

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt $i = 5$, nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $j = 7$, woraus nach (1) $2n = 2^5 \cdot 2^7$ und $n = 12$ folgt.

II. In der Tat ist $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1 + 8 + 16) \cdot 2^8 = (5 \cdot 2^4)^2$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 2 - 281042
Zeigen Sie, dass es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es ist $f(0) = 7$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1), (2), (3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen.
Ein solches Beispiel ist etwa:
Für alle reellen x sei $f(x) = 7 \cdot 2^x; g(x) = 1$.
In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen $f(x) \neq 0$ für alle x und

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 2^{x+1}}{7 \cdot 2^x} = 2 = g(2x) + 1$$

auch (3).
Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiel kann es sein, einen Ansatz $g(x) =$ const., z.B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $2 \cdot g(x) = g(2x) + 1$).
So kann man eine Vielzahl weiterer Funktionenpaare f, g erhalten, z.B. für alle reellen x sei

$$f(x) = 7 \cdot 8^x \qquad , \qquad g(x) = x^3 + \frac{1}{7}$$

oder mit unstetigem f: $f(x) = 7 \cdot 2^x$ in jedem Intervall $k \leq x < k + 1$ (k ganzzahlig), $g(x) = x + 1$ für alle reellen x.

Aufgabe 3A - 281043A

$$\begin{tikzcd}
 & 50 \arrow[r] & 51 \arrow[r] & 52 \arrow[r] & 53 \arrow[d] \\
 & 49 \arrow[u] & 42 \arrow[r] & 43 \arrow[d] & 54 \arrow[d] \\
\vdots & 48 \arrow[u] & 41 \arrow[u] & 44 \arrow[d] & 55 \arrow[d] \\
62 \arrow[u] & 47 \arrow[u] & 46 \arrow[l] & 45 \arrow[l] & 56 \arrow[d] \\
61 \arrow[u] & 60 \arrow[l] & 59 \arrow[l] & 58 \arrow[l] & 57 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:
Beweisen Sie, dass (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abbildung die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

Um die Zahlen in der genannten Diagonalen zu erreichen, hat man von 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten Wege der Schrittlänge 1, 2, 3, 4, ... zu gehen. Mit der Formel

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

folgt daraus, dass jede in der Diagonale stehende Zahl z ausgedrückt werden kann durch

$$z = x^2 - x + 41 \qquad (x = 1, 2, 3, ...)$$

Bezugnehmend auf die Aufgabe 281011, in der das Ergebnis von Euler zu überprüfen war, dass z für alle Zahlen $x = 1, 2, 3, ..., 40$ prim ist, ergibt sich das Gesuchte.

Aufgabe 3B - 281043B
Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.
a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält. b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Wir lösen folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung:
Es sei n, $n \geq 1$, eine gegebene natürliche Zahl. Über $2n + 1$ sonst beliebige Punkte in der Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser $2n+1$ Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte enthält.
b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

Lösung dieser Verallgemeinerung:
a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der $2n + 1$ Punkte mit dem Radius 1 cm. Für die Lage der anderen $2n$ Punkte gibt es nun folgende Möglichkeiten:

1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren noch n weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann ist ein ein Kreis der behaupteten Art.
2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren höchstens $n - 1$ weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte. Einer von ihnen sei P. Für P und jeder der n anderen dieser $n + 1$ Punkte gilt:

Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser n anderen Punkte, d.h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für $2n+1$ Punkte in einer Ebene so anzugeben, dass sie zwar die Voraussetzungen erfüllen, dass aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand l, $l > 3$ cm, haben.
Im Inneren von k_1 wähle man $n+1$ Punkte, im Inneren von k_2 n Punkte. Unter je drei dieser $2n+1$ Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Inneren desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben.
Jeder Kreis c aber, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält, muss unter diesen $n+2$ Punkte sowohl einen inneren Punkt P_1 von $k:1$ als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$lcm = M_1M_2 \leq M_1P_1 + P_1P_2 + P_2M_2 < \frac{1}{2} + P_1P_2 + \frac{1}{2}cm$$

also $P_1P_2 > l - 1cm > 2$ cm gelten muss und daher c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muss.
Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält.
Für $n = 6$ erhält man aus dieser Verallgemeinerung die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 4 - 281044
Beweisen Sie, dass für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

I. Wie man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann, gilt

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = (x^2+4)(x^2-6x+10) = (x^2+4)((x-3)^2+1)$$

Für alle reellen x gilt $x^2+4 > 0$ und $(x-3)^2+1 > 0$. Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt 0 wäre.
II. Für alle reellen x wird

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^2(x^2-6x+9) + 5\left(x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25}\right) - \frac{144}{5} + 40 =$$

$$= x^2(x-3)^2 + 5\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \geq \frac{56}{5} > 0$$

Aufgabe 5 - 281045
In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.
Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.
Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage.
Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

I. Angenommen, ein gleichseitiges Dreieck ABC erfülle die geforderten Bedingungen; seine Seitenlänge habe die Maßzahl a.
Das Lot von B auf g habe den Fußpunkt P und schneide k in Q, das Lot von A auf k habe den Fußpunkt R; die Punkte B und C seien auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R gelegen.
Für die Maßzahlen x, y von PA, RC folgt dann, dass QC die Maßzahl $x + y$ hat. Daher ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + 64 = a^2 \tag{1}$$
$$y^2 + 25 = a^2 \tag{2}$$
$$(x + y)^2 + 9 = a^2 \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

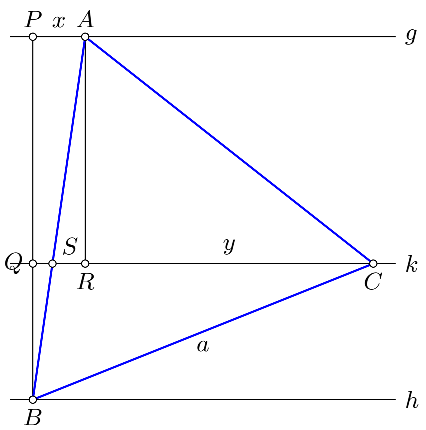
$$x^2 = a^2 - 64 \tag{4}$$
$$y^2 = a^2 - 25 \tag{5}$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 9 \tag{6}$$

und damit weiter

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2 \tag{7}$$
$$4(a^2 - 64)(a^2 - 25) = (80 - a^2)^2 \tag{8}$$
$$a^2(3a^2 - 196) = 0$$

Wegen $a > 0$ folgt somit, dass die Seitenlänge von ABC erhalten werden kann mit der Maßzahl

$$a = \frac{14}{\sqrt{3}} \tag{9}$$



II. Wird eine Seitenlänge nach der Angabe (9) erhalten, so folgt umgekehrt:
Wegen $196 > 3 \cdot 64$, also $\frac{14}{\sqrt{3}} > 8$ existieren x,y (> 0) mit (4), (5). Für diese gilt wegen (8) und $3 \cdot 80 > 196$, also $80 > \left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2$ auch (7), (6), also sind (1), (2), (3) erfüllt.

Wählt man daher B auf h, fällt das Lot BP von B auf g, legt A auf g mit x als Maßzahl von PA fest, fällt das Lot AR von A auf k und bestimmt dann C auf k mit y als Maßzahl von RC so, dass B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R liegen, so besagen (1), (2), (3) nach dem Satz des Pythagoras:
ABC ist mit der Maßzahl a der Längen $AB = AC = BC$ ein gleichseitiges Dreieck, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 6 - 281046
Beweisen Sie, dass zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt!

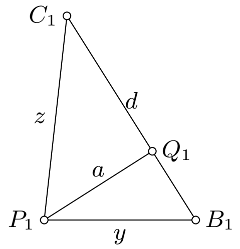
Es sei (a, b, c, d) ein beliebiges Quadrupel positiver reeller Zahlen mit $a+b+c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras erhält man die Aussage: Zahlen y, z mit

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$

existieren dann, wenn zwei Dreiecke $B_1Q_1P_1$, $C_1Q_1P_1$, beide bei Q_1 rechtwinklig, mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$ und mit der gemeinsamen Seite P_1Q_1 der Länge $P_1Q_1 = a$ so existieren, dass

$$B_1Q_1 + C_1Q_1 = d$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn es ein Dreieck $B_1C_1P_1$ mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$, $B_1C_1 = d$ gibt, in dem $P_1Q_1 = a$ die Länge der auf B_1C_1 senkrechten Höhe P_1Q_1 ist und diese Höhe ihren Fußpunkt Q_1 zwischen B_1 und C_1 hat; diese letzte Bedingung besagt, dass im Dreieck $B_1C_1P_1$ die Innenwinkel bei B_1 und C_1 spitz sind.



Entsprechend gilt: Zahlen z, x mit

$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$

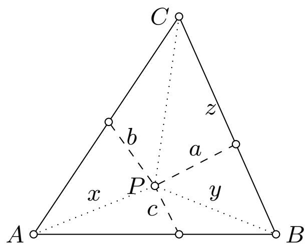
bzw. Zahlen x,y mit

$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

existieren dann, wenn ein Dreieck $C_2A_2P_2$ mit $C_2P_2 = z$, $A_2P_2 = x$, $C_2A_2 = d$, spitzen Innenwinkeln be C_2, A_2 und mit der zu C_2A_2 senkrechten Höhe der Länge b existiert, bzw. wenn ein Dreieck $A_3B_3C_3$ mit $A_3P_3 = x$, $B_3P_3 = y$, $A_3B_3 = d$, spitzen Innenwinkeln bei A_3, B_3 und mit der zu A_3B_3 senkrechten Höhe der Länge c existiert. Wegen der Übereinstimmung

$$A_2P_2 = A_3P_3, \qquad B_3P_3 = B_1P_1, \qquad C_1P_1 = C_2P_2$$

in diesen Bedingungen gilt somit:



Wenn zu einem Dreieck ABC mit $BC = CA = AB = d$ ein Punkt P (in der Ebene oder im Raum) existiert, der von den Geraden durch B, C bzw. durch C, A bzw. durch A, B die Abstände a bzw. b bzw. c hat und für den in allen drei Dreiecken BCP, CAP, ABP die bei A, B und C auftretenden Innenwinkel spitz sind, dann existiert ein Tripel (x, y, z), das die drei geforderten Gleichungen erfüllt.

Nun existiert stets sogar in der Ebene durch A, B, C ein Punkt P, der diese Bedingungen erfüllt. Dies kann man folgendermaßen zeigen:

Man konstruiere drei von einem P ausgehende Strahlen, von denen je zwei einen Winkel der Größe 120° miteinander bilden. Auf ihnen trage man Strecken der Länge a, b bzw. c von P aus ab und errichte in deren Endpunkten jeweils die Senkrechte auf dem betreffenden Strahl. Diese drei Senkrechten bilden einen Dreieck ABC, in dem jeder Innenwinkel (nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck) die Größe $360° - 2 \cdot 90° - 120° = 60°$ hat, das also gleichseitig ist.

Ist s seine Seitenlänge, so ist sein Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$$

die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCP, CAP, ABP, also

$$F = \frac{1}{2}s(a + b + c) = \frac{1}{4}s \cdot d\sqrt{3}$$

Daher gilt $a = d$, und alle Bedingungen werden von ABC mit P erfüllt.

Lösungen der IV. Runde 1988 übernommen von [5]

7.31 XXIX. Olympiade 1989

7.31.1 I. Runde 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291011
Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

Einige Beispiele und die zugehörigen Bestätigungen lauten:

$$\begin{aligned}
1989{,}2,\underbrace{1......1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 1989+2+1987\cdot 1 = 3978 = 1989\cdot 2\cdot 1^{1987}\\
995{,}3,\underbrace{1......1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 995+3+1987\cdot 1 = 2985 = 995\cdot 3\cdot 1^{1987}\\
105{,}5{,}4,\underbrace{1......1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 105+5+4+1986\cdot 1 = 2100 = 105\cdot 5\cdot 4\cdot 1^{1986}\\
15{,}15{,}9,\underbrace{1......1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 15+15+9+1986\cdot 1 = 2025 = 15\cdot 15\cdot 9\cdot 1^{1986}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Zum Auffinden der ersten beiden Beispiele führt z.B. der Ansatz $a+b+1987 = ab$, mit $b = 2$ also $a + 1989 = 2a$ und mit $b = 3$ also $a + 1990 = 3a$.

Zum Auffinden der letzten beiden Beispiele führt nach dem Ansatz $a+b+c+1986 = abc$ die Suche nach zwei Zahlen b,c, für die $b + c + 1986$ durch $bc - 1$ teilbar ist.

Durch Probieren (z.B. mit einem Rechner) findet man mit $b = 5, c = 4$ dann a als Lösung der Gleichung $a + 1995 = 20a$, mit $b = 15, c = 9$ dann a als Lösung der Gleichung $a + 2010 = 135a$.

Aufgabe 2 - 291012
Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.

Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, dass nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem Zahlenwert Z "stehenbleibt", d.h., dass der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen - durch das interne Runden des Rechners entstandenen - sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).

a) Beweisen Sie, dass aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muss, unabhängig von der Ausgangszahl A!

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem Kleincomputer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, ..., 10$ überprüfen.

a) Wenn aus einem positiven Wert A ein "stehenbleibender" Wert Z entsteht, so ist er erstens positiv und hat zweitens die Eigenschaft $\sqrt{Z+1} = Z$.

Hieraus folgt, in der Tat unabhängig von A, dass $Z + 1 = Z^2$, also $Z^2 - Z - 1 = 0$ gilt und demnach, da wegen $Z > 0$ die negative Lösung dieser Gleichung ausscheidet

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618034$$

sein muss.

b) Bei dem folgenden BASIC-Programm wird der Prozess abgebrochen, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Ergebnisse dem Betrag nach kleiner als 10^{-6} ist.

```
100 FOR A=1 TO 10
110 Y=A
120 X=Y
```

```
130 Y=SQR(X+1)
140 IF ABS(Y-X) >= 1E-6 THEN 120
150 PRINT Y
160 NEXT A
```

Aufgabe 3 - 291013

Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.

Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts.

Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein *Zug*. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines *Zuges* der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von *Zügen*, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

I. Wenn ein Spiel nach n "Zügen" unentschieden endet, so beträgt die Summe s der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritten $6n$. Ferner hat der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 14a + 14b = 14(a + b)$$

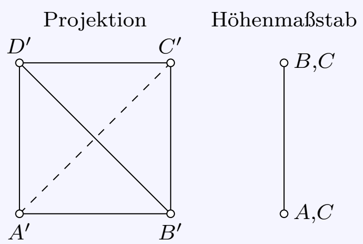
Folglich ist s ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 14 und somit ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 42 der Zahlen 6 und 14; d.h., es gilt $s = 42g$ mit einer ganzen Zahl g.

Daher ist $6n = 42g$, $n = 7g$, d.h. n durch 7 teilbar. In weniger als 7 "Zügen" kann daher kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 7 "Zügen" kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, 7.B., indem der eine Spieler in diesen 7 "Zügen" stets 2 Schritte setzen muss und der andere Spieler stets 4 Schritte (da er stets die größere Zahl gewürfelt hat).

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von "Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 7.

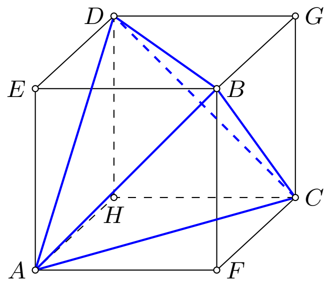
Aufgabe 4 - 291014



Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!



Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G und H liegen. Dabei sollen die Punkte E und G die gleiche Höhe wie B haben, die Punkte F und H dagegen die gleiche Höhe wie A (siehe Abbildung).

Die 8 Punkte $A, ..., H$ sind die Ecken eines Würfels, dessen Volumen a^3 beträgt.

Die Punkte A, F, C, B sind die Ecken eines Tetraeders, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann. Daher hat dieses Tetraeder $AFCB$ das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

Die zu $AFCB$ kongruenten Tetraeder $AHCD, BEDA$ und $BGDC$ haben das gleiche Volumen. Werden von den Würfel alle vier genannten Tetraeder abgetrennt, so bleibt der in Aufgabentext beschriebene Körper übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Lösungen der I. Runde 1989 übernommen von [5]

7.31.2 II. Runde 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291021
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \qquad (1)$$
$$\frac{x+\sqrt{x}}{y+\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Wenn reelle Zahlen x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, so folgt:
Nach (1) gilt $y = \frac{9}{4}x$ (3), nach (2) gilt $2x + 2\sqrt{x} = y + \sqrt{y}$ (4).
Setzt man (3) in (4) ein, so folgt

$$2x + 2\sqrt{x} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \to \qquad \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}x^2 \qquad (5)$$

Nach (1) ist $x \neq 0$, somit folgt aus (5) $x = 4$. Hieraus und aus (3) folgt $y = 9$.
Die Probe bestätigt, dass (1) und (2) genau von dem Paar $(x; y) = (4; 9)$ erfüllt werden.

Aufgabe 2 - 291022
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus.
Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt.
Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein Zug.
Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein Zug ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt.
Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines Zuges der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht.
Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht.
Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von Zügen, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie ihre Antwort!

I. Wenn ein Spiel nach n "Zügen" unentschieden endet, so beträgt die Summe der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritte $3n$. Ferner hat dann der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der Stein des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 8a + 8b = 8(a + b)$$

Folglich ist a ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 24 der Zahlen 3 und 8; d.h., es gilt $s = 24g$ mit einer ganzen Zahl g. Daher ist $3n = 24g, = 8g$.
Wäre hierbei $g = 1, n = 8$, so folgte $8(a + b) = s = 24$, $a + b = 3$, was mit positiven ganzen Zahlen a,b auf $a = 1, b = 2$ oder $a = 2, b = 1$ führen würde; d.h., der Stein eines Spielers hätte genau einen vollen Umlauf zurückgelegt, woraus wegen $n = 8$ folgte, dass er in jedem dieser 8 "Züge" nur einen Schritt zu gehen hätte, der des anderen Spielers also stets zwei Schritte.
Das führt auf den Widerspruch, dass dessen Stein beim vierten Zug auf das Feld A gekommen wäre.

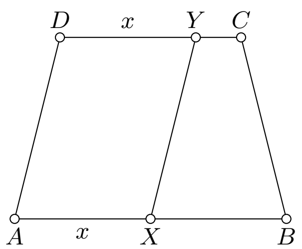
Also muss $g \geq 2$ sein, d.h.: In weniger als 16 "Zügen" kann kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 16 "Zügen" kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z.B. folgendermaßen (die Felder nach A seien mit $1, ..., 7$ nummeriert):

Zug	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Spieler 1 Schrittzahl	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2
erreichtes Feld	1	3	5	7	1	3	4	5	7	1	2	3	4	5	6	A
Spieler 2 Schrittzahl	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1
erreichtes Feld	2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	7	1	3	5	7	A

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von "Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 16.

Aufgabe 3 - 291023
Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.
Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $AB < 3 \cdot CD$ gilt.



Die Seitenlängen AB, CD und die Höhe des Trapezes seien wie üblich mit a, c bzw. h bezeichnet.
Jede zu einem Schenkel, o.B.d.A. zu AD parallele Gerade, die des Trapez in zwei Vierecke zerlegt, muss AB in einem Punkt X zwischen A und B sowie CD in einem Punkt zwischen C und D schneiden (sonst ergäbe sich entweder überhaupt keine Zerlegung des Trapezes oder eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein Dreieck).
Die entstehenden Vierecke sind das Parallelogramm $AXYD$ und des Trapez $XBCY$.

Mit $x = AX = DY$ sowie wegen $c < a$ ist die Bedingung, dass X zwischen A und B sowie Y zwischen C und D liegt, äquivalent mit $x < c$. (1)
Wegen $XB = a - x$ und $YC = c - x$ haben die genannten Vierecke die Flächeninhalte

$$F(AXYD) = x \cdot h, \qquad F(XBCY) = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h = \left(\frac{1}{2}(a + c) - x\right) \cdot h$$

Also gibt es genau dann eine zu AD parallele Gerade mit $F(AXYD) = F(XBCY)$, wenn es eine Streckenlänge x mit (1) und

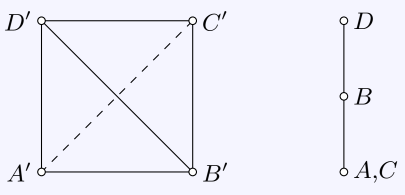
$$x \cdot h = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h \tag{2}$$

gibt. Die Gleichung (2) ist nun der Reihe nach äquivalent mit

$$x = \frac{1}{2}(a + c) - x \qquad \to \qquad x = \frac{1}{4}(a + c)$$

Diese Zahl erfüllt genau dann (1), wenn $\frac{1}{4}(a + c) < c$ gilt, und dies ist der Reihe nach äquivalent mit $a + c < 4c$ sowie $a < 3c$, wie es zu zeigen war.

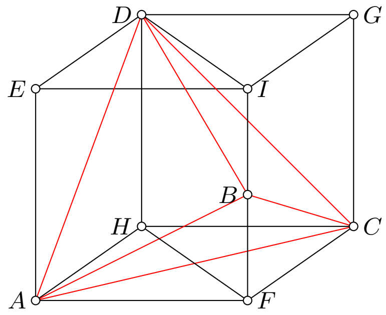
Aufgabe 4 - 291024



Projektion Höhenmaßstab

Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.
Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.
a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!
b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des Körpers!

a)



Die Figur mit den roten Kanten ist der darzustellende Körper $ABCD$.

b) Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G, H liegen, auf der Projektionsgeraden durch B außerdem der Punkt I. Dabei sollen E, G und I die gleiche Höhe wie D haben, F und H dagegen die gleiche Höhe wie A.

Damit ist $AFCHEIGD$ ein Würfel, dessen Volumen a^3 beträgt. $AFCB$ ist ein Tetraeder, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann; dessen Volumen also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

beträgt. $AHCD$ ist ein Tetraeder; sein Volumen ergibt sich entsprechend zu

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

Weiter sind $AEIBD$ und $CGIBD$ Pyramiden, jeweils mit einem Trapez, $AEIB$ bzw. $CGIB$ als Grundfläche und ED bzw. GD als zugehöriger Höhe.
Jede dieser Pyramiden hat also das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) a \cdot a = \frac{1}{4}a^3$$

Werden die Tetraeder $AFCB$, $AHCD$ und die Pyramiden $AEIBD$, $CGIBD$ von dem Würfel abgetrennt, so bleibt der im Aufgabentext beschriebene Körper $ABCD$ übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{4}a^3$$

Lösungen der II. Runde 1989 übernommen von [5]

7.31.3 III. Runde 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291031
Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Es sei festgestellt, dass x eine reelle Zahl ist und somit rational oder irrational ist.
Tatsächlich können wir sogar zeigen, dass x irrational ist: Wäre x nämlich rational, so wäre auch

$$((\dots(((x^2-1)^2-2)^2-3)^2-\dots)^2-1988)^2-1989=\sqrt{1990}$$

rational. Da 1990 durch 10 aber nicht durch 100 teilbar ist, ist 1990 keine Quadratzahl und somit ist $\sqrt{1990}$ irrational.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 2 - 291032
In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geq 3$ von Städten $S_1, S_2, ..., S_n$.
Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes.
Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, dass für jede Stadt gilt:
Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.
Untersuchen Sie für jedes $n \geq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, dass für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!
(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gilt:
Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

Es gibt für jedes $n \geq 3$ so eine Färbung der Straßen.

Notation: Wenn die Straße von S_i nach S_j mit der Farbe f gefärbt ist, dann schreiben wir $S_i \xrightarrow{f} S_j$.

Im Folgenden geben wir für jede Stadt an, wie man die von ihr ausgehenden Straßen mit den Farben $1,2,\dots,n-1$ färben kann:

- Für S_1 färben wir $S_1 \xrightarrow{1} S_2$ und $S_1 \xrightarrow{2} S_3$. Mit jeder der Farben $3,4,\dots,n-1$ färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_1 ausgehenden Straßen.

- Für S_2: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{1} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{2} S_1$.
Falls $n > 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{2} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{1} S_n$. Die restlichen Farben verteilen wir wieder beliebig auf die übrigen Straßen, die von S_2 ausgehen.

- Für S_k mit $2 < k < n-1$ färben wir $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und $S_k \xrightarrow{k} S_{k+1}$. Mit den von 1 und k verschiedenen Farben färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_k ausgehenden Straßen.

- Für S_{n-1} färben wir $S_{n-1} \xrightarrow{1} S_2$ und $S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.

- Für S_n: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_1$.
Falls $n > 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_3$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.
Wir wählen jetzt die Reihenfolge $F_1 = 1, F_2 = 2, \dots, F_{n-1} = n-1$. Diese erfüllt die Bedingung (*), denn:

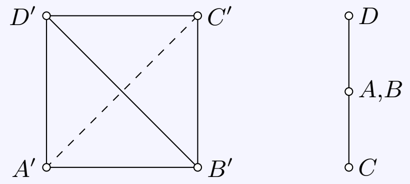
- Falls wir bei S_1 starten, dann erhalten wir die Fahrt:

$$S_1 \xrightarrow{1} S_2 \xrightarrow{2} S_3 \xrightarrow{3} S_4 \xrightarrow{4} \dots \xrightarrow{n-2} S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$$

- Falls wir bei S_k mit $k \neq 2$ starten, so beginnt die Fahrt mit $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und verläuft anschließend auf der gleichen Route wie die obige Fahrt.
- Falls wir bei S_2 starten: Für $n = 3$ erhalten wir die Fahrt $S_2 \xrightarrow{1} S_3 \xrightarrow{2} S_1$. Für $n > 3$ startet die Fahrt mit $S_2 \xrightarrow{1} S_n \xrightarrow{2} S_3$ und verläuft anschließend wieder auf der gleichen Route, wie die Fahrt, die bei S_1 startet.
In jedem Fall endet die Fahrt bei S_1 und somit ist (*) erfüllt.

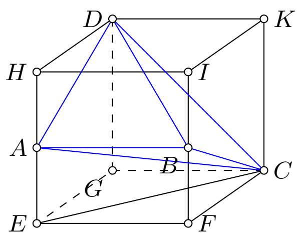
Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3 - 291033



Projektion Höhenmaßstab

Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat.
Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!



wie in der Abbildung gezeigt, kann der Körper $ABCD$ aus einem Würfel $EFGHIKD$ erhalten werden, indem man die Pyramiden $ABFEC$, $ABIHD$, $ADGEC$m $BCKID$ entfernt.
Die ersten beiden haben als Grundfläche je ein Rechteck mit den Seitenlängen a, $\frac{a}{2}$, also dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$.
Die letzten beiden haben als Grundfläche je ein Trapez mit parallelen Seiten der Länge a, $\frac{a}{2}$ und der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4}a^2$.
Alle vier Pyramiden haben die Höhenlänge a. Damit ergibt sich als gesuchtes Volumen von $ABCD$

$$V = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 291034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Der linke Term der Ungleichung (1) ist nur für $x \geq -5$ und $x \neq -1$ definiert. Gleichzeitig ist der Nenner $\sqrt{x+5} \geq 0$ und der Zähler $x+1$ nur für $x > -1$ positiv, so dass der gesamte Bruch nur für $x > -1$ positiv wird und so evtl. Lösungen der Ungleichung (1) ergeben kann.
Außerdem ist die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+1}$ für $x > -1$ streng monoton fallend, da $f'(x) = -\frac{x+9}{2(x+1)^2 \cdot \sqrt{x+5}} < 0$ für $x > -1$ ist.
Umstellen von (1) $(x \neq -1)$ und Quadrieren liefert eine quadratische Ungleichung

$$x+5 > x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 > x^2 + x - 4$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $0 = x^2 + x - 4$ sind

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \quad ; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Nur x_2 liegt im Bereich $x > -1$. Da die oben genannte Funktion $f(x)$ streng monoton fallend ist, ergibt sich als Lösungsmenge von (1) das Intervall

$$x \in (-1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}]$$

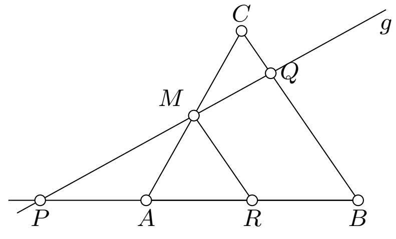
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - 291035
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:
(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.
(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.
(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.
Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

Eine Gerade g, für die (1) und (2) gilt, erfüllt wegen $AM = MC$ genau dann auch (3), wenn der Abstand des Punktes P von der Geraden durch A, C doppelt so groß ist wie der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden.
Nach dem Strahlensatz ist dies genau dann der Fall, wenn $PM = 2 \cdot MQ$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt ferner:
Die Parallele durch M zu BC schneidet einerseits die Seite AB in ihrem Mittelpunkt R; andererseits ist die Bedingung $PM = 2 \cdot MQ$ äquivalent mit $PR = 2 \cdot RB = AB$, also mit

$$PA = (PR - AR =)\frac{1}{2} \cdot AB$$

Daher werden (zu gegebenem Dreieck ABC) die Bedingungen (1), (2), (3) genau von derjenigen Geraden g erfüllt, die durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.



Man konstruiert die Mittelpunkte M bzw. R von AC bzw. AB und verlängert BA über A hinaus um die Länge $\frac{1}{2}AB$ bis P. Dann konstruiert man die Gerade g durch P und M.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 291036
a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder −) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.
b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (1) gilt.

a) Man bestätigt durch Nachrechnen

$$1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 0 \qquad (0)$$
$$1^2 = 1 \qquad (1)$$
$$-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 2 \qquad (2)$$
$$-1^2 + 2^2 = 3 \qquad (3)$$

sowie für jede natürliche Zahl n

$$(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 2n - 4n - 6n + 8n + 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 4 \qquad (4)$$

Für jede natürliche Zahl k gibt es natürliche Zahlen q, r mit $k = r + 4q$ und $r \leq 3$.
Setzt man $m_0 = 7$, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$, so kann man nach (0), (1), (2) oder (3) die Zahl r in der Form

$$r = \pm 1^2 \pm ... \pm m_r^2$$

darstellen. Ist $q = 0$, so ist damit k in der geforderten Form (*) dargestellt.
Ist $q > 0$, so kann man $n_1 = m_r$, $n_2 = m_r + 4$, ..., $n_q = m_r + 4(q-1)$ setzen und dann nach (4), angewandt auf $n = n_1$, $n = n_2$, ..., $n = n_{q-1}$, die Zahl k in der geforderten Form (*) nämlich

$$\begin{aligned} k = r + 4q = &\pm 1^2 \pm ... \pm m_r^2 \\ &+ (n_1+1)^2 - (n_1+2)^2 - (n-1+3)^2 + (n_1+4)^2 \\ &... \\ &+ n_q+1)^2 - (n_q+2)^2 - (n_q+3)^2 + (n_q+4)^2 \end{aligned}$$

darstellen, w.z.b.w.

b) Für jede natürliche Zahl m folgt aus (4), angewandt mit $n = m$ und $n = m + 4$

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 4 - 4 = 0$$

Zu jeder; nach a) existierenden; Darstellung

$$k = \pm 1^2 \pm ... \pm m^2$$

gibt es daher auch die Darstellung

$$k = \pm 1^2 \pm ... \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - ... + (m+7)^2 - (m+8)^2$$

Dieses Bilden weiterer Darstellungen der Zahl k kann man beliebig oft fortsetzen. Damit ist auch der in b) verlangte Beweis geführt.

Übernommen von [5]

7.31.4 IV. Runde 1989, Klasse 10

Aufgabe 1 - 291041
Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a.
Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $G_1G_2 = H_1H_2 = J_1J_2 = a$.

I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c, so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

Dies ergibt sich aus dem Satz, dass jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.
Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten und deren Verlängerungen eines Dreiecks D. Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d.h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D, und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises.
Aus (3) folgt ferner, dass c den Radius hat:

$$r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jeder der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge $\sqrt{r^2 - s^2} = \frac{a}{2}$ beträgt; d.h., dann erfüllt c die Bedingungen (1) und (2).
Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgaben genannten Vorgaben von g, h, j, a gibt es genau vier Kreise C, die (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 2 - 291042
Von zwei reellen Zahlen werde gefordert:
Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.
Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

(I) Für die Summe $s := x + y$ zweier reeller Zahlen x, y mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \qquad (1)$$

folgt zunächst

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} + \frac{1}{x(s-x)} = 1$$

und daraus

$$x^2 - sx + s + 1 = 0 \qquad (2)$$

Da in (1) notwendig $x \neq 0$ und $y = s - x \neq 0$ gilt, folgt aus (2) weiter

$$0 \neq x(s-x) = sx - x^2 = s + 1 \qquad \text{d.h.} \qquad s \neq -1 \qquad (3)$$

Andererseits wird (2) durch quadratische Ergänzungen zu

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - s - 1$$

Folglich ist $s^2 - 4s - 4 \geq 0$, $(s-2)^2 \geq 8$ und schließlich

$$|s-2| \geq 2\sqrt{2} \qquad (4)$$

Insgesamt liegt s also notwendigerweise in einem der Intervalle

$$s < -1; \qquad -1 < s \leq 2 - 2\sqrt{2}; \qquad s \geq 2 + 2\sqrt{2} \qquad (5)$$

(II) Ist umgekehrt s aus einem dieser Intervalle, so sind die Zahlen

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1}$$

reelle (wegen (4)), $\neq 0$ (wegen (3)) und es gilt $x + y = s$ sowie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$. Also sind die gesuchten Werte für s genau diejenigen, die in einem der Intervalle aus (5) liegen.

Aufgabe 3A - 291043A
Man beweise folgende Aussage:
Die Folge $(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis:
Ist (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Folge und sind $k \geq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

1. Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n zusammengesetzt, so ist $2^n - 1$ nicht Primzahl.
Beweis: Es sei $n = pq$ mit natürlichen Zahlen p,$q > 1$. Dann ist mit $x = 2^p$ die Zahl

$$2^n - 1 = x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + ... + x + 1)$$

wegen $x + 1 > 1$ und $x^{q-1} + ... + x + 1 \geq x + 1 > 1$ zusammengesetzt. 2. Für jede natürliche Zahl $N > 1$ gilt: Keine der $N - 1$ Zahlen

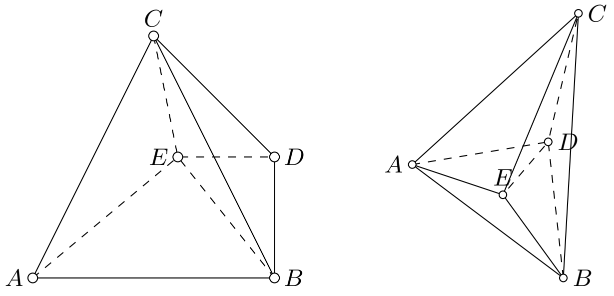
$$n \in \{N! + 2; N! + 3; ...; N! + N\} \qquad (1)$$

ist Primzahl, denn diese Zahlen sind jeweils durch $2, 3, ..., N$ teilbar und größer als die genannten Teiler. Wählt man ein $N > 1$ mit $N > z + 1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgeglieder $2^n - 1$ die Länge $N - 1 > z$ und in diesem Abschnitt gibt es aufgrund 1. keine Primzahl.

Aufgabe 3B - 291043B
Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E.
Sie seien so im Raum gelegen, dass keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und dass keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleich lang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

Fallunterscheidung: a) Es existieren vier Punkte - o.B.d.A. die Punkte A, B, C, D - so, dass der fünfte Punkt E im Inneren des Tetraeders $ABCD$ liegt (linkes Bild).

b) Negation von Fall a) (rechtes Bild)



Im Fall a) lassen sich entweder ein oder zwei der Tetraeder mit dem Eckpunkt E aus dem Tetraeder $ABCD$ "herausschneiden". Damit entstehen in diesem Fall 10 Polyeder.
Im Fall b) muss eine der Verbindungsstrecken (im Bild ist es DE) im Inneren des Körpers verlaufen, wenn $ABCDE$ konvex ist (konvexe Hülle). Schneidet man nun aus diesem konvexen Körper die drei Tetraeder heraus, die eine zu DE windschief verlaufende Kanten haben, so erhält man drei weitere Körper. Damit existieren in diesem Fall 4 Polyeder.

In jedem Fall sind alle diese Polyeder voneinander verschieden, da sie nicht in allen Verbindungsstrecken übereinstimmen können und laut Voraussetzung alle Verbindungsstrecken voneinander verschieden sind.

Aufgabe 4 - 291044

In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderungen erfüllen!

				65
	41			
		81		
1				

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die im nachfolgenden Bild mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. Spalte und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

$$y - x = 65 - y \qquad (1)$$
$$41 - z = w - 41 \qquad (2)$$
$$3 \cdot (z - x) = 1 - z \qquad (3)$$
$$w - y = 81 - w \qquad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt $x = 2y - 65 \quad (5)$ bzw. $z = 82 - w \quad (6)$. Setzt man dies in (3), d.h. $4z - 3x = 1$ ein, so folgt

$$327 - 4w - 6y + 195 = 1 \qquad ; \qquad 2w = 261 - 3y$$

Hieraus und aus (4), d.h. $2w = 81 + y \quad (7)$ erhält man $261.3y = 81 + y$, also $y = 45 \quad (8)$.
Damit ergibt sich aus (7), (6), (5): $w = 63$, $z = 19$, $x = 25 \quad (9)$.
Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die im zweiten Bild genannten Zahlen, z.B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

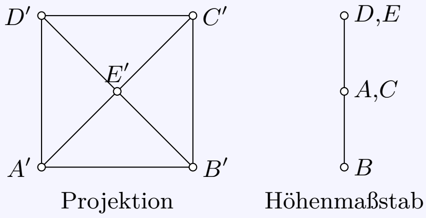
Aufgabe 5 - 291045
Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

(I) Die Verbindungsstrecken der 3 Seitenmitten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a zerlegen es in vier kongruente Teildreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$.
Daher findet man bei jeder Verteilung von 5 Punkten nach dem Dirichletschen Schubfachschluss ein Teildreieck, in dem - einschließlich des Randes - mindestens zwei der 5 Punkte liegen.

Diese beiden haben einen Abstand, der nicht größer als die Seitenlänge, also nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. Folglich kann bei keiner Verteilung von 5 Punkten der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen größer als $\frac{a}{2}$ sein.

(II) Wir legen 2 der 5 Punkte in Eckpunkte und die restlichen 3 in die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks. Dann ist der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen gleich $\frac{a}{2}$.
Wegen (I) ist dies eine gesuchte Verteilung.

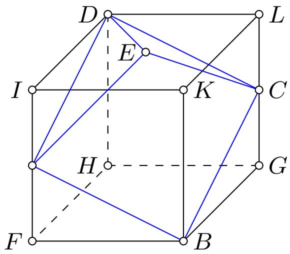
Aufgabe 6 - 291046



Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt des Quadrates.
Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft!
Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

Zunächst beweist man die Einzigkeit des Polyeders.

Wegen der laut Aufgabenstellung gleichen Höhe von A und C über der Ebene durch F, B, G, H schneidet die Strecke AC die Strecke BD (= Raumdiagonale im Würfel). Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene und E kann nur die Spitze einer "zugehörigen" vierseitigen Pyramide sein.



Für die Volumenberechnung bieten sich verschiedene Wege an:

1. Subtraktion der Volumina von Teilkörpern, die die Pyramide zu einem Würfel ergänzen, vom Würfelvolumen.
2. Direkte Berechnung des Volumens
2.1. mit $ABCD$ als Grundfläche
2.2. bei Zusammensetzung der vierseitigen Pyramide aus den beiden Tetraedern $ACED$ und $ACEB$. Der Weg 2.2 ist der eleganteste.
In jedem Fall ergibt sich $V = \frac{1}{6}a^3$.

Lösungen der IV. Runde 1989 übernommen von [5]

7.32 XXX. Olympiade 1990

7.32.1 I. Runde 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301011

a) Beweisen Sie, dass es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!

b) Beweisen Sie, dass es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!

Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

a) Ein Beispiel für unendliche viele pythagoreische Zahlentripel bilden die Tripel $(3n, 4n, 5n)$ für $n =$ 1,2,3,...; denn für sie gilt

$$(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$$

b) Ein Beispiel für zwei pythagoreische Zahlentripel (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) mit $a_1 < b_1 < c_1$, $a_2 < b_2 < c_2$ und $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ bilden (3,4,5) und (5,12,13).

Aufgabe 2 - 301012

Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen lässt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, dass darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, ..., Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.

Bert sagt dazu: "Es genügt, nur die natürlichen Zahlen $N = 2, ..., G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit $G \leq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch $G = \text{INT}(\text{SQR}(Z))$ ermittelt werden kann)."
Er sagt außerdem: "Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren."

Armin entgegnet: Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, dass jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird."

a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?

b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

a) Zu jeder Nichtprimzahl $Z > 1$ gibt es natürliche Zahlen A,$B > 1$ mit $Z = A \cdot B$, und mindestens eine dieser Zahlen muss kleiner oder gleich $\sqrt{Z}$ sein; denn wären $A > \sqrt{Z}$ und $B > \sqrt{Z}$, so folgte der Widerspruch $Z = AB > \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} = Z$. Also hat jede Nichtprimzahl auch mindestens einen Teiler, der gemäß Berts Vorschlag geprüft wird. Daher ist Berts Aussage wahr, Armins Entgegnung nicht.

b) Für jede Primzahl Z sind nach Armins Verfahren $Z - 2$ Zahlen zu überprüfen, nach Berta Vorschlag $G - 1$ Zahlen. Ist Z eine mindestens dreistellige Zahl, also $100 \leq Z$, so folgt

$$10 \cdot (G - 1) \leq 10 \cdot \sqrt{Z} - 10 \leq \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} - 10 < Z - 2$$

also ist die Anzahl $G - 1$ kleiner als ein Zehntel der Anzahl $Z - 2$. Berts zweite Aussage ist somit ebenfalls wahr.

Aufgabe 3 - 301013

Wenn die Produktion eines Betriebes um 50% zurückging (z.B. infolge des Ausfalls eines Teils der Anlage), so muss sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d.h. um 100% erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!

(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muss sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Beim Zurückgehen um a Prozent wird der Anfangswert mit $\left(1-\frac{a}{100}\right)$ multipliziert, bei anschließender Erhöhung um b Prozent wird der dann erreichte Wert mit $\left(1+\frac{b}{100}\right)$ multipliziert. Damit der nun insgesamt erhaltene Wert gleich dem Anfangswert ist, muss

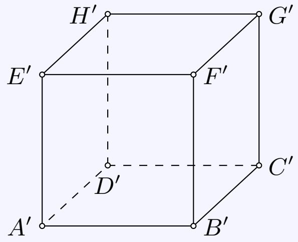
$$\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right))1$$

sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1+\frac{b}{100} &= \frac{1}{1-\frac{a}{100}} = \frac{100}{100-a} \\ \frac{b}{100} &= \frac{100}{100-a} - 1 = \frac{a}{100-a} \\ b &= \frac{100a}{100-a} \end{aligned}$$

als eine gesuchte Formel.

Aufgabe 4 - 301014



Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Viereckflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate. Die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang. D' liegt im Inneren von $A'B'F'E'$.

Beweisen Sie, dass es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Viereckflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!

Zum Beweis genügt es, einen Körper z.B. durch konstruktive Beschreibung der Eckpunkte anzugeben und die genannten Bedingungen für den so angegebenen Körper als erfüllt nachzuweisen. Eine Möglichkeit hierfür ist die folgende. (siehe Abbildung)

Man wähle D,C,G,H so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf die Zeichenebene Z die gegebenen Punkte D',C',G',H' haben und dass genauer $C = C'$ ist, D und G eine miteinander übereinstimmende Höhe h über Z haben sowie H die Höhe $2h$ über Z hat. Bezeichnet H^* den Mittelpunkt von HH', so sind CD', $G'H'$, GH^* parallel und gleichlang zueinander, ebenso $D'D$ und H^*H, also gilt dasselbe auch für CD und GH; somit ist $CGHD$ ein Parallelogramm.

Mit einer weiteren Länge $k > h$ wähle man A,B,F,E so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf Z die Bilder A',B',F',E' haben, dass B die Höhe k hat, A und F die Höhe $k+h$ haben sowie E die Höhe $k+2h$ über Z hat.

Ist A^* der Punkt der Höhe h über A', so folgt durch entsprechende Betrachtung von CB', DA^* und von $B'B$, A^*A, dass auch $ABCD$ ein Parallelogramm ist. In gleicher Weise zeigt man, dass $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$ und $EFGH$ ebenfalls Parallelogramme sind; jeweils zwei einander gegenüberliegende der 6 genannten Parallelogramme sind zueinander kongruent.

Ferner ist

$$CH = \sqrt{CH'^2 + (2h)^2} > CH' = D'G' = DG$$

Das Parallelogramm $CGHD$ hat also zwei verschieden lange Diagonalen und ist daher kein Rechteck; d.h., es enthält keinen Innenwinkel der Größe 90°. Dasselbe gilt für aus Parallelogramm $ABFE$.

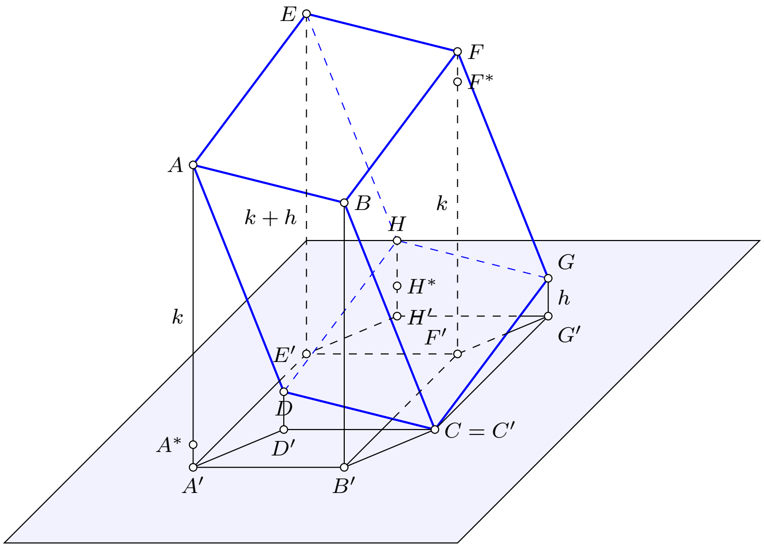
Nach Voraussetzung (siehe Abbildung der Aufgabe) gilt $B'D' < A'C'$. Daraus folgt

$$BD < BD' = \sqrt{B'D'^2 + k^2} < \sqrt{A'C'^2 + (k+k)^2} = AC$$

Somit enthalten auch $ABCD$ und $EFGH$ keinen Innenwinkel der Größe 90°.
Weiter gilt $C'F' < B'G'$. Daraus folgt: Ist F^* der Punkt der Höhe k über F', so ist

$$CF^* = \sqrt{C'F'^2 + k^2} < \sqrt{B'G'^2 + k^2} = BG'$$

also hat die Differenz $x = BG' - CF^*$ einen positiven Wert. Hat man nun die Länge h (zwar größer als 0, aber) genügend klein gewählt, so kann erreicht werden, dass CF zwar größer ist als CF^*, aber um weniger als $\frac{x}{2}$, und dass BG zwar kleiner ist als BG', aber ebenfalls um weniger als $\frac{x}{2}$. Dann gilt auch noch $CF < BG$ und damit ist erreicht, dass $BCGF$ und $ADHE$ um keinen Innenwinkel der Größe 90° enthalten.



Lösungen der I. Runde 1990 übernommen von [5]

7.32.2 II. Runde 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301021

$$\begin{array}{cccccc} & & m & o & r & d \\ + & & r & a & u & b \\ \hline = & k & r & i & m & i \end{array}$$

In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.
a) Beweisen Sie, dass sogar in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!
b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden!
Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

a) Um führende Nullen zu vermeiden muss $k = 1$ gelten, da die Summe von zwei vierstelligen Zahlen kleiner ist als 20.000, also als fünfstellige Zahl nur die erste Ziffer Eins haben kann. Also muss bei der Addition in der Tausenderstelle ein Übertrag entstehen.

Dann gilt entweder $m+r = 10+r$, was auf den Widerspruch $m = 10$ führt, oder aber $m+r+1 = 10+r$, was $m = 9$ bedeutet, und, dass auch in der Hunderterstelle ein Übertrag entstanden ist.

Wegen $a \neq m = 9$ ist $a \leq 8$. Außerdem gilt entweder $o + a = 10 + i \geq 10$ oder $o + a + 1 = 10 + i \geq 10$, also in jedem Fall $o + a \geq 9$ und damit $o \geq 9 - a \geq 1$, sodass in jedem Fall $o \neq 0$ gilt, $\square$.

b) Wir geben im Folgenden vier dieser Lösungen mit paarweise verschiedenen Werten von a an:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 4 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 6 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 2 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 2 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 8 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

Die zweite geht aus der ersten sowie die vierte aus der dritten jeweils durch Vertauschung von a und o hervor, während man die dritte aus der ersten (sowie die vierte aus der zweiten) durch Vertauschen der Paare (a,o) und (b,d) erhält. Man rechnet leicht nach, dass dies alles Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 301022
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!
Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.

Es sei eine natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist. Wegen $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ ist $n > 1$. Damit hat es eine eindeutige Primfaktorzerlegung mit mindestens einem Primteiler.
Auch mindestens eine Primzahl p besitzt in der Primfaktorzerlegung von n einen ungeraden Exponenten u (sonst könnte man die Zahl, deren Primfaktorzerlegung aus der von n dadurch entsteht, indem man jeden Exponenten halbiert, k nennen und es würde $n = k^2$ gelten, sodass n im Widerspruch zur Aufgabe eine Quadratzahl wäre). Also gilt $p^u \bar{n}$, aber $p^{u+1} \not{n}$.

Wäre $\sqrt{n} > 0$ rational, so gäbe es teilerfremde positive ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ bzw. $n^2 = \frac{a^2}{b^2}$ und damit $a^2 = n \cdot b^2$.

Es ist $p\bar{n}$, also auch $p\bar{n} \cdot b^2$ und damit $p\bar{a}^2$. Da p eine Primzahl ist, muss es dann auch Teiler von a sein, sodass es (wie jede Primzahl) mit geradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von a^2, also auch der von b^2 vorkommt.

In der Primfaktorzerlegung von n ist es aber nur mit ungeradem Exponenten enthalten, sodass es auch mit ungeradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von b^2 enthalten sein muss, was ein Widerspruch ist, da auch dort alle Primfaktoren einen geraden Exponenten besitzen, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 301023
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $AB > AD$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

Sei M der Mittelpunkt der Strecke AC. Damit ist M auch der Mittelpunkt der anderen Diagonalen BD des Rechtecks $ABCD$. Da die Diagonalen eines Rechtecks auch gleichlang sind, gilt damit $|AM| = |BM|$. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichschenklig mit Basis AB.

Wegen $|AB| > |AD| = |BC|$ ist $\angle BAC < \angle ACB$, da im Dreieck $\triangle ABC$ dem kleineren Winkel auch die kleinere Seite gegenüberliegt. Wegen $\angle CBA = 90°$ und der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck ist somit $\angle BAM = \angle BAC < 45°$, also aufgrund der Gleichschenkligkeit im Dreieck $\triangle ABM$ auch $\angle MBA = \angle BAM < 45°$ und damit $\angle AMB > 90° = \angle AMP$, da die Mittelsenkrechte der Strecke AC natürlich durch M verläuft.

Weiterhin liegt wegen $|AM| = |BM|$ der Punkt M auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese verläuft durch den Mittelpunkt Q dieser Strecke, sodass $\angle MQA = 90°$ und wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AMQ$ auch $\angle AMQ = 180° - \angle MQA - \angle QAM < 180° - \angle MQA = 180° - 90° = 90° = \angle AMP$ gilt.

Zusammen ist also $\angle AMQ < \angle AMP < \angle AMB$, sodass, da Q, P und B auf einer Geraden liegen, also P im Innern der Strecke QB liegt, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 301024
Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = ((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})^{-1}$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_{1989} + a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

Für jedes $n > 0$ gilt

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Damit folgt

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1990}} - \frac{1}{\sqrt{1991}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1991}} < 1$$

und wegen $\frac{1}{1991} < \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{\sqrt{1991}} < \frac{1}{2}$ auch $s > \frac{1}{2}$.

Übernommen von [5]

7.32.3 III. Runde 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301031
Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z.B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Nein, gibt es nicht: Eine Zahl, die im Zweiersystem auf die Ziffern 10 endet, ist durch 2 teilbar (da letzte Ziffer 0), nicht aber durch $2^2 = 4$ (da die vorletzte Ziffer nicht auch 0 ist); eine Zahl, die im Vierersystem auf 0 endet, ist aber durch 4 teilbar, sodass nicht beide Darstellungen für die gleiche Zahl möglich sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 301032
Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z; \qquad a_2 = z + d; \qquad a_3 = z + 2d; \qquad a_n = z + (n-1)d \qquad (1)$$

($n \geq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen) eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geq 1$, $d \geq 1$ sind und für die $n \geq 3$ sowie gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1991 \qquad (2)$$

Es ist $11 \cdot 181 = 1991$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Also hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.

Fall 1: Es ist n ungerade, d.h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist mit $x := z + (m-1) \cdot d$

$$a_1 = x - (m-1)d, \quad a_2 = x - (m-2)d, \quad \dots, \quad a_m = x, \quad a_{m+1} = x + d,$$

$$\dots \quad a_n = a_{m+(m-1)} = x + (m-1)d \qquad \text{und}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (x - (m-1)d) + \dots + (x + (m-1)d) = (2(m-1)+1)x = nx$$

Insbesondere sind n und x Teiler und Gegenteiler von 1991. Da $x = z + (m-1)d > \frac{n}{2}$ gilt, entfallen die Teiler 181 und 1991 als Möglichkeiten für n, da der jeweils zugehörige Gegenteiler kleiner wäre als $\frac{n}{2}$, also auch als x. Wegen $n \geq 3$ verbleibt nur die eine Möglichkeit $n = 11$, was $181 = x = z + 5d$ bzw. $z = 181 - 5d$ bedeutet.
Damit gibt es für jedes ganzzahlige $1 \leq d \leq \frac{180}{5} = 36$ genau eine solche arithmetische Folge, da dann auch immer $z \geq 1$ eindeutig bestimmt ist. (Weitere kann es in diesem Fall nicht geben.) Also existieren in diesem Fall genau 36 Lösungen.

Fall 2: Es ist n gerade, d.h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m$. Dann ist für jedes $1 \leq i \leq m$,

$$a_i + a_{n+1-i} = (z + (i-1)d) + (z + (n-i)d) = 2z + (n-1)d =: x$$

also

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_m + a_{m+1}) = m \cdot x$$

sodass auch hier m und x Teiler und Gegenteiler von 1991 sein müssen. Wegen $x = 2z + (n-1)d \geq 2 + (n-1) > n = 2m$ fallen für m die Teiler 181 und 1991 wieder wegen zu großem x weg und auch $m = 1$ entfällt wegen $m \geq 2$, sodass $m = 11$ und damit $181 = x = 2z + 21d$ bzw. $z = \frac{1}{2} \cdot (181 - 21d)$ folgt. Da z eine ganze Zahl ist, muss also d ungerade sein und wegen $z \geq 1$ folgt auch $1 \leq d \leq 7$, da $9 \cdot 21 = 189 > 181$ ist. Also existieren in diesem Fall genau 4 Lösungen.

Zusammen ergeben sich also genau 40 arithmetische Folgen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 301033
Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.

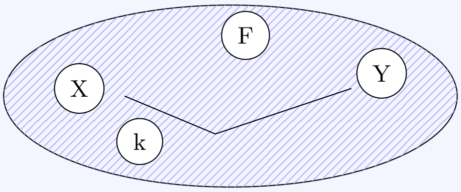


Abbildung a)

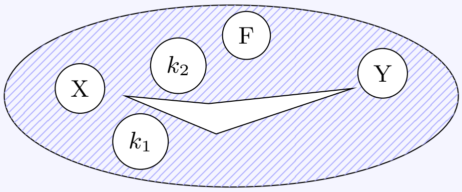
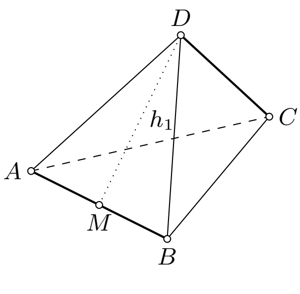
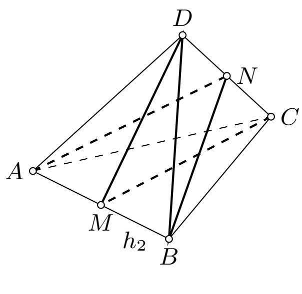


Abbildung b)

Die Abbildungen a und b verdeutlichen den Vorgang des "Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$":
Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2.
Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d.h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so lässt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, dass die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.
Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.
b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so lässt sich F ebenfalls so verbiegen, dass die Randkurve zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.
Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

Jede der beiden entstehenden Zylinder-Mantelflächen hat als Umfang ihres Grund- und Deckkreises die doppelte Länge jeweils einer Kurve, längs deren die Tetraederfläche F aufgeschnitten wird.
Die Höhe des betreffenden Zylinders ist die Länge des Lotes, das von einem Punkt der einen Schnittkurve auf ein - in der ursprünglichen Lage von F geradlinigen - Stück der anderen Schnittkurve gefällt wird, wenn dieses Lot ganz in der Tetraederfläche verläuft. So ergibt sich (siehe Abbildungen):





Ist a die Kantenlänge des Tetraeders $ABCD$, so hat im Fall a) der Zylinder den Grundkreisumfang $u_1 = 2AB = 2a$ und die Höhe $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Im Fall b) hat der Zylinder den Grundkreisumfang $u_2 = 2(CM + MD) = 2a\sqrt{3}$ und die Höhe $h_2 = \frac{a}{2}$.
Für die Höhen gilt also

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{3}$$

für die Grundkreisradien r_1 bzw. r_2 gilt

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Also gilt für die Volumina $V_i = \pi r_i^2 h_i$ $(i = 1{,}2)$ der beiden Zylinder

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

und daher $V_2 > V_1$, d.h., der in b) genannte Zylinder hat das größere Volumen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 301034
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2| < 1 \qquad (1)$$

Die Ungleichung (1) ist äquivalent zu $-1 < |x-2| - 2 < 1$ bzw. $1 < |x-2| < 3$.
Es ist $|x-2| < 3$ äquivalent zu $-3 < x-2 < 3$ bzw. $-1 < x < 5$, sodass nur solche reelle Zahlen auch (1) erfüllen können.
Weiterhin wird $1 < |x-2|$ genau von denjenigen reellen Zahlen x erfüllt, für die $1 < x-2$ (d.h. $x > 3$) oder $-1 > x-2$ (d.h. $x < 1$) gilt.
Zusammen wird also (1) genau von den reellen Zahlen mit $-1 < x < 1$ oder $3 < x < 5$ erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 301035
Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

Wir geben im Folgenden eine Menge M mit $2^{11} = 2048 > 1991$ verschiedenen positiven natürlichen Zahlen an, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dann ist jede 1991-elementige Teilmenge von M eine, die die Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es sei P die Menge der elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31, die sämtlich nicht größer als 31 sind. Für jede der 2^{11} Teilmengen von P bilden wir das Produkt der in ihr enthaltenen Primzahlen und nennen die Menge dieser Produkte M. Dann hat M genau $2^{11} = 2048$ Elemente. Diese sind offensichtlich alles positive ganze Zahlen.

Für jedes Element von M gilt, dass in seiner Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen als P enthalten sind, also kein Primfaktor, der größer als 31 ist. Damit ist (1) erfüllt. Weiterhin ist jede Primzahl in der Primfaktorzerlegung eines jeden Elements höchstens mit dem Exponenten 1 enthalten.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Zahlen a und b aus M bzw. ihre zugehörigen Teilmengen A und B aus P. Da diese verschieden sind (aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung), gibt es mindestens ein Element $p \in P$, welches in der einen (o.B.d.A.) Teilmenge A enthalten ist, der anderen B aber nicht. Also ist dann a durch p teilbar, b aber nicht.
Damit ist ihr Produkt ab durch p teilbar. Da jedoch keine der Zahlen aus M, insbesondere also auch nicht a, durch p^2 teilbar ist, kann auch ab damit nicht durch p^2 teilbar nicht sein, sodass in der Primfaktorzerlegung von ab die Primzahl p mit ungeradem Exponenten 1 enthalten ist, also ab keine Quadratzahl sein kann. (Bei Quadratzahlen ist in der Primfaktorzerlegung der Exponent jeder Primzahl gerade.) Also ist auch (2) erfüllt, $\square$.

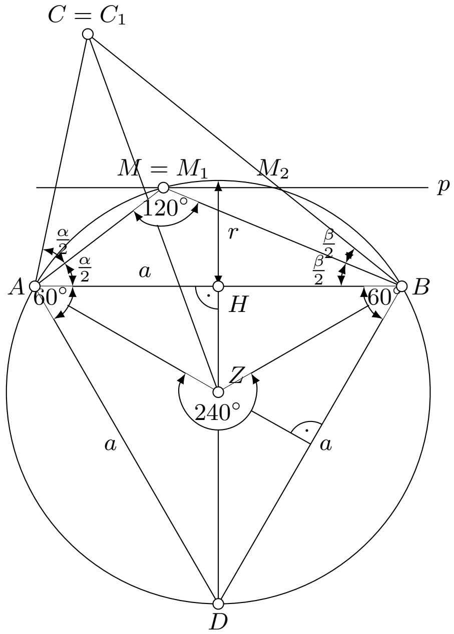
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 301036
Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\angle ACB$ die Größe von $60°$ hat.
a) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden.
b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

(a) Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen erfüllt, so folgt mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = ACB$ (Abbildung)
Ist M der Inkreismittelpunkt, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so ist nach dem Innenwinkelsatz

$$\angle AMB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2} = 120°$$

Daher liegt M nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz auf demjenigen Kreis k, in dem $\angle AMB$ ein zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe $240°$ gehörender Peripheriewinkel ist.



Ist ZD der Radius von k, der diesen Zentriwinkel halbiert, so zerlegen ZA, ZB, ZD den Vollwinkel in drei Winkel zu je $120°$, also ist ABD ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge c und Z sein Höhenschnittpunkt.

Ferner hat M den Abstand r von AB und liegt nicht auf dem von A über D nach B führenden Bogen. Daher gehört M derjenigen Parallelen im Abstand r zu AB an, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck ABC durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Höhenschnittpunkt Z.

2. Man konstruiert den Kreis k um Z durch A.

3. Man konstruiert diejenige Parallele p im Abstand r zu AB, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z, und wählt als M einen Schnittpunkt von k mit p.

4. Man trägt an AB in A den Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAM$ und an BA in B den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABM$ nach derjenigen Seite von AB an, auf der M liegt, und bringt die zweiten Schenkel dieser Winkel zum Schnitt C.

(c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:

Nach 1. ist $AB = c$, und die Dreiecke ABZ, BDZ, DAZ haben Innenwinkel von $30°, 30°, 120°$. Für den nach 3. erhaltenen Punkt M ist folglich $\angle AMB$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe $2 \cdot 120°$, also gilt $\angle AMB = 120°$. Daher ist

$$\angle BAM + \angle ABM = 180° - 120° = 60°$$

und nach 4. folgt

$$\angle ACB = 180° - (2 \cdot \angle BAM + 2 \cdot \angle ABM) = 180° - 2 \cdot 60^{\cdot} = 60^{\cdot}$$

Ferner folgt aus 4., das M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt von ABC ist. Sein Abstand von AB ist folglich der Inkreisradius, nach 3. beträgt er r.
Damit erfüllt das Dreieck ABC alle geforderten Bedingungen.

(d) Die Konstruktionsschritte 1., 2. und die Konstruktion von p in 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Der Abstand von Z zur Geraden p ist $d = ZH + r$, wo ZH im gleichschenkligen Dreieck ABZ Höhe, also auch Seiten- und Winkelhalbierende ist. Daher ist AZH ein Dreieck mit Innenwinkeln von $30°, 60°, 90°$, und $e = ZH$ ist die halbe Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Höhenlänge $AH = \frac{c}{2}$. Daraus folgt $\frac{c}{2} = a\sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{120}}{2\sqrt{3}} cm = \sqrt{10} cm$.

Wegen $3 < \sqrt{10}$, ist somit $d = (\sqrt{10} + 3)$ cm kleiner als der Radius $AZ = 2e = 2\sqrt{10}$ cm von k. Daher schneiden sich p und k in zwei Punkten M_1, M_2, unter denen nach 3. der Punkt M zu wählen ist, und es ist bewiesen, dass Dreiecke existieren, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Wegen $p \perp ZH$ liegen M_1 und M_2 ebenso wie A und B symmetrisch zur Geraden durch Z und H. Daher sind die beiden Dreiecke ABM_1, BAM_2 (mit dieser Reihenfolge entsprechender Punkte) zu einander kongruent.
Dasselbe gilt für die beiden nach 5. zu $M = M_1$ bzw. $M = M_2$ erhaltenen Dreiecke ABC_1 bzw. BAC_2. Damit ist gezeigt, dass es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die geforderten Eigenschaften erfüllt.

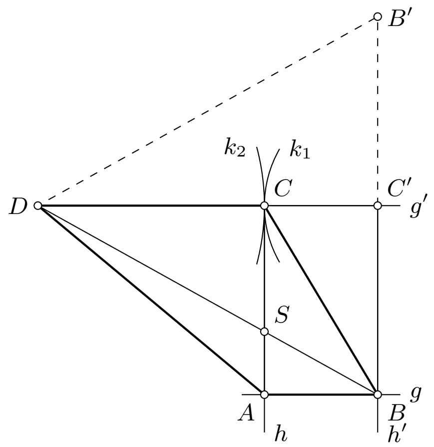
Übernommen von [5]

7.32.4 IV. Runde 1990, Klasse 10

Aufgabe 1 - 301041
Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:
(1) Die Seite AB hat die Länge $AB = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $CD = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $AC = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $BD = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S, für diesen hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe φ.
(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

(a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Für den Schnittpunkt C' der Parallelen g' durch C zur Geraden g durch A, B und der Parallelen h' durch B zur Geraden durch A, C ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher ist $BC' = AC$, nach (3) also $BC' = e$. Weiter ist $BC' \parallel AC$, nach dem Wechselwinkelsatz und nach (5) also $\angle DBC' = \angle ASB = \varphi$.
Damit und mit (4), also $BD = f$, sind im Dreieck DBC' die Längen zweier Seiten und die Größe des eingeschlossenen Winkels gegeben.
Ferner ist $CC' = AB$, nach (1) also $CC' = a$, und nach (2) ist $CD = c$. Daher liegt C auf dem Kreis k_1 um C' mit a und auf dem Kreis k_2 um D mit c.
Der Punkt A liegt auf g und h, und nach (5) haben die Strecken AC und BD einen Schnittpunkt S miteinander. Damit ist bewiesen, dass $ABCD$ durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(b) (1) Man konstruiert ein Dreieck DBC' mit $BD = f$, $BC' = e$, $\angle DBC' = \varphi$.
(2) Man konstruiert den Kreis k_1 um C' mit a und den Kreis k_2 um D mit c.
(3) Man wählt einen gemeinsamen Punkt von k_1 und k_2 als C, falls für ihn folgendes gilt:
Schneiden sich die Parallele g durch B zur Geraden g' durch C, C' und die Parallele h durch C zur Geraden h' durch B, C' in A, so schneiden die Strecken AC und BD einander.



Durchführung der Konstruktion : siehe Abbildung, ohne gestrichelte Linien.

(c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:
Nach den Konstruktionsschritten (1) und (2) ist $BD = f$ und $CD = c$, also sind (4) und (2) erfüllt.
Nach (3) ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher und nach (1),(2) ist $AC = BC' = e$ und $AB = CC' = a$, also sind (3) und (1) erfüllt. Nach der Wahl von C in (3) schneiden sich AC und BD in einem Punkt S, und wegen $AC \parallel BC'$ folgt nach dem Wechselwinkelsatz sowie nach (1), dass $\angle ASB = \angle DBC' = \varphi$ gilt, also auch (5) erfüllt ist.

(d) Der Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kongruenzsatz sws bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $BD = \sqrt{108}cm = 2\times\sqrt{27}cm = 2\times BC'$ und $\angle DBC' = 60°$ wird dabei DC' in einem gleichseitigen Dreieck $BB'D$ Seitenhalbierende und zugleich Höhe, und es folgt $DC' = BC'\cdot\sqrt{3} = \sqrt{27}\cdot\sqrt{3}cm = 9cm = a + c$. Also haben die in (2) konstruierten Kreise k_1, k_2 genau einen Punkt, ihren Berührungspunkt C, gemeinsam, und D liegt auf der Verlängerung von $C'C$ über C hinaus.

Daher (und weil B im Parallelogramm $ABC'C$ der Ecke C gegenüberliegt) schneiden sich BD und AC. Also führt (3) auf eindeutig bestimmte Punkte C und A.
Somit gibt es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$, das (1) bis (5) erfüllt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 301042
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist.
Ferner sei $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$$

und es werde $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ vorausgesetzt.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Nach Voraussetzung ist auch jede der Zahlen $p_1, p_2,...,p_n$ entweder gleich 1 oder gleich -1. Wegen $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ ist die Anzahl m der $p_j = 1$ gleich der Anzahl der $p_k = -1$. Also gilt $n = 2m$.
Mit dieser Anzahl m gilt einerseits $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = (-1)^m$. Andererseits enthält dieses Produkt

$$p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = x_1x_2x_3x_4 \cdot x_2x_3x_4x_5 \cdot ... \cdot x_nx_1x_2x_3$$

jeden Faktor x_i genau 4 mal (nämlich innerhalb der Teilprodukte $x_1x_2x_3x_4, ..., x_nx_1x_2x_3$ genau einmal an erster, genau einmal an zweiter, genau einmal an dritter und genau einmal an vierter Stelle); also ist $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Daher ist m gerade und folglich $n = 2m$ durch 4 teilbar, w.z.b.w.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3A - 301043A
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Eine derartige Zahl m gibt es nicht; im Gegenteil gilt:
Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, ..., t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}}$ $(i = 1, ...,m + 1)$ als rational nachzuweisen.
Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot ... \cdot ((m + 1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \quad (i = 2,...,m + 1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen; k ist positiv; es gilt $t_2 > t_3 > ... > t_{m+1} > 0$, also sind $\sqrt{t_1 + k \cdot \sqrt{t_1}} = 0$, $t_1, ..., t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} + k \cdot \frac{k}{i^2 - 1}} = \frac{k}{i^2 - 1}\sqrt{1 + (i^2 - 1)}$$
$$= \frac{k}{i^2 - 1} \cdot i \quad (i = 2,...,m + 1)$$

sind (natürliche, also) rationale Zahlen.
Ein anderes Beispiel bilden die Zahlen $k = 2^{2m+1}$ und $t_i = (2^{2m-1} - 2^i)^4$ $(i = 0, ..., m)$, wie aus $t_0 > ... > t_m$ und

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt[4]{t_i}\sqrt{\sqrt{t_i} + k} = (2^{2m-1} - 2^i)(2^{2m-1} + 2^i)$$

folgt. Zu solchen Beispielen gelangt man z.B., indem man

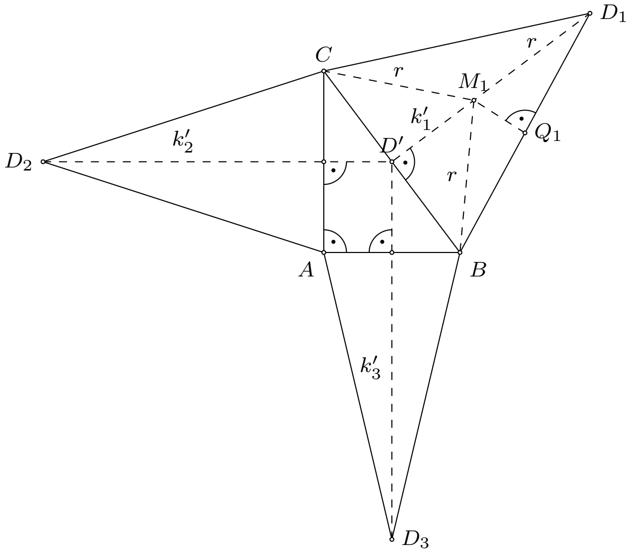
$$x = \sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$$

als $x^2 + \frac{k^2}{4} = (\sqrt{t} + \frac{k}{2})^2$ schreibt und mit dem Ansatz $x = p^2 - q^2$, $\frac{k}{2} = 2pq$, $\sqrt{t} + \frac{k}{2} = p^2 +^2$ pythagoreischer Tripel bei passender Wahl von k dann m ganzzahlige $t = (p - \frac{k}{4p})^4$ erhält.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3B - 301043B
Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:
$AB = 7{,}2$ cm; $AC = 9{,}6$ cm; $AD = 15{,}6$ cm; $BC = 12{,}0$ cm; $BD = 15{,}6$ cm; $CD = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Wegen $AB = 3 \cdot 2{,}4$ cm; $AC = 4 \cdot 2{,}4$ cm; $BC = 5 \cdot 2{,}4$ cm und $3^2 + 4^2 = 5^2$, also $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ist das Dreieck ABC nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bei A rechtwinklig.
Dreht man, ausgehend von einem Netz $ABCD_1D_2D_3$ des Tetraeders $ABCD$ (siehe Abbildung), die Dreiecke BCD_1, CAD_2 und ABD_3 um BC, CA bzw. AB so, dass D_1, D_2 und D_3 im Punkt D zusammentreffen, so beschreiben dabei D_1, D_2 und D_3 Kreisbögen k_1, k_2, k_3.



Deren Bilder k_1', k_2', k_3' bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene sind geradlinig und senkrecht auf BC, CA bzw. AB.

Da die Dreiecke BCD_1, CAD_2, ABD_3 gleichschenklig sind, gehen k_1', k_2' , k_3' durch die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB; d.h. sie sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Ihr Schnittpunkt, das Bild D' von D bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene, ist also der Umkreismittelpunkt von ABC, und dieser ist nach der Umkehrung des Thalessatzes der Mittelpunkt der Hypotenuse BC.

Da der Mittelpunkt M derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche A, B, C und D liegen, insbesondere gleiche Abstände r zu A, B und C hat, liegt er auf der Senkrechten, die im Umkreismittelpunkt von ABC auf der Zeichenebene errichtet wird; d.h. M liegt auf $D'D$ und ist folglich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD (die Abbildung zeigt seine Lage M_1, wenn das Dreieck BCD in die Lage BCD_1 gedreht ist).

Damit und mit $BD' = \frac{1}{2}BC = 6$ cm folgt nach dem Satz des Pythagoras einerseits $D'D^2 = BD^2 - BD'^2$, wegen $BD = 13 \cdot 1{,}2$ cm ; $BD' = 5 \cdot 1{,}2$ cm und $13^2 - 5^2 = 12^2$ also $DD' = 12 \cdot 1{,}2$ cm; andererseits folgt

$$(D'D - r)^+ BD'^2 = r^2, \qquad (D'D)^2 + BD'^2 - 2r \cdot D'D = 0$$

$$r = \frac{BD^2}{2D'D} = \frac{(13 \cdot 1{,}2)^2}{24 \cdot 1{,}2} cm = 8{,}45 cm$$

(Die Formel $r \cdot D'D = \frac{BD}{2} \cdot BD$ folgt auch, weil M auf der Mittelsenkrechen QM von BD liegt und daher $\triangle MQD \cong \triangle BD'D$ ist.)

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 301044
Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung gilt:

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2$$

Zunächst setze $b = 1$ und setze für a verschiedene Werte ein: $m, m+1, m-1, m+2$ (man erhält also 4 Gleichungen, m sei eine beliebige natürliche Zahl).
Dann setze $b = 2$ und setze für a: $m, m+1$ (man erhält somit 2 Gleichungen).

Das ergibt ein Gleichungssystem aus 6 Gleichungen mit den 6 Unbekannten $f(m), f(m+1), f(m+2), f(m-1), f(m+3), f(m-2)$.

Als Lösung ergibt sich beispielsweise $f(m) = m^2 + 4$ und $f(m+1) = m^2 + 5$, dies gilt für alle natürlichen m, woraus schon der Widerspruch folgt, es kann also kein solches f geben.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

2. Lösung: Für $b = 0$ ergibt sich sofort $f(a) = a^2 + 2$, d.h. unter anderem $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ und $f(3) = 11$.
Setzt man nun $a = 2$ und $b = 1$, so wird

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = f(2) + f(3) - f(1) = 6 + 11 - 3 = 14 \neq 10 = 2^2 + 4 \cdot 1 + 2 = a^2 + 4b + 2$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es eine solche Funktionalgleichungen nicht geben kann.

Aufgabe gelöst von Frank Rehm

Aufgabe 5 - 301045
Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:
Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen.
Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,
a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.
Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert.
Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

Radius r in cm	Anzahl der bei a)	Kästchen bei b)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm^2
1	4	16	(1 + 4) : 2 = 2,5
2	32	60	(8 + 15) : 2 = 11,5
3	88	132	(22 + 33) : 2 = 27,5
4	164	224	(41 + 56) : 2 = 48,5
5	276	344	(69 + 86) : 2 = 77,5

Nun wurde bemerkt, dass jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben.
Trifft das auch bei der Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Wir legen ein Koordinatensystem so in die Ebene des karierten Papiers, dass dessen Koordinatenursprung im Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt, dessen Koordinatenachsen mit den durch diesen Eckpunkt eines Kästchens verlaufenden Gitterlinien zusammenfallen und die Kästchenlänge 1 betrage. (Damit sind also geradzahlige Radien $r > 10$ zu betrachten.)

Wir bemerken, dass bei einer Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel 90° der Kreis wieder auf sich selbst und Kästchen wieder auf Kästchen, jedoch keines auf sich selbst, abgebildet werden. Also genügt es, die jeweiligen Kästchen im ersten Quadranten zu zählen und deren Anzahl dann mit vier zu multiplizieren, da es aufgrund der Drehung in den anderen Quadranten immer genauso viele Kästchen der entsprechenden Sorte wie im ersten Quadranten gibt.

Es sei A die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die vollständig innerhalb des Kreises liegen. Identifizieren wir ein Kästchen mit den Koordinaten (x,y) seiner rechten oberen Ecke, wobei also x und y dann beides positive ganze Zahlen sind, so liegt das Kästchen genau dann vollständig in der Kreisfläche, wenn $x^2 + y^2 \leq r^2$ gilt.

Analog sei B die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die gemeinsame Punkte mit dem Kreis besitzen. Bezeichne hier (u,v) die Koordinaten der linken unteren Ecke des Kästchens, wobei dann u und v nicht-negative ganze Zahlen sind. Dann besitzt das Kästchen genau dann mindestens einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis, wenn die linke untere Ecke des Kästchens noch im oder auf dem Kreis liegt, also $u^2 + v^2 \leq r^2$ gilt.

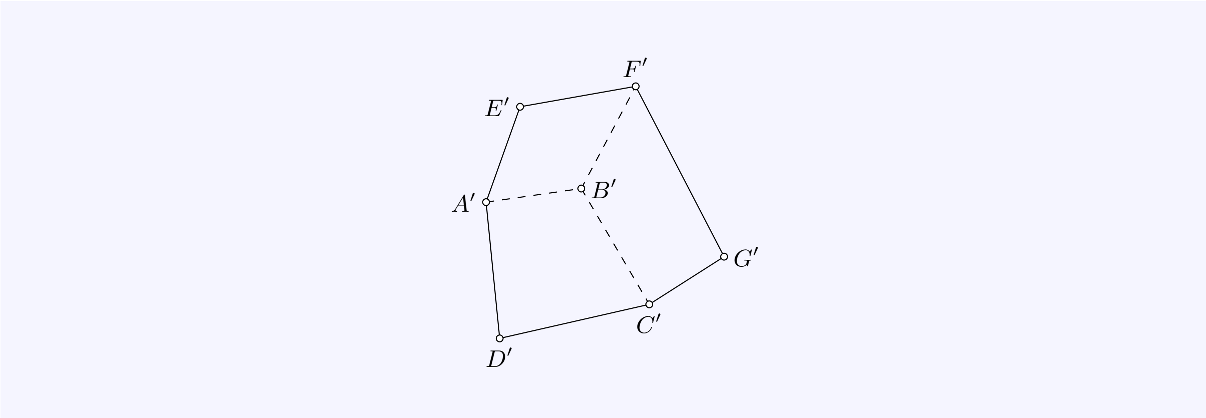
Offenbar führt jede Lösung von $x^2 + y^2 \leq r^2$ mit $x,y \in \mathbb{Z}_{>0}$ via $u := x$, $v := y$ auch zu einer von $u^2 + v^2 \leq r^2$, sodass $B \geq A$ gilt. Tatsächlich erhält man so natürlich alle Lösungen der zweiten Ungleichung, für die weder u noch v Null sind. Es fehlen also genau diese, wo mindestens eine der beiden Variablen verschwindet.

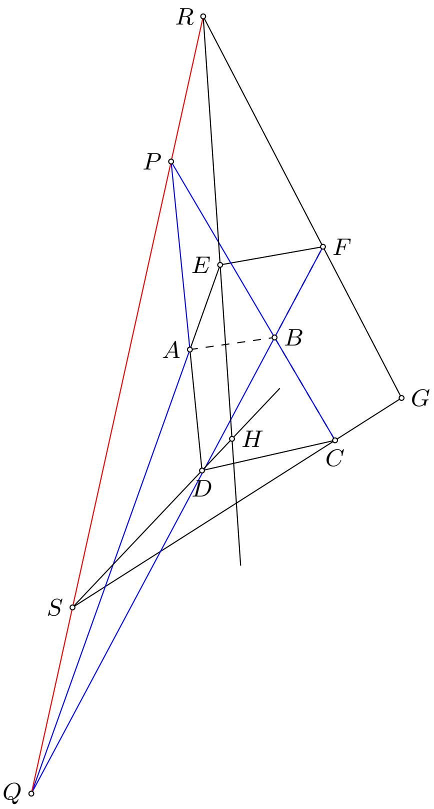
Ist $u = 0$, so kann v alle Werte von 0 bis r annehmen, analog anders herum. Da die Lösung (0,0) hier in beiden Fällen mitgezählt wurde, hat die Ungleichung $u^2 + v^2 \leq r^2$ also (für nicht-negativ ganzzahliges r) genau $2r - 1$ Lösungen, bei denen mindestens eine der beiden Variablen u bzw. v Null ist.
Also gilt $B = A + (2r - 1)$ bzw. $\frac{A+B}{2} = A + r - \frac{1}{2}$.

Da die tatsächliche Kästchenanzahl in allen vier Quadranten insgesamt das Vierfache der hier gezählten Kästchen im ersten Quadranten ist, gilt für das arithmetische Mittel der insgesamt gezählten Kästchenanzahlen, dass dieses ein Vielfaches von 4 ist, von dem 2 subtrahiert werden. Da der Flächeninhalt eines Kästchens $\frac{1}{4}\text{cm}^2$ beträgt, ist also für jedes ganzzahlige r (d.h., der gezeichnete Kreis hat einen Radius, der ein natürliches Vielfaches der Kästchenlänge von 5mm ist) das arithmetische Mittel der errechneten Flächeninhalte eine ganze Zahl von cm^2 minus $\frac{1}{2} = 0{,}5$, sodass die Maßzahl des dritten Näherungswerts immer auf $\ldots{,}5$ endet.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 301046
Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder $A', B', C', D', E', F', G'$ von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion.
Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$.
Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)





Zunächst die Konstruktionsanweisungen:

1. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AD und BC, der Schnittpunkt ist P.
2. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AE und BF, der Schnittpunkt ist Q.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.
4. Zeichne eine Gerade entlang FG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei R.
5. Zeichne eine Gerade durch R und E.
6. Zeichne eine Gerade entlang CG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei S.
7. Zeichne eine Gerade durch S und D.
8. Der Schnittpunkt der Geraden RE und SD ist der gesuchte Punkt H.

Begründung:
Die "rote" Gerade PQ ist die Schnittlinie der Ebenen $ADHE$ und $BCGF$. Wir kennen zwar H nicht, aber die Ebene $ADHE$, in der H liegt, ist allein durch die Kanten AE und AD definiert.

Da AD und BC in einer Ebene liegen, müssen sie die Schnittlinie im selben Punkt, nämlich P schneiden. Sinngemäß das gleiche gilt für AE und BF, die sich in Q schneiden. Die Schnittlinie muss daher durch die Punkte P und Q verlaufen.

Nachdem wir so die Schnittlinie konstruiert haben, können wir auf H Rückschlüsse ziehen. Da EH und FG ebenfalls in einer Ebene liegen sollen, müssen ihre Geraden sich auf der Schnittlinie im selben Punkt schneiden. Daher schneiden wir die Gerade FG mit der Schnittlinie und erhalten den Schnittpunkt R. R muss der Schnittpunkt von EH mit der Schnittlinie PQ sein, daher legen wir eine Gerade durch R und E. Das gleiche noch einmal mit CG und DH, die sich ebenfalls auf der Schnittlinie PQ schneiden müssen.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

7.33 XXXI. Olympiade 1991

7.33.1 I. Runde 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311011
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x + y < 1991. \qquad (7)$$

Zu $x = 1$ wird (1) genau für $y = 1,2,...,1988,1989$ erfüllt; daher gibt es insgesamt

1989 Paare mit $x = 1$, für die (1) gilt.

Analog erhält man insgesamt

1988 Paare mit $x = 2$, für die (1) gilt,

1987 Paare mit $x = 3$, für die (1) gilt, ...

1 Paar mit $x = 1989$, für das (1) gilt, nämlich das Paar (1989,1)

Die Anzahl aller Paare mit (1) ist folglich gleich der Summe $1 + ... + 1998 + 1989$; diese beträgt nach einer bekannten Formel

$$\frac{1989 \cdot 1990}{2} = 1979055$$

Aufgabe 2 - 311012
Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm^3, der Oberflächeninhalt 17454 cm^2 und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.

Inge sagt, dass sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und daß die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.

Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.

Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

a) Sind a, b die Maßzahlen der in cm gemessenen anderen Kanten, so folgt

$$3 \cdot a \cdot b = 24552 \qquad (1)$$
$$2 \cdot (ab + 3a + 3b) = 17454 \qquad (2)$$
$$\text{aus (1) folgt} \qquad ab = 8184 \qquad (3)$$
$$\text{aus (2) folgt} \qquad ab + 3a + 3b = 8727$$

Subtrahiert man hiervon (3), so folgt $3a + 3b = 543$, also $a + b = 181 \quad (4)$.

Aus (4) folgt $b = 181 - a$; setzt man dies in (3) ein, so folgt

$$a \cdot (181 - a) = 8184 \qquad ; \qquad a - 181a + 8184 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1;2} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{32761}{4} - 8184} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$a_1 = 93 \qquad ; \qquad a_2 = 88$$

Nach (4) gehören hierzu die Werte $b_1 = 88$ bzw $b_2 = 93$.

Man bestätigt, dass sie außer (4) auch (3) erfüllen, woraus für sie auch (1) und (2) als erfüllt folgen. Damit sind die Längen der anderen Kanten ermittelt; sie betragen 88 cm und 93 cm.

b) Rolf könnte folgendermaßen zur Aufstellung eines Programms gelangen:

Wir lassen a die Werte 1,2,3,... durchlaufen. Für jedes a soll der Computer den Wert b aus (1) berechnen und dann prüfen, ob (2) erfüllt wird (sowie, wenn das zutrifft, a und b ausgeben).

Das Ende des Ablaufs soll erreicht sein, wenn kein ganzzahliges b mehr auftreten kann. (Da b mit wachsendem a fällt (wie aus (1) ersichtlich ist), kann jedenfalls beendet werden, wenn $b < 1$ ist. Das wird sicher erreicht (wichtig!), weil a nicht nur wächst, sondern sogar über jede Schranke hinaus wächst. Einen solchen Ablauf realisiert z.B. das Programm

```
10 A=0
20 A=A+1
30 B=24552/3/A
40 IF B<1 THEN END
50 IF 2 * (A*B + 3*A + 3*B )=17454 THEN PRINT A,B
60 GOTO 20
```

Hinweis: Zur Verkürzung der Rechenzeit kann man Zahlenwerte, die im Ablauf oft gebraucht werden, einmal zu Anfang ermitteln und an eine Variable übergeben.

Weiter kann man überhaupt das System (1),(2) durch das einfachere (3),(4) ersetzen (und dabei noch als Folgerung aus (4) nutzen: Wächst a um 1, so fällt b um 1). Vor allem aber lässt sich die Abbruchbedingung günstiger wählen: Es genügt, nur Paare mit $a \leq b$ zu suchen, was nach (4) mit $a \leq 90$ gleichwertig ist (und damit zudem ermöglicht, statt der obigen Zeilen 20, 40, 60 das günstigere FOR-NEXT zu verwenden). Praktischer ist also z.B. das Programm

```
10 P =8184
20 B=181
30 FOR A=1 TO 90
40 B=B-1
50 IF A*B=P THEN PRINT A,B
60 NEXT A
```

Aufgabe 3 - 311013
Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat) heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \tag{1}$$

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die Ungleichung

$$f(u) + f(v) < 2 \cdot f\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{2}$$

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+2b) &< 2 \cdot f(a+b), \\ f(a) + f(a+3b) &< f(a+b) + f(a+2b). \end{aligned} \tag{3}$$

Wendet man (*) mit $x_1 = u, x_2 = v, q_1 = q_2 = 5$ an, so folgt

$$f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) > \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$$

und daraus (1).
Für alle reellen a,b mit $b \neq 0$ erfüllen $u = a$ und $v = a+2b$ die Ungleichung $u \neq v$, also ist (1) anwendbar und ergibt wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+2b}{2} = a+b$$

die Ungleichung (2).

Ferner erfüllen auch $u = a + b$ und $v = a + 3b$ die Ungleichung $u \neq v$, und damit führt (1) wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+4b}{2} = a + 2b$$

auf

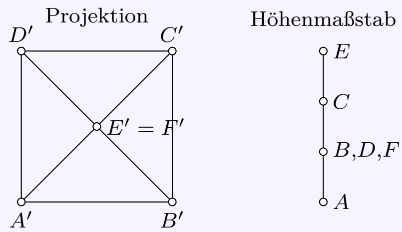
$$f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+2b) \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt durch Addition

$$f(a) + f(a+2b) + f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+b) + 2 \cdot f(a+2b)$$

und daraus, indem man auf beiden Seiten $f(a+b) + f(a+2b)$ subtrahiert, die Ungleichung (3).

Aufgabe 4 - 311014



Zur Abbildung wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriss und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

$A'B'C'D'$ ist ein Quadrat, $E' = F'$ sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrecken geteilt.

Weisen Sie nach, dass die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

Wie der Höhenmaßstab zeigt, liegen die Punkte B und D auf gleicher Höhe h, gemessen über der Höhe von A; dieselbe Höhe hat folglich auch der Mittelpunkt M von BD.

Ferner hat C die Höhe $2h$ über der von A; daher hat nach dem Strahlensatz auch der Mittelpunkt N von AC die Höhe h. Bei der Parallelprojektion geht jeweils der Mittelpunkt einer Strecke in den Mittelpunkt der Bildstrecke über; daher und weil im Quadrat $A'B'C'D'$ die Diagonalen einander halbieren, haben M und N denselben Bildpunkt

$$M' = N' = F' \tag{1}$$

Hiernach und wegen der gleichen Höhe gilt $M = N$, also schneiden sich die Strecken BD und AC (in diesem Punkt); folglich liegen A, B, C, D in einer gemeinsamen Ebene e.

Wegen (1) und da F ebenfalls die Höhe h hat, ist auch $M = N = F$, somit liegt F in der Ebene e. In der Abbildung sind die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ eingezeichnet; sie können nur als Bilder der Strecken

$$AB, BC, CD, DA \tag{2}$$

zustande kommen. Wenn es einen nach der Beschreibung dargestellten ebenflächig begrenzten Körper gäbe, so wären dies vier seiner Kanten.

In jeder Kante müssten zwei Teilflächen seiner Oberfläche zusammenstoßen. Die einzigen ebenen Flächen, die je eine der Kanten (2) mit anderen der Punkte A, B, C, D, E, F verbinden, sind aber, da F in e liegt, das Viereck $ABCD$ und die vier Dreiecke ABE, BCE, CDE, DAE. In dem so begrenzten Körper (der Pyramide $ABCDE$) wäre aber F kein Eckpunkt, was der Beschreibung widerspricht, die auch F unter den Eckpunkten aufzählt.

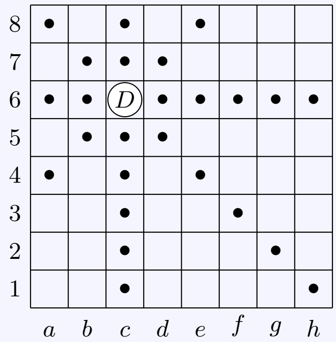
Eine Änderung, die den Widerspruch beseitigt, ist z.B. das Weglassen einer der Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ aus der Zeichnung.

Der dann widerspruchsfrei dargestellte und beschriebene Körper entsteht aus der Pyramide $ABCDE$ durch Herausschneiden der entsprechenden unter den Teilpyramiden $ABFE$, $BCFE$, $CDFE$, $DAFE$.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

7.33.2 II. Runde 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311021



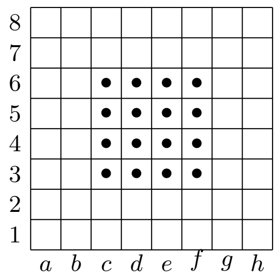
Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagerecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung von der Dame auf c6 genau die markierten Felder bedroht.

Leonhard Euler (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, dass keine dieser Damen eine andere bedroht.

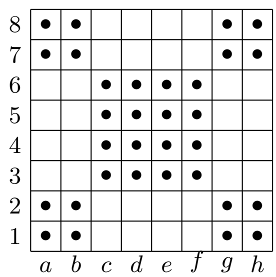
Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, dass keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören. Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.

Hinweis: Die verbotenen Felder wirken nicht etwa als Sperre der Bedrohung; z.B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

In der nachfolgenden Darstellung sind die gesperrten Felder mit einem Kreis markiert.



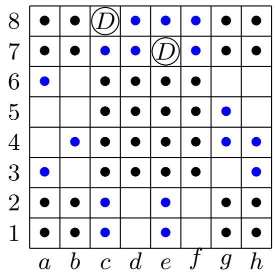
Da in der Spalte c, d, e oder f eine Dame stehen muss, ist dies nur in der 1., 2., 7. oder 8. Zeile möglich. Analog schlussfolgert man, dass Damen in der 3. bis 6. Zeile nur in der Spalte a, b, g oder h platziert werden können. Damit sind in der Spielfeld jeweils 4 Felder "damenfrei".



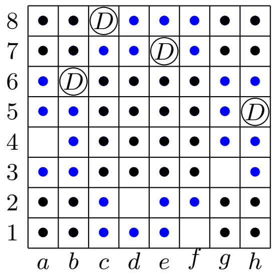
Zu Beginn sei die Dame in c8.

In der 7. Zeile kann dann die Dame nur in der Spalte e stehen, andernfalls müssten in der 1. und 2. Zeile die zwei Damen in benachbarten Spalten stehen und sich gegenseitig bedrohen.

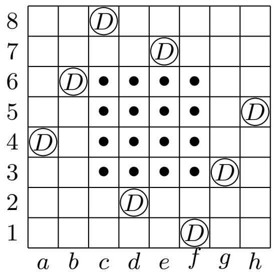
In der Abbildung sind alle von den Damen bedrohten Felder blau markiert.



In der 6. Zeile kann nur auf b6 eine Dame platziert werden. Würde sie auf den einem der anderen noch freien Felder g6 oder h6 stehen, könnte in die 8. Spalte keine Dame untergebracht werden. Daraus folgt sofort auch h5 als Feld mit Dame.



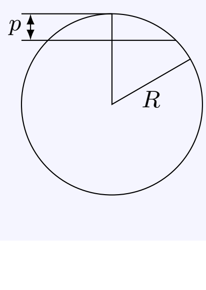
Für die restlichen Damen sind nur noch 4 frei.



Damit ist eine mögliche Aufstellung gefunden.
Es existieren drei weitere Aufstellungen, die sich durch Drehungen um den Mittelpunkt des Spielfeldes mit $90°, 180°$ und $270°$ ergeben.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 311022
Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, dass die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig.
Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungsachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.
Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen $V(C)$ von C ermitteln.
Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müssten zu diesem h unterschiedliche Werte $V(C)$ möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, $V(C)$ nicht allein aus h ermitteln.
Wer hat recht?



Hinweis : Für das Volumen $V(K), V(A), V(Z)$ einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A (Pfeilhöhe p siehe Abbildung) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r, Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad ; \qquad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3 \qquad ; \qquad V(Z) = \pi r^2 h$$

Die Behauptung, das Volumen $V(C)$ eines Restkörpers C sei allein mit h zu ermitteln ist genau dann widerlegt, wenn ein Restkörper $\bar{C}$ mit gleicher Höhe $h = \bar{h}$ existiert für den gilt, $V(C) \neq V(\bar{C})$. Es genügt somit einen Einzelfall zu zeigen um die Behauptung zu widerlegen. Dazu seien:

$$R = 5, \quad r = 4, \quad h = 6, \quad p = 2$$

$$\bar{R} = 4, \quad \bar{r} = 2, \quad \bar{h} = 6, \quad \bar{p} = 1$$

$$V(C) = V(K) - V(Z) - 2V(A) \neq V(\bar{C}) = V(\bar{K}) - V(\bar{Z}) - 2V(\bar{A})$$

$$\pi(\frac{4}{3}R^3 - r^2h - 2Rp^2 + \frac{2}{3}p^3) \neq \pi(\frac{4}{3}\bar{R}^3 - \bar{r}^2\bar{h} - 2\bar{R}\bar{p}^2 + \frac{2}{3}\bar{p}^3)$$

$$\pi(\frac{4}{3} \cdot 5^3 - 4^2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot 2^3) \neq \pi(\frac{4}{3} \cdot 4^3 - 2^2 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 1^2 + \frac{2}{3} \cdot 1^3)$$

$$36\pi \neq 54\pi$$

$$V(C) \neq V(\bar{C})$$

Birgit hat recht.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 3 - 311023
Man beweise, dass sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, dass die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.

Seien P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 beliebige Punkte in einer Ebene.
Wir legen 3 Geraden durch P_1, 3 Geraden durch P_2, 3 Geraden durch P_3, 15 Geraden durch P_4 und 76 Geraden durch P_5.

Weiter fordern wir, dass
-jede Gerade sich mit jeder anderen schneidet.
-keine der Geraden durch zwei der Punkte P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 verläuft.
-in allen Punkte mit Ausnahme von P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 sich höchstens zwei Geraden schneiden.

Um dies zu gewährleisten, fügen wir die Geraden nacheinander in den Punkten P_i hinzu und achten darauf, dass die hinzugefügte Gerade nicht parallel zu einer der vorherigen ist und dass sie durch keinen der Schnittpunkte der vorigen Geraden (bis auf P_1,P_2,P_3,P_4,P_5) geht.

Wir zählen nun die Geraden und die Anzahl der Schnittpunkte.
Es sind insgesamt $3 + 3 + 3 + 15 + 76 = 100$ Geraden. Wir zählen nun die Punkte, in denen sich genau zwei Geraden schneiden. Das sind

$$\frac{1}{2}((3 + 3 + 3 + 15 + 76)^2 - (3^2 + 3^2 + 3^2 + 15^2 + 76^2)) = 1986.$$

Zusätzlich schneiden sich noch Geraden in den Punkten P_1,P_2,P_3,P_4,P_5. Die Anzahl aller Punkte, in denen sich mindestens zwei Geraden schneiden, beträgt also 1991.
Wir nutzen hier, dass

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i\right)^2 - \sum_{1\leq i\leq n} a_i^2\right)$$

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 4 - 311024
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t+24\sqrt{t}}$ rational ist!

Es sei $r^2 = t + 24\sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2-t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber nur genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot n \cdot 12 + 12^2 = (n+12)^2$, also mit $m := n + 12 > 0$ schließlich $144 = m^2 - r^2 = (m+r)(m-r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist dabei $m+r$ der größere und $m-r$ der kleinere Teiler und wegen $(m+r)-(m-r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, sodass, da 144 durch 2 teilbar ist, also beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich also folgende Lösungen:

- Für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Tatsächlich ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- Für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Tatsächlich ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.
- Für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Tatsächlich ist $\sqrt{9 + 24\sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- Und für $m-r = 8$ ist $m+r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$ und $n = t = 1$. Tatsächlich ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$.

Damit ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1{,}9{,}64{,}625\}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.33.3 III. Runde 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311031
Beweisen Sie, a) dass gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 23 \cdot 25} > \frac{1}{5}$$

b) dass für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2m-1)} > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

Es folgt a) aus b) mit $m = 13$, sodass es genügt die Ungleichung aus b) für alle $m \geq 2$ zu zeigen. Dazu sei

$$x := \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}$$

Mit $(k-1)(k+1) = k^2 - 1 < k^2$ für alle natürlichen Zahlen k folgt dann

$$x^2 = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2m-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} > \frac{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot ((2m-3) \cdot (2m-1)}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} = \frac{1}{2m-1}$$

also $x^2 > \frac{1}{2m-1}$ bzw. $x > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$, $\square$.

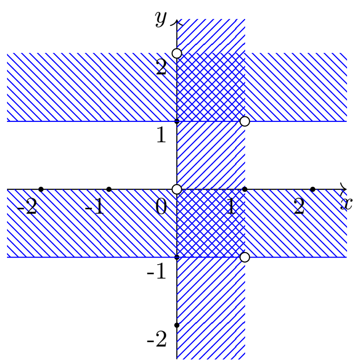
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 311032
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$
a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1$ (1)
b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1$ (2)
erfüllen.
Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, dass für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.
Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

a) Nach Definition ergibt $[z]$ für jedes reelle z eine ganze Zahl. Die Quadrate $[x]^2, [y]^2$ sind sicher ≥ 0 und damit wird $[x]^2, [y]^2 \in \{0, 1, 4, 9, ...\}$. Ist (x,y) Lösung von (1), so können $[x]^2, [y]^2$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x]^2 = 0, [y]^2 = 1$

Damit $[x]^2 = 0$ gilt, muss $[x] = 0$ und $0 \leq x < 1$ gelten. $[y]^2 = 1$ ergibt $[y] = 1$ oder $[y] = -1$ und die möglichen Intervalle $1 \leq y < 2$ bzw. $-1 \leq y < 0$.

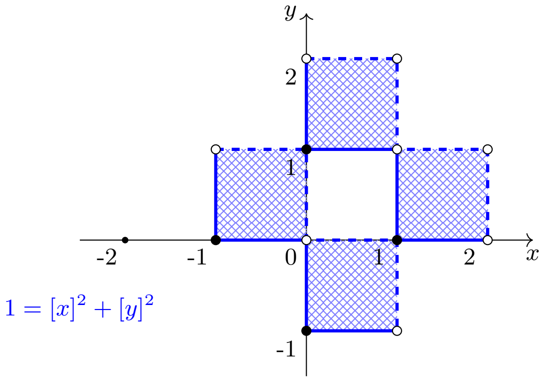


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1) und (0,0) – (0, – 1) – (–1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0) und (–1,1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

2. Fall: $[x]^2 = 1, [y]^2 = 0$

In Analogie zum 1.Fall wird: $0 \leq y < 1$ und $1 \leq x < 2$ bzw. $-1 \leq x < 0$.

Die Lösungsmenge der Aufgabe a) ist damit

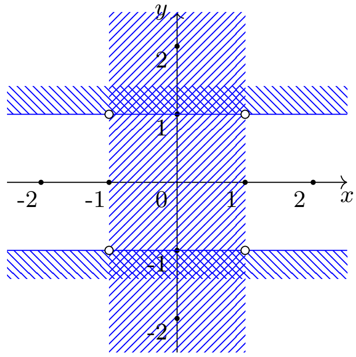


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1), (0,0) – (0, – 1) – (–1,1), (–1,1) – (–1,0) – (0,0) und (1,1) – (1,0) – (2,0) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0), (–1,1), (2,0) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

b) Die Quadrate $[x^2], [y^2]$ sind sicher ≥ 0, da x^2 und y^2 nicht negativ sind. Da $[x^2], [y^2]$ ganzzahlig sind und wird $[x^2], [y^2] \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Ist (x,y) Lösung von (2), so können $[x^2], [y^2]$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x^2] = 0, [y^2] = 1$

Damit $[x^2] = 0$ gilt, muss x^2 im Intervall $0 \leq x^2 < 1$ liegen und somit $-1 < x < 1$ gelten.
$[y^2] = 1$ ergibt das Intervall $1 \leq y^2 < 2$ und damit die zwei Intervalle $1 \leq y < \sqrt{2}$ und $-\sqrt{2} < y \leq -1$.

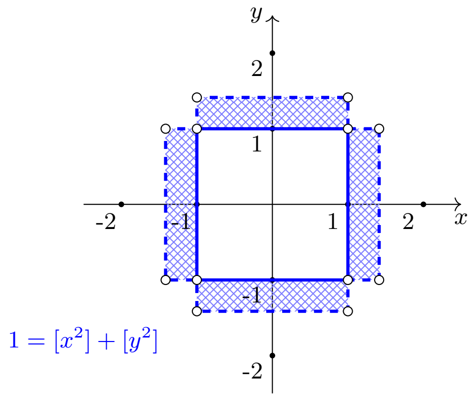


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken von (–1,1) nach (1,1) sowie von (–1,–1) nach (–1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (–1,1), (1,1), (–1, – 1) und (1, – 1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei rechteckigen Bereiche gehören nicht zur Lösung

2. Fall: $[x^2] = 1, [y^2] = 0$

In Analogie zum 2.Fall wird: $-1 < y < 1$ und $1 \leq x < \sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2} < x \leq -1$.

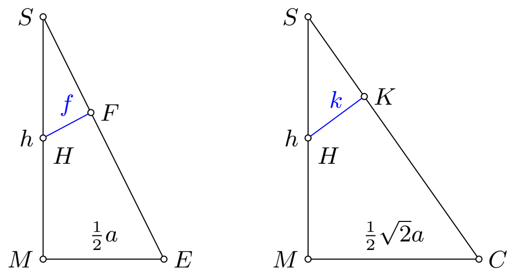
Die Lösungsmenge der Aufgabe b) ist damit



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 3 - 311033
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat $ABCD$, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates $ABCD$.
Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.
Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = HF$ und $k = HK$ das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Der Mittelpunkt der Strecke BC sei E. Die Höhe der Pyramide sei h, die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche sei a. Wir legen nun einen Schnitt durch MES und durch MCS:



Das gesuchte Volumen der Pyramide ist

$$V = \frac{1}{3}a^2h$$

Wir müssen daher a und h mithilfe der gezeigten Schnitte aus den gegebenen Längen f und k ermitteln. Es gilt im linken Schnitt:

$$\frac{f}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}}$$

$$f^2(h^2 + \tfrac{1}{4}a^2) = \tfrac{1}{16}a^2h^2$$

$$16f^2h^2 + 4f^2a^2 = a^2h^2$$

$$(a^2 - 16f^2)h^2 = 4f^2a^2$$

$$h^2 = \frac{4f^2a^2}{a^2 - 16f^2} \qquad (1)$$

Aus dem rechten Schnittbild erhält man in ähnlicher Weise:

$$\frac{k}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}}$$

Und mit den gleichen Rechenschritten wie oben:

$$h^2 = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 8k^2} \qquad (2)$$

Wir setzen (1) und (2) gleich und lösen nach a^2 auf:

$$\begin{aligned}\frac{4f^2a^2}{a^2-16f^2} &= \frac{4k^2a^2}{a^2-8k^2}\\ f^2(a^2-8k^2) &= k^2(a^2-16f^2)\\ 8f^2k^2 &= (k^2-f^2)a^2\\ a^2 &= \frac{8f^2k^2}{k^2-f^2} \qquad (3)\end{aligned}$$

Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:

$$h^2 = \frac{4f^2\cdot\frac{8f^2k^2}{k^2-f^2}}{\frac{8f^2k^2}{k^2-f^2}-16f^2} = \frac{32f^4k^2}{8f^2k^2-16f^2(k^2-f^2)} = \frac{4f^2k^2}{2f^2-k^2}$$

$$h = \frac{2fk}{\sqrt{2f^2-k^2}}$$

Diese Gleichung und Gleichung (3) setzen wir in die Formel für das Volumen ein:

$$V = \frac{2fk}{3\sqrt{2f^2-k^2}}\cdot\frac{8f^2k^2}{k^2-f^2} = \frac{16f^3k^3}{3(k^2-f^2)\sqrt{2f^2-k^2}}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

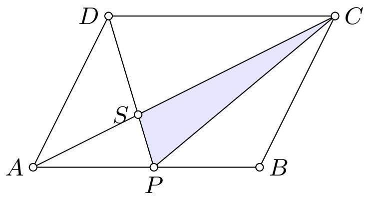
Aufgabe 4 - 311034
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen
(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n,m ist $n = 1000$.
b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

a) Falls $t,s \in \mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ ist, gilt $\sqrt{t} = s^2 - t \in \mathbb{Q}$. Also ist t das Quadrat eine rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t = \frac{n}{m}$ müssen n,m Quadrate in $\mathbb{N}$ sein. Dieses ist für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

b) Setze $r := \sqrt{t} = \frac{100}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = m$. Aus (1) folgt $q < 100$.
Die Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ ist äquivalent zu $r(r+1) = s^2 \iff 100(100+q) = (qs)^2 \in \mathbb{N}$. Die Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $100+q$ ein Quadrat in $\mathbb{N}$ ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21,44,69,96\}$. Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, fällt $q = 44$ weg und somit gibt es für t die drei Lösungen $\frac{10000}{21^2}, \frac{10000}{69^2}, \frac{10000}{96^2}$.

Bemerkung:
Ohne die Bedingung (1) gibt es in b) unendlich viele Lösungen $t = \frac{10000}{(a^2-100)^2}$ mit $a \in \mathbb{N}, a > 10$ und $ggT(a,10) = 1$. Diese ergeben eine alternative Lösung zu Aufgabe 331042.

Aufgabe 5 - 311035
Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.
a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?
b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?



a) Ein Punkt, dessen Lage man auf einer Strecke beschreiben kann, ist der Mittelpunkt. Und tatsächlich ist dieser Punkt der gesuchte Punkt, wie man leicht einsehen kann.

Sei die Länge des Parallelogramms a und die Höhe b. Das Parallelogramm hat dann also eine Fläche von $A = ab$. Offensichtlich hat das $\triangle ASD$ den gleichen Flächeninhalt wie das $\triangle SPC$, da das $\triangle APD$ flächeninhaltsgleich zum $\triangle APC$ ist (Scherung).
Sei also der Flächeninhalt der Dreiecke x. Die Dreiecke APS und DSC sind ähnlich, da alle Winkel gleich sind. Nach Strahlensatz beträgt der Streckfaktor 2, die Fläche von $\triangle DSC$ ist also viermal so groß, wie die von $\triangle ASP$. Sei nun $A_{\triangle ASP} = y$, dann gilt:
$(1): \quad x + 4y = \frac{ab}{2}$
$(2): \quad x + y = \frac{ab}{4}$
$(1) - (2): \quad 3y = \frac{ab}{4}$ und somit $y = \frac{ab}{12}$
Damit erhalten wir also $A_{\triangle SPC} = \frac{ab}{4} - \frac{ab}{12} = \frac{ab}{6}$.

b) Nun - verschiebt man P nach links wird der Flächeninhalt immer kleiner, verschiebt man P nach rechts, wird er größer. Liegt P schließlich auf B ist die Fläche maximal, nämlich $A = \frac{ab}{4}$.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 6 - 311036
Beweisen Sie, dass es unendlich viele verschiedene Paare (f, g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gilt $f(0) = 1992$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x)\cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.
Hinweis: Zwei Paare (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.

Sei eine reelle $c > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass

$$f(x) = 1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right), g(x) = c$$

alle Eigenschaften erfüllt. Es sind $f,g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ für alle reellen Zahlen x definiert. Weiter gilt $f(0) = 1992 \cdot \exp(0) = 1992$. Für alle reellen Zahlen x erhalten wir

$$\frac{g(x)f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot 1992 \cdot \exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)}{1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} = \frac{c \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right) \cdot \exp \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} =$$

$$= c \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) = c + 1 = g(2x) + 1.$$

Da es unendlich viele unterschiedliche reelle Zahlen $c > 0$ gibt, existieren unendlich viele verschiedene Paare (f,g) mit den gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe gelöst von ochen

7.33.4 IV. Runde 1991, Klasse 10

Aufgabe 1 - 311041
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:
(1) Für jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen a, b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$

Die Aussage gilt genau für alle $-2 \leq k \leq 2$. Wir zeigen dies per vollständiger Fallunterscheidung nach der Größe von k:

Fall 1: $k > 2$. Dann ist für $a = b = 1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = 2 \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Fall 2: $0 \leq k \leq 2$.
Fall 2.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq 2 \cdot ab \geq k \cdot ab$.
Fall 2.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$. Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 3: $-2 \leq k < 0$.
Fall 3.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$.
Fall 3.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq (-2)ab \geq k \cdot ab$.
Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 4: $k < -2$. Dann ist für $a = 1$, $b = -1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = (-2) \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Die Aussage (1) wird also genau für $-2 \leq k \leq 2$ erfüllt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 311042
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B.
Ferner sei k_A der Kreis durch A, E, F; es sei k_B der Kreis durch B, F, D; und es sei k_C der Kreis durch C, D, E.
Man beweise, dass bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A, B, C, D, E, F, k_A, k_B, k_C gibt, die drei Kreise k_A, k_B, k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Lemma:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, $t \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um 90° um den Ursprung.
Dann existiert für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \alpha D(x) + t$ ein Punkt $s \in \mathbb{R}^2$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x - s) = \alpha D(x) - s$ gilt.
In anderen Worten: Jede Verknüpfung einer Drehstreckung um 90° um den Ursprung und einer Verschiebung lässt sich darstellen als eine Drehstreckung um 90° mit dem gleichen Streckfaktor um einen Punkt.

Beweis des Lemmas:
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Für das gesuchte $s \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

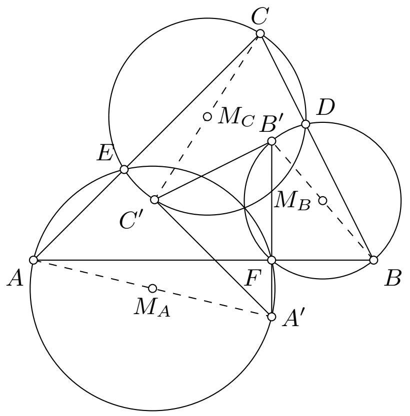
$$\alpha D(x) - s = f(x - s) = \alpha D(x - s) + t = \alpha D(x) - \alpha D(s) + t,$$

also $\alpha D(s) - s = t$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto \alpha D(v) - v$ surjektiv ist. Da g linear ist, genügt es sogar zu zeigen, dass g injektiv ist.
Angenommen $v \in \ker g$, also $g(v) = 0$, d.h. $\alpha D(v) = v$. Dann gilt

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \alpha \langle v, D(v) \rangle = 0.$$

(Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil per Definition v orthogonal zu $D(v)$ ist.) Also muss $v = 0$ gelten, d.h. g injektiv sein. $\square$

Beweis der Behauptung in der Aufgabe:
Die Mittelpunkte der Kreise k_A,k_B,k_C seien mit M_A,M_B,M_C bezeichnet. Es seien A',B' bzw. C' die den Punkten A,B bzw. C diametral in k_A, k_B bzw. k_C gegenüberliegenden Punkte.



Nach dem Satz von Thales, ist dann AF orthogonal zu $A'F$ und BF orthogonal zu $B'F$. Also liegen A' und B' beide auf dem Lot zu AB durch F. Analog liegen B' und C' auf dem Lot zu BC durch D, sowie C' und A' auf dem Lot zu AC durch E.
Da die erwähnten Lote untereinander jeweils die gleichen Winkel einschließen, wie die Seiten des Dreiecks ABC, folgt, dass das Dreieck $A'B'C'$ zu ABC ähnlich ist.
Nach obigem Lemma lässt sich diejenige affine Abbildung, die A,B,C auf A',B',C' abbildet, darstellen als eine Drehstreckung um 90° um einen Punkt S. Insbesondere steht also AS auf $A'S$ senkrecht. Nach dem Satz von Thales muss daher S auf dem Kreis k_A liegen. Analog lässt sich zeigen, dass S auch auf k_B und k_C liegt. □

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3A - 311043A
Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte $f(n)$ ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung $f(f(m) + f(n)) = m + n$ gilt.
Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert $f(1992)$ bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

Alle folgenden Variablen m,n,k seien positiv ganz.
Für $m = n$ lautet die Funktionalgleichung $f(2f(n)) = 2n$.
Das Argument $2f(n)$ der äußeren Funktion muss positiv ganz sein, also ist $f(n)$ stets positiv ganz.

f ist außerdem injektiv: aus $f(n) = f(k)$ folgt $2n = f(2f(n)) = f(2f(k)) = 2k$, also $n = k$.
Da in $f(f(m) + f(n)) = m + n$ die rechte Seite alle natürlichen Zahlen größer 1 annehmen kann, muss jede natürliche Zahl größer 1 ein Urbild haben.

Aus der Funktionalgleichung und der Injektivität von f folgt

$$2f(n) = f(n + 1) + f(n - 1) = f(n + 2) + f(n - 2) = ... = f(1) + f(2n - 1)$$

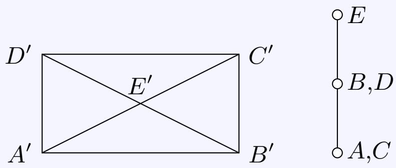
denn wenn man f auf jede Seite dieses Gleichungssystems anwendet, erhält man immer $2n$.
$2f(n)$ besitzt also $n - 1$ verschiedene Darstellungen als Summe zweier verschiedener Summanden (verschieden wegen der Injektivität von f). [zwei Darstellungen heißen genau dann verschieden, wenn sie nicht durch Vertauschung der Summanden ineinander übergehen] Also muss offenbar $f(n) \geq n$ gelten für alle $n \geq 2$.

Wäre $f(1) > 1$, so wäre $2 = f(f(1) + f(1)) \geq 4$, Widerspruch, also ist $f(1) = 1$.
Wäre nun $f(2) > 2$, hätte die 2 kein Urbild, Widerspruch, also ist $f(2) = 2$. Induktiv kriegt man nun $f(n) = n$ für alle natürlichen n, was die Funktionalgleichung erfüllt.

Anmerkung: Man erhält schon aus $2f(n) = f(n+1)+f(n-1)$ die Lösung: das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle 1, damit ist $f(n) = a + bn$. Da f einen natürlichen Wertebereich hat, ist a ganz und $b \geq 0$. Wegen der Injektivität gilt $b \neq 0$. Damit, und da jede natürliche Zahl größer gleich 2 ein Urbild hat, ist $b = 1$ und $a = 1$ oder $a = 0$. Damit und nach Einsetzen in die Funktionalgleichung erhält man $a = 0$.

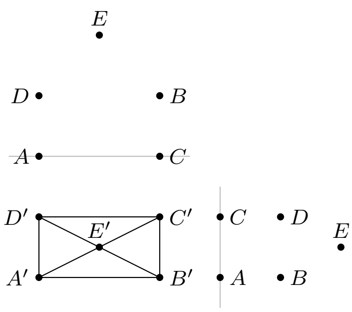
Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 3B - 311043B
In der Abbildung ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt.
$A'B'C'D'$ ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D.
Vorausgesetzt wird ferner, dass der Körper genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!
b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriss aus der Abbildung übernommen ist!
Im Auf- und Seitenriss sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren Linien verdeckt); die Abbildung selbst ist in dieser Weise aufzufassen.

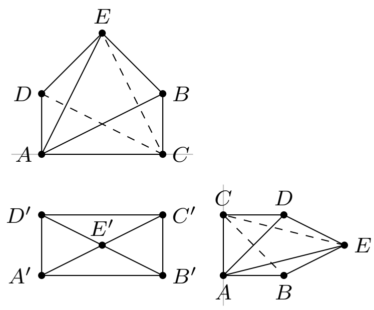


Da von oben nach unten erst E, dann B und D und am Ende A und C kommen, muss E durch gerade Kanten mit den anderen vier Punkten verbunden sein. Aber auch die vier Punkte A, B, C, D sind umlaufend untereinander verbunden, wie das Rechteck $A'B'C'D'$ beweist. Wir zeichnen in den drei Ansichten die Punkte und danach die Strecken wie angegeben ein.

Schritt 1:

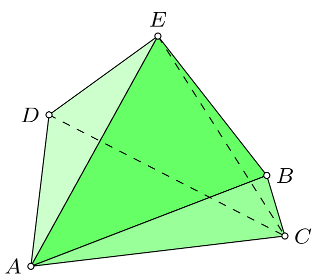


Schritt 2:



In der Vorderansicht sind CD und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie hinter den ABC, ABE und AED verlaufen müssen. In der Seitenansicht rechts sind CB und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie von links gesehen hinter den Flächen ABE, ADE und ADC angeordnet sind.

Aus den genannten Gründen ist die Zuordnung aller Kanten und damit auch die Form des Körpers insgesamt eindeutig. Der Körper sieht dann wie folgt aus:



Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 311044
Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.
Man zeige, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass für jedes Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n - m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m}$$

gilt. Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

Wir zeigen zuerst folgendes

Lemma: Endet die natürliche Zahl n bei ihrer Darstellung im Ziffernsystem zur Basis 9 auf genau $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Achten, so gilt $\overline{n+1} - \overline{n} = \frac{10^k-1}{9} + 1$.

Beweis: In der Darstellung der Zahl $n+1$ im System zur Basis 9 sind dann die letzten k Ziffern gleich Null, während sich die letzte davor befindliche Ziffer gegenüber n um genau 1 erhöht hat. Dementsprechend ist $\overline{n+1} = \overline{n} - 8\dots8 + 10^k = \overline{n} - 8 \cdot \frac{10^k-1}{9} + 10^k$, woraus direkt die Aussage des Lemmas folgt.

Nun zur Aufgabe: Aus dem Lemma folgt $\overline{n+1} = \overline{n} + 1$ für alle natürlichen Zahlen n, die in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 nicht auf eine Acht enden. Insbesondere gilt dies für die natürlichen Zahlen $108 = 130_9$ bis $115 = 137_9$.
Also folgt für alle natürlichen Zahlen ℓ zwischen inklusive 108 und 115, dass $\overline{\ell+1} = \overline{\ell} + 1$ gilt. Setzen wir dies zusammen, wählen $m = 108$ und $n = 116$, so gilt also $\overline{m} = \overline{n} + 8$ bzw. $\overline{n} - \overline{m} = 8 = n - m$, sodass man k nicht als $n - m - 1 = 8 - 1 = 7$, oder kleiner, wählen kann, damit in jedem der vorgegebenen Fälle $n - m < \overline{n} - \overline{m}$ gilt.

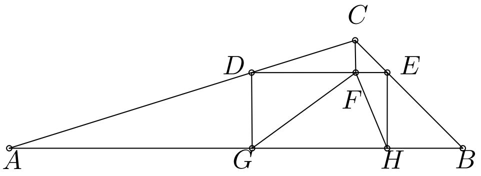
Ist dagegen $k \geq 8$, so endet wegen $n > m + k \geq m + 8$ wenigstens eine der natürlichen Zahlen m, $m+1$, $\dots$, $n-1$ in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 auf die Ziffer Acht.
Für diese Zahl a ist dann $\overline{a+1} > \overline{a} + 1$. Da für alle natürlichen Zahlen b die Ungleichung $\overline{b+1} \geq \overline{b} + 1$ gilt, folgt durch Zusammensetzen aller dieser Ungleichungen nun $\overline{n} > \overline{m} + (n - m)$ bzw. die zu zeigende Ungleichung $n - m < \overline{n} - \overline{m}$.

Damit ist die Aussage für alle $k \geq 8$ gezeigt, während sie für $k \leq 7$, wie oben gezeigt, nicht für alle entsprechenden m und n gilt. Es ist also $k = 8$ das kleinste solche k.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 311045
Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

Im Folgenden sei mit Dreieck immer ein nichtentartetes Dreieck gemeint. Wir beweisen nun, dass jedes (nichtentartete) Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Dazu zeigen wir zunächst, dass jedes recht- oder stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.



Sei also ein recht- oder stumpfwinkliges Dreieck ABC gegeben und dessen größter Winkel sei (o.B.d.A.) bei C, siehe Skizze.

Die Höhe auf AB durch C liegt echt im Dreieck (da bei C der größte Winkel ist). Auf dieser Höhe wählen wir nun einen Punkt F ungleich C und nicht auf AB. Die Parallele bezüglich AB durch F schneide AC und BC in D bzw. E, beide Punkte sind jeweils von A,B verschieden. Die Fußpunkte von D und E auf AB seien G bzw. H, beide sind jeweils von A,B verschieden. Da F im Inneren von DE liegt, hat das Dreieck GFH einen nicht-spitzen Winkel höchstens bei F. Wenn F nahe genug an C liegt, ist dieser

Winkel bei F allerdings immer spitz (da er gegen 0 geht, wenn F gegen C geht).

Alle Teildreiecke in ABC, außer dem Dreieck GFH, haben nun genau einen rechten Winkel. Man sieht leicht, dass man diese rechten Winkel verkleinert, wenn man F ein hinreichend kleines Stück nach unten zieht (d.h. den Abstand FC vergrößert), G ein hinreichend kleines Stück nach rechts und H nach links zieht (d.h. die Abstände AG und HB vergrößert). Die spitzen Winkel bleiben dabei spitz, wenn die Verschiebungen hinreichend klein sind. Des Weiteren bleibt das Dreieck GFH spitzwinklig.
Somit hat man ABC in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt.

Sei nun irgendein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Wähle die Ecke mit dem größten Winkel, o.B.d.A. sei dies C. Die Höhe durch C liegt dann vollständig im Dreieck und der Fußpunkt F auf AB ist von A,B verschieden. Verschiebe nun F ein hinreichend kleines Stück auf AB, dabei entstehen genau ein spitzwinkliges und genau ein stumpfwinkliges Dreieck als Zerlegung von ABC.
Nach Obigem lässt sich das stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegen. Damit haben wir ABC insgesamt in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt und die Aussage ist gezeigt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6 - 311046
Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Man ermittle die letzte Ziffer (Einerstelle) in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1992}]$.
Hinweis: Ist z eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ sind $p = 2 - \sqrt{3}$ und $q = 2 + \sqrt{3}$. Für die Zahlen $a_n = p^n + q^n$ ($n = 0,1,2,3,...$) gilt $a_n > 0$ sowie

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14 \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = p^n(p^2 - 4p + 1) + q^n(a^2 - 4q + 1) = 0 \tag{2}$$

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Für $m = 0,1,2...$ sind $a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}$ ganze Zahlen mit 2 bzw. 4 bzw. 4 als letzter Ziffer:
Für $m = 0$ folgt dies aus (1), und trifft es für ein $m = k \geq 0$ zu, so ist nach (2) jeweils

$$a_{3(k+1)} = 4 \cdot a_{3k+2} - a_{3k+1}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 4 = 12$,

$$a_{3(k+1)+1} = 4 \cdot a_{3k+3} - a_{3k+2}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 2 - 4 = 4$,

$$a_{3(k+1)+2} = 4 \cdot a_{3k+4} - a_{3k+3}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 2 = 14$.
Wegen $1992 = 3 \cdot 664$ hat somit a_{1992} die letzte Ziffer 2. Ferner ist $0 < p < 1$, also $p^{1992} - 1 < 0 < p^{1992}$. Nach Addition von q^{1992} folgt $a_{1992} - 1 < q^{1992} < a_{1992}$, d.h., q^{1992} liegt zwischen zwei ganzen Zahlen, deren letzte Ziffer 1 bzw. 2 ist. Damit ergibt sich $[q^{1992}] = 1$.

Lösung übernommen von [5]

7.34 XXXII. Olympiade 1992

7.34.1 I. Runde 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321011
Bernd rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1:7 erhält er die mit 7 Stellen nach den Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.1428571.

Nun meint er: Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne noch einen weiteren Schritt zahlenmäßigen Rechnens durchführen zu müssen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, mit nur einem einfachen weiteren Rechenschritt auszukommen.

Beschreiben und begründen Sie, wie der gesuchte Dezimalbruch auf eine dieser Arten gefunden werden kann!

Bei dem bekannten schriftlichen Verfahren zur Division durch 7 können, wenn das Verfahren nicht mit Rest 0 endet, höchstens sechs verschiedene Reste auftreten. Sobald derselbe Rest zweimal auftritt, tritt eine Wiederholung der jeweils anschließend erhaltenen Ergebnisziffern ein. Daher muss der entstehende Dezimalbruch, wenn er nicht nach spätestens 6 Stellen abbricht, periodisch-unendlich mit einer Periodenlänge sein, die nicht größer als 6 ist.

Das Taschenrechnerergebnis 0.1428571 zeigt (gleichgültig, ob die letzte Ziffer 1 durch Runden oder Abbrechen ohne Runden zustandekam):

Es ergeben sich, beginnend mit der Zehntel-Ziffer 1, sechs verschiedene Ziffern, darunter die sechste nicht aufzurundende Ziffer 7, und danach erfolgt kein Abbruch. Also kann der gesuchte wahre Dezimalbruch nur der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0,\overline{142857}$ sein.

Aufgabe 2 - 321012
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a \neq 2$ sein.

In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b) \cdot (c + b) \qquad (1)$$

Wäre $a = 2$, so wäre (1) für die ganzen Zahlen $c - b$ und $c + b$, die wegen $0 < b < c$ positiv sind und $c - b < c + b$ erfüllen, nur mit $c - b = 1$ und $c + b = 4$ möglich. Daraus folgte $c = \frac{5}{2}$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von c. Also muss $a \neq 2$ sein.

Aufgabe 3 - 321013
In einer Urne liegen 10 Kugeln, auf denen die Zahlen von 1 bis 10 stehen, jede dieser Zahlen auf genau einer Kugel.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd je eine Kugel (ohne dabei die Zahl auf ihr zu kennen). Nachdem so jeder Spieler fünf der Kugeln erhalten hat, werden folgendermaßen Punkte vergeben: A bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 2 teilbar ist; B bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden vier Ergebnisse eines Spiels möglich sind:

Beide Spieler bekommen einen Punkt;
keiner bekommt einen Punkt;
nur A bekommt einen Punkt;
nur B bekommt einen Punkt.

b) Es werde eine große Zahl solcher Spiele gespielt (damit dies möglich ist, werden nach jedem Spiel die Kugeln wieder in die Urne gelegt).
Gefragt wird, wie oft dabei A und wie oft B einen Punktgewinn erwarten kann.

Geben Sie ein Computerprogramm an, das die Beantwortung dieser Frage unterstützt! Schätzen Sie ein, ob Ihr Programm Vermutungen oder genauer gesicherte Aussagen (über die Punktzahlen im Verhältnis zur Zahl der Spiele) ermöglicht!

a) Der geforderte Nachweis kann durch Angabe von Beispielen erbracht werden. Solche Beispiele sind:

Hat A die Kugeln 1,2,3,4,6, also B die Kugeln 5,7,8,9,10, so ergeben sich für A bzw. B die Summen 16 bzw. 39, also bekommen beide Spieler einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,5, so sind die Summen 15 bzw. 40, also bekommt keiner einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,8, so sind die Summen 18 bzw. 37, also bekommt nur A einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,9, so sind die Summen 19 bzw. 36, also bekommt nur B einen Punkt.

b) Erste Möglichkeit: Ein BASIC-Programm, das große Zahlen zufällig durchgeführter Spiele simuliert, ist z.B das folgende:

```
100 RANDOMIZE: S=24000: PA=0: PB=0: DIM Z(10)
110 PRINT " SPIELE","PUNKTE A","PUNKTE B","  REL.A","  REL.B"
120 FOR X=1 TO S
130   SA=0: SB=0: FOR J=1 TO 10: Z(J)=J: NEXT J
140   FOR U=10 TO 1 STEP -1
150     N=INT(RND(I)*U)+I: K=Z(N)
160     IF U/2=INT(U/Z) THEN SA=SA+K ELSE SB=SB+K
170     IF N=U THEN 190
180     FOR J=N+1 TO U: N(J-1)=N(J): NEXT J
190   NEXT U
200   IF SA/2=INT(SA/2) THEN PA=PA+1
210   IF SB/3=INT(SB/3) THEN PB=PB+1
220   IF X/1200=INT(X/1200) THEN PRINT X,PA,PB,PA/X,PB/X
239 NEXT X
```

Kommentar:

100: Vorbereitung zur Zufallszahlenerzeugung für S Spiele. In den Variablen PA, PB werden die von A bzw. B in diesen Spielen erreichten Punkte gezählt. Das Feld Z gibt die Zahlen auf den Kugeln an: Die J-te Kugel trägt die Zahl Z(J).

110: Ausgabe einer Kopfzeile für die Ergebnis-Tabelle. Diese soll auflisten: Die Anzahl der bisher gespielten Spiele, die darin für A und B erreichten Punkte sowie deren relative Häufigkeiten (Punktzahlen dividiert durch Anzahl der Spiele).

120-230: In dieser Schleife wird je ein Spiel simuliert und ausgewertet. Die Variable X zählt die Spiele.

130: In den Variablen SA, SB werden die Zahlen auf den von A bzw. von B gezogenen Kugeln aufsummiert.

140-190: In dieser Schleife wird das Ziehen der Kugeln simuliert. Die Variable U gibt an, wieviele Kugeln jeweils vor dem Ziehen in der Urne sind.

150: Die N-te Kugel wird gezogen (N eine Zufallszahl mit $1 \leq N \leq U$), diese Kugel trägt die Zahl K.

160: Je nachdem, ob vor dem Ziehen eine gerade oder ungerade Zahl U von Kugeln in der Urne war, hat A bzw. B gezogen; dementsprechend wird K zu SA oder zu SB addiert.

170-180: Entscheidung, ob nach dem Ziehen die Kugeln, die nun jeweils als J-te (J = 1,...,U-1) gezählt werden, neu anzugebende Zahlen tragen: War die U-te Kugel gezogen worden (170), so ändert sich nichts an den Zahlen auf den verbleibenden U-1 Kugeln. Andernfalls aber (180) gilt für die Kugeln von der (N+1)-ten an: Jeweils die Beschriftung der früher als J-te gezählten Kugel tritt nun als Beschriftung der (J-l)-ten auf.

200-210: Die Punktzahlen für A bzw. B werden erhöht, falls das Spiel für A bzw. B eine durch 2 bzw. 3 teilbare Summe ergab.

220: Jeweils nach einer durch 1200 teilbaren Anzahl von Spielen werden die erreichten Punkte und relativen Häufigkeiten ausgegeben.

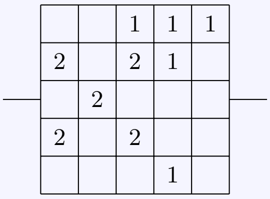
Anfangs- und Endzeilen im Beispiel einer Ergebnistabelle:

SPIELE	PUNKTE A	PUNKTE B	REL.A	REL.B
1200	596	420	.4966667	.35
2400	1195	806	.4979167	.3358334
3600	1803	1195	.5008334	.3319444
.... 22800	11440	7676	.5017544	.3366667
24000	12049	8060	.5020417	.3358334

Aus solchen Beispielen kann als Vermutung entnommen werden:

A kann einen Punktgewinn in einer Anzahl erwarten, deren Größenordnung die Hälfte aller Spiele ist; für B ist die entsprechend zu erwartende Größenordnung ein Drittel aller Spiele.

Aufgabe 4 - 321014



Wir betrachten ein Quadrat, das sich aus 25 kongruenten Teilquadraten zusammensetzt. Mit 5 verschiedenen Farben werden je 5 Teilquadrate gefärbt; dadurch entstehen 5 einfarbige Muster. Für jedes solche Muster kann man feststellen, ob es eine Symmetrieachse hat, die zugleich Symmetrieachse für das ganze Quadrat (ohne Berücksichtigung der Farben) ist. Eine solche Symmetrieachse eines Musters werde *zulässig* genannt.

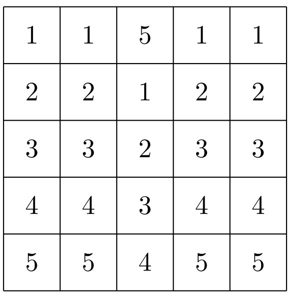
In der Abbildung beispielsweise hat das Muster der Farbe 1 keine *zulässige* Symmetrieachse; dagegen hat das Munter der Farbe 2 die angedeutete *zulässige* Symmetrieachse. (Seine drei anderen Symmetrieachsen sind nicht *zulässig*.)

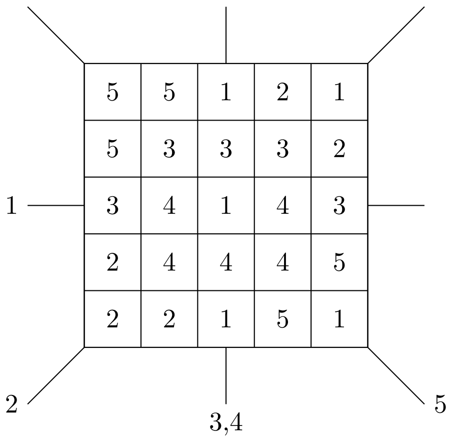
Ermitteln Sie, ob es möglich ist, eine Färbung anzugeben, bei der jedes der 5 Muster genau eine *zulässige* Symmetrieachse hat, und zwar so, dass

a) nur eine der Symmetrieachsen des ganzen Quadrates,
b) jede der vier Symmetrieachsen des ganzen Quadrates

unter den Symmetrieachsen der Muster vorkommt.

Wie in den zwei Abbildungen ersichtlich, sind Färbungen der beiden genannten Arten möglich.





Lösungen der I. Runde 1992 übernommen von [5]

7.34.2 II. Runde 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321021
Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl z, die genau vier Teiler t_1, t_2, t_3, t_4 mit $1 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < z$ hat!

Hat die natürliche Zahl z die Primfaktorzerlegung

$$z = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$$

wobei die p_i $(i = 1,2,...,n)$ verschiedene Primfaktoren sind und die a_i deren Häufigkeit in der Zerlegung, so ist die Anzahl der Teiler t von z (inkl. 1 und z selbst) gleich

$$t = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Da die gesuchte Zahl z 6 Teiler (inkl. 1 und z) haben soll, wird

$$6 = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Jeder Faktor $(a_i + 1)$ ist größer als 1, so dass nur das Produkt $6 = 3 \cdot 2$ möglich ist, d.h. z hat genau 2 Primteiler, von denen einer doppelt, der andere einfach auftritt, d.h.

$$z = p_1^2 \cdot p_2$$

Setzt man die kleinsten Primzahlen 2 und 3 für p_1 und p_2 ein, wird $z = 2^2 \cdot 3 = 12$. 12 ist die gesuchte Zahl. Ihre von 1 und z verschiedenen Teiler sind: 2, 3, 4 und 6.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 321022
An einem Kraftsportwettbewerb nehmen Robert, Stefan und Tilo teil. Robert schafft 20 Klimmzüge.
Stefan nimmt sich vor, mindestens 80% der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen;
Tilo will mindestens 60% der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen.
Gibt es eine kleinstmögliche Anzahl von Klimmzügen für Stefan und Tilo, so dass beide Vorhaben erfüllt werden?
Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese Anzahl!

Es seien s und t die Anzahlen der Klimmzüge von Stefan und Tilo. Dann soll also $s \geq \frac{4}{5} \cdot (20+t) = 16 + \frac{4}{5}t$ und $t \geq \frac{3}{5} \cdot (20 + s) = 12 + \frac{3}{5}s$ gelten.

Da keiner eine negative Anzahl an Klimmzügen durchführt, ist damit $s \geq 16$. Setzt man dies ein, erhält man $t \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 16 = 12 + \frac{48}{5}$, also, da t eine ganze Zahl ist, $t \geq 22$.

Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s \geq 16 + \frac{4}{5} \cdot 22 = 16 + \frac{88}{5}$, also $s \geq 34$. Einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung liefert $s \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 34$, also $s \geq 33$.
Einsetzen dieser besseren Abschätzung in die erste Ungleichung liefert $s \geq 16 + \frac{4}{5} \cdot 33$, also $s \geq 43$, einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung $t \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 43$, also $t \geq 38$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s \geq 16 + \frac{4}{5} \cdot 38$, also $s \geq 47$, einsetzen in die zweite $t \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 47$, alo $t \geq 41$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s \geq 16 + \frac{4}{5} \cdot 41$, also $s \geq 49$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 49$, also $t \geq 42$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s \geq 16 + \frac{4}{5} \cdot 42$, also $s \geq 50$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t \geq 12 + \frac{3}{5} \cdot 50 = 42$.

Damit erfüllen $s = 50$ und $t = 42$ als kleinste Werte beide Ungleichungen, sodass es auch einen kleinsten Wert $s + t = 92$ gibt, was (wegen $s \geq 50$ und $t \geq 42$) der kleinste solche Wert ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 321023
Gegeben seien n zueinander parallele Geraden sowie weitere n zu ihnen senkrechte, also untereinander ebenfalls parallele Geraden.
Damit entstehen n^2 Schnittpunkte (Gitterpunkte).
Klaus versucht, einen geschlossenen (d.h. zum Anfangspunkt zurückkehrenden) Streckenzug zu zeichnen.
Jede Strecke dieses Streckenzuges soll auf einer der gegebenen Geraden liegen, und jeder Gitterpunkt soll genau einmal von dem Streckenzug erreicht werden.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 4$ und für $n = 6$ der Versuch erfolgreich realisiert werden kann!
b) Beweisen Sie, dass der Versuch für $n = 9$ nicht erfolgreich realisiert werden kann!

Die Geraden einer jeden Richtung seien von 1 bis n durchnummeriert, sodass sich die Schnittpunkte als Paare (x,y) angeben lassen, wobei diese Bezeichnung für den Schnittpunkt der Gerade x der einen mit Gerade y der anderen Richtung stehe.

a) Ein Weg, der für gerade $n = 2k$ (also insbesondere für $n = 4$ und $n = 6$) die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, ist wie folgt gegeben:

$$(1{,}1) \to (1{,}n) \to (2{,}n) \to (2{,}2) \to (3{,}2) \to (3{,}n) \to (4{,}n) \to (4{,}2) \to \dots$$

$$\to (2i{,}2) \to (2i+1{,}2) \to (2i+1{,}n) \to (2i+2{,}n) \to \cdots \to (n{,}2) \to (n{,}1) \to (1{,}1)$$

Dabei stehe $P \to Q$ für die geradlinige Verbindung von P und Q. Insbesondere müssen P und Q genau eine Koordinate gemeinsam haben, damit diese Strecke auf einer der Geraden liegt.

b) Wir zeigen allgemein, dass für ungerade n (also insbesondere für $n = 9$) kein solcher Weg möglich ist:

Wir färben die Gitterpunkte schachbrettartig im Wechsel schwarz und weiß ein. Gäbe es einen geschlossenen Weg, der o.B.d.A. bei einem schwarzen Punkt beginnt, entlang der Gitterlinien jeden der geradzahlig vielen $n^2 - 1$ weiteren Gitterpunkte genau einmal besucht und dann direkt zum Ausgangspunkt zurückkehrt, dann würde auf diesem Weg aufgrund der ungeradzahlig vielen n^2 überwundenen Teilstrecken zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten auf diesem Weg insgesamt ungeradzahlig oft die Farbe wechseln, d.h., der Ziel-Gitterpunkt müsste die Farbe weiß haben.
Dies ist aber der Ausgangsgitterpunkt, der schwarz ist, was ein Widerspruch darstellt, sodass es einen solchen Hamilton-Kreis nicht geben kann, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 321024
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm mehr als 64 Kreise mit einem Durchmesser von je 1 cm so einzubeschreiben, dass sich je zwei Kreise nicht überschneiden und dass kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt!

Ja, dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Konstellation mit 68 solchen Kreisen an:

Dazu legen wir derart ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass eine seiner Ecken im Koordinatenursprung liegt, die von dieser Ecke ausgehenden Kanten auf den positiven Koordinatenachsen liegen und es die Kantenlänge 16 besitzt. (Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht als 5 mm.) Weiterhin sei $h := \frac{7}{4}$.

Wir wählen nun zwei Arten von Punkten aus:

$$M_1 := \{(1 + 2i; 1 + 2j \cdot h) | 0 \leq i \leq 7 \wedge 0 \leq j \leq 4\} \qquad \text{und}$$

$$M_2 := \{(2 + 2i; 1 + (2j + 1) \cdot h) | 0 \leq i \leq 6 \wedge 0 \leq j \leq 3\}$$

Dabei soll $M = M_1 \cup M_2$ die Menge der Mittelpunkte der ausgewählten Kreise sein. Zuerst stellen wir $|M_1| = 8 \cdot 5 = 40$ und $|M_2| = 7 \cdot 4 = 28$, also $|M| = 68$ fest, da die Punkte in M_1 ungerade und die in M_2 gerade x-Koordinaten haben, die beiden Mengen also disjunkt sind.

Weiterhin sind die x-Koordinaten aller Punkte in M mindestens 1 und höchstens $1 + 14 = 15$, gleiches gilt wegen $1 + 8 \cdot h = 1 + 14 = 15$ auch für die y-Koordinaten, sodass kein Kreis mit Radius 1 um einen beliebigen dieser Mittelpunkte Punkte außerhalb des Quadrats enthält.

Diese Mittelpunkte kann man sich hierbei in einzelnen Zeilen gleicher y-Koordinate aufgereiht vorstellen: Zuunterst eine Reihe von acht Mittelpunkten auf der Linie $y = 1$, dann eine zweite Reihe von sieben Mittelpunkten, die "mittig versetzt" gegenüber der ersten Reihe auf der Linie $y = 1 + h$ liegen, usw., immer entsprechend im Wechsel.

Zwei Mittelpunkte auf der gleichen Zeile haben offenbar den Abstand von mindestens 2, sodass sich die Kreise mit Radius 1 um sie nicht überschneiden.

Zwei benachbarte Mittelpunkte einer Zeile bilden mit dem "zwischen ihnen" liegenden Mittelpunkt einer benachbarten Zeile ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite der Länge 2 und Höhe auf diese der Länge h. Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\sqrt{1 + h^2} = \sqrt{1 + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{65}{16}} > \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$, sodass sich auch hier keine zwei Kreise mit Radius 1 um diese Mittelpunkte überschneiden. Gleiches gilt erst recht für weiter entfernt liegende Mittelpunkte.

Damit überschneiden sich keine zwei Kreise mit Radius 1 um die in M angegebenen Mittelpunkte und auch besitzt keiner dieser 68 Kreise Punkte außerhalb des Quadrats, sodass diese Anordnung der mehr als 64 Kreise die Aussage der Aufgabenstellung erfüllt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.34.3 III. Runde 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321031
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die gilt:

$$19 < x^2 + y^2 < 93$$

Wegen $93 > x^2 + y^2 \geq x^2$ ist $9 \geq x^2$. Wir geben nun für jedes $0 \leq x \leq 9$ die Werte für y an, die diese Ungleichungskette erfüllen:

- $x = 0$, also $19 < y^2 < 93$, d.h. $5 \leq |y| \leq 9$ ($2 \cdot 5 = 10$ Lösungen)
- $x = 1$, also $18 < y^2 < 92$, d.h. $5 \leq |y| \leq 9$ (10 Lösungen)
- $x = 2$, also $15 < y^2 < 89$, d.h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 3$, also $10 < y^2 < 84$, d.h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 4$, also $3 < y^2 < 77$, d.h. $3 \leq |y| \leq 8$ (12 Lösungen)
- $x = 5$, also $y^2 < 68$, d.h. $|y| \leq 8$ (17 Lösungen)
- $x = 6$, also $y^2 < 57$, d.h. $|y| \leq 7$ (15 Lösungen)
- $x = 7$, also $y^2 < 44$, d.h. $|y| \leq 6$ (13 Lösungen)
- $x = 8$, also $y^2 < 29$, d.h. $|y| \leq 5$ (11 Lösungen) und
- $x = 9$, also $y^2 < 12$, d.h. $|y| \leq 3$ (7 Lösungen).

Damit gibt es insgesamt $10+10+12+12+12+17+15+13+11+7 = 119$ verschiedene Lösungspaare, die diese Ungleichungskette erfüllen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 321032
Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.
a) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
b) Beweisen Sie, dass ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

a) Es sei q die Seitenlänge des Quadrats, a und b die beiden Seitenlängen des zu konstruierenden Rechtecks. Dann ist $a \cdot b = q^2$ der gemeinsame Flächeninhalt und $2(a + b) = n \cdot (4q)$ der Umfang des Rechtecks. Es gilt also $a + b = 2nq$ bzw. $b = 2nq - a$.
Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$q^2 = a \cdot (2nq - a) = 2nq \cdot a - a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 - 2nq \cdot a + q^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in a hat die Lösungen

$$nq \pm \sqrt{n^2q^2 - q^2} = (n \pm \sqrt{n^2 - 1})q$$

Wegen

$$b = \frac{q^2}{a} = q \cdot \frac{1}{n \pm \sqrt{n^2 - 1}} = q \cdot \frac{n \mp \sqrt{n^2 - 1}}{n^2 - (n^2 - 1)} = (n \mp \sqrt{n^2 - 1})q$$

stimmen die beiden Rechtecke aber bis auf die Reihenfolge der Kantenlängen a und b überein.

b) In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge nq und dessen eine Kathete die Länge q besitzt, hat nach dem Satz des Pythagoras die zweite Kathete die Länge $\sqrt{n^2q^2 - q^2} = \sqrt{n^2 - 1} \cdot q$.

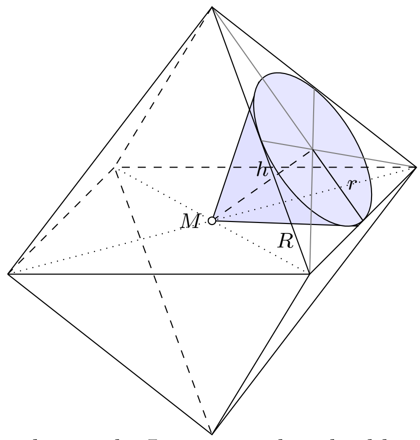
Es genügt also ein solches Dreieck zu konstruieren und dann einerseits die Differenz und andererseits die Summe der beiden Kathetenlängen für a und b durch antragen zu erhalten.

Ein solches rechtwinkliges Dreieck erhält man mit dem Satz des Thales: Man zeichne eine Strecke AB der Länge nq (ggf. durch n-faches Abtragen einer Strecke der Länge q auf einer Geraden), halbiere sie und zeichne den Kreis um den Mittelpunkt durch die Endpunkte der Strecke.

Dann gilt für jeden Punkt $C \notin \{A,B\}$ auf dem Kreis, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C ist. Sei nun C einer der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreis um A mit Radius q. Dann ist $\triangle ABC$ ein solches gesuchtes Dreieck, sodass sich die Kantenlängen a und b des gesuchten Rechtecks daraus konstruieren lassen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 321033
Zeigen Sie, dass es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, dass jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!
Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundradius r und die Höhe h solcher Kegel!



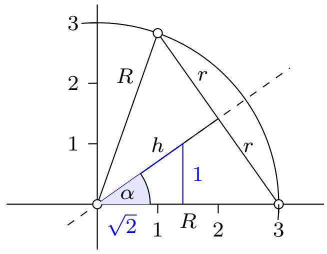
Bildet man in jeder der acht Seitenflächen eines regulären Oktaeders (diese Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke) den Inkreis, so hat jeder dieser acht Kreise mit genau drei anderen je genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich jeweils den Berührungspunkt auf einer gemeinsamen Kante zweier Seitenflächen (diese Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der Kanten).

Verbindet man den Mittelpunkt M des Oktaeders mit den Kreisen, so erhält man acht Kreiskegel, die die gewünschten Berührungen aufweisen.
Sie sind gerade Kegel, da das Lot von M auf je eine Seitenfläche deren Inkreismittelpunkt als Fußpunkt hat (siehe Abbildung).
Da diese acht Lote einander gleichlang sind, sind die acht Kegel (ebenso wie ihre Grundkreise) einander kongruent. Alle ihre Mantellinien sind also von gleicher Länge; daher sind die Kegel einer Kugel so einbeschrieben, dass (zum Einbeschreiben in diese Kugel) ihre Höhe möglichst groß ist.

Die Länge dieser Mantellinien, also der Kugelradius R, ist in dem von vier Oktaederkanten gebildeten Quadrat der Abstand des Quadratmittelpunktes von einem Kantenmittelpunkt, also beträgt die Kantenlänge $2R$.
Der Grundkreisradius r der Kegel ist (nach dem Satz über den Schwerpunkt auf den Seitenhalbierenden) ein Drittel der Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $2R$, also $r = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{3}$.
Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich als Höhenlänge der Kegel

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{6}$$

Lösung übernommen von [5]



2.Lösung:
Die Kegel können so angeordnet werden, dass ihre Spitze sich im Mittelpunkt der Kugel befindet und jeder Kegel einen Oktanten belegt. Wenn er die Grenzflächen der Oktanten berührt, berührt er wie gefordert drei andere Kegel.
Legt man die Kugel in den Ursprung eines 3D-Koordinatensystems, liegt die Kegelachse auf der Raumdiagonalen. Legt man eine Schnittebene durch die z-Achse und die Kegelachse, ergibt sich das linke Bild.
Ein Punkt auf der Raumdiagonalen ist $(1;1;1)$. Für den Winkel α ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dies ist gleichzeitig auch das Verhältnis von r zu h, also:

$$h = \sqrt{2}\, r$$

Außerdem gilt

$$R^2 = r^2 + h^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} R = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\, R \qquad ; \qquad h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}\, R$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 321034 = 300935
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y, z, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

O.B.d.A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)
positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 321035
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl k mit $k > 1$ die folgende Aussage gilt:
Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl 11...1 eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

Es sei z die aus n Ziffern 1 bestehende Zahl. Dann ist $z = \frac{k^n - 1}{k-1}$. Wir nehmen nun indirekt an, dass z eine Primzahl, aber n keine ist und führen dies zum Widerspruch:

Da z eine Primzahl ist, ist insbesondere $z > 1$, also $n > 1$. Da n keine Primzahl ist, existieren dann zwei natürliche Zahlen $a{,}b > 1$ mit $n = a \cdot b$. Insbesondere ist dann $k^a - 1$ ein Teiler von $(k^a)^b - 1 = k^{ab} - 1 = k^n - 1$, wie man leicht durch Berechnen der geometrischen Summe

$$\sum_{i=0}^{b-1} (k^a)^i = \frac{k^{ab} - 1}{k^a - 1}$$

oder Polynomdivision bestätigt. Damit existiert eine natürliche Zahl q mit $k^n - 1 = q \cdot (k^a - 1)$. Wegen $1 < a < n$ ist auch $k - 1 < k^a - 1 < k^n - 1$, also auch $1 < q < k^n - 1$.

Es ist analog $k-1|k^a-1$, sodass eine natürliche Zahl $r>1$ (wegen $k^a-1>k-1$) mit $k^a-1=r\cdot(k-1)$ gibt.

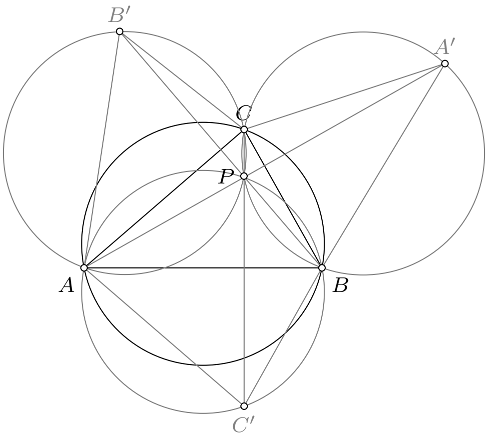
Zusammen ist also

$$z=\frac{k^n-1}{k-1}=\frac{(k^a-1)\cdot q}{k-1}=\frac{(r\cdot(k-1))\cdot q}{k-1}=r\cdot q$$

wobei q und r beides natürliche Zahlen größer als 1 sind. Damit ist aber z entgegen der Annahme keine Primzahl, sodass wir den gewünschten Widerspruch erhalten und n also auch eine Primzahl gewesen sein muss, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 321036
Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch die Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!



Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis k. Wir spiegeln jeden der drei Eckpunkte A, B und C an ihrer gegenüberliegenden Dreieckseite, also A an BC, B an AC und C an AB. Die Bildpunkte nennen wir A', B' und C'.

Nun bilden wir die Umkreise der Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' und bezeichnen diese mit k_1, k_2 und k_3. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in zwei Punkten, der eine dieser Punkte ist C und der anderen Punkt heiße P.

Wir zeigen, dass P auch auf dem Umkreis k_3 liegt. Da $A'CPB$ ein Sehnenviereck ist, gilt

$$\angle BPC+\angle BAC=\angle BPC+\angle CA'B=180°$$

Analog ist auch $B'APC$ ein Sehnenviereck ist, somit folgt

$$\angle CPA+\angle CBA=\angle CPA+\angle AB'C=180°$$

Nun ist aber auch $C'BPA$ ein Sehnenviereck, da mit der Innenwinkelsumme im Dreieck

$$\angle APB+\angle BC'A=180°+180°-(\angle BAC+\angle CBA+\angle ACB)=180°$$

folgt. Da $C'BPA$ ein Sehnenviereck ist, liegt P auch auf k_3.

Wenn wir k_1 an der Seite BC spiegeln, erhalten wir den Kreis k, da A' auf A, B auf B und C auf C abgebildet werden. Weiter wird bei dieser Spiegelung auch P auf einen Punkt P_1 auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_1 liegt.

Analog können wir k_2 an der Seite AC und k_3 an der Seite AB spiegeln, dann erhalten wir den Kreis k, da bei der Spiegelung an AC die Punkte A auf A, B' auf B und C auf C abgebildet werden und bei der Spiegelung an AB die Punkte A auf A, B auf B und C auf C' abgebildet werden. Weiter wird bei diesen Spiegelung auch P auf einen Punkt auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_2 und auf k_3 liegt.

Aufgabe gelöst von ochen

7.34.4 IV. Runde 1992, Klasse 10

Aufgabe 1 - 321041
Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 3 ist ein solcher. Die Koordinaten aller Punkte auf diesem erfüllen die Gleichung $x^2+y^2=3$. Ist x rational, so gibt es teilerfremde ganze Zahlen p und $q \neq 0$ mit $x=\frac{p}{q}$.
Also gilt $y^2 = 3-\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{3q^2-p^2}{q^2}$ bzw. $y=\pm\frac{\sqrt{3q^2-p^2}}{q}$.
Wäre $y \in \mathbb{Q}$, so also auch $\sqrt{3q^2-p^2}$. Da $3q^2-p^2$ eine ganze Zahl ist, müsste dann auch $\sqrt{3q^2-p^2}$ eine ganze Zahl n sein, also $3q^2-p^2=n^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ gelten.
Quadratzahlen lassen bei der Teilung durch 4 entweder den Rest 1 (bei ungerader Basis) oder 0 (bei gerader Basis). Damit lässt $3q^2-p^2$ bei der Teilung durch 4 den Rest 0 (wenn p und q beide gerade sind), 3 ((q ungerade, p gerade) oder (q gerade, p ungerade)) oder 2 (beide ungerade).

Da aber auch n eine Quadratzahl ist und den Rest 0 oder 1 bei der Teilung durch 4 lässt, müsste der erste Fall eintreten, was $ggT(p,q) \geq 2$ im Gegensatz zur geforderten Teilerfremdheit nach sich zieht, also einen Widerspruch, sodass es keinen rationalen Punkt auf dem Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung gibt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 321042
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$$p_n(x) = (x^2+x+1)^n$$

auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so dass in dem (so geschriebenen) Polynom jede Potenz von x genau einen Koeffizienten erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind mindestens drei Koeffizienten ungerade.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind genau drei Koeffizienten ungerade.

a) Die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} in dieser Darstellung sind 1, da wir das Monom x^0 nur bekommen, wenn wir n mal x^0 miteinander multiplizieren und wir das Monom x^{2n} nur bekommen, wenn wir n mal x^2 miteinander multiplizieren.
Weiter ist die Summe aller Koeffizienten $p_n(1)=3^n$ und somit ungerade. Wären die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} die einzigen ungeraden, wäre aber die Summe aller Koeffizienten gerade. Somit muss es einen dritten ungeraden Koeffizienten geben.

b) Wir zeigen erst folgendes Lemma.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $n=2^m$. Weiter seien $0<k<n$ beliebig, so ist $\binom{n}{k}$ gerade.

Beweis: Sei s die größte natürliche Zahl, sodass k durch 2^s teilbar ist. Insbesondere ist $s<m$, also folgt

$$2^{-s}\cdot k\binom{n}{k} = 2^{-s}\cdot n\binom{n-1}{k-1} = 2^{m-s}\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Da die rechte Seite gerade ist und $2^{-s}k$ ungerade ist, muss $\binom{n}{k}$ gerade sein. $\square$

Sei m eine beliebige natürliche Zahl und $n=2^m$. Dann betrachten wir das Polynom p_n mit $n=2^m$.
Wir wenden nun den binomischen Lehrsatz an

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l x^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^l x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^{2(n-k)+l}$$

Nach obigem Lemma ist $\binom{n}{k}\binom{k}{l}$ gerade, falls $k,l \notin \{0,n\}$ ist. Falls $k,l \in \{0,n\}$ ist, handelt es sich bei $x^{2(n-k)+l}$ um eines der Monome x^0,x^n,x^{2n}.
Andernfalls werden nur Monome mit geradzahligen Koeffizienten summiert. Somit sind x^0,x^n,x^{2n} die einzigen Monome mit ungeraden Koeffizienten, falls n eine Zweierpotenz ist. Da es unendlich viele Zweierpotenzen gibt, ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe gelöst von ochen

Alternativlösung für b):
Für alle $f,g \in \mathbb{F}_2[x]$ gilt, dass $(f+g)^2 = f^2 + g^2$. Daher gilt im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$

$$p_{2^m}(x) = (x^2+x+1)^{2^m} = (x^2)^{2^m} + x^{2^m} + 1^{2^m} = x^{2^{m+1}} + x^{2^m} + 1.$$

Also sind für $n = 2^m$ in $p_n(x)$ genau die Koeffizienten von x^{2n},x^n,x^0 ungerade.

Lösung von Nuramon

Aufgabe 3A - 321043A
Zeigen Sie, dass es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, das heißt: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; ...; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.
(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:
(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2...P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1P_n...P_{k+2}P_{k+1}$ über.
(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Streckenzug $P_{k+1}P_k...P_2P_1$) abgebildet.
Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind.
Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. Freilich können Sie genaues Zeichnen auch durch - dann lückenlos zu gebende - Konstruktionsbeschreibung ersetzen.

Zunächst ein paar grundsätzliche Überlegungen:

Zu Punkt (2.1): Der Streckenzug $P_1P_2...P_{k-1}P_k$ umfasst k Punkte, der Streckenzug $P_1P_nP_{n-1}...P_{k+2}P_{k+1}$ umfasst $n-k+1$ Punkte. Da durch die Drehung der eine auf den anderen Streckenzug abgebildet werden soll, muss die Anzahl der Punkte gleich sein. Daher gilt $k = n-k+1$ beziehungsweise $n = 2k-1$. Das Polygon hat daher eine ungerade Anzahl an Punkten.

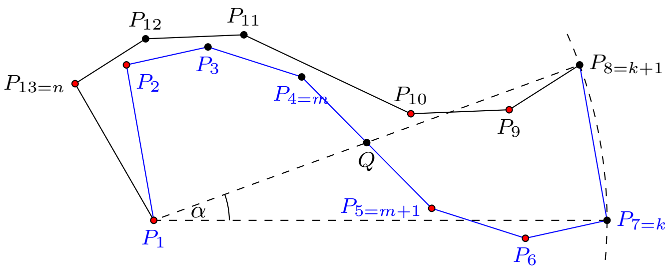
Zu Punkt (2.2): Da der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ durch Punktspiegelung auf sich selbst abgebildet wird, kann k nicht gerade sein.

Beweis:
Angenommen, $k = 2m$ sei gerade. Dann hat der zu spiegelnde Streckenzug $k+1 = 2m+1$ Punkte. Das heißt, der Punkt P_{m+1} müsste dem Punkt Q entsprechen, an dem gespiegelt wird, weil er dem "mittleren" Punkt in der Reihenfolge entspricht und er daher auf sich selbst abgebildet werden muss. Wenn dann aber P_m an P_{m+1} gespiegelt wird, um P_{m+2} zu ergeben, dann liegen P_m, P_{m+1} und P_{m+2} auf einer Geraden und P_{m+1} wäre kein Eckpunkt.

Somit ist k ungerade, also $k = 2m-1$ mit $m > 1$. Nun wird P_1 auf P_{2m} abgebildet, und P_m auf P_{m+1}. Der Spiegelpunkt Q ist somit die Mitte der Strecke P_mP_{m+1} als auch der Strecke P_1P_{k+1}.

Aus $k = 2m-1$ folgt außerdem $n = 4m-3$. Nachfolgend eine Zeichnung zur Erläuterung der Konstruktion. In diesem Beispiel wurde $m = 4$ gewählt. Die rot dargestellten Punkte P_3 und P_4 sind von den 13 Punkten die einzigen, die man frei wählen kann bei Vorgabe eines Drehwinkels α, alle anderen ergeben sich aus einer Konstruktionsvorschrift.

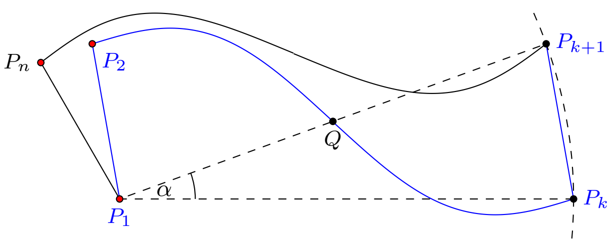
Da hier $m = 4$ gewählt wurde, ist $k = 7$ und $n = 13$. Vorgegeben werden o.B.d.A. die Punkte P_1 und P_k sowie der Drehwinkel $\alpha = 20°$.



Konstruktionsschritte:

1. P_8 ergibt sich wegen (2.1) durch die Drehung von P_7 um den Winkel α um P_1.
2. Q ist der Mittelpunkt der Strecke P_1P_8, wie in den Vorüberlegungen festgehalten.
3. Spiegelung von P_7 an Q ergibt P_2. Das Viereck $P_1P_7P_8P_2$ ist daher ein Parallelogramm, woraus sich zwangsläufig die S-Form des Streckenzuges $P_2...P_7$ ergibt.
4. Punkte P_3 und P_4 können relativ frei gewählt werden, Punkte P_5 und P_6 ergeben sich durch Spiegelung an Q. Wichtig ist, dass die Streckenlängen P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 und P_1Q streng monoton ansteigen. Eine Verkleinerung des Radius an irgendeinem Punkt würde ein ”Zacken” nach innen bedeuten, so dass das schwarze Polygon unweigerlich das blaue Polygon kreuzen würde, was laut Aufgabenstellung nicht sein darf.
5. Die Punkte P_9 bis P_{13} entstehen durch Drehung der Punkte P_2 bis P_6 um den Winkel α am Punkt P_1. Der blau hervorgehobene Streckenzug ist derjenige, der durch Punktspiegelung an Q auf sich selbst abgebildet wird.

Anmerkung:



Man kann zwischen P_2 und Q natürlich beliebig viele Punkte einfügen.
Solange diese nicht ein relativ enges Band verlassen, ist es möglich, dass umlaufend der Abstand zu P_1 nicht streng monoton wächst. Je größer der Winkel wird, um so kleiner wird diese Bandbreite. Bei unendlich vielen Punkten kann der Polygonzug zu einer Kurve werden. Die dargestellte Kurve ist eine Spirale mit linear wachsendem Abstand zu P_1, wodurch sich ein konstanter Abstand zwischen der schwarzen und der blauen Kurve ergibt. Wenn dieser auf null zusammenschmilzt, ist der maximale Drehwinkel erreicht. Die Kurve ist dann nur ein Kreis (quasi eine Spirale mit Steigung null), und das tritt ein, wenn $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1Q}$ ist. Dann gilt

$$\sin\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{P_1Q}}{2\overline{P_1Q}} = \frac{1}{4} \qquad ; \qquad \alpha_{max} = 2\arcsin\frac{1}{4} \approx 28{,}955^\circ$$

Der Abstand zwischen den Kurven (radial von P_1 aus betrachtet) ist

$$\Delta(\alpha) = \frac{\alpha(1-4\sin\frac{\alpha}{2})}{\pi-\alpha}\overline{P_1P_k}$$

Leitet man das nach α ab, um den maximal möglichen Abstand zwischen den Kurven zu bestimmen, erhält man eine transzendente Gleichung für den optimalen Winkel:

$$\pi(1-4\sin\tfrac{\alpha}{2}) - 2\alpha(\pi-\alpha)\cos\tfrac{\alpha}{2} = 0$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden, man erhält $\alpha_{opt} \approx 15{,}032^\circ$.
Selbst bei diesem optimalen Drehwinkel, der größtmöglichen Platz zwischen den beiden Kurven erzeugt, ist der Abstand $\Delta(\alpha)$ nur etwa ein Dreiundzwanzigstel der Streckenlänge P_1P_k.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 321043B
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$

durch das Polynom

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Es ist

$$f(x) - g(x) \cdot (x^2 + ax) = (x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2) - (x^4 + ax^3 + bx^2 + ax^3 + a^2x^2 + abx) =$$

$$= (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 \qquad \text{und}$$

$$g(x) \cdot (2 - b - a^2) = (2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)$$

also mit $h(x) := x^2 + ax + 2 - b - a^2$:

$$f(x) - g(x) \cdot h(x) = (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 - ((2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)) =$$

$$= (1 - ab - 2a + ab + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b = (1 - 2a + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b$$

Damit für kein x ein Rest bleibt, muss sowohl $1 - 2a + a^3 = 0$ also auch $2 - 2b + b^2 + a^2b = 0$ gelten.

Betrachten wir zuerst die Gleichung $1 - 2a + a^3 = 0$. Diese hat die Lösung $a_1 = 1$, sodass wir die Gleichung durch $a - 1$ teilen können und erhalten $0 = a^2 + a - 1$, was die weiteren Lösungen $a_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$ besitzt. Also ist die einzige ganzzahlige Lösung $a = 1$.

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so muss $2 - 2b + b^2 + b = 0$ bzw. $(-2 + b)(1 + b) = 0$, also $b \in \{-1,2\}$ gelten.

Demnach gibt es zwei ganzzahlige Paare $(a; b)$, sodass die Polynomdivision von f durch g keinen Rest lässt, nämlich $(1; -1)$ und $(1; 2)$. Die Probe bestätigt diese Lösungen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 321044
Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahl 2^n für alle natürlichen Zahlen n aus $\{10, 11, 12, ..., 108, 109\}$ fest:
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^10 = 1024$ auftritt.
Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt.
Nun wird folgende Frage gestellt:
(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$) zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?
Beweisen Sie, dass die Frage (**) mit "Nein" zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne dass man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n ($n \in \{11, 12, ..., 108, 109\}$) wieder berechnen müsste!

Angenommen, es gäbe zwei Zahlen $m > n$ mit $m,n \in \{11,11,12,\dots,108,109\}$, für die die beiden Zweierpotenzen 2^m und 2^n in den letzten drei Stellen übereinstimmen würden.

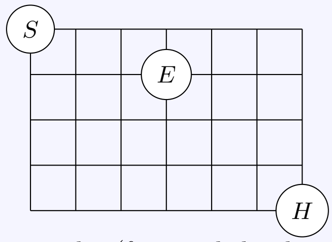
Dann wäre $2^m - 2^n = 2^n \cdot (2^{m-n} - 1)$ durch $1000 = 2^3 \cdot 125$ teilbar.
Da 2^n und 125 teilerfremd sind, wäre damit $2^{m-n} - 1$ durch 125 teilbar, also $2^{10} \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{m-n+10} - 2^{10}$ durch 1000 teilbar, sodass die beiden Zweierpotenzen 2^{10} und 2^{m-n+10} die gleichen letzten drei Stellen 024 besitzen.

Wegen $10 < n < m \leq 109$ ist $11 \leq m-n+10 \leq 109$, sodass also doch eine der betrachteten Zweierpotenzen auf die Stellen 024 hätte enden müssen, im Widerspruch zu (*). Also gibt es in diesem Bereich keine zwei Zweierpotenzen mit gleichen letzten drei Stellen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 321045

In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar.
Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.
Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis.



Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus:
Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.
a) Er erklärt dazu: "Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E."
Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: "Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen."
Trifft das zu?

a) Um auf einem möglichst kurzen Weg nach Hause zu kommen, muss er – in beliebiger Reihenfolge – 6 Wegstücke nach rechts und 4 nach unten zurücklegen. Dafür gibt es $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$ Möglichkeiten, sodass Robert genau so viele Wege prinzipiell zur Verfügung hat.

Bei E kommt er nur genau dann vorbei, wenn unter den ersten vier Wegstücken genau eines nach unten dabei war. Dafür gibt es $\binom{4}{1} = 4$ mögliche Wege von S nach E. Um nach dem Eiskauf noch nach Hause zu kommen, müssen weitere 3 Wegstücke nach rechts und 3 nach unten zurückgelegt werden, wofür es $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ Möglichkeiten gibt, sodass genau $4\cdot 20 = 80 > 70 = \frac{1}{3}\cdot 210$ möglichst kurze Wege von S nach H über E führen. Robert hat also mit seiner Aussage recht.

b) Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Robert durch Zufallsentscheidungen von S nach E gelangt, genügt es, die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Wege von S nach E zu bestimmen und diese zu addieren.

Jeder dieser Wege besitzt eine Länge von 4 und tatsächlich ist sowohl zu Beginn als auch an jedem Zwischenpunkt eine Entscheidung zu treffen, da an jeder dieser Stelle zwei mögliche Fortsetzungen für kürzeste Wege nach H existieren. Also hat jeder dieser Wege eine Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, sodass Robert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ in E vorbeikommen dürfte. Roberts Mutter hat also mit ihrer Aussage auch recht.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 321046

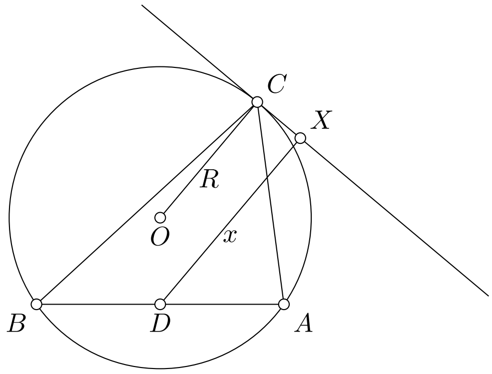
Man beweise:
Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

Es seien x,y,z die Längen der erwähnten Lote. Für den Umkreisradius R des Dreiecks ABC gilt bekanntlich $R = \frac{abc}{4F}$. Die zu zeigende Behauptung ist daher äquivalent zu

$$x + y + z = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

Wir betrachten ein Koordinatensystem, bei dem der Umkreismittelpunkt O von ABC im Ursprung liegt. Auf diese Weise haben die Ortsvektoren A,B,C alle die Länge R. Es sei $D = \frac{1}{2}(A + B)$ der Mittelpunkt von AB. Schließlich sei X der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch C verlaufende Tangente an den Umkreis von ABC.



Die Strecken CO und XD sind parallel und haben die gleiche Orientierung. Daher gibt es ein $\lambda \geq 0$, so dass $X - D = \lambda C$, also $X = \lambda C + \frac{1}{2}(A + B)$ gilt.
Außerdem steht CX senkrecht auf CO. Somit gilt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X - C, C\rangle \\ &= \langle (\lambda - 1)C + \frac{1}{2}(A + B), C\rangle \\ &= (\lambda - 1)\langle C,C\rangle + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \\ &= (\lambda - 1)R^2 + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = 1 - \frac{1}{2R^2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle)$. Somit folgt

$$x = |X - D| = \lambda R = R - \frac{1}{2R}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle).$$

Analog erhalten wir für die Längen der anderen beiden Lote

$$\begin{aligned} y &= R - \frac{1}{2R}(\langle B,A\rangle + \langle C,A\rangle), \\ z &= R - \frac{1}{2R}(\langle C,B\rangle + \langle A,B\rangle). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + y + z = 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} &= \frac{1}{2R}(|A - B|^2 + |B - C|^2 + |C - A|^2) \\ &= \frac{1}{2R}(|A|^2 + |B|^2 - 2\langle A,B\rangle + |B|^2 + |C|^2 - 2\langle B,C\rangle + |C|^2 + |A|^2 - 2\langle C,A\rangle) \\ &= 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

7.35 XXXIII. Olympiade 1993

7.35.1 I. Runde 1993, Klasse 10

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 331011 = 330911
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 2 - 331012 = 330912
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

Aufgabe 3 - 331013 = 330913
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z = \sqrt{t + \sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

I Für $t = 0$ ist $z = \sqrt{0 + \sqrt{0}} = 0$, also eine rationale Zahl.

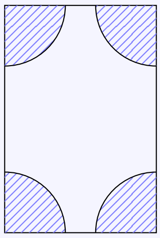
II Angenommen, für eine ganze Zahl $t > 0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2 = t + \sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t} = z^2 - t$ rationale wären.

Also wäre $t = m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z = \sqrt{m^2 + m}$, woraus ebenso folgt, dass auch $m^2 + m$ eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d.h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

Aufgabe 4 - 331014 = 330914



Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechteckseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, daß genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o.B.d.A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \qquad (1)$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt

$$0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also

$$ab = 2\pi \cdot r^2 \qquad (2)$$

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit

$$1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

II. Wenn $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen $a,b, > 0$ mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

Aufgabe 5 - 331015 = 330915
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

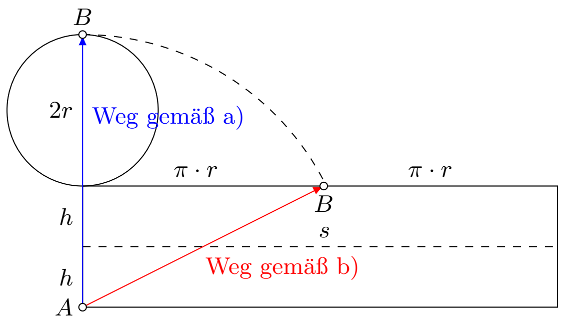
a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$4^2 + 8hr + 4r^2 = 4h^2 + \pi^2 r^2$$
$$8h = (\pi^2 - 4) \cdot r$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad (\approx 0{,}7337)$$

Aufgabe 6 - 331016 = 330916
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern ...024 endet! Begründen Sie, daß das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, daß für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel:

```
10 P = 10
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P
```

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 100o zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon$0 \leq z < 100ß$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem "Hinweis" erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine "Endlos-Schleife" auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines "Probelaufs mit Risiko" erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

Lösungen der I. Runde 1993 übernommen von [5]

7.35.2 II. Runde 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331021
Untersuchen Sie, ob es eine vierstellige Quadratzahl q mit den nachstehenden Eigenschaften (1), (2) gibt! Wenn es sie gibt, ermitteln Sie alle derartigen Quadratzahlen!
(1) Alle vier Ziffern von q sind kleiner als 7.
(2) Vergrößert man jede Ziffer von q um 3, so ist die entstehende vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Sei die in (2) entstehende Quadratzahl m^2 genannt und es gelte $n^2 = q$, wobei m und n positive ganze Zahlen seien.
Dann gilt $m^2 = n^2 + 3333$ bzw. $(m-n)(m+n) = m^2 - n^2 = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$. Da m^2 und n^2 vierstellig sind, gilt $30 < n < m < 100$, also $60 < m+n < 200$, sodass $m+n$ als Teiler von $3 \cdot 11 \cdot 101$ nur die Werte $3 \cdot 11 = 33$ und 101 annehmen kann.
Im ersten Fall wäre aber $m - n = 101 > m + n$, was ein Widerspruch zu $n > 0$ darstellt. Also ist $m + n = 101$ und $m - n = 33$, sodass $m = 67$ und $n = 34$ folgt.
Tatsächlich ist $q^2 = 34^2 = 1156$ und $m^2 = 67^2 = 4489 = 1156 + 3333$ und es werden auch alle Ziffernvorgaben erfüllt, sodass 1156 die einzige vierstellige Quadratzahl q ist, die (1) und (2) erfüllt.

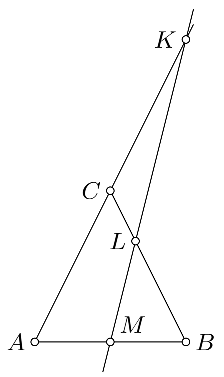
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 331022
Man beweise, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die $121 \cdot n - 3$ das Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wäre.

Wir nehmen an, es gäbe eine natürliche Zahl m, sodass $121 \cdot n - 3 = m \cdot (m+1) = m^2 + m$ gilt.
Dann wäre $4 \cdot (121 \cdot n - 3) + 1 = 4 \cdot (m^2 + m) + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$ eine Quadratzahl. Es ist jedoch $4 \cdot (121 \cdot n - 3) + 1 = 4 \cdot 11^2 \cdot n - 11$ durch 11, aber nicht 11^2 teilbar, also keine Quadratzahl.
Damit war die Annahme der Existenz einer solchen Zahl m falsch und die Behauptung ist bewiesen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 331023
Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ABC mit $AC = BC$ die folgende Aussage gilt!
Verlängert man die Strecke AC über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke CB zwischen C und B, dass $3 \cdot CL = CB$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von AB, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.



Es ist

$$\frac{KA}{CA} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{MB}{MA} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Menelaus folgt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Anmerkung: Satz von Menelaus
Schneidet eine beliebige Dreieckstransversale die Geraden durch die Ecken eines Dreiecks in drei von den Ecken verschiedenen Punkten, so hat das Produkt der Teilverhältnisse, das jeder dieser Punkte mit den auf seiner Geraden liegenden Eckpunkten bildet, den Wert -1.

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

Betrachtet man Streckenlängen und keine Teilverhältnisse so gilt:
Gegeben seien ein Dreieck ABC und eine Gerade, welche die Dreiecksseiten BC, CA und AB beziehungsweise ihre Verlängerungen in den Punkten X, Y und Z schneidet. Dann ist

$$AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot BZ \cdot CX$$

Umgekehrt kann man aus der Richtigkeit dieser Beziehung folgern, dass die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen.

Alternativlösung (für die zweite Runde):
Es sei S der Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABK$. Dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden KM und BC, wobei S diese im Verhältnis 2:1 teilt, sodass $|CS| = \frac{1}{3}|CB|$ gilt. Also ist $S = L$, sodass auch L auf der Geraden KM liegt, $\Box$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 331024
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, dass keine über den Rand hinausragt!

Dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Verteilung mit 66 Kugeln an. Dazu seien im Folgenden alle Längen in der Einheit cm gemessen, sodass wir nur die Maßzahlen angeben.

Entlang einer Kante der Grundfläche können vier Kugeln nebeneinander gelegt werden, sodass sich zwei benachbarte berühren und die beiden äußeren den jeweiligen Rand des Kastens. Von diesen Reihen können vier hintereinander auf die Grundfläche gelegt werden, sodass sich ein quadratisches Raster von 4×4 Kugeln ergibt. Deren Mittelpunkte liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche im Abstand $\frac{1}{2}$ zu ihr liegt.

Auf diese Schicht von 16 Kugeln kann nun eine zweite derart gelegt werden, dass jede Kugel der zweiten Schicht in die "Lücke" der von vier ein "2×2-Quadrat" bildenden Kugeln der ersten Schicht rollt und eine damit möglichst nah an der Grundfläche liegende Position (gemeint ist der Abstand des Mittelpunkts der Kugel von der Grundfläche) einnimmt.
Da sich aus dem 4×4-Raster der Kugeln der ersten Schicht genau $3 \cdot 3$ solche Lücken ergeben, können in die zweite Schicht insgesamt 9 Kugeln gelegt werden.

Die Mittelpunkte von vier Kugeln eines solchen "2×2-Quadrats" der ersten Schicht sowie der Mittelpunkt der in der zugehörigen Lücke liegenden Kugel der zweiten Schicht bilden eine quadratische Pyramide, deren Kanten allesamt die Länge 1 besitzen. Aus Symmetriegründen liegt der Fußpunkt des Lots der Spitze dieser Pyramide auf seine Grundfläche im Mittelpunkt des Quadrats, sodass sich ein rechtwinkliges Dreieck zwischen Eckpunkt des Quadrats, dessen Mittelpunkt und der Spitze der Pyramide ergibt und sich deshalb die Länge der Höhe h dieser Pyramide nach dem Satz des Pythagoras zu

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ergibt.

Auf gleiche Weise kann nun auf die zweite Schicht aus Symmetriegründen eine dritte Schicht, die identisch mit der ersten aufgebaut ist, gelegt werden, auf diese eine vierte Schicht, die identisch aufgebaut ist wie die zweite, und darauf eine fünfte Schicht, die wiederum identisch ist mit der ersten.

Nach Konstruktion sind auf diese Weise $16 + 9 + 16 + 9 + 16 = 66$ Kugeln in den Kasten gelegt worden, wobei keine von diesen über die Grund- oder eine der vier Seitenflächen des Kastens hinausragt. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Kugeln der fünften Schicht nicht über die Deckfläche des Kastens hinausragen.

Dazu stellen wir fest, dass nach Konstruktion die Mittelpunkt der Kugeln einer Schicht immer in einer Ebene liegen, die parallel ist zur Ebene der Kugeln der darunterliegenden Schicht, und diese beiden Ebenen einen Abstand von h besitzen.

Damit liegen die Mittelpunkte der Kugeln der fünften Schicht also in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche des Kastens liegt, und zu dieser einen Abstand von $\frac{1}{2} + 4 \cdot h = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{8} < \frac{1}{2} + 3 = 4 - \frac{1}{2}$ besitzt, also zur Deckfläche einen Abstand von mehr als $\frac{1}{2}$, sodass keine Kugel der fünften Schicht (und damit auch keine der darunterliegenden) über die Deckfläche hinausragt.

Damit ist es möglich, mehr als 64 Kugeln gemäß der Aufgabenstellung in dem Kasten unterzubringen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

7.35.3 III. Runde 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331031
Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Es ist

$$\frac{1}{1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2\cdot 1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} = \dots = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \dots + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} + \frac{1}{3\cdot 2^{1991}\cdot 1994} + \frac{1}{6\cdot 2^{1991}\cdot 1994}$$

□.

Alternativlösung:
Wir zeigen allgemeiner, dass sich jeder Stammbruch $\frac{1}{k}$ als Summe von $n \geq 3$ verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt. Die Behauptung folgt dann für $n = k = 1994$.

Sei zuerst $n = 3$. Dann gilt offenbar $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$, sodass sich jeder Stammbruch als Summe von drei verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt.

Lässt sich aber jeder Stammbruch als Summe von $n-1$ verschiedenen Stammbrüchen darstellen, so auch jeder als Summe von n verschiedenen:

Ist nämlich $\frac{1}{2k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$ eine Darstellung von $\frac{1}{2k}$ als Summe von $n-1 \geq 3$ paarweise verschiedener Stammbrüche, so sind deren Nenner alle größer als $2k$ und es gilt $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$, sodass auch jeder Stammbruch als Summe von genau n verschiedenen Stammbrüchen geschrieben werden kann.
Wiederholte Anwendung dieses Prozesses, der die Summandenanzahl jeweils um eins erhöht, zeigt diese Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 331032
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet: Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und statt dessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung. (Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)
Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!
Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

Es gibt solche Zahlen n, die kleinste unter ihnen ist

$$n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}.$$

Sei $1 \leq a < 10$ die erste Ziffer von n und $0 \leq b < 10^k$ die ganze Zahl, die aus den restlichen Ziffern von n gebildete Zahl. Weiter sei $k+1$ die Anzahl der Ziffern von n, so sind $n = 10^k a + b$ und $n' = 10b + a$. Aus $n' = n : 7$ folgt

$$10^k a + b = 7(10b + a)$$

Wenn wir alle Terme mit a auf die linke Seite und alle Terme mit b auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$(10^k - 7)a = 69b$$

Da die rechte Seite der Gleichung durch 23 teilbar ist, muss dies auch für die linke gelten. Da 23 eine Primzahl ist und $a < 10$ ist, muss $10^k - 7$ durch 23 teilbar sein. Tatsächlich ist $10^k - 7$ für $k = 21$ durch

23 teilbar und für $0 < k < 21$ nicht durch 23 teilbar. Somit ist gezeigt, dass $k \geq 21$ gelten muss. Mehr noch ist $10^{21} - 7$ sogar durch 69 teilbar.

Die Wahl von $a = 1$, $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ und $k = 21$ erfüllt unsere Eigenschaften, insbesondere $a \geq 1$ und $b < 10^{21}$. Weiterhin wird n für diese Wahl minimal, da $k \geq 21$ und $a \geq 1$ gelten muss und $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ für $k = 21$ und $a = 1$ gilt.

Sei r_k der Rest von 10^k bei der Division durch 23, so gilt

$$r_{k+1} = 10r_k \bmod 23, \quad r_0 = 1.$$

Wir ermitteln die Reste also rekursiv. Falls wir ein k mit $r_k = 7$ gefunden haben, hören wir auf. Falls wir kein solches k gefunden hätten, hören wir bei $k = 22$ auf, da dann auch keines mehr vorkommen kann.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 3 - 331033 = 330933
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, ...$ bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_1 2} = |DC| + (12-6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_1 2| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2+\sqrt{3})s^2 + (2+\sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2+\sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2+\sqrt{3}) \cdot (1-\cos\alpha)$, also

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2 \cdot (4-3)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Kosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 331034

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ \hline = & F & Ü & N & F \end{array}$$

Das nebenstehende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!
Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in der einen dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Da die fünf Summanden untereinander gleich sind, ist die Summe ein Vielfaches von 5, endet also auf die Ziffer 0 oder 5. Da F auch die führende Ziffer der Summe ist, folgt $F = 5$ und damit auch, dass S ungerade ist.

Da in der Tausenderstelle bei der Addition kein Übertrag entsteht, muss $5 \cdot E < 10$ gelten, woraus wegen $E \neq 0$ sofort $E = 1$ folgt. Da $5 \cdot E = F$ gilt, darf auch in der Hunderterstelle kein Übertrag entstehen. Also muss auch $5 \cdot I < 10$ und wegen $I \neq E = 1$ also $I = 0$ gelten. Also ist $Ü \geq 2$ der Übertrag, der aus der Zehnerstelle erhalten wird.

Ist u der Übertrag, der bei der Addition der Einerstellen entsteht, so it wegen $S \neq 1$ direkt $S \geq 3$, also $u \geq 1$. Andererseits ist $S \leq 9$, also $u \leq 4$.
An der Zehnerstelle gilt also $5 \cdot N + 4 \geq 5 \cdot N + u = N + 10 \cdot Ü \geq 20 + N$ bzw. $4 \cdot N \geq 16$, also $N \geq 4$.

Fall 1: $N = 4$. Dann ist $5 \cdot N = 20$, sodass $u = 4$ (daraus $S = 9$) und $Ü = 2$ folgt. Wir erhalten die Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ \hline = & 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Fall 2: $N = 6$ oder $N = 8$. Dann endet $5 \cdot N + u$ auf die Ziffer $u \leq 4 < N$, sodass sich hier keine Lösung ergibt.
Fall 3: $N = 5$. Dann wäre $N = F$, sodass hier keine Lösung existiert.
Fall 4: $N = 7$. Dann ist $5 \cdot N = 35$, also $u = 2$, woraus $S = 5 = F$ folgt, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Fall 5: $N = 9$. Dann ist $5 \cdot N = 45$, also $u = 4$, woraus der Widerspruch $S = 9 = N$ folgt.

Damit gibt es für das Kryptogramm nur die genau eine, bereits angegebene, Lösung.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 331035
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m und n, für die

$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$$

eine ganze Zahl ist.

Es ist

$$\begin{aligned} z &:= \frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{m^2-1}{m+1} + \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(m-1)(m+1)}{m+1} + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} = n-1+m-1+\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

genau dann eine ganze Zahl, wenn auch $z-(n-1)-(m-1) = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} =: x$ eine ganze Zahl ist. Offensichtlich ist $0 < x$ und wegen $m \geq 1$ sowie $n \geq 1$ gilt

$$0 < x = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

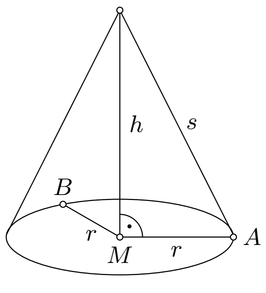
sodass $x = 1$ gelten muss, da es die einzige ganze Zahl in diesem Intervall $(0;1]$ ist. Also muss Gleichheit auch an den vorhergehenden Abschätzungen gegolten haben, d.h. $m = n = 1$.

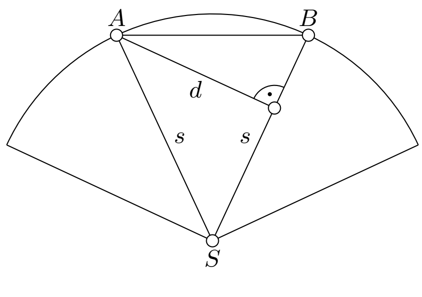
Tatsächlich ist für das Paar $(m;n) = (1;1)$ die Zahl $z = \frac{1^2}{1+1} + \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ eine ganze Zahl, sodass es genau ein Paar positiver ganzer Zahlen, nämlich das gerade betrachtete gibt, was der Bedingung der Aufgabenstellung genügt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 331036
Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r, die Spitze von K sei S, die Höhe $h = MS$ von K betrage $h = r \cdot \sqrt{3}$.
Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, dass der Winkel $\angle AMB$ die Größe $120°$ hat.
Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, dass sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.
Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r!

Die Hauptidee ist den Kegel abzuwickeln. Gefragt ist dann also einfach nach der kürzesten Entfernung von einem Punkt zur Strecke. Diese kürzeste Entfernung ist bekannterweise das Lot.





Gesucht ist also im Dreieck ASB die Höhe auf der Seite $\overline{AS}$ (im folgenden als d bezeichnet). Dazu berechnen wir nun zuerst die Länge der Seite $\overline{AB}$ durch Sinussatz im $\triangle ABM$. Da dieses Dreieck gleichschenklig ist, betragen die beiden unbekannten Winkel $30°$ (Basiswinkelsatz). Nun ist:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin(120°)} = \frac{r}{\sin(30°)} \iff |\overline{AB}| = \frac{\sin(120°)r}{\sin(30°)}$$

Nun ist $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ bekannt und

$$\sin(120°) = \sin(90° + 30°) = \sin(90°)\cos(30°) + \cos(90°)\sin(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Eingesetzt also:

$$|\overline{AB}| = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}r$$

Dann berechnen wir die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$, welches ja Mantellinien vom Körper sind. Nach Pythagoras gilt also:

$$s^2 = h^2 + r^2 = (\sqrt{3}r)^2 + r^2 = 4r^2$$

und somit $s = 2r$.
Sei nun $\alpha = \angle BSA$. Nach Kosinussatz gilt im Dreieck ASB nun:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}r)^2 &= (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos(\alpha)\\ 3r^2 &= 4r^2 + 4r^2 - 8r^2 \cdot \cos(\alpha)\\ \alpha &= \arccos\left(\frac{5}{8}\right)\end{aligned}$$

Nun gilt weiterhin $\sin(\alpha) = \frac{d}{2r}$. Eingesetzt und umgestellt erhalten wir also:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r$$

Dieses lässt sich noch vereinfachen. Es ist nach dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Dadurch erhalten wir also für $\sin(\arccos x)$ nun

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

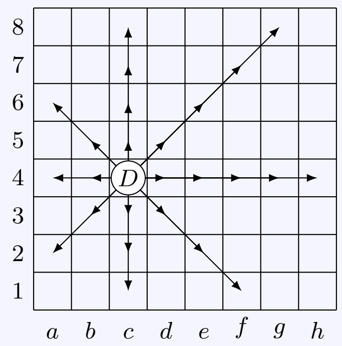
Somit:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} \cdot 2r = \sqrt{\frac{39}{64}} \cdot 2r = \frac{\sqrt{39}}{4}r$$

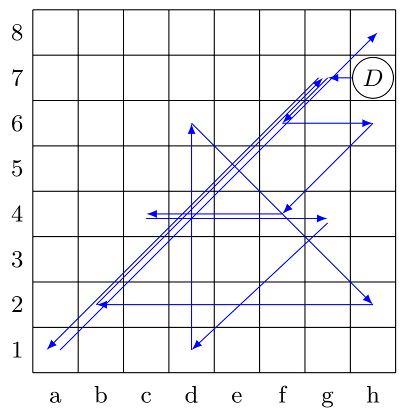
Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten sowie Kornkreis

7.35.4 IV. Runde 1993, Klasse 10

Aufgabe 1 - 331041 = 330941



Auf einem Schachbrett wird eine Figur Dame betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.
Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:
(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o.B.d.A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o.B.d.A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.

Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 331042
Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist.

Mit dem Ansatz $t = r^2$, reicht es zu zeigen, dass es unendlich viele Zahlen $r,s \in \mathbb{Q}$ mit $r(r+1) = s^2$ gibt.
Falls r und $r+1$ Quadrate in $\mathbb{Q}$ sind, gibt es eine Lösung für die Gleichung.
Für $0 < q < p \in \mathbb{N}$ definiere das pythagoreisches Zahlentripel $a := 2pq, b := p^2 - q^2, c =: p^2 + q^2$ und $r := \frac{a^2}{b^2}$. Dann gilt $r + 1 = \frac{c^2}{b^2}$.
Somit ist für $t = \frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}$ der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational. Einsetzen ergibt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \frac{4p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}} = \frac{2pq(p^2+q^2)}{(p^2-q^2)^2} \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 3 - 331043 = 330943
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
a) Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.
b) Man ermittle diesen Flächeninhalt f, formelmäßig durch die Seitenlänge a des Achtecks ausgedrückt.

Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360°}{8} = 45°$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(45°) = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2 - 2} \cdot a = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} \cdot a^2$$

und damit

$$r = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und

D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o.B.d.A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0° \leq \angle P_1AS_1 < 45°$. Damit ist $0° < \angle S_1AP_2 \leq 45°$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45° + 45° = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0° + 90° = 90°$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90° = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45° - \angle S_1AP_2 = 45° - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45° - 90° + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.

Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 331044
Jemand findet die Angabe

$$23! = 2585201673 * 8849 * 6640000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie diese! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Die beiden unbekannten Ziffern seien x und y ($0 \leq x,y \leq 9$), d.h. die Zifferndarstellung

$$23! = 2585201673x8849y6640000$$

23! ist auf Grund ihrer Konstruktion garantiert durch 3, 9 und 11 teilbar. Eine Zahl, die durch 3 teilbar ist, hat eine durch 3 teilbare Quersumme. Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Außerdem ist eine Zahl durch 11 teilbar, wenn ihre alternative Quersumme durch 11 teilbar ist.

Die Quersumme ist $Q = 2 + 5 + ... + 3 + x + 8 + ... + 8 + y + 6 + ... + 0 = 84 + x + y$. Die alternierende Quersumme ist $A = 2 - 5 + 6 - 5 \pm ... + x - 8 \pm ...y + 6 \mp ...0 = 47 + x - 37 - y = 10 + x - y$.
Aus $84 \equiv 0 \pmod 3$ folgt dass $x + y$ durch 3 teilbar sein müssen. Damit verbleiben noch folgende Möglichkeiten

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0,3,6,9	1	2,5,8	2	1,4,7	3	0,3,6,9	4	2,5,8
5	1,4,7	6	0,3,6,9	7	2,5,8	8	1,4,7	9	0,3,6,9

Aus $84 \equiv 3 \pmod 9$ ergibt sich das $a + b \equiv 6 \pmod 9$ sein müssen. Von den in der Tabelle genannten Möglichkeiten verbleiben nur noch

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	6	1	5	2	4	3	3	4	2
5	1	6	0,6	7	5	8	4	9	3

Für die Teilbarkeit durch 11 muss $10+a-b \equiv 0 \pmod 1)1$ gelten. Testet man die verbliebenen Ziffernpaare (x,y), so erfüllt nur $x = 8$, $y = 7$ die letzte Forderung. Die unleserlichen Ziffern sind 8 und 7, es gilt

$$23! = 25852016738884976640000$$

wie ein Kontrollmultiplikation zeigt.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 5 - 331045 = 330945
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate).
Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z.B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt (0,0), der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 331046
An einem Dreieck ABC wurde festgestellt, dass es folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Der Innenwinkel $\angle BAC$ ist ein spitzer Winkel.
(2) Die Seite BC hat die Länge $a = BC = 6{,}5$ cm.
(3) Für die Seitenlängen $b = AC$ und $c = AB$ gilt $b - c = 4{,}5$ cm.
(4) Für die Längen h_b bzw. h_c der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen gilt: $h_c - h_b = 2{,}7$ cm.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

$(b - c) = 45mm \;\; (i)$ und $h_c - h_b = 27mm \;\; (ii)$
Die beiden Höhen $h_c = b \sin\alpha$ und $h_b = c \sin\alpha$ führen mit (ii) und (i) zur Bestimmung von $\measuredangle BAC = \alpha : \alpha < 45°$:

$$h_c - h_b = 27mm$$

$$b \sin\alpha - c \cdot \sin\alpha = 27mm$$

$$(b - c) \sin\alpha = 27mm$$

$$45mm \sin\alpha = 27mm$$

$$\sin\alpha = \frac{27mm}{45mm} = \frac{3}{5}, \;\; \alpha \approx 36.87°$$

Der Kosinussatz und (i) ergeben nach Umformung und mit $\cos(\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{4}{5}$ und $a = 65mm$:

$$(65mm)^2 = (c + 45mm)^2 + c^2 - 2(c + 45mm)c\frac{4}{5}$$

$$(65mm)^2 = c^2 + 90mm\; c + (45mm)^2 + c^2 - \frac{8}{5}c^2 - \frac{8}{5}45mm\; c$$

$$c^2 + 45mm\; c - 5500mm^2 = 0$$

$$c = -22{,}5mm \pm 77{,}5mm$$

Es folgt hieraus nur eine positive Lösung mit $c = 55mm$ und es gibt somit nur ein Dreieck das mit den Seitenlängen, Angaben in Millimeter, $(a,b,c) = (65,100,55)$ existiert und die Bedingungen (1),(2),(3),(4) erfüllt.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

7.36 XXXIV. Olympiade 1994

7.36.1 I. Runde 1994, Klasse 10

Es wird den Schülern der Klassen 9 und 10 empfohlen, aus den folgenden sechs Aufgaben vier zur Bearbeitung auszuwählen.

Aufgabe 1 - 341011 = 340911

Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)

Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass

a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

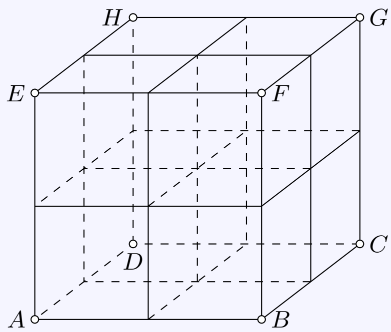
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

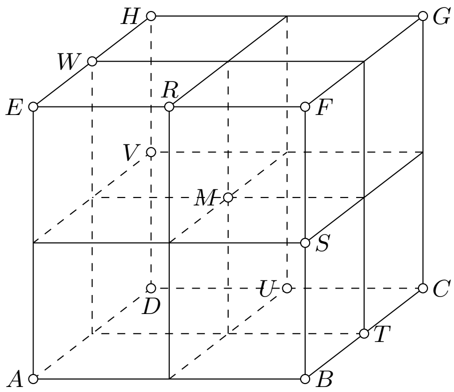
Aufgabe 2 - 341012 = 340912



Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel. Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.
Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt. Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6 \cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 3 - 341013 = 340913
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein*.

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:

```
z = 0
for a = 0 to 9
  for b = 0 to 9
    for c = 0 to 9
      for d = 0 to 9
        for e = 0 to 9
          for f = 0 to 9
            if a+b+c = d+e+f then z = z+1
          next
        next
      next
    next
  next
```

```
14 next
15 print z/10000
```

2. Programm:

```
1  dim n(27)
2  for s = 0 to 27
3    n(s) = 0
4  next
5  for a = 0 to 9
6    for b = 0 to 9
7      for c = 0 to 9
8        s = a+b+c
9      next
10   next
12 next
13 z = 0
14 for s = 0 to 27
15   z = z + n(s)*n(s)
16 next
17 print z/10000
```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 - 7, 9 - 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller "Glücksschein"- Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s=a+b+c$ der ersten drei Ziffern a,b,c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d,e,f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s)\cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a+b+c=d+e+f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a+b+c=s$ und $d+e+f=s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller "Glücksschein"-Nummern ist die Summe aller für $s=0$,...,27 gebildeten Produkte $(n(s)\cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen abc von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s=a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s)\cdot n(s))$ gebildet.

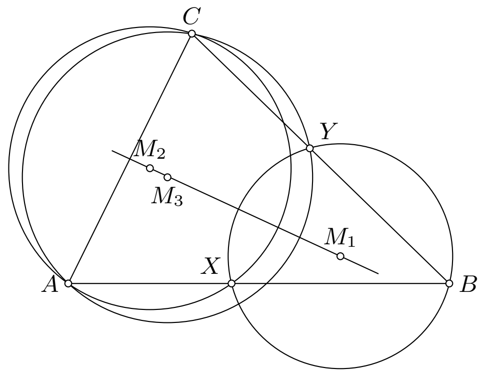
Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

Aufgabe 4 - 341014 = 340914
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, daß in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

   Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

   Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

   Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

   Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

   Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

Aufgabe 5 - 341015 = 340915
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, dass die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle $x < \frac{1}{4}$ ist

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}-x+\frac{3}{4}-x=1-2x>1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

für alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ ist

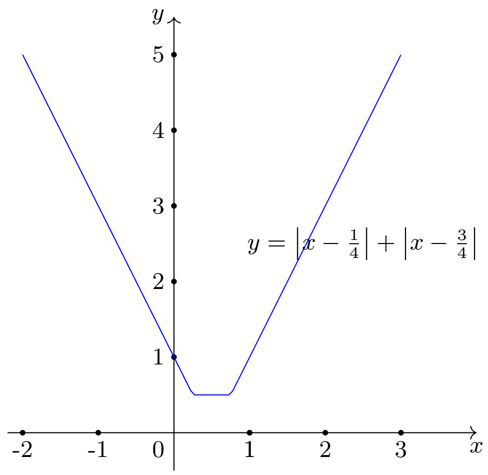
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-x=\frac{1}{2}$$

für alle $x > \frac{3}{4}$ ist

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{1}{4} + x - \frac{3}{4} = 2x - 1 > 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x) = \left|x - \frac{1}{4}\right| + \left|x - \frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x = 1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

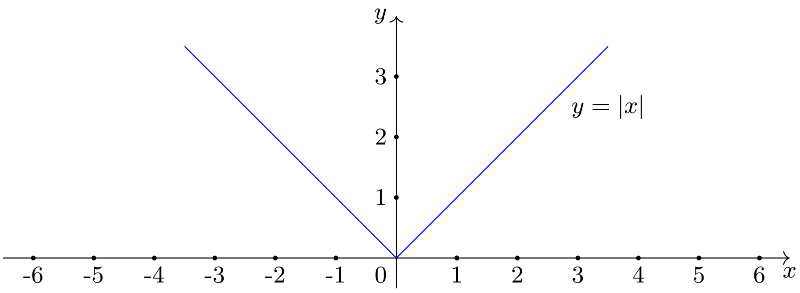
Aufgabe 6 - 341016 = 340916
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

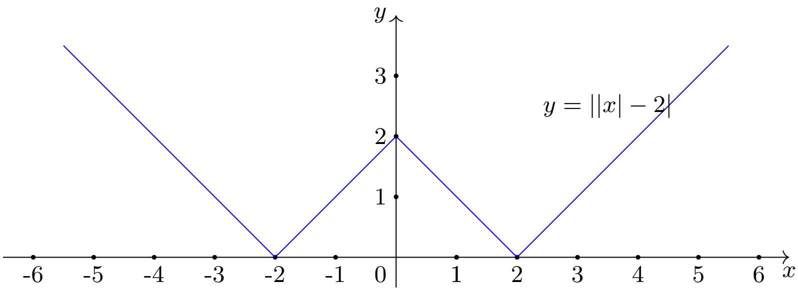
$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x| - 2|, \\ f_2(x) &= |||x| - 2| - 2|, \\ &\dots \end{aligned}$$

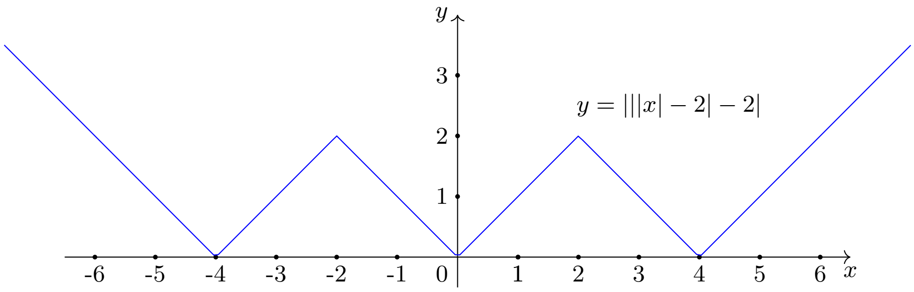
allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.







Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen von [5]

7.36.2 II. Runde 1994, Klasse 10

Aufgabe 1 - 341021
a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?
Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

a) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt.

Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt, so gibt es 5 Möglichkeiten welche der Zahlen auf der unteren Seitenfläche steht. Anschließend drehen wir den Würfel so um die vertikale Achse, dass die kleinste nach vorn zeigt. Es gibt damit noch $3! = 6$ Möglichkeiten wie die anderen 3 Seitenflächen beschriftet wurden. Weiter kann jeder Würfel auf eindeutige Art so hingelegt werden, dass die 1 oben liegt und die kleinste Zahl der vier benachbarten Seitenflächen nach vorn zeigt. Es gibt also insgesamt $5 \cdot 3! = 30$ paarweise verschiedene Verteilungen.

b) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt und Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen die Summe 7 haben.
Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Da 6 (und nicht 2) auf der gegenüberliegenden Seite steht, können ihn so um die vertikale Achse drehen, dass die Seite mit der 2 nach vorn zeigt. Somit liegt 5 auf der hinteren Seite. Nun kann 3 auf der linken oder auf der rechten Seitenfläche stehen. Es gibt also insgesamt 2 Möglichkeiten.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 2 - 341022
Anja und Bernd sprechen darüber, wie man die an den Kreis k, dessen Mittelpunkt M sei, in einen seiner Punkte P gelegte Tangente t vollständig ausreichend beschreiben kann.
Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die auf MP senkrecht steht und mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.
Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen aus der anderen folgt, d.h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:
(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.
(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.
Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2)!

(1) Wir nehmen an, dass t noch einen Punkt P' gemeinsam mit k hat. Offensichtlich liegen diese Punkte nicht auf einer Geraden, bilden somit ein Dreieck mit rechten Winkel in P. Da dem größten Winkel immer die längste Seite gegenüberliegt, ist $\overline{MP'}$ die längste Seite, insbesondere also länger als $|\overline{MP}| = r$. Widerspruch.

(2) Wir nehmen an, dass der Winkel kein rechter ist. Da der (kürzeste) Abstand eines Punktes zur Geraden immer das Lot ist, existiert dann auf t ein Punkt P' mit $|\overline{MP'}| < |\overline{MP}| = r$. Somit liegt P' offensichtlich innerhalb des Kreises und t besitzt einen weiteren Punkt mit k. Widerspruch.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 3 - 341023
Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Zifferndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht.
Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von $9^2, 99^2, 999^2$ die Vermutung, dass in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten.
Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes einzelne Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, welche Ziffern darin vorkommen und an welchen Stellen sie dort stehen.
Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie ihre Antwort!

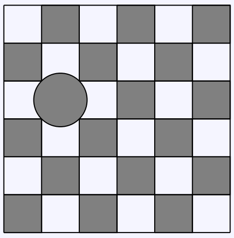
Eine im Dezimalsystem ausschließlich aus Ziffern 9 bestehende n-stellige Zahl ($n \geq 3$) hat die Darstellung $10^n - 1$. Es wird

$$(10^n - 1) \cdot (10^n - 1) = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1$$

Das Ergebnis ist damit eine $2n$-stellige Zahl, deren erste $(n-1)$ Ziffern '9' sind, gefolgt von einer '8', gefolgt von $(n-1)$ Ziffern '0' und einer '1'.
Ausnahmen ist $9^2 = 81$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 4 - 341024



Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt die Abbildung ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Die Abbildung zeigt einen solchen Umkreis.)

a) Beweisen Sie, dass für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt:
Der Flächeninhalt des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20%.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt!

a) O.B.d.A. werde die Breite eines Feldes des Schachbretts mit 1 angenommen. Für eine beliebige Breite a verändert sich das Verhältnis von bedeckter und Gesamtfläche nicht.
Insgesamt gibt es $4n^2$ Felder und damit eine Gesamtfläche $A = 4n^2$.
Ein überdeckender Kreis hat den Radius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und eine Fläche von $A_k = \frac{pi}{2}$.

$2n^2$ Felder sind schwarz und werden mit einem Kreis bedeckt. Jeder dieser Kreise überragt an jeder Seite eines Feldes das Feld um $\frac{1}{4}$ der Differenz zwischen Kreis- und Feldfläche. Benachbarte Umkreise schneiden sich jeweils nur in einem Punkt. Das gilt, da die Diagonalen der weißen Felder Tangenten zu den Umkreisen sind.
Allerdings treten an jedem Rand des Schachbretts n Felder auf, deren Kreis über den Rand hinausragt. Damit ragen insgesamt $4n$ Kreise um jeweils $\frac{1}{4}$ der Kreisfläche über das Schachbrett hinaus.
Damit ist die bedeckte Fläche

$$A_K = 2n^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 4n \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}$$

Der Anteil der bedeckten Fläche ist folglich

$$V = \frac{A_K}{A} = \frac{\pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}}{4n^2} = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$$

Die Zahlenfolge $(a_n) = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$ ist streng monoton wachsend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{\pi - 2}{8n(n+1)} > 0$ $(n > 0)$ ist. Gleichzeitig gilt für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} = \frac{\pi}{4} < 0{,}8$$

D.h., die bedeckte Fläche hat immer einen Anteil kleiner als 80%, die bedeckte somit mehr als 20%.

b) Es ist das kleinste n zu ermitteln, für welches

$$\frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} > \frac{3}{4}$$

wird. Umstellen ergibt

$$n > \frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)}$$

Es ist $3.\overline{1} = \frac{28}{9} < \pi < \frac{22}{7}$ und damit:

$$\frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\pi - 3)} \begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{9}} = 5 \\ > \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{7}} = 4 \end{cases}$$

Das kleinste n, für das der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt, ist damit 5.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster und Nuramon

7.36.3 III. Runde 1994, Klasse 10

Aufgabe 2 - 341031 = 340932
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Würde $9^n + 1$ auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n - 1 = 9^n - 1^n$ durch $9 - 1 = 8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 341032 = 340933
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+7) - (n-7) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4 - 2 - 1 + 7) + 2n \cdot (-8 + 56 + 28 + 14) = 180n = 22.222.222.020$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 341033
Antje und Beate beschließen, nachdem ihnen das Spielen mit gewöhnlichen Spielwürfeln zu langweilig wurde, diese durch reguläre Oktaeder zu ersetzen mit den Augenzahlen 1 bis 8.
Bevor sie an die Herstellung dieser Spieloktaeder gehen, vereinbaren sie noch, dass (in Analogie zum Spielwürfel) die Summe der Augenzahlen je zweier einander gegenüberliegender Flächen 9 betragen soll.
Als sie am nächsten Tag ihre selbstgebastelten Oktaeder vergleichen, stellen sie fest:
Ihre Oktaeder sind - auch bei Einhaltung der Vereinbarung - voneinander verschieden in dem Sinne, dass durch keine Drehung die Anordnung der Augenzahlen zur Übereinstimmung gebracht werden kann.
a) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen der Augenzahlen es unter Einhaltung der Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen insgesamt gibt!
b) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen es insgesamt gibt, wenn die Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen nicht eingehalten werden muss!

a) Wir legen das Oktaeder so auf den Tisch, dass die Fläche mit der 1 nach unten zeigt. Dann liegt die Fläche mit der 8 oben. Nun drehen wir das Oktaeder so lang um seine senkrechte Symmetrieachse, bis die Fläche mit der 2 nach vorn zeigt.
Dann liegt ihr gegenüber die Fläche mit der 7. Darüber hinaus, ist die Lage des Oktaeders nun eindeutig bestimmt, während die verbleibenden vier Flächen noch mit den Zahlen von 3 bis 6 beschriftet werden müssen:

Suchen wir zuerst den Platz für die 3, so haben wir dafür vier verschiedene Möglichkeiten, während die entsprechend gegenüberliegende Fläche mit der 6 beschriftet wird. Für die verbleibenden zwei Flächen gibt es nun noch zwei Möglichkeiten, welche von ihnen mit der 4, und die andere dann mit der 5 beschriftet wird. Insgesamt gibt es also genau $4 \cdot 2 = 8$ verschiedene Oktaederbeschriftungen, bei denen die Summe gegenüberliegender Flächen 9 ergibt, die sich nicht durch Drehung ineinander überführen lassen.

b) Wieder legen wir das Oktaeder mit der Fläche mit der 1 nach unten auf den Tisch. Dann gibt es 7

Möglichkeiten, welche Zahl die nach oben zeigende Fläche zeigt. Nun drehen wir das Oktaeder so, dass von den verbleibenden sechs Flächen diejenige mit der kleinsten Zahl nach vorn zeigt.
Damit ist die Lage des Oktaeders eindeutig bestimmt und die verbleibenden fünf Zahlen können in beliebiger Reihenfolge auf den noch verbleibenden fünf Flächen des Oktaeders verteilt werden. Dafür gibt es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, sodass es insgesamt $7 \cdot 120 = 840$ verschiedene Oktaederbeschriftungen gibt, die nicht durch Drehung ineinander überführt werden können.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 341034 = 340934
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe $1, 2, \dots, n$ unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \dots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ "freundlich" sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ "unfreundlich".

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 341035
Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.
a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage:
Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma: Befinden sich auf einer Gerade mindestens zwei rationale Punkte, dann enthält diese Gerade keine irrationalen oder keine gemischten Punkte.

Beweis:
Seien (x_1,y_1) und (x_2,y_2) zwei verschiedene rationale Punkte, die auf der Geraden liegen. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x_1 = x_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur y-Achse und jeder Punkt auf der Gerade besitzt die gleiche x-Koordinate. Also hat jeder Punkt mindestens eine rationale Koordinate, sodass es auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

2. Fall: $y_1 = y_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse, sodass alle Punkte auf ihr die gleiche – eine rationale – y-Koordinate besitzen und es wieder auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

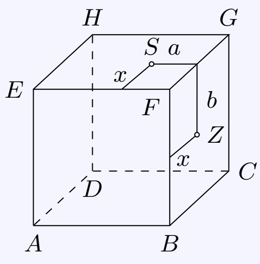
3. Fall: $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Dann verläuft die Gerade weder parallel zur x-, noch zur y-Achse und es gibt reelle Zahlen $m \neq 0$ und n, sodass die Punkte (x,y) auf der Geraden alle die Gleichung $y = mx + n$ erfüllen. Dabei sind jedoch $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ und $n = y_1 - mx_1$ beide sogar rational, sodass für jedes rationale x auch $y = mx + n$ rational ist. Umgekehrt ist aber auch für jedes rationale y auch $\frac{y-n}{m} = x$ rational, sodass es auf der Geraden keine gemischten Punkte gibt, $\square$.

Mit diesem Lemma lässt sich die Frage aus Aufgabenteil a) sowie die Fragen aus Aufgabenteil b), die sich auf die Sorten gemischter bzw. irrationaler Punkte beziehen, leicht negativ beantworten, da in all diesen Situationen jeweils mindestens zwei rationale Punkte auf der Geraden liegen müssten, was dazu führt, dass eine der beiden anderen Sorten nicht auf der Gerade vertreten sein kann.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, ob es eine Gerade gibt, die genau einen rationalen und jeweils mindestens zwei gemischte und irrationale Punkte enthält. Dies ist der Fall, wie etwa die Gerade, die durch die Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ beschrieben wird, zeigt. Diese enthält nämlich den rationalen Punkt (0,0), die gemischten Punkte $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$ und die irrationalen Punkte $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$, wobei jeweils in der x- und y-Koordinate das gleiche Vorzeichen zu wählen ist.

Aufgabe von cyrix gelöst

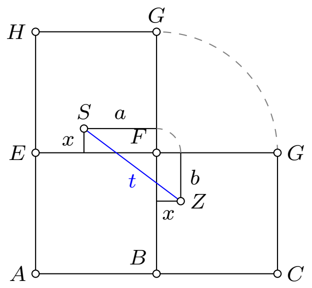
Aufgabe 6 - 341036



Auf der Oberfläche eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 1 seien S und Z zwei Punkte. Ein Weg vom Startpunkt S zum Zielpunkt Z werde genau dann zulässig genannt, wenn er ganz auf der Oberfläche des Würfels verläuft.
Der Startpunkt S liege auf der Quadratfläche $EFGH$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand a mit $0 < a < 1$ und zu EF einen Abstand x.
Der Zielpunkt Z liege auf der Quadratfläche $BCGF$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand b mit $0 < b < 1$ und zu BF ebenfalls den Abstand x.
Die Längen a und b seien - unter Einhaltung von $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ beliebig, aber - fest vorgegeben.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von diesen a und b) alle diejenigen Werte x mit $0 < x < 1$, für die es zwei voneinander verschiedene zulässige Wege von S nach Z gibt, die beide unter allen zulässigen Wegen von S nach Z dieselbe möglichst kleine Länge haben!

Einer der kürzestmöglichen Wege von S nach Z ist der direkte, geradlinige Weg über die Kante FG hinweg. Die Länge dieses Weges ist $l = a + b$. Der Punkt, an dem der Weg die Kante FG kreuzt, muss vom Punkt F auch den Abstand x haben, da ein Punkt mit größerem oder kleinerem Abstand zu F einen Umweg bedeuten würde.
Selbst wenn a und b so groß wie möglich werden, ist bei dem direkten Weg immer $l < 2$. Der Weg über die Kanten EH, AD und BC ist auf jeden Fall größer als 2, weil zwei komplette Würfelflächen überquert werden müssen.

Wenn x nun klein wird, S also an die Kante EF und Z an BF heranrückt, dann ist auch ein Weg möglich über die Kante EF und BF. Wir stellen nachfolgend die drei Würfelflächen $ABFE$, $EFGH$ und $BCGF$ abgewickelt dar:



Die Länge dieser diagonal verlaufenden Strecke ist dann:

$$t(x) = \sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2}$$

Es gibt kein lokales Minimum - je kleiner x, desto kleiner auch t. Aber der Weg soll ja auch nur gleich l sein, also

$$\sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2} = a + b$$
$$(x+a)^2 + (x+b)^2 = (a+b)^2$$
$$2x^2 + 2ax + 2bx + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$x^2 + (a+b)x - ab = 0$$
$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + ab}$$

Es kommt nur diese Lösung der quadratischen Gleichung in Frage, das ansonsten $x < 0$ wäre. Somit folgt:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 6ab + b^2} - (a+b)\right)$$

Außerdem ist auch

$$x_2 = 1 - x_1$$

eine gültige Lösung, denn dann haben S und Z den gleichen Abstand zur Würfelfläche $CDHG$ wie in der vorliegenden Lösung zur Fläche $ABFE$. Der Weg ist gleich lang, er führt dann aber über die Kanten GH und GC.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

7.36.4 IV. Runde 1994, Klasse 10

Aufgabe 1 - 341041 = 340942
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Es ist $z = 7 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \cdots + 7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7} = 49^0 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + \cdots + 49^{47} \equiv 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{47} = 48 \equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7 \cdot 48 = 336$ teilbar, $\square$.
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 341042 = 340943
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine reelle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S,y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $triangleACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a + 1 - a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a + 1 - a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

mit $p := r + r^2 - 1$ und $q := r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 341043
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist.

Für $k = 1$ gilt $z = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$. Sei im folgenden $k \geq 2$. Nach der dritten binomischen Formel gilt $R_{k,n} := \frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} > 1$. Wir erhalten für z:

$$z = (R_{k,n} + k^n)^2 - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^{2n} - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k^n - 1) =$$

$$= R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k-1)R_{k,n} = R_{k,n}(R_{k,n} + 2k^n + k^n(k-1)).$$

Beide Faktoren sind größer als 1 und somit ist z keine Primzahl.

Quelle anonym

Aufgabe 4 - 341044
Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für jedes x in dem Intervall $[a, b]$ gilt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
(2) Die Funktion f ist nicht konstant.
(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.
Geben Sie (passend zu c) Zahlen a, b und im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f, g an, und weisen Sie nach, dass bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

Sei a,b,c beliebige reelle Zahlen mit $a < b$. Seien weiter y_1,$y_2 \in \mathbb{R}$ definiert als

$$y_1 := -\frac{c}{2} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}, \qquad y_2 := -\frac{c}{2} - \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}.$$

Es sind y_1,y_2 wohldefiniert und verschieden, da der Term unter der Wurzel $1 + \frac{c^2}{4}$ für alle reellen Zahlen c größer als Null ist. (Er ist sogar nicht kleiner als Eins.) Wir können weiter feststellen, dass y_1 und y_2 Nullstellen des Polynoms

$$p(y) = y^2 + cy - 1$$

sind.
Wir definieren f,g: $[a$,$b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} y_1, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ y_2, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}, \qquad g(x) = f(x) + c,$$

so gilt für alle reellen Zahlen x

$$f(x)g(x) = f(x)(f(x) + c) = (f(x))^2 + cf(x) - 1 + 1 = p(f(x)) + 1 = 1,$$

da f nur auf Nullstellen des Polynoms p abbildet. Weiter ist f nicht konstant, da $f(a) = y_1 \neq y_2 = f(b)$. Da definitionsgemäß $g(x) = f(x) + c$ für alle reellen x gilt, ist der Graph von g der um c in y-Richtung verschobene Graph von f.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 5 - 341045 = 340945
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

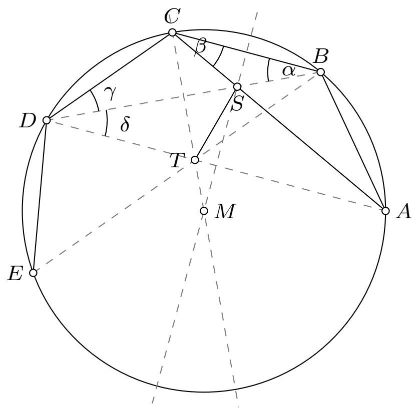
In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3}r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 341046
In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $AB = BC = CD = DE$ gezeichnet.
Dabei sei diese Länge so gewählt, dass der von A über B, C, D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T.
Beweisen Sie, dass aus dieser Voraussetzung stets $AB^2 = AC \cdot ST$ folgt!



Die blau gestrichelten Linien sind Symmetrieachsen durch den Mittelpunkt des Kreises. Wegen der Symmetrie bezüglich der Achse MS ist BC parallel zu AD und $\alpha = \beta$. Da $BC = CD$, ist $\alpha = \gamma$, und wegen der Parallelität von BC zu AD ist $\alpha = \delta$. Alle grün eingezeichneten Winkel sind daher gleich groß.
Zu zeigen ist:

$$AB^2 = AC \cdot ST \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{AB}{ST} = \frac{AC}{AB}$$

Da $AB = BC$ ist und $AC = BD$, ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{BC}{ST} = \frac{BD}{BC}$$

Da $\gamma = \delta$ ist und das Viereck $BCDT$ symmetrisch ist zur Spiegelachse CM, entsteht T auch durch Spiegelung von C an BD. Daher ist $ST = CS$. Setzt man das ein, lautet die zu zeigende Gleichung

$$\frac{BC}{CS} = \frac{BD}{BC}$$

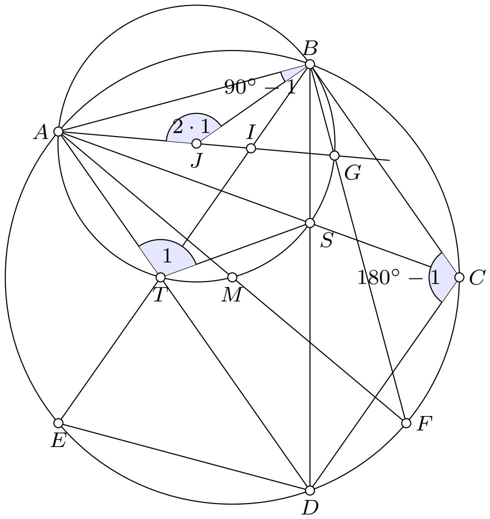
Wegen der Winkelgleichheit sind die Dreiecke BCD und BCS ähnlich, und die Gleichung ist erfüllt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
Es ist zu zeigen:
1. $ATSB$ ist Sehnenviereck.
2. $|\overline{ST}| = |\overline{SC}|$
3. CB ist Tangente an den Umkreis von $ATSB$.

zu 1. Die Dreiecke ABD und EDB sind nach sss kongruent. Damit folgt dann $\angle DAB = \angle EBD$. Beides sind Umfangswinkel über der Sehne TS.

zu 2. Offensichtlich ist $BC \parallel TD$ und $BT \parallel CD$. Da zudem $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ ist, ist $BCDT$ eine Raute. Punkt S liegt dann auf der Diagonalen $\overline{BD}$ und es entstehen wieder kongruente Dreiecke.



zu 3. Wir zeichnen einen Durchmesser durch A, der Schnittpunkt mit dem Umkreis sei G. B liegt dann auf dem Thaleskreis und somit ist $\angle ABG = 90°$. Sei nun der Mittelpunkt des Umkreises J und $\angle BTA = \angle 1$. Nach Umfangswinkelsatz folgt dann $\angle BJA = 2 \cdot \angle 1$. Dreieck AJB ist gleichschenklig und somit folgt nach Basiswinkelsatz $\angle ABJ = 90° - \angle 1$.

Viereck $TDBC$ ist eine Raute und $\angle DTB = 180° - \angle 1$ (Nebenwinkel). Nach Konstruktion ist $\angle DTB = \angle ABC$. Dann ist $\angle GBC = \angle 180° - \angle 1 - 90° = 90° - \angle 1$. Es ist somit $\angle GBC = ABJ$, womit $\angle JBC = 90°$ folgt.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

8 Klassenstufe 11

8.1 Vorolympiade 1960

8.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 11

Aufgabe 1 - V01101
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$$

Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass das arithmetische Mittel A dreier nicht negativer reeller Zahlen a, b, c nie kleiner als das geometrische Mittel G dieser Zahlen ist, d.h. es ist

$$A = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = G \tag{1}$$

Setzt man: $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$, so folgt aus (1), dass

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \qquad \text{d.h.} \quad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

ist. Da weiter wegen $x > 0, y > 0, z > 0$

$$3xyz > 2xyz$$

ist, gilt stets

$$x^3 + y^3 + z^3 > 2xyz$$

und daher gibt es kein Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 2 - V01102
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^2}$$

Für $x = 0$ entsteht ein unbestimmter Term $\frac{0}{0}$. Nach der Regel von l'Hospital ist der Grenzwert in diesem Fall von

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweimaliges Ableiten von Nenner und Zähler (keine Quotientenregel !) ergibt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)\cos 3x - \\ &\quad - 3(3x^6 - 18x^5 + 35x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 22x - 10)\sin 3x \\ g''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -6$$

als Grenzwert des anfänglichen Ausdrucks.

Aufgabe 3 - V01103
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

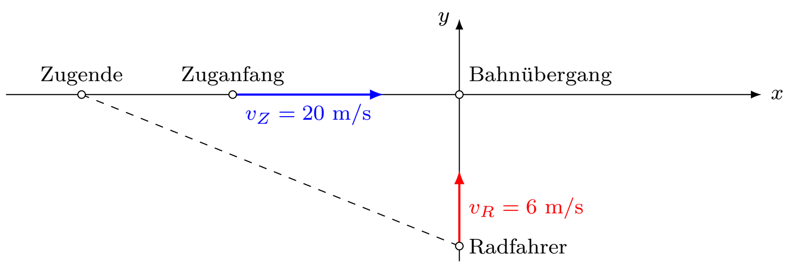
Die erste Lage Papier hat eine Länge πd mit $d = 150$ mm. Mit jeder Lage wächst der Durchmesser um 0,2 mm. Damit wird für die Gesamtlänge des Papiers von 500000 mm bei n Lagen Papier

$$\begin{aligned} 500000 &= \pi d + \pi(d + 0{,}2) + \pi(d + 2 \cdot 0{,}2) + ... + \pi(d + (n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi(n \cdot d + 0{,}2 + 0{,}4 + ...(n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi \left(n \cdot d + 0{,}2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $n_1 \approx 717{,}91$ und $n_2 \approx -2216{,}91$, wobei n_2, da kleiner 0, entfällt.
Auf der Rolle befinden sich am Ende 718 Lagen Papier. Die Rolle hat dann einen Durchmesser von $150 + 717 \cdot 0{,}2 = 293{,}4$ mm, also von 29,34 cm.

Aufgabe 4 - V01104
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Unter der Annahme, dass der Bahnübergang senkrecht zur Bahnstrecke erfolgt, betrachten wir ein Koordinatensystem, bei dem sich der Bahnübergang im Koordinatenursprung befindet und der Zug sich längs der x-Achse bewegt, der Radfahrer längs der y-Achse.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ s ist der Radfahrer 100 m vom Übergang entfernt, das Zugende (= Zugentfernung + Zuglänge) 240 m. Der Ort des Zugendes wird mit den Koordinaten $(240 + 20 \cdot t)$ beschrieben, wobei t in Sekunden gemessen wird. Die Geschwindigkeit des Zuges ist 72 km/h = 20 m/s.
Der Ort des Radfahrers ist analog $(0, 6 \cdot t - 100)$.

Die Entfernung des Radfahrers zum Zugende ist

$$d = \sqrt{(240 + 20 \cdot t)^2 + (6 \cdot t - 100)^2}$$

Die Entfernung d wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Der Radikand wird durch

$$f(t) = 4(109t^2 - 2700t + 16900)$$

beschrieben. Die 1. Ableitung ist $f'(t) = 8(109t - 1350)$ mit der Nullstelle bei $t_1 = \frac{1350}{109} \approx 12{,}39$. Da der Radikand eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor des quadratischen Gliedes ist, ist t_1 der Zeitpunkt des kürzesten Abstandes zwischen Zugende und Fahrradfahrer. Nach 12,39 s ist der Abstand minimal.

Aufgabe 5 - V01105
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Zuerst werden beide Summanden einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden wird

$$x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} = x \cdot \sqrt[5]{x^{\frac{6}{5}}} = x^{\frac{31}{25}}$$

mit der Ableitung

$$(x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}})' = \frac{31}{25} x^{\frac{6}{25}} = \frac{31}{25} \sqrt[25]{x^6}$$

Die innere Ableitung der zweiten Summanden ist $\frac{2}{(1-x)^2}$. Es wird

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} &= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}\frac{1}{(1-x)^{10}}} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)^6}} \\
&= \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)}} = \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1+x)^5(1-x)}} \\
&= \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Ableitungsterm ist damit

$$y' = \frac{31}{25}\sqrt[25]{x^6} + \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Aufgabe 6 - V01106
Gibt es einen Winkel ϵ, für den die Gleichung gilt:

$$\sin\epsilon \cdot \cos\epsilon = 1 \qquad (1)$$

Mit dem Additionstheorem $2\sin x \cos x = \sin 2x$ wird aus (1)

$$\begin{aligned}
\sin\epsilon \cdot \cos\epsilon &= \frac{1}{2}\sin 2\epsilon = 1 \\
\sin 2\epsilon &= 2
\end{aligned}$$

Da der Funktionswertebereich der Sinusfunktion $[-1; 1]$ hat diese Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt keinen Winkel ϵ, der (1) erfüllt.

Aufgabe 7 - V01107 = V601215
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3) \qquad (1)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D.h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $\quad y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $\quad x_{1;2} = \pm\sqrt{a}; \qquad x_3 = 0$

Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

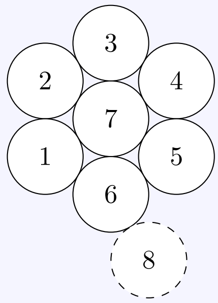
$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe 8 - V01108

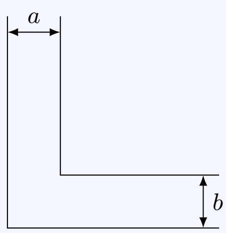
In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?

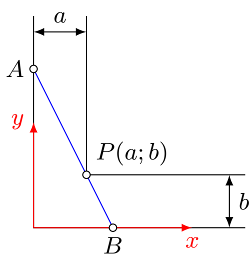


Der 8. Kreis rollt auf einem Kreis solange bis er mit seiner Peripherie den nächsten Kreis berührt. Die Mittelpunkte der zwei berührten Kreise und der Mittelpunkt des achten Kreises bilden dann ein gleichseitiges Dreieck, mit den Innenwinkeln von 60°.
Damit rollt der achte Kreis, z.B. auf dem sechsten, genau 120°, d.h. $\frac{2}{3}$ des Kreisumfangs.
Bei 6 Kreisen ergibt dies insgesamt $6 \cdot \frac{2}{3}u = 4u$. Damit führt der 8. Kreis genau 4 Umdrehungen aus.

Aufgabe 9 - V01109

Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden.
Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)





Wir führen ein Koordinatensystem derart ein, dass die äußere Ecke im Ursprung liegt und die x- und y-Achse längs der Gänge ausgerichtet sind. (siehe Abbildung)
Durch den Punkt $P(a; b)$ legen wir dann eine lineare Funktion so, dass diese sowohl die positive x-Achse in B, also auch die positive y-Achse in A schneidet. Die minimale Strecke AB ist dann die gesuchte größte Länge der Stange.

Für die Funktion durch A und B ergibt sich (mit $m > 0$)

$$y = -m(x - a) + b$$

Die Punkte haben damit die Koordinaten $A(0; am + b)$ und $B\left(\frac{b}{m} + a\right)$. Die Länge der Stange von A nach B ist dann

$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{m} + a\right)^2 + (am + b)^2} \tag{1}$$

Diese Länge wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Die 1.Ableitung des Radikanden ist

$$d'(m) = \frac{2}{m^2}(am + b)(am^3 - b)$$

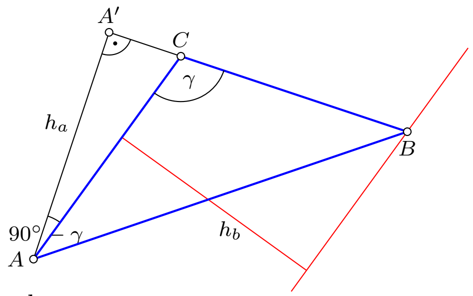
Diese Ableitung hat eine Nullstelle für $m = -\frac{b}{a}$, die entfällt da dann A und B zusammenfallen. Die zweite Nullstelle für

$$m = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} \tag{2}$$

ergibt das gesuchte Minimum, wie die Kontrolle über die 2.Ableitung zeigt. Für die größtmögliche Länge der Stange ergibt sich durch Einsetzen von (2) in (1)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$$

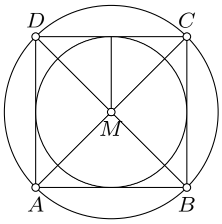
Aufgabe 10 - V01110
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\gamma = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!



Konstruktion:
1. Zeichne ein Dreieck $AA'C$ mit $AA' = h_a$, $\angle CAA' = 90° - \gamma$ und $\angle AA'C = 90°$.
2. Verlängere die Strecke $A'C$ über C hinaus.
3. Führe eine Parallelverschiebung von AC um die Länge h_b durch.
4. Der Schnittpunkt der verschobenen Geraden und der Verlängerung von $A'C$ ist der Punkt B.

Analyse:
1. Das Dreieck ABC ist ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\gamma > 90°$. Damit liegt der Höhenfußpunkt A' der Höhe h_a außerhalb der Strecke BC.
Das Dreieck ACA' ist nach Kongruenzsatz sww direkt konstruierbar, wobei der Winkel bei A nach dem Außenwinkelsatz gleich $\gamma - 90°$ ist. (siehe Abbildung)
2. Der Punkt B liegt auf der Verlängerung von CA' und einer Parallelen zu AC mit dem Abstand h_b zu AC.

Aufgabe 11 - V01111
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?



Der äußere Kreis habe den Radius $r_0 = r$. Das Quadrat $ABCD$ habe die Kantenlänge $a0 = a$. Seine Diagonale d_0 hat nach dem Satz Pythagoras die Länge $d_0 = a_0\sqrt{2}$. Die Diagonale ist aber auch gleich zweimal der Radius r_0:

$$d_0 = a_0\sqrt{2} = 2r_0 \to a_0 = r_0\sqrt{2}$$

Allgemein gilt:

$$a_i = r_i\sqrt{2}$$

Die Kantenlänge a_0 des Quadrats ist identisch mit dem halben Radius r_1 des inneren Kreises $a_0 = 2r_1$, bzw. allgemein:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$$

Die rekursive Formel für die Radien der Kreise lautet demnach:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1} = r_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow r_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

Für die Kantenlängen gilt das gleiche:

$$a_i = ri\sqrt{2} = a_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow a_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

a) Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise ist (eine geometrische Reihe)

$$\sum A_K = \sum \pi r^2 = \pi\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = \pi r_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = \pi r_0^2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r^2$$

b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate

$$\sum A_Q = \sum a_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = a_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = 2a_0^2 = 4r^2$$

Aufgabe 12 - V01112

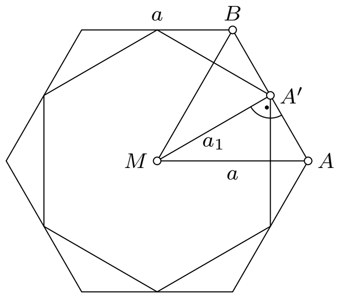
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.

Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.

a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 mm liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?

b) Wie groß ist das Volumen?

c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?



Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = a_0$ hat einen Flächeninhalt von $F = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$. Damit hat erste sechsseitige Prisma, mit einer Seitenlänge von $a = 10$ cm und einer Höhe von $h = 0{,}1$ mm, das Volumen

$$V_0 = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 \cdot h = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

Das erste aufgeklebte Sechseck hat eine Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 10$ cm (Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a). Das Volumen des Prismas wird

$$V_1 = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4}V_0$$

Jedes weitere aufgesetzte Prisma hat $\frac{3}{4}$ des Volumens des vorhergehenden Prismas. Für n auf das unterste Prisma aufgesetzte Prismen ergibt sich als Gesamtvolumen mittels Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge

$$V = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^i V_0 = \sum_{i=0}^{n}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^i\frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3\right\} = 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\text{ cm}^3 \qquad (1)$$

a) Das oberste Prisma soll noch mindestens 2 mm Seitenlänge haben. Für das n-te Prisma wird die Seitenlänge

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10\text{ cm}$$

und damit

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10 \text{ cm} > 0{,}2 \text{ cm}$$

$$n \lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) > \lg 0{,}02 \qquad n < 27{,}1968...$$

Auf das Grundsechseck können weitere 27 Sechsecke aufgesetzt werden. Der Körper wird damit $28\dot{0}{,}1$ mm = 2,8 cm hoch.

b) Einsetzen von $n = 27$ in (1) ergibt ein Volumen des Körpers von $\approx 10{,}389$ cm^3.

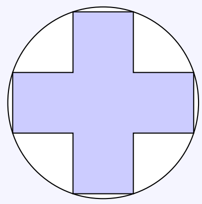
c) Für den Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich bei (1)

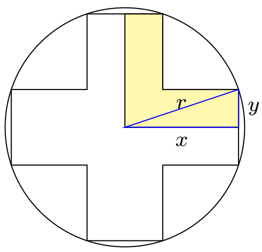
$$\lim_{n\to\infty} 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 6\sqrt{3}$$

Wäre dem Ausschneiden keine Grenze gesetzt, so wäre der Sechseckturm unendlich hoch und hätte ein Volumen von $V = 6\sqrt{3} \approx 10{,}3923$ cm^3.

Aufgabe 13 - V01113

Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)





Das Spuleninnere setzt sich auf 4 Flächen der Form in der Abbildung zusammen. Eine solche Fläche hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{F_I}{4} = 2x \cdot y - y \cdot y$$

wobei $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gilt (siehe Abbildung). Die Zielfunktion der Fläche des Spuleninneren ist somit

$$F(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2) \tag{1}$$

Die 1. Ableitung der Flächenfunktion wird dann

$$F'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x$$

Für die Suche nach dem Maximum der inneren Fläche wird $F'(x)$ gleich 0 gesetzt und die Gleichung gelöst.

$$\begin{aligned}
0 &= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x \\
0 &= 2(r^2 - x^2) - 2x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \\
x\sqrt{r^2 - x^2} &= 2x^2 - r^2 \\
0 &= 5x^4 - 5r^2x^2 + r^4
\end{aligned}$$

Mit $u = x^2$ hat die quadratische Gleichung $0 = 5i^2 - 5r^2u + r^4$ die Lösungen

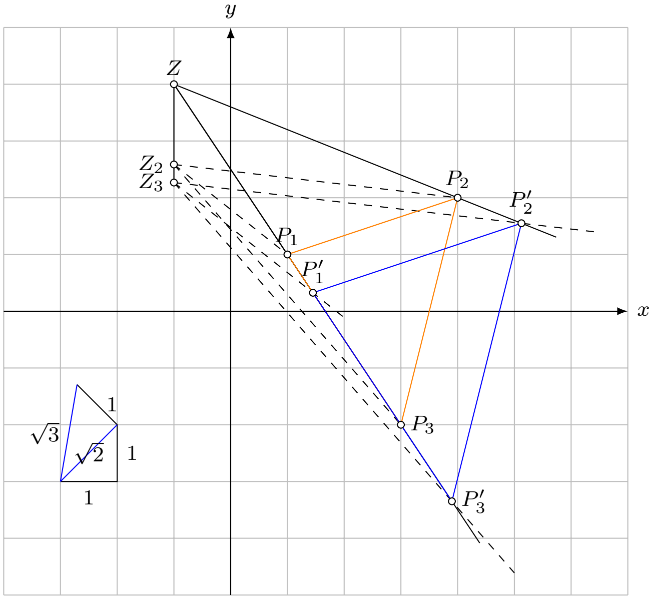
$$u_1 \approx 0{,}7236r^2 \qquad ; \qquad u_2 \approx 0{,}2764r^2$$

und folglich, da die negativen Lösungen entfallen:

$$x_1 \approx 0{,}8506r; \quad y_1 \approx 0{,}5257r \qquad ; \qquad x_2 \approx 0{,}5257r; \quad y_2 \approx 0{,}8506r$$

Setzt man x_1 in (1) ein, so ergibt sich für die Gesamtfläche des Spuleninneren $F_I \approx 2{,}4721r^2$. Dies entspricht 78,69 % der Kreisfläche πr^2.

Aufgabe 14 - V01114
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.



Wenn die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ im Verhältnis 2:3 stehen sollen, so müssen die Seitenlängen im Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ zueinander stehen.

1. In einer Nebenkonstruktion (siehe Abbildung) ermittelt man durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras zwei Strecken der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
2. Von Z trägt man diese Strecken auf einer beliebigen Geraden ab und erhält die Punkte Z_2 und Z_3.
3. Von Z aus werden Strahlen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gezeichnet.
4. P_1, P_2, P_3 werden mittels Geraden mit Z_1 verbunden.
5. Die Parallelverschiebungen dieser Geraden durch Z_2 schneiden die entsprechenden Strahlen durch Z in den gesuchten Punkten P_1', P_2' und P_3'.

Nach dem Strahlensatz gilt dann

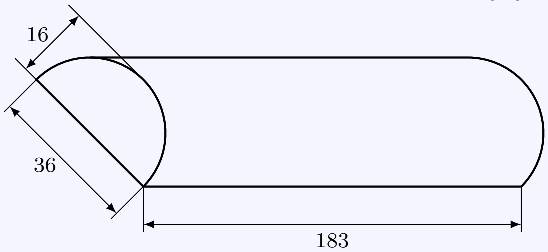
$$\frac{ZZ_1}{ZZ_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{ZP_1}{ZP_1'} = \frac{ZP_2}{ZP_2'} = \frac{ZP_3}{ZP_3'}$$

und erneut nach einem Strahlensatz

$$\frac{P_1P_2}{P_1'P_2'} = \frac{P_1P_3}{P_1'P_3'} = \frac{P_2P_2}{P_2'P_3'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}'$$

so dass das Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ das gesuchte Dreieck ist.

Aufgabe 15 - V01115
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

a) Durch die Punkte $P_1\,(-18;0)$, $P_2\,(0;16)$ und $P_3\,(18;0)$ wird eine Parabel gelegt, deren Funktionsgleichung mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ angesetzt wird. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 324a - 18b + c &= 0, \\ c &= 16, \\ 324a + 18b + c &= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $c = 16$. Gleichsetzen der ersten und dritten Gleichung liefert $b = 0$. Es folgt $a = -\frac{4}{81}$. Die Funktionsgleichung der Parabel lautet

$$f(x) = -\frac{4}{81}x^2 + 16.$$

Um die Querschnittsfläche zu berechnen, muss das Integral $\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-18}^{18} \left\{-\frac{4}{81}x^2 + 16\right\} \mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{243}x^3 + 16x\right]_{-18}^{18} \\ &= -\frac{4}{243}\cdot(18)^3 + 16\cdot 18 - \left(-\frac{4}{243}\cdot(-18)^3 - 16\cdot 18\right) = 576 - \frac{8}{243}\cdot(18)^3 = 384. \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Halle beträgt $384\,\mathrm{m}^2$.

b) Für den Rauminhalt der Halle gilt

$$V = 384\,\mathrm{m}^2 \cdot 183\,\mathrm{m} = 70272\,\mathrm{m}^3$$

und somit 70272 Kubikmeter.

c) Für das Verhältnis gilt

$$\frac{A_{\text{Parabel}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{384\,\mathrm{m}^2}{36\cdot 16\,\mathrm{m}^2} = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 16 - V01116

Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.

Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Um die Querschnittsfläche des Grabens zu berechnen, müssen wir zuerst eine Funktionsgleichung einer Parabel ermitteln, welche durch die Punkte $P_1\,(-1{,}5;0)$, $P_2\,(0,b)$ und $P_3\,(1{,}5;0)$ verläuft. Wir setzen mit der quadratischen Funktionsgleichung $f(x) = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b} + \widetilde{c}$ an. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2{,}25\cdot\widetilde{a} - 1{,}5\widetilde{b} + \widetilde{c} &= 0, \\ \widetilde{c} &= b, \\ 2{,}25\cdot\widetilde{a} + 1{,}5\widetilde{b} + \widetilde{c} &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt $\widetilde{c} = b$ und setzen wir die beiden übrigen Gleichungen gleich, so folgt $\widetilde{b} = 0$. Es bleibt $\widetilde{a} = -\frac{4}{9}b$. Somit lautet die Funktionsgleichung

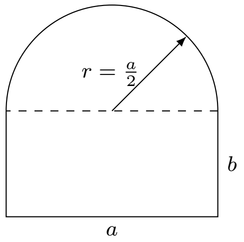
$$f(x) = -\frac{4b}{9}x^2 + b.$$

Um die Querschnittsfläche zu bestimmen, muss das Integral $\int\limits_{-1,5}^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1,5}^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1,5}^{1,5} \left(-\frac{4b}{9}x^2 + b\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{4b}{27}x^3 + bx\right]_{-1,5}^{1,5} \\ &= -\frac{4b}{27}\cdot(1{,}5)^3 + 1{,}5b + \frac{4b}{27}\cdot(-1{,}5)^3 + 1{,}5b = 3b - \frac{8b}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3b - b = 2b. \end{aligned}$$

Damit entspricht die Querschnittsfläche gerade dem Doppelten der Tiefe.

Aufgabe 17 - V01117
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis.
Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?



a sei die Breite des Kanals, b die Höhe des rechteckigen Teils und $r = \frac{a}{2}$ der Radius des aufgesetzten Halbkreises. Für den Umfang des Kanals wird dann

$$u = a + 2b + \pi a \quad \rightarrow \quad b = \frac{u - a - \pi a}{2} \tag{1}$$

Der Flächeninhalts des Querschnitts setzt sich aus dem Rechteck und dem Halbkreis zusammen:

$$A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) und vereinfachen ergibt als Zielfunktion des Flächeninhaltes

$$A(a) = \frac{a \cdot u}{2} - \frac{a^2(3\pi + 4}{8}$$

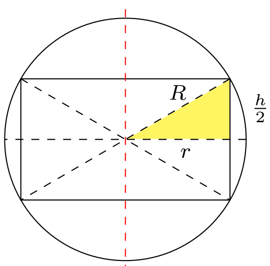
mit den Ableitungen

$$A'(a) = \frac{u}{2} - \frac{a(3\pi + 4)}{4} \qquad ; \qquad A''(a) = -\frac{3\pi + 4}{4} < 0$$

Die Nullstelle der 1. Ableitung ist $a = \frac{2u}{3\pi+4}$. Da die zweite Ableitung stets negativ ist, liegt ein lokales Maximum vor.
Für b wird $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$.
Der Kanal muss eine Breite von $a = \frac{2u}{3\pi+4}$ und eine rechteckige Höhe $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$ erhalten, um einen maximalen Flächeninhalt des Querschnitts von $A = \frac{u^2}{6\pi+8}$ zu erreichen.

Aufgabe 18 - V01118
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Es sei R der Radius der Kugel, r der Radius des Zylinders und h die Höhe des Zylinders. Um ihren Zusammenhang zu finden legen wir eine Schnittebene durch Kugel und Zylinder, die normal auf die Deck- und Bodenfläche des Zylinder steht und durch den Kugelmittelpunkt geht.



In der Abbildung ist die Drehachse des Zylinders rot dargestellt. Für das rechtwinklige Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{1}$$

a) Das Volumen des Zylinders berechnet sich zu

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Umstellen von (1) nach r^2 und einsetzen ergibt

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$ sind

$$h_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Die negative Lösung entfällt. Die 2. Ableitung $V'' = -\frac{3}{2}\pi h$ ist für alle positive h negativ. Damit liegt ein lokales Maximum vor.

Der Zylinder hat bei maximalem Volumen den Radius $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ und die Höhe $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$. Das Verhältnis ist $h : r = \sqrt{2} : 1$.

b) Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$M = 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}h$$

mit der 1. Ableitung

$$M' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

Die Nullstellen ergeben sich mit etwas Umstellen zu $h_{1,2} = \sqrt{2}R$. $h = \sqrt{2}R$ erweist sich mit etwas Rechenaufwand wieder als das gesuchte lokale Maximum.

Der Zylinder hat bei maximaler Mantelfläche den Radius $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ und die Höhe $h = \sqrt{2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = 2 : 1$.

c) Die Oberfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

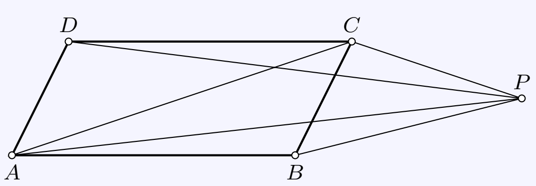
$$O = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi(h^2 - 4R^2)}{2}$$

mit der 1. Ableitung

$$O' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} - \pi h$$

Eine Nullstelle, die auch das lokale Maximum ergibt, ist $h = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. (Der rechnerische Nachweis ist sehr aufwendig). Der Zylinder hat bei maximaler Oberfläche den Radius $r = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}R$ und die Höhe $\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = (1 + \sqrt{5}) : 1$.

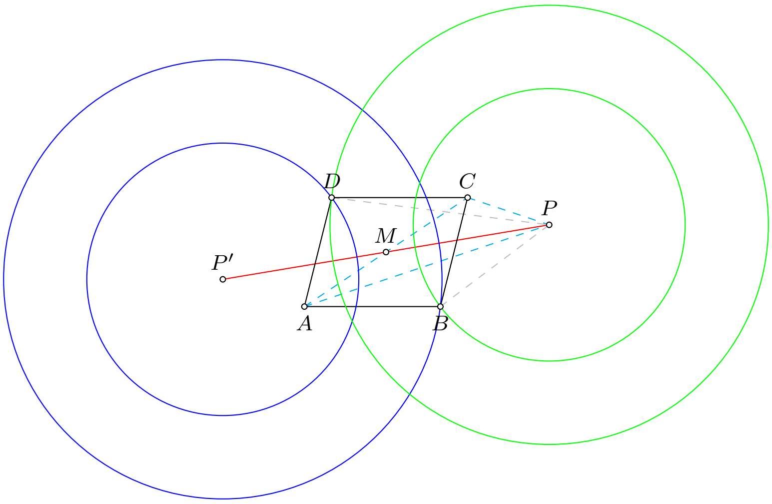
Aufgabe 19 - V01119
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

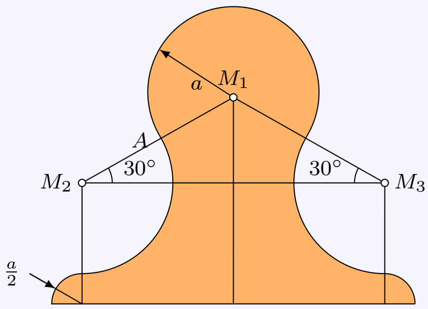
Das Dreieck ACP ist mit den bekannten Strecken AC, AP und CP unmittelbar konstruierbar (blaue gestrichelte Linien). Um das Parallelogramm zu konstruieren, spiegelt man zunächst den Punkt P am Mittelpunkt M der Geraden AC und erhält so den Punkt P'.
Nun schlägt man Kreise mit den Radien PB und PC um den Punkt P (grüne Kreise), und tut dasselbe um den Punkt P' (blaue Kreise).
Die Schnittpunkte des großen blauen Kreises mit dem kleinen grünen Kreis ergeben Kandidaten für den Eckpunkt B des Parallelogramms, während die Schnittpunkte des kleinen blauen Kreises mit dem großen grünen Kreis Kandidaten für den Eckunkt D darstellen.

In der Darstellung sind die Kandidaten ausgewählt, die eine Nummerierung der Ecken entgegen des Uhrzeigersinns erlauben.
Zu zeigen bleibt, dass $ABCD$ tatsächlich ein Parallelogramm ist.



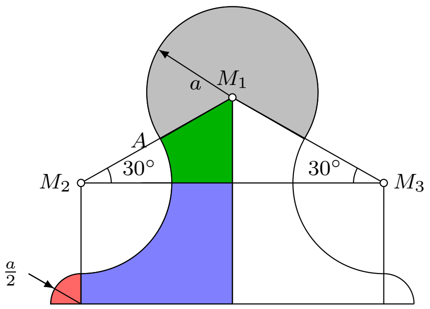
Die Punkte B und D sind punktsymmetrisch zu M, da sie als Schnittpunkte von Kreisen mit gleichen Radien und punktsymmetrischen Mittelpunkten konstruiert wurden. Damit sind die Längen MD und MB gleich.
Wegen der Punktsymmetrie von B und D geht deren Verbindungslinie durch M.
Die Diagonalen AC und BD treffen sich also in M und M halbiert beide Diagonalen. Damit ist nach einem bekannten Kriterium $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 20 - V01120



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = M_2A = a$ ist.

Die Figur setzt sich aus 4 verschiedenen Arten von Figuren zusammen:



Fläche 1 (hellgrau): Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 240°

$$A_1 = \pi a^2 \cdot \frac{240}{360}$$

Fläche 2 (grün): rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $2a$ und den Katheten a, $\sqrt{3}a$, von dem ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 30° abgezogen wird

$$A_2 = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}a - \frac{30}{360}\pi a^2$$

Fläche 3 (blau): Rechteck mit den Seitenlängen $\sqrt{3}a$ und $\frac{3}{2}a$ aus dem ein Viertelkreis (Radius a) herausgeschnitten wird

$$A_3 = a \cdot \sqrt{3}a - \frac{1}{4}\pi a^2$$

Fläche 4 (rot): Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$

$$A_4 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die Flächen 2, 3 und 4 treten in der Gesamtfläche zweimal auf, d.h.

$$A = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 = \frac{\pi + 24\sqrt{3}}{8}a^2$$

Aufgabe 21 - V01121
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

a) Mit dem Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(87-0)^2 + (54{,}4-0)^2} \approx 102{,}61,\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(153{,}6-87)^2 + (44-54{,}4)^2} \approx 67{,}41,\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(206{,}4-153{,}6)^2 + (25-44)^2} \approx 56{,}11,\\
|\overline{DE}| &= \sqrt{(303{,}5-206{,}4)^2 + (33{,}8-25)^2} \approx 97{,}50,\\
|\overline{EF}| &= \sqrt{(352-303{,}5)^2 + (0-33{,}8)^2} \approx 59{,}12.
\end{aligned}$$

Die Länge l der Landstraße beträgt $l \approx 382{,}75$ m. b) Für die zu asphaltierende Fläche gilt

$$A = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot l = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 382{,}75\,\mathrm{m} \approx 2105{,}13\,\mathrm{m}^2$$

und somit müssen ungefähr 2105,13 Quadratmeter Straße asphaltiert werden.

Aufgaben gelöst von Steffen Polster

8.2 Vorolympiade 1961

8.2.1 II. Runde V1961, Klasse 11

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

Aufgabe 1 - V11121
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

a) Mit $x = 1$ cm^3, $y = 10$ cm^3, $x + y = 11$ cm^3 ist das Verhältnis 1:10 und für das Mischungsverhältnis 1:2000000 ergibt sich damit:

$$\left(\frac{1}{11}\right)^n = \frac{1}{2000000} \qquad ; \qquad n = \frac{\log(2000000)}{\log(11)} \approx 6$$

b)

$$n_{Bak} = \frac{10000000}{2000000} = 5$$

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 2 - V11122
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

a) Wir suchen zuerst die konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$. Es gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = a_0 t$$

für alle $0\text{s} \leq t \leq 14\text{s}$ wegen $v(0\text{s}) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da

$$v(14\text{s}) = a_0 \cdot (14\text{s}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{80000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ist, folgt

$$a_0 = \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{14\text{s}} = \frac{100}{63}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und somit für die zurückgelegte Wegstrecke nach 14 Sekunden

$$w(14\text{s}) = \frac{a_0}{2} \cdot (14\text{s})^2 = \frac{19600}{126}\text{m} = \frac{1400}{9}\text{m} \approx 0{,}156\text{km}.$$

Also legt das Fahrzeug in der Beschleunigungsphase eine Strecke von ungefähr 0,156km zurück.

b) Für die Gesamtstrecke von 1km gilt

$$w_{\text{gesamt}} = \frac{1400}{9}\text{m} + \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot t_2 = \frac{9000}{9}\text{m}.$$

Somit folgt

$$\left(\frac{200}{9}\frac{m}{s}\right) \cdot t_2 = \frac{7600}{9}\text{m}$$

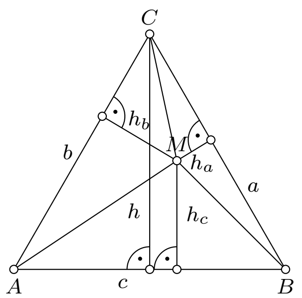
und daher $t_2 = 38$s. Damit ist 1km entsprechend nach

$$t_{\text{gesamt}} = 14\text{s} + 38\text{s} = 52\text{s}$$

zurückgelegt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 3 - V11123
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.



Wir bezeichnen mit ΔABC das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Da das Dreieck gleichseitig ist, gilt für die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten $a = \left|\overline{BC}\right|$, $b = \left|\overline{AC}\right|$ und $c = \left|\overline{AB}\right|$, dass $a = b = c$ ist. Diese Seiten möchten wir alle als Grundseite $g = a = b = c$ bezeichnen.

Liegt im Inneren des Dreiecks ein Punkt M, so entstehen die drei Dreiecke ΔABM, ΔBCM und ΔCAM. Diese Dreiecke besitzen ebenfalls die Grundseite g.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC mit Grundseite g und Höhe h ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei kleineren Dreiecke. Die Höhen in ΔABM, ΔBCM und ΔCAM nennen wir h_1, h_2 und h_3. Dies sind auch die Abstände von M zur entsprechenden Grundseite.

Es gilt somit

$$\frac{gh}{2} = \frac{gh_1}{2} + \frac{gh_2}{2} + \frac{gh_3}{2} = \frac{g}{2} \cdot \{h_1 + h_2 + h_3\}$$

und daher folgt

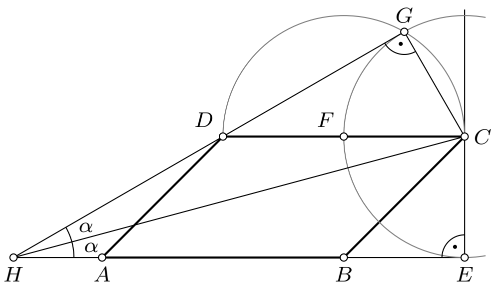
$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V11124
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

Den gesuchten Punkt H konstruiert man wie folgt:
1. Zeichne eine Senkrechte von C auf die Gerade AB. Der Schnittpunkt ist E.
2. Zeichne einen Kreis um den Mittelpunkt C durch den Punkt E.
3. Konstruiere den Mittelpunkt F der Strecke CD.
4. Zeichne einen Halbkreis um den Punkt F vom Punkt C zum Punkt D. Der Schnittpunkt der Kreise ist G.
5. Zeichne eine Gerade durch die Punkte D und G. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Gerade AB ist der gesuchte Punkt H.



Begründung:
Die Gerade HC muss die Winkelhalbierende der Geraden HE und HG sein. Das ist der Fall, weil die Dreiecke HEC und HCG kongruent sind, da sie in G und E einen rechten Winkel aufweisen, die Seite HC gemeinsam haben und eine weitere Seite (CG bzw. CE) gleich lang ist (SSW). Damit der Winkel $\angle DGC$ rechtwinklig ist, wurde wegen des Satzes von Thales der Kreis um den Mittelpunkt F mit dem Kreis um C geschnitten.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V11125

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Das Additions- und das Divisionszeichen.

b) Gesucht sind (rationale) Zahlen a,b,c mit $b \neq 0$ und (1) $a + b = c$ (2) $a : b = c$
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $a + b = a : b$ und daraus

$$a = \frac{b^2}{1-b}$$

Dies in (1) eingesetzt ergibt $\frac{b^2}{1-b} + b = c$ und daraus

$$c = \frac{b}{1-b}$$

Für jedes $b \neq 0{,}1$ ergibt sich damit eine Aufgabe

$$\frac{b^2}{1-b} + b = \frac{b}{1-b}$$

Wählt man $0 < b < 1$, so sind alle Werte a,b,c zudem positiv.

c) Mit $b = \frac{1}{3}$ ergibt sich $a = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Mit $b = \frac{3}{5}$ ergibt sich $a = \frac{9}{10}$ und $c = \frac{3}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

d) a,b,c können nicht alle positive ganze Zahlen sein, da für eine ganze Zahl $b > 1$ die Zahl $c = \frac{b}{1-b}$ negativ ist. (Zudem ist $1 - b$ kein Teiler von b; c ist also noch nicht einmal ganz.)

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

8.2.2 III. Runde V1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - V11131
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \leq 8000 \qquad ; \qquad 22y \leq 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x+y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Vom Materialverbrauch ist es am günstigsten, zunächst das Baumaterial für die Wohnungen vom Typ B zu verwenden. Es ist

$$y \leq \frac{24000}{22} \approx 1090{,}9$$

und somit werden 1090 Wohnungen vom Typ B gebaut. Damit muss

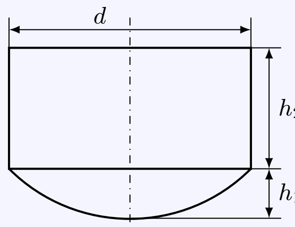
$$\begin{aligned} 5{,}23x + 4{,}19y &\leq 8000; \\ 5{,}23x &\leq 3432{,}9; \\ x &\leq \frac{3432{,}9}{5{,}23} \approx 656{,}386 \end{aligned}$$

sein, also werden 656 Wohnungen vom Typ A gebaut. Es muss also $x = 656$ und $y = 1090$ gelten.

Wollte man nur Wohnungen vom Typ A bauen, wäre $x < 1600$ und damit ist oben der günstigste Fall beschrieben, um die Gesamtanzahl zu maximieren.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - V11132



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

a) Die Gesamtfläche des Blechbehälters ist

$$A = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

Diese Fläche soll gleich der Fläche der kreisförmigen Blechscheibe sein, deren Durchmesser D sei. Daher gilt:

$$\frac{D^2\pi}{4} = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$
$$D = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2 + dh_2}$$

b) Der Durchmesser der Blechscheibe betrug $D = 416{,}8$mm.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und OlgaBarati

Aufgabe 3 - V11133
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

a) O.B.d.A. seien $A = (-\frac{e}{2},0)$ und $B = (\frac{e}{2},0)$, so sind alle Punkte $F = (x,y)$ mit

$$s = ((x + \frac{e}{2})^2 + y^2) + ((x - \frac{e}{2})^2 + y^2) = 2x^2 + 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2y^2$$

gesucht. Diese Gleichung ist äquivalent zur Kreisgleichung

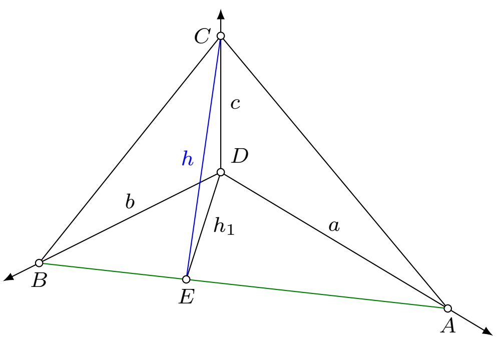
$$x^2 + y^2 = \frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Die gesuchten Punkte F bilden also einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke AB ist und dessen Radius $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}$ ist.

b) Da Quadrate reeller Zahlen stets größer oder gleich Null sind, gibt es nur solche Punkte F, wenn $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4} \geq 0$ ist. Insbesondere gibt es nicht bei jeder Wahl von e und s solche Punkte.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 4 - V11134
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!



Die gesuchte Fläche des Dreiecks ABC ist

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}dh = \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2c^2 + (\tfrac{1}{2}dh_1)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2c^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2 + A_{ABD}^2} = \sqrt{A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2}$$

Daher gilt

$$A_{ABC}^2 = A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V11135
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist?
b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

a) 1. Wägung: Es werden für jede Waagschale vier Kugeln ausgewählt. Fünf Kugeln werden nicht gewogen.

1.1. Die Waage zeigt Gleichgewicht. Dann sind die 8 Kugeln neutral. Drei dieser Kugeln wiegt man (rechte Seite) gegen 3 noch nicht verwendete Kugeln (linke Seite).

1.1.1. Ist die linke Seite leichter, so ist eine von den drei Kugeln leichter. Zwei dieser Kugeln werden gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.1.2. Ist die linke Seite schwerer, so ist eine von den drei Kugeln schwerer. Analog zu 1.1.1. bestimmt man diese.

1.1.3. Keine Seite ist leichter. Dann muss die gesuchte Kugel unter den zwei bisher noch bei keiner Wägung verwendeten Kugeln sein. Eine von beiden Kugeln vergleicht man mit einer neutralen. Bei Gleichgewicht ist die noch nicht verwendete die gesuchte, andernfalls findet man die gesuchte, die entweder zu leicht oder zu schwer ist.

1.2. Die Waage zeigt kein Gleichgewicht. O.B.d.A. sei die linke Seite leichter. Auf die eine Waagschale werden dann drei von der leichten Seite und eine von der schweren Seite gegen eine der leichten Seite und 3 bisher noch nicht verwendete Kugeln gewogen.

1.2.1. Die linke Seite ist leichter. Damit ist eine von drei Kugeln leichter. Nun werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.2.2. Beide Seiten sind gleich schwer. Damit muss eine der drei Kugeln der rechten Seite der 1.Wägung (die bei der 2.Wägung nicht benutzt wurden) muss damit schwerer sein. Es werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen schwerer, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel schwerer.

1.2.3. Die linke Seite ist schwerer. Dann kann die eine Kugel der linken Seite, die von der schweren Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu schwer, oder die eine Kugel der rechten Seite, die von der leichten Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu leicht. Die vielleicht zu schwere Kugel wird mit einer der neutralen Kugeln verglichen. Entweder ist sie schwerer oder die nicht verwendete Kugel ist zu leicht.

b) In allen Fällen, außer dem Fall 1.1.3. bei dem die allerletzte nicht verwendete Kugel die gesuchte ist, kann man entscheiden, ob die gesuchte Kugel zu leicht oder zu schwer ist. In diesem einen Fall allerdings nicht.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

8.3 I. Olympiade 1961

8.3.1 I. Runde 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011111
Es ist zu beweisen, dass bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n}-1$ durch 7 teilbar ist.

Es ist zu zeigen, dass 7 Teiler von $6^{2n}-1$ für alle natürlichen Zahlen n ist. Die Behauptung können wir auch schreiben als $7\cdot z = 6^{2n}-1$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
Als Induktionsanfang finden wir die Behauptung für $n=0$ durch $6^{2\cdot 0}-1 = 1-1 = 0 = 7\cdot$ bestätigt.
Zum Induktionsschritt setzen wir voraus, dass es zu jedem $n=k$ ein $z_k \in \mathbb{N}$ gibt, für welches die Gleichung $7\cdot z_k = 6^{2k}-1$ gilt.
Die Induktionsbehauptung lautet dann, dass es für $n=k+1$ auch ein $z_{k+1}\in\mathbb{N}$ gibt, das die Gleichung $7\cdot z_{k+1} = 6^{2(k+1)}-1$ erfüllt. Den Induktionsbeweis führen wir nun mit folgender Gleichungskette:

$$6^{2(k+1)}-1 = 6^{2k+2}-1 = 36\cdot 6^{2k}-1 = 36\cdot 6^{2k}-36+35 = 36\cdot(6^{2k}-1)+35 =$$

$$= 36\cdot 7z_k + 7\cdot 5 = 7\cdot(36z_k+5) = 7\cdot z_{k+1}$$

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 011112
Ein Dampfer fährt auf einem Fluss von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

In beiden Fahrtrichtungen auf dem Fluss können wir das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung $s=vt$ annehmen. Für die Fahrt in Strömungsrichtung gilt damit $v=v_D+v_S$, für die Fahrt entgegen der Strömung gilt $v=v_D-v_S$, wobei v_D die Eigengeschwindigkeit des Dampfers und v_S die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Es ist also

$$s = (v_D+v_S)\cdot(3h) = (v_D-v_S)\cdot(4{,}5h)$$

$$v_D = \frac{4{,}5h+3h}{4{,}5h-3h}v_S = 5v_S$$

und damit $s=(v_D+v_S)\cdot(3h) = 6v_S\cdot(3h)$. Für ein Boot, das nur mit der Strömung treibt, gilt $s=v_St$; mit obiger Gleichung also

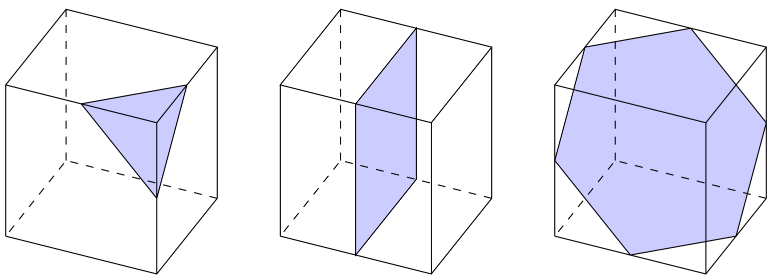
$$s = 6v_S\cdot(3h) = v_St$$

Daraus folgt die Fahrzeit für ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug von $t=18$ h.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 3 - 011113
Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, dass der erhaltene Schnitt ein a) gleichseitiges Dreieck,
b) Quadrat,
c) regelmäßiges Fünfeck,
d) regelmäßiges Sechseck
ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Die möglichen Schnitte sind in den folgenden Bildern dargestellt:



a) Ja. Jeder Schnitt, der entlang dreier zusammentreffender Kanten gleiche Strecken abschneidet, erzeugt ein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche. Dies ist leicht einzusehen, da alle durch den Schnitt entstehenden rechtwinkligen Dreiecke auf den Würfeloberflächen kongruent sind (SWS), mithin auch die Hypotenusen.

b) Ja. Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat, welches der Würfelfläche kongruent ist.

c) Nein. Wäre eine Schnittfläche eines Würfels bei einem ebenen Schnitt ein reguläres Fünfeck, so würden je zwei verschiedene Kanten des Fünfecks zu zwei verschiedenen Seitenflächen des Würfels gehören (denn ansonsten läge das ganze Fünfeck auf einer Seitenfläche, was nicht geht).

   Zwei verschiedene dieser fünf Seitenflächen dürften aber nicht parallel sein, weil sich (die Verlängerungen von) je zwei verschiedenen Fünfeckskanten in einem Punkt schneiden. Da es aber im Würfel nur sechs Seitenflächen gibt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel sind, findet man keine fünf paarweise nichtparallelen Seitenflächen. Es gibt also keinen solchen ebenen Schnitt.

d) Ja. Der Schnitt trifft - wie im Bild gezeigt - die Würfelkanten in deren Mittelpunkten. Alle Seiten des sechseckigen Schnitts haben offensichtlich die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, wenn a die Länge einer Kante bezeichnet.

   Der angegebene Schnitt ist auch tatsächlich eben, da alle Abstände der Eckpunkte des Sechsecks vom oberen–rechten–vorderen (oder unteren–linken–hinteren) Eckpunkt des Würfels untereinander gleich, nämlich $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ sind.

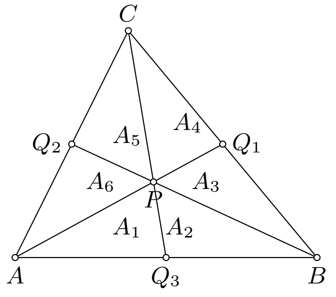
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011114
Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.
Es ist zu beweisen, dass unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Beweis: Nennen wir die Teilflächen, in die das Dreieck $P_1P_2P_3$ durch P zerlegt wird, $A_1, A_2, ...; A_6$, die gesamte Fläche sei A. Dann gilt, da sich die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten:



$$x = \frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_4} = \frac{A - A_3 - A_4}{A_3 + A_4}$$
$$x = \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{A_3 + A_4}{A_5} = \frac{A_1 + A_2}{A_6} = \frac{A - A_5 - A_6}{A_5 + A_6}$$
$$x = \frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_1} = \frac{A_3 + A_4}{A_2} = \frac{A - A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

Betrachten wir nun die Teildreiecke $P_1P_2P, P_2P_3P, P_3P_1P$, deren Flächeninhalte $A_1 + A_2, A_3 + A_4$ bzw. $A_5 + A_6$ betragen und deren Summe A ist, so ist nach den obigen Gleichungen offensichtlich, dass wenigstens eines der Verhältnisse

$$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{1}{1+z} \qquad \frac{A_3 + A_4}{A} = \frac{1}{1+x} \qquad \frac{A_5 + A_6}{A} = \frac{1}{1+y} \qquad (1)$$

(deren Summe 1 ergibt) nicht größer und eines nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Dabei ist der Fall, dass alle Verhältnisse gleich $\frac{1}{3}$ sind, eingeschlossen.
Diese Aussage ist nach elementarer Umformung der Gleichungen (1) äquivalent damit, dass wenigstens eine der Größen x, y, z nicht größer als 2 und wenigstens eine nicht kleiner als 2 ist.

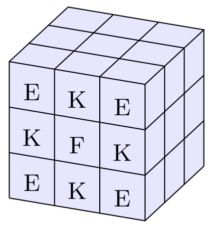
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 011115
Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind.
Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, dass in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

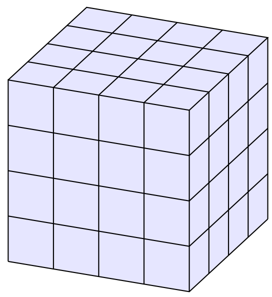
a) Wie viel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wie viel haben eine, wie viel zwei und wie viel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!



a) (Bild a) Für einen Würfel mit den Abmaßen $3 \times 3 \times 3$ haben
– 8 kleine Eckwürfel (E) drei bemalte Flächen,
– 12 kleine Kantenwürfel (K) zwei bemalte Flächen,
– 6 kleine Flächenwürfel (F) eine bemalte Fläche und
– 1 kleiner Innenwürfel keine bemalte Fläche.



b) (Bild b) Für einen Würfel mit den Abmaßen $4 \times 4 \times 4$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(4-2) = 24$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(4-2)^2 = 24$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(4-2)^3 = 8$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

c) Für einen Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(n-2)$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(n-2)^2$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(n-2)^3$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

Beweis:
Kleine Würfel mit drei bemalten Flächen liegen genau an den Ecken des großen Würfels. Da ein Würfel immer 8 Ecken hat, gibt es für jede Größe des Würfels immer 8 kleine Würfel mit drei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen liegen genau auf den Kanten des großen Würfels, aber nicht auf den Ecken. Eine Kante eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n kleine Würfel lang. Dazu gehören auch die zwei Eckwürfel. Damit erhält man für jede Kante des Würfels $n-2$ kleine Würfel mit 2 bemalten Flächen. Da ein Würfel immer 12 Kanten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $12(n-2)$kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit einer bemalten Fläche liegen auf den Seiten des großen Würfels, aber nicht auf den Kanten. Eine Seite eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n^2 kleine Würfel groß. Dazu gehören auch die vier Kanten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für jede Seite des Würfels $(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche. Da ein Würfel immer 6 Seiten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $6(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche.

Kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche liegen im Inneren des Würfels. Der $(n \times n \times n)$-Würfel besteht aus n^3 kleinen Würfeln. Dazu gehören auch die sechs Seiten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für das Innere des Würfels $(n-2)^3$ kleine Würfel. Damit gibt es immer $(n-2)^3$ kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche.

Zur Probe werden alle ermittelten Anzahlen addiert: $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3$, in Übereinstimmung damit, dass der Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ aus genau n^3 kleinen Würfeln besteht.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

8.3.2 II. Runde 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011121
3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden. Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist?
Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Es gibt noch andere Zahlentripel, die die Bedingungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $c = b + 1$ erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 \Rightarrow a^2 = 2b + 1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad (2)$$

Aus (1) lässt sich leicht erkennen, dass a^2 und damit a eine ungerade Zahl sein muss.
Ein Tripel (a, b, c) mit den geforderten Eigenschaften kann somit schnell gefunden werden, indem man a eine ungerade Zahl zuweist und b mittels (2) berechnet.
c ist dann um 1 größer als b.
Es lässt sich also für jede beliebige ungerade natürliche Zahl a ein derartiges Tripel bestimmen.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 011122
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in "Rollenform" (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

1. Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?
2. Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

a) Die Bedingungen für das Höchstmaß lauten: $l + 2d \leq 100$ cm und $l \leq 80$ cm. Damit erhält man für das Volumen eines Zylinders:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l \leq \frac{\pi}{4} d^2 (100cm - 2d) = \frac{\pi}{4} \cdot 100cm \cdot d^2 - \frac{\pi}{2} d^3$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist $V'(d) = 0$, also

$$V'(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm \cdot d - \frac{3\pi}{2} d^2 = 0$$

somit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{100}{3}$ cm. Die erste Lösung entfällt, da das Volumen dann null wäre. Die zur zweiten Lösung gehörige maximale Länge ist $l = \frac{100}{3}$ cm, das entsprechende Volumen $V = 29089$ cm^3.
Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Lösung tatsächlich ein Maximum ist, wofür $V''(d) < 0$ hinreichend ist:

$$V''(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm - 3\pi d = -\pi \cdot 50cm < 0$$

Es handelt sich also wirklich um ein Maximum. Das Höchstvolumen der Sendung beträgt 29089 cm^3. In diesem Fall betragen Durchmesser und Länge $\frac{100}{3}$ cm.

b) Die Bedingungen für das Mindestmaß schließen einen Durchmesser von 0 cm nicht aus, was auf einen theoretischen Mindestwert des Volumens von 0 cm^3 führt.
Nach der ersten Bedingung beträgt die Länge dann mindestens 17 cm.

Aufgabe gelöst von Korrina Grabski

Aufgabe 3 - 011123
Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann.
Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?
Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Bezeichnen wir die Anzahl der gekauften Tiere mit a_1, a_2, a_3, a_4 (für Herrn Meier, Krause, Schulze und Franke) bzw. mit b_1, b_2, b_3, b_4 (für die Frauen in dieser Reihenfolge), wobei $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ ist.
Dann gibt jeder der Männer a_i^2 und jede der Frauen b_i^2 DM aus und es gilt:

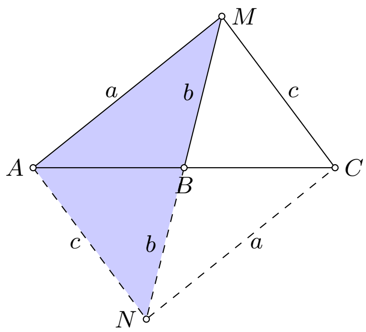
$$a_i^2 - b_i^2 = (a_i + b_i)(a_i - b_i) = 96 = 2^5 \cdot 3 = \{48 \cdot 2, 32 \cdot 3, 24 \cdot 4, 16 \cdot 6, 12 \cdot 8\}$$

Damit kommen folgende Paare (a_i, b_i) in Betracht: $(25, 23)$, $(14, 10)$, $(11, 5)$, $(10, 2)$.
Die Aussage „Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen“ kann also nur bedeuten, dass die Meiers das Paar $(25, 23)$ sind und die Männer der Paare $(14, 10)$ und $(11, 5)$ seine Schwäger.
Die Zahl 10 taucht zweimal auf, also ist das Paar $(10, 2)$ den Krauses zuzuordnen und die Frau des Paars $(14, 10)$ ist seine Schwägerin.
Aus „Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses“ folgt, dass das Paar $(14, 10)$ die Schulzes sind, und schließlich $(11, 5)$ die Frankes.
Herr Meier ist also sowohl mit Herrn Schulze als auch mit Herrn Franke verschwägert.
Das bedeutet im ersten Fall, dass entweder Frau Meier eine geborene Schulze oder Frau Schulze eine geborene Meier ist. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da Frau Schulze eine geborene Lehmann ist, daher: Frau Meier ist eine geborene Schulze.
Frau Franke ist eine geborene Meier. Frau Krause ist eine geborene Schulze.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011124
Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, dass ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $AB = BC$ ist.
Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!
Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

I. Analyse:
Betrachten wir das Dreieck AMC, so ist MB wegen $AB = BC$ eine der Seitenhalbierenden. Es gilt also, ein Dreieck aus zwei Seiten und der eingeschlossenen Seitenhalbierenden zu konstruieren. Dazu ergänzen wir AMC zu einem Parallelogramm $AMCN$, in welchem sich die Diagonalen AC und MN bekanntermaßen stets halbieren.
Das Teildreieck AMN kann somit aus den gegebenen Stücken hergestellt werden.



II. Konstruktionsbeschreibung:

Wir konstruieren das Dreieck AMN aus den Seitenlängen a, c und $2b$ nach Kongruenzsatz SSS. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist dann B und AB verdoppelt liefert Punkt C.

III. Beweis:
Nach obiger Konstruktion ist AMN ein Dreieck, in dem $AM = a, AN = c$ und $MB = BN = b$ gilt sowie AB eine Seitenhalbierende ist. Da C durch Verdopplung von AB entsteht, gilt die Kongruenz $\triangle ABN \cong \triangle CBM$ (SWS), d.h. $AN = MC = c$. Die Punkte A, B und C haben damit die geforderten Abstände von M.

IV. Konstruktion:
Das Dreieck AMN existiert genau dann, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: $a + c > 2b$ und $c + 2b > a$. Das führt auf die gesuchten Bedingungen für die Länge b:

$$\frac{1}{2}(a - c) < b < \frac{1}{2}(a + c)$$

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

8.3.3 III. Runde 1961, Klasse 11

Aufgabe 1 - 011131
Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 $\frac{km}{h}$ fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.
Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 $\frac{m}{s^2}$ eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Nach den bekannten Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\Delta s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ und $\Delta v = at$ folgt

$$\Delta s = \frac{-v_0}{2}t + v_0 t \Rightarrow t = \frac{2\Delta s}{v_0} \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s}$$

Mit den gegebenen Werte $v_0 = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$ und $\Delta s = 70$ m ist die Bremsverzögerung $-a \approx 4{,}464\frac{m}{s^2}$, d.h. die vorgeschriebene Bremsverzögerung wurde eingehalten.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 2 - 011132
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält?
Die Behauptung ist zu begründen!

Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müsste die erste Ziffer von n gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von m gleich der Ziffernanzahl von n ist.
Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.
Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 011133
In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator.
Eine Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so dass die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen.
Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13500,- M aufgewandt werden.
Wieviel Ventilatoren müssten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird?
Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d.h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

$\text{Preis}_{\text{alt}} = 19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}}$; $\text{Preis}_{\text{neu}} = 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}}$; Gesamtkosten = 13500 M;

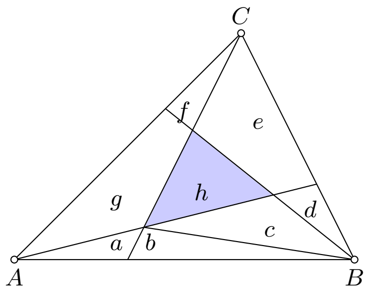
$$\text{Jahreskosten} = \frac{13500M}{3} = 4500M$$

$$19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x = 4500M + 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x \Rightarrow x = 743{,}8 \text{ Ventilatoren}$$

Es müssen mindestens 744 Ventilatoren jährlich hergestellt werden.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 4 - 011134
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A_0, B_0 bzw. C_0, so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist.



Beweis: Bezeichnen wir die durch die Teilung entstandenen Teilflächen mit $a, b, ..., h$ (s. Bild).
Wir zeigen zunächst, dass $f + g = 6a$ gilt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke bei gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten. Damit lassen sich folgende Gleichungen ablesen:

$$f + g = (f + g + e + h) - (e + h) = 2(a + b + c + d) - 2(c + d) = 2(a + b) = 2a + 4a = 6a$$

Auf analoge Weise erhalten wir die Gleichungen $a + b + c = 6d$ und $d + e = 6f$, deren Addition

$$(f + g) + (a + b + c) + (d + e) = A - h = 6(a + d + f) \qquad (1)$$

ergibt, wobei A der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist. Außerdem gilt:

$$2(a + b + c + d) = e + f + g + h \qquad ; \qquad 2(d + e + f) = g + a + b + c + h$$

$$2(f + g + a) = b + c + d + e + h$$

deren Addition auf

$$3(a + d + f) = 3h \Rightarrow a + d + f = h \qquad (2)$$

führt. (1) und (2) ergeben dann die Behauptung $h = \frac{1}{7}A$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 011135 = 011234
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

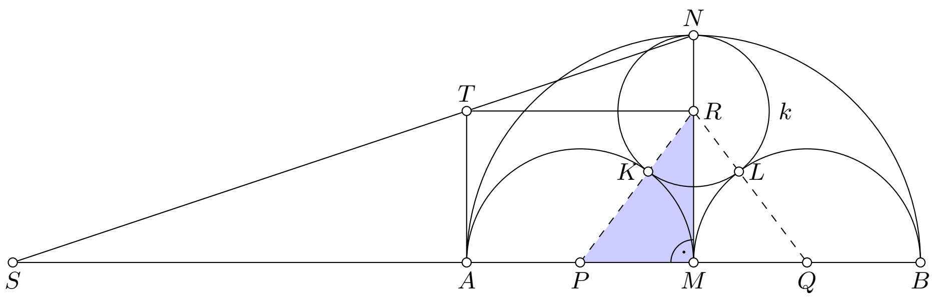
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d.h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d.h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:

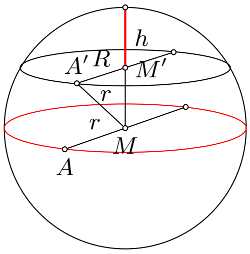


Aufgabe gelöst von Steffen Weber

8.4 II. Olympiade 1962

8.4.1 I. Runde 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021111
Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongressgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte.
Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m.
Berechnen Sie:
a) den Radius r der Kugel,
b) die Fläche der Kugelkalotte und
c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7 \frac{p}{cm^3}$.)



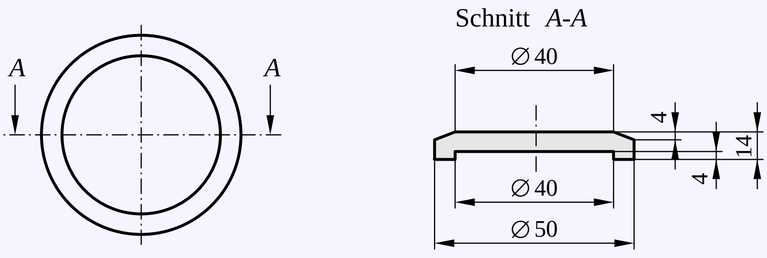
Wie im Bild dargestellt ist rot der Basiskreis mit Radius $R = \frac{1}{2} \cdot 31{,}2$ m $= 15{,}6$ m und Mittelpunkt M' und Höhe $h = 9{,}6$ m. A' sei ein Punkt auf dem Basiskreis und der Kugeloberfläche. M sei der Mittelpunkt der Kugel. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MM'A'$:

$$A'M^2 = r^2 = MM'^2 + A'M'^2 = (r-h)^2 + R^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

a) Damit erhalten wir $r = \frac{h^2+R^2}{2h} = 17{,}5$ m.
b) Die Fläche der Kugelkalotte beträgt $O = \pi(R^2 + h^2) = 1054$ m^2.
c) Das Gewicht der Aluminiumhaut beträgt $G = \gamma V = \gamma O s = 3{,}98$ Mp.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

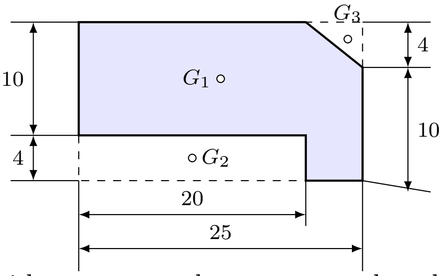
Aufgabe 2 - 021112
Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?
b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Hier muss zunächst das Volumen desjenigen Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die grau abgebildete Fläche um die Symmetrieachse (d.i. die linke Kante im Bild) rotiert.
Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung eines ebenen Gebietes um eine dieses Gebiet nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F dieses Gebietes mit dem

Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.



Die graue Fläche ist dabei die Differenz aus einem großen Rechteck mit den Maßen 25 mm × 14 mm und einem kleinen Rechteck (links unten, 20 mm × 4 mm) sowie einem Dreieck (rechts oben, Fläche 10 mm^2).
Die Abstände der Schwerpunkte G_1 (großes Rechteck), G_2 (kleines Rechteck) und G_3 (Dreieck) betragen: $s_1 = 12{,}5$ mm, $s_2 = 10$ mm und $s_3 = 23{,}33$ mm.

Bei letzterem wurde ausgenutzt, dass die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks gleich dem arithmetischen Mittel der jeweiligen Eckpunktkoordinaten sind. Damit erhalten wir:

$$V = 2\pi(350mm^2 \cdot 12{,}5mm - 80mm^2 \cdot 10mm - 10mm^2 \cdot 23{,}33mm) = 20996mm^3$$

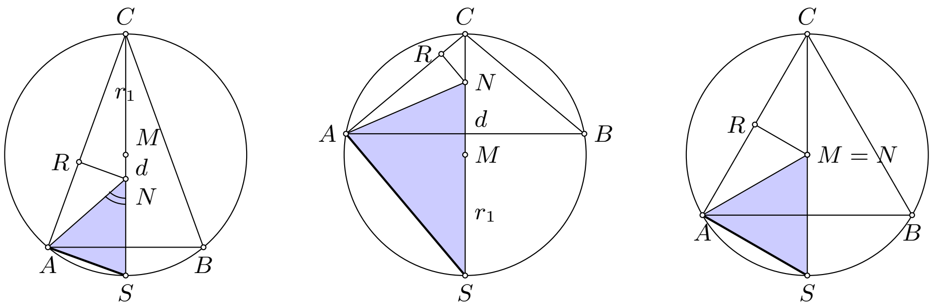
a) Gegenüber der zylindrischen Scheibe vom Volumen $V_0 = \frac{1}{4}d^2h$ =1 27489 mm^3 ergibt das eine Materialeinsparung von ca. 23,6%.
b) Pro Stück werden $V_0 - V = 6493$ mm^3 eingespart, also insgesamt 194790 mm^3.
Bezogen auf V_0 entspricht das einer Menge von ca. 7 Bunsenbrennerfüßen.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 021113
Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, dass für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!



Die Behauptung kann leicht in

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1r_2 \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{r_1 - d}$$

umgeformt werden, was auf eine Anwendung des Strahlensatzes schließen lässt. Wir gelangen so zu folgendem Beweis:

(Bild links) Seien M und N Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt des gleichschenkligen Dreiecks ABC (wobei M zunächst zwischen C und N liegen soll, welches für $\angle ACB \equiv \gamma < 60°$ stets der Fall ist), S der Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis und R der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC.
Dann sind $\triangle CRN$ und $\triangle CAS$ rechtwinklige Dreiecke − Ersteres, da der Berührungsradius NR stets senkrecht auf der Seite steht und Zweites wegen $\angle CAS = 90°$ (Thales-Kreis).
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

Um nun von (2) zu (1) zu gelangen genügt es, die Gleichheit der Strecken AS und $NS = r_1 - d$ zu zeigen. Diesen Nachweis führen wir über die Gleichheit der Basiswinkel $\angle ANS$ und $\angle NAS$ des Dreiecks ANS. Es gilt einerseits $\angle ANS = \angle ACN + \angle CAN$ (Außenwinkel) $= \frac{\gamma}{2} + \angle NAB$ (Winkelhalbierende), andererseits $\angle NAS = \angle NAB + \angle BAS$ (Winkelsumme) $= \angle NAB + \frac{\gamma}{2}$ (gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $SB = SA$). Damit ist (1) bewiesen.

(mittleres Bild b) Im Fall $\gamma > 60°$ liegt M zwischen S und N und es folgt

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 - d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

Auch hier ist das Dreieck ANS gleichschenklig, nun jedoch mit $AS = NS = r_1 + d$. Die beiden letzten Gleichungen liefern ebenfalls die Behauptung (1).

(rechtes Bild) Im Fall $\gamma = 60°$ ist das Dreieck ABC gleichseitig, beide Mittelpunkte fallen übereinander und die Behauptung (1) gilt auch hier mit $d = 0$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 021114
Es ist zu beweisen, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}$$

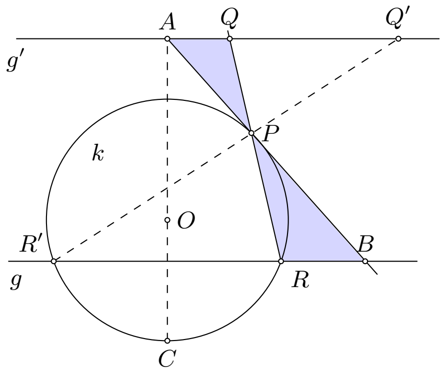
Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(2x)$ nicht negativ, also gilt $(1 - \sqrt{\sin(2x)})^2 \geq 0$ bzw. $1 + \sin(2x) \geq 2\sqrt{\sin(2x)}$.
Nach Additionstheoremen ist das äquivalent zu

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \geq 2\sqrt{2} \sin x \cos x \qquad (1)$$

Da $2\sqrt{2} \sin x \cos x \geq 0$ und $2 \sin x \cos x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ folgt aus (1) die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 5 - 021115
Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.
a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, dass $PR = PQ$ ist!
b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!



Sei k der gegebene Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sowie A auf g derjenige Punkt mit kürzestem Abstand zu O.
a) Konstruktion: Durch Verdoppelung der Strecke AP entsteht Punkt B. Die Parallele $g' \parallel g$ durch B schneide k in den Punkten R bzw. R'. Die Geraden PR und PR' schneiden g in den Punkten Q bzw. Q'.

Die gesuchten Sekanten sind dann RPQ bzw. $R'PQ'$.

Beweis: Nach obiger Konstruktion und Kongruenzsatz WSW ($\angle QAP = \angle RBP$ Wechselwinkel, $AP = PB$ sowie $\angle APQ = \angle BPR$ Scheitelwinkel) gilt $\triangle APQ \cong \triangle BPR$, woraus die Forderung $PR = PQ$ sofort folgt.
Ebenso folgern wir aus $\triangle APQ' \cong \triangle BPR'$ die Gleichheit $PR' = PQ'$. □

b) Offensichtlich schlägt die Konstruktion fehl, wenn g' keine Schnittpunkte mit k hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der senkrechte Abstand von P zu g größer als die Hälfte des Abstandes $AC = a+r = 8$ cm, also größer als 4 cm ist. Dabei ist C der Schnittpunkt der Geraden AO mit k, der den größeren Abstand zu g hat.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 6 - 021116
Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

Zunächst kann man bereits aus den Wurzeln folgende Bedingung ableiten: $-1 \leq x \leq 3$. Als nächstes sind die Stellen zu berechnen, an denen die Ungleichung ihren Wahrheitswert wechselt, also wo $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} &= \frac{1}{2} \\
\sqrt{3-x} &= \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \\
3 - x &= \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1} \\
\frac{7}{4} - 2x &= \sqrt{x+1} \\
\frac{49}{16} + 4x^2 - 7x &= x + 1 \\
4x^2 - 8x + \frac{33}{16} &= 0 \\
x^2 - 2x + \frac{33}{64} &= 0 \\
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{33}{64}} \\
x_1 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \quad ; \quad x_2 &= 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}
\end{aligned}$$

Da quadriert wurde, kann es Scheinlösungen geben. Es muss also noch eingesetzt werden.
$\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = -\frac{1}{2} \to$ Scheinlösung $\sqrt{3-x_2} - \sqrt{x_2+1} = \frac{1}{2} \to$ Lösung x_2 ist also die gesuchte Grenze.
Die Ungleichung wird wahr für alle x, für die gilt: $-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

8.4.2 II. Runde 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021121
Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, dass mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10000fache gesteigert werden kann.
a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)
Vergleichen Sie die Ergebnisse!

a) Wenn die Energieerzeugung E ein konstantes prozentuales Jahreswachstum x hat, erhält man die Gleichung $10000E = E \cdot (1+x)^{100}$.
Die Lösung ist $x = \sqrt[100]{10000} - 1 = 9{,}65\%$.

b) Die Gleichung lautet: $327 = 170 \cdot (1+y)^6$.
Die Lösung ist $y = \sqrt[6]{\frac{327}{170}} - 1 = 11{,}53\%$.

Vergleich:
$y > x$, das tatsächliche Wachstum ist größer als das angenommene.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 2 - 021122
Beweisen Sie, dass stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1{,}5$ ist!

Nach der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel gilt:

$$\frac{|\sin\alpha| + |\cos\alpha|}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

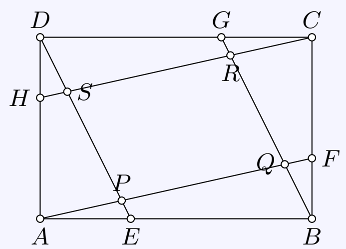
Die letzte Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $2 = \frac{8}{4} < \frac{9}{4}$.
Schließlich bemühen wir noch die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$ und erhalten

$$|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq |\sin\alpha| + |\cos\alpha| < \frac{3}{2}$$

also das gewünschte Ergebnis $\sin\alpha + \cos\alpha \neq \frac{3}{2}$.

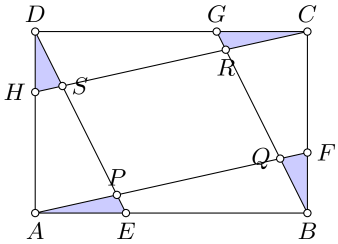
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 021123



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H.
Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abbildung).
a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?
b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

a) Offensichtlich gelten wegen $AB = CD$, $BC = DA$, $AE = CG$ und $BF = DH$ folgende Kongruenzen: $\triangle ABF \cong \triangle CDH$ bzw. $\triangle BCG \cong \triangle DAE$ (Kongruenzsatz SWS), also $AF = CH$.
Darüber hinaus gilt auch $\triangle AEP \cong \triangle CGR$ und $\triangle BFQ \cong \triangle DHS$ (Kongruenzsatz WSW), somit $AP = CR$, $PE = RG$, $BQ = DS$ und $QF = SH$. Daraus folgt $PQ = RS$ und $QR = SP$. Das Viereck hat mithin gegenüberliegende Seiten, die gleich lang sind, ist damit ein Parallelogramm.



b) Zuerst ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen. Sei A_0 die Fläche des Rechtecks A_{BCD} und A_{PQRS} die Fläche des Parallelogramms $PQRS$ – aus diesen beiden suchen wir das Verhältnis A_{PQRS}/A_0. Weiterhin seien die Flächeninhalte der Dreiecke AEP, ABQ, BFQ und BCR mit A_1, A_2, A_3 und A_4 bezeichnet. Aus Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $A_2 = 9A_1$ und $A_4 = 9A_3$. Außerdem hat man

$$A_0 = AB \cdot BC = 3 \cdot AB \cdot BF = 6A_{\triangle ABF} = 6(A_2 + A_3)$$

und analog $A_0 = 6(A_4 + A_1)$. Daraus bekommen wir die Gleichung

$$A_2 + \frac{1}{9}A_4 = A_4 + \frac{1}{9}A_2$$

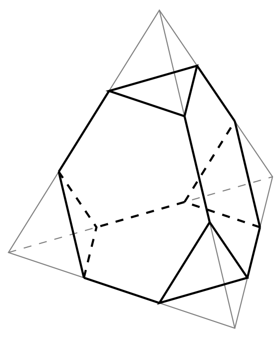
aus der $A_2 = A_4$ und $A_1 = A_3$ folgen. Einsetzen führt auf $\frac{1}{6}A_0 = A_2 + \frac{1}{9}A_2$, es folgt $A_2 = \frac{3}{20}A_0$. Jetzt sieht man

$$A_{PQRS} = A_0 - 4A_2 = A_0 - \frac{12}{20}A_0 = \frac{2}{5}A_0$$

Aufgabe gelöst von Echard Specht und Carsten Balleier

Aufgabe 4 - 021124
Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, dass von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.
Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Regelmäßige Sechsecke auf den Seitenflächen des Tetraeders mit der Kantenlänge a entstehen nur, wenn dessen Kanten gedrittelt werden und somit vier kleine regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ abgeschnitten werden.



Jeder dieser kleinen Tetraeder hat ein Volumen von $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des ursprünglichen Tetraeders, also hat der verbleibende Körper ein Volumen von $V' = (1 - \frac{4}{27})V = \frac{23}{27}$ des ursprünglichen Volumens V. Mit der Volumenformel eines Tetraeders $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ergibt sich $V' = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$.

Auf jeder Seitenfläche fallen durch das Abschneiden drei kleine gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ weg, dafür entsteht an jeder Ecke ein neues dieser Dreiecke. Die Oberfläche des Restkörpers beträgt also

$$A' = A - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}A = \frac{7}{9}A \quad \text{bzw.} \quad A' = \frac{7}{9}\sqrt{3}a^2$$

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 021125
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

Der Beweis erfolgt über das Prinzip der Vollständigen Induktion. Dazu wird zunächst nachgewiesen, dass es ein n gibt, mit dem die zu beweisende Aussage korrekt ist.
Sei $n = 1$:

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 152 \cdot 8 = 19 \cdot 8^2$$

Damit ist nachgewiesen, dass es mindestens eine natürliche Zahl n gibt, für die die Behauptung wahr ist, d.h. für die gilt: $19k = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ für eine natürliche Zahl k.
Kann unter dieser Induktionsvoraussetzung nun gezeigt werden, dass aus der Existenz eines n auch die Behauptung für $n + 1$ gilt, so wäre der Beweis erbracht:

$$\begin{aligned}
x &= 5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} \\
&= 5^{2n+1+2} \cdot 2^{n+2+1} + 3^{n+2+1} \cdot 2^{2n+1+2} \\
&= 25 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \cdot 4 \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot \left(19k - 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}\right) \\
&= (50 - 12) \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 2 \cdot 19 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 19 \cdot \left(2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot k\right)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Induktionsbeweis geführt worden ist.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

2. Lösung:
Unter Verwendung der Umformung

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n$$

sowie

$$25^n \equiv 6^n = 2^n \cdot 3^n \mod 19$$

gilt dann

$$10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n \equiv 10 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n + 9 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n = 19 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n \equiv 0 \mod 19$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe gelöst von weird

8.4.3 III. Runde 1962, Klasse 11

Aufgabe 1 - 021131
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

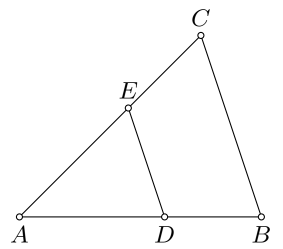
Angewandt wird die Ungleichung zum Arithmetischen und Harmonischen Mittel: Arithmetisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel.
Genutzt werden dabei die $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$, $x_3 = a+c$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} = \frac{9}{2(a+b+c)} > \frac{3}{a+b+c}$$

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 2 - 021132
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.
In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?



Sei $k \equiv \frac{AD}{AB}$. Dann gilt ebenso $k = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, da es sich bei $ABCDE$ wegen $DE \parallel BC$ um eine Strahlensatzfigur handelt. Mit den üblichen Abkürzungen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ soll nun laut Voraussetzung

$$\frac{DE+EA+AD}{a+b+c} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = k = \frac{[ADE]}{[DBCE]}$$

sein, wobei $[XYZ]$ den Flächeninhalt von XYZ bezeichnet.
Da jedoch $[DBCE] = [ABC] - [ADE]$ gilt und Dreieck ADE aus Dreieck ABC durch eine zentrische Stauchung um den Faktor k hervorgeht, ist $[ADE] = k^2[ABC]$. Daraus folgt die Gleichung

$$k = \frac{[ADE]}{[ABC]-[ADE]} = \frac{k^2}{1-k^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 1 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung kommt wegen $0 < k < 1$ nur $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$, die Verhältniszahl des goldenen Schnitts, in Frage. Punkt D teilt demzufolge die Seite AB im Verhältnis

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{1-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 021133
Auf wieviel verschiedene Weisen lässt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?
(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Folgende geordnete Paare von Primzahlen a, b erfüllen die Gleichung $a + b = 99 - c$ für ein gegebenes $c > b > a$, $c > 33$:

c	$99 - c$	(a, b) mit $a + b = 99 - c$	(a, b) mit $c > b > a$	Anzahl
97	2	$\varnothing$	$\varnothing$	0
89	10	(3,7),(5,5)	(3,7)	1
83	16	(3,13),(5,11)	(3,13),(5,11)	2
79	20	(3,17),(7,13)	(3,17),(7,13)	2
73	26	(3,23),(7,19),(13,13)	(3,23),(7,19)	2
71	28	(5,23),(11,17)	(5,23),(11,17)	2
67	32	(3,29),(13,19)	(3,29),(13,19)	2
61	38	(7,31),(19,19)	(7,31)	1
59	40	(3,37),(11,29),(17,23)	(3,37),(11,29),(17,23)	3
53	46	(3,43),(5,41),(17,29),(23,23)	(3,43),(5,41),(17,29)	3
47	52	(5,47),(11,41),(23,29)	(11,41),(23,29)	2
43	56	(3,53),(13,43),(19,37)	(19,37)	1
41	58	(5,53),(11,47),(17,41),(29,29)	$\varnothing$	0
37	62	(3,59),(19,43)	$\varnothing$	0

Für $c \leq 33$ ist $a + b = 99 - c \geq 66$, d.h. $b > 33 \geq c$ wegen $a < b$, also würde dann nicht $c > b$ gelten und eventuelle Tripel (a, b, c) könnten umgeordent werden, so dass $c > b > a$ gilt.
Also lässt sich die 99 auf $1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 3 + 3 + 2 + 1 = 21$ verschiedene Weisen als Summe von drei verschiedenen Primzahlen darstellen.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 4 - 021134
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen.

Zuerst beobachtet man folgende Eigenschaft reeller Zahlen:

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ mit } t < 1, t \neq 0 : t^3 < t^2$$

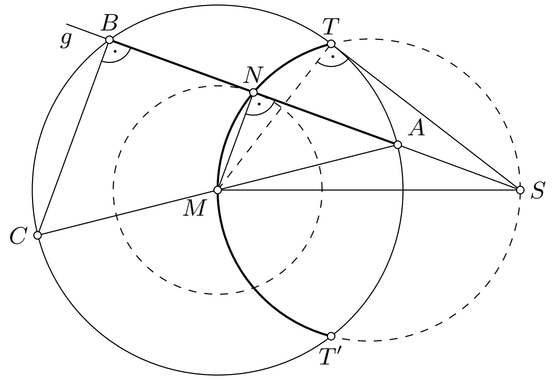
Damit kann man zeigen, dass $1 - \cos^3 x > 1 - \cos^2 x$ gilt, außer wenn $\cos x = 0$ oder $\cos x = 1$, dann gilt Gleichheit. Ebenso gilt $\sin^2 x > \sin^3 x$ überall dort, wo $\sin x$ von 0 und 1 verschieden ist. Unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras in der Form $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ folgt $1 - \cos^3 x > \sin^3 x$, was in der Form $\sin^3 x + \cos^3 x < 1$ ein direkter Widerspruch zu der Gleichung ist, deren Lösungen wir suchen.
Also kann sie nur dort Lösungen besitzen, wo die Ungleichung nicht gilt.
Dies ist gerade dort der Fall, wo sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ einen der Werte 0 oder 1 annehmen, also bei $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Tatsächlich erfüllen diese beiden Werte die Gleichung, womit die vollständige Lösung (unter Berücksichtigung der Periodizität) aus allen Werten

$$x_{2k} = 2k\pi \qquad x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

besteht.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 021135
Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?



Sei AB eine der Sehnen, die die beliebige Gerade g aus dem gegebenen Kreis k herausschneidet und N deren Mittelpunkt. ST und ST' seien die beiden Tangentenabschnitte von S an k.
Ferner sei k' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, für den AN gerade ein Tangentenabschnitt ist. Dann gilt aufgrund $ST \perp MT$ und $AN \perp MN$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= MT^2 + ST^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle STM) \\ &= (MT^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{„nahrhafte Null“ } MN^2 - MN^2) \\ &= (AM^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{gleiche Radien } MT = AM) \\ &= AN^2 + ST^2 + MN^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle ANM) \quad (1) \end{aligned}$$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt weiterhin:

$$ST^2 = SA \cdot SB = \left(\frac{SB + SA}{2}\right)^2 - \left(\frac{SB - SA}{2}\right)^2 = SN^2 - AN^2 \quad (2)$$

wobei $SB + SA = 2SN$ und $SB - SA = 2AN$ wegen der Mittelpunktseigenschaft von N gilt.

(2) in (1) eingesetzt ergibt $SM^2 = SN^2 + MN^2$, woraus mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass N auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SM liegt.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 6 - 021136
In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, dass keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.
Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke?
Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.

Ein ebenes allgemeines Fünfeck ist laut Definition eine geometrische Figur von fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 der gleichen Ebene, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen, die zusammen mit den Strecken A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 das Fünfeck bilden.
Zunächst bestimmen wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus der Aufgabenstellung (Fünfeck ist nicht unbedingt konvex, Eckpunkte des Fünfecks liegen nicht auf irgendeiner Seite des Vierecks) die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Seiten des Fünfeck.
Die Gerade g teile die Ebene ϵ in zwei Halbebenen ϵ_1 und ϵ_2. O.B.d.A. wird angenommen: $A_1 \in \epsilon_1, A_1 \notin g$.
Aus der Definition und den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt dann:

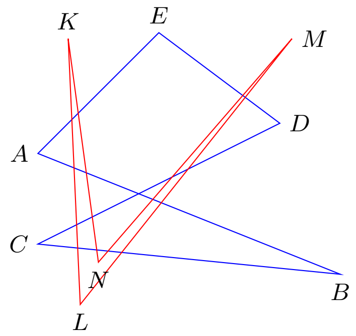
A_1A_2 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_2 \in \epsilon_2, A_2 \notin g$

A_2A_3 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_3 \in \epsilon_1, A_3 \notin g$
A_3A_4 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_4 \in \epsilon_2, A_4 \notin g$
A_4A_5 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_5 \in \epsilon_1, A_5 \notin g$

Die Strecke A_5A_1 kann mit der Geraden g keinen Schnittpunkt haben, da A_1 und A_5 in der gleichen Halbebene $\epsilon - 1$ liegen.

Damit ist bewiesen, dass eine Gerade und somit auch eine Seite eines Vierecks maximal vier Schnittpunkte mit den Seiten eines Fünfeckes haben kann. Hieraus folgt nun wiederum, das die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke $4 \cdot 4 = 16$ sein kann.

Es genügt nun an einem Beispiel zu zeigen, dass 16 Schnittpunkte unter den Bedingungen der Aufgabenstellung existieren wie im Bild angegeben.



Es seien $ABCDE$ ein konkaves Fünfeck und $KLMN$ ein konkaves Viereck.
Bemerkung: Die Seiten eines ebenen n-Eck haben mit einer Geraden g maximal $n-1$ gemeinsame Schnittpunkte bei ungeradem n und n gemeinsame Schnittpunkte bei geradem n.

Aufgabe gelöst von Manfred Worel

8.5 III. Olympiade 1963

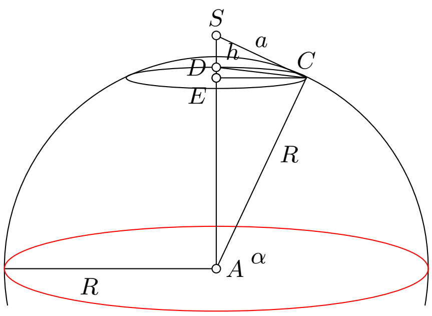
8.5.1 I. Runde 1963, Klasse 11

Aufgabe 1 - 031111
Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.
a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt?
Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde R = 6 370 km.)

a) Um zunächst die Fläche $M = 2\pi RH$ der überschaubaren Kugelkappe zu berechnen, findet man zunächst mittels des Satzes des Pythagoras für die Sichtweite a den Ausdruck

$$a = \sqrt{/R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$$

Dies gilt, da das Dreieck $\triangle ACS$ rechtwinklig ist, denn die Sichtgerade kann als Tangente an den Kreis (die Erde) angesehen werden.



Mit E und C als Punkte auf der Grundseite der Kugelkappe sowie D als Punkt, an dem der Antennenmast die Erde berührt, sei H die Länge der Strecke DE. Dann gilt $\cos\alpha = \frac{a}{h+R} = \frac{h+H}{a}$ (die Dreiecke $\triangle ACS$ und $\triangle ECS$ sind ähnlich aufgrund eines gemeinsamen Winkels und des in beiden Dreiecken vorhandenen rechten Winkels) und damit auch

$$H = \frac{a^2}{h+R} - h = \frac{2R + h^2}{h+R} - h$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$M = 2\pi RH = 2\pi R\left(\frac{2RH + h^2}{h+R} - h\right)$$

Für das gegebene Beispiel ist also $H \approx 351{,}98$ m und damit $M \approx 1{,}4088 \cdot 10^{10} m^2$. b) h ist 100,005682 % von H, die Abweichung der Fläche ist also 0,005682%. Sie ist für $h \ll R$ deshalb so gering weil dann

$$H = \frac{2Rh + h^2}{h+R} - h \approx \frac{2Rh}{R} - h = h$$

gilt.

Aufgabe gelöst von Rainer Sattler

Aufgabe 2 - 031112
Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)
b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

a) Zu Beginn enthält die erste Tasse a Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee. Ein Löffel enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit, wobei $0 < x < 1$ gilt.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 1 nach Tasse 2 gegeben. Dann enthält die erste Tasse $a - x \cdot a$ Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee und $x \cdot a$ Einheiten Milch.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 2 nach Tasse 1 gegeben. Dieser enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit.
Wichtig ist jetzt die Zusammensetzung der Flüssigkeit. In der 2. Tasse gibt es $\frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{1}{1+x}$ Anteile Kaffee und $x \cdot \frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{x}{1+x}$ Anteile Milch.
Damit enthält der Löffel

$$\frac{1}{1+x} \cdot x \cdot a = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Kaffee und

$$\frac{x}{1+x} \cdot x \cdot a = x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Somit enthält die erste Tasse jetzt $a - x \cdot a + x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch und $x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee, und die zweite Tasse $a - x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee und $x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch.
Jetzt soll der Kaffee in der ersten Tasse mit der Milch in der zweiten Tasse verglichen werden. In der zweiten Tasse befinden sich

$$x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x} = \frac{x \cdot a + x^2 \cdot a - x^2 \cdot a}{1+x} = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Das ist genauso viel, wie Kaffee in der ersten Tasse.
Es befindet sich also gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

b) Analog zur ersten Teilaufgabe kann hier das Ergebnis bestimmt werden. Die Tasseninhalte sehen wie folgt aus:

Anfangszustand:	Tasse 1:	a Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee
Nach dem 1. Umgießen:	Tasse 1:	$a - xa$ Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee, xa Einheiten Milch

Nach dem 2. Umgießen: Löffel: $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $\frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch

Tasse 1:	$a - xa + \frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch, $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee
Tasse 2:	$2a - \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $xa - \frac{x^2a}{2+x} = \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Milch

Auch hier befindet sich gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 3 - 031113
Beweisen Sie, dass $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt: $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.
Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Da p nach den Voraussetzungen nicht durch 3 teilbar sein kann, gilt entweder $3|(p-1)$ oder $3|(p+1)$. Somit ist 3 ein Teiler von $p^2 - 1$.
Des Weiteren muss p eine ungerade Zahl sein. $p-1$ und $p+1$ sind demzufolge zwei aufeinander folgende gerade Zahlen und damit durch 2 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist aber sogar genau eine durch 4 teilbar. Es gilt also ebenfalls: $8|(p^2 - 1)$.
Da 3 und 8 teilerfremd sind, folgt aus $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ die Behauptung, dass $24|(p^2 - 1)$. □

Aufgabe gelöst von Manuel Naumann

Aufgabe 4 - 031114
Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Nach Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}\sin^2 3x &= (\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x)^2 \\ &= \sin^2 x \cos^2 2x + \cos^2 x \sin^2 2x + 2 \sin x \cos x \sin 2x \cos 2x \\ &= \sin^2 x(1 - \sin^2 2x) + (1 - \sin^2 x) \sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x \\ &= \sin^2 x + \sin^2 2x - 2 \sin^2 x \sin^2 2x + \sin^2 2x(1 - 2 \sin^2 x)\end{aligned}$$

Also erfüllen genau die reellen x die Ungleichung $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$, die auch die Ungleichung $2 \sin^2 x \sin^2 2x > \sin^2 2x(1 - 2 \sin^2 x)$ erfüllen. Ist x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so wird diese Ungleichung nie erfüllt, sonst folgt nach Division durch $\sin^2 x$

$$2 \sin^2 x > 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2}$$

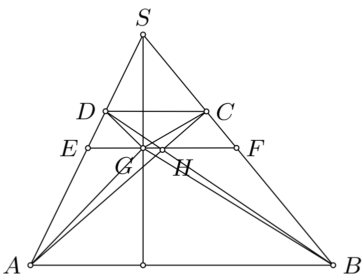
Da x kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, erfüllen alle

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

die Ungleichung.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 5 - 031115
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.
Beweisen Sie, dass die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!



Da $g_{SG} \neq g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \neq g_{AB}$ und $g_{SG} \neq g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$. Aus den Strahlensätzen folgt dann:

$$\frac{KG}{GL} = \frac{CE}{EB} = \frac{CH}{HA} = \frac{CD}{AD} \quad \text{und} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SB} = \frac{KC}{LB} = \frac{CD}{AB}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{KG}{GL} = \frac{KC}{LB} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{KG}{KC} = \frac{GL}{LB}$$

Da außerdem die Winkel $\angle CKG$ und $\angle GLB$ rechte sind, sind alle Dreiecke KGC und GLB ähnlich.
Daher gilt: $\angle BGL \cong \angle KGC$.
Da weiter die Winkel $\angle SGE$ und $\angle EGL$ rechte sind, folgt $\angle BGE \cong \angle EGC$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 031116
Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1000050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

Sei a die kleinste der 100 Zahlen, dann ist $a + 99$ die größte der Zahlen. Die Summe der 100 Zahlen beträgt

$$a + (a + 1) + ... + (a + 98) + (a + 99) = (a + (a + 99)) + ((a + 1) + (a + 98)) + ... + ((a + 49) + (a + 50)) =$$

$$= \underbrace{(2a + 99) + ... + (2a + 99)}_{\text{50 Summanden}} = 100a + 4950$$

d.h. $100a = 995100$ bzw. $a = 9951$ und $a + 99 = 10050$. Also ist 9951 die kleinste und 10050 die größte der 100 Zahlen.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

8.5.2 II. Runde 1963, Klasse 11

Aufgabe 1 - 031121
Es ist zu beweisen, dass $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Für jedes ungerade n gibt es eine natürliche Zahl (Null eingeschlossen) k mit $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= (n^2 - 1)(n + 3) \\ &= (n - 1)(n + 1)(n + 3) \\ &= 2k(2k + 2)(2k + 4) \\ &= 8 \cdot k(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k + 1$ ist immer eine gerade und von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen k, $k + 1$ und $k + 2$ ist immer eine durch drei teilbar. Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist $k(k + 1)(k + 2)$ durch 6 teilbar und damit der ganze Ausdruck durch 48.

Aufgabe gelöst Henning Thielemann

2. Lösung:
Es gilt $m := n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n + 3) - (n + 3) = (n - 1)(n + 1)(n + 3)$. Von den drei Zahlen $n - 1$,$n + 1$,$n + 3$ ist genau eine durch 3 teilbar, also ist m durch 3 teilbar. Da n ungerade ist, sind diese drei Zahlen außerdem gerade und entweder $n - 1$ oder $n + 1$ ist sogar durch 4 teilbar. Also ist m durch $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ teilbar. Da dies teilerfremd zu 3 ist, ist m auch durch $48 = 3 \cdot 16$ teilbar.

Aufgabe gelöst ZePhoCa

Aufgabe 2 - 031122
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2$$

Wende das Additionstheorem

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

auf $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x$ und $\beta = \frac{3}{2}x$ an und erhalte:

$$\begin{aligned} \cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi + 6x}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi + 6x}{4} \\ \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2 &= 2 \cos^2 \frac{\pi + 6x}{4} = 1 + \cos \frac{\pi + 6x}{2} \\ &= 1 - \sin 3x \end{aligned}$$

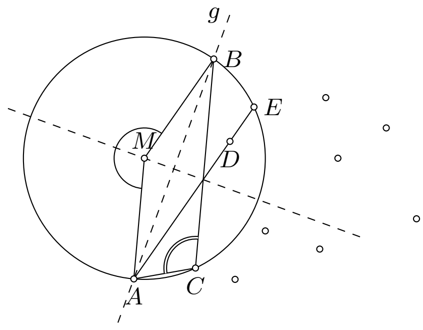
Damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x \Rightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

Die linke Seite wird genau dann null, wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ ist und die rechte Seite, genau dann wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{3}$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{3}$ ist π, folglich ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn x Vielfaches von π ist.

Aufgabe gelöst Henning Thielemann

Aufgabe 3 - 031123
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?



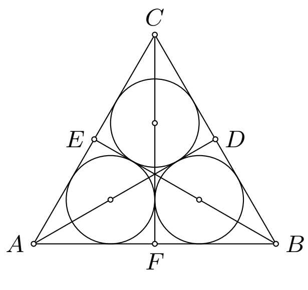
In der Punktmenge gibt es immer zwei Punkte A und B, durch die eine Gerade g verläuft, so dass alle Punkte der Menge auf derselben Seite von g liegen. Das trifft zum Beispiel für zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle zu. Diejenige Seite von g, auf der sich kein Punkt befindet betrachte als außen. Alle Kreise, die durch A und B verlaufen, haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB.

Da keine 3 Punkte der Punktmenge auf einer Geraden liegen, existiert zu jeder dreielementigen Untermenge genau ein Kreis, der durch alle Punkte der Untermenge verläuft. Von allen Punkten außer A und B nenne denjenigen Punkt C, der den größtmöglichen Winkel $\angle BCA$ aufweist.

Behauptung: Der Kreis durch A, B und C enthält keinen weiteren Punkt der Punktmenge.
Beweis: Angenommen, es gäbe noch einen Punkt D in dem Kreis.
Da sich alle Punkte der Menge auf der gleichen Seite der Geraden g befinden, muss sich D im Kreisabschnitt zwischen der Sehne AB und dem Bogen durch C befinden. Deswegen kann man die Strecke AD über D hinaus verlängern bis sie diesen Bogen im Punkt E schneidet.
Der Winkel $\angle BEA$ ist so groß wie $\angle BCA$ weil beide Peripheriewinkel über der gleichen Sehne auf derselben Seite sind. Die Dreiecke ABE und ABD haben den Winkel $\angle BAD$ gemeinsam, aber $\angle ABD$ ist kleiner als $\angle ABE$ und wegen der konstanten Innenwinkelsumme in Dreiecken ist $\angle BDA$ größer als $\angle BCA$.
Das ist aber ein Widerspruch, denn $\angle BCA$ sollte der größtmögliche Winkel sein. □

Aufgabe gelöst Henning Thielemann

Aufgabe 4 - 031124
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, dass jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!



Bezeichne das Dreieck mit ABC und die Lotfußpunkte der Lote von A, B, C auf die jeweils gegenüberliegende Seite mit D, E, F. Der Inkreis vom Dreieck ACF berührt den Inkreis von BCF weil CF Symmetrieachse von ABC ist.

AD ist ebenfalls Symmetrieachse, deswegen ist der Inkreis von ACF gleichzeitig Inkreis von AEB und der Inkreis von BCE berührt den Inkreis von AEB. Analog folgt, dass sich die Inkreise von BCE und BCF berühren. Die betrachteten Inkreise sind folglich die in der Aufgabenstellung ge- suchten.

a) $|AB| = a$ (Aufgabenstellung); $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck); $|AF| = \frac{a}{2}$.
b) Die naheliegendste Konstruktion ist wohl, einen Inkreis zum Beispiel den von ACF zu konstruieren und dessen Radius zu bestimmen.

1. Bestimme den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender
2. Bestimme den Radius des Kreises als Lot des Mittelpunktes auf eine Dreiecksseite.

Aufgabe gelöst Henning Thielemann

Aufgabe 5 - 031125
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & T & O & M & \cdot & A & T & O & M \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & A & T & O & M
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 ($A \neq= O$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.
Wie lautet die Aufgabe?

Die Aufgabe lässt sich formulieren als die Suche nach zwei natürlichen Zahlen n und k mit $n{\cdot}n = 10000k{+}n$ oder auch $n{\cdot}(n{-}1) = 10000k$. Das wiederum entspricht der Suche nach einem ganzen n mit $10000|n(n{-}1)$.
Es gilt $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 6254$.
Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n kann nur eine durch 2 teilbar sein, folglich muss entweder $2^4|(n-1)$ oder $2^4|n$ gelten. Analog kann von $n-1$ und n nur eine Zahl durch 5 teilbar sein, mithin entweder $5^4|(n-1)$ oder $5^4|n$.

Fallunterscheidung:
1. $625|n$ und $16|n$
das bedeutet $10000|n$ und $n \geq 10000$, damit ist n aber nicht mehr vierstellig
2. $625|(n-1)$ und $16|(n-1)$
das bedeutet $10000|(n-1)$, daraus folgt $n = 1$ oder $n \geq 10001$ und n ist wiederum nicht vierstellig
3. $625|n$ und $16|(n-1)$
Die durch 625 teilbaren Zahlen lassen sich als $625m$ mit $m \in \mathbb{N}$ darstellen.

$$\begin{aligned} n-1 &\equiv 625m-1 \mod 16 \\ &\equiv m-1 \mod 16 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Falls n durch 625 teilbar ist, ist $n{-}1$ genau dann durch 16 teilbar, falls m beim Teilen durch 16 den Rest 1 lässt, also $m \in \{1, 17, 33, ...\}$. Für $m = 1$ ist $n = 625$ zu klein ($A = 0$) und für $m \geq 17$ ist $n \geq 17 \cdot 625 = 16 \cdot 625 + 625 = 10625$ zu groß.
4. $625|(n-1)$ und $16|n$ Setze $n = 625m + 1$

$$\begin{aligned} n &\equiv 625m+1 \mod 16 \\ &\equiv m+1 \mod 16 \\ &\equiv m-15 \mod 16 \end{aligned}$$

Daraus folgt $m \in \{15, 31, ...\}$, wobei sich für $m = 15$ ergibt, dass $n = 15 \cdot 625 + 1 = 16 \cdot 625 - 625 + 1 = 10000 - 624 = 9376$ und für $m \geq 31$, dass $n \geq 19376$, was nicht vierstellig ist.
Lösung: ATOM = 9376

Aufgabe gelöst Henning Thielemann

8.6 IV. Olympiade 1964

8.6.1 I. Runde 1964, Klasse 11

Aufgabe 1 - 041111
Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muss jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1, 2; j = 1, 2$). Es gilt dann:

$$x_{11} + 4x_{21} \geq 600 \geq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \quad (1)$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geq 400 \geq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \quad (2)$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 300 \quad (3)$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200 \quad (4)$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{und ganzzahlig} \quad (5)$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22} \quad (6)$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden. Aus (1) folgt:

$$600 - 4x_{21} \leq x_{11} \leq 603 - 4x_{21} \quad (7)$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leq x_{12} \leq 403 - 4x_{22} \quad (8)$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22} \quad (9)$$

Aus (8) folgt $x_{22} \leq \frac{403-x_{12}}{4}$ und daraus wegen (5) $x_{22} \leq 100$ (10).
Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher $x_{12} = 0$. Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müsste wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000, \qquad \text{also} \qquad x_{11} + 2x_{21} = 400 \quad (11)$$

sein. Aus (1) und (11) folgt dann weiter $x_{21} \leq 100$ und aus (4) wegen $x_{22} = 100 : x_{21} \leq 100$. Daher müsste $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

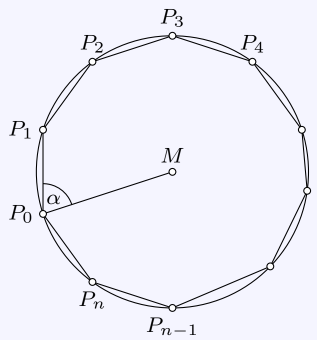
	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Übernommen von [2]

Aufgabe 2 - 041112
In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius MP_0 den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ reflektiert (siehe Abbildung).



a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overparen{P_0P_n}$ an!
b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?
c) Es sei $\alpha = 50°$.
Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Es gilt

$$|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = ... = r \qquad \text{und}$$
$$|\angle P_1P_0M| = |\angle MP_1P_0| = |\angle P_2P_1M| = |\angle MP_2P_1| = ... = \alpha$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\angle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke $P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3$ u.s.w. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\overparen{P_0P_1} \simeq \overparen{P_1P_2} \simeq \overparen{P_2P_3} \simeq ... \qquad \text{und}$$
$$|\angle P_0MP_1| = |\angle P_1MP_2| = |\angle P_2MP_3| = ... = \pi - 2\alpha$$

a) Dann ist

$$|\overparen{P_0P_n}| = |\overparen{P_0P_1}| + |\overparen{P_1P_2}| + ... + |\overparen{P_{n-1}P_n}| = (\pi - 2\alpha)r + (\pi - 2\alpha)r + ... + (\pi - 2\alpha)r = n(\pi - 2\alpha)r$$

b) Für n = 10 gilt in diesem Falle:

$$|\overparen{P_0P_{10}}| = 10(\pi - 2\alpha)r = 2\pi r, \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{2}{5}\pi$$

c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k2\pi r \qquad (k = 1,2,3,...) \tag{1}$$

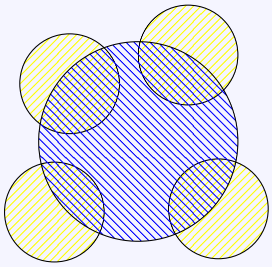
(1) ist äquivalent mit $n = \frac{9}{2}k$ (2).

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt. Daher ist $n = 9k'$ ($k' = 1,2,3,...$).

Übernommen von [2]

Aufgabe 3 - 041113

Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, dass diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (siehe Abbildung).



a) Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt der in der Abbildung blauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der gelb schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage lässt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Der Inhalt p der blau gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen gelb gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f.
Da die genannte Summe gleich $4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r$ ist, ergibt sich $s = \pi r^2 - f$ und damit $s = p$.

Übernommen von [2]

Aufgabe 4 - 041114
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:
Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1,2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1+b_1)(10a_2+b_2)$ überein.

Beweis:
Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, dass

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1,2$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100[100c_1c_2 + (10a_1 + b_1)c_2 + (10a_2 + b_2)c_1] + (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1,2,3,...20$, so erkennt man die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.
Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67.
Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1,2,3,...,22$ erkennt man, dass die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von $4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2$.
Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.
Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$.
Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

Übernommen von [2]

Aufgabe 5 - 041115
Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Wir definieren Polynome

$$p_1(x) := 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17^x + 7$$
$$p_2(x) := 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7$$

Sei x eine Lösung der gegebenen Gleichungen, $p_1(x) = p_2(x) = 0$. Dann gilt

$$0 = p_1(x) - p_2(x) = 12x^3 + 28x^2 + 6x + 14 =: p_3(x)$$
$$0 = 4p_2(x) - (x-2)p_3(x) = 18x^2 + 42x =: p_4(x)$$
$$0 = 3p_3(x) - 2xp_4(x) = 18x + 42 =: p_5(x)$$

Umgekehrt folgt wegen $p_4(x) = xp_5(x)$ aus $p_5(x) = 0$, dass auch $p_3(x) = 0$ ist (denn $p_3(x) = \frac{1}{3}(p_5(x) + 2xp_4(x)))$ und ebenso, dass auch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Null sind.

Die gesuchten gemeinsamen Lösungen der Gleichungen sind also genau die Nullstellen von p_5, also $\{-\frac{7}{3}\}$.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 6 - 041116
Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12 \cdot \sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12 \cdot \sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

Mit den Abkürzungen $a = 1620$, $b = 12\sqrt{17457}$ ist $z = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, also

$$z^3 = a + b + 3(a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} + a - b = 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot z =$$

$$= 3240 + 3\sqrt[3]{110592} \cdot z = 3240 + 144z$$

(wegen $110592 = 2^{12} \cdot 3^3 = (2^4 \cdot 3)^3$ braucht man für 110592 keinen Taschenrechner.
Demnach ist z eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$p := x^3 - 144x - 3240 = (x - 18)(x^2 + 18x + 180) = (x - 18)(x + 9 + \sqrt{-99})(x + 9 - \sqrt{-99})$$

Da 18 die einzige reelle Nullstelle von p ist, muss z gleich 18 sein.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

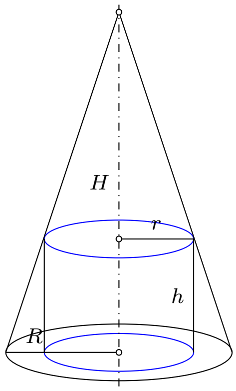
Hinweis: Ab der IV. Olympiade 1964 und Stufe II lösten die Schüler der Klassenstufe 11 die Aufgaben der Klasse 12.

9 Klassenstufe 12

9.1 Vorolympiade 1960

9.1.1 Wettbewerb V1960, Klasse 12

Aufgabe 1 - V01201
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?



(1) Für das Volumen des Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt

$$V = r^2\pi h$$

(2) Der Zusammenhang von Kegel- und Zylinderabmessungen ergibt sich aus dem Strahlensatz zu

$$h : (R - r) = H : R$$

Damit kann h durch R, H und r ausgedrückt werden, und V wird eine Funktion der einen unabhängigen Variablen r:

$$V(r) = r^2\pi\frac{H}{R}(R - r) = \pi r^2 \cdot H - \pi\frac{H}{R}r^3$$

(3,4) Für die erste Ableitung bezüglich r wird

$$V'(r) = 2\pi rH - 3 \cdot r^2\pi\frac{H}{R} = r\pi\frac{H}{R}(2R - 3r)$$

und aus $r\pi\frac{H}{R}(2R-3r) = 0$ folgt $r = \frac{2}{3}R$. Da die 2. Ableitung für dieses r negativ wird, liegt ein relatives Maximum. An den Rändern gilt $V(r = 0) = 0$ und $V(r = R) = 0$. Damit ist das relative Maximum zugleich das absolute Maximum. Als maximales Volumen für den Zylinder erhält man

$$V = V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

mit der Höhe $h = \frac{H}{3}$. Es sollte ein eher kurzer Zylinder gedreht werden.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - V01202
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\bigstar\bigstar\bigstar 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Die Ziffer 9 ist die einzige Endziffer einer Zahl, die mit 9^3 eine 9 als Endziffer hat. So muss auch die gesuchte Zahl die Endziffer 9 haben. Es kann somit nur die 19 sein da 29^3 bereits 5-stellig ist. Die gesuchte Zahl ist $19^3 = 6859$.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 3 - V01203
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Sei der Winkel im Uhrzeigersinn von der 12 aus gerechnet $\sigma(t)$ für den Stundenzeiger und $\mu(t)$ für den Minutenzeiger. Zu einem gegebenen Startzeitpunkt $t = 0$ sei die Stellung der Zeiger σ_0 und μ_0. Dann lauten die Winkelgleichungen der Zeiger

$$\sigma(t) = \sigma_0 + 30° \cdot t \qquad ; \qquad \mu(t) = \mu_0 + 360° \cdot t$$

Dabei werde t in Stunden angegeben. Allgemein kann man formulieren:

$$|\mu(t) - \sigma(t)| \mod 360° = |\mu_0 - \sigma_0| \mod 360°$$

Es soll nach Aufgabenstellung genau eine Stunde später wieder der gleiche Winkel zwischen den Zeigern liegen. Das heißt:

$$\frac{12}{11}\left(z - \frac{\mu_0 - \sigma_0}{180°}\right) = 1$$

Nach $\mu_0 - \sigma_0$ aufgelöst:

$$\mu_0 - \sigma_0 = 180°(z - \tfrac{11}{12})$$
$$\mu_0 - \sigma_0 = 180° \cdot z - 165°$$

Da $z = 2$ im Grunde das gleiche ergibt wie $z = 0$, gilt also entweder:

$$\mu_0 = \sigma_0 - 165° \qquad \text{oder} \qquad \mu_0 = \sigma_0 + 15°$$

Der Minutenzeiger muss also ursprünglich entweder 165° hinter dem Stundenzeiger sein, oder 15° weiter. Dies geschieht aller $\frac{12}{11}$. Ersteres wäre zum Beispiel um 11:30:00 Uhr der Fall, aber nicht nur, denn wie oben gezeigt, wäre es auch bei Startzeit 12:35:27 Uhr der Fall, usw.. 15° ist der Minutenzeiger dem Stundenzeiger voraus um 05:30:00 Uhr.
Sinngemäß gilt das gleiche, d.h. weitere Startuhrzeiten wären zum Beispiel 06:35:27, 07:40:55 und so weiter.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - V01204
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Wir bezeichnen mit $a_n := \frac{1}{n \cdot n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die Glieder der Folge. Es handelt sich bei der Summe der Glieder um eine Teleskopsumme, d.h.:

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 5 - V01205

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+\frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0,8}}}} = (\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+5^{0,2}\cdot 5^{0,8}}}$$
$$(\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{11+5}} = (\sqrt{2})^{1,5+\sqrt[-4]{16}} = (2^{0,5})^{1,5+0.5} = 2^{0,5\cdot 2} = 2^1 = 2$$

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 6 - V01206
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Da uns nur die Einerstellen der Summanden interessiert, folgt $\mod 10$

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \mod 10 \equiv \left(1^6 + 4^6 + 6^6\right) \mod 10.$$

Es ist $4^6 = 4096$, d.h $4^6 \mod 10 \equiv 6 \mod 10$ und es ist $6^6 = 6^3 \cdot 6^3 = 216 \cdot 216$, d.h. $6^6 \mod 10 \equiv 6 \mod 10$. Also gilt

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \mod 10 \equiv 13 \mod 10 \equiv 3 \mod 10$$

und somit endet die Summe auf der Einerstelle 3.

Aufgabe gelöst von svrc

2. Lösung:
Mod 5 errechnet sich die fragliche Summe sehr leicht zu

$$11^6 + 14^6 + 16^6 \equiv 1^6 + (-1)^6 + 1^6 = 3 \mod 5$$

weshab ihre Endziffer also nur 3 oder 8 sein kann. Da sie aber als Summe von einer ungeraden und von zwei geraden Zahlen sicher ungerade ist, kommt letztlich dann nur 3 in Frage.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 7 - V01207
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Seien die beiden mit der Geschwindigkeit v_1 fahrenden PKW als PKW_1 und PKW_2 bezeichnet. Dann berechnet sich der Treffpunkt P_1 der beiden PKW mit

$$P_1 = v_1 t_1.$$

Für Treffpunkt P_2 von PKW_1 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 gilt:

$$P_2 = P_1 + v_1 t_2 = v_1 t_1 + v_1 t_2 = v_1(t_1 + t_2).$$

Und für Treffpunkt P_3 von PKW_2 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 muss damit gelten:

$$P_3 = P_2 + v_2 t_2 = v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2.$$

Und für den Zeitpunkt von P_3: $t_3 = t_1 - t_2 - \frac{P_3 - P_2}{v_1}$

$$t_3 = t_1 - t_2 - \frac{v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2 - v_1(t_1 + t_2)}{v_1} = t_1 - t_2 - \frac{v_2 t_2}{v_1}.$$

Im speziellen Fall wird P_1 um 10:30 Uhr und 50 km vom Startpunkt Berliner Ring entfernt, P_2 um 10:35 Uhr und 58,33 km entfernt und P_3 um 10:21 Uhr und 65 km entfernt, erreicht.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 8 - V01208
Ein Trugschluss "Zwei ist größer als vier!"
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

$$2\lg(\frac{1}{2}) > 4\lg(\frac{1}{2})$$

$$2\lg(1) - 2\lg(2) > 4\lg(1) - 4\lg(2)$$

$$-2\lg(2) > -4\lg(2) \;\equiv\; -2 > -4 \;\equiv\; 2 < 4$$

Die Division durch $\lg(\frac{1}{2})$ war in der Weise falsch. Da $\lg(\frac{1}{2}) < 0$ ist, hätte bei der Division das Relationszeichen gedreht werden müssen.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 9 - V01209
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Für ein $n \geq 2$ existieren genau $9 \cdot 10^{n-1}$ n-stellige Zahlen.
Damit eine n-stellige Zahl keine 0 enthält, muss an jeder Stelle eine Ziffer 1 bis 9 stehen, d.h. es gibt 9^n verschiedene n-stellige Zahlen ohne 0 in der Ziffernfolge. Der prozentuale Anteil ist somit

$$\frac{9^n}{9 \cdot 10^{n-1}} \cdot 100\% = 0{,}9^{n-1} \cdot 100\%$$

Damit ergibt sich: a) 90 %, b) 81 %, c) 65,61 %, d) 38,7 %, e) 13,5 % und f) 0,57 %.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 10 - V01210
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Es seien n Personen anwesend. Da jeder jedem gratuliert, entspricht die Anzahl der Glückwünsche der Anzahl z von Möglichkeiten aus den n Personen genau 2 auszuwählen, d.h., $z = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ist n gerade und da die Personen sich gleichzeitig gratulieren, können sich gleichzeitig $\frac{n}{2}$ Paare die Hände schütteln. Damit sind $n-1$ Gratulationsrunden erforderlich, die $3n-3$ Sekunden benötigen.
Ist n ungerade können sich gleichzeitig $\frac{n-1}{2}$ Paare die Hände schütteln, während eine Person immer warten muss. Damit sind nun n Gratulationsrunden erforderlich, die 3 Sekunden benötigen.

"Gratulationsplan":

Nummeriere die Personen mit $1, \ldots, n$.

1. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist ungerade.
Dann betrachte folgenden Gratulationsplan:
Für $r = 1,2,\ldots,n$ soll in Runde r die Person mit Nummer i der eindeutig bestimmten Person mit Nummer j gratulieren, für die $i + j \equiv r \pmod n$ gilt. Falls $i = j$ gilt, so setzt Person i in dieser Runde aus.

Korrektheitsbeweis:
Wegen $i + j = j + i$ ist klar, dass in jeder Runde die Person j, der Person i laut Plan gratulieren soll, ebenfalls der Person i gratulieren soll. Also sind die geplanten Gratulationen immer möglich.
Außerdem gratuliert jede Person jeder anderen genau einmal: Die Personen i,j gratulieren sich in der Runde r für die $r \equiv i + j \pmod n$ gilt.

Beobachtung: Da n ungerade ist, gibt es in jeder Runde r genau eine Person i, die aussetzt, also für die $2i \equiv r \pmod n$ gilt. Außerdem gibt es zu jeder Person genau eine Runde, in der die Person aussetzt.

2. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist gerade.
Betrachte die Person n getrennt von den anderen. Der neue Plan ist, den Plan für die Personen $1,2,\ldots,n-1$ gemäß des 1. Falls auszuführen mit dem Unterschied, dass die Person, die aussetzen sollte der Person n gratuliert.

Formal: Für $r = 1,2,\ldots,n-1$ soll in Runde r die Person i (mit $1 \leq i < n$) der Person j mit $i + j \equiv r \pmod{n-1}$ (falls $j \neq i$) bzw. der Person n (falls $j = i$) gratulieren.
Die Korrektheit folgt aus Fall 1 und obiger Beobachtung.

Für den konkreten Fall $n = 300$ wird $z = \binom{300}{2} = 44850$. Die 299 Gratulationsrunden erfordern 897 Sekunden, d.h. 14 min 57 s.

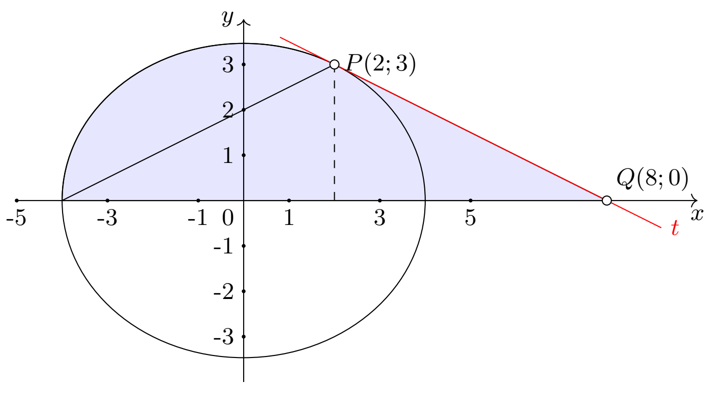
Aufgabe gelöst von Nuramon und Steffen Polster

Aufgabe 11 - V01211
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

In der Abbildung ist die um die x-Achse rotierende Fläche farbig hervorgehoben. Ihr größter Querschnitt ist ein Kreis und tritt bei $x = 0$ auf, womit aus $\pi b^2 = 12\pi$ sofort $b = \sqrt{12}$ folgt.
Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt sich mit $b^2 = 12$ bei Einsetzen des Punktes $P(2;3)$, dass die große Halbachse $a = 4$ ist, d.h. $a^2 = 16$. Mit der Tangentengleichung $\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1$ wird für die Tangente

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \rightarrow y = 4 - \frac{x}{2}$$

mit der Nullstelle $x = 8$.



Damit setzt sich die rotierende Fläche aus einem rechtwinkligen Dreieck (Kathetenlängen 3 cm und 6 cm) und einem Ellipsensegment von $x = -4$ bis $x = 2$ der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Es wird

$$V = V_{\text{Dreieck}} + V_{\text{Segment}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + \int_{-4}^{2} \left[\frac{1}{4}\sqrt{192 - 12x^2}\right]^2 dx$$

$$= 54\pi + \left[\frac{x}{4}(48 - x^2)\right]_{-4}^{2} = 54\pi + 54$$

Der Rotationskörper hat ein Volumen von $54(\pi + 1) \approx 223{,}6$ cm^3.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 12 - V01212
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Für ein beliebiges Dreieck ABC gilt für den Flächeninhalt F zum einen die Heronsche Dreiecksformel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (1)$$

mit dem halben Dreiecksumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ und hier konkret $s = \frac{1}{2}$ cm, und zum anderen die Beziehung Flächeninhalt - Umkreisradius R

$$F = \frac{1}{4}\frac{a \cdot b \cdot c}{R} \qquad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) und Umstellen nach R ergibt

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad (3)$$

Nach der Aufgabenstellung genügt es ein beliebiges Dreieck anzugeben, für das der Umkreisradius R größer als 1000 m wird. Daher betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ und $c = 1$ cm $-a-b$. Setzt man diese Werte in (3) ein, wird (alle Maße in cm)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{ab(1-a-b)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-1+a+b)}}$$

$$= \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{s(s-a)^2(s-1+2a)}}$$

und mit $s = \frac{1}{2}$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)^2(2a-\frac{1}{2})}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{16 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-a+a^2)(2a-\frac{1}{2})}}$$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-4a+4a^2)(4a-1)}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-2a)^2(4a-1)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(4a-1)}}$$

Ist a nur wenig größer als 0,25 cm, d.h. zum Beispiel $a = 0{,}25 + \epsilon$ mit einem beliebigen $\epsilon > 0$ ergibt sich

$$R = \frac{0{,}25+\epsilon)^2}{\sqrt{4 \cdot \epsilon}} = \frac{(0{,}25+\epsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\epsilon}}$$

Dieser Term wächst für $\epsilon \to 0$ über alle Grenzen, d.h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{(0{,}25+\epsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\epsilon}} = \infty$$

Der Umkreisradius R kann damit jeden hinreichend großen positiven Wert annehmen, d.h. auch größer als 1000 m sein.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2. Lösungsvariante:
Die Rechnung kann verkürzt werden. Man muss nicht den komplizierten Weg über die Fläche gehen, sondern kann beim gleichschenkligen Dreieck den Umkreisradius durch Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.

Sei a einer von den zwei gleichen Schenkeln und c die dritte Seite, dann ist

$$R^2 = \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + \left(R - \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2}\right)^2$$

$$R^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + R^2 - 2R\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2} + a^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$R\sqrt{4a^2 - c^2} = a^2$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{2a+c} \cdot \sqrt{2a-c}} = \frac{a^2}{\sqrt{U}\sqrt{4a-U}}$$

Der weitere Lösungsweg entspricht dem von oben.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 13 - V01213
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Da α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks bilden, gilt nach Innenwinkelsummensatz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \iff \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

und somit

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Da $\cos\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ für beliebige Winkel γ gilt, folgt

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Nach dem Additionstheorem gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y, sodass

$$\sin(\gamma) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

gilt. Da $\gamma \in (0°, 180°)$ gelten muss, folgt

$$2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}$$

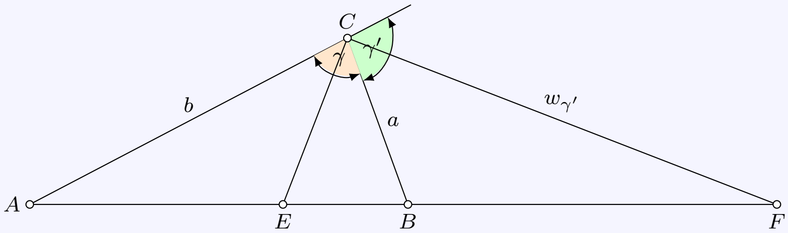
und somit

$$\gamma = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90°.$$

Deshalb handelt es sich bei γ um einen rechten Winkel.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 14 - V01214
Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

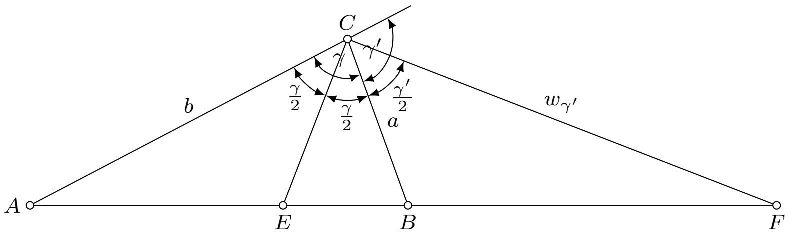
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Nach dem Sinussatz ist im Dreieck EBC (siehe nachfolgende Abbildung)

$$\frac{\sin(180° - \angle AEC)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{EB}$$

und im Dreieck AEC

$$\frac{\sin\angle AEC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{EA}$$



Wegen $\sin(180° - \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\gamma}{2}$ folgt

$$\frac{EA}{EB} = \frac{b}{a}$$

Für den Außenwinkel γ' läuft der Beweis analog:

$$\frac{\sin\angle BFC}{\sin(180° - \frac{\gamma'}{2})} = \frac{b}{FA} \qquad ; \qquad \frac{\sin\angle BFC}{\sin\frac{\gamma'}{2}} = \frac{a}{FB}$$

und somit

$$\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 15 - V01215 = V601107
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D.h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

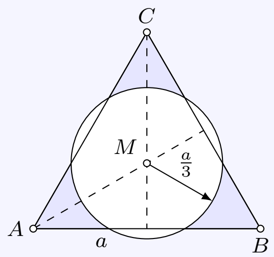
$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

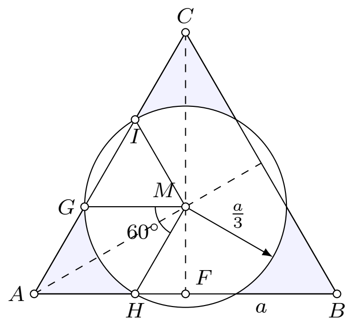
$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 16 - V01216



Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?



Die zu A näheren Schnittpunkte des Kreises mit den Seiten AC und AB seien G und H. F sei der Fußpunkt der Höhe von C, die von M im Verhältnis 2:1 geteilt wird, da $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann wird nach einem Strahlensatz

$$2:1 = CM : MF = MG : AF \qquad \rightarrow \qquad MG = \frac{a}{3}$$

Analog ergibt sich $AG = AH = MH = \frac{a}{3}$, so dass das Viereck $AHMG$ ein Rhombus und der Winkel $\angle HMG = \alpha = 60°$ ist.

Damit schneidet der Kreis aus dem Dreieck 3 gleichseitige Dreiecke der Art GMI (Seitenlänge $\frac{a}{3}$) und drei Sektoren $\overset{\frown}{GH}M$, die, da $\angle HMG = 60°$, zu einem Halbkreis zusammengefasst werden können. Für die nicht von Kreis bedeckte Dreiecksfläche wird somit

$$\begin{aligned} F &= F_{\triangle ABC} - 3 \cdot F_{\triangle GMI} - \frac{1}{2} F_{\text{Kreis}} \\ &= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{18} a^2 \end{aligned}$$

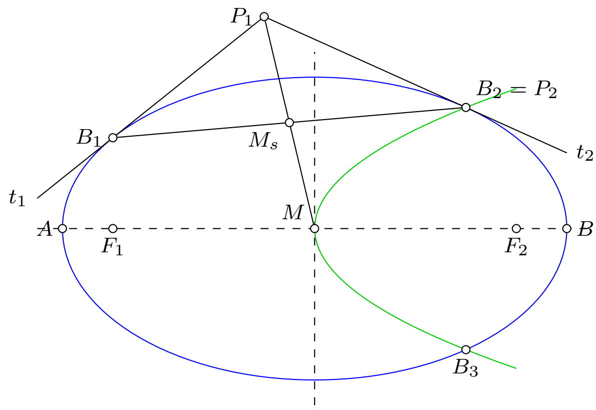
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 17 - V01217
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{1}$$

d.h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.



a) Die Tangentengleichung dieser Ellipse in einem Berührungspunkt B ist

$$\frac{x \cdot x_B}{25} + \frac{y \cdot y_B}{9} = 1$$

Setzt man den Punkt P_1, der auf den Tangenten liegt ein, wird

$$\frac{-x}{25} + \frac{\frac{21}{5}}{9} = 1 \tag{2}$$

(2) umgestellt und in (1) eingesetzt, liefert die Koordinaten der zwei Berührungspunkte

$$B_1\left(-4; \frac{9}{5}\right) \qquad ; \qquad B_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$$

mit den Tangenten

$$t_1: \quad y = \frac{4}{5}x + 5 \qquad ; \qquad t_2: \quad y = -\frac{9}{20}x + \frac{15}{4}$$

b) Der Mittelpunkt der Berührungssehne B_1B_2 ist $M_s\left(-\frac{1}{2}; \frac{21}{10}\right)$. Er ist offensichtlich auch der Mittelpunkte der Strecke MP_1 und liegt damit auf der Gerade von P_1 durch den Mittelpunkt M der Ellipse.

c) Für die Parabel ergibt sich aus dem Ansatz $y^2 = ax$ mit den Koordinaten des Punktes $P_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$

$$y^2 = \frac{48}{25}x \qquad ; \qquad f(x) = y = \pm\sqrt{\frac{48}{25}x}$$

Die Tangente in P_2 an die Parabel hat den Anstieg

$$f'(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{5} = m_2$$

Die Tangente t_2 hat den Anstieg $m_1 = -\frac{9}{20}$. Für den Schnittwinkel der zwei Geraden, d.h. auch dem Schnittwinkel von Parabel und Ellipse, folgt damit

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{85}{82} \Rightarrow \varphi = 46{,}03°$$

Ellipse und Parabel schneiden sich unter dem Winkel 46,03°.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 18 - V01218
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{40}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Da die zweite Parabel für alle Werte von x oberhalb der ersten verläuft, aber die innere Begrenzung des Porzellantiegels beschreibt, muss die Rotation dieser Parabeln zur Beschreibung der Begrenzung des Porzellantiegels um die y- (und nicht die x)-Achse erfolgen.

Die beiden Parabeln schneiden sich nie. Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass die Größen in cm angegeben sind, sodass also die y-Koordinate des Tiegels das Intervall $[0; 10]$ durchläuft.

Das Volumen V_1 des Rotationskörpers, der durch die äußere Parabel bis zur maximalen Höhe von $y = 10$ entsteht, erhält man durch die Integration über die Kreisscheiben mit Radius $x(y)$, wobei y von 0 bis 10 läuft. Dabei ist $x(y)$ die zugehörige Umkehrfunktion, die man mit $x(y) = \sqrt{40y}$ erhält. Die zugehörige Kreisscheibe in der Höhe y hat also eine Fläche von $\pi \cdot x(y)^2 = \pi \cdot 40y$. Es ist also

$$V_1 = \int_{y=0}^{10} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^{10} = \pi \cdot 2000.$$

Analog berechnet man das Volumen V_2 des durch die Rotation der zweiten Parabel entstehenden Rotationskörpers, der den nicht aus Porzellan bestehenden Teil im Innern des ersten Rotationskörpers ausschneidet, sodass dann nur noch der Porzellantiegel verbleibt mit

$$V_2 = \int_{y=1}^{10} \pi \cdot (10y - 10)\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^{10} = \pi \cdot (500 - 100 - 5 + 10) = \pi \cdot 405.$$

Damit hat der Porzellantiegel ein Volumen von $V_P = V_1 - V_2 = \pi \cdot 1595$.

Das Quecksilber-Volumen V_Q erhält man analog zu V_2, indem man den gleichen Integranden (sprich: Fläche der jeweiligen Kreisscheibe bis zum inneren Rand des Porzellantiegels) vom inneren Grund des Tiegels bei $y = 1$ bis eben zur Höhe $1 + 1 = 2$ integriert. Dabei kommt der Unterschied dadurch zu Stande, dass das Quecksilber genau die Höhe von einem Zentimeter einnimmt. Es gilt also

$$V_Q = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^2 = \pi \cdot (20 - 20 - 5 + 10) = \pi \cdot 5.$$

Der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel hat eine in Gramm gemessene Masse von

$$m_P = 2{,}5 \cdot V_P + 13{,}5 \cdot V_Q = \pi \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot 1595 + \frac{27}{2} \cdot 5\right) = \pi \cdot \frac{7975 + 135}{2} = \pi \cdot \frac{8110}{2} = \pi \cdot 4055.$$

Hat der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel einen Tiefgang von $t > 0$, so verdrängt er Wasser mit einem Volumen von

$$V_W = \int_{y=0}^{t} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^t = \pi \cdot 20t^2,$$

was eine Masse m_W von $\pi \cdot 20t^2$ g besitzt. Da bei einem schwimmendem Körper dessen Masse genau der des verdrängten Wassers entspricht, gilt $m_P = m_W$, also $20t^2 = 4055$ bzw. $t = \frac{\sqrt{811}}{2} \approx 14{,}24$ cm, was mehr ist als die Höhe des Tiegels, sodass dieser vollständig untergeht.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 19 - V01219
Zeichnen Sie die Ellipse

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \tag{1}$$

und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

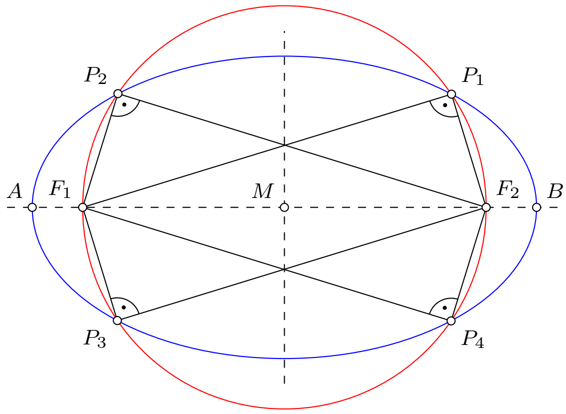
Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{2}$$

d.h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.

Die Konstruktion erfolgt mit Zirkel und Lineal mittels klassischem Verfahren:

Wir wählen einen Hilfspunkt H auf AB, zeichnen um F_1 einen Kreisbogen mit Radius HA und um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius HB. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Ellipse.



Die Punkte der Ellipse, in denen sich die Brennstrahlen senkrecht schneiden, müssen auf dem Thaleskreis über der Strecke F_1F_2 liegen.
Zur Konstruktion zeichnet man den Kreis um M mit dem Radius MF_1. Die Schnittpunkte mit der Ellipse sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit der geforderten Eigenschaft.

Der beschriebene Thaleskreis hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$. Umstellen nach y^2 und Einsetzen in (1) ergibt

$$9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1;2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7} \quad ; \quad y_{1,2} = \pm\frac{9}{4}$$

Die gesuchten Punkte haben somit die Koordinaten

$$P_1\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_2\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_3\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_4\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right)$$

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 20 - V01220
Berechnen Sie die innere Maße einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Mit der Dichte von $7{,}2\frac{t}{m^3}$ des Roheisens nimmt dieses einen Zylinder mit Volumen $V = \frac{20}{7{,}2}m^3$ ein. Sei $r > 0$ der in Metern gemessene Innenradius der Roheisenpfanne und $h > 0$ entsprechend die Höhe des eingefüllten flüssigen Roheisens, so gilt also $\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{20}{7{,}2}$ bzw. $h = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi \cdot r^2}$. Zu minimieren ist nun der Wärmeverlust, der proportional zur Oberfläche des vom Roheisen gebildeten Zylinders ist, wobei die Deckfläche als Oberfläche doppelt zu werten ist. Also ist der Term $\pi \cdot (2rh + 3r^2)$ bzw. äquivalent der Term $3r^2 + 2rh$ zu minimieren. Setzt man die zuvor erhaltene Bedingung an r ein, erhält man als zu minimierenden Term also

$$f(r) = 3 \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-1}.$$

Diese Funktion in Abhängigkeit von r besitzt als Ableitung die Funktion

$$f'(r) = 6r - 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-2},$$

welche genau für diejenigen $r > 0$ verschwindet, für die die Gleichung

$$3r^3 = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \left(\frac{20}{3 \cdot 7{,}2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}6655$$

gilt. Eine Grenzbetrachtung mit $r \to 0$ bzw. $r \to \infty$ zeigt, dass $f(r)$ dann jeweils gegen unendlich geht, also an der einzigen kritischen Stelle ein globales Minimum besitzen muss.
Also hat die Roheisenpfanne einen Innenradius von $r \approx 0{,}6655$ m und eine Innenhöhe von $h = \frac{20}{7{,}2\cdot\pi\cdot r^2} \approx 6{,}272$ m.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 21 - V01221
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Es sei $h > 0$ die in Metern gemessene Höhe und $b > 0$ analog die Breite des Rechtecks. Dann beträgt seine in Quadratmetern gemessene Querschnittsfläche also $1 = h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ und damit $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b$. Weiterhin besitzt der Kanal eine in Metern gemessene Höhe von $0{,}9 \geq h + \frac{b}{2}$.

Die Produktionskosten hängen monoton vom Umfang der Querschnittsfläche des Kanals ab, sodass diese und mit ihr der Term $2h + b + \frac{\pi}{2} \cdot b$ unter den genannten Nebenbedingungen zu minimieren ist. Setzen wir die zuvor aus der Größe der Querschnittsfläche erhaltene Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir den Term

$$f(b) = 2b^{-1} - \frac{\pi}{4} \cdot b + b + \frac{\pi}{2} \cdot b = 2b^{-1} + \frac{\pi + 4}{4} \cdot b,$$

welcher die Ableitung $f'(b) = \frac{\pi+4}{4} - 2b^{-2}$ besitzt, die genau für $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}}$ verschwindet. Eine kurze Betrachtung für $b \to 0$ bzw. $b \to \infty$ zeigt, dass $f(b)$ in beiden Fällen gegen unendlich geht, also bis zur einzigen kritischen Stelle monoton fallend und ab dann monoton steigend ist; an der kritischen Stelle also ein globales Minimum vorliegt.

Die Produktionskosten werden also – ohne Beachtung der Höhenbedingung – minimal, wenn $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}} \approx 0{,}945$ m und $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \approx 0{,}687$ m betragen würde. Dann jedoch hätte der Kanal eine Gesamthöhe von mehr als 0,9 m. Also muss die Breite b des Kanals soweit verändert werden, dass diese Höhenbedingung eingehalten wird.
Da jede Vergrößerung von b über den kritischen Wert hinaus bzw. jede Verkleinerung unter diesen den Umfang der Querschnittsfläche und damit die Produktionskosten weiter erhöht, werden sie unter Beachtung der Höhenbedingung dann minimal, wenn in der Höhenbedingung der Gleichheitsfall vorherrscht.

Also können wir nun zusätzlich $0{,}9 = h + \frac{b}{2}$ annehmen. Setzen wir dies in die aus der Querschnittsfläche erhaltenen Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0{,}9 - \frac{b}{2} = h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{4 - \pi}{8} \cdot b^2 - 0{,}9b + 1 = 0$$

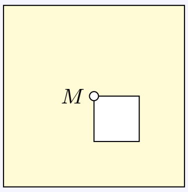
was die beiden Lösungen

$$b_1 = \frac{3{,}6}{4 - \pi} + \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4 - \pi)^2} - \frac{8}{4 - \pi}} \approx 7 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{3{,}6}{4 - \pi} - \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4 - \pi)^2} - \frac{8}{4 - \pi}} \approx 1{,}318$$

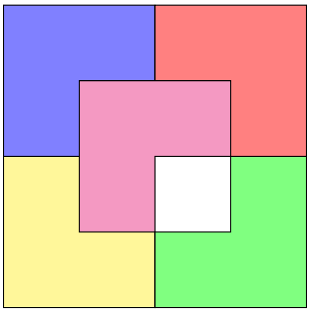
besitzt. Die erste Lösung entfällt, da nur ein negatives h dann die Höhenbedingung erfüllen könnte, was ausgeschlossen ist. Also muss $b = b_2$ gelten und wir erhalten $h = 0{,}9 - \frac{b}{2} \approx 0{,}241$.
Damit muss das Rechteck, welches dem Kanal zu Grunde liegt, eine Breite von ca. 1,318 m und eine Höhe von ca. 0,241 m besitzen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 22 - V01222



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen (M = ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).



Aufgabe gelöst von ochen

9.2 Vorolympiade 1961

9.2.1 II. Runde V1961, Klasse 12

Anmerkung: Eine I. Runde wurde nicht durchgeführt.

Aufgabe 1 - V11221
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

a) Der Ausgangspunkt war der Nordpol. Jede beliebige, geradlinige Strecke, die am Nordpol beginnt, führt Richtung Süden, und egal wie weit man in Richtung Osten oder Westen fliegt, wenn man anschließend die gleiche Streckenlänge wieder in Richtung Norden fliegt, kommt man wieder am Nordpol an. Allerdings setzt das voraus, dass man in Richtung Osten entlang eines Breitenkreises geflogen ist, und nicht geradlinig. (geradlinig heißt in diesem Zusammenhang natürlich entlang eines Großkreises).

b) Hier gilt sinngemäß das gleiche wie unter a), nämlich dass der Flug Richtung Osten entlang eines Breitenkreises erfolgt. Auf der Südhalbkugel ist die Rückkehr an den Ausgangspunkt nur möglich, wenn der Punkt, an dem von Flugrichtung Süd auf Ost gewechselt wird, derselbe ist wie der, wo die Flugrichtung von Ost auf Nord wechselt. Der Breitenkreis muss also einen Umfang von 300 km haben. Angesichts der geringen Erdkrümmung reicht eine näherungsweise Betrachtung. Der Breitenkreis muss somit $\frac{300\text{km}}{2\pi} = 47{,}75\text{km}$ vom Südpol entfernt sein.

Man kehrt mit obiger Route also genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn dieser 347,75km vom Südpol entfernt ist.

Alle Punkte, die auf den die Breitenkreisen liegen, die 300 km nördlich von den Breitenkreisen mit Umfang 150 km oder 100 km oder 75 km entfernt sind, haben auch die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und ochen

Aufgabe 2 - V11222
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Der Binomialkoeffizient für nichtnegative ganze Zahlen k und n mit $n \geq k$ ist durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

definiert. Dieser ist in diesem Falle stets eine nichtnegative ganze Zahl. Es gilt $720 = 6!$. Wir bezeichnen das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit

$$n_k = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) = \prod_{j=k}^{k+5} j$$

für eine beliebige natürliche Zahl k. Mit der Definition des Binomialkoeffizienten und $720 = 6!$ folgt

$$n_k = \prod_{j=k}^{k+5} j = 6! \cdot \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right) \cdot \left(\prod_{j=k}^{k+5} j\right)}{6! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right)} = 6! \cdot \frac{(k+5)!}{6! \cdot (k-1)!} = 720 \cdot \binom{k+5}{k-1}$$

und da der Binomialkoeffizient stets eine nichtnegative ganze Zahl ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 3 - V11223
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \text{für } |x|>1\\ x^3 & \text{für } |x|\leq 1\end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x=-2$ und $x=2$ begrenzt wird!

1) Wir diskutieren die Funktion. Es gilt

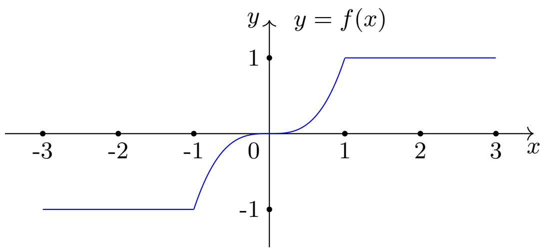
$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{für}\, x<-1,\\ x^3 & \text{für }-1\leq x\leq 1,\\ 1 & \text{für}\, x>1\end{cases}$$

für die Funktion. Damit ist die Funktion f für $x<-1$ konstant mit Funktionswert -1. An der Stelle $x=-1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Für $-1\leq x\leq 1$ gilt die Vorschrift $f(x)=x^3$ und somit liegt an $x=0$ ein Wendepunkt vor, da $f''(0)=6\cdot 0=0$ und $f'''(0)=6>0$ gilt. An der Stelle $x=1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Ferner ist die Funktion f für $x>1$ konstant mit Funktionswert 1.

Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$-f(-x)=f(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.



2) Wegen der Punktsymmetrie kann der betrachtete Flächeninhalt nach

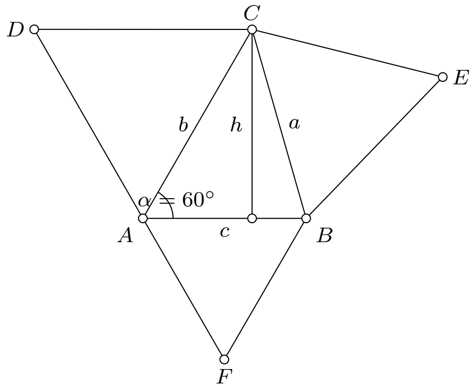
$$A_{\text{gesamt}}=2\cdot\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot\left\{\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^2 1\,\mathrm{d}x\right\}$$

berechnet werden. Daher gilt

$$A_{\text{gesamt}}=2\cdot\left\{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+1\right\}=2\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}.$$

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 4 - V11224
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60∘ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!



Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks BEC ist

$$A_{BEC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Die anderen Flächen der gleichseitigen Dreiecke berechnen sich in gleicher Weise. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC lautet

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} bc$$

Daher soll gelten:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} bc + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Laut dem Kosinussatz gilt außerdem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, ist die obige Gleichung tatsächlich erfüllt. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V11225
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

Da die vierte Potenz der Quersumme vierstellig sein soll und $5^4 < 1000$, $10^4 > 9999$ gilt, kommt für die Quersumme nur 6, 7, 8 oder 9 infrage. Es gilt weiterhin $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ und $9^4 = 6561$. Die gesuchte Zahl ist somit 2401 mit der Quersumme 7.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

9.2.2 III. Runde V1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - V11231
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, "Schwund" durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung "Deutsche Mark" in "Mark der Deutschen Notenbank" (MDN) und anschließend 1968 in "Mark" geändert.

Seien x die Bestellungen pro Jahr und die jährlichen Gesamtkosten, bestehend aus den Bestellkosten und den Lagerkosten für dieses Halbfabrikat,

$$K_G = K_B + K_L = 30x + \frac{1200}{x}$$

so ergeben sich die Kosten für a)

$$K_G = K_B + K_L = 30 \cdot 4 + \frac{1200}{4} = 420.$$

und die geringsten Gesamtkosten für b)

$$K'_G = 30 - \frac{1200}{x^2}$$
$$30x^2 - 1200 = 0$$
$$x = [\sqrt{40}] = 6$$

Für x=6 eingesetzt erhält man tatsächlich der geringsten Wert von 380. Mit $x = 5$, $x = 7$ steigen die Kosten bereits wieder an.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 2 - V11232
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Da der Zug 3000m in 180s zurücklegt, beträgt seine Geschwindigkeit $v_Z = \frac{3000\text{m}}{180\text{s}}$. Das Verhältnis der Tropfen-Fallgeschwindigkeit v_T zur Zuggeschwindigkeit muss gleich dem Verhältnis der Fensterhöhe zur -breite sein. Daher ist die Fallgeschwindigkeit:

$$v_T = \frac{85}{100} \cdot \frac{3000\text{m}}{180\text{s}} = 14{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - V11233
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Wir legen den Kreis mit dessen Sehnen in ein Koordinatensystem, sodass der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die Sehnen parallel zu jeweils einer der Koordinatenachsen verlaufen. Der Radius des Kreises sei mit r bezeichnet.
Der Schnittpunkt der Sehnen habe die Koordinaten (x,y), so haben die Endpunkte der einen Sehne die Koordinaten $(x, \pm\sqrt{r^2-x^2})$ und die Endpunkte der anderen Sehne die Koordinaten $(\pm\sqrt{r^2-y^2},y)$.
Die Summe der vier Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser

$$\frac{\pi}{4}(y-\sqrt{r^2-x^2})^2+\frac{\pi}{4}(y+\sqrt{r^2-x^2})^2+\frac{\pi}{4}(x-\sqrt{r^2-y^2})^2+\frac{\pi}{4}(x+\sqrt{r^2-y^2})^2=$$

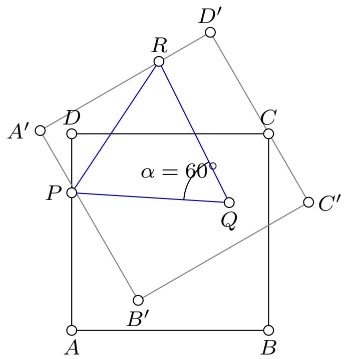
$$=\frac{\pi}{4}((y-\sqrt{r^2-x^2})^2+(y+\sqrt{r^2-x^2})^2)+\frac{\pi}{4}((x-\sqrt{r^2-y^2})^2+(x+\sqrt{r^2-y^2})^2)=$$

$$=\frac{\pi}{4}(2y^2+2(r^2-x^2))+\frac{\pi}{4}(2x^2+2(r^2-y^2))=\pi r^2$$

Das ist genau der Flächeninhalt des Kreises. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 4 - V11234
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?



Da PQR ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\overline{QR}=\overline{QP}$. R entsteht also aus P durch Drehung des Punktes P um Q um $60°$ oder $-60°$ (bildlich dargestellt ist die Drehung um $-60°$). Dadurch werden auch alle Punkte des Quadrates und das Quadrat als ganzes um $60°$ um Q gedreht. Die Kurve, die R beschreibt, ist daher das um $\pm 60°$ um den Punkt Q gedrehte Quadrat.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - V11235
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Vor Wägung a ist jede der durchnummerierten Kugeln mit $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, ...{}^uK_{12}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$ (u)nbestimmt. Nur die Kugel ${}^bK_0^0$ ist als Kugel ohne Gewichtsabweichung ist (b)estimmt.

Wägung a erfolgt mit der Aufteilung links $\{{}^bK_0^0, {}^uK_6^\pm, {}^uK_8^\pm, {}^uK_{10}^\pm, {}^uK_{12}^\pm\}$ und rechts mit $\{{}^uK_5^\pm, {}^uK_7^\pm, {}^uK_9^\pm, {}^uK_{11}^\pm, {}^uK_{13}^\pm\}$. Die Kugeln $\{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$ werden im Durchgang a nicht gewogen.

$$a = (+1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^+, {}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_{12}^+\}, \{{}^uK_5^-, {}^uK_7^-, {}^uK_9^-, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (-1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^-, {}^uK_8^-, {}^uK_{10}^-, {}^uK_{12}^-\}, \{{}^uK_5^+, {}^uK_7^+, {}^uK_9^+, {}^uK_{11}^+, {}^uK_{13}^+\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (\pm 0): \ \{{}^bK_0^0, {}^bK_6^0, {}^bK_8^0, {}^bK_{10}^0, {}^bK_{12}^0\}, \{{}^bK_5^0, {}^bK_7^0, {}^bK_9^0, {}^bK_{11}^0, {}^bK_{13}^0\}, \{{}^uK_1^\pm, {}^uK_2^\pm, {}^uK_3^\pm, {}^uK_4^\pm\}$$

Anmerkung: Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden jeweils nur die mit der Wägung zu untersuchenden Kugeln genannt. Die neutralen Kugeln, mit denen die Stückzahl auf zehn aufgefüllt wird, werden nicht einzeln benannt. Es sind für alle Fälle immer ausreichend bestimmte neutrale Kugeln vorhanden.

Für $a = (\pm 0)$ ist für die vier Kugeln, von denen nicht bekannt ist, welche davon im Gewicht abweicht, mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.
Wägung b, links $\{{}^uK_2^\pm, {}^uK_4^\pm\}$, rechts ${}^uK_3^\pm$, die Kugel${}^uK_1^\pm$ wird im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_2^+, {}^uK_4^+\}, {}^uK_3^-, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^+$, rechts ${}^uK_2^+$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^-$

$c = (+1): \ {}^bK_4^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0$ Formel $(0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(0+1+1)} = (+4)$
$c = (-1): \ {}^bK_2^+, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^-, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (-1): \ \{{}^uK_2^-, {}^uK_4^-\}, {}^uK_3^+, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^-$, rechts ${}^uK_2^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^+$

$c = (+1): \ {}^bK_4^0, {}^bK_1^0, {}^bK_2^-, {}^bK_3^0$
$c = (-1): \ {}^bK_2^0, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^-$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^+, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (\pm 0): \ \{{}^bK_2^0, {}^bK_4^0\}, {}^bK_3^0, {}^uK_1^\pm$

Wägung c, links ${}^uK_1^\pm$, rechts ${}^bK_0^0$

$c = (+1): \ {}^bK_1^+, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (-1): \ {}^bK_1^-, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

$c = (\pm 0): \ {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

Für $a = (1)$ ist für vier Kugeln, von denen eine möglicherweise schwerer ist und für fünf Kugeln von denen möglicherweise eine leichter ist, ist mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.

Wägung b, links $\{{}^uK_5^-, {}^uK_{12}^+, {}^uK_7^-\}$, rechts $\{{}^uK_{11}^-, {}^uK_6^+, {}^uK_{13}^-\}$, die Kugeln ${}^uK_8^+, {}^uK_9^-, {}^uK_{10}^+$ werden im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_{12}^+, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}$

Wägung c, links ${}^uK_{13}^-$, rechts ${}^uK_{11}^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_{12}^+$

$c = (+1): \ {}^bK_{13}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(1+1+1)} = (-13)$
$c = (-1): \ {}^bK_{11}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1))(-1)^{(1+1-1)} = (-11)$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_{12}^+$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0)(-1)^{(1+1+0)} = (12)$

$b = (-1): \ \{{}^uK_5^-, {}^uK_6^+, {}^uK_7^-\}$
Analog.

$b = (\pm 0): \ \{{}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_9^-\}$
Analog.

Die Behauptung stimmt und berechnet sich für $a = (-1)$ analog.

Die Auswahl der Kugeln für die Wägevorgänge ist damit auch so gewählt, dass mit der Formel

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

die abweichende Kugel zu bestimmen ist und zwar so, dass das Vorzeichen plus oder minus angibt, ob die Kugel leichter oder schwerer ist. Es sind somit für Wägung a die Werte $|n| \leq 4$ und bei Wägung b die Werte $8 \leq |n| \leq 10$ von der Wägung auszuschließen.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

9.3 I. Olympiade 1961

9.3.1 I. Runde 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011211
Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

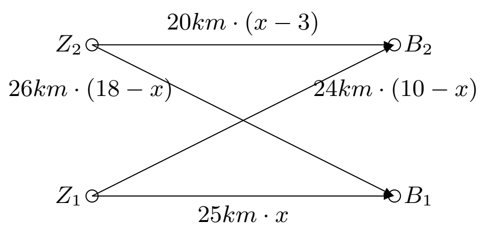
Da für 45 die Primzahlzerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 32 und 5 teilbar ist.
Die letzte Ziffer von 21^n ist für jedes natürliche n gleich 1, und die letzte Ziffer von 39^{2n+1} ist für jedes natürliche n gleich 9. Daher ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0 und die Summe damit durch 5 teilbar.
Wegen $21 = 3 \cdot 7$ und $39 = 3 \cdot 13$ ist sowohl 21^{39} als auch 39^{21} durch 3^2 teilbar und damit auch die Summe.
Also ist $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 011212
Bei der Planung unserer Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung.
Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:
Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

- 1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,
- 1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,
- 2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,
- 2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Dabei wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind.



Die von der i. Ziegelei Z_i zur j. Baustelle B_j $(i, j = 1, 2)$ zu transportierenden Mengen an Ziegeln seien z_{ij}, insbesondere sei $z_{11} = x$ (alle Mengenangaben in Millionen Stück).
Dann gilt gemäß Aufgabenstellung:

$$z_{12} = 10 - x; \qquad z_{21} = 18 - x; \qquad z_{22} = x - 3$$

Dabei müssen alle $z_{ij} \geq 0$ sein; diese Bedingungen führen auf die Ungleichungen

$$3 \leq x \leq 10 \tag{1}$$

Nun stellen wir die Kostenfunktion auf, die die Summe aller Produkte aus Anzahl zu transportierender Ziegel mal jeweilige Entfernung (alles in km) ist:

$$f(x) = 25 \cdot x + 24 \cdot (10-x) + 26 \cdot (18-x) + 20 \cdot (x-3) = -5 \cdot x + 648 \to \text{ Minimum}$$

Dies ist eine lineare Funktion mit negativem Anstieg, die ihren Minimalwert wegen (1) folglich an der rechten Intervallgrenze $x = 10$ annimmt.
Daraus ergibt sich: $z_{11} = 10, z_{12} = 0, z_{21} = 8$ und $z_{22} = 7$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 011213
Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen? Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

1) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?
2) Was lässt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Wir haben es hier mit Variationen mit Wiederholung zu tun, denn wir wollen k, nicht notwendig verschiedene Elemente aus der Menge der ersten n natürlichen Zahlen auswählen und in einer Reihe aufschreiben (also mit Beachtung der Reihenfolge). Dabei haben wir für jede der k Stellen in der Reihe n Möglichkeiten, demnach ist die gesuchte Anzahl $V(n, k)$ gegeben durch

$$V(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{\text{k-mal}} = n^k$$

Somit lassen sich
a) $V(2, 3) = 2^3 3 = 8$
b) $V(3, 3) = 3^3 = 27$
c) $V(4, 3) = 4^3 = 64$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden.
d) Für vierstellige Zahlen finden wir analog $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ bzw. $4^4 = 256$ verschiedene Lösungen.
e) Haben wir dagegen n Ziffern zur Verfügung, so lassen sich

- n Zahlen mit vier gleichen Ziffern aaaa angeben,
- $4n(n-1)$ Zahlen mit drei gleichen Ziffern aaab angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 4 Plätze, an denen b stehen kann),
- $3n(n-1)$ Zahlen der Form aabb angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 3 Möglichkeiten für die Platzwahl der beiden Paare aa bzw. bb),
- $6n(n-1)(n-2)$ Zahlen der Form aabc angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen, $n-2$ Möglichkeiten die Ziffer c auszuwählen und $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten für die Platzwahl der Ziffern b und c bzw. der Ziffern a und a),
- schließlich $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Zahlen abcd mit vier verschiedenen Ziffern angeben.

Die Gesamtzahl ist also

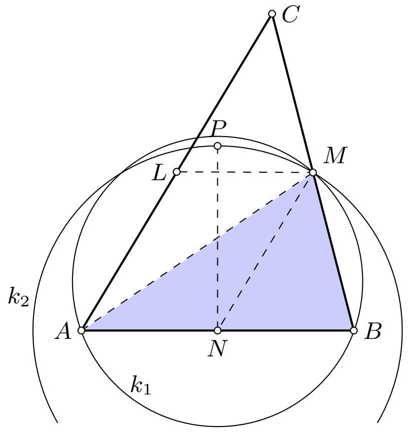
$$n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$$

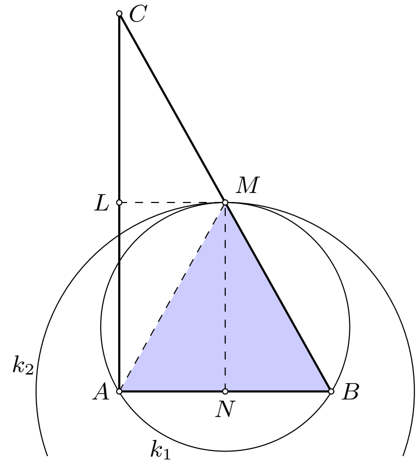
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011214
Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\angle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.
Man beweise, dass die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b$$

ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?





I. Konstruktion:
(linkes Bild) Das Hilfsdreieck AMB kann aus den gegebenen Stücken konstruiert werden, denn Punkt M liegt auf dem Kreis k_1, der über der Sehne $AB = c$ derjenige geometrische Ort aller Punkte ist, für die $\angle BMA = \omega$ gilt.
Sei ferner LMN das Seitenmittendreieck von ΔABC. Dann ist $ALMN$ nach den Strahlensätzen ein Parallelogramm und somit $AL = MN = \frac{b}{2}$, d.h., ein zweiter geometrischer Ort für M ist der Kreis k_2 mit dem Radius $\frac{b}{2}$ um N.

II. Beweis:
Wegen $\omega < 90°$ muss $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$, also $c < b$ gelten, da in den Dreiecken AMC und AMB dem größeren Winkel (hier $\angle CMA > \angle BMA$) auch die größere Seite gegenüberliegt.
Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn beide Kreise Punkte gemeinsam haben.
Gewöhnlich sind dies zwei Lösungen, die auch zu zwei nichtkongruenten Dreiecken ABC führen. Berühren sich beide Kreise von innen, gibt es nur eine Lösung (Bild rechts).
Hier wird ω vom Radius MN halbiert und wegen $MN \parallel AC$ sowie $MN \perp AB$ ist

$$\tan\omega = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{c}{b}$$

und mithin $c = b\tan\frac{\omega}{2}$. In allen anderen Fällen kann man in N eine Senkrechte auf AB errichten, die k_1 in P schneidet. Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\omega = \angle BMA = \angle BPA$ und

$$MN = \frac{b}{2} < x \equiv PN = \frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2}$$

Also ist hier $b\tan\frac{\omega}{2} < c$ und somit allgemein

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b$$

Umgekehrt folgt aus (1), dass k_1 und k_2 Schnittpunkte haben und die Aufgabe lösbar ist.

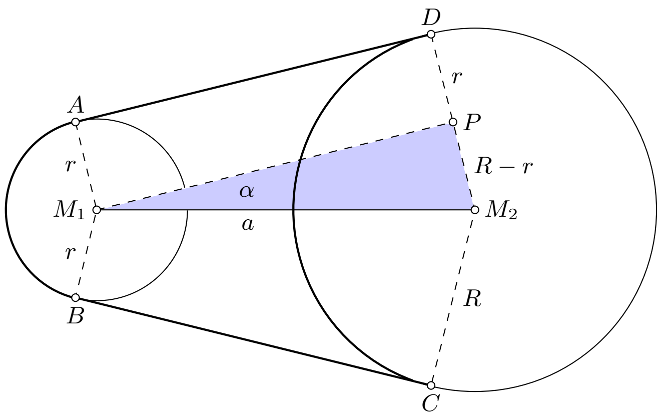
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 011215
Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi\frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist d der Durchmesser der treibenden Scheibe, D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und $M_1M_2 = a$ der Abstand der beiden Achsen.
Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.
Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?
a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,
b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.

Wir berechnen zunächst die genaue Länge des Treibriemens. Dazu seien A, B und C, D diejenigen Punkte, an denen sich der Riemen von der treibenden bzw. getriebenen Scheibe (Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 und Radien r bzw. R) löst.
AD und BC sind dann die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise, die wir z.B. dadurch finden, indem wir ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $M_1M_2 \equiv a$, der Kathete $PM_2 = R - r$ und $\angle M_1PM_2 = 90°$ konstruieren und die Kathete M_1P um r parallel nach außen verschieben.



Bezeichnen wir noch den Winkel $\angle PM_1M_2 \equiv \alpha$, dann gilt $\sin\alpha = \frac{R-r}{a}$, und die geradlinigen Teile des Riemens haben die Länge $AD = BC = a\cos\alpha$, die beiden Kreisbögen die Länge $AB = (\pi - 2\alpha)r$ bzw. $CD = (\pi + 2\alpha)R$ (α im Bogenmaß gemessen), insgesamt also

$$\bar{l} = 2a\cos\alpha + (\pi - 2\alpha)r + (\pi + 2\alpha)R = \pi(R + r) + 2a(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha) \qquad (1)$$

Für kleine Winkel α ergibt sich daraus mit $\frac{R-r}{a} = \sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{(R-r)^2}{2a}$ die in der Aufgabenstellung angegebene Näherungsformel

$$l \approx \pi(R + r) + 2a + \frac{(R - r)^2}{a}$$

Mit den gegebenen Werten für $d = 2r, D = 2R$ sowie a ergeben sich nun mit (1) und (2) folgende Winkel, Längen und relativen Fehler:

a) $\alpha = 4{,}59°$, $\bar{l} = 1568{,}7$ mm, $l = 1568{,}7$ mm, $\frac{|\bar{[l]} - l}{\bar{l}} = 0{,}00\%$,

b) $\alpha = 23{,}58°$, $\bar{l} = 872{,}3$ mm, $l = 871{,}8$ mm, $\frac{|\bar{[l]} - l}{\bar{l}} = 0{,}05\%$,

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

9.3.2 II. Runde 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011221
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm,
	größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm;
Mindestmaße	Länge 10 cm, Breite 7 cm.

1) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe?
2) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung !)

a) Bezeichnen wir die drei Abmessungen des Quaders mit x, y und z, so gilt es, das Produkt xyz nach oben durch die feste Summe $x + y + z = 90$ cm abzuschätzen. Dafür ist die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel bestens geeignet:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}; \qquad (x, y, z \leq 0)$$

Gleichheit nur für $x = y = z$,

$$\Rightarrow V = xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = 27000 cm^3 = 27l$$

Wir erkennen, dass das Volumen höchstens 27 l betragen kann, und zwar genau dann, wenn alle Abmessungen untereinander gleich sind: $x = y = z = 30$ cm (Würfel).

b) Diese Frage stellt nur eine Art „Sophismus“ dar. Denn da für die Höhe keine Vorschriften gemacht werden, kann theoretisch $z = 0$ sein, d.h. das Mindestvolumen ist gleich null.

Lösung von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 011222
Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Da $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $x^2 + y^2 = z^2$ (1) das Produkt $P = x \cdot y \cdot z$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist.

1. Teilbarkeit durch 3:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 3 treten als mögliche Reste die Zahlen 0, 1 oder 2 auf und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen durch 3 nur die Reste 0 und 1. Die möglichen Reste der Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen sind daher 0, 1 oder 2.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur die Reste 0 oder 1 haben, d.h., mindestens eine der Zahlen x^2, y^2 hat den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar.
Aus $3|x^2$ oder $3|y^2$ folgt $3|x$ oder $3|y$, und damit teilt 3 das Produkt $P = xyz$.

2. Teilbarkeit durch 5:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 5 kommen als Reste die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 vor und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen nur die Reste 0, 1, oder 4. Die möglichen Reste der Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen sind daher 0, 1, 2, 3, oder 4.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1 oder 4 haben, und daher hat mindestens eines der Quadrate x^2, y^2 oder z^2 den Rest 0 und ist somit durch 5 teilbar.
Wegen des Satzes über die eindeutige Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren ist daher weiter mindestens eine der Zahlen x, y oder z durch 5 teilbar und damit auch das Produkt P.

3. Teilbarkeit durch 4:

Zunächst ist mindestens eine der Zahlen x, y oder z gerade; denn die Annahme, dass sowohl x, y und z (und damit auch x^2, y^2, z^2) ungerade Zahlen wären, führt zu dem Widerspruch, dass $x^2 + y^2 = z^2$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl wäre.
Ist z gerade, so sind entweder

- x und y gerade - in diesem Falle teilt 4 das Produkt P - oder
- x und y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x' + 1$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z'$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten.

  (1) ist dann äquivalent mit

  $$4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 \qquad \text{bzw. mit} \qquad 4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2 = 4z'^2$$

  Dies ist ein Widerspruch, da eine natürliche Zahl nicht gleichzeitig durch 4 teilbar sein kann und bei der Division durch 4 den Rest 2 lässt. Also ist Fall b) nicht möglich.

Ist z ungerade und eine der Zahlen x oder y gerade, so kann o.B.d.A. x als gerade vorausgesetzt werden. Dann ist y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x'$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z' + 1$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann gleichbedeutend mit:

$$4x'^2 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 + 4z' + 1 \qquad \text{und weiter mit} \qquad x'^2 = z'^2 + z' - y'^2 - y'$$

d.h., x'^2 ist als Summe von vier ungeraden Zahlen gerade, und daher ist auch x' durch 2 teilbar.
Wegen $x = 2x'$ ist daher x durch 4 teilbar und damit auch das Produkt P.

Übernommen aus [2]

2. Lösung:
Es genügt offenbar der Nachweis, dass xyz durch jede der drei Zahlen 3,4,5 teilbar ist, weil daraus wegen deren Teilerfremdheit auch die Teilbarkeit durch deren Produkt 60 folgt.
Wäre nun $3 \nmid xyz$, so würde daraus sofort

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 2 \mod 3$$

folgen, im Widerspruch dazu, dass 2 quadratischer Nichtrest mod 3 ist. Genauso wenig kann auch $5 \nmid xyz$ gelten, da dies

$$x^2 \equiv \pm 1 \mod 5,\ y^2 \equiv \pm 1 \mod 5,\ z^2 \equiv \pm 1 \mod 5$$

zur Folge hätte, womit $x^2 + y^2 \equiv z^2 \mod 5$ ebenfalls nicht gelten kann.
Für den Nachweis von $4 \mid xyz$ bemerken wir zunächst, dass die Zahlen x,y nicht beide ungerade sein können, da daraus

$$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 2 \mod 4$$

folgen würde, im Widerspruch dazu, dass 2 ein quadratischer Nichtrest mod 4 ist. Ist also dann o.B.d.A. x gerade, und damit y und z ungerade, so folgt dann daraus und der Tatsache, dass $u^2 \equiv 1 \mod 8$ für ein beliebiges ungerades u gilt, dass

$$x^2 \equiv z^2 - y^2 \equiv 1 - 1 = 0 \mod 8$$

d.h., x muss wie behauptet sogar durch 4 teilbar sein.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 011223
Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Waagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

Man entnimmt aus dem
1. Gefäß 20 = 1 Kugel,
2. Gefäß 21 = 2 Kugeln,
3. Gefäß 22 = 4 Kugeln,
4. Gefäß 23 = 8 Kugeln sowie 5. Gefäß 24 = 16 Kugeln.

Nun ermittelt man mit einer einzigen Wägung die Gesamtmasse dieser $2^5 - 1 = 31$ Kugeln. Subtrahiert man davon $31 \cdot 10g = 310g$, so erhält man die (Maß-)Zahl a. Aus der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 = a \qquad (1)$$

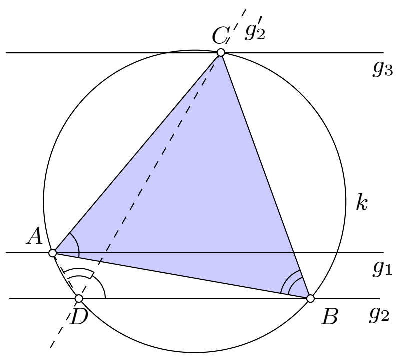
kann man eindeutig auf die Unbekannten $x_i \in \{0, 1\}$ schließen, die angeben, ob im i-ten Gefäß Kugeln von 10 g ($x_i = 0$) oder 11 g ($x_i = 1$) liegen.

Beweis: (1) ist nichts anderes als die Binärdarstellung $x_5x_4x_3x_2x_1$ der Dezimalzahl a, wobei die Umrechnung von einem Zahlensystem in das andere eineindeutig ist.

Beispiel: Es sei $a = 22$. Man erhält: $0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 22$. Also liegen in dem 1. und 4. Gefäß Kugeln von 10 g, während im 2., 3. und 5. Gefäß Kugeln von 11 g liegen.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011224
Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen! Begründen Sie die Konstruktion!



Analysis und Konstruktion:
ABC sei das gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten auf den parallelen Geraden g_1, g_2 und g_3. Da ΔABC längs der Parallelen beliebig verschoben werden kann, dürfen wir eine Ecke, etwa A auf g_1, nach Gutdünken auswählen.
Drehen wir nun ΔABC um A um 60° und nimmt bei dieser Drehung Ecke B die Gerade g_2 mit, so gelangt AB in die Lage AC und g_2 nach $g'2$. Eckpunkt C wird demnach durch g_3 und die um 60° gedrehte Gerade $g'2$ bestimmt. Den dritten Eckpunkt B finden wir als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A und Radius AC mit der Geraden g_2.

Alternative Konstruktion:
Wir wählen einen beliebigen Punkt D auf einer der äußeren Geraden, etwa g_2, und tragen hieran die Winkel 60° und 120° ab. Die Schnittpunkte der freien Schenkel mit g_3 und g_1 seien C bzw. A. Der zweite Schnittpunkt des Umkreises k von ΔDCA mit g_2 sei B. Dann ist ΔABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $\angle BDC = \angle CDA = 60°$ im Sehnenviereck $BCAD$. Ferner ist aufgrund des Peripheriewinkelsatzes $\angle BDC = \angle BAC = 60°$ und $\angle CDA = \angle CBA = 60°$.
Das Dreieck ABC hat somit zwei Innenwinkel von 60°, also hat auch der dritte Innenwinkel diese Größe. Mithin ist das Dreieck gleichseitig.

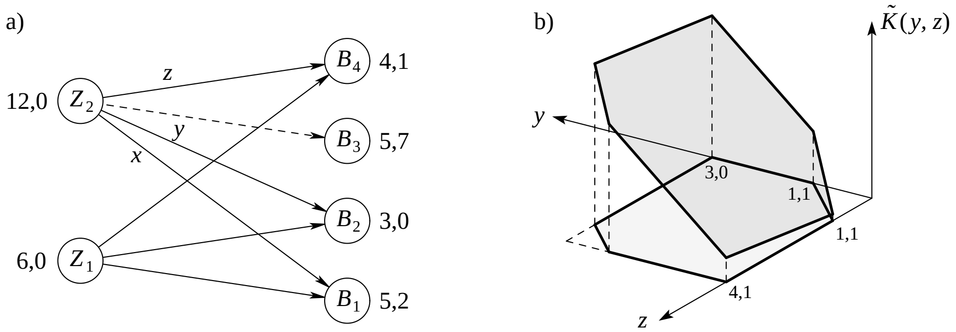
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

9.3.3 III. Runde 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011231
Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben.
Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Es wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.



Zur Bestimmung der optimalen Belieferung muss die Kostenfunktion in Abhängigkeit von den beeinflussbaren Parametern ausgedrückt werden. Diese Funktion ist die Summe der Transportkosten zu den einzelnen Baustellen bzw. (aufgrund der Proportionalität) die Entfernung, über die hinweg die Ziegel transportiert werden.

Wenn man die Lieferungen von Ziegelei 2 (Z_2) - in Millionen Ziegeln - an die Baustellen 1, 2 und 4 (B_1 usw.) mit x, y und z bezeichnet (B_3 braucht nicht beachtet zu werden), erhält man

$$K(x,y,z) = 28(5{,}2-x) + 26x + 30(3{,}0-y) + 36y + 21(4{,}1-z) + 20z = 321{,}7 - 2x + 6y - z$$

Als Nebenbedingung gilt dabei $x+y+z = 6{,}3$, d.h. Z_2 liefert 6,3 Millionen Ziegel an B_1, B_2 und B_4; die restlichen 5,7 Millionen gehen an B_3. Die Funktion K soll minimal werden.
Das ist der Fall, wenn x und z möglichst große, y dafür einen kleinen Wert annimmt, wie man an den Vorzeichen sieht.
Die Nebenbedingung fügt man ein, in dem man $\tilde{K}(y,z) = K(6{,}3-y-z, y, z) = 309{,}1 + 8y + z$ festlegt.

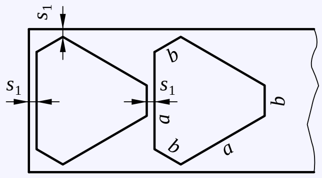
Zu beachten sind weiterhin $0 \leq y \leq 3{,}0$ und $0 \leq z \leq 4{,}1$ (nur dieser Bereich ist für Lieferungen der Z_2 an B_2 bzw. B_4 sinnvoll), sowie $1{,}1 \leq y+z \leq 6{,}3$ (B_1 kann höchstens 5,2 Millionen Ziegel von Z_2 bekommen).

In $\tilde{K}$ haben sowohl y als auch z positive Vorzeichen, beide müssen also so klein wie möglich werden. Den kleinsten Wert für $\tilde{K}(y,z)$ erhält man für $y=0$ und $z=1{,}1$, da y den größeren Vorfaktor hat. Es folgt $x=5{,}2$.
Zusammengefasst: Z_1 liefert je 3 Millionen Ziegel an B_2 und B_4, Z_2 liefert 5,2 Millionen an B_1 und 1,1 Millionen an B_4.

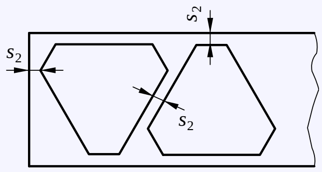
Hinweis: Das aus der Schule bekannte Verfahren, (lokale) Minima mittels Ableitungen zu bestimmen, funktioniert hier nicht. Grund dafür ist, dass die Funktion K (bzw. $\tilde{K}$) in ihren Argumenten linear ist. Extrema treten in diesem Fall nur global auf an den Rändern der durch die Ungleichungen festgelegten Bereiche.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 2 - 011232
Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß, $a = 34$ mm, $b = 8$ mm.)



Zeichnung 1



Zeichnung 2

a) Wie lang und wie breit muss der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, dass die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) $s_1 = 2$ mm betragen muss. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muss nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier $s_2 = 3$ mm.)

Da das Werkstück ein Sechseck mit gleich großen Innenwinkeln ist, beträgt jeder Innenwinkel $\frac{1}{6}(6-2)\cdot 180° = 120°$.
Wir berechnen nachfolgend die Länge (in Längsrichtung des Blechstreifens) und Breite (in Querrichtung) eines Werkstücks und daraus die erforderlichen Abmessungen. a) (Bild a) Die Länge beträgt

$$b \cdot \cos(30°) + a \cdot \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = 36{,}373mm$$

für 10000 Werkstücke also 363,730 m zuzüglich 20,002 m für 10001 Abstände s_1. Der Blechstreifen muss somit insgesamt 383,732 m lang sein. Die Breite des Werkstücks ist

$$a + 2b\sin(30°) = a + b = 42mm$$

zusammen mit zwei Abständen s_1 muss der Blechstreifen 46 mm breit sein. Seine Fläche beträgt $383{,}732m \cdot 0{,}046m = 17{,}652m^2$.
Die Fläche eines Werkstücks ist gleich der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a + 2b$ abzüglich der Fläche dreier gleichseitiger Dreiecke der Seitenlänge b, also

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2b)^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 999{,}4mm^2$$

Die 10000 Werkstücke beanspruchen somit eine Fläche von 9,994 m^2, woraus sich der Abfall zu 7,658 m^2 berechnet.

b) (Bild b) Da die Werkstücke jetzt um 90° gedreht werden, ist die Breite gleich der Länge aus a), zusammen mit der doppelten Stegbreite s_2 ergibt sich eine Breite des Blechstreifens von 42,4 mm.

Zur Berechnung der Länge wird zunächst $s_2 = 0$ angenommen. Die Schwerpunkte zweier Werkstücke sind dann

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+3b) = 29{,}0mm$$

entfernt. Die gesamte Länge des Blechstreifens ist hier

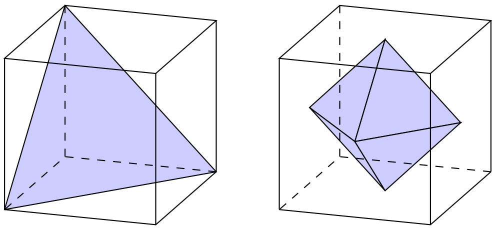
$$9999 \cdot (29{,}0mm + s_2\cos(30°)) + 2 \cdot 21{,}0mm + 2s_2 = 315{,}997m$$

der Verbrauch 13,398 m^2 sowie der Abfall 3,404 m^2. Die Materialersparnis beträgt gegenüber a) 24,1 %.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 011233
Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben. Begründen Sie, dass diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

Da der Würfel sechs Quadrate als Oberfläche besitzt und das Tetraeder sechs Kanten hat, nehmen wir sechs geeignete Oberflächendiagonalen als Kanten des Tetraeders (Bild a), die selbstverständlich gleich lang sind und damit tatsächlich ein regelmäßiges Tetraeder bilden.
Das Oktaeder hat sechs Eckpunkte, so dass die Mittelpunkte der Oberflächen des Würfels als Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders gewählt werden können (Bild b).



a) Das Tetraeder schneidet vom Würfel mit dem Volumen $V_W = a^3 4$ vier dreiseitige Pyramiden ab, wobei das Volumen jede dieser Pyramiden mittels $V = \frac{1}{3}Ah$ berechnet werden kann.
Dazu wählen wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit der Kathetenlänge a als Grundfläche, also $A = \frac{1}{2}a^2$. Die Höhe beträgt ebenfalls $h = a$, so dass $V = \frac{1}{6}a^3$ folgt. Daraus ergibt sich das Volumen des Tetraeders zu

$$V_T = a^3 - 4\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Für das Oktaeder ergibt sich eine Kantenlänge von $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; es kann aus zwei vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden. Die Grundseiten dieser Pyramiden (ein Quadrat) haben einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}a^2$, somit hat das Oktaeder ein Volumen von

$$V_O = 2\frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$$

Die Volumina stehen also im Verhältnis $V_W : V_T : V_O = 6 : 2 : 1$.

b) Um den Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Umkugel des Tetraeders. Diese ist offenbar mit der Umkugel des Würfels identisch, so dass die halbe Raumdiagonale des Würfels gleich dem Umkugelradius ist: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Die Inkugel mit dem Radius r berührt dagegen die Tetraederflächen von innen, wobei jede Tetraederfläche eine Tangentialebene an die Inkugel im Berührungspunkt aufspannt. Somit liegen Würfeleckpunkt, Berührungspunkt und Mittelpunkt auf einer Geraden, und es gilt $R = h + r$ bzw. $r = R - h$ mit h als Höhe der unter a) betrachteten dreiseitigen Pyramiden mit dem (jetzt gleichseitigen) Dreieck als Grundfläche. Diese Höhe berechnet sich aus der obigen Volumenformel mit

$$V = \frac{1}{6}a^3 \quad \text{zu} \quad h = \frac{3V}{A} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\sqrt{3}\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgt $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{1}{3}R$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011234 = 011135
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

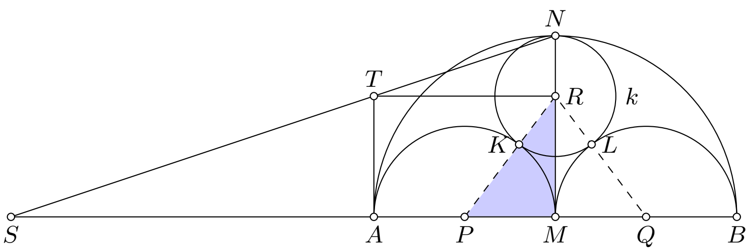
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d.h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d.h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 5 - 011235
Es ist zu beweisen, dass $x + y \leq a\sqrt{2}$, wenn $x^2 + y^2 = a^2$ und $a \geq 0$ ist!

Die kürzeste Variante ist diejenige mit der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel, falls x, y positive Zahlen sind:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x + y \leq \sqrt{2}a$$

Wegen $a \geq 0$ gilt die Behauptung erst recht für nichtpositive x, y. Die Ungleichung selbst kann einfach wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2+y^2 &\geq 2xy \\ 2(s^2+y^2) \geq x^2+2xy+y^2 &= (x+y)^2 \\ \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4} &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &\geq \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

9.3.4 IV. Runde 1961, Klasse 12

Aufgabe 1 - 011241
Bei 27000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P2O5 (dt/ha)	Ernteertrag (dt/ha)
0,0	237
0,3	251
0,9	269

Die zwischen der Düngergabe x (in dt/ha) und dem Ernteertrag y (in dt/ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!
b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt/ha und 1,2 dt/ha!
c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt/ha bzw. 275 dt/ha fest!

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} 237 &= a - b \\ 251 &= a - b \cdot 10^{-0,3k} \\ 269 &= a - b \cdot 10^{-0,9k} \end{aligned}$$

Gleichung (1) kann man leicht nach a umstellen und in die anderen beiden Gleichungen einsetzten. Man erhält:

$$14 = b - b \cdot 10^{-0,3k} \qquad ; \qquad 32 = b - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Dies kann man umstellen zu:

$$10^{-0,3k} = \frac{b-14}{b} \qquad ; \qquad 10^{-0,9k} = \frac{b-32}{b} = (10^{-0,3k})^3$$

Setzt man beide Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned} (\frac{b-14}{b})^3 &= \frac{b-32}{b} \\ \frac{b^3 - 42b^2 + 588b - 2744}{b^3} &= \frac{b-32}{b} \\ b^4 - 42b^3 + 588b^2 - 2744b &= b^4 - 32b^3 \\ 0 &= 10b^3 - 588b^2 + 2744b \\ 0 &= 10b \cdot (b^2 - \frac{588}{10}b + \frac{2744}{10}) \end{aligned}$$

Durch Anschauen der Ausgangsgleichungen kann man leicht sehen, dass die Lösung $b = 0$ entfällt. Damit gilt:

$$b_{1,2} = \frac{294}{10} \pm \sqrt{\frac{86436}{100} - \frac{2744}{10}}$$

$$b_1 = 53{,}69 \quad ; \quad a_1 = 290{,}69 \quad ; \quad k_1 = 0{,}44 \quad \text{und} \quad b_2 = 5{,}11 \quad ; a_2 = 242{,}11$$

Für die zweiten Werte lässt sich kein k berechnen. Damit entfällt diese Lösung.
Die Konstanten haben damit folgende Werte: $b = 53{,}69, a = 290{,}69$ und $k = 0{,}44$.
b) $x = 0{,}6$ dt/ha $\rightarrow y = 261{,}46$ dt/ha ; $x = 1{,}2$ dt/ha $\rightarrow y = 274{,}77$ dt/ha
c) $x = 261{,}46/261 = 1{,}0018 \rightarrow$ Für den ersten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,18%.
$x = 274{,}77/275 = 0{,}9992 \rightarrow$ Für den zweiten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,08%.

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 011242
Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1.
Man soll zeigen, dass unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

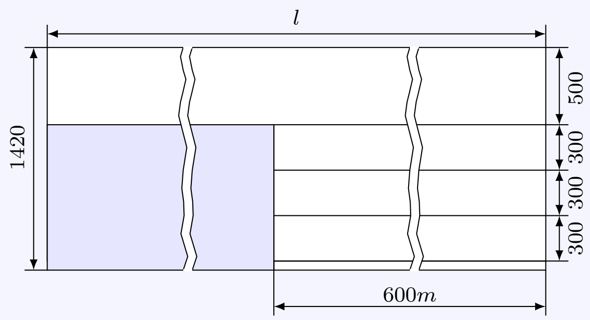
Indirekter Beweis: Angenommen, keine der Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ ist nicht größer als $\frac{1}{4}$, d.h., alle drei Zahlen sind größer als $\frac{1}{4}$. Deren Multiplikation liefert

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w) > \frac{1}{64} \qquad (1)$$

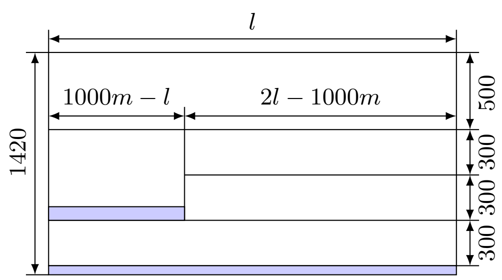
Andererseits ist jedoch $u(1-u) = \frac{1}{4} - (u-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$; analoge Ungleichungen gelten für v und w. Multipliziert man diese drei Ungleichungen, zeigt sich, dass (1) nicht gilt. Somit war die obige Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 011243



Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1800 m geschnitten werden. Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die graue Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.
Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, dass der Abfall erheblich geringer wird.
a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?
b) Wie muss die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?
c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?



a) Der bisherige Abfall besteht aus zwei rechteckigen Flächen, wobei die größere 1000 m - 600 m = 400 m lang und 1,42 m - 0,5 m = 0,92 m breit ist und somit eine Fläche von 368 m^2 hat.
Die kleinere Fläche ist 600 m lang und 0,02 m breit, entsprechend 12 m^2.
Der Abfall beträgt also insgesamt 380 m^2, gemessen an der Gesamtfläche von 1420 m^2 sind das 26,8%.

b) Da die Gesamtbreite vorgegeben ist, kann zur Optimierung nur die Gesamtlänge l variiert werden. Dazu werden die Bleche mit einer Breite von 500 mm wie im Bild gezeigt auf zwei Bahnen aufgeteilt,

wobei das kürzere Stück eine Länge von $1000m - l$ hat (eine Aufteilung auf drei Bahnen kommt wegen $3 \cdot 500mm > 1420$ mm nicht in Betracht).
Gleichzeitig wird der verbleibende Platz für zwei Bahnen der schmaleren Bleche genutzt, die dann jeweils eine Länge von $2l - 1000$ m haben.

Aus der gegebenen Gesamtlänge der schmaleren Bleche folgt nun $2(2l-1000m)+l = 5l-2000m = 1800m$ und daraus $l = 760$ m.
c) Der Abfall beträgt jetzt $240m \cdot 0{,}1m = 24m^2$ plus $760m \cdot 0{,}02m = 15{,}2m^2$, also insgesamt 39,2 m^2. Das sind nur noch 2,8% der Gesamtfläche.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 011244
Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.
Es ist zu beweisen, dass für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt: $q \geq \sqrt{2}$.

Für ein Quadrat ist offensichtlich, dass das Gleichheitszeichen gilt. Alle anderen Vierecke haben mindestens einen Innenwinkel, der größer als 90° ist; dieser sei o.B.d.A. α.
In einem konvexen Viereck kann man den Kosinussatz für die Diagonalen benutzen:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

Nun ist aber $-\cos\alpha > 0$ und daher gilt: $f^2 > a^2 + d^2$.
Folgende Kette gilt wegen der Monotonie von min und wegen $a, d > 0$:

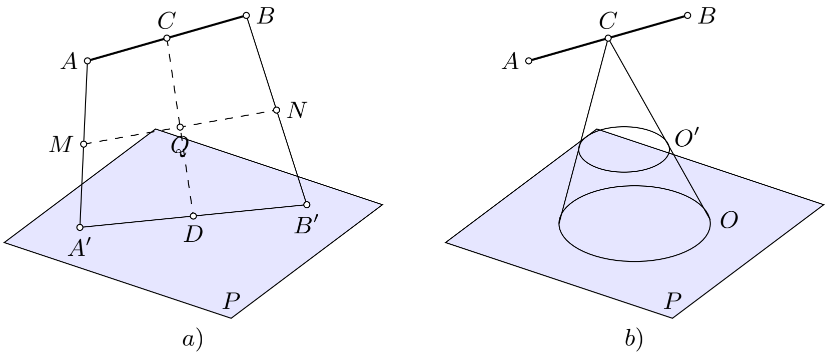
$$a^2 + d^2 \geq 2min\{a^2, d^2\} = 2[min\{a, d\}]^2 \geq 2[min\{a, b, c, d, e, f\}]^2$$

Außerdem ist $max\{a, b, c, d, e, f\} \geq f$. Wir erhalten:

$$max\{a, b, c, d, e, f\} > \sqrt{2}min\{a, b, c, d, e, f\}$$

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 011245
Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken AA', BB'.
a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!
b) In der Ebene P wird ein Kreis O betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort L des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise O oder in dessen Innern befinden!
c) Wird A' fest auf dem Kreise O oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von O, so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so dass der oben bestimmte Ort L derselbe bleibt.
Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden:
1. A' und B' sind verschieden,
2. A' und B' fallen zusammen.



a) (Bild a) Beschreiben wir die Lage der Punkte A, B, A', B' usw. mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a'}$ bzw. $\vec{b'}$ usw., so sind die Mittelpunkte M und N durch $\vec{m} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a'})$ bzw. $\vec{n} \equiv \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b'})$ gegeben.
Der Mittelpunkt Q der Strecke MN ist demzufolge gleich dem arithmetischen Mittel $\vec{q} \equiv \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{a'}+\vec{b}+\vec{b'})$ der vier Vektoren.

Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes ist dieser Ausdruck auch der Mittelpunkt derjenigen Strecke, deren Endpunkte durch $\vec{c} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und $\vec{d} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a'} + \vec{b'})$ beschrieben werden.

Der erste Punkt ist der Mittelpunkt C der Strecke AB (und damit ein fester Punkt), während der zweite der Mittelpunkt D einer willkürlich gewählten Strecke in P (also selbst ein beliebiger Punkt) ist. Die Mittelpunkte Q aller Strecken CD liegen somit nach der Umkehrung des Strahlensatzes in einer Ebene P', die parallel zu P verläuft und z.B. das Lot von C auf P halbiert.

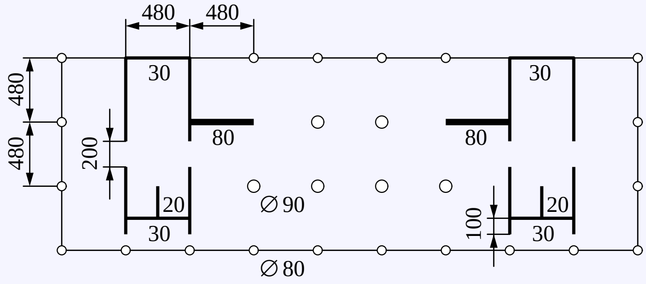
b) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass der geometrische Ort aller Punkte L ebenfalls ein Kreis bzw. dessen Inneres ist, der die Schnittfläche des (schiefen) Kreiskegels mit der Grundfläche O und der Höhe h in halber Höhe ist.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

9.4 II. Olympiade 1962

9.4.1 I. Runde 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021211
Das „Haus des Lehrers“ in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile.



Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m. Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoss! Dabei bleibt die Bewehrung unberücksichtigt.

Die Grundfläche für eine Höhe von 6 m beträgt:
20 Säulen mit 0,9 m Durchmesser, 6 Säulen mit 0,8 m Durchmesser, 9,6 m Wände der Stärke 0,8 m, 31,6 m Wände der Stärke 0,3 m und 4,8 m Wände der Stärke 0,2 m, insgesamt ein Volumen von 248,8 m^3. Hinzu kommen noch 8 m der Wandstärke 0,3 m und der Höhe 3,85 m über den Zugängen zum Treppenhaus, also 9,2 m^3.
Somit werden ca. 258 m^3 Beton benötigt.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 2 - 021212
Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wie viel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.

Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

Da wir keine weiteren Angaben haben, müssen wir annehmen, dass die 52 Fische des zweiten Fangs eine repräsentative Stichprobe der Gesamtheit der Fische im See darstellen. Demzufolge sind $\frac{4}{52}$ der Fische (im ganzen See!) markiert, also jeder 13.
Insgesamt befinden sich dann ungefähr $13 \cdot 30 = 390$ Fische in diesem See.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 3 - 021213
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

a) sie ist für alle reellen Zahlen definiert,
b) sie ist für alle $x \geq 1$ wachsend,
c) sie hat den Wertevorrat $0 \leq y < 1$,
d) ihr Bild ist achsensymmetrisch!
Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Beweis:

a) Damit sie für alle reellen x definiert ist, darf der Nenner nicht Null und der Radikand nicht negativ sein. Das ist erfüllt, wenn $\forall x : x^2 - 2x + 2 > 0$.
Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen hat die zugehörige Gleichung die Lösungen $x = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$, der quadratische Ausdruck hat also keine reellen Nullstellen.

Da er stetig ist, reicht es zu wissen, dass er an einem Punkt größer Null ist (z. B. $x = 0$ und $x^2 - 2x + 2 = 2 > 0$), um zu folgern, dass er überall größer Null ist. Damit ist die Funktion auf der gesamten reellen Achse definiert.

b) Wir untersuchen die erste Ableitung für $x \geq 1$ (also $|x-1| = x - 1$):

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \frac{(x-1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der quadratische Ausdruck ist wie in a) gezeigt positiv und daher gilt $y' > 0 \forall x \geq 1$. Da in y ein Betrag vorkommt, haben wir bei $x = 1$ die rechtsseitige Ableitung genommen.

c) Per Definition haben wir $y \geq 0$. Außerdem sind folgende Aussagen einander äquivalent:

$$y < 1 \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow (x-1)^2 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 1 < 2 \quad \text{wahre Aussage}$$

Die zweite Äquivalenz ist wahr, weil wir nur positive Ausdrücke betrachten.

d) Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 1$, d. h. sie geht unter $1 + x \to 1 - x$ in sich selbst über. Für den Zähler gilt:

$$|(1-x) - 1| = |-x| = |x| = |(1+x) - 1|$$

Im Nenner haben wir:

$$(1-x)^2 - 2(1-x) + 2 = (1 - 2x + x^2) + (-2 + 2x) + 2 =$$

$$= (1 + 2x + x^2) + (-2 - 2x) + 2 = (1+x)^2 - 2(1+x) + 2$$

Damit sind die Eigenschaften a) bis d) bewiesen.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 4 - 021214
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

für $0° \leq x \leq 360°$ zu bestimmen!

Die gegebene Gleichung wird zunächst mittels $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ umgeformt, wobei wir zur Abkürzung $c_1 \equiv \cos(x), c_2 \equiv \cos(2x), c_3 \equiv \cos(3x)$ schreiben:

$$\begin{aligned} c_1^2 x_2^2 c_3^2 + (1-c_1^2)(1-c_2^2)(1-c_3^2) &= c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_3^2 c_2^2 \\ c_1^2 c_2^2 c_3^2 + 1 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2 c_2^2 + c_2^2 c_3^2 + c_3^2 c_1^2) - c_1^2 c_2^2 c_3^2 &= c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_3^2 c_2^2 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir: $c^2 = 2c_1^2 - 1$ und $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$. Dies eingesetzt in (1) ergibt:

$$c_1^2 + (2c_1^2 - 1)^2 + (4c_1^3 - 3c_1)^2 = 1$$
$$16c_1^6 - 20c_1^4 + 6c_1^2 = 2c_1^2(8c_1^4 - 10c_1^2 + 3) = 0$$

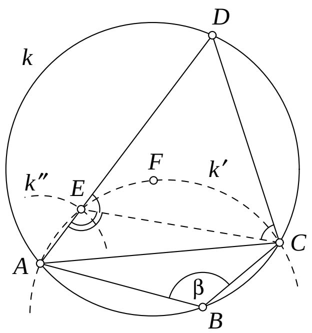
Aus $c_1^2 = 0$ folgen die ersten beiden Lösungen: $x_1 = 90°, x_2 = 270°$.

Für weitere Lösungen muss der Klammerausdruck in (2) verschwinden, was auf eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $c_1^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}$ führt.

Aus $c_1^2 = \frac{3}{4}$ 4 folgen die vier Lösungen: $x_3 = 30°, x_4 = 150°, x_5 = 210°$ und $x_6 = 330°$, sowie aus $c_1^2 = \frac{1}{2}$ vier weitere Lösungen: $x_7 = 45°, x8 = 135°, x9 = 225°, x10 = 315°$.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 021215
Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben.
Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dass $ABCD$ sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist!
(Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)



Analysis: Da D auf dem Kreis k liegt, ist die Forderung, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck sein soll, trivial. Für ein Tangentenviereck $ABCD$ muss jedoch $AB + CD = BC + DA$ oder $|AB - BC| = |DA - CD|$ gelten.

Sei o.B.d.A. $AB \geq BC$ (und damit $DA \geq CD$) sowie E derjenige Punkt auf DA mit $DE = DC$. Dann ist das Dreieck DEC gleichschenklig mit $\angle CDE = 180° - \angle ABC = 180° - \beta$ (Eigenschaft eines Sehnenvierecks) und den Basiswinkeln $\frac{1}{2}\beta$.

Folglich ist $\angle AEC = 180° - \frac{1}{2}\beta$. Außerdem ist $AE = DA - CD = AB - BC$ eine bekannte Länge. Wir gelangen dadurch zu folgender Konstruktion.

Konstruktion:

Es wird derjenige Kreisbogen k' konstruiert, der über der Sehne AC auf der B entgegengesetzten Seite den Winkel $180° - \frac{1}{2}\beta$ fasst (z. B. durch Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks AFC mit den Basiswinkeln $\frac{1}{4}\beta$).

Dessen Schnittpunkt mit dem Kreis k'' (Mittelpunkt A, Radius $AE = AB - BC$) liefert den Punkt E.

Die Verlängerung von AE schneidet k dann im gesuchten Punkt D.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 6 - 021216
Es ist zu beweisen, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist!

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} N = x^4 + 4y4 &= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2(2y^2x^2) - 4(x^2y^2) \\ &= (x^2 + 2y^2)2^-(2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Da $x^2 + 2y^2 + 2xy \geq x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 > 0$ für $x + y > 0$ und $N = 0$ für $x + y = 0$ gilt, ist N genau dann prim, wenn der zweite Faktor in obiger Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 = 1$$

und $x^2 + 2y^2 + 2xy$ Primzahl sind.

Da Quadrate immer nichtnegativ sind, muss zur Erfüllung der ersten Bedingung entweder $y = 1$ und $|x - y| = 0$ oder $y = 0$ und $|x - y| = 1$ sein. Im letzteren Fall wäre $(x, y) = (1, 0)$, aber $N = 1$ ist nicht prim.

Für $y = 1$ und $|x - y| = 0$ ist $(x, y) = (1, 1)$, d. h. $N = 1 + 4 = 5$ ist tatsächlich eine Primzahl.
Somit gibt es nur ein Paar (x, y) natürlicher Zahlen: $(1, 1)$, für das $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

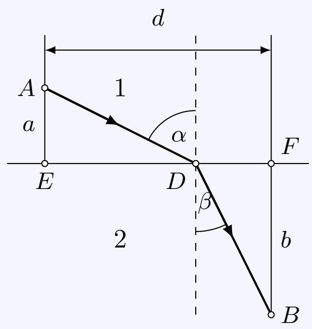
9.4.2 II. Runde 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021221
Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L.W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:
In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:
a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.
Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,
b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,
c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.
Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Bezeichne a die Anzahl der Fräsmaschinen zur Produktion von Stücken der Sorte 1, b die Anzahl der Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung zur Produktion von Stücken der Sorte 1 und c die Anzahl der Automaten zur Produktion von Stücken der Sorte 1.
Dann werden pro Tag $u = 10a + 20b + 30c$ Werkstücke der Sorte 1 und
$v = 20(3 - a) + 30(3 - b) + 80(1 - c)$ Werkstücke der Sorte 2 gefertigt.
Offensichtlich ist $u \leq 120$, wobei $v = 0$ für $u = 120$ folgt.
Für $u = 110$, wäre $(a, b, c) = (2, 3, 1)$, d.h. $v = 20$.
Für $u = 100$, wäre $(a, b, c) \in \{(1, 3, 1), (3, 2, 1)\}$, d.h. $v \in \{40, 30\}$.
Für $u = 90$, wäre $(a, b, c) \in \{(0, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 0)\}$, d.h. $v \in \{60, 50, 80\}$.
Also werden maximal 80 Paare von Werkstücken der beiden Sorten gefertigt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 021222



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium 1 die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium 2 die Geschwindigkeit c_2.
Beweisen Sie, dass die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Zuerst muss die Zeit als Funktion der Veränderlichen ausgedrückt werden, deren Minimum dann gesucht werden muss. Diese Funktion ist die Summe aus der Zeit für die Durchquerung von Medium 1 und der für Medium 2:

$$t(\alpha, \beta) = \frac{1}{c_1}\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{1}{c_2}\frac{b}{\cos\beta}$$

Dabei gilt die Nebenbedingung $a\tan\alpha + b\tan\beta = d$. Diese wird wie folgt verwendet:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}}$$

Einsetzen liefert:

$$\bar{t}(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{b}{c_2}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\overline{t}'(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{-1}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) + \frac{b}{c_2}\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot 2(d-a\tan\alpha)\cdot(-a)\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

An Extremstellen wird diese Null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\frac{a}{c_1}\sin\alpha - \frac{a}{c_2}\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\right] \\ 0 &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}} \\ &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{b\tan\beta}{1+\tan^2\beta} \\ &= c_2\sin\alpha - c_1\sin\beta \end{aligned}$$

Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Anmerkung: Die Kontrolle der Lösung in der 2.Ableitung zeigt, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 3 - 021223
a) Beweisen Sie, dass für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Es seien a,b,c die Längen der Dreiecksseiten, die den Winkeln α,β,γ gegenüberliegen. Nach Kosinussatz ist die zu beweisende Ungleichung dann äquivalent zu

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen zeigt, dass dies äquivalent ist zu

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \geq a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4$$

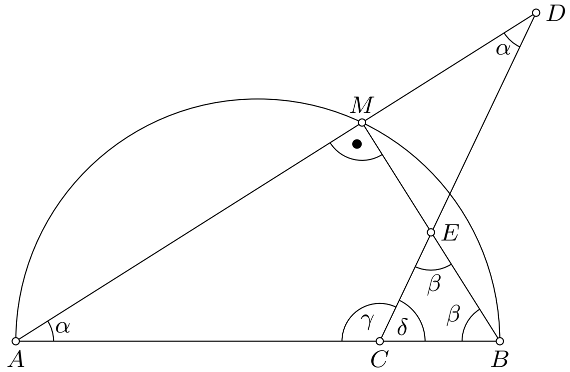
Mit $x := a^2, y := b^2$,$z := c^2$ ist das gerade die Ungleichung von Schur:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

Da x,y,$z > 0$ sind, tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $x = y = z$, also $a = b = c$ ein, also genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 021224
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, dass $CE = CB$ ist!
Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, dass $CA = CD$ ist!
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.
Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, dass jeder seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.



a) Der geometrische Ort aller Punkte M, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, ist der Halbkreis mit Durchmesser AB, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie der Punkt E.

b) Nach dem Satz des Thales ist es für die Wahrheit der obigen Behauptung notwendig, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter Winkel ist. Gleichbedeutend ist es zu zeigen, dass $\angle DME = 90°$ gilt.
Gemäß dem Innenwinkelsatz gilt aber $\angle DME + \angle MED + \angle EDM = 180°$.
Per Konstruktion ist das Dreieck ACD gleichschenklig, daher $\angle EDM = \alpha$. Gleiches trifft auf das Dreieck BEC zu, so dass $\beta = \angle BEC = \angle MED$ (Gegenwinkel).
Der Außenwinkelsatz führt auf $2\alpha = \delta$ und $2\beta = \gamma$, also $2(\alpha + \beta) = \gamma + \delta = 180°$ (gestreckter Winkel).
Wegen $\alpha + \beta = 90° = \angle DME$ folgt die Behauptung.
Noch bewiesen werden muss, dass M nur auf einem Halbkreis liegen kann: Wegen $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$ können sich die Geraden BE und AD aber nur auf der einen Seite von AB schneiden.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 021225
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist! Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

Beweis: Aus der bekannten Tatsache, dass das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl (hier die Zahl $a - b$) stets nichtnegativ ist, folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \end{aligned}$$

Dabei bleibt bei der Division durch $ab > 0$ das Relationszeichen erhalten.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

9.4.3 III. Runde 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021231
Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$$

Als erstes ist festzuhalten, dass der Wertebereich von x durch die Formel bereits wie folgt eingeschränkt ist: $-1 < x < 1$. Nun sucht man die Grenzstellen der Ungleichung, d.h. man berechnet zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 \\
\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 \\
\frac{1-x+1+x+2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
2-2\sqrt{1-x^2} &= 1-x^2 \\
0 &= 1-x^2-2+2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Jetzt wird substituiert mit $z = \sqrt{1-x^2}$.

$$0 = z^2 + 2z - 2 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Über die Substitution kann x bestimmt werden: $x = \sqrt{1-z^2}$.
Für $z_2 = -1-\sqrt{3}$ lässt sich kein x berechnen. Für $z_1 = -1+\sqrt{3}$ ergibt sich $x \approx \pm 0{,}6813$. Um zu klären, wo jetzt tatsächlich eine Grenze liegt (durch das Quadrieren können Scheinlösungen entstehen) und wie sich die Kurve verhält, setzt man Werte aus jedem Intervall in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned}
x = -0{,}7: &\quad 1{,}059 \geq 1 \quad \text{w.A.} \\
x = 0: &\quad 0 \geq 1 \quad \text{(f.A.)} \\
x = 0{,}7: &\quad -1{,}059 \geq 1 \quad \text{(f.A.)}
\end{aligned}$$

Damit gilt die Gleichung für $-1 < x \leq -0{,}6813$.

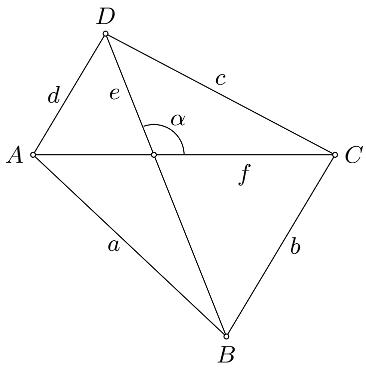
Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 2 - 021232
Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Grundsätzlich sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.

Alle weiteren Fälle lassen sich auf diese beiden zurückführen. Seien also a und b die gegebenen Seiten und e und f die gegebenen Diagonalen sowie α der gegebene Winkel zwischen den Diagonalen.
Wenn nun in der folgenden Beschreibung die Lage von α angegeben ist, so müssen die Konstruktionsbeschreibungen ebenfalls für den Gegenwinkel $\beta = 180° - \alpha$ gelten, da nicht angegeben ist, welcher Winkel der Schnittwinkel zwischen e und f sei.
Ebenso müssen e und f gedanklich austauschbar sein genau so wie a und b.



I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:

a) Konstruktion des Dreiecks ABC aus a, b, f.
b) Konstruktion des Winkels α an f in einem beliebigen Punkt, es entsteht eine Gerade e^*.
c) Parallelverschiebung von e^* so, dass die Gerade durch B verläuft, es entsteht eine Gerade e^{**}.
d) Abtragen der Strecke e in B auf der Geraden e^{**} so, dass der entstehende Punkt D in der bzgl. AC anderen Halbebene als B liegt.
Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:
a) Konstruktion eines Dreiecks BED aus $BD = e$, $DE = f$ und dem Winkel α zwischen den beiden Seiten.
b) Konstruktion des Dreiecks BCE aus $BC = b, CE = a$ und der vorhin konstruierten Strecke BE.
c) Wie im 1. Fall wird nun auf e der Winkel α abgetragen und die entstehende Gerade so parallel verschoben, dass sie durch C geht. Auf der neu entstandenen Gerade wird f abgetragen, es entsteht A.
Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 021233
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

Die Zahl z lässt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

wobei $a_n, ..., a_0$ natürliche Zahlen kleiner als 10 sind und $a_n \geq 0$ ist. Da z durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme von z:

$$Q(z) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

durch 9 teilbar. Da z durch 11 teilbar ist, ist die alternierende Quersumme von z:

$$Q_a(z) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pm ... - a_1 + a_0$$

durch 11 teilbar.
Setzt man die Summe der positiven Summanden von $Q_a(z)$ gleich a, also $a = a_0 + a_2 + ...$ und die negative Summe der übrigen Summanden gleich b, also $b = a_1 + a_3 + ...$, so gilt: $Q(z) = a + b = 9k$ und $Q_a(z) = a - b = 11m$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen, k positive ganze Zahl und m eine ganze Zahl bedeuten.
Die Aufgabe ist gelöst, wenn $k \neq 1$ gezeigt wird.
Angenommen, es gelte $k = 1$, so folgt aus $a + b = 9$ und $a - b = 11m$:

$$a = \frac{1}{2}(9 + 11m) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2}(9 - 11m)$$

Da a nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für a: $m \geq 1$. Da b ebenfalls nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für b gleichzeitig $m \leq -1$. Diese beiden Bedingungen für m sind jedoch unvereinbar miteinander.
Daher ist die Annahme $k = 1$ nicht richtig, und es ist $k \geq 2$, d.h., die Quersumme $Q(z)$ ist größer oder gleich 18.

Aufgabe gelöst von Burkhard Thiele

Aufgabe 4 - 021234
Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

alle Lösungen an!

Da $\sin^2 x > 0$ und $\cos^2 x > 0$ wegen der Formulierung der Ungleichung angenommen werden darf (Gleichheit ist nicht zulässig), kann die Ungleichung durch Multiplikation zu

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq \frac{8}{3} \sin^2 x \cos^2 x$$

umgeformt werden, was mittels Additionstheoremen gleichbedeutend ist mit

$$\cos 2x \geq \frac{2}{3} \sin^2 2x = \frac{2}{3}(1 - \cos^2 2x)$$

Substituiert man nun $z = \cos 2x$, reduziert sich das Problem auf die quadratische Ungleichung $2z^2 + 3z - 2 \geq 0$. Ihre Lösungsmenge ist $z \leq -2 \cup z \geq \frac{1}{2}$, wobei nur für $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ die Rücksubstitution möglich ist. Diese ergibt, dass

$$x \in (0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$$

gelten muss; nur für diese x (und deren Wiederholung mit der Periode π) ist die gegebene Ungleichung erfüllt.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 021235
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M.
Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate $AMDE$ und $MBGH$! Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

Die Strecke AB wird so in ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem gelegt, so dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $M(m,0)$, mit $0 \leq m \leq a$.
Nach den Bedingungen der Aufgabenstellung haben die Punkte D, E, G und H dann die folgenden Koordinaten: $D(m,m)$, $E(0,m)$, $G(a, a-m)$, $H(m, a-m)$.
Die Mittelpunkte R des Quadrates $MADE$ und S des Quadrates $MBGH$ haben somit die Koordinaten:

$$R\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \quad ; \quad S\left(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2}\right)$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes N der Strecke RS im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem lauten demnach

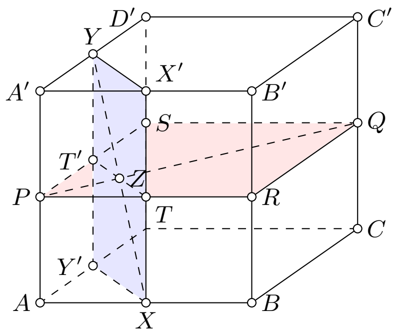
$$N\left(\frac{a+2m}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

Da der Punkt M auf der Strecke AB beliebig gewählt werden kann, d.h. es gilt $0 \leq m \leq a$, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS eine zu AB parallele Strecke KL der Länge $\frac{a}{2}$, wobei deren Endpunkte K und L folgende Koordinaten haben:

$$K\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) \quad ; \quad L\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

Aufgabe gelöst von Manfred Worel

Aufgabe 6 - 021236
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $A'D'C'B'$ in dieser Reihenfolge.
Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!



Aufgrund der gegebenen Bedingungen ergibt sich die Lage des Punktes Y aus der von X folgendermaßen:
a) für $X \in AB$ liegt Y auf $A'D'$ so, dass $|AX| = |A'Y|$ ist,
b) für $X \in BC$ liegt Y auf $D'C'$ so, dass $|BX| = |D'Y|$ ist,
c) für $X \in CD$ liegt Y auf $C'B'$ so, dass $|CX| = |C'Y|$ ist,
d) für $X \in DA$ liegt Y auf $B'A'$ so, dass $|DX| = |B'Y|$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:
Satz 1: Ist P der Mittelpunkt von AA' und Q der Mittelpunkt von CC', so liegt der Mittelpunkt Z von XY auf PQ.
Satz 2: Liegt Z auf PQ, so ist Z Mittelpunkt einer der Strecken XY.

Aus beiden Sätzen folgt, dass der zu ermittelnde geometrische Ort die Strecke PQ ist.

Beweis von Satz 1:
Wird zu einem fest gedachten Zeitpunkt der Bewegung der Würfel an der Achse g_{PQ} gespiegelt, so geht dieser in sich über, und zwar so, dass A, B, C, D und X in dieser Reihenfolge mit A', B', C', D', Y vertauscht werden. Daher liegt Z auf der Symmetrieachse g_{PQ}.
Weil jeder Würfel konvex ist, ist PQ die Menge der Punkte von g_{PQ}, die im Würfelkörper liegen. Da aus demselben Grund XY und damit Z im Würfelkörper liegen, gilt $Z \in PQ$. □

Beweis von Satz 2:
Es sei ϵ_2 die auf g_{PQ} senkrecht stehende Ebene durch $Z \in PQ$. Dann liegen P und Q nicht auf derselben Seite von ϵ_2. Da jede der Kanten AA', BB', CC', DD' zu ϵ_2 parallel ist, liegen jeweils A und A', B und B', C und C', D und D' nicht auf verschiedenen Seiten von ϵ_2, während A und C bzw. A' und C' nicht auf derselben Seite von ϵ_2 liegen.
Die Ebene ϵ_2 enthält die Strecken BB' und DD' entweder beide - genau dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist - oder beide nicht. Folglich hat ϵ_2 mit jeder der Strecken $AB, A'B', AD, A'D'$ oder mit jeder der Strecken $BC, B'C', CD, C'D'$ einen Punkt gemeinsam. Diese Schnittpunkte vertauschen sich bei der im Beweis von Satz 1 genannten Spiegelung auf die dort beschriebene Weise.
Daher gibt es zu jedem Punkt $Z \in PQ$ ein Paar, im Falle $Z \neq P, Z \neq Q$ genau zwei Paare (X, Y) zusammengehöriger Punkte X, Y, für die Z Mittelpunkt von XY ist. □

Übernommen aus [2]

9.4.4 IV. Runde 1962, Klasse 12

Aufgabe 1 - 021241
a) Beweisen Sie, dass der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 30q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 29$.
Für alle Zahlen r, die durch 2, 3, oder 5 teilbar sind, ist $30q + r$ keine Primzahl. Daher kommen nur die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 als Rest r in Frage, d.h., r ist entweder gleich 1 oder eine Primzahl.

b) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 60q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 59$.
Da sich die Primzahl 109 in der Form $109 = 60 \cdot 1 + 49$ schreiben lässt und da 49 keine Primzahl ist, gilt die Aussage von a) nicht für b).

Aufgabe gelöst von Burkhard Thiele

Aufgabe 2 - 021242
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1$$

Zuerst kann man mit $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ und $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ die Ungleichung umformen zu

$$0 \leq 1 - \frac{2}{1-\tan^2 x} + 2\frac{1-\tan^2 x}{2} = f(x)$$

($f(x)$ dient als Abkürzung des Ausdrucks).
Zuerst betrachtet man die zugehörige Gleichung, um alle Nulldurchgänge zu finden. Durch die Substitution $z = 1 - \tan^2 x$ erhält man die quadratische Gleichung $zf(x) = z^2 + z - 2 = 0$, die die Lösungen -2 und 1 besitzt.
Daraus folgt, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung bei $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{2\pi}{3}$ gilt (es gilt auch bei $x = 0$ und $x = \pi$, was aber nicht im gewünschten Intervall liegt).
Weiterhin stellt man fest, dass die Ungleichung bei $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ nicht definiert ist. Da $f(x)$ auf dem Rest des Intervalls $(0, \pi)$ stetig ist, wechselt das Vorzeichen der Funktion nur an Nullstellen und an Stellen, wo sie nicht definiert ist. Es reicht also, aus jedem Teilintervall einen Punkt zu überprüfen.
Zum Beispiel ist im Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ der Wert $f(\frac{\pi}{6}) = -\frac{4}{3}$ und f somit überall negativ; die Ungleichung ist hier nicht erfüllt.
Auf $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ (mit der obigen Substitution: $z \in (-2, 0)$) nutzt man $zf(x) < 0$, um daraus $f(x) > 0$ zu folgern.
Ähnlich geht man auch mit den anderen Intervallen vor und findet, dass die Ungleichung auf der Menge gilt:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 021243
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Angenommen, alle drei Zahlen a, b, c sind von null verschieden. Dann sind die drei Nenner auf der linken Seite der vorgelegten Ungleichung positiv und wir können die Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel hinschreiben:

$$\left[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)\right]\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq 9$$

Multiplizieren wir das Produkt auf der linken Seite der Ungleichung aus, bleibt gerade unser Term und ein Summand $1+1+1=3$ übrig:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{3}{2}$$

Ist dagegen eine Zahl gleich null (etwa a), vereinfacht sich die Ungleichung auf

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2} \leq 2 > \frac{3}{2}$$

welche wegen

$$\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}-2 \geq 0$$

ebenfalls eine wahre Aussage ist.
Gleichheit tritt in der Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel genau dann ein, wenn alle Größen untereinander gleich sind: $b^2+c^2=c^2+a^2=a^2+b^2$. Diese Bedingungen sind äquivalent mit $a=b=c$.
Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 4 - 021244
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, dass die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.
Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Die Kathetenlängen der abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecksflächen werden mit x und y und die Hypotenusenlänge, die gleich der zu berechnenden Seitenlänge des Achtecks ist, werde mit c bezeichnet. Dann gilt:

$$2x+c=2a, \quad \text{d.h.} \quad x=\frac{2a-c}{2} \qquad (1)$$

$$2y+c=2b, \quad \text{d.h.} \quad y=\frac{2b-c}{2} \qquad (2)$$

$$x^2+y^2=c^2 \qquad (3)$$

also wegen (1), (2) und (3)

$$\frac{(2a-c)^2}{4}+\frac{(2b-c)^2}{4}=c^2 \Rightarrow c^2+2(a+b)c-2(a^2+b^2)=0$$

Hieraus ergibt sich, dass entweder

$$c=-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+2(a^2+b^2)} \quad \text{oder} \qquad (4)$$

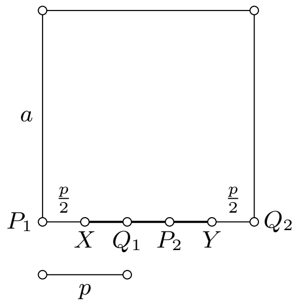
$$c=-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+2(a^2+b^2)} \qquad (5)$$

sein muss. Da a, b und c positiv sind, kann c nicht der Relation (5) genügen. Falls die Konstruktion überhaupt möglich ist, muss c die Bedingung (4) erfüllen.

Bemerkung: Die Konstruktion ist genau dann möglich, wenn $c < 2\min(a,b)$ ist, d.h. wenn $\max(a,b) < 3\min(a,b)$ ausfällt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 021245
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, dass ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

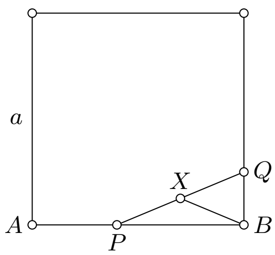


Für jede Seite gilt, dass der gesuchte geometrische Ort auf der Quadratseite liegt, wenn sich P von einer Ecke des Quadrates (im Bild mit P_1 bezeichnet) weg bewegt und Q noch nicht bei der nächsten Ecke (im Bild mit Q_2 bezeichnet) des Quadrates angekommen ist.
Dann befindet sich der erstmögliche gesuchte Punkt X auf dieser Quadratseite wie im Bild dargestellt in einer Entfernung von der Ecke P_1 von $\frac{p}{2}$.
Der letztmögliche gesuchte Punkt Y auf dieser Quadratseite befindet sich in einer Entfernung von der nächsten Ecke Q_2 von ebenfalls $\frac{p}{2}$. Eine solche Strecke XY muss existieren, da gilt:

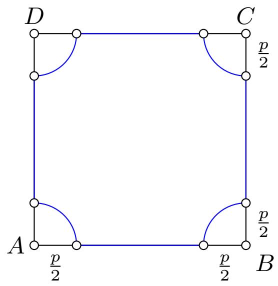
$$a = P_1Q_2 = P_1X + XY + YQ_2 = \frac{p}{2} + XY + \frac{p}{2} = p + XY$$

Da $a > p$ gilt demzufolge $XY > 0$.
Mit dieser Argumentation kann jede Quadratseite separat betrachtet werden und enthält in jedem Fall den geometrischen Ort, der sich zwischen den Abständen, der größer oder gleich $\frac{p}{2}$ zu beiden Ecken der betrachteten Quadratseite ist, befindet.

Nun wird der Fall betrachtet, der sich dann abspielt, wenn P auf einer und Q auf einer benachbarten Quadratseite entlanglaufen. Dann gelten die Bezeichnungen der zweiten Abbildung.



Da $p < a$ ist offensichtlich, dass P und Q nie auf gegenüberliegenden Seiten entlanglaufen können. Es sind also immer benachbarte Quadratseiten, die betrachtet werden müssen, wenn der zuerst beschriebene Fall nicht mehr zutrifft.
Benachbarte Quadratseiten umschließen einen Winkel von 90°; die Ecke zwischen P und Q sei o.B.d.A. B, somit ist $\triangle PBQ$ immer rechtwinklig.
Damit ist PQ der Durchmesser eines Thaleskreises, auf dem B liegt. Da X die Strecke PQ halbiert, ist X Mittelpunkt des Kreises und es gilt für den Radius r des Thaleskreises: $r = PX = QX = BX$.
Da stets $P_iQ_i = p$ gilt, ist für jede Lage in diesem betrachteten Fall (beide Punkte auf verschiedenen Quadratseiten) $\frac{p}{2} = r_i = P_iX_i = Q_iX_i = BX_i$.
Damit ist der Viertelkreis um B mit dem Radius $\frac{p}{2}$ innerhalb des Quadrates der gesuchte geometrische Ort. Fasst man beide Fälle zusammen, ergibt sich folgende Figur als gesuchter geometrischer Ort (blau):



Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 6 - 021246
Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, dass N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.
a) Beweisen Sie, dass auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!
b) Beweisen Sie, dass die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

a) Da $ABNM$ und $ACPM$ Sehnenvierecke sind, liegen A, B, N, M sowie A, C, P, M jeweils auf einem Kreis. Die durch D, M, A und D, N, B und D, P, C gehenden Geraden sind Sekanten dieser Kreise. Nach dem Sekantensatz gilt

$$|DM| \cdot |DA| = |DN| \cdot |DB| \qquad \text{und}$$
$$|DM| \cdot |DA| = |DP| \cdot |DC| \qquad \text{also}$$
$$|DN| \cdot |DB| = |DP| \cdot |DC|$$

Daher liegen nach Umkehr des Sekantensatzes die Punkte N, B, C, P auf ein und demselben Kreis und, da nach Aufgabenstellung $NBCP$ ein Viereck ist, ist es ein Sehnenviereck.

b) Sind M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Umkreise von $ABNM$ bzw. $ACPM$, r_1 und r_2 ihre Radien und g_1 bzw. g_2 die Senkrechten zu ϵ_{ABM} durch M_1 bzw. zu $\epsilon_A CM$ durch M_2, so gilt

$$|QA| = |QB| = |QM| = |QN| = \sqrt{|QM_1|^2 + r_1^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_1 \qquad (1)$$
$$|QA| = |QC| = |QM| = |QP| = \sqrt{|QM_2|^2 + r_2^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_2 \qquad (2)$$

Daher liegt sowohl g_1 als auch g_2 in der zu AM senkrechten Ebene ϵ durch den Mittelpunkt von AM. Weil $\epsilon_{ABM} \neq \epsilon_{ACM}$ ist, gilt auch $g_1 \neq g_2$. Folglich haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt O. Für ihn gilt wegen (1) und (2)

$$|OA| = |OM| = |OB| = |ON| = |OC| = |OP|$$

Also liegen A, B, C, M, N, P auf der Kugel um O mit dem Radius OA.

Übernommen aus [2]

9.5 III. Olympiade 1963

9.5.1 I. Runde 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031211
Von den Punkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man misst folgende Winkel:

$$\angle \mathrm{DAB} = 80°, \quad \angle \mathrm{CAB} = 30°, \quad \angle \mathrm{ABC} = 60°, \quad \angle \mathrm{ABD} = 20°.$$

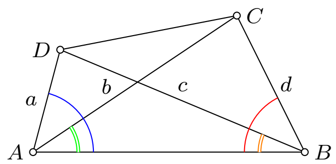
Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmaßige Berechnung wird nicht verlangt.)

Konstruktion:

1. Zeichne beliebige Strecke AB
2. Trage zur gleichen Seite von AB folgende Winkel ab: Am Punkt A die Winkel der Größen 80° und 30° und am Punkt B die Winkel der Größen 20° und 60°. Bezeichne die entstehenden Schenkel der Reihe nach mit a, b, c, d.



3. Den Schnittpunkt von a und c nenne D und den von b und d nenne C.
4. Die gesuchte Länge ist $\frac{AB}{CD} \cdot 2km$. Diese Größe kann man auch mit Lineal und Dreieck unter Verwendung des Strahlensatzes konstruieren.

Berechnung:
Sinussatz im Dreieck ABD:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 80°}{\sin 80°} = 1$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{1}{2}$$

Kosinussatz im Dreieck BCD bezüglich $\angle CBD$.

$$\begin{aligned}
\overline{DC}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{DB} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \angle \mathrm{CBD} \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \cos 40° = \overline{AB}^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \cos 40°\right) \\
\overline{DC} &= \overline{AB} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°} \\
\overline{AB} &= \frac{\overline{DC}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°}} = \frac{4km}{\sqrt{5 - 4\cos 40°}}
\end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 2 - 031212
Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + a_4 N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16 km$!

*) Ein Dynamometer ist ein Gerät zur Messung von Kräften, bei dem die elastische Deformation einer Feder über ein Hebelwerk auf einer (meist kreisförmigen) Skala angezeigt wird (Federwaage).

a) Man kann beobachten, dass sich der angesetzte polynomielle Zusammenhang zwischen der Anzahl der Teilstriche N und der Belastung $P(N)$ vereinfacht, wenn man zu Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Werten in der Wertetabelle übergeht. Genaugenommen reduziert sich der Polynomgrad und damit die Anzahl der unbestimmten Parameter um eins.

Die Differenzen zwischen diesen Differenzen verringern den Polynomgrad erneut um eins. Diese Differenzenbildung kann man so lange fortsetzen, bis nur noch ein Koeffizient bleibt.

Zum einfacheren Rechnen werden die Werte so normiert, dass man nur Dezimalbrüchen ohne Perioden erhält.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= \frac{3}{5x} \cdot P(5x) = 3 \cdot (a_1 + 5a_2 x + 25a_3 x^2 + 125 a_4 x^3) =: b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\
f_1(x) &:= f_0(x+1) - f_0(x) = b_1 + b_2(2x+1) + b_3(3x^2 + 3x + 1) \\
&= b_1 + b_2 + b_3 + (2b_2 + 3b_3)x + 3b_3 x^2 =: c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\
f_2(x) &:= f_1(x+1) - f_1(x) = c_1 + c_2(2x+1) = c_1 + c_2 + 2c_2 x =: d_0 + d_1 x \\
f_3(x) &:= f_2(x+1) - f_2(x) =: d_1
\end{aligned}$$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	2.922	0.234	0.058	0.003
2	3.156	0.292	0.061	
3	3.448	0.353		
4	3.801			

Daraus erhält man Schritt für Schritt die Koeffizienten aller Polynome zurück:

$$\begin{array}{rcllcl}
d_1 &=& f_3(1) & & = & 0.003 \\
d_0 &=& f_2(1) - 1 \cdot d_1 & & = & 0.055 \\
c_2 &=& d_1/2 & & = & 0.0015 \\
c_1 &=& d_0 - c_2 & & = & 0.0535 \\
c_0 &=& f_1(1) - 1 \cdot c_1 - 1^2 \cdot c_2 & = f_1(1) - d_0 & = & 0.179 \\
b_3 &=& c_2/3 & & = & 0.0005 \\
b_2 &=& (c_1 - 3b_3)/2 & = (c_1 - c_2)/2 & = & 0.026 \\
b_1 &=& c_0 - b_2 - b_3 & & = & 0.1525 \\
b_0 &=& f_0(1) - 1 \cdot b_1 - 1^2 \cdot b_2 - 1^3 \cdot b_3 & = f_1(1) - c_0 & = & 2.743
\end{array}$$

$$\begin{aligned} 3a_4 &= b_3/125 \\ 3a_3 &= b_2/25 \\ 3a_2 &= b_1/5 \\ 3a_1 &= b_0 \end{aligned}$$

i	a_i	$3a_i$	b_i	c_i	d_i
0			2.7430	0.1790	0.055
1	0.914333333	2.743	0.1525	0.0535	0.003
2	0.010166667	0.0305	0.0260	0.0015	
3	0.000346667	0.00104	0.0005		
4	0.000001333	0.000004			

b)
$$\begin{aligned} P(25) &= \frac{25}{3} \cdot f_0(5) = \frac{25}{3} \cdot (((0.0005 \cdot 5 + 0.026) \cdot 5 + 0.1525) \cdot 5 + 2.743) \\ &= \frac{25}{3} \cdot ((0.0285 \cdot 5 + 0.1525) \cdot 5 + 2.743) = \frac{25}{3} \cdot (0.295 \cdot 5 + 2.743) = \frac{25}{3} \cdot 4.218 \\ &= 25 \cdot 1.406 = 35.15 \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 3 - 031213
Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1, \tag{1}$$
$$x_1 + x_3 = px_2, \tag{2}$$
$$x_1 + x_2 = px_3 \tag{3}$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

Angenommen es gibt eine Lösung (x_1,x_2,x_3), die den Gleichungen (1), (2), (3) genügt, so genügt diese Lösung auch den äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_3. \end{aligned}$$

Ist $p \neq -1$, so ist $(x_1 + x_2 + x_3)(p + 1)^{-1} = x_1 = x_2 = x_3 = x$. Aus (1) bis (3) folgt nun $2x = px$, also ist $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die einzige Lösung für $p \notin \{-1,2\}$. Für $p = 2$ genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x,x,x)$, x reell, den Gleichungen.

Ist $p = -1$, so sind die Gleichungen (1) bis (3) äquivalent zu $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Somit genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2, -x_1 - x_2)$, x_1,x_2 reell, den Gleichungen.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 4 - 031214
Man beweise:

Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Herleitung der ersten Gleichung mit Hilfe des Additionstheorems

$$\begin{aligned} \cos x\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))\cos\gamma \\ &= \cos(\alpha-\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= \cos(-\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Die Innenwinkelsumme beträgt $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= \cos(\pi-2\alpha)+\cos(\pi-2\beta)+\cos(\pi-2\gamma)+\cos\pi \\ &= -\cos(2\alpha)-\cos(2\beta)-\cos(2\gamma)-1 \end{aligned}$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$ und analoges für β und γ.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$$

Die zweite Gleichung lässt sich aus dem Kosinussatz $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$ ableiten, wobei die Seiten a, b und c den Winkeln α, β bzw. γ gegenüberliegen.

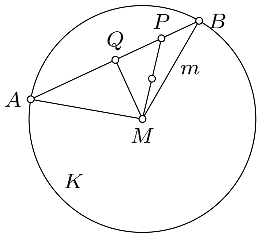
Wegen $\alpha\neq 0$, gibt es ein $x\neq 0$ mit $a=x\cdot\sin\alpha$ und nach dem Sinussatz gilt dann $b=x\cdot\sin\beta$ und $c=x\cdot\sin\gamma$, womit aus dem Kosinussatz folgt:

$$\begin{aligned} x^2\sin^2\alpha &= x^2\sin^2\beta+x^2\sin^2\gamma-x^2\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \text{und wegen} x\neq 0 \\ \sin^2\alpha &= \sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 5 - 031215
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?



Behauptung: Der Ort aller gesuchten Punkte ist der Kreis k mit dem Durchmesser MP.

Beweis:
1. Teilbehauptung:
Jeder Sehnenmittelpunkt liegt auf k.

Es seien A und B die Schnittpunkte des Kreises (ab jetzt K genannt) mit einer Sehne durch den Punkt P. Die Strecken MA und MB sind Radien des Kreises und daher gleich lang und das Dreieck AMB ist gleichschenklig.

Der Lotfußpunkt Q des Lotes von M auf AB ist gleichzeitig Mittelpunkt der Sehne AB.

Das Dreieck MQP ist rechtwinklig, folglich ist der Mittelpunkt m seines Umkreises gleichzeitig Mittelpunkt von der Hypotenuse MP. Das bedeutet, dass der Umkreis vom Dreieck MQP der Kreis k ist.

2. Teilbehauptung:
Alle Punkte von k sind Sehnenmittelpunkte

Man wähle einen Punkt Q auf dem Kreis k, der nach dem Satz des Thales das rechtwinklige Dreieck MQP aufspannt. Die Dreiecksungleichung bezogen auf das Dreieck MQP stellt sicher, dass Q von M weniger weit entfernt ist als P von M und damit genau wie P innerhalb des Kreises liegt. Daher kann man die Strecke QP auf beiden Seiten bis zum Kreis K verlängern und erhält dort die Schnittpunkte A und B.

Das Dreieck AMB ist gleichschenklig und Q ist als Lotfußpunkt von M gleichzeitig Mittelpunkt von AB. $\square$

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 6 - 031216
Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 "kürzen". Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches "Kürzen" irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne dass sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

Fallunterscheidung:

1) $$\frac{10a+c}{10b+c} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \quad bc = ac$$

Das bedeutet $c = 0$ oder $a = b$. Erstes bedeutet, dass sich bei allen Brüchen mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner bezüglich der Null "kürzen" lassen, und zweites bedeutet, dass Nenner und Zähler gleich sind.

2) $$\frac{10c+a}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \quad bc = ac$$

c kann nicht Null sein, denn dann wären die dargestellten Zahlen nicht zweistellig. Also ist $a = b$, das führt zu identischem Zähler und Nenner.

3) $$\frac{10a+c}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{bc}{10c-9b}$$

Die möglichen Belegungen für a, b und c sollen nun durch Ausprobieren herausgefunden werden. Dabei gibt es folgende Vereinfachungen:

a) Der Fall, dass alle Variablen gleich sind, wurde bereits behandelt.

b) Ist $a = x, b = y, c = z$ eine Lösung, so ist für alle natürlichen Zahlen k auch $a = kx, b = ky, c = kz$ eine Lösung, sofern jeder Wert kleiner als 10 ist.

c) Für festes c kann man den zulässigen Wertebereich weiter einschränken:

$$1 \leq a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10c}{c+9} \leq b$$

$$9 \geq a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10}{9}c \geq b$$

c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?	c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?
5	4	20/14		6	4	24/24 = 1	ja
6	5	30/15 = 2	ja	7	5	35/25	
7	6	42/16		8	5	40/35	
8	6	48/26		8	7	56/17	
9	5	45/45 = 1	ja	9	6	54/36	
9	7	63/27		9	8	72/18 = 4	ja

4) $$\frac{10c+b}{10a+c} = \frac{b}{a}$$

Dieser Fall führt zum gleichen Zusammenhang wie der vorige Fall nur mit vertauschtem Zähler und Nenner.

Die gesuchten Brüche sind

$$\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}, \frac{95}{19}, \frac{98}{49}$$

und darüber hinaus alle Brüche mit gleichem Zähler und Nenner, sowie sämtliche Brüche mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

9.5.2 II. Runde 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031221
Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

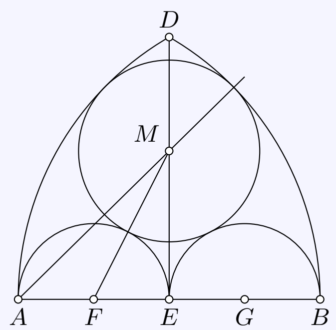
Wenn es eine Zahl x gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist x^3 entweder vierstellig (Fall 1) oder fünfstellig (Fall 2) oder sechsstellig (Fall 3), da x eine zweistellige Zahl ist und $10^3 = 1000$ und $99^3 = 970299$.

1. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 100x + y$ mit $0 \leq y \leq 99$, d.h., es gilt: $100x \leq x^3 < 100x + 100$, $100x \leq x^3 < 100(x + 1)$ und folglich
$$100 \leq x^2 < 100(1 + \frac{1}{x}) \leq 100(1 + \frac{1}{10}) = 110$$
wegen $x \geq 10$. Also $100 \leq x^2 < 110$. Diese Beziehung ist nur für $x = 10$ erfüllt.
2. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 1000x + y$ mit $0 \leq y \leq 999$, d. h. es gilt:
$$1000x \leq x^3 < 1000x + 1000 \quad ; \quad 1000x \leq x^3 < 1000(x + 1)$$
und folglich $1000 \leq x^2 < 1000(1 + \frac{1}{x}) \leq 1100$.
Diese Beziehung ist nur für $x = 32$ erfüllt.
3. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 10000x + y$ mit $0 \leq y \leq 9999$, d.h. es gilt:
$$10000x \leq x^3 < 10000x + 10000 \quad ; \quad 10000x \leq x^3 < 10000(x + 1)$$
und folglich $10000 < x^2$. Dies ist nicht möglich, da x zweistellig ist und daher x^2 höchstens vierstellig sein kann.

Folglich sind wegen $10^3 = 1000$ und $32^3 = 32768$ die Zahlen 10 und 32 die einzigen, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 031222



Gegeben sei eine Strecke AB. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit AB geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung).
E sei der Mittelpunkt von AB. Über AE und EB als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen. Berechnen Sie ME, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen $\overset{\frown}{AD}$ und $\overset{\frown}{BD}$ berührt!

Ist r der Radius des in der Aufgabe genannten Kreises um M, so gilt wegen der vorausgesetzten Berührung von innen $|AM| = a - r$, $|BM| = a - r$. Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da E auf

m und auf AB liegt, sind die Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle FEM$ bei E rechtwinklig und es folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|ME|^2 = |AM|^2 - |AE|^2 = (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$|ME|^2 = |FM|^2 - |FE|^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

Wegen der vorausgesetzten Berührung von außen gilt nämlich $|FM| = \frac{a}{4} + r$. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 - 2ar + r^2 = \frac{ar}{2} + r^2$$

und weiter

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{5}{2}ar \Rightarrow r = \frac{3}{10}a$$

Mit Hilfe von (1) erhält man hieraus

$$|ME|^2 = \left(\frac{7}{10}a\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{24}{100}a^2 \Rightarrow |ME| = \frac{\sqrt{6}}{5}a$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 031223
Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$$

erhält man das folgende, dem gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem:

$$\cos x + \cos y = 1 \qquad ; \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$(1 - \cos y) \cdot \cos y = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

d.h. $\cos x = \frac{1}{2}$ und $\cos y = \frac{1}{2}$. Dies ist die einzige Lösung des Gleichungssystems (1). Daraus folgt:

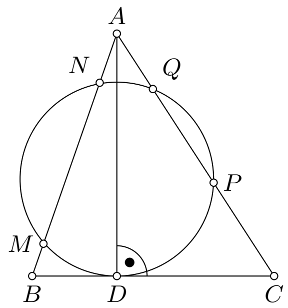
$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad ; \qquad y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 031224
Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden.
Man beweise, dass gilt

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}$$



Beweis: Da die Seite BC tangential an den genannten Kreis liegt, können wir den Sekanten-Tangentensatz ausgehend von den Punkten B und C hinschreiben:

$$BM \cdot BN = BD^2 \qquad \text{und} \qquad CP \cdot CQ = CD^2$$

Setzen wir hierin $BM = AB - AM, BN = AB - AN, CP = AC - AP, CQ = AC - AQ$ sowie $BD^2 = AB^2 - AD^2$ und $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ein, multiplizieren aus und berücksichtigen schließlich noch den Sehnensatz $AM \cdot AN = AP \cdot AQ$, erhalten wir die Gleichung

$$(AM + AN)AB = (AP + AQ)AC$$

die der Behauptung äquivalent ist.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 5 - 031225
Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen:
Der erste Hirte erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist.
Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

Der Erlös für ein Tier betrage n Groschen, mithin werden n Tiere verkauft und die Hirten bekommen insgesamt n^2 Groschen für ihre Tiere.
Nach jeder Runde beim Verteilen (erster Hirte bekommt 10 Groschen, zweiter Hirte ebenfalls) verringert sich der verbleibende Betrag um 20 Groschen.
Zuletzt bleiben also $n^2 \mod 20$ Groschen, von denen der erste Hirte noch einmal 10 Groschen bekommt und danach sind noch $n^2 \mod 20 - 10$ Groschen übrig und es gilt

$$0 < n^2 \mod 20 - 10 < 10 \qquad ; \qquad 10 < n^2 \mod 20 < 20$$

Jede natürliche Zahl n lässt sich darstellen als $10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{Z} \cap [-4, 5]$. Damit erhalten wir

$$n^2 \mod 20 = (10a + b)^2 \mod 20 = (100a^2 + 20ab + b^2) \mod 20 = b^2 mod 20$$

Wegen $(-b)^2 = b^2$ testen wir nur

$$\begin{aligned}
b = 0: &\quad 0 \mod 20 = 0\\
b = 1: &\quad 1 \mod 20 = 1\\
b = 2: &\quad 4 \mod 20 = 4\\
b = 3: &\quad 9 \mod 20 = 9\\
b = 4: &\quad 16 \mod 20 = 16\\
b = 5: &\quad 25 \mod 20 = 5
\end{aligned}$$

und erhalten, dass nur $|b| = 4$ die Bedingung $10 < n^2 \mod 20 < 20$ erfüllt und schließen daraus, dass das Messer 6 Groschen kostet, unabhängig davon, wie viele Tiere genau verkauft wurden.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

9.5.3 III. Runde 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031231
Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!
Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Wenn es eine Zahl x der geforderten Art gibt, so lässt sie sich in der Form

$$x = 10a + b \qquad (1)$$

mit $a = 1, 2, ..., 9$ und $b = 0, 1, 2, ..., 9$ schreiben, da x eine zweistellige Zahl ist.
$b = 0$ kommt nicht in Frage, da dann die letzten drei Ziffern von x^3 Null wären, was nur für $x = 0$ möglich ist. Laut Aufgabenstellung sind alle Zahlen x gesucht, für die gilt:

$$x^3 = 100n + 10a + b \qquad (2)$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen (1) gilt:

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, dass $b^3 - b$ durch 10 teilbar ist, sich also in der Form $b^3 - b = 10m \quad (4)$;
m natürliche Zahl, darstellen lässt. Weiterhin folgt aus (2) und (3), dass $30ab^2 + b^3 - b - 10a$ durch 100 teilbar ist, sich also in der Form

$$30ab^2 + b^3 - b - 10a = 100k \quad \text{oder} \quad 3ab^2 + \frac{1}{10}(b^3 - b) - a = 10k \quad (5)$$

k natürliche Zahl, darstellen lässt.
Wegen (4) kommen für b von den Ziffern $1, ..., 9$ nur die Ziffern $1, 4, 5, 6$ und 9 in Frage. Setzt man diese der Reihe nach in (5) ein, so erhält man:

Für $b = 1$ ergibt sich $a = 5$, d.h. $x = 51$.
Für $b = 4$ ergibt sich $a = 2$, d.h. $x = 24$.
Für $b = 5$ ergibt sich $a = 2$ oder $a = 7$, d.h. $x = 25$ oder $x = 75$.
Für $b = 6$ folgt $a = 7$, d.h. $x = 76$.
Für $b = 9$ folgt $a = 4$ oder $a = 9$, d.h. $x = 49$ oder $x = 99$.

Für die Lösung der Aufgabe kommen also nur die Zahlen $24, 25, 49, 51, 75, 76, 99$ in Frage.
Durch Bildung der dritten Potenzen dieser Zahlen bestätigt man, dass jede von ihnen allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 031232
Beweisen Sie folgenden Satz:
Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

Beweis: Die Lösungsidee bei derartigen Aufgaben besteht darin, die gegebene Gleichung in ein Produkt von Faktoren umzuformen, das null ist. Die gestellte Bedingung (hier die Rechtwinkligkeit des Dreiecks) muss sich dann darin wiederfinden, dass die Faktoren einzeln null werden.
Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ist klar, dass die Gleichung

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \qquad (1)$$

genau das Gewünschte liefert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass (1) äquivalent zur gegebenen Gleichung

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

ist. Dieser Lösungsansatz gestattet es gleichzeitig, beide Beweisrichtungen elegant zu erledigen:

i) Ist das Dreieck rechtwinklig, verschwindet genau einer der Faktoren in (1) und (2) ist erfüllt;
ii) Ist (2) und damit (1) erfüllt, so muss mindestens einer der Faktoren in (1) verschwinden, und das bedeutet Rechtwinkligkeit des Dreiecks.

Wie kommt man nun von (2) auf (1)? Wir benutzen ein Additionstheorem und den Kosinussatz:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)^2 - 2a^2b^2c^2}{2a^2b^2c^2}$$

Zusammen mit den zyklischen Vertauschungen dieser Gleichung für $\cos 2\beta$ und $\cos 2\gamma$ führt das auf die Gleichung

$$a^2(b^2+c^2-a^2)^2 + b^2(c^2+a^2-b^2)^2 + c^2(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2c^2 = 0$$

Ein Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke, Zusammenfassen und anschließende Faktorisierung führt in der Tat auf (1).

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 3 - 031233
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2+y^2) \qquad ; \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2+y^2)$$

$$xy - \frac{x}{y} = p(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{xy-\frac{x}{y}}{p} \quad ; \quad xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2+y^2) = 3p\frac{xy-\frac{x}{y}}{p} = 3xy - 3\frac{x}{y}$$
$$\Rightarrow 4\frac{x}{y} = 2xy \Rightarrow 2x = xy^2$$

1. Fall: $x = 0$
Einsetzen in die 2. Gleichung: $0 = py \to y$ müsste 0 sein. Dies ist aber nicht möglich, da durch y geteilt wird. Also gibt es nur eine Lösung für den Spezialfall, dass $p = 0$ ist. In diesem Fall kann y beliebig ($\neq 0$) sein.

2. Fall: $x \neq 0$ mit $2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$
Fall 2.1: $y = \sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2+2)$$
$$0 = px^2 + 2p - \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Um festzustellen, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde, wird noch in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}\right)\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 3p\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}\right)^2 + 2\right)$$
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}\right)\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4p} \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}$$

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}; \quad y_1 = \sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2}-2}; \quad y_2 = \sqrt{2}$$

Fall 2.2: $y = -\sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$-\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2+2)$$
$$0 = px^2 + 2p + \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$
$$x_{3,4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Einsetzen in die 1. Gleichung zeigt wieder, dass eine Lösung vorliegt.
Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_3 = -\sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_4 = -\sqrt{2}$$

Aufgabe gelöst von Korinna Grabski

Aufgabe 4 - 031234
Für welche reellen Zahlen x ist

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}} \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}} \qquad \text{c)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$$

Zuerst wählen wir die Bezeichnungen $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ und $g(x) = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$. Dann betrachten wir den Fall b), da sich Gleichungen leichter handhaben lassen und Schlüsse auf die Ungleichungen zulassen. Folgende Umformungen führen zur Lösung:

$$f(x) = \frac{x+1+x+}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}$$

und $g(x) = \frac{4}{2x+1}$. Die Gleichung lautet nunmehr:

$$(2x+1)^2 = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Das führt auf die falsche Aussage $0 = 1$.
Nun waren aber alle Umformungen äquivalent, also kann die gestellte Gleichung keine Lösungen besitzen.
Das bedeutet aber auch, dass sich die Funktionen f und g nicht schneiden.
Daraus könnte man den voreiligen Schluss ziehen, dass entweder überall a) oder überall c) gilt.
Wir bemerken aber, dass f und g Polstellen haben, und zwar bei $x = -1$, $x = 0$ bzw. $x = -\frac{1}{2}$. Es müssen also die vier Intervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \infty)$ getrennt untersucht werden.
Es würde genügen, f und g nur an einer Stelle aus jedem Intervall zu betrachten. Trotzdem wird hier die Lösung einer Ungleichung ausführlich vorgeführt. Mit obigen Umformungen erhält man (aus a):

$$\frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} > \frac{4}{2x+1}$$

Bei einer Multiplikation mit $(2x+1)$ muss man die Fälle $x > \frac{1}{2}$ und $x < \frac{1}{2}$ unterscheiden, bei letzterem würde das Relationszeichen umgekehrt. Im ersteren folgt:

$$\frac{2x+1}{(2x+1)^2 - 1} > 1 \qquad | \cdot [(2x+1)^2 - 1]$$

Die eckigen Klammern sind für $x < 0$ negativ, im Intervall $(-\frac{1}{2}, 0)$ ergibt sich $0 < -1$, also eine falsche Aussage. Dort gilt daher nicht a), sondern c).
Für die anderen Intervalle geht man analog vor. Dabei erhält man: c) gilt außerdem für $x < -1$, a) gilt für $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ und $x > 0$.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

Aufgabe 5 - 031235
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Der Mittelpunkt von XY werde mit M bezeichnet, der Lotfußpunkt von M auf AA' mit F. Da A, X, Y, M und F in einer Ebene liegen – die Ebene, in der auch $\triangle AXY$ liegt – gilt nun nach Strahlensatz

$$\frac{FM}{AY} = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{AF}{AX} = \frac{YM}{YX} = \frac{1}{2}$$

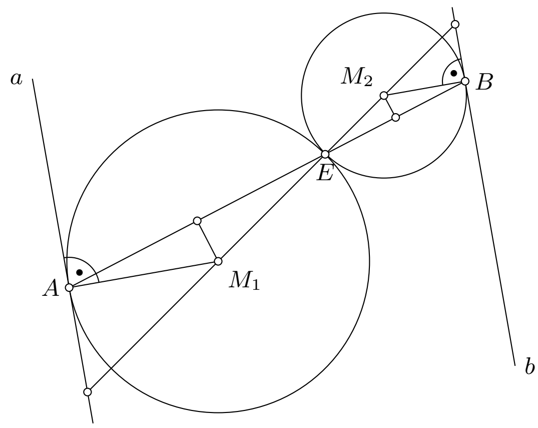
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$AM^2 = AF^2 + FM^2 = \frac{1}{4}AX^2 + \frac{1}{4}AY^2$$

da $AF \perp FM$. Ferner ist $\triangle AXY$ rechtwinklig mit Kathete XY und es gilt $AX^2 + AY^2 = XY^2 = AB^2$. Also ist $AM = \frac{1}{2}AB \equiv$ konstant.
Da XY vollständig zum Würfel gehört, ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Strecken XY der Teil der Kugel um A mit Radius $\frac{1}{2}AB$, der zu $ABCDA'B'C'D'$ gehört.

Aufgabe gelöst von Steffen Weber

Aufgabe 6 - 031236
Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B.
Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.
b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.
c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
d) Es ist $r_1 = 2r_2$.



Konstruktion:
In A und B werden die Senkrechten zu a bzw. b errichtet, diese seien $a^\perp$ und $b^\perp$. Die Strecke AB wird im Verhältnis $r_1 : r_2$ geteilt; der Teilpunkt sei E.
Zu AE wird die Mittelsenkrechte konstruiert, ihr Schnittpunkt mit $a^\perp$ ist der gesuchte Mittelpunkt M_1. Analog erhält man M_2 als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BE mit $b^\perp$. Die Radien sind $r_1 = M_1E$ und $r_2 = M_2E$.

Beweis:
Zu zeigen ist zuerst (Bild), dass der Punkt E der einzig mögliche Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise ist. Im weiteren wird geprüft, dass die Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt.
Die erste Überlegung ist, dass die Punkte M_1 und M_2 auf den Senkrechten zu a bzw. b in den Punkten A bzw. B liegen müssen. Genauer gesagt liegen sie auf dem Teilstrahl, der die jeweils andere Gerade schneidet. Nur so können die Bedingungen a) und b) erfüllt werden.

Um Bedingung c) zu genügen, zeigt man: Wählt man zwei Punkte M_1' auf $a^\perp$ und M_2' auf $b^\perp$ (mit $AM_1' : BM_2' = r_1 : r_2$), so ist der Punkt E, der $M_1'M_2'$ im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilt, unabhängig von der Wahl der M_i' und liegt auf AB.

Das ist der Fall, weil die Dreiecke EBM_2' und EAM_1' ähnlich sind (Wechselwinkel bei M_1' und M_2', sowie $M'1E : M'1A = M'2E : M'2B$ nach Voraussetzung).
Da der Punkt E der eindeutige Teilpunkt für alle denkbaren Mittelpunktspaare M_1', M_2' ist, muss er auch der Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise sein.

Hiermit ist nun klar, dass die obige Konstruktion korrekt ist:
Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben zu A und E, die auf dem Kreis liegen müssen, den gleichen Abstand. Daher muss M_1 auf ihr liegen. Gleichzeitig muss M_1 auf $a^\perp$ liegen, also ist M_1 der Schnittpunkt. Ebenso geht man für M_2 vor.

Aufgabe gelöst von Carsten Balleier

9.5.4 IV. Runde 1963, Klasse 12

Aufgabe 1 - 031241
Beweisen Sie, dass für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Beweis:
Schreiben wir die rechte Seite der gegebenen Ungleichung um, erhalten wir den Ausdruck

$$a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}}$$

der uns sofort an die gewichtete AM-GM-Ungleichung erinnern sollte:
Sind $a_1, ..., a_n$ positive reelle Zahlen und $\delta_1, ..., \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + ... + \delta_n = 1$, so gilt stets

$$\delta_1 a_1 + ... + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n}$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind. Diese bekannte Ungleichung für $n = 2$, $\delta_1 = \frac{b}{a+b}$ und $\delta_2 = \frac{a}{a+b}$ hingeschrieben, führt auf

$$\frac{2ab}{a+b} \geq a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}} = \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

Aus

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

folgt mit (1) die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Eckard Specht

Aufgabe 2 - 031242
Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m} = 0$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler gleich null ist und der Nenner verschieden von null ist.

$$\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1 = 0 \qquad ; \qquad \sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1$$

Da der Betrag der Werte von Sinus und Kosinus immer kleiner oder gleich 1 ist, müssen für eine Lösung beide einen Wert vom Betrag 1 annehmen:

$$\sin 3x = 1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -1 \qquad \text{oder} \qquad \sin 3x = -1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 1$$

Wann nehmen Sinus und Kosinus Werte mit Betrag 1 an?

$$\sin y = 1 \Leftrightarrow y \in \{2\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\}$$
$$\sin y = -1 \Leftrightarrow y \in \{2\pi k - \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{N}\}$$
$$\cos z = 1 \Leftrightarrow z \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\}$$
$$\cos z = -1 \Leftrightarrow z \in \{2\pi j + \pi : j \in \mathbb{N}\}$$

Das bedeutet für $y = 3x$ bzw. $z = \frac{\pi}{3} - 4x$

$$\begin{aligned}
\sin 3x = 1 &\Leftrightarrow 3x \in \{\frac{\pi}{2}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\} \\
\sin 3x = -1 &\Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{6}(4k-1) : k \in \mathbb{N}\} \\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 4x \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \{\frac{\pi}{3} - 2\pi j : j \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{12}(1-6j) : j \in \mathbb{N}\} \\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = -1 &\Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{12}(-2-6j) : j \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Gesucht sind also Paare (k, j) ganzer Zahlen mit folgenden Bedingungen:

1. Fall: $\sin y = -1 \wedge \cos z = 1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k-1) = \frac{\pi}{12}(1-6j) \Rightarrow 2(4k+3j) = 3$$

Das führt offensichtlich nicht zu einer Lösung, denn die linke Seite der Gleichung ist stets durch 2 teilbar, die rechte Seite hingegen nie.

2. Fall: $\sin y = 1 \wedge \cos z = -1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k+1) = \frac{\pi}{12}(-2-6j) \Rightarrow 4k + 3j = -2 \Rightarrow$$

Diese Gleichung ist für $(k, j) = (1, -2)$ erfüllt und ansonsten nur, wenn man zu dem Term $4k$ ein Vielfaches von $\text{kgV}(4, 3) = 12$ addiert und denselben Wert von $3j$ abzieht.

$$(k, j) \in \{(1 + 3l, -2 - 4l) : l \in \mathbb{Z}\}$$

Aus den oben gefundenen Werten für k ergeben sich folgende Werte für x:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in 1 + 3l : l \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}(12l+5) : l \in \mathbb{Z}\right\}$$

Zuletzt muss noch sichergestellt werden, dass der Nenner des Bruches in der Aufgabenstellung verschieden von null ist, wenn der Zähler null wird.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m =$$

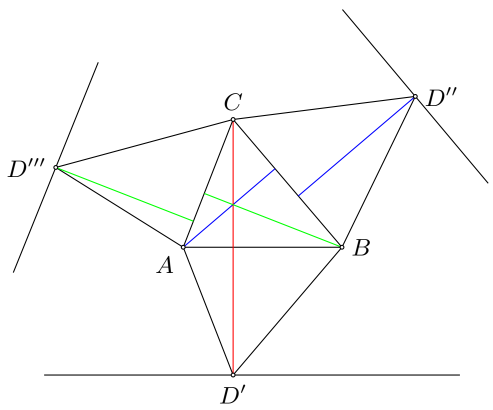
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\frac{\pi}{6}(12l+5)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}(12l+5)\right) + m =$$

$$= \sin -\frac{11\pi}{2} - \cos \pi + m = 1 - (-1) + = 2 + m$$

Das bedeutet, dass der Nenner den Wert $2+m$ besitzt, wann immer der Zähler null wird. Ist $m = -2$ wird der Bruch niemals null, ist dagegen $m \neq -2$ wird der Bruch genau dann null, wenn es ein ganzzahliges l gibt mit $x = \frac{\pi}{6}(12l + 5)$.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 3 - 031243
Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.
Beweisen Sie, dass dann folgende Punkte zusammenfallen:
a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,
b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!



Was bedeutet es, wenn das Tetraeder flächengleiche Seiten hat? Zeichnen wir uns ein Tetraedernetz wie im Bild dargestellt auf, dann kann man folgende Überlegungen anstellen:

Ich beginne mit einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$. Dann muss wegen der Flächengleichheit der jeweils fehlende Punkt (D', D'', D''') der äußeren Dreiecke auf je einer Linie liegen, die von der jeweiligen Kante von $\triangle ABC$ denselben Abstand hat wie von dieser Kante zum dritten Punkt im $\triangle ABC$.
Mit dieser Einschränkung haben die Dreiecke $\triangle ABC$ und das betrachtete anliegende Dreieck eine gemeinsame Seite und die auf dieser Seite stehende Höhe von gleicher Länge. Mithin ist der Flächeninhalt gleich.
Es ist also sogar jede Seite des Dreiecks zu jeder anderen Seite flächengleich.

Nun zeige ich mit der folgenden Begründung, dass es nur eine Lösung gibt, Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$, $\triangle CAD'''$ zu einem vorhandenen Dreieck $\triangle ABC$ zu erzeugen:

(1) Wähle ich einen beliebigen Punkt auf einer dieser Parallelen (bspw. im Dreieck $\triangle ABD'$), dann liegt D' fest, damit auch AD' und BD'. Für das Dreieck $\triangle BCD''$ ist damit D'' bestimmt, denn es muss $BD' = BD''$ gelten, sonst entsteht aus dem Netz kein Tetraeder.
Nun liegt auch CD'' fest und damit im Dreieck $\triangle ACD'''$, denn es muss gelten $CD'' = CD'''$. Damit liegt auch AD''' fest, was wiederum genauso groß wie AD' aus dem Dreieck $\triangle ABD'$ sein muss.

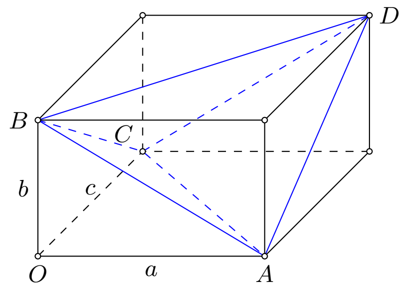
(2) I.d.R. wird es nicht auf Anhieb klappen, dass in oben beschriebener Folge $AD' = AD'''$ gilt.
Wenn nun o.B.d.A. $AD' < AD'''$, dann verlängere ich AD' $\Rightarrow$ BD' wird kürzer $\Rightarrow$ BD'' wird kürzer $\Rightarrow$ CD'' wird länger $\Rightarrow$ CD''' wird länger $\Rightarrow$ AD''' wird kürzer.
Auf diesem Weg kann man mit genügend kleinen Schritten $AD' = AD'''$ erzeugen - und zwar genau eine Lösung.

Jetzt zeige ich, dass dies genau dann gilt, wenn die Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$ und $\triangle ACD'''$ dadurch entstehen, dass das Dreieck $\triangle ABC$ um einen Kantenmittelpunkt um 180° gedreht wird.
Dann sind die Dreiecke kongruent und es gilt:

$$AB = CD'' = CD''' \qquad BC = AD' = AD''' \qquad AC = BD' = BD''$$

Damit ist insbesondere gezeigt, dass die Seiten, die gleich lang sein müssen, dies auch tatsächlich sind. Es ergibt sich also tatsächlich das Netz eines Tetraeders.

Allgemein gilt, dass Tetraeder aus einem Parallelepiped entstehen, wenn jede 2. Ecke abgeschnitten wird. Für Tetraeder mit kongruenten Seiten gilt sogar, dass sie analog aus einem Quader entstehen.



Die Punkte A, B, C, D lassen sich wie im Bild angegeben in einem Quader mit den Kantenlängen a, b, c in Vektorschreibweise darstellen als:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ein Punkt P, der der Diagonalenschnittpunkt des Quaders ist, hat offensichtlich zu allen Ecken den gleichen Abstand und ist daher der Umkugelmittelpunkt. P hat dabei die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Nun wird untersucht, wie groß der Abstand d_i von P zu den Tetraederseitenflächen ist. Dabei wird die Hessesche Normalform verwendet. Es entstehen folgende vier Gleichungen:

$$d_1 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})]}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} = \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ -ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

und analog Gleichungen für d_2, d_3 und d_4.

Damit sind bis auf das Vorzeichen alle Abstände identisch. Das Vorzeichen bestimmt nur die Richtung des Vektors, der den Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene darstellt.
Insofern sind alle Abstände von gleicher betragsmäßiger Länge und es ist gezeigt, dass die Inkugel des Tetraeders ihren Mittelpunkt in P, also in dem Umkugelmittelpunkt hat.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 4 - 031244
Es bezeichne an die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).
Beweisen Sie, dass die Zahlen an eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Die Einerstelle einer natürlichen Zahlen im dekadischen Positionensystem entspricht dem Rest bei der Division durch 10. Die Einerstelle der Potenz n^k hängt nur von k und der Einerstelle von n ab.
Wir stellen fest, dass die Folge der Einerstellen der Potenzen n^k für k als Laufvariable und festes n, also $n^k \mod 10 : k \in \mathbb{N}$ eine Periode bildet, wobei die Länge der Periode von (der Einerstelle von) n abhängt.
Die kleinste gemeinsame Periode (das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelperioden) ist vier.

n	$n_1 \mod 10$	$n_2 \mod 10$	$n_3 \mod 10$	$n_4 \mod 10$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

Da die kleinste gemeinsame Periode die Länge vier besitzt, hängt die Einerstelle der Potenz n^k nur von $n \mod 10$ und $k \mod 4$ ab. ($k = 0$ ist ausgeschlossen!)
In der Aufgabenstellung ist $k = n^n$ gesetzt, daher ist die Periode der Folge ($n^n \mod 4 : n \in \mathbb{N}$) zu untersuchen.
Wir vermuten, dass der Ausdruck $a^b \mod 4$ sowohl in a als auch in b eine Periode besitzt, für festgehaltenes b bzw. a. Der Ausdruck $a^b \mod 4$ besitzt in a immer eine Periode der Länge 4, weil $a^b \mod 4$ nur von $a \mod 4$ und b abhängt (vergleiche mit Argument zur Einerstelle im Dezimalsystem).
Mit Hilfe einer Wertetabelle ermittelt man für a^b bezüglich b eine Periode der Länge zwei.

a	$a_1 \mod 4$	$a_2 \mod 4$	$a_3 \mod 4$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	0
3	3	1	3

Die vollständige Wertetabelle für $a^b \mod 4$ besteht abgesehen von der ersten Spalte aus identischen Blöcken der Größe 4×2 auf deren Diagonale man die Werte der Folge ($n^n \mod 4 : n \in \mathbb{N}$) ablesen kann. Offensichtlich hat diese Folge die Periode vier.

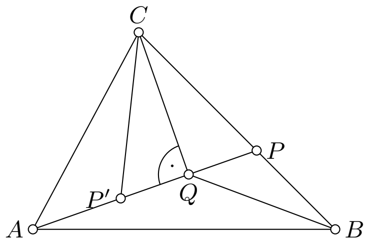
$$(n^n \mod 4 : n \in \mathbb{N}) = (1, 0, 3, 0, ...)$$

Die vollständige Wertetabelle für $a^b \mod 10$ besteht, wie oben zu sehen, aus identischen Blöcken der Größe 10×4. Die Einerstelle von $n^{(n^n)}$ entspricht in der ($n \mod 10$). Zeile der ersten Tabelle dem ($n^n \mod 4$). Eintrag (($n^n \mod 4$) gemäß zweiter Tabelle). Die gesuchte Folge hat die Periode $\text{kgV}(10, 4) = 20$ und lautet:

$$(1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0, ...)$$

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 5 - 031245
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite BC liege ein Punkt P, wobei $BP : PC = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\angle APC = 60°$ sind.
Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.



Auf der Strecke AP sei Q der Punkt, welcher von P den gleichen Abstand hat, wie B von P. Dann ist das Dreieck QPB gleichschenklig und weil $\angle CPQ = 60°$ sein soll, ist der Nebenwinkel $\angle QPB = 120°$ und die Basiswinkel des Dreiecks QPB sind $30°$ groß.
Die Größe des Winkels $\angle PBA$ wird als $45°$ vorausgesetzt, daher muss $\angle QBA = 15°$. Der Winkel $\angle AQB$ muss als Nebenwinkel von $\angle BQP 150°$ groß sein. Damit ist auch $\angle BAP = 15°$, wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck BAP. Auch BAP ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck.

Nun soll das Dreieck PQC genauer betrachtet werden: Da PC doppelt so lang wie PB und mithin doppelt so lang wie PQ ist, und der Winkel $\angle CPQ 60°$ groß ist, ist $\angle PQC$ ein rechter Winkel. Davon überzeugt man sich am besten, indem man noch einen Punkt P' auf der Gerade durch A und P hinzunimmt.
Dann ist $P'PC$ ein gleichseitiges Dreieck, weil $PC = PP'$ und $\angle CPQ = 60°$ und Q ist als Mittelpunkt von $P'P$ gleichzeitig Lotfußpunkt vom Lot von C auf $P'P$. Weil $\angle CPQ = 60°$ und $\angle PQC = 90°$ ergibt sich wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PQC dass $\angle QCP = 30°$. Damit ist dieser Winkel genauso groß wie $\angle PBQ$ und auch BQP ist gleichschenklig.

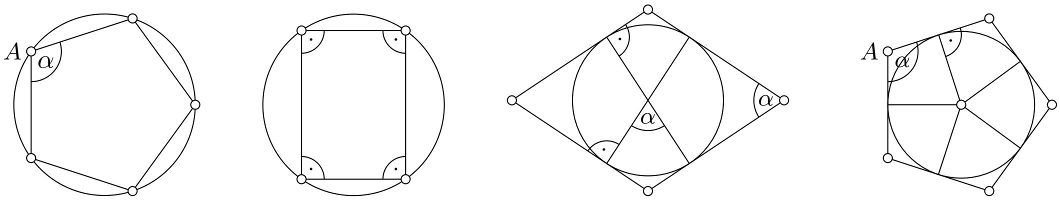
Der Punkt Q gehört also zu zwei gleichschenkligen Dreiecken, die sich die Seite QB teilen. Es ergibt sich, dass die Strecken QA, QB und QC gleich lang sind. Also ist Q Umkreismittelpunkt von ABC.

Das Dreieck CQA ist deshalb ebenfalls gleichschenklig und außerdem, wie oben gezeigt, rechtwinklig. Der Winkel $\angle ACQ$ ist damit $45°$ groß.

Die gesuchte Größe von $\angle ACB$ ist $\angle ACQ + \angle QCP = 45° + 30° = 75°$.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 6 - 031246
Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.
c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.



Untersuchung der einzelnen Behauptungen:

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist richtig.

Gegeben sei ein Kreis und eine Seitenlänge, so dass sich ein Vieleck mit dieser Seitenlänge in den Kreis einbeschreiben lässt.

Betrachte einen Punkt A des Vielecks. Es gibt nur zwei Punkte auf dem Kreis, die von A den gleichen Abstand besitzen (Anzahl Schnittpunkte bei Schnitt von zwei Kreisen). Das müssen die Nachbarpunkte des Vielecks zum Eckpunkt A sein. Der Winkel zwischen den benachbarten Kanten ist daher immer gleichgroß.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Das Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 kann einem Kreis mit Durchmesser 5 einbeschrieben werden. Es hat 4 Winkel der Größe 90° aber unterschiedlich lange Seiten.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Man nehme zwei verschiedene Durchmesser des Kreises, die um den Winkel α gegeneinander verdreht sind. An den vier Schnittpunkten der Durchmesser mit dem Kreis lege man Tangenten an den Kreis. Diese Tangenten erzeugen einen Rhombus, also ein gleichseitiges Parallelogramm, mit den Winkeln α und $180° - \alpha$.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist richtig.

Den Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten des Vielecks nenne α. Die Kanten sind Tangenten an den Kreis, daher liegen Kanten und Kreisradien im rechten Winkel zueinander. Der Winkel zwischen zwei solchen benachbarten Radien ist $180° - \alpha$ groß. Die Vieleckskanten bilden mit den Kreisradien aneinandergereihte Drachenvierecke mit gleichen Winkeln.

Da ein Kreisradius Kante zweier benachbarter Drachenvierecke ist, sind die Drachenvierecke nicht nur ähnlich sondern auch kongruent. Damit sind die Vieleckskanten alle gleich lang.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

9.6 IV. Olympiade 1964

9.6.1 I. Runde 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041211
Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636000} \approx 86{,}00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389000} \approx 73{,}00$$

Daher ist $z = \sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 13$.

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

Wir behandeln die drei Möglichkeiten $z > 13$, $z = 13$ und $z < 13$, indem wir die Relation $z \gtreqless 13$ umformen, bis wir eine Aussage erhalten, in der direkt erkennbar ist, für welches Relationszeichen sie gilt. Mit der Abkürzung $a = \sqrt[3]{389}$ gilt

$$z \gtreqless 13 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{636000} \gtreqless 13 + 10a$$

$$\Leftrightarrow\; 636000 \gtreqless 13^3 + 3 \cdot 13^2 \cdot 10a + 3 \cdot 13 \cdot 10^2 a^2 + 1000a^3$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900a^2 + 5070a - 244803 \;\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900\left(a^2 + \frac{13}{10}a - \frac{6277}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless \left(a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20}\right) \cdot \left(a - \frac{-13 - \sqrt{25277}}{20}\right)$$

Wegen $a > 0 > (-13 - \sqrt{25277})/20$ ist der zweite Faktor der letzten Zeile positiv, so dass die Relation äquivalent ist zu

$$0 \gtreqless a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20} \;\Leftrightarrow\; -13 + \sqrt{25277} \gtreqless 20a$$

$$\Leftrightarrow\; -13^3 + 3 \cdot 13^2\sqrt{25277} - 3 \cdot 13 \cdot 25277 + 25277\sqrt{25277} \gtreqless 20^3 \cdot 389$$

$$\Leftrightarrow\; -988000 + 25784\sqrt{25277} \gtreqless 3112000 \;\Leftrightarrow\; 25784\sqrt{25277} \gtreqless 4100000$$

$$\Leftrightarrow\; 3223\sqrt{25277} \gtreqless 512500$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren, und die Relation ist äquivalent zu

$$262570625933 \gtreqless 262656250000$$

Diese Aussage gilt nur für "$<$", also ist $z < 13$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist heutzutage ohne Bedeutung, denn niemand würde heute Kubikwurzeln in einer vierstelligen Tafel nachschlagen, sondern einen Taschenrechner benutzen, der deutlich genauer und zudem platzsparender ist. Schon mit nur sechs Stellen Genauigkeit ist $\sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 85.9975 - 72.9989 = 12.9986 < 13$. Interessant sind solche Aufgaben, wenn beide Seiten gleich sind (wie z.B. in Aufgabe 041116), denn exakte Gleichheit lässt sich auch durch beliebig genaue Gleitkommarechnung nicht zeigen.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

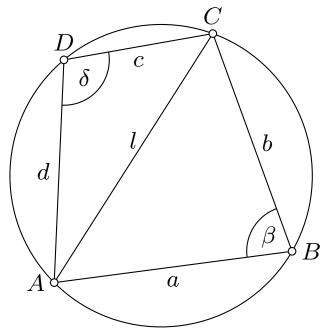
Aufgabe 2 - 041212
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ gesetzt wird.

Vorbemerkung: mit "Sehnenviereck" muss in der Aufgabenstellung "konvexes Sehnenviereck"gemeint sein, da die Aussage sonst nicht korrekt ist.



F ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CDA, die gleich $\frac{1}{2}ab\sin\beta$ bzw. $\frac{1}{2}cd\sin\delta$ sind (Bezeichnungen wie in der Abbildung). Da $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\beta+\delta=180°$, so dass $\sin\beta=\sin\delta$ und

$$F=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\delta=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta. \tag{1}$$

l sei die Länge der Diagonalen AC. Nach dem Kosinussatz für ABC gilt $l^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$, und nach dem gleichen Satz für CDA gilt $l^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta$. Daraus können wir l^2 eliminieren, und wegen $\beta+\delta=180°$ gilt $\cos\delta=-\cos\beta$, so dass

$$(ab+cd)\cos\beta=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2). \tag{2}$$

Indem wir (1) quadrieren, $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ berücksichtigen und (2) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
F^2 &= \frac{1}{4}\Big((ab+cd)^2-(ab+cd)^2\cos^2\beta\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\cdot\Big(2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2\Big)\Big(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2\Big)\\
&= \frac{1}{16}\Big(-(a-b)+(c+d)\Big)\Big((a-b)+(c+d)\Big)\cdot\Big((a+b)-(c-d)\Big)\Big((a+b)+(c-d)\Big)\\
&= \frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}\\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).
\end{aligned}$$

Wurzel ziehen und die Aufgabe ist gelöst.

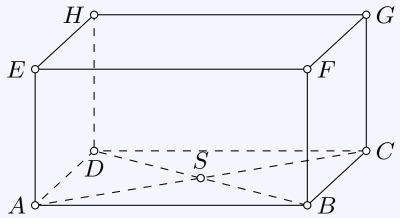
Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 3 - 041213

Gegeben sei ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$ sei S.

a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.

b) Es ist zu beweisen, dass die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.



Wir führen ein Koordinatensystem mit A als Ursprung, AB als x-, AD als y- und AE als z-Achse ein. Dann ist

$$A=(0{,}0{,}0),\ B=(\sqrt{3}a{,}0{,}0),\ C=(\sqrt{3}a{,}a{,}0),\ D=(0{,}a{,}0),$$

$$E=(0{,}0{,}a),\ F=(\sqrt{3}a{,}0{,}a),\ G=(\sqrt{3}a{,}a{,}a),\ H=(0{,}a{,}a),$$

$$S=\frac{1}{4}(A+B+C+D)=(\sqrt{3}a/2{,}a/2{,}0).$$

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (m_x,m_y,m_z)$ und Radius $r \geq 0$ hat die Gleichung $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$. Setzt man die Punkte ein, die auf der Kugel liegen sollen, erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten m_x,m_y,m_z und r. Dass in der Aufgabenstellung mehr Punkte genannt werden, als zur eindeutigen Festlegung der Kugel notwendig sind, ist wohl als Aufforderung zu verstehen, statt direkter Lösung des Systems erst festzustellen, dass offensichtlich $m_y = m_z = a/2$ gelten muss (der Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch A,D,E und H soll diese vier Punkte enthalten). m_x und r berechnen wir daraus, dass A und S auf der Kugel liegen sollen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (0 - m_x)^2 + (0 - \frac{1}{2}a)^2 + (0 - \frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}a - m_x)^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a)^2 + (0 - \frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ m_x^2 - \sqrt{3}am_x + a^2 &=& r^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ -\sqrt{3}am_x + \frac{1}{2}a^2 &=& 0 \end{array} \right\}$$

(subtrahiere die obere Gleichung von der unteren). Aus der zweiten Gleichung des letzten Paares folgt $m_x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ und somit

$$r = \sqrt{m_x^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}a.$$

b) Eine Ebene berührt eine Kugel genau dann, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene gleich dem Kugelradius ist. Ein Normalenvektor der Ebene durch S,F und G ist

$$n := (G - F) \times (S - F) = (0,a,0) \times (-\sqrt{3}a/2,a/2, - a) = \frac{1}{2}a^2(-2,0,\sqrt{3}).$$

Da F in der Ebene liegt, ist der Abstand eines Punktes P von der Ebene gleich $\big|(P - F) \cdot n/|n|\big|$. Speziell für den oben berechneten Kugelmittelpunkt $M = (\frac{1}{6}\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2})a$ ist der Abstand

$$\left| \frac{(\frac{1}{6}\sqrt{3} - \sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2} - 1) \cdot (-2,0,\sqrt{3})\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2} \right| = \left| \frac{\frac{7}{6}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2} \right| = \frac{\sqrt{21}}{6}a = r.$$

Also berührt die Ebene die Kugel.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 4 - 041214
Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

Mit der Gesetzmäßigkeit $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ und dem Wissen, dass $\cos 60° = \frac{1}{2}$ sowie $\cos 90° = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{2} \cdot (\cos 20° + \cos 60°) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{4} \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° + \frac{1}{8} \cdot \cos 80° = \frac{1}{8} \cdot (\cos 60° + \cos 100° + \cos 80°) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \cos 10° \cdot \cos 90°\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für $x = \frac{1}{16}$.

Aufgabe gelöst von Peter Hieber

Aufgabe 5 - 041215
In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball). Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir folgende Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.

(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.

(3) Der Pole ist Journalist.

(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.

(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.

(6) Der Kapitän reist nach Rostock.

(7) Der Handballspieler stammt aus der DDR.

(8) Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.

(9) Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.

(10) Der Leichtathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.

(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.

(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.

(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.

(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?

Weisen Sie nach, dass die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

Die Sitzplätze werden, von links beginnend, der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 und 5 nummeriert.

Behauptung:

(1) Auf Platz 1 sitzt der Ingenieur.

(15) Auf Platz 2 sitzt der Zypriot wegen (1) und (14).

(16) Auf Platz 1 sitzt der Reisende aus der UdSSR, er ist Ingenieur, fliegt nach Leipzig und ist Fußballspieler.

Beweis: Auf Platz 1 sitzt nicht der Reisende aus Polen wegen (1) und (3), nicht der Reisende aus der DDR und der aus Ungarn wegen (11) und (15) und nicht der Reisende aus Zypern wegen (15). Wegen (8) fliegt er nach Leipzig und ist wegen (10) nicht Leichtathlet, wegen (1) und (5) nicht Schwimmer, wegen (7) nicht Handballspieler und wegen (2) nicht Volleyballspieler. Damit ergibt sich die Antwort auf a): Der Fußballspieler ist Bürger der UdSSR.

Behauptung:

(17) Der Zypriot ist 24 Jahre alt wegen (13), (16) und (14).

(18) Der Kapitän spielt Volleyball oder Handball.

Beweis: Der Kapitän spielt nicht Fußball wegen (16). Er ist nicht Leichtathlet wegen (6) und (10) und nicht Schwimmer wegen (5).

Behauptung:

(19) Der Kapitän ist Ungar oder Deutscher.

Beweis: Der Kapitän ist nicht aus der UdSSR wegen (16), nicht aus Polen wegen (3) und nicht aus Zypern wegen (18), (2) und (15) bzw. (18) und (7).

Behauptung:

(20) Der Kapitän sitzt auf Platz 3, 4 oder 5 wegen (1), (15) und (19).

(21) Der Kapitän ist 40 oder 52 Jahre alt.

Beweis: Er ist nicht 21 Jahre wegen (4), nicht 24 Jahre wegen (17) und (19) und nicht 32 Jahre wegen (6) und (9).

Behauptung:

(22) Der Zypriot auf Platz 2 reist nach Dresden.

Beweis: Er reist nicht nach Berlin wegen (9) und (17), nicht nach Rostock wegen (19) und (6), nicht nach Leipzig wegen (16) und nicht nach Karl-Marx-Stadt, denn dann wäre er wegen (10) Leichtathlet, daher wegen (18) nicht Kapitän, wegen (5) nicht Lehrer, wegen (16) nicht Ingenieur und wegen (3) nicht Journalist, also Feinmechaniker. Dann wäre er 21 Jahre alt wegen (4) im Widerspruch zu (17).

Behauptung:

(23) Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann wäre er wegen (21) 52 Jahre alt und säße wegen (12), (22) und (16) auf Platz 3. Er wäre also wegen (2) Volleyballspieler und wegen (7) und (19) Ungar. Dann säße wegen (11) und (15) der Deutsche auf Platz 4, wäre nicht Ingenieur wegen (16), nicht Lehrer wegen (7) und (5), nicht Journalist wegen (3), sondern Feinmechaniker und daher 21 Jahre wegen (4). Daher hätte der Reisende aus der DDR nicht das Reiseziel Berlin wegen (9) und nicht die Reiseziele Leipzig wegen (16), Dresden wegen (22), Rostock wegen (6) und Karl-Marx-Stadt wegen (7) und (10) im Widerspruch zur Voraussetzung, dass eine der fünf Städte sein Reiseziel ist. Damit ergibt sich die Antwort b): Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Übernommen von [2]

9.6.2 II. Runde 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041221
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, dass aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.
Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen.
Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!
a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.
b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.
c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Lässt man zu, dass durch die Schnitte kein Punkt der Kanten des Würfels im Restkörper enthalten sein muss, dann sind keine eindeutigen Ergebnisse möglich, siehe unten. Daher wird angenommen, dass die Aufgabenstellung (als erste Aufgabe einer zweiten Runde) sich darauf bezieht, dass von jeder Kante noch jeweils mindestens ein Punkt im Restkörper enthalten ist.

a) Wir betrachten zuerst eine Seitenfläche $ABCD$ des Würfels. In dieses kann ein regelmäßiges Viereck (also Quadrat) $A_1B_1C_1D_1$ mit A_1 auf AB, B_1 auf BC, C_1 auf CD und D_1 auf DA nur genau so einbeschrieben werden, indem $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1|$ gilt.
(Dass dann $A_1B_1C_1D_1$ tatsächlich ein Quadrat ergibt, zeigt die Rotationssymmetrie der Figur, sodass alle Seitenlängen und alle Innenwinkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ gleich groß sind.)
Aufgrund der Symmetrie ist $|AD_1| = |A_1B|$.

Aufgrund der Kongruenz der aus den Seitenflächen durch die Schnitte entstehenden Quadrate muss der zu $ABCD$ benachbarte Würfelseitenfläche $ABFE$ auf die gleiche Weise ein Quadrat $A_1B_2F_2E_2$ mit B_2 auf BF, F_2 auf FE und E_2 auf EA einbeschrieben werden. Insbesondere gilt dann $|AE_2| = |A_1B|$.
Analog erhält man auch auf der zu beiden bisher betrachteten Würfelseitenflächen $ABCD$ und $ABFE$ benachbarten Würfelseitenfläche $AEHD$ ein einbeschriebenes Quadrat $E_2E_3H_3D_1$ mit E_3 auf EH und H_3 auf HD, für welches $|AE_2| = |DD_1| = |AD| - |AD_1| = |AB| - |BA_1| = |AA_1|$ gilt.
Damit ist $|A_1B| = |AE_2| = |AA_1|$, sodass A_1 der Mittelpunkt von AB ist und aus Symmetriegründen also jede Kante des Würfels durch die entsprechenden Schnitte halbiert wird.

Der Teilkörper, der beim Abtrennen einer Würfelecke entsteht, ist demnach eine dreiseitige Pyramide mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche, deren Katheten die Länge $\frac{a}{2}$ haben, und Höhe $\frac{a}{2}$. Jeder dieser Teilkörper hat damit ein Volumen von $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}a^3$, und da sich die acht entstehenden, abgetrennten Teilkörper jeweils paarweise nicht in inneren Punkten überschneiden, besitzt der verbleibende Restkörper ein Volumen von $a^3 - 8 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

(Würde man die "Kantenlängen" der abzuschneidenden – sich dann überschneidenden – dreiseitigen Pyramiden auf knapp unter a erhöhen, so entstünde zwar aus jeder Würfelseitenfläche ein Quadrat mit beliebig kleiner Kantenlänge; der verbleibende Restkörper hätte aber ein Volumen, welches unter jede beliebige Schranke, die größer als $\frac{1}{3}a^3$ ist, gedrückt werden kann: Die abgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden zu zwei gegenüberliegenden Ecken im Würfel überschneiden sich nich, haben aber jeweils ein Volumen von knapp unter $\frac{1}{3}a^3$, sodass der verbleibende Restkörper höchstens ein Volumen von "etwas mehr" als $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$ besitzen kann. Der Betrag von "etwas mehr" kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kantenlänge der abzuschneidenden Pyramiden beliebig nahe an a heranführt.)

b) Da ein gerader Schnitt durch ein konvexes n-Eck die Anzahl der Ecken höchstens um 1 erhöhen kann (und dies auch nur tut, wenn er durch das Innere zweier benachbarter Seiten verläuft), müssen die die Würfelecken abtrennenden ebenen Schnitte jede Würfelkante in drei Abschnitte einteilen: Die jeweils an einer Würfelkante angrenzenden Abschnitte einer Kante gehören dann zum diese Ecke enthaltenden Teilkörper, während der jeweils mittlere Abschnitt Kante des Restkörpers ist. Insbesondere liegen also auf jeder Kante des ursprünglichen Würfels nun zwei benachbarte Eckpunkte der entstehenden Achtecke des Restkörpers.

Zeichnet man in ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck ein, dessen Eckpunkte alle auf den Seiten des Quadrats liegen, dann geht die Figur sowohl durch Drehung um 90° um den Mittelpunkt des Quadrats als auch durch Spiegelung an einer Mittelparallele zweier gegenüberliegender Seiten des Quadrats in sich selbst über, da sowohl Quadrat als auch regelmäßiges Achteck diese Symmetrien besitzen. Also sind alle entsprechenden Strecken gleich lang.

Sei die Würfelkante AB durch die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 in der Reihenfolge AS_1S_2B in drei Abschnitte geteilt, sodass regelmäßige Achtecke auf den Würfelflächen mit Kantenlänge $|S_1S_2|$ entstehen. Dann ist nach der vorherigen Überlegung $b := |AS_1| = |S_2B|$ und $|S_1S_2|$ die Länge der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten genau die Länge b besitzen. Damit ergibt sich

$$a = |AB| = 2 \cdot b + \sqrt{2} \cdot b \qquad \text{also} \qquad b = \frac{1}{2+\sqrt{2}}a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

Weiterhin überschneiden sich wegen $b \leq \frac{1}{2}a$ die abzuschneidenden dreiseitigen Pyramiden mit Kantenlängen b nicht und haben jeweils ein Volumen von

$$\frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^3}{8}a^3 = \frac{8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2}}{48}a^3 = \frac{20 - 14\sqrt{2}}{48}a^3$$

sodass der Restkörper ein Volumen von

$$a^3 - 8 \cdot \frac{10 - 7\sqrt{2}}{24}a^3 = \frac{3 - 10 + 7\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{7}{3} \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot a^3$$

hat.

c) Wie schon in Teil b) gesehen, kann pro Schnitt durch eine der Würfelseiten die Anzahl der Ecken dieser Fläche nur um höchstens 1 erhöht werden. Also sind maximal Achtecke als aus den Würfelseiten entstehenden Flächen des Restkörpers möglich. Ein gleichseitiges Dreieck ist dabei nicht möglich zu erhalten, da dafür mindestens eine Kante des Würfels komplett entfernt werden müsste, da ein solches nie zugleich alle vier Seiten des Quadrats berühren kann. Neben $n = 4$ und $n = 8$ sind also noch die Fälle $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ zu betrachten. In allen Fällen müssen auf mindestens einer Kante zwei verschiedene Eckpunkte eines solchen regelmäßigen n-Ecks liegen.

Gibt es mindestens zwei Seiten eines Quadrats, auf denen je zwei der Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks liegen, sind die beiden durch diese Eckpunkte gebildeten Seiten des n-Ecks entweder parallel oder senkrecht zueinander. Derartige Seiten gibt es im regelmäßigen Siebeneck aber nicht, sodass $n = 7$ ausgeschlossen werden kann.

Im Fall des Sechsecks verläuft die gemeinsame Mittelparallele zwei gegenüberliegender Sechseckseiten durch den Diagonalenschnittpunkt. Insbesondere müsste die Figur des dem Quadrat einbeschriebenen Sechsecks spiegelsymmetrisch zu dieser Achse sein, sodass die Eckpunkte des Sechsecks, die nicht auf den beiden Quadratseiten mit je zwei Sechseck-Eckpunkten liegen, durch die Spiegelung auf den jeweils anderen abgebildet werden müssten. Damit betrüge die Länge der Diagonalen genau a und die Kantenlänge des Sechsecks $\frac{1}{2}a$.

An den Quadratecken ergäben sich aber nun aus Symmetriegründen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlänge $\frac{1}{4}a$ und Hypotenusenlänge = Sechseck-Seitenlänge $\frac{1}{2}a$, was aber dem Satz von Pythagoras widerspricht. Demzufolge kann es auch der Fall $n = 6$ ausgeschlossen werden.

Bleibt noch zu betrachten, ob regelmäßige Fünfecke möglich sind. Gäbe es ein solches, dass einem Quadrat einbeschrieben ist, so müsste die Höhe des Punktes, dass der Kante des Fünfecks, welche auf einer Quadratseite liegt, gegenüberliegt, auf eben jene gegenüberliegende Kante des Fünfecks parallel zu einer Quadratseite zwei gegenüberliegende Quadratseiten verbinden, also die Länge a haben.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an dieser Höhe überführt die Figur in sich selbst) ist aber auch die Verbindungslinie der zwei übrigen Eckpunkte des Fünfecks parallel zu zwei gegenüberliegenden Quadratseiten (nun dem anderen Paar) und verbindet auch zwei Punkte auf diesen, hat also genauso die Länge a. Im regelmäßigen Fünfeck verläuft aber die Höhe eines Punktes auf die gegenüberliegende Fünfeckseite durch keinen der beiden Eckpunkte dieser Seite, sodass die Diagonalen alle länger sind als diese Höhen. So ist auch dieser Fall auszuschließen.

Es verbleiben die in a) und b) betrachteten Fälle mit $n = 4$ bzw. $n = 8$.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:

a) Denkt man sich den gegebenen Würfel in acht gleichgroße Teilwürfel zerlegt, so ist im Falle a) das Volumen jeder der acht abgeschnittenen Pyramiden gleich einem Sechstel des Volumens eines Teilwürfels.

Die Summe der Volumina der abgeschnittenen Pyramiden ist also

$$S - 8 \cdot \frac{a^3}{8 \cdot 6} = \frac{a^3}{6}$$

Das gesuchte Volumen des Restkörpers beträgt daher

$$V = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3$$

b) Dieser Fall lässt sich auf den vorigen zurückführen, wobei zu beachten ist, dass die Seitenlänge b des regelmäßigen Achtecks wegen

$$b^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad ; \qquad b = a(\sqrt{2}-1)$$

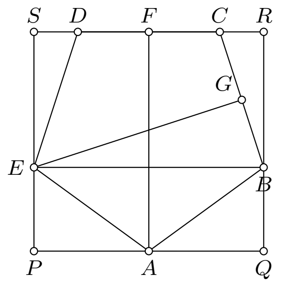
ist. Berücksichtigt man ferner, dass die an jeder Ecke abgeschnittenen Pyramiden einander kongruent und den Pyramiden des Falles a) ähnlich sind, so ergibt sich das Gesamtvolumen der abgeschnittenen Pyramiden

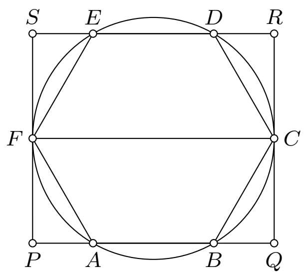
$$S' = \frac{a^3}{6}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^3 = \frac{a^3}{3}(10 - 7\sqrt{2})$$

Das gesuchte Volumen des Restkörpers beträgt also in diesem Fall

$$V' = a^3 - \frac{a^3}{3}(10 - 7\sqrt{2}) = \frac{7}{3}(\sqrt{2}-1)a^3$$

c) Durch das Abschneiden aller vier an einer Seitenfläche gelegenen Ecken entstehen auf jeder Seite dieser Fläche höchstens zwei Schnittpunkte. Daher kann für das regelmäßige n-Eck n höchstens gleich acht sein. Es können aber auch die zwei Schnittpunkte jeder Seite zusammenfallen.
Also muss für das regelmäßige n-Eck n mindestens gleich vier sein. Möglich wären zunächst auch $n = 5, 6$ oder 7.





Nun ist $n = 5$ nicht möglich. Einem Quadrat kann ein regelmäßiges Fünfeck nicht einbeschrieben werden. Zu einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ (siehe linke Abbildung) gibt es nämlich genau ein Rechteck $PQRS$, so dass die Punkte C und D des Fünfecks auf einer Rechteckseite und die übrigen Punkte des Fünfecks auf den anderen Rechteckseiten liegen.
Bezeichnet man mit F die Mitte der Seite CD und mit G die Mitte der Seite BC, so gilt $QR = AF = EG$, $PQ = EB > EG$ also $PQ > QR$, d.h., das Rechteck ist kein Quadrat. Daraus folgt, dass man einem Quadrat ein regelmäßiges Fünfeck nicht einbeschreiben kann.

Der Fall $n = 6$ ist ebenfalls nicht möglich (rechte Abbildung). Es ist nämlich im Dreieck FES die Hypotenuse FE länger als die Kathete FS. Es gilt aber $FC = SR = 2FE$ und $SP = 2FS$ und folglich $SR > SP$.
Das Rechteck $PQRS$ ist also kein Quadrat.

Schließlich ist $n = 7$ nicht möglich, da ein regelmäßiges Siebeneck kein Paar paralleler Seiten enthält.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 041222
Es ist zu beweisen, dass alle Zahlen der Form

$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$

wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist; durch 1965 teilbar sind.

Es ist:

$$1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73$$

Daher ist

$$z_n = 73^n + 1049 \cdot 58^n = 73^n + (31 \cdot 1965 - 73) \cdot 58^{n-1} = 73(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}$$

Da $n - 1 = 2k$ eine gerade Zahl mit $k \geq 0$ ist, folgt

$$73^{n-1} - 58^{n-1} = (73^2)^k - (58^2)^k = 5329^k - 3364^k.$$

Diese Zahl ist durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar. Also ist auch z_n durch 1965 teilbar.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 041223
Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$$

richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Es ist

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + 2a^2c^2 - 4ac^3 + 2c^4 =$$
$$= (a^2 - c^2)2 + 2c^2(a^2 - 2ac + c^2) = (a^2 - c^2)^2 + 2c^2(a - c)^2 \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = c$ ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 041224
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90^\circ$$

Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.

Es ist

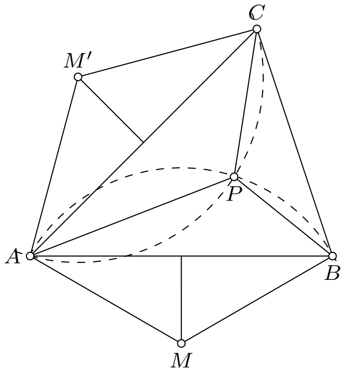
$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = \cot \frac{x-y}{2}$$

da wegen $x + y = 90^\circ$ hier $\sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.
Ferner ist $\frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - (45^\circ - \frac{x}{2}) = x - 45^\circ$.
Also ist das Gleichheitszeichen für alle x und y erfüllt, für die $\cot(x - 45^\circ) = \frac{5}{3}$ und $y = 90^\circ - x$ ist.
Man erhält dann $x - 45^\circ \approx 31^\circ + k \cdot 180^\circ$ (k ganzzahlig).

$$x \approx 76^\circ + k \cdot 180^\circ \qquad ; \qquad y \approx 14^\circ - k \cdot 180^\circ$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 041225
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d.h. $\angle BPA \cong \angle CPB \cong \angle CPA$).



Wir nehmen an, dass P der gesuchte Punkt im Innern des Dreiecks ABC sei (also $\angle APB \cong \angle BFC \cong \angle CPA \cong \frac{4}{3}R$, R: rechter Winkel).
Den Kreis durch A, P, B bezeichnen wir mit K. den Kreis durch A, P, C mit K'. M sei der Mittelpunkt von K, M' der Mittelpunkt von K'. Nach dem Satz vom Peripheriewinkel gilt $\angle AMB \cong \frac{4}{3}R$ und daher $\angle MAB \cong \frac{R}{3}$.

Man zeichnet also in dem Dreieck ABC die Mittelsenkrechte von AB und trägt in A an AB nach außen einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die Mittelsenkrechte in M schneidet (siehe Abbildung).

Analog konstruiert man M'. Die Kreise um M bzw. M' mit den Radien MA bzw. $M'A$ schneiden einander außer in A in einem weiteren Punkt P (Berührung kann nicht eintreten, da hierbei $\angle BAC \cong \frac{4}{3}R$ sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht). Der Schnittpunkt P liegt entweder

a) Im Innern des Winkels BAC oder
b) im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels.

a) Angenommen, P läge im Innern des Winkels BAC, aber nicht im Innern des Dreiecks ABC. Dann wäre die Summe der Innenwinkel des Vierecks $ABPC$ größer als $4R$, im Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Viereck.

b) Angenommen, P läge im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels. Dann gälte nach dem Satz vom Peripheriewinkel $\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{2}{3}R$, also $\angle BFC \cong \frac{4}{3}R$.
Da das Dreieck BAC im Innern des Dreiecks BFC liegt, gälte

$$\angle ABC + \angle BCA < \angle PBC + \angle PCB \cong \frac{2}{3}R$$

also $\angle BAC > \frac{4}{3}R$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Es bleibt also nur der Fall, dass P im Innern des Dreiecks ABC liegt. Nach der Konstruktion ist

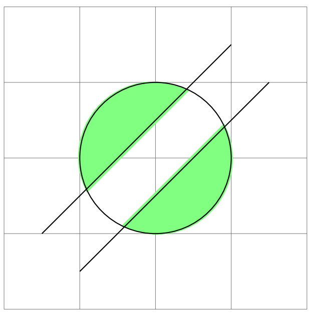
$$\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{4}{3}R \quad \text{und} \quad \angle BPC \cong 4R - \frac{8}{3}R \cong \frac{4}{3}R$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6 - 041226
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen

$$x^2 + y^2 < r^2 \qquad \text{und} \qquad |y - x| > \frac{r}{2}$$

genügen ($r > 0$)!



Die gesuchte Fläche sind zwei Kreissegmente des Kreises mit dem Radius r und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt M.
Die Sehne des ersten Kreissegments liegt auf der Gerade $y = x + \frac{x}{2}$ und das Segment liegt oberhalb dieser Geraden. Die Sehne des zweiten Segments liegt auf der Gerade $y = x - \frac{x}{2}$, das Segment liegt unterhalb.
Es ist $|x - y| > \frac{r}{2} \iff x - y > \frac{r}{2}$ oder $x - y < -\frac{r}{2} \iff y < x - \frac{r}{2}$ oder $y > x + \frac{r}{2}$. Folglich gehören nur solche Punkte (x,y) zur Menge, die unterhalb der Gerade $y = x - \frac{r}{2}$ oder oberhalb der Geraden $y = x + \frac{r}{2}$ liegen. Zur Berechnung der Eckpunkte:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = x + \frac{r}{2} \cdot q; q \in \{-1; +1\}$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + (x + \frac{r}{2} \cdot q)^2 &= 1 \\ x^2 + (x^2 + q \cdot r \cdot x + \frac{r^2}{4}) &= 1 \\ x^2 + \frac{q}{2} \cdot rx - \frac{3}{8} \cdot r^2 &= 1 \\ x = r \cdot (-\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}); \quad k \in \{-1; 1\} \\ y = r \cdot (\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}) \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Caban

9.6.3 III. Runde 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041231
In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

1. a ist eine rationale Zahl.
2. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5. a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8000$.
6. a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, dass von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.
Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Angenommen, die Auskunft 2 sei wahr, dann ist auch die Auskunft 1 wahr. Das ist aber nach der obigen Voraussetzung unmöglich. Also ist die Auskunft 1 wahr und die Auskunft 2 falsch.
Da die Auskunft 1 wahr ist, ist die Auskunft 3 falsch und die Auskunft 4 wahr. a ist also eine der Zahlen

$$..., -35, -21, -7, 7, 21, 35, ..., 7(2n + 1), ...$$

(n ganze Zahl). Nun ist die Auskunft 2 falsch, also ist auch die Auskunft 6 falsch und die Auskunft 5 richtig. Die Zahl a ist also positiv.
Nun ist $7^3 + 7 < 8000$, jedoch bereits $21^3 + 21 > 20^3 + 20 > 8000$. Also folgt $a = 7$.

Übernommen aus [5]

2.Lösung:

Die Zahl lautet 7. Mit folgenden Überlegungen kann die Zahl eindeutig bestimmt werden:
Angenommen, die Zahl wäre nicht ganzzahlig (= ganzrational).
Dann sind die Aussagen 2, 4 und 6 falsch und die Aussagen 1, 3 und 5 müssten wahr sein. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 13 ist, können aber Aussagen 1 und 3 nicht gleichzeitig wahr sein.
Die Annahme ist also falsch.

Demnach ist die gesuchte Zahl a ganzzahlig. Die Aussage 3 ist daher falsch und Aussage 4 ist somit richtig. Außerdem ist Aussage 1 richtig und Aussage 2 falsch. Eine durch 7 teilbare Zahl, die nicht durch 14 teilbar ist, muss ungerade sein. Die Aussage 6 ist daher falsch und die Aussage 5 ist richtig.
Die Zahl a ist also ganzzahlig und somit auch rational, ungerade und es gilt

$$0 < a^3 + a < 8000 \qquad (1)$$

Wäre a negativ, so wäre auch $a^3 + a$ negativ im Widerspruch zu (1).
Für $a \geq 0$ folgt aus (1) $a^3 \leq a^3 + a < 8000$, also $a \leq 20$. Im Bereich 0 bis 20 gibt es nur eine durch 7 teilbare ungerade Zahl, nämlich $a = 7$.
Tatsächlich sind für $a = 7$ die Aussagen 1, 4 und 5 wahr ($0 < 7^3 + 7 = 350 < 8000$) und die Aussagen 2, 3 und 6 sind falsch.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 2 - 041232
Es sei
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
mit reellen Zahlen a,b,c,d als Koeffizienten ($c\neq 0$).
Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x\to y=f(x)$ eine Funktion definiert?
Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a,b,c,d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

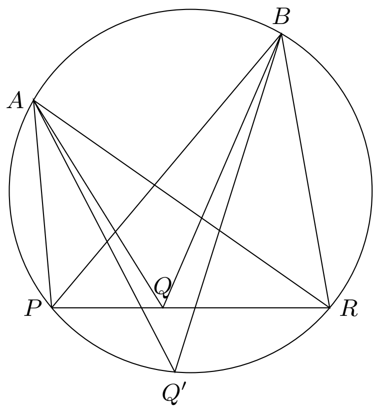
Die erste Frage ist etwas eigenwillig formuliert. Gefragt ist vermutlich nach dem maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen.
Der Nenner darf nicht 0 sein, es muss also $cx\neq -d$ bzw. $x\neq -\frac{d}{c}$ gelten ($c\neq 0!$).
Für alle anderen reellen x ist der Zähler definiert und der Nenner ungleich 0, so dass der Quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$ definiert ist.
Der maximale Definitionsbereich ist demnach $D=R\setminus\big(\{-\frac{d}{c}\}$.
Es gilt
$$ax+b=\frac{a}{c}\cdot(cx+d)+\left(b-\frac{ad}{c}\right)$$
$f(x)$ lässt sich daher umschreiben zu
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\cdot(cx+d)}{cx+d}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$$
Es seien x_1 und x_2 beliebige reelle Zahlen mit $x_1<x_2<-\frac{d}{c}$ oder $-\frac{d}{c}<x_1<x_2$
$$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_1+d}>\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_2+d}\Leftrightarrow \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_1+d}>\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx_2+d}$$
Multiplikation mit $(cx_1+d)(cx_2+d)$, was in beiden Fällen positiv ist, ergibt:
$$f(x_1)>f(x_2) <=> \left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot(cx_2+d)>\left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot(cx_1+d)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(b-\frac{ad}{c}\right)\cdot c\cdot(x_2-x_1)>0\Leftrightarrow(bc-ad)>0\quad(\text{da } x_2-x_1>0).$$
Die Funktion f ist also genau dann in den beiden Intervallen $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ und $\left(-\frac{d}{c},\infty\right)$ streng monoton fallend, wenn $bc>ad$ gilt.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

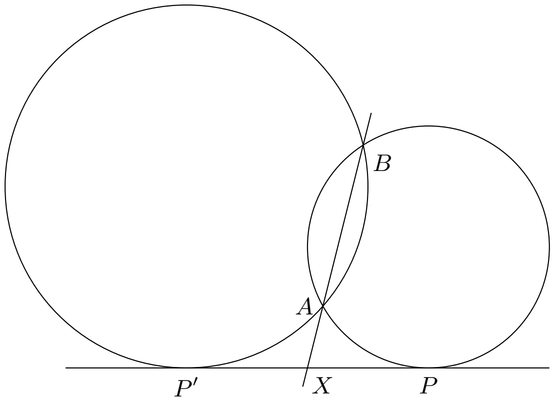
Aufgabe 3 - 041233
Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.
Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d.h. für den $\angle APB\geq\angle AQB$ für alle $Q\in g$ gilt.

Auch wenn es in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wird, können wir annehmen, dass A und B verschieden sind, denn sonst ist $\angle APB=0$ für alle $P\in g$ und die Aufgabe sinnlos.
Wenn P auf der Geraden AB liegt, dann ist $\angle APB=0$, was nicht maximal ist. Also liegt der gesuchte Punkt nicht auf AB, so dass es einen eindeutigen Kreis k durch A, B und P gibt.

Angenommen, k schneidet g in einem weiteren Punkt R wie in der obigen Abbildung. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\angle APB=\angle ARB=\angle AQ'B$, und wegen $\angle BAQ<\angle BAQ'$ und $\angle ABQ<\angle ABQ'$ ist $\angle AQB>\angle AQ'B=\angle APB$, also erfüllt P nicht die verlangte Bedingung.



Der gesuchte Punkt P ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass der Kreis k durch A, B und P die Gerade g in P berührt. Dieser Sonderfall des Apollonischen Kreisproblems hat i.A. zwei Lösungen. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel.



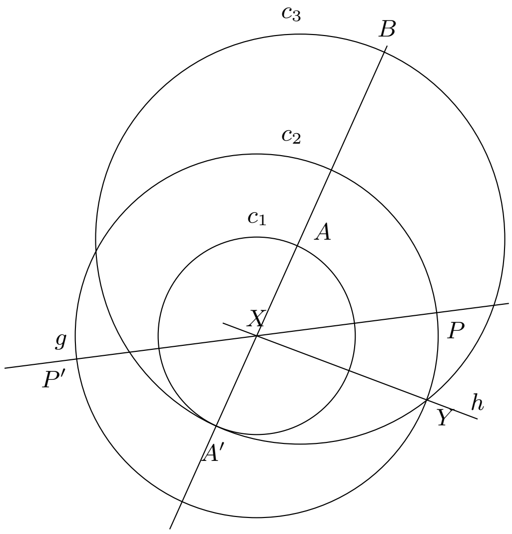
Speziell zu behandeln ist der Fall, dass AB parallel zu g ist.
Dann kann nur ein A und B enthaltender Kreis g berühren, der Berührungspunkt P ist wegen der Symmetrie der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit g.
Im folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, dass AB nicht parallel zu g ist, so dass ein eindeutiger Schnittpunkt X von AB und g existiert. Da A und B nach Voraussetzung auf der gleichen Seite von g liegen, liegt X außerhalb jedes A und B enthaltenden Kreises k (wie in obiger Abbildung).
Da g eine Tangente an k im gesuchten Punkt P sein soll und X enthält, muss $XA \cdot XB = XP^2$ gelten (allgemeiner Satz über Sehnen und Tangenten).
Der gesuchte Punkt P liegt demnach im berechenbaren Abstand $\sqrt{XA \cdot XB}$ von X auf g.

Es gibt zwei solche Punkte P und P', die lokale Maxima des Winkels sind, unter dem AB erscheint. Das globale Maximum liegt in dem Punkt P, für den der Kreis k kleiner ist, also so, dass $\angle PXA < \angle P'XA$.
Im symmetrischen Sonderfall, dass AB senkrecht zu g ist, ist der Winkel in beiden Punkten gleich groß, d.h. es gibt zwei verschiedene Lösungen.
Da wir nun wissen, wie der Punkt P berechnet wird, können wir ihn auch wie folgt konstruieren. Die Abbildung zeigt die wesentlichen Konstruktionsschritte, ein paar Hilfskonstruktionen wurden zur Übersichtlichkeit weggelassen.

1. Schneide die Gerade AB mit g, der Schnittpunkt sei X (der Fall, dass AB parallel zu g ist, wurde oben behandelt und hier ausgeschlossen). In der Abbildung liegt A zwischen X und B, was o.B.d.A. angenommen werden kann, aber auch keinen Unterschied macht.

2. Schlage um X einen Kreis c_1 durch A, der von A verschiedene Schnittpunkt mit AB sei A'.

3. Konstruiere den Thaleskreis c_2 durch A' und B. Dazu lege man einen Kreis um A' durch B und einen Kreis um B durch A' und verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Der Schnitt der Verbindungsgeraden mit $A'B$ ist der Kreismittelpunkt (diese beiden Hilfskreise und die Verbindungsgerade sind in der Abbildung nicht gezeichnet).



4. Konstruiere die Gerade h, die X enthält und senkrecht zu AB ist. Da $XA = XA'$, ist h die Mittelsenkrechte von A und A', also gehe man vor wie bei der Konstruktion von c_2 (die beiden Hilfskreise sind wieder in der Abbildung weggelassen).

5. Y sei ein Schnittpunkt von h und c_2 (es ist egal, welchen von beiden man verwendet). Da Y auf dem Thaleskreis von A' und B liegt, hat das Dreieck $A'BY$ in Y einen rechten Winkel. Ferner ist h die Höhe des Dreiecks durch Y und X der Fußpunkt dieser Höhe. Nach dem Höhensatz von Euklid gilt
$$XY^2 = XA' \cdot XB = XA \cdot XB \qquad \text{wegen} \quad XA = XA'$$

6. Schlage um X einen Kreis c_3 durch Y. Die Schnittpunkte des Kreises mit g sind die Punkte P und P', denn $XP = XP' = XY = \sqrt{XA \cdot XB}$.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 4 - 041234
Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ erfüllt?

Wegen $\tan(x+\pi) = -\cot x$ und $\cot(x+\pi) = -\tan x$ ist
$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \tan^2 x + \cot^2 x$$
und wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right)$ ist
$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$
d.h. $\tan^2 x + \cot^2 x$ ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch und symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{4}$. Wir müssen daher Lösungen von $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ nur im Intervall $I = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ suchen (0 ausgeschlossen wegen Definitionslücke). Die gegebene Gleichung ist
$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &= 6 \\ \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 6\sin^2 x \cos^2 x \\ \Leftrightarrow (1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x &= 6(1-cos^2 x)\cos^2 x \\ \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 &= 6\cos^2 x - 6\cos^4 x \\ \Leftrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{8} &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da cos auf I positiv ist.
$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ hat keine Lösung in I, weil cos auf I streng monoton fällt und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ gilt. Also hat die Ausgangsgleichung in I nur eine Lösung, nämlich

$$x = \arccos \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

Wegen der anfangs genannten Symmetrie und Periodizität ist die Menge aller reellen Lösungen

$$\left\{\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right\} + \frac{\pi}{2}Z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}Z = \left\{\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{3\pi}{8},\pm\frac{5\pi}{8},...\right\}$$

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

2. Lösung:
Die Ausgangsgleichung lässt sich auch schreiben als

$$(\tan x + \cot x)^2 = 8$$

woraus sofort

$$\frac{2}{\sin(2x)} = \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x \cos x} = \tan x + \cot x = \pm 2\sqrt{2}$$

und weiter

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt. Diese letzte Gleichung ist aber offensichtlich genau für

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{8} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

erfüllt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 041235
Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Angenommen, $z = x! + y! = a! + b!$ mit $a \neq 0$ und $x \neq a \leq b$. Aufgrund der gleichen Gestalt beider Gleichungen kann man o.B.d.A. $a < x$ wählen.
Ausklammern liefert

$$z = x!(1 + \frac{y!}{x!}) = a!(1 + \frac{b!}{a!})$$

Division beider Gleichungen ergibt

$$1 = \frac{(a+1)\cdots x(1+\frac{y!}{x!})}{(1+\frac{b!}{a!})}$$

Der Quotient kann aber nicht 1 sein, da keiner der Primfaktoren von $a+1$ im Divisor $1+\frac{b!}{a!} = 1+(a+1)\cdots b$ enthalten ist (beachte, dass wegen $a < x$ auch $a < b$ gelten muss).
Damit kann es keine solche zweite Darstellung von z als Summe zweier Fakultäten geben.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6 - 041236
Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Vorbemerkung: Daraus, dass die drei Kreise paarweise genau einen gemeinsamen Punkt haben und die drei Berührungspunkte verschieden sind, folgt insbesondere, dass kein Kreis zu einem Punkt degeneriert ist und keine zwei Kreise identisch sind.

Die Kreise bezeichnen wir als k_1, k_2, k_3, den Punkt $k_1 \cap k_2$ als P_{12}, die gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 in P_{12} als t_{12}. Analog sind P_{23}, P_{13}, t_{23} und t_{13} definiert.

Zunächst nehmen wir an, dass zwei der Kreise in einer Ebene liegen, o.B.d.A. seien dies k_1 und k_2. In dieser Ebene müssen dann auch die Geraden t_{13} und t_{23} liegen. Sie müssen verschieden sein, denn sonst würde die Gerade $t_{13} = t_{23}$ den Kreis k_3 in den beiden verschiedenen Punkten P_{13} und P_{23} berühren, was nicht möglich ist.
Also hat die k_3 enthaltende Ebene zwei verschiedene Geraden mit der k_1 und k_2 enthaltenden Ebene gemeinsam. Das ist nur dann möglich, wenn beide Ebenen identisch sind.
Wenn also zwei der drei Kreise in einer Ebene liegen, dann liegen alle drei Kreise in dieser Ebene.

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Kreise in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zu zeigen ist, dass dann alle drei Kreise auf einer einzigen Kugel liegen. E_{12} sei die zu t_{12} senkrechte Ebene durch P_{12}, d.i. die gemeinsame Symmetrieebene von k_1 und k_2. Für $i = 1, 2, 3$ sei die „Mittelsenkrechte“ m_i des Kreises k_i die Menge aller Punkte, die von jeweils allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand haben, d.i. die Gerade senkrecht zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt.
Da k_1 und k_2 symmetrisch zu E_{12} liegen, enthält E_{12} die Geraden m_1 und m_2.
Diese Geraden sind nicht parallel (und insbesondere nicht identisch), da sonst die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 parallel und somit gleich wären, und schneiden sich daher in genau einem Punkt M_{12}.
Nach Konstruktion hat M_{12} sowohl von allen Punkten aus k_1 als auch von allen Punkten aus k_2 den gleichen Abstand. Da die Kreise k_1 und k_2 einen Punkt gemeinsam haben, hat M_{12} von allen Punkten aus $k_1 \cup k_2$ den gleichen Abstand, den wir als r_{12} bezeichnen.

Völlig analog schneiden sich m_2 und m_3 in einem Punkt M_{23}, der von allen Punkten aus $k_2 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{23} hat, und m_1 und m_3 schneiden sich in einem Punkt M_{13}, der von allen Punkten aus $k_1 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{13} hat.

Wenn die drei Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} nicht paarweise verschieden sind, dann sind sie alle drei gleich (denn z.B. aus $M_{12} = M_{23}$ folgt, dass m_1 den Punkt $m_2 \cap m_3$ enthält), so dass $r_{12} = r_{23} = r_{13}$.
Dann liegen alle drei Kreise auf der Kugel mit Radius r_{12} um M_{12}.

Dass die Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} immer gleich sind, zeigen wir durch einen indirekten Beweis, indem wir annehmen, dass sie paarweise verschieden sind.
M_{23} und M_{13} liegen auf m_1 bzw. m_2 und damit in der von diesen Geraden aufgespannten Ebene E_{12}. m_3 hat also zwei verschiedene Punkte mit dieser Ebene gemeinsam und liegt daher in dieser Ebene, die folglich mit den analog definierten Ebenen E_{23} und $E13$ identisch ist. Damit liegen außer P_{12} auch die Punkte P_{23} und P_{13} in dieser Ebene $E = E_{12} = E_{23} = E_{13}$.

Da E mit jedem der Kreise nur zwei Punkte gemeinsam hat und von diese sechs Punkte jeweils zwei als Berührungspunkt zusammenfallen, besteht der Schnitt von E mit den Kreisen genau aus den drei verschiedenen Punkten P_{12}, P_{23} und P_{13}, und die Geraden m_1, m_2 und m_3 sind die Mittelsenkrechten des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks.
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich jedoch immer in einem einzigen Punkt. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass M_{12}, M_{23} und M_{13} paarweise verschieden sind.
Also tritt der oben genannte Fall ein, dass diese drei Punkte gleich sind und die drei Kreise auf einer Kugel liegen.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

9.6.4 IV. Runde 1964, Klasse 12

Aufgabe 1 - 041241
Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der Gleichung. Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, und $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} \geq 0$ ist, gilt $0 \leq x \leq p$. Durch zweimaliges Quadrieren der Ausgangsgleichung erhält man $x^4+4x^2(1-p)=0$.

(1) $0<p\leq 1$

Für $p \leq 1$ ist also notwendig $x=0$. Für $p \leq 1$ kann es also außer $x=0$ keine Lösung geben.

Probe : $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=2\sqrt{p}>0=x$, weil p positiv. Damit gibt es bei $p \leq 1$ keine Lösung!

(2) $1<p$

Für $p>1$ könnten $x=0$ und $x=2\sqrt{p-1}$ Lösungen sein.

Probe : $x=0$ ist ebenso wie im 1. Fall keine Lösung.

Teste nun $x=2\sqrt{p-1}$:

$$s=\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=\sqrt{p+2\sqrt{p-1}}+\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{p-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{p-1}-1\right)^2}=|\sqrt{p-1}+1|+|\sqrt{p-1}-1|$$

Der Betrag des ersten Terms ist gleich dem Term selbst; der Betrag des zweiten Terms ist gleich dem Term selbst für $2 \leq p$ und dem Negativen dessen für $1<p<2$. Wir erhalten also für $1<p<2$:

$$s=\sqrt{p-1}+1+1-\sqrt{p-1}=2\neq 2\sqrt{p-1}$$

Für $2 \leq p$ ist

$$s=\sqrt{p-1}+1+\sqrt{p-1}-1=2\sqrt{p-1}=x$$

und damit die einzige Lösung.

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x=2\sqrt{p-1}$ für den Fall, dass $p \geq 2$ gilt.

Lösung übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 041242
Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen $2,3,5,7,11,13,109,151,491$ die Zahl $z=1963^{1965}-1963$ teilbar ist.

Es gilt:

$$z=1963^{1965}-1963=1963(1963^{1964}-1)=1963(1963^{982}+1)(1963^{491}+1)(1963^{491}-1)$$

Wegen

$$a^k-1(a-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+...+1)$$

für jedes positive ganze k und jedes a sowie

$$a^k+1=(a+1)(a^{k-1}-a^{k-2}+...+1)$$

für jedes ungerade natürliche k und jedes a gilt:

$$z=1962\cdot 1963\cdot 1964\cdot P$$

wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist. Wegen

$$1962 = 2 \cdot 3^3 \cdot 109; \qquad 1963 = 13 \cdot 151; \qquad 1964 = 2^4 \cdot 491$$

ist z durch 2, 3, 13, 109, 151, 491 teilbar. Es gilt

$$1963^{1964} - 1 = (1963^4)^{491} - 1$$

Die letzte Ziffer von 1963^4 ist 1, deshalb ist auch 1 die letzte Ziffer von $(1963^4)^{491}$. Daher ist die letzte Ziffer von $1963^{1964} - 1$ gleich 0, damit ist diese Zahl durch 5 teilbar, und deswegen ist auch z durch 5 teilbar.
z ist also durch alle angegebenen Primzahlen teilbar.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 041243
Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d.h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen.
Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.
Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'', B'', C'', D''.
Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'', B'', C'', D'' gebildete Figur machen?

Die vier Punkte A,B,C,D bilden genau dann ein Parallelogramm (bzgl. dieser Reihenfolge entlang des Vierecksrandes), wenn $B - A = C - D$ und $C - B = D - A$ gilt, d.h. wenn es zwei Vektoren s_1, s_2 gibt, so dass

$$B = A + s_1, C = A + s_1 + s_2, D = A + s_2 \qquad (1)$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es zwei solche Vektoren sowie analog Vektoren s'_1, s'_2, so dass

$$B' = A' + s'_1, C' = A' + s'_1 + s'_2, D' = A' + s'_2 \qquad (2)$$

Dass die Parallelogramme nach Voraussetzung nicht entartet sind, bedeutet, dass s_1 und s_2 sowie s'_1 und s'_2 jeweils linear unabhängig sind (das ist hier allerdings irrelevant).
Dass A'' auf der Strecke AA' liegt, ist äquivalent zur Existenz eines $\lambda in\, [0, 1]$, so dass $A'' = (1-\lambda)A+\lambda A'$.
Dass A'', B'', C'' und D'' den gleichen Teilungsparameter haben, bedeutet

$$\exists\lambda : A'' = (1 - \lambda)A + \lambda A', B'' = (1 - \lambda)B + \lambda B'$$

$$C'' = (1 - \lambda)C + \lambda C', D'' = (1 - \lambda)D + \lambda D' \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3) liefert

$$B'' = A'' + s''_1, C'' = A'' + s''_1 + s''_2, D'' = A'' + s''_2$$

mit

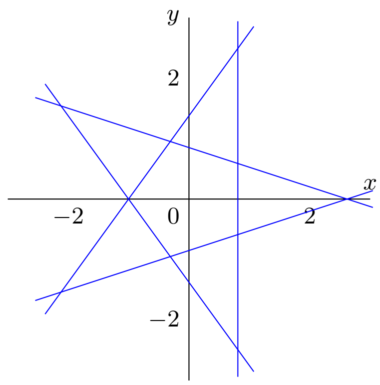
$$s''_1 = (1 - \lambda)s_1 + \lambda s'_1, s''_2 = (1 - \lambda)s_2 + \lambda s'_2$$

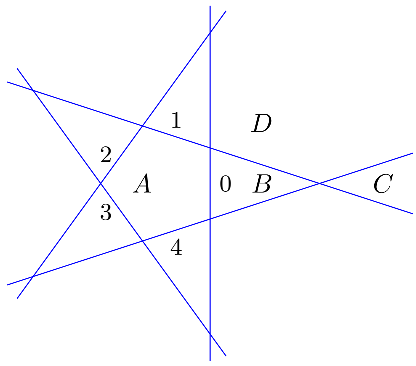
d.h. $A''B''C''D''$ ist immer ein Parallelogramm, unabhängig vom Teilungsverhältnis und der relativen Lage und Form der gegebenen Parallelogramme.
Ansonsten kann man keine allgemeinen Aussagen machen. Z.B. kann das neue Parallelogramm entartet sein (z.B. wenn die beiden gegebenen Parallelogramme in einer Ebene liegen, spiegelsymmetrisch zueinander sind und die Teilungspunkte jeweils die Mittelpunkte sind), oder es können Sonderfälle wie Rechtecke und Quadrate entstehen, obwohl die Ausgangsparallelogramme keine Rechtecke sind.

Aber es muss i.A. keinen Teilungsparameter λ geben, für den $A''B''C''D''$ entartet oder ein Rechteck ist (gehen z.B. die beiden Ausgangsparallelogramme durch eine Translation ineinander über, dann sind alle entstehenden Parallelogramme ihnen ähnlich, d.h. nie entartet und i.A. kein Rechteck).

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 4 - 041244
Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Keises ist!





Zur bequemeren Rechnung wählen wir das Koordinatensystem der Fünfeckebene so, dass der Mittelpunkt der Schwerpunkt des Fünfecks und die positive x-Achse eine Fünfeckseite in deren Mittelpunkt schneidet (siehe linke Abbildung).
Der nach „außen“ gerichtete normierte Normalenvektor der (verlängerten) i-ten Fünfeckseite s_i ($i = 0$,...,4 gemäß rechter Abbildung) ist $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ mit $\varphi_i = \frac{2\pi i}{5}$. Mit den Funktionen

$$f_i(x, y) := x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - r$$

ist $f_i(x, y) = 0$ die implizite Gleichung von s_i und $|f_i(x, y)|$ der Abstand eines Punktes (x, y) von s_i, wobei $r > 0$ der Radius des Inkreises des Fünfecks ist (in der Abbildung ist $r = 1$, was man o.B.d.A. annehmen könnte, ohne jedoch die Rechnung merklich zu vereinfachen).
Die gesuchte Punktmenge ist damit beschreibbar durch die Gleichung

$$f(x, y) = 5r \qquad \text{mit} \qquad f = |f_0| + |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4|$$

Für die f_i verwenden wir die folgende Tabelle:

i	φ_1	$\cos\varphi_i$	$\sin\varphi_i$	$f_i(x,y)$
0	0	1	0	$x - r$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = a_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = b_1$	$a_1x + b_1y - r$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = a_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = b_2$	$-a_2x + b_2y - r$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$-a_2$	b_2	$-a_2x - b_2y - r$
4	$\frac{8}{5}\pi$	a_1	$-b_1$	$a_1x - b_1y - r$

Manche der Werte stehen in Formelsammlungen, die übrigen ergeben sich aus Additionstheoremen und Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Wegen der Betragsfunktionen ist f nicht einfach handhabbar. Wir benutzen, dass die fünf Geraden s_i die Ebene in 16 Gebiete zerlegen, in denen jeweils keine der fünf Funktionen f_i ihr Vorzeichen wechselt (wir betrachten jeweils den Rand des Gebietes als zum Gebiet gehörig).
Wegen der fünfzähligen Rotationssymmetrie müssen wir nur vier verschiedene Gebiete betrachten, z.B. die Gebiete A, B, C und D in der rechten Abbildung.

Betrachten wir zunächst den Fall $(x, y) \in A$ (das Fünfeck selbst). Hier gilt

$$f_0(x, y) \leq 0, f_1(x, y) \leq 0, f_2(x, y) \leq 0, f_3(x, y) \leq 0, f_4(x, y) \leq 0$$

Damit ist

$$f(x, y) = -f_0(x, y) - f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) =$$

$$= -(x - r) - (a_1x + b_1y - r) - (-a_2x + b_2y - r) - (-a_2x - b_2y - r) - (a_1x - b_1y - r) =$$

$$= 5r + (2a_2 - 2a_1 - 1)x = 5r$$

Die Gleichung $f(x,y) = 5r$ ist also in A identisch erfüllt, d.h. die ganze Menge A gehört zur gesuchten Punktmenge.
Sei nun $(x,y) \in B$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \leq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \leq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) - f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y)$$

$f(x,y) = 5r$ gilt daher in B genau dann, wenn $f_0(x,y) = 0$ ist, also entlang der gemeinsamen Strecke mit A, so dass wir keine zusätzlichen Lösungen erhalten.
Sei nun $(x,y) \in C$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \geq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) + f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y) + 2f_1(x,y) + 2f_4(x,y)$$

$f(x,y) = 5r$ gilt daher in C genau dann, wenn

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_4(x,y) = 0 \Leftrightarrow x - r + a_1x + b_1y - r + a_1x - b_1y - r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)r$$

Der Punkt mit dem niedrigsten x-Wert in C ist jedoch $((\sqrt{5} - 1)r, 0)$, der Schnittpunkt der Seiten $s1$ und $s4$, also hat $f(x,y) = 5r$ keine Lösungen in C.
Sei nun $(x,y) \in D$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \leq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y) + 2f_1(x,y)$$

$f(x,y) = 5r$ gilt also in C genau dann, wenn

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow (a_1 + 1)x + b_1y - 2r = 0$$

Diese Gerade enthält den Eckpunkt des Fünfecks, der A und D gemeinsam ist, und verläuft senkrecht zur Symmetrieachse von D, so dass sie keine weiteren Lösungspunkte liefert.
Die gesuchte Punktmenge ist also das Fünfeck selbst (Rand und Inneres).

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 5 - 041245
Ermitteln Sie alle Zifferntripel (x,y,z) mit $x,y,z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx...x) - (yyy...y)} = (zzz...z) \qquad (1)$$

$(xxx...x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy...y)$: n Ziffern; $(zzz...z)$: n Ziffern
für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist!
Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Da wir nur mit positiven Zahlen rechnen, können wir beide Seiten von (1) quadrieren:

$$(1) \Leftrightarrow (xxx...x) - (yyy...y) = (zzz...z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(10^{2n} - 1)x - \frac{1}{9}(10^n - 1)y = \left(\frac{1}{9}(10^n - 1)z\right)^2 \Leftrightarrow (10^n + 1)x - y = \frac{1}{9}(10^n - 1)z^2 \qquad (2)$$

Im Sonderfall $n = 1$ wird (2) zu $11x = z^2 + y$, und durch Einsetzen findet man, dass es zu jeder Ziffer $z > 1$ genau ein y gibt, so dass die rechte Seite durch 11 teilbar ist.
Für $n \geq 2$ betrachten wir (2) modulo 100 (beachte $\frac{1}{9}(10^n - 1) = 111...11 \equiv 11)1$.

$$x - y = 11z^2 \qquad (3)$$

Für $z = 1, 2, ..., 9$ ist $11z^2$ modulo 100 gleich $11, 44, 99, 76, 75, 96, 39, 4, 91$. $x - y$ kann aber nur die Werte $0, ..., 8$ oder $92, ..., 99$ annehmen.
Also sind nur Lösungen mit $z = 3, z = 6$ oder $z = 8$ möglich. $x - y$ muss dann gleich $-1, -4$ bzw. $+4$ sein (nicht nur modulo 100). Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, prüfen wir durch Einsetzen in (2).

- $z = 3, y = x + 1$ liefert $10^n x = 10^n$, also $x = 1$, d.h. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 6, y = x + 4$ liefert $10^n x = 10^n \cdot 4$, also $x = 4$, d.h. $(x, y, z) = (4, 8, 6)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 8, y = x - 4$ führt auf $10^n x = \frac{1}{9}(10^n - 1) \cdot 64 - 4$, was äquivalent zu $9 \cdot 10^n x = 64 \cdot 10^n - 100$ ist. Für $n \geq 3$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar (wie man modulo 1000 sieht), für $n = 2$ wird die Gleichung zu $9x = 63$, also ist $(x, y, z) = (7, 3, 8)$ eine zusätzliche Lösung für $n = 2$.

Die folgende Tabelle enthält alle Lösungsquadrupel (n, x, y, z). Die 2. und die 5. Zeile sind eigentlich überflüssig, da es Spezialfälle der beiden letzten Zeilen sind, und wurden nur zur Nachvollziehbarkeit der Herleitung aufgenommen.

n	x	y	z	n	x	y	z	n	x	y	z
1	1	7	2	1	1	2	3	1	2	6	4
1	3	8	5	1	4	8	6	1	5	6	7
1	6	2	8	1	8	7	9	2	7	3	8
bel.	1	2	3	bel.	4	8	6				

Aus dieser Tabelle aller Lösungen von (1) ist auch die Antwort auf die Aufgabenstellung zu entnehmen: Die einzigen Tripel (x, y, z), die Lösung von (1) für mindestens zwei verschiedene n sind, sind $(1, 2, 3)$ und $(4, 8, 6)$.
Für diese Tripel gilt (1) für alle positiven natürlichen Zahlen n.

Aufgabe gelöst von Rainer Müller

Aufgabe 6 - 041246
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Ich eliminiere zunächst die Winkel über den Kosinussatz und bringe die Gleichung in geeignete Form.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &\leq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow 2abc\cos\alpha + 2abc\cos\beta + 2abc\cos\gamma &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 &\leq 3abc \\
\Leftrightarrow 0 \leq 2 \cdot (3abc + a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2&) \\
\Leftrightarrow 0 \leq (a + b - c)(a - b)^2 + (b + c - a)(b - c)^2 + (a + c - b)(a - c)^2&
\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist offensichtlich wahr, da im Dreieck

$$a + b - c > 0, \quad b + c - a > 0, \quad a + c - b > 0$$

gilt.
Gleichheit tritt dann ein, wenn $(a - b)^2 = 0, (b - c)^2 = 0$ und $(a - c)^2 = 0$, also $a = b = c$ gilt. Und tatsächlich gilt im gleichseitigen Dreieck: $\cos 60° + \cos 60° + \cos 60° = \frac{3}{2}$

Aufgabe gelöst von Daniel Gutekunst

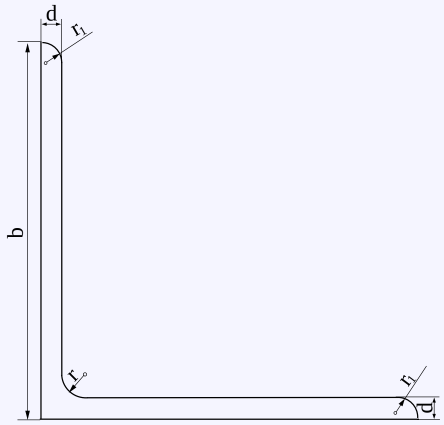
9.7 V. Olympiade 1965

9.7.1 I. Runde 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051211
Ein Winkelstahl (gleichschenkliger L-Stahl) hat den in der Abbildung angegebenen Querschnitt. Dabei ist $b = 50$ mm , $d = 5$ mm, $r = 2r_1 = 7$ mm.

a) Wie groß ist seine Masse bei einer Länge von 5 m? (Dichte des Stahls $\rho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}$)?

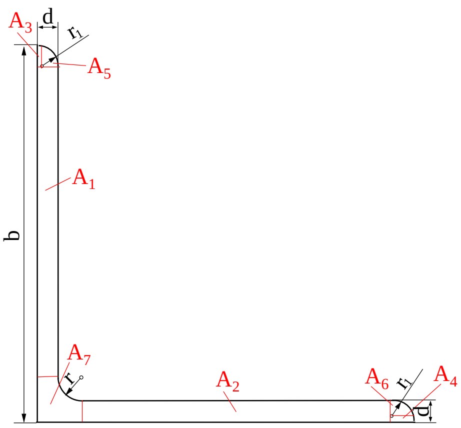
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die Rundungen vernachlässigt und annimmt, dass die Querschnittsfläche aus zwei rechteckigen Flächen besteht?



c) Wie groß ist der maximale prozentuale Fehler, der bei der zu b) durchgeführten Näherungsrechnung entsteht, wenn $b = 50$ mm und $r = 7$ mm konstant sind und d zwischen 5 mm und 9 mm liegt?

a) Für die Masse des Körpers benötigt man zuerst das Volumen und dafür den Flächeninhalt vom Querschnitt (da die Länge 5 m bekannt ist). Die Querschnittsfläche setzt sich wie in der Zeichnung ersichtlich aus den Flächeninhalten A_1 bis A_7 zusammen, wobei $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$ und $A_5 = A_6$ gilt. Die Teilflächen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A_1 = d \cdot (b - r - r_1 - d) = d \cdot (b - 3r_1 - d) = bd - 3r_1 d - d^2 \\ A_2 = (d - r_1) \cdot r_1 = r_1 d - r_1^2 \\ A_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2 \\ A_7 = (d + r)^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2 \end{aligned}$$



$$A = 2 \cdot (bd - 3r_1 d - d^2) + 2 \cdot (r_1 d - r_1^2) + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2) + d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$$

$$= 2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 = 480{,}258\text{mm}^2 = 4{,}80258\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l = 7{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 4{,}80258\text{cm}^2 \cdot 500\text{cm} = 18850\text{g} = 18{,}85\text{kg}$$

b) Den prozentualen Fehler erhält man, indem man den vereinfachten Wert durch den genauen Wert dividiert, 100% multipliziert und die Differenz zu 100% bildet.

Da Länge und Dichte gleich sind und die sich kürzen würden, reicht es aus, mit den Flächeninhalten zu rechnen:

Der vereinfachte Flächeninhalt ergibt sich als $A^* = bd + (b-d)d = 2bd - d^2$. Daraus folgt der Fehler:

$$\Delta = (1 - \frac{2bd - d^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = (\frac{2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = 1{,}09\%$$

c) In der unter b) gefundenen Formel bleibt der Zähler unabhängig von d. Es muss also lediglich der Nenner untersucht werden. Da b viel größer als d ist, wird der Term $2bd - d^2$ mit größer werdendem d auch größer. Damit wird der Nenner größer und bei konstantem Zähler wird der Bruch kleiner.

Der prozentuale Fehler wird also ebenfalls kleiner. Für Werte von d aus dem Bereich 5 bis 9 mm ist der prozentuale Fehler also bei d= 5 mm am größten mit einem Wert von 1,09%.

Aufgabe gelöst von Felix Kaschura

Aufgabe 2 - 051212
Vier kongruente Kugeln berühren eine Ebene auf ein und derselben Seite. Ferner berührt jede Kugel zwei der anderen, und jede der Kugeln berührt einen und denselben geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis in der gegebenen Ebene liegt.

Es ist der Radius des Grundkreises des Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Kugeln und von der Höhe des Kegels darzustellen (Fallunterscheidung).

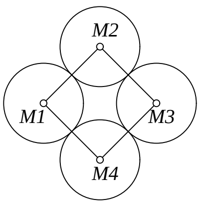


Abb. 051311a

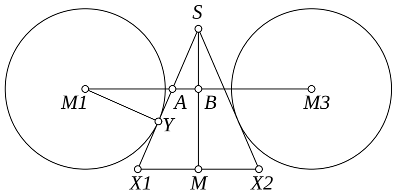


Abb. 051311b

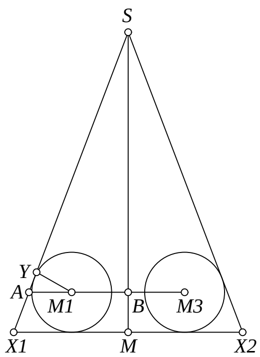


Abb. 051311c

Mit den Bezeichnungen im Bild und $x = \overline{X_1M}$, $h = \overline{MS}$, $y = \overline{AY}$, $z_1 = \overline{M_1A}$, $z_2 = \overline{AB}$ und dem Radius r der Kugeln müssen folgende Beziehungen gelten:

(1) $\overline{M_1M_3} = 2 \cdot \sqrt{2}r$ (die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Quadrat wie in Abbildung a) dargestellt, wenn sie sämtliche denselben Kegel berühren)

(2) $\frac{x}{h} = \frac{y}{r} \Rightarrow rx = hy$ (ähnliche Dreiecke $\triangle X_1MS$ und $\triangle AYM_1$)

(3) $y = \sqrt{z_1^2 - r^2}$ (Satz des Pythagoras)

(4) $z_1 + z_2 = \frac{\overline{M_1M_3}}{2} = \sqrt{2}r$ für Bild b) bzw. $z_2 - z_1 = \frac{\overline{M_1M_3}}{2} = \sqrt{2}r$ für Bild c) $\Rightarrow z_1 = \pm(\sqrt{2}r - z_2)$, wobei + im Fall b) und − im Fall c) gilt. Dann gilt aber in beiden Fällen: $z_1^2 = 2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2$

(5) $\frac{z_2}{x} = \frac{h-r}{h} \Rightarrow z_2 = \frac{h-r}{h} \cdot x$ (Strahlensatz)

Nun werden die Gleichungen (1) bis (4) ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned}
rx &= h \cdot \sqrt{z_1^2 - r^2} \\
rx &= h \cdot \sqrt{2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2 - r^2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + h^2z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h^2 \cdot z_2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x} \\
r^2x^2 &= h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= h^2r^2 + (h^2 - 2hr) \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= x^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{r \cdot (h-r)}{h-2r} \cdot x + \frac{hr^2}{h-2r} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \sqrt{\frac{2r^2 \cdot (h-r)^2}{(h-2r)^2} - \frac{hr^2}{h-2r}} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \frac{r}{h-2r} \cdot \sqrt{2 \cdot (h-r)^2 - h \cdot (h-2r)} \\
x_{1,2} &= \frac{r}{h-2r} \cdot \left(\sqrt{2}(h-r) \pm \sqrt{h^2 + 2r^2 - 2hr}\right)
\end{aligned}$$

Der Fall mit dem Plus vor der Wurzel stellt die Lösung für den Fall des Berührens der Kugeln von außen und das Minus für innen dar.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 3 - 051213
Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende "Siebenerregel":

Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.

Man untersuche, ob diese "Siebenerregel" richtig ist.

Nach der gegebenen Regel gilt, wenn a die letzte Ziffer von z bedeutet,

$$z - a = 10(z_1 + 2a),$$

also

$$z = 10z_1 + 21a.$$

Daher ist z genau dann durch 7 teilbar, wenn $10z_1$ es ist. Lässt nun z_1 den Rest r bei der Teilung durch 7, wobei $0 \leq r \leq 6$ gilt, so lässt z denselben Rest wie $10r$, und dieser Rest ist dann und nur dann Null, wenn $r = 0$ ist ($10p$ ist auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung genau dann durch 7 teilbar, wenn p durch 7 teilbar ist).

Die "Siebenerregel" ist also richtig. Ob sie allerdings schneller zum Ziel führt als die übliche Division durch 7, die bei Nichtteilbarkeit auch den Rest liefert, hängt von der Übung im Umgang mit der Regel ab.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 051214
Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:

Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?

b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, dass ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

a) Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z.B. o.B.d.A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten durch Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $n = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

Nehmen wir an, dass 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich dass 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

c) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{n} = \frac{8}{15} = 0{,}533...$$

Dieter hat also die größeren Gewinnchancen.

Übernommen von [5]

9.7.2 II. Runde 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051221
Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Mit den Standardbezeichnungen r für Radius, h für Höhe und A für Flächeninhalt bzw. V für Volumen wird:

a) $\frac{1}{3}A_{Kugel} = A_{Kappe} \to \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot h_{Kappe} = 2\pi \cdot r \cdot (r-h)$
Daraus ergibt sich wegen $r \neq 0$: $r - h = \frac{2}{3}r$ also $h = \frac{1}{3}r$

b) $\frac{1}{3}V_{Kugel} = V_{Sektor} \to \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (r-h) = \frac{4}{9}\pi \cdot r^3$
$h = \frac{1}{3}r$

Aufgabe gelöst von Caban

Aufgabe 2 - 051222
Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Jede nichtnegative ganze Zahl n lässt sich in genau einer der folgenden Formen darstellen:

$$n = 3k \qquad \text{oder} \qquad n = 3k+1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3k+2$$

Dabei ist k eine nichtnegative ganze Zahl. Für $n = 3k$ gilt:

$$z = 5^{3k} - 4^{3k} = (5^3)^k - (4^3)^k$$

Da $a^m - b^m$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m stets durch $(a-b)$ teilbar ist, ist $(5^3)^k - (4^3)^k$ durch $5^3 - 4^3 = 61$ teilbar.
Für $n = 3k+1$ gilt:

$$z = 5^{3k+1} - 4^{3k+1} = 5 \cdot 5^{3k} - 4 \cdot 4^{3k} = 5(5^{3k} - 4^{3k}) + 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z nicht durch 61 teilbar, da der Summand $5(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand 4^{3k} aber nicht.
Für $n = 3k+2$ gilt:

$$z = 5^{3k+2} - 4^{3k+2} = 25 \cdot 5^{3k} - 16 \cdot 4^{3k} = 25(5^{3k} - 4^{3k}) + 9 \cdot 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z ebenfalls nicht durch 61 teilbar, da der Summand $25(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand $9 \cdot 4^{3k}$ aber nicht.
Die Zahl $z = 5^n - 4^n$ ist also genau dann durch 61 teilbar, wenn n durch 3 teilbar ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 051223
Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x+a$ und $x-a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist, d. h., dass es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so dass $f(x) = f(x+kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.
b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Sei y beliebig und $x = y + a$. Dann ist

$$f(y+2a) = f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+f(y+b)}{1-f(y+b)} = \frac{1+\frac{1+f(y)}{1-f(y)}}{1-\frac{1+f(y)}{1-f(y)}} = ... = -\frac{1}{f(y)}$$

("..." steht für eine einfache algebraische Umformung.) Sei nun z beliebig und $y = z + 2a$. Dann ist

$$f(z+4a) = f(y+2a) = -\frac{1}{f(y)} = -\frac{1}{f(z+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(z)}} = f(z)$$

Folglich ist die Funktion 4a-periodisch.

b) $f(x) = \tan(x)$ mit $a = \pi/4$ erfüllt beide Bedingungen, wobei aus dem Definitionsbereich des Tangens zusätzlich $\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ entfernt werden muss.

2. Möglichkeit: Sei $f(x) = 2$ für $0 \leq x < 1$, , $f(x) = -3$ für $1 \leq x < 2$,$f(x) = -1/2$ für $2 \leq x < 3$, $f(x) = 1/3$ für $3 \leq x < 4$.
Setze diese Funktion 4-periodisch auf R fort. Für $a = 1$ ist die Funktionalgleichung erfüllt.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf und Kornkreis

Aufgabe 4 - 051224
Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist.

Es gelten folgende trigonometrische Beziehungen:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (2)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (3)$$

Damit gilt für die gegebene Gleichung mit (1) und (2):

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$
$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \qquad (4)$$

Fall 1: $\sin\frac{x+y}{2}=0 \Rightarrow \frac{x+y}{2}=k\pi \Rightarrow x+y=2k\pi; k\in\mathbb{Z}$
Fall 2: $\sin\frac{x+y}{2}\neq 0$ in (4) und mit (3):

$$\begin{aligned}\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}&=0\\ -2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}&=0\end{aligned}$$

Dieses Produkt ist dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:
Fall 2a: $\sin\frac{x}{2}=0 \Rightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
Fall 2b: $\sin\frac{y}{2}=0 \Rightarrow y=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Aufgabe wurde gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 5 - 051225
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und
b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1\leq x\leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Verschiebt man die Funktion um zwei Einheiten nach links ergibt sich:

$$f(x)=(x+1{,}5)\cdot(x+0{,}5)\cdot(x-0{,}5)\cdot(x-1{,}5)=(x^2-2{,}25)\cdot(x^2-0{,}25)$$

Man setze $f(x)=k$. Dadurch ergibt sich:

$$x^4-2{,}5x^2+0{,}5625-k=0$$

Bei lokalen Extremas müssen sich Mehrfachlösungen ergeben.

$$(x^2-1{,}25)^2=1+k$$

Fall 1: $(x^2-1{,}25)^2=0$: $k=-1$ Minimum Mehrfachlösung,
Fall 2: $x^2=0$: k=0,5625 Maximum

Im Intervall [1,4] gibt es vier Nullstellen, also 3 Intervalle an denen lokale Extremas liegen können. Es kann aus Symmetriegründen nur noch einmal das Maximum 0,5625 auftreten oder keins. Größere Werte kann es also im Bereich [1,4] nicht geben, da es nur drei lokale Extrempunkte geben kann.

Aufgabe gelöst von Caban

Aufgabe 6 - 051226
Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

Es ist möglich.
Wähle die Mittelpunkte zweier gegenüberliegende Kanten. Sei g die Gerade durch diese beiden Punkte. Die beiden Kanten und die Gerade g sind paarweise orthogonal zueinander.
Eine Parallelprojektion in Richtung g bildet die beiden Kanten auf ein symmetrisches Kreuz ab, welche die Diagonalen eines Quadrats bilden. Die übrigen vier Kanten werden auf die Seiten des Quadrats abgebildet.

9.7.3 III. Runde 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051231
Es ist zu beweisen, dass die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

$2^0 + 1 = 2$ ist nicht Kubikzahl. Für $n \geq 1$ ist die Zahl $2^n + 1$ ungerade.
Angenommen, $2^n + 1$ wäre Kubikzahl, so ist sie die dritte Potenz einer ungeraden Zahl, die sich in der Form $2k + 1$ darstellen lässt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Es gilt also

$$2^n + 1 = (2k + 1)^3 \qquad (1)$$

Da die Zahl $2^n + 1$ für $n = 1$ nicht Kubikzahl ist, muss man in (1) $n > 1$ und $k > 0$ annehmen. Nun folgt aus (1)

$$2^n + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 2^n = 2k(4k^2 + 6k + 3)$$
$$2^{n-1} = k(4k^2 + 6k + 3)$$

Der zweite Faktor der rechten Seite ist eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist. Diese Zahl müsste, da k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, Teiler von 2^{n-1} sein. Das ist aber wegen der Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit jeder natürlichen Zahl ≥ 2 in Primfaktoren nicht möglich.
Wir erhalten einen Widerspruch, also ist keine der Zahlen z der Form $2^n + 1$ Kubikzahl.

Übernommen aus [2]

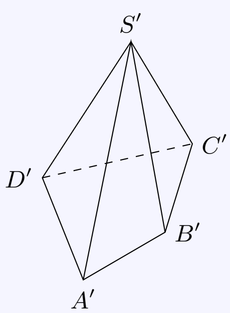
2. Lösung:
Gäbe es ein solches z, dass Kubikzahl wäre, so also auch eine natürliche Zahl k mit $2^n + 1 = k^3$ bzw. $2^n = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$.
Insbesondere wären sowohl $k - 1$ als auch $k^2 + k + 1$ Teiler einer Zweierpotenz und damit selbst Zweierpotenzen.
Wegen $k - 1 < k^2 + k + 1$ müsste $k - 1 | k^2 + k + 1$ folgen, was aber wegen $k^2 + k + 1 - (k-1)(k+2) = k^2 + k + 1 - (k^2 + k - 2) = 3$ auf $k = 1$ oder $k = 3$ führt. Jedoch sind weder $1^3 - 1 = 0$ noch $3^3 - 1 = 26$ Zweierpotenzen, sodass es keine solche Zahlen gibt.

Aufgabe gelöst von cyrix

3. Lösung:
Dies folgt einfach daraus, dass im Falle einer Gleichheit $2^n + 1 = k^3 \quad (k,n \in \mathbb{N})$ bei einer Division durch 7 die linke Seite dieser Gleichung einen Rest in $\{2,3,5\}$, die rechte aber einen Rest in $\{0,1,6\}$ ergeben würde, Widerspruch!

Aufgabe gelöst von weird

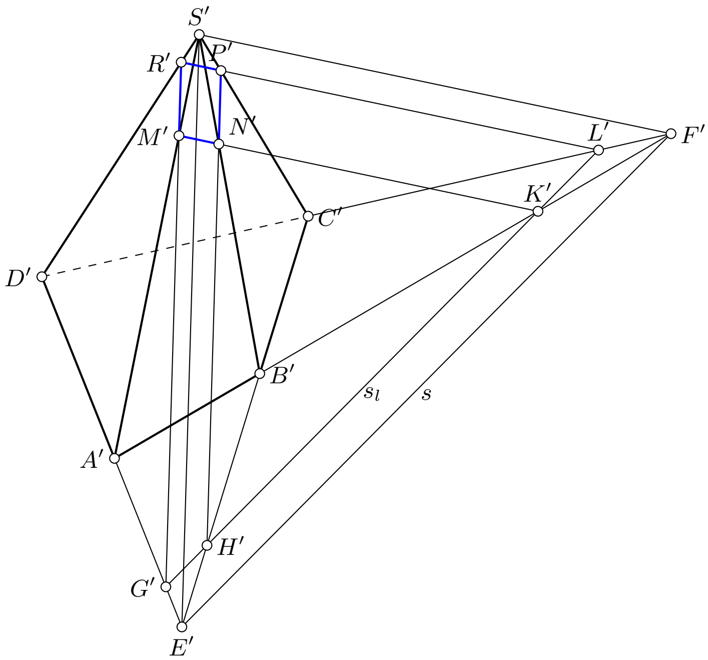
Aufgabe 2 - 051232
Die in der Abbildung im Grundriss gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, dass die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.



a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriss die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!
b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?
c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

a) Die Verlängerungen von DA und CB schneiden sich im Punkt E. Die Verlängerungen vin DC und AB schneiden sich im Punkt F. Die Spur der Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ sei s.

Jede Ebene, die parallel zur Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ verläuft und deren Spur s_l zwischen B (einschließlich B) und s liegt, schneidet aus der Pyramide ein Parallelogramm aus.
Die Seiten des Parallelogramms $MNPR$ sind paarweise parallel zu ES bzw. zu FS. LR und KM sind parallel zu FS; GR und HP sind parallel zu ES.



Der Konstruktion liegt folgender Satz zugrunde:
Wenn eine Ebene ϵ parallel zur Schnittgeraden zweier vorgegebener Ebenen verläuft und diese beiden Ebenen schneidet, so schneidet ϵ die vorgegebenen Ebenen in Geraden, die parallel zu s sind.

Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ADS$ und $\triangle BCS$ geht durch E uns S. Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ABS$ und $\triangle DCS$ geht durch F und S.
Da die Ebene mit der Spur s_l parallel zur Ebene ESF verläuft, sind GR und HP parallel zu ES, KM und LR parallel zu FS. Die Strecken GR, HP, KM und LR liegen in derselben Ebene und bestimmen somit das Parallelogramm $MNRP$.

b) Ist die Grundfläche ein Trapez, aber kein Parallelogramm, so liegt einer der Punkte E oder F im Unendlichen. Die Spuren s und s_l sind dann parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes. Zwei Seiten des gesuchten Parallelogramms sind dann ebenfalls parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes.

c) Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so schneidet jede zur Grundfläche parallele Ebene, die die Pyramide in mehr als einem Punkt trifft, diese in einem Parallelogramm.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 051233
a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.
b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Die Substitution $z := x - 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung dann erfüllt ist, wenn $af(z) + bf(-z) = c(z+1)$ (*) für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt.
Daher gilt auch $af(-z) + bf(z) = c(1-z)$ (**).

Multipliziert man (*) mit a und addiert das $-b$-fache von (**), erhält man

$$(a^2 - b^2)f(z) = ((a+b)z + a - b)c \qquad (***)$$

Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $a^2 - b^2 \neq 0$ und es folgt $f(z) = c(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b})$. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichung ist:

$$ac(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) + bc(\frac{-z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) = c(\frac{z(a-b)}{a-b} + \frac{a+b}{a+b}) = c(z+1)$$

Falls $a = b$, so ist (***) äquivalent zu $0 = acz$. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung nur dann eine Lösung haben kann, wenn $ac = 0$, also $a = 0 \vee c = 0$ ist.
Ist $a = 0$, so ist die Funktionalgleichung äquivalent zu $0 = cx$ ist. Einsetzen von $x = 1$ zeigt, dass $c = 0$ gelten muss.
Ist $a \neq 0$, aber $c = 0$, so ist (*) äquivalent zu $f(y) + f(-y) = 0$. In diesem Fall ist also jede ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $a = -b$ und $a \neq b$ (insbesondere also $a \neq 0$), dann zeigt (***), dass $0 = c$ gelten muss.
Damit ist (*) äquivalent zu $f(z) - f(-z) = 0$, was genau dann erfüllt ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Zusammenfassend gilt also:
Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $f(x) = c(\frac{x}{a-b} + \frac{1}{a+b})$ die einzige Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $|a| = |b|$ und $c \neq 0$, dann hat die Funktionalgleichung keine Lösung.
Falls $a = b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine ungerade Funktion ist.
Falls $a = -b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine gerade Funktion ist.
Falls $a = b = c = 0$ ist, dann erfüllen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 051234
Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ y_0 &= 0, \\ x_{n+1} &= x_n + 2y_n, \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}$$

für $n \geq 0$. Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung gilt:

$$x^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

Für $n = 0$ gilt die Aussage offenbar. Gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (x_n + 2y_n)^2 - 2(x_n + y_n)^2 = 2y_n^2 - x_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mit Induktion folgt die Aussage also für alle n.

Lösung von ZePhoCa

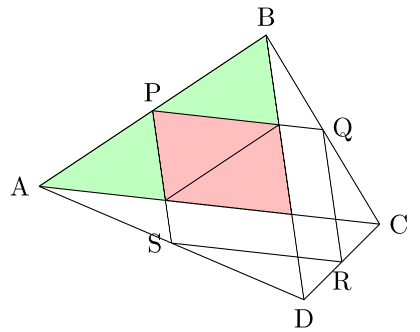
Aufgabe 5 - 051235
Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d. Man beweise, dass stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Vorbemerkung:
Falls $ABCD$ konkav ist, so erhalten wir durch "ausklappen"der konkaven Ecke ein konvexes Viereck, für die die Ungleichung ebenfalls gelten soll. Daher reicht es im folgenden nur ein konvexes Viereck zu betrachten. Gleichheit kann nur im nicht konkaven Fall auftreten.

Bestimmung des Flächeninhalts:
Seien P,Q,R,S die Seitenmittelpunkte der Seiten AB,BC,CD,DA, $e = |PR|, f = |QS|$ die Diagonalen des Vierecks $PQRS$.
Dann lässt sich über Strahlensätze $PQ||AC||RS$ und $QR||BD||SP$ zeigen, d.h. $PQRS$ ist ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}ef\sin(\epsilon)$, wobei ϵ den Winkel zwischen den Diagonalen bezeichnet.
Des Weiteren erhalten wir über Strahlensätze, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms genau halb so groß wie S ist, als $S = ef\sin(\epsilon)$ (Konvexität!). Insbesondere gilt $S = ef$ genau dann, wenn e und f orthogonal sind.



Die Ungleichung:
Als Vektoren betrachtet gilt: $\vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, insbesondere haben wir nach Anwendung der Dreiecksungleichung $e \leq \frac{a+c}{2}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn a und c parallel sind.
Alles zusammen:

$$S = ef\sin(\epsilon) \leq ef \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Nach den obigen Bemerkungen gilt $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ genau dann wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks parallel und orthogonal zu den benachbarten Seiten sind, d.h. wenn $ABCD$ ein Rechteck ist.

Quelle anonym

Aufgabe 6 - 051236
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$(1) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x \neq 0$$

$$(2) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = 0 \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x = 0$$

1) Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Daher reicht es im Induktionsschritt

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} + \sin(2n+1)x = \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin x}$$

bzw.

$$\sin^2 nx + \sin(2n+1)x \cdot \sin x = \sin^2(n+1)x$$

zu zeigen. Mit $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$ gilt:

$$\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx = \sin((2n+1)x) \cdot \sin x.$$

2) Aus $\sin x = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere habe alle nx dieselbe Gestalt.
Daher sind alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung 0.

Quelle anonym

9.7.4 IV. Runde 1965, Klasse 12

Aufgabe 1 - 051241
Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die $(a+b)^n = a^n + b^n$ gilt.

Die gegebene Gleichung gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

I. 1) $a = 0$, b beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
2) $b = 0$, a beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
II. $a) - b$, n ungerade,
III. $n = 1$, a,b beliebig reell.

Beweis: Dass die gegebene Gleichung in den genannten Fällen eine wahre Aussage wird, prüft man durch Einsetzen nach.
Jetzt wird gezeigt, dass die Gleichung in keinem anderen Fall erfüllt ist.
Angenommen, die gegebene Gleichung sei erfüllt und es liege keiner der angegebenen Fälle vor. Dann kann man aus Symmetriegründen o.B.d.A. annehmen, dass $|a| \geq |b|$, insbesondere also $a \neq 0$ ist.
Dividiert man beide Seiten der gegebenen Gleichung durch a^n, so erkennt man, dass

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

oder mit $x = \frac{b}{a}$

$$0 < |x| = \frac{|b|}{|a|} \leq 1 \qquad ; \qquad (1+x)^n = 1 + x^n$$

gelten müsste. Ist nun $x > 0$, so gilt

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + ... + x^n > 1 + x^n$$

denn da nicht der Fall III vorliegt, ist $n \geq 2$. Ist aber $n < 0$ und n gerade, so ist $(1+x)^n < 1$ und $1 + x^n > 1$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu (1).
Wir betrachten nun noch den letzten möglichen Fall $n = 2k+1 \geq 3$ (k natürliche Zahl), $x = -t$, $0 < t < 1$. Dann ist

$$(1+x)^n = (1-t)^n < 1 - t < 1 - t^n = 1 + x^n$$

im Widerspruch zu (1).

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 051242
An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren.
Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, dass es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, dass an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat.
Es wird vorausgesetzt, dass der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.

Anmerkung: Bei beiden Lösungen wird davon ausgegangen, dass eine endliche Anzahl von Damen und Herren vorliegt. Für unendliche Mengen gilt die zu zeigende Aussage im Allgemeinen nicht.

Im Folgenden bezeichne "Aussage" die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Aus den Voraussetzungen folgt, dass mindestens zwei Herren und zwei Damen anwesend waren, da sonst ein Herr mit allen Damen oder eine Dame mit allen Herren getanzt haben müsste.

Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl der Herren durch.
Für zwei Herren und beliebig viele (größer gleich 2) Damen ist die Aussage wahr.

Dazu schreiben wir die Tanzkonstellation in Matrixform und bezeichnen mit ”+” und ” dass ein Tanz stattgefunden bzw. nicht stattgefunden hat. Jede Spalte entspricht einem bestimmten Herren und jede Zeile einer bestimmten Dame, d.h. wir haben zwei Spalten und beliebig viele Zeilen. Falls die Aussage nicht wahr wäre, müsste die Konstellation die folgende Form haben

$$\begin{array}{cc} + & - \\ + & - \\ \dots & \\ + & - \end{array}$$

was aber bedeuten würde, dass ein Herr mit allen Damen getanzt hat (in diesem Fall sogar beide Herren).

Sei nun die Anzahl der Herren $n > 2$ und die Aussage bereits für $n-1$ Herren bewiesen. Wir betrachten eine Tanzkonstellation, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.
Falls man aus den n Herren $n-1$ Herren auswählen kann, für die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind (d.h. jeder dieser $n-1$ Herren hat mit mindestens einer Dame getanzt und jede der Damen mit einem dieser Herren, und niemand dieser Herren hat mit allen Damen getanzt und keine der Damen mit allen dieser Herren), so zeigt die Induktionsvoraussetzung die Aussage.

Wir betrachten nun den Fall, dass so eine Auswahl nicht existiert. Dies bedeutet in der Matrixschreibweise, dass man keine $n-1$ Spalten auswählen kann, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, d.h. in der Tanzkonstellation der n Herren gibt es eine Zeile, in der genau ein ”+” oder genau ein ”-” steht, o.B.d.A. sei dies genau ein Plus ganz rechts in der letzten Spalte (d.h. von der Form $--\dots--+$).

Nun muss aber in einer anderen Zeile ganz rechts ein Minus stehen (sonst hätte der entsprechende Herr mit allen Damen getanzt) und irgendwo anders in derselben Zeile ein Plus (sonst hätte die entsprechende Dame mit keinem Herren getanzt).
D.h. man hat z.B. das Schema

$$\begin{array}{ccc} - - & \dots & - - + \\ & \dots & \\ - + & \dots & + - - \end{array}$$

Die Damen, die diesen beiden Zeilen entsprechen und die Herren, die der ganz rechten Spalte und der Spalte mit dem Plus irgendwo anders (von der Zeile mit dem Minus ganz rechts) entsprechen, zeigen nun die Aussage.

Aufgabe wurde gelöst von Kornkreis

2. Lösung:
Sei d_1 eine Dame mit den meisten Tanzpartnern und h_1 ein Herr, mit dem d_1 nicht getanzt hat. d_2 sei eine Tanzpartnerin von h_1.
Dann gibt es einen Herrn h_2, mit dem d_1 aber nicht d_2 getanzt hat. (Denn sonst hätte d_2 mit allen Tanzpartnern von d_1 und zusätzlich mit h_1 getanzt, was der Maximalität von d_1 widerspricht.) d_1, d_2, h_1 und h_2 bilden ein Quartett, wie es laut Aufgabenstellung behauptet wird.

Aufgabe wurde gelöst von StrgAltEntf

3. Lösung:
Indiziere die Herren mithilfe einer Indexmenge I und bezeichne für jeden Herren $\alpha \in I$ die Menge der Damen, mit denen er getanzt hat, mit D_α.
Angenommen, die zu beweisende Aussage gilt nicht. Dann überlegt man sich, dass die Mengen D_α total geordnet bezüglich der Inklusion sein müssen, d.h. für beliebige $\alpha, \beta \in I$ muss $D_\alpha \subseteq D_\beta$ oder $D_\alpha \supseteq D_\beta$ gelten.
Betrachte nun $\cap_{\alpha \in I} D_\alpha$. Dies kann nicht die leere Menge sein, da jeder Herr mit mindestens einer Dame getanzt hat, und aufgrund der Totalordnungs-Eigenschaft der Mengen D_α (Edit: und unter der weiteren Annahme, dass beispielsweise I eine endliche Menge ist, da für unbeschränkte I der unendliche Schnitt durchaus leer sein kann).
Das bedeutet aber, dass es eine Dame gibt, die mit allen Herren getanzt hat, Widerspruch.

Aufgabe wurde gelöst von Kornkreis

4. Lösung:

Lösung: Laut Angabe hat jede Dame mindestens einen Tanzpartner(TP) und mindestens einen "Nichttanzpartner" (NTP). Gleiches gilt umgekehrt auch für die Herren. Bei Erfülltsein dieser beiden Bedingungen wollen wir eine Tanzrunde hier als "zulässig" bezeichnen. Des weiteren bezeichne ich im Folgenden einen Herrn als "redundant", wenn bei seiner Entfernung die verbleibende Tanzrunde noch immer zulässig ist.

Wir gehen nun die Herren einzeln durch und entfernen sie nacheinander aus der Tanzrunde, sofern sie redundant sind. Wegen der hier natürlich ebenfalls vorausgesetzten "Endlichkeit" der Tanzrunde muss man dabei irgendwann auf einen Herrn $H1$ stoßen, der nicht redundant ist, weil es eine Dame $D1$ gibt, welche ihn als einzigen TP oder NTP hat.

Sei nun $H1$ o.B.d.A. ein TP von dieser Dame $D1$. (Andernfalls müsste man im Folgenden einfach einen konsequenten Tausch TP $\leftrightarrow$ NTP vornehmen.) Ist dann $D2$ eine Dame, für welche $H1$ ein NTP ist, aber ein dann anderer Herr $H2$ ein TP, so ist Letzterer dann automatisch ein NTP von $D1$, da diese ja nur $H1$ als einzigen TP hat. Die Teilmenge $D1$,$D2$,$H1$,$H2$ der Tanzrunde ist daher ein Quartett mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 051243
Unter allen Strecken MN, die das Dreieck ΔABC in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Wir betrachten zunächst eine Strecke MN, deren Endpunkt M auf dem Strahl aus A durch B und deren Endpunkt N auf dem Strahl aus A durch C liegt und für die der Inhalt des Dreiecks AMN halb so groß ist, wie der Inhalt des Dreiecks ABC.
Die Strecke MN darf auch teilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks verlaufen. Setzt man $AM = x$ und $AN = y$, so ist nach einer bekannten Inhaltsformel der Flächeninhalt des Dreiecks AMN genau dann halb so groß wie der des Dreiecks ABC, wenn

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

also $2xy = bc$ gilt.
Bedeutet $d_a = MN$, so ergibt sich nach dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle AMN$

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\alpha) \\ &= (x-y)^2 + bc(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) \quad \text{also}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

Folglich ist

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}[a^2 - (b-c)^2] = (x-y)^2 + 2(s-b)(s-c)$$

mit $2s = a+b+c$. Unter Verwendung der Dreiecksformel $I_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ergibt sich somit

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{2I^2}{s(s-a)} \qquad (2)$$

Durch zyklische Vertauschung von (2) ergeben sich

$$d_b^2 = (x'-y')^2 + \frac{2I^2}{s(s-b)}; \quad d_c^2 = (x''-y'')^2 + \frac{2I^2}{s(s-c)} \qquad (3)$$

wenn x', y', x'', y'' die entsprechenden Abschnitte bei einer Strecke bedeuten, deren Endpunkte auf den von B bzw. C ausgehenden Strahlen liegen und d_b bzw. d_c die Längen dieser Strecken sind.

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $a \leq b \leq c$ ist. Dann gilt

$$\frac{2I^2}{s(s-a)} \leq \frac{2I^2}{s(s-b)} \leq \frac{2I^2}{s(s-c)}$$

und das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ bzw. $b = c$ ist. Hieraus und aus (2) und (3) ergibt sich, dass jede der Längen d_a, d_b, d_c nicht kleiner als

$$\frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}}$$

ist. Um zu zeigen dass

$$d = \frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

das gesuchte Minimum ist, genügt es zu zeigen, dass die für $x = y$ entstehende Strecke MN, deren Länge $d_a = d$ ist, nicht in das Äußere des Dreiecks eintritt.
Im Fall $x = y$ ergibt sich aus (1)

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

Da $a \leq b \leq c$ vorausgesetzt ist, gilt wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b \leq 2b$ und daher

$$\sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leq c$$

so dass jeder der Punkte M und N auf einer der Dreiecksseiten liegt.

Ist $a < b$, so gibt es genau eine kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$.
Ist $a = b < c$, so gibt es genau zwei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$ und $x' = y'$.
Ist $a = b = c$, so gibt es entsprechend drei kürzeste unter diesen Strecken, die für $x = y$, $x' = y'$ und $x'' = y''$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 051244
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \\
(**) \qquad & x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \\
& x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2 \\
& x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2
\end{aligned}$$

Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*) und (**) durch Subtraktion

$$x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_4 - x_3 = 0 \qquad \text{also} \qquad (x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

Da das Gleichungssystem bei jeder zyklischen Vertauschung der Indizes in sich übergeht, ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) &= 0 \qquad (1) \\
(x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) &= 0 \qquad (2) \\
(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) &= 0 \qquad (3) \\
(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) &= 0 \qquad (4) \\
(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) &= 0 \qquad (5) \\
(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) &= 0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn in jeder der Gleichungen wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

$$\begin{array}{ll} 1)\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 & 2)\ x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4 \\ 3)\ x_1 = x_2 \neq x_3; x_1 \neq x_4 & 4)\ x_i \neq x_k \text{ für } i \neq k \end{array}$$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zyklische Vertauschung des Indizes, da jedes Quadrupel, das aus einer Lösung durch zyklische Vertauschung der Indizes entsteht, ebenfalls Lösung ist und man jedes Quadrupel durch zyklische Vertauschung in einen der Fälle 1) bis 4) überführen kann.

1. In diesem Fall erhält man aus (*):

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_1^2 + \frac{x_1}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn

$$x_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad x_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass für

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$

das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

2. In diesem Fall erhält man wegen $x_3 \neq x_4$ aus (6):

$$x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad 2x_1 = 1 \quad ; \quad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ferner folgt aus (*):} \quad 3x_1^2 + x_4 = 2 \quad ; \quad x_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{5}{4}$ das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

3. In diesem Fall müsste wegen (2), (3), (4), (5)

$$x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + x_4 = x_1 + x_3 = 1 \qquad \text{also} \qquad x_3 = x_4$$

und wegen der aus (*) folgenden Beziehung $x_3 = 1 - x_1$

$$x_1^2 + 2x_1(1 - x_1) + 1 - x_1 = 2 \quad ; \quad x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$

gelten. Das ist aber auf Grund von

$$x_1^2 - x_1 + 1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

nicht möglich. In diesem Fall existiert also keine Lösung.

4. In diesem Fall folgt aus (1) und (2): $x_3 + x_4 = x_2 + x_4 = 1$, das ist aber wegen $x_1 \neq x_2$ unmöglich.

Das gegebene Gleichungssystem ist also für die Quadrupel

$$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right); \quad (-1,-1,-1,-1); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 051245
Man beweise, dass $\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt.

Zur Lösung werden die Sinus- und Kosinuswerte für $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ benutzt, welche sich als $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ schreiben lassen, wobei k beim Sinus die Werte von 0 bis 4 und beim Kosinus vom 4 bis 0 durchläuft. Zudem kann man wieder

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \text{und} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

nutzen sowie die Additionstheoreme

$$\sin(x-y) = \sin x\cos x - \cos x\sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

Damit:

$$\tan(7°30') = \frac{\sin(7°30')}{\cos(7°30')} = \frac{2\sin(7°30')\sin(7°30')}{2\sin(7°30')\cos(7°30')} = \frac{1-\cos(15°)}{\sin(15°)} = \frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)}$$

Und somit:

$$\frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)} = \frac{1-\cos(45°)\cos(30°)-\sin(45°)\sin(30°)}{\sin(45°)\cos(30°)-\cos(45°)\sin(30°)} =$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$$

Aufgabe von einem Mitglied des Matheplaneten gelöst

Aufgabe 6 - 051246

Man beweise den folgenden Satz:
Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).

Wähle einen Schnittkreis k einer Ebene mit der Fläche F (Schnittkreise existieren, weil F eine Fläche ist und somit mehr als einen Punkt enthält).
Nun betrachte die Ebenenschar E_t bestehend aus allen Ebenen e', die durch den Mittelpunkt von k gehen und senkrecht auf der Ebene von k stehen. Eine beliebige solche Ebene e' schneidet k in zwei (auf k gegenüberliegenden) Punkten.

Insbesondere schneidet e' also die Fläche F in zwei Punkten, sodass die Schnittfigur einen Kreis k' darstellt. Alle anderen Ebenen der Schar E_t schneiden nun k' in denselben zwei Punkten und sie schneiden k.
Man sieht leicht, dass die entsprechenden Schnittkreise alle denselben Mittelpunkt und Radius haben, sodass sie insgesamt eine Kugelfläche bilden.
Dies zeigt, dass eine Kugelfläche in F enthalten ist. Da die Ebenenschar E_t aber den ganzen Raum überdeckt und somit jeden möglichen Schnittpunkt mit der Fläche F enthalten muss, folgt, dass F in der Kugelfläche enthalten ist. Beides zusammen impliziert, dass F eine Kugelfläche ist.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

9.8 VI. Olympiade 1966

9.8.1 I. Runde 1966, Klasse 12

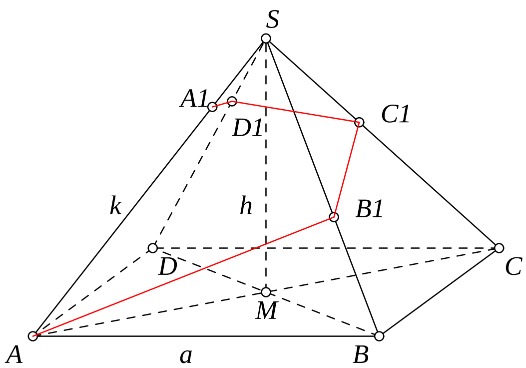
Aufgabe 1 - 061211
Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S liegt 140 m über dem Mittelpunkt M der Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 231 m. Wir wollen einmal annehmen, dass folgendes möglich ist:

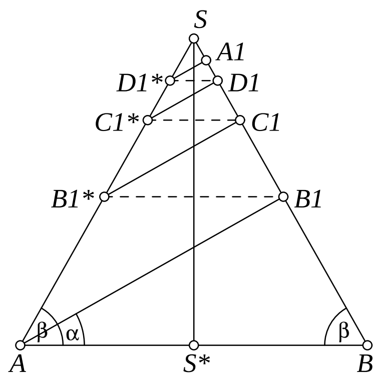
Ein Tourist besteigt die Pyramide derart, dass er von A ausgehend auf geradem Wege senkrecht zur Kante BS gelangt. Nachdem er diese Kante im Punkt B_1 erreicht hat, geht er weiter auf geradem Wege senkrecht zur Kante CS bis zu dieser Kante im Punkt C_1, von dort entsprechend weiter zum Punkt D_1 auf Kante DS und zum Punkt A_1 auf der Kante AS.

a) Wie lang wäre der von ihm von A bis zum Punkt A_1 zurückgelegte Weg?

b) In welcher Höhe über der Grundfläche befände sich der Tourist im Punkt A_1?

c) Welche Winkel würden die geraden Teilwege mit der Ebene der Grundfläche bilden?





- Aus der Höhe $h := \overline{MS} = 140$ m und der Länge der Grundfläche $a := \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 231m$ kann man leicht die Länge der Kanten $k := \overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ ausrechnen (die Dreiecke AMS und ABC sind rechtwinklig; dadurch kann jeweils der Satz des Pythagoras verwendet werden):

$$\begin{aligned} k = \overline{AS} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\right)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(a^2+a^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + h^2} = 215{,}13m \end{aligned}$$

Gesucht ist nun die Weglänge s (wobei $\gamma = \angle ASB$):

$$\begin{aligned} s &= \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1A_1} \\ &= \overline{AS}\sin\gamma + \overline{B_1^*S}\sin\gamma + \overline{C_1^*S}\sin\gamma + \overline{D_1^*S}\sin\gamma \\ &= \sin\gamma\cdot(k + \overline{B_1S} + \overline{C_1S} + \overline{D_1S}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \overline{B_1S} &= k\cdot\cos\gamma, \\ \overline{C_1S} &= \overline{B_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^2\gamma, \\ \overline{D_1S} &= \overline{C_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^3\gamma. \\ \overline{A_1S} &= \overline{D_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^4\gamma. \end{aligned}$$

Setzt man dies ineinander ein, erhält man:

$$s = k \cdot \sin\gamma \cdot (1 + \cos\gamma + \cos^2\gamma + \cos^3\gamma). \tag{8}$$

Nun stellen wir fest, dass die Dreiecke ABB_1 und AS^*S zueinander ähnlich sind (beide sind rechtwinklig und haben den Winkel β gemeinsam: $\beta = \angle BAS = \angle ABS$). Damit lässt sich $sin\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\sin\alpha = \overline{AS^*} : \overline{AS} = a : 2k$$

($\Rightarrow \alpha = 32{,}47°$). Und für $cos\alpha$ ergibt sich mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgendes:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - a^2 : 4k^2}$$

$\sin\gamma$ lässt sich aus $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ ausrechnen (mit dem Sinussatz): $\sin\gamma : sin\beta = \overline{AB} : \overline{AS} = a : k$, wobei $\sin\beta = \cos\alpha$ gilt, also:

$$\sin\gamma = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{1 - a^2 : 4k^2} \tag{9}$$

Analog ergibt sich für $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4k^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2} + \frac{a^4}{4k^4}} \tag{10}$$

Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein erhält man das Ergebnis, dass der Tourist 327 m zurücklegen muss. Zur Kontrolle seien die Teilstrecken auch angegeben: $\overline{AB_1} = 195m$, $\overline{B_1C_1} = 83m$, $\overline{C_1D_1} = 35m$, $\overline{D_1A_1} = 15m$.

- Für die gesuchte Höhe h_a gilt mit den Bezeichnungen aus dem 1. Bild: $h_a : h = \overline{A_1A} : \overline{AS}$. Daraus folgt nun:

$$h_a = h \cdot \frac{\overline{A_1A}}{k} = \frac{h \cdot (k - \overline{A_1S})}{k} = \frac{h \cdot (k - k \cdot \cos^4\gamma)}{k} = h \cdot (1 - \cos^4\gamma) = 135{,}50m$$

- Die geraden Teilwege bilden mit der Grundfläche alle denselben Winkel. Dazu wird die Höhe analog zur vorigen Teilaufgabe bzgl. B_1 benötigt:

$$h_b = h \cdot \frac{\overline{B_1B}}{k} = \frac{h \cdot (k - \overline{B_1S})}{k} = \frac{h \cdot (k - k \cdot \cos\gamma)}{k} = h \cdot (1 - \cos\gamma) = 80{,}70m$$

  Nun kann der Sinus des gesuchten Winkels wie folgt ausgedrückt werden:

$$\epsilon = \arcsin\left(h_b : \overline{AB_1}\right) = \arcsin\left(\frac{h \cdot (1 - \cos\gamma)}{k \cdot \sin\gamma}\right)$$

  Man erhält nach Einsetzen: $\epsilon = 65{,}5°$.

Aufgabe gelöst von Gerd Wachsmuth

Aufgabe 2 - 061212
In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, dass keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:
   (1.) Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.
   (2.) Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller (voneinander verschiedenen) Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

Da man in der Aufgabenstellung die Worte "rot" und "blau" miteinander vertauschen kann, ohne die Aufgabe zu ändern, genügt es, alle Behauptungen für die roten Strecken zu beweisen.

a) 1. Die gegebenen Punkte seien A, B, C, D, E. Nimmt man an, dass von Punkt A drei rote Strecken, z.B. B, AC, AD ausgehen, so müssten die Strecken BC, DB, CD blau sein, da sonst ein "rotes" Dreieck entstehen würde (Bild 1).

   Dann entstünde aber ein "blaues" Dreieck, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also können von jedem Punkt höchstens zwei rote und daher auch höchstens zwei blaue Strecken ausgehen. Da von jedem Punkt genau vier Strecken ausgehen müssen, gehen von jedem Punkt genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus, falls die Bedingungen überhaupt realisierbar sind.

2. Es seien z.B. die Strecken AB und AC rot, die Strecken AD und AE blau. Dann ist BC blau und DE rot (Bild 2).

   Da vom Punkt D zwei rote Strecken ausgehen, ist DC entweder rot oder blau. Ist DC rot, dann ist CE blau, BE rot, BD blau. In diesem Falle ergeben sich die geschlossenen gleichfarbigen Streckenzüge $ACDEBA$ (rot) und $AECBDA$ (blau), vgl. Bild 2. Ist CD jedoch blau, so erhält man die folgenden gleichfarbigen Streckenzüge $ACEDBA$ (rot) und $ADCBEA$ (blau), vgl. Bild 3.

b) Betrachten wir nun o.B.d.A. die vier von A ausgehenden Strecken! Es gibt für sie genau $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Möglichkeiten, genau zwei von ihnen rot zu färben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es auf Grund der Überlegungen unter a) 2. genau zwei paarweise voneinander verschiedene Verbindungsschemata. Daher gibt es genau 12 verschiedene Realisierungen der Aufgabe.

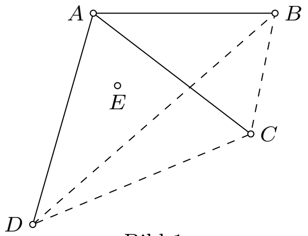


Bild 1

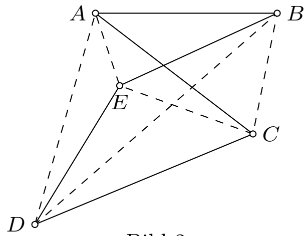


Bild 2

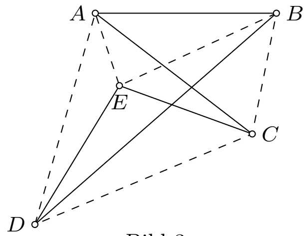


Bild 3

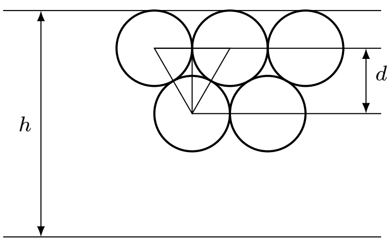
Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 061213

In einer quaderförmigen Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln von 1 cm Durchmesser einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.

Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!

Neben der Möglichkeit, 100 Kugeln zu je 10 in 10 Reihen zu legen, gibt es auch die Möglichkeit, in einer Reihe 10 Kugeln, in der nächsten 9 Kugeln, dann wieder 10 Kugeln u.s.w. unterzubringen. Dabei ist der Abstand d der Geraden durch die Mittelpunkte der ersten von der zweiten Kugelreihe $d = r \cdot \sqrt{3}$, wobei r der Kugelradius ist; denn der Abstand der Geraden durch die Mittelpunkte ist gleich der Länge einer Höhe eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte dreier benachbarter Kugeln sind (siehe Bild). Ein derartiges Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $2r$.



Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Kugelreihen, so gilt für den Abstand h der Tangentialebenen bei der oben beschriebenen Anordnung der Kugeln

$$h = 2r + (n-1)r\sqrt{3}.$$

Für $n = 11$ folgt $\left(\text{wegen } r = \frac{1}{2}\right)$ $h < 10$.

Man kann daher 11 Reihen in der Schachtel unterbringen. Die Kugeln lassen sich so anordnen, dass 6 Reihen mit je 10 und 5 Reihen mit je 9 Kugeln besetzt sind, also 105 Kugeln in der Schachtel liegen. Dabei liegen in den 'äußeren' Reihen jeweils 10 Kugeln. Ersetzt man nun eine der Reihen zu 9 Kugeln durch eine mit 10 Kugeln, so vergrößert sich der Abstand

$$h = 2r + r(11-1)\sqrt{3} = 1 + 5\cdot\sqrt{3}$$

auf

$$h' = 6r + 8r\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} < 3 + 4\cdot 1{,}74 = 9{,}96.$$

Da $h' < 10$ ist, lassen sich 106 Kugeln in der Schachtel unterbringen. Die Behauptung ist also richtig.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 061214
Geben Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen an, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!

a) Es ist x^n für $x \geq 10$ und $n \geq 1$ eine mindestens $(n+1)$-stellige Zahl, weil $x^n = 10^n + s$ mindestens $(n+1)$-stellig ist. Daher kommen als Lösung nur solche Zahlen in Frage, deren Quersumme $x < 10$ ist.

b) Ist x^n eine k-stellige Zahl, so ist $x^{n+1} = x^n \cdot x$ wegen $x < 10$ höchstens $(k+1)$-stellig.

c) Im Fall $n = 1$ erhält man für x^n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

d) Im Fall $n \geq 2$ sei $r \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl, für die x^r eine höchstens $(r-1)$-stellige Zahl ergibt. Dann können wir uns auf die Betrachtung der Zahlen x^2, x^3, ..., x^{r-1} beschränken.

   Für x=0, 1, 2, 3 ist $r = 2$, also gibt es für diese Quersummen keine derartigen Zahlen mit $n \geq 2$.

   Da ferner alle Potenzen von 4 auf 4 oder 6, alle Potenzen von 5 auf 5 und alle Potenzen von 6 auf 6 enden und bei $n \geq 2$ außer dieser Endziffer mindestens noch eine von Null verschiedene Ziffer vorkommen muss, kann es auch für x=4, 5 und 6 keine derartigen Zahlen geben.

   Man braucht daher nur zu untersuchen, ob es für x=7, 8 oder 9 solche n-stelligen Zahlen x^n gibt, deren Quersumme gleich x ist.

   Es sei x=7.

   Wegen (immer mod 10): $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$ braucht man nur die Potenzen der Form 7^m mit $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Nun ist $7^3 = 343$ (Quersumme $x > 7$), $7^4 = 2401$ (Quersumme $x = 7$), $7^7 = 823543$ (sechsstellig) und 7^m weniger als m-stellig für $m > 7$. Also ist $7^4 = 2401$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 7.

   Es sei x=8.

   Wegen (immer mod 10): $8^2 \equiv 4$, $8^3 \equiv 2$, $8^4 \equiv 6$, $8^5 \equiv 8$ braucht man nur die Potenzen der Form 8^m mit $m \equiv 2 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Wegen

$$n \lg 8 < n \cdot 0{,}904 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 11$$

   ist 8^n für $n \geq 11$ höchsten $(n-1)$-stellig. Daher bleiben noch folgende Fälle zu untersuchen:

   $8^2 = 64$ (Quersumme $x > 8$),

   $8^3 = 512$ (Quersumme $x = 8$),

   $8^4 = ...096$ (Quersumme $x > 8$),

   $8^6 = ...144$ (Quersumme $x > 8$),

   $8^7 = ...152$ (Quersumme $x > 8$),

   $8^8 = ...216$ (Quersumme $x > 8$), $8^{10} = ...824$ (Quersumme $x > 8$).

(Es genügt eine Betrachtung der letzten drei Stellen.) Also ist $8^3 = 512$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 8.

Es sei x=9.

Wegen (immer mod 10): $9^2 \equiv 1$, $9^3 \equiv 9$ braucht man nur alle Potenzen der Form 9^{2m} mit m=1,2,3,... zu betrachten. Analoge Überlegungen wie im Falle $x = 8$ ergeben: Wegen

$$n \lg 9 < n \cdot 0{,}9544 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 22$$

ist 9^n eine höchstens $(n-1)$-stellige Zahl. Es bleiben also zu untersuchen übrig:

$9^2 = 81$ (Quersumme $x = 9$),

$9^4 = 6561$ (Quersumme $x > 9$),

$9^6 = ...1441$ (Quersumme $x > 9$),

$9^8 = ...6721$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{10} = ...4401$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{12} = ...6481$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{14} = ...4961$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{16} = ...1841$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{18} = ...9121$ (Quersumme $x > 9$),

$9^{20} = ...8801$ (Quersumme $x > 9$).

(Es genügt die Betrachtung der letzten 4 Stellen.) Also ist $9^2 = 81$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 9. Die gesuchten Zahlen sind also für

$n = 1$: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$n = 2$: 81

$n = 3$: 512 $n = 4$: 2401

Für $n \geq 5$ gibt es keine derartigen Zahlen.

Übernommen von [5]

9.8.2 II. Runde 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061221
Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$$

Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:
1. $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)
2. $\sin(180° - x) = \sin x$
3. $\cos(180° - x) = -\cos x$
4. $\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos(180°-\alpha-\beta)}{\sin(180°-\alpha-\beta)} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (mit (1), (2) und (3))
5. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ (Additionstheorem)
6. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ (Additionstheorem)

Damit ergibt sich für die Ausgangsgleichung mit (4), (5) und (6):

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \left(-\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}\right) + \left(-\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

...

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta \cdot (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = 1$$

Das Kürzen ist problemlos möglich, da $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Winkel in einem nicht-entarteten Dreieck sind.

Aufgabe wurde gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 2 - 061222
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS) gegeben. Es ist zu zeigen, dass man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, dass ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Es wird ein reiner Existenzbeweis gegeben, dass es solche Geraden gibt, keine explizite Konstruktion dieser.

Es sei $0 \leq \alpha < 180°$ ein Winkel. Wir betrachten nun diejenige Gerade p, die mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt (bzw. im Fall $\alpha = 0$ parallel zu dieser ist) und durch P verläuft, sowie die dazu parallele Gerade q durch Q. Dann variiert in Abhängigkeit von α der Abstand $d_p(\alpha)$ dieser beiden Parallelen zwischen 0 (falls $PQ = p = q$ gilt) und $|PQ| > 0$ (falls p und q senkrecht auf PQ stehen).

Zu p werden nun die Orthogonalen r durch R und s durch S betrachtet. Wieder gilt, dass der Abstand $d_r(\alpha)$ dieser beiden Parallelen r und s in Abhängigkeit von α zwischen 0 (falls $RS = r = s$ gilt) und $|RS| > 0$ (falls r und s senkrecht auf RS stehen) variiert.

Ändert man stetig den Winkel α, so verändern sich auch stetig die Abstände $d_p(\alpha)$ von p und q sowie $d_r(\alpha)$ von r und s. Diese Abstände können nicht gleichzeitig Null werden, da in diesem Fall wegen $p \perp r$ auch $PQ = p$ und $RS = r$ senkrecht aufeinander stünden, was nach Aufgabenstellung nicht der Fall ist.

Sei o.B.d.A. der Winkel α_1, an dem $d_p(\alpha_1) = 0$ ist, kleiner als der Winkel α_2, für den der Abstand $d_r(\alpha_2) = 0$ wird. Dann gilt für die Differenz $d_p(\alpha) - d_r(\alpha)$ für $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, dass sie an der linken Intervallgrenze negativ, an der rechten positiv und dazwischen stetig ist, es also eine Stelle α_0 geben muss, an welcher diese Differenz Null wird und die beiden Paare von Parallelen den gleichen Abstand zueinander haben. Da die nicht-parallelen Geraden nach Konstruktion orthogonal zueinander sind, bilden die vier Schnittpunkte dieser Geraden die Eckpunkte eines Quadrats.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 061223
Beweisen Sie folgende Behauptung! Ist $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch

$$p = a_1^5 + a_2^5 + .. + a_n^5$$

durch 30 teilbar. ($a_1, a_2, ..., a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Es genügt zu zeigen, dass $p - s$ durch 30 teilbar ist. Mit $p - s$ ist auch $p = (p - s) + s$ durch 30 teilbar.
Es ist

$$p - s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + ... + (a_n^5 - a_n)$$

Da für alle k ($k = 1,2,...,n$)

$$d_k = a_k^5 - a_k = a_k(a_k - 1)(a_k + 1)(a_k^2 + 1) \qquad (1)$$

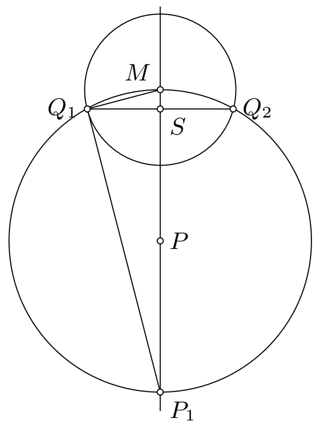
gilt, und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, d.h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

Ebenfalls kann man zeigen, dass jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.
Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv \pm 1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (1) $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist, so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d.h. $a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ und daher $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Folglich ist bei beliebigem ganzzahligen a_k das entsprechende d_k durch 5 teilbar.
Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit neben $p - s$ auch p durch 30 teilbar.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 061224
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.
Beweisen Sie, dass I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!



Der Radius von K_1 sei r. Man lege eine Ebene ϵ durch M und P (Abbildung). Der Schnittkreis k von K_1 und K_2 schneidet ϵ in zwei Punkten Q_1, Q_2. Der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt.
P_1 sei der von M verschiedene Schnittpunkt von PM und K_2. Dann ist I der Flächeninhalt der auf K_2 liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge MS hat. Da MP der Radius von K_2 ist, gilt

$$I = \pi \cdot 2 \cdot |MP| \cdot |MS|$$

Da das Dreieck MQ_1P_1 nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz:

$$MQ^2 = 2|MP| \cdot |MS|$$

Mithin erhält man

$$I = \pi \cdot |MQ_1|^2 = \pi r^2$$

womit gezeigt ist, dass I nicht von der Lage des Punktes P abhängt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 061225
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r+s\sqrt{p})^n + (r-s\sqrt{p})^n}{2}, \quad v = \frac{(r+s\sqrt{p})^n - (r-s\sqrt{p})^n}{2\sqrt{p}}, \quad t = r^2 - s^2 p, \quad z = u^2 - t^n$$

a) u und v sind natürliche Zahlen.
b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

zu a) Nach dem binomischen Satz ist

$$(r + s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

und analog

$$(r - s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

Addiert man nun die beiden Summen, so ergänzen sich die jeweiligen Summanden mit ungeradem $n-k$ zu 0, während die mit geradem $n-k$ in beiden Summen erhalten bleiben und identisch sind. In diesen Fällen erhält man also jeden Summanden doppelt, wobei diese aufgrund des geraden Exponenten von $s\sqrt{p}$ selbst natürliche Zahlen sind. Damit ist der Zähler eine gerade natürliche Zahl und auch nach der Division durch Zwei damit v eine natürliche Zahl.

Analog heben sich bei der Subtraktion die jeweiligen Summanden mit geradem $n-k$ weg, während für diejenigen mit ungeradem $n-k$ sich der doppelte Wert ergibt. In jedem solchem Summanden ist $\sqrt{p}$ in ungerader Potenz enthalten, lässt sich also als geradzahliges, natürliches Vielfaches von $\sqrt{p}$ darstellen, sodass nach der Division durch $2\sqrt{p}$ eine natürliche Zahl v verbleibt.

zu b) Es ist

$$u^2 = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n} + 2 \cdot ((r+s\sqrt{p})(r-s\sqrt{p}))^n}{4} = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n}}{4} + \frac{t^n}{2}$$

und analog

$$v^2 = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n}}{4} - \frac{t^n}{2}$$

also $z = u^2 - t^n = v^2$, was natürlich direkt $v^2|z$ beweist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 061226

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem (1)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
Als "Koeffizienten" seien hier sowohl die auf der "linken Seiten" stehenden "Vorzahlen" der Variablen als auch die "absoluten Glieder" auf den "rechten Seiten" bezeichnet.
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

a) Addition des doppelten der ersten zur zweiten Gleichung liefert $8x+5y+4z = 4$, woraus mit der dritten Gleichung $z = 0$ folgt. setzt man dies ein und zieht vom Doppelten der ersten Gleichung die zweite ab, erhält man $y = 0$ und schließlich $x = \frac{1}{2}$. Damit ist $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ das einzige Lösungstripel, was auch durch die Probe bestätigt wird.

b) Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem nur dann, wenn es eine Kombination der Gleichungen gibt, die sich zu $0 = 0$ reduziert. (Die Gleichungen sind linear abhängig.) Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Es gibt eine reelle Zahl k, sodass das k-fache der ersten Gleichung, die zweite ergibt. Daraus ergibt sich folgende Beziehung: $2k = 4$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde, oder $k = 2$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.
Da mindestens eine dieser beiden Fälle eintreten muss, ist $k = 2$. Damit muss aber das Doppelte des Koeffizienten von y in der ersten Gleichung dem Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung entsprechen, sodass entweder der Koeffizient von y in der ersten Gleichung auf $-\frac{1}{2}$, oder der von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ abgeändert werden muss.
In der ersten Variante hat das Gleichungssystem nun die Form

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2}y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion des Doppelten der zweiten von der dritten Gleichung) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der zweiten Variante hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion der dritten Gleichung vom doppelten der zweiten) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall: Es gibt reelle Zahlen k und ℓ, sodass die Summe des k-fachen der ersten und ℓ-fachen der zweiten Gleichung die dritte ergibt. Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$2k + 4\ell = 8$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde,
$3k - \ell = 5$, falls kein y-Koeffizient geändert wurde,
$k + 2\ell = 4$, falls keine rechte Seite verändert wurde und schließlich
$k + 2\ell = 3$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.

Da nicht sowohl einer der x-Koeffizienten als auch eine der rechten Seiten modifiziert worden sind, gilt in jedem Fall $k+2\ell = 4$. Dies widerspricht aber der Bedingung, die eintreten würde, wenn kein z-Koeffizient verändert werden würde. Also kann nur durch die Änderung eines dieser Koeffizienten der Variablen z ein Gleichungssystem konstruiert werden, welches unendlich viele Lösungen hat.

Insbesondere bleiben neben den x-Koeffizienten auch die y-Koeffizienten unangetastet und es ergibt sich zusammen $k = 2$ und $\ell = 1$. Die summe aus dem doppelten der ersten Gleichung und der zweiten Gleichung muss also die dritte ergeben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten, den Koeffizient von z in je einer der drei Gleichungen anzupassen:
In der ersten Variante setzt man in der ersten Gleichung den Koeffizienten von z auf $\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t\right) \middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ besitzt.
In der zweiten Variante ändert man den Koeffizienten von z in der zweiten Gleichung auf $3 - 2 \cdot 1 = 1$ ab und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t\right) \middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ besitzt.
Und schließlich in der dritten Variante wird der Koeffizient von z in der dritten Gleichung auf $2 \cdot 1 + 2 = 4$ gesetzt, sodass man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

erhält, welches die Lösungen $\{ (t, 0, 1 - 2 \cdot t) |\, t \in \mathbb{R}\}$ besitzt.

Insgesamt hat man also fünf verschiedene Möglichkeiten je einen der Koeffizienten des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems anzupassen, so dass das jeweilige neue Gleichungssystem dann unendlich viele Lösungen hat.

c) Man ändere den Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ und die rechte Seite der zweiten Gleichung auf 0 ab. Dann erhält man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 0 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

wobei aus der ersten Gleichung $4x+6y+2z = 2 \neq 0$ folgt, was der zweiten Gleichung widerspricht. Damit hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.8.3 III. Runde 1966, Klasse 12

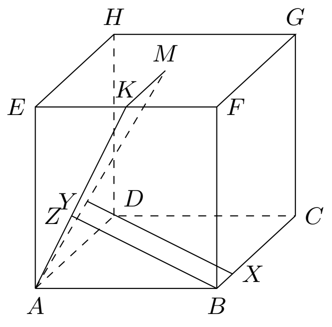
Aufgabe 1 - 061231
In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n > 2$) so verteilt, dass es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Die größtmögliche Anzahl ist 5.
Um dies zu zeigen, nehmen wir zuerst an, es gäbe 6 Punkte P_1 bis P_6, deren nächstgelegener Punkt jeweils der von ihnen alle verschiedene Punkt Q sei.
O.B.d.A. seien die Punkte so bezeichnet, dass die von P_i nach Q verlaufenden Vektoren bei einem in mathematisch positiver Orientierung erfolgenden Umlauf um Q in aufsteigender Reihenfolge getroffen werden.

Definieren wir für eine einfachere Notation noch zusätzlich $P_7 := P_1$, dann zerlegen nun also die 6 Winkel $\angle P_iQP_{i+1}$ den Vollwinkel bei Q. Demzufolge ist mindestens einer unter diesen höchstens 60° groß, o.B.d.A. sei dies $\angle P_1QP_2$. Dann ist einer der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle P_1QP_2$ mindestens so groß, sei dies o.B.d.A. $\angle QP_1P_2$.
Da aber dem größeren Innenwinkel in einem Dreieck immer auch die größere Seite gegenüberliegt, ist dann auf jeden Fall die Strecke $\overline{P_2Q}$ mindestens so lang wie die Strecke $\overline{P_1P_2}$, also der Punkt P_1 höchstens so weit entfernt von P_2 wie Q.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, der eindeutig bestimmte nächstgelegene Punkt zu P_2 wäre Q gewesen. Also können höchstens 5 Vektoren in einem Punkt ankommen.
Dass dies auch wirklich möglich ist, zeigt die Konstellation eines regelmäßigen Fünfecks sowie seines Mittelpunkts. Dann führt die eben durchgeführte Überlegung in jedem Fall dazu, dass die Verbindungsstrecke zweier "benachbarter" Eckpunkte immer länger ist als die jeweiligen Radien. (Und die übrigen Diagonalen sind sowieso noch länger.)

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 061232
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand der Geraden BC und AM?
Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.



Zunächst bemerkt man, dass AM und BC windschief zueinander sind, weil AM mit ϵ_{ABC} nur den Punkt A gemeinsam hat und folglich die in ϵ_{ABC} gelegene, A nicht enthaltende Gerade BC weder schneidet noch zu ihr parallel ist (Abbildung).
Daher gibt es genau ein Punktepaar (X,Y) mit $X \in BC, Y \in AM$, für das $|XY| = d$ gilt, wenn d den zu berechnenden Abstand von BC und AM bezeichnet. Dabei gilt außerdem

$$XY \perp AM \quad (1) \qquad ; \qquad XY \perp BC \quad (2)$$

Die Ebenen ϵ_{ADM} und ϵ_{BCY} schneiden sich in einer Y enthaltenden Geraden g. Wegen

$$BC \parallel AD \quad (3) \qquad \text{ist} \qquad BC \parallel g \quad (4)$$

Andernfalls hätte nämlich g mit BC einen Schnittpunkt, der auch gemeinsamer Punkt von ϵ_{ABC} und ϵ_{ADM} wäre und damit auf AD läge, was (3) widerspricht.
Aus (2), (3), (4) folgt $g \perp XY$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (1) wegen $g \neq AM$: $XY \perp \epsilon_{ADM}$ (5).
Bezeichnet Z den Schnittpunkt der Parallelen zu XY durch B mit ϵ_{ADM}, so ist $BZ \perp \epsilon_{ADM}$ wegen (5), insbesondere also $BZ \perp AZ$ (6) und $|XY| = |BZ|$.
Denn im Fall $X \neq B$ ist $BXYZ$ ein Parallelogramm, während in dem (übrigens nicht eintretenden) Fall $X = B$ außerdem $Y = Z$ wäre.
Wegen $BZ \parallel XY$, (2) ist $BZ \perp BC$. Somit liegt Z in der auf BC senkrechten Ebene ϵ durch B, die eine Seitenfläche des Würfels enthält, deren Rand das Quadrat $ABFE$ ist. Die Ebene ϵ_{ADM} schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Aufgrund der Bedeutung von M und K ist nämlich $MK \parallel AD$, so dass MK in ϵ_{ADM} liegt.
Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist dann $\angle AKE = \angle KAB$. Hieraus folgt wegen $Z \in AK$, $AE \perp EK$ und (6) nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle AEK \sim \triangle AZB$ und damit

$$AZ : BZ = KE : AE = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad AZ = \frac{1}{2}BZ \quad (7)$$

Wegen (6) ist $\triangle AZB$ rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so dass aufgrund des Lehrsatzes des Pythagoras und (7)

$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = a^2 - \frac{1}{4}BZ^2 \qquad \text{also} \qquad BZ = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

gilt. Mithin ist

$$d = XY = BZ = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 061233
Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sind sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$, und damit auch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

allesamt positiv, also auch $f(x)$.
Für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist zwar weiterhin $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ und damit auch $\tan x$ und $\cot x$ negativ. Wegen $0 > \cos x > -1$ ist $\frac{1}{\cos x} < -1$, also $\tan x < -\sin x$ und damit

$$f(x) < \sin x + \cos x - \sin x + \cot x = \cos x + \cot x < 0$$

Positive Werte nimmt f also nur auf dem ersten Intervall an. Dort betrachten wir nun die zwei Funktionen

$$f_1(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

Damit ist wegen $\tan x > 0$ direkt $f_2(x) \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $\tan x = 1$, also $x = \frac{\pi}{4}$ als einzigem Wert im betrachteten Intervall, angenommen wird.
Für die Analyse von f_1 betrachten wir deren Ableitungsfunktion $f_1'(x) = \cos x - \sin x$, welche im betrachteten Intervall wieder nur genau für $x = \frac{\pi}{4}$ verschwindet. Da in diesem Intervall die Kosinus-Funktion streng monoton fallend und die Sinus-Funktion streng monoton steigend ist, ist auch f_1' streng monoton

fallend und nimmt demnach für Argumente x kleiner als $\frac{\pi}{4}$ positive, und für größere Argumente negative Werte an.
Demzufolge ist die Funktion f_1 im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{4}$ streng monoton wachsend und im Intervall $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend. Also ist

$$f_1(x) \geq f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

wobei Gleichheit nur für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird.
Zusammen ergibt sich also

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \sqrt{2} + 2$$

wobei Gleichheit genau für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird. Es ist also $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte, kleinste positive Wert, den f im betrachteten Intervall annimmt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 061234
Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$$

genügen.
Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist $\left[\frac{13}{2}\right] = 6$, $[-6{,}5] = -7$ und $[6] = 6$.

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0 derart, dass

$$\left[\frac{5+6x_0}{8}\right] = \frac{15x_0-7}{5}$$

gilt. Dann ist

$$\frac{15x_0-7}{5} \leq \frac{5+6x_0}{8} < \frac{15x_0-7}{5} + 1$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x_0 - \frac{28}{5} \leq \frac{5}{2} + 3x_0 < 12x_0 - \frac{8}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{41}{10} < 9x_0 \leq \frac{81}{10}$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x_0-7}{5} \leq \frac{13}{10}$$

Da $\frac{15x_0-7}{5}$ ganz ist, folgt weiter, dass entweder $\frac{15x_0-7}{5} = 0$ oder $\frac{15x_0-7}{5} = 1$ gilt. Hieraus ergibt sich $x_0 = \frac{7}{15}$ bzw. $x_0 = \frac{4}{5}$.
Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt man, dass diese beiden Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = \frac{7}{15}$ und $x = \frac{4}{5}$ und keine weiteren.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 061235
Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, ..., n$ nebeneinander aufgestellt.
Ein Umordnungsbefehl besteht darin, dass jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, ..., n-1$ entsteht.

Eine mögliche Variante lautet wie folgt:
1. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu $n+1$ ergänzen, tauschen die Plätze. (Ist $n+1$ gerade, so bleibt der Schüler mit Nr. $\frac{n+1}{2}$ an seinem Platz stehen.)

2. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu n ergänzen, tauschen Plätze. (Der Schüler mit Nr. n und, falls existent, der Schüler mit Nr. $\frac{n}{2}$ bleibt/ bleiben stehen.)

Durch den ersten Umordnungsbefehl befindet sich der Schüler mit Nummer k nach dessen Ausführung auf der Position $n+1-k$, da er mit dem Schüler dieser Nummer getauscht hat. (Ist n+1 gerade, so hätte nur der Schüler mit Nummer $k = \frac{n+1}{2}$ keinen Tauschpartner. Aber er soll ja dann auch stehen bleiben und befindet sich genauso an der entsprechenden Position $n+1-k = \frac{n+1}{2} = k$.)

Tauscht nun im zweiten Umordnungsbefehl der Schüler mit Nummer ℓ den Platz mit dem Schüler mit Nummer $n-\ell$, so befand sich jener zweiter nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-(n-\ell) = \ell+1$.
Der Schüler mit Nummer ℓ ist also durch beide Umordnungsbefehle nun an die Position $\ell+1$, also einen Platz nach rechts gerutscht. Einzige hierbei noch nicht betrachtete Schüler sind diejenigen, die beim zweiten Umordnungsbefehl stehen bleiben.
Das ist einerseits der Schüler mit Nummer n. Dieser steht nach dem ersten Umordnungsbefehl auf Position $n+1-n = 1$, also ganz vorn, und bleibt da auch – wie gewünscht – stehen. Und zweitens, falls n gerade ist, der Schüler mit Nummer $\frac{n}{2}$.
Dieser befand sich nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}+1$, war also gegenüber der Ausgangsanordnung schon um einen Platz nach rechts gerückt. Bleibt er beim zweiten Umordnungsbefehl nun stehen, ist er schon an der gewünschten Position.

Damit ist gezeigt, dass nach Ausführung dieser beiden Umordnungsbefehle aus der Start-Anordnung die gewünschte Zielanordnung erreicht wird.

Aufgabe von cyrix gelöst

Aufgabe 6 - 061236
Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Mit $x = 10°$, $X_1 = \sin(x)$ und $\sin(3x) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$ folgt, dass $X_1 = \sin(10°)$ Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2} = 3X - 4X^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 8X^3 - 6X + 1 = 0$$

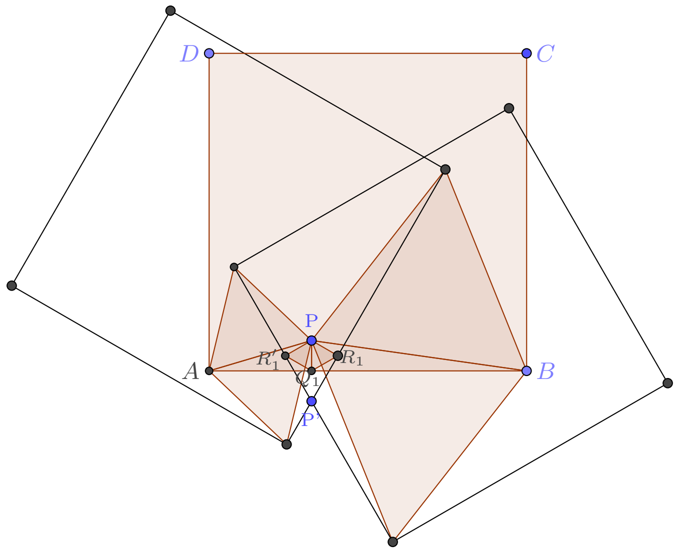
ist.
Da $\sin(30°) = \sin(390°) = \sin(750°)$ ist, erfüllen auch $X_2 = \sin(x_2)$ und $X_3 = \sin(x_3)$ mit $x_2 = \frac{390°}{3} = 130°$ und $x_3 = \frac{750°}{3} = 250°$ diese Gleichung.
Offensichtlich sind $X_1 = \sin(10°)$, $X_2 = \sin(130°) = \sin(50°)$ und $X_3 = \sin(250°) = \sin(-70°)$ paarweise verschieden, da die Sinus-Funktion streng monoton steigend im Intervall $[-90°, 90°]$ ist. Also stellen X_2 und X_3 die gesuchten weiteren Lösungen der angegebenen Gleichung dar.

Aufgabe von cyrix gelöst

9.8.4 IV. Runde 1966, Klasse 12

Aufgabe 1 - 061241
In einer Ebene ϵ seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ϵ, für die das Dreieck ΔPQR gleichseitig ist!

Die Menge der Punkte R entspricht den Rändern des Quadrates $ABCD$ nach Drehung um den Punkt P um 60° sowie −60°, was aus der folgenden Zeichnung ersichtlich wird.



Beweis (skizziert):
Da es für die zwei stets nicht-identischen Punkte P, Q in der Ebene immer genau zwei gleichseitige Dreiecke gibt (PQR und PQR'), betrachten wir im Folgenden nur den Punkt R, der sich auf einer bestimmten Seite von PQ befindet (d.h. wir schließen Sprünge von R zu R' aus).
Man begründet leicht, dass sich R genau dann auf einer Geraden bewegt, wenn sich Q auf einer Geraden bewegt, da die Änderung von Winkel und Länge von PQ identisch für PR ist. Außerdem folgt, dass sich R auf einer Strecke bewegt, die aus der Drehung von AB um den Winkel 60° um P hervorgeht, wenn sich Q auf AB bewegt (analog für die anderen vier Seiten).
In den Übergängen zwischen zwei Seiten, wenn Q seine Richtung um 90° ändert, ändert auch R seine Richtung um 90° (mit der gleichen Orientierung). Insgesamt folgt daraus die obige Behauptung.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 061242
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge "F_n" genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, ..., z_n$ existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, ..., z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, .., z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.
Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ...\}$ oder $\{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, ..., x_{mt}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < ...$

Beantworten Sie folgende Fragen:
a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?
b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

a) Nein, denn
b) Mit vollständiger Induktion beweisen wir im Folgenden, dass für $n \geq 1$ immer eine Folge F_n der Länge $2n-1$ existiert und diese Länge maximal ist. Für $n=1$ ist dies klar. Sei nun $n>1$ beliebig und die Behauptung für $F_1,...,F_{n-1}$ bewiesen.
Betrachte die Folge

$$F = z_1, S_1, z_1, S_2, ..., z_1, S_r, z_1$$

wobei S_i ($i \in \{1,...,r\}, 1 \leq r < n$) die Folgeglieder einer Folge von Zahlen aus $\{z_2,...,z_n\}$ bezeichne, welche die Bedingungen (3) und (4) der Aufgabenstellung erfüllt.
Wie man leicht sieht, erfüllt die obige Folge F genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die S_i paarweise disjunkt sind und die Gesamtheit der S_i alle Zahlen außer z_1 beinhaltet.

Es ist klar, dass die Länge von F maximal ist, wenn jedes S_i maximale Länge hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann die Länge von F gleich $(r+1)+2(s_1+...+s_r)-r$, wobei s_i die Anzahl der verschiedenen Zahlen in S_i bezeichnet und $r+1$ die Anzahl der z_1 in F ist.
Es ist $s_1+...+s_r = n-1$ und folglich ist die Länge von F gleich $2n-1$.

Die Folge F ist optimal: Eine beliebige Folge F_n startet o.B.d.A. mit z_1. Falls danach nicht noch mal z_1 auftritt, können nach z_1 nur noch $2(n-1)-1$ Zahlen folgen (nach Induktionsvoraussetzung), die Länge wäre also nur $1+2(n-1)-1 = 2n-2$.
In einer Folge maximaler Länge kommen also mindestens zwei z_1 vor. Keine der Zahlen z_i, die zwischen zwei nächstgelegenen z_1 stehen, dürfen später noch einmal vorkommen, da man sonst eine Teilfolge $\{z_1,z_i,z_1,z_i\}$ hätte. Diese Bedingungen werden von der Folge F aber allgemein erfüllt, sodass die Länge $2n-1$ optimal ist und die Behauptung bewiesen.

Lösung von Kornkreis

Aufgabe 3 - 061243
Man beweise folgenden Satz:
Ist $n>2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1,...,a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i_1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

Beweis:
Zuerst normieren wir via $b_i := \frac{a_i}{s}$ die zu zeigende Ungleichung, denn sie geht durch Kürzen der Brüche mit s äquivalent über in $\sum_{i=1} \frac{b_i}{1-b_i} \geq \frac{n}{n-1}$, wobei die b_i weiterhin positive reelle Zahlen sind, die aber nun zusätzlich $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ erfüllen.

Setzen wir $\lambda_i := b_i$ und $f(x) := \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, so können wir die linke Seite der Ungleichung auch schreiben als $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$, wobei natürlich weiterhin alle λ_i positiv sind und ihre Summe 1 ergibt. Da

$$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} > 0 \qquad \text{und}$$

$$f''(x) = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3} > 0$$

für alle $0 < x < 1$ ist, und da alle b_i aus diesem Intervall $(0;1)$ stammen, können wir die Jensensche-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Es ist das quadratische Mittel q der b_i definiert als

$$q := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n}}$$

und ihr arithmetisches Mittel a als

$$a := \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} = \frac{1}{n}$$

Nach der Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel ist $q \geq a = \frac{1}{n}$, also

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} = q^2 \cdot n \geq \frac{1}{n}$$

Da f monoton wachsend ist, folgt damit

$$f\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

und insgesamt das zu zeigende. q.e.d.

Bemerkung: Aufgrund der strengen Monotonie und da die Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischen Mittel nur für Gleichheit aller b_i und damit aller a_i untereinander Gleichheit liefert, wird auch nur dann in der zu zeigenden Ungleichung der Gleichheitsfall angenommen.

Lösung von cyrix

Aufgabe 4 - 061244
Gegeben ist eine natürliche Zahl $n > 3$. Es sei $V = P_1P_2...P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\Delta P_kP_lP_m$ (wobei P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

Wir unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.
Seien also P_k, P_l und P_m die Eckpunkte des Dreiecks im Uhrzeigersinn. Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck $P_kP_lP_m$ genau dann einen rechten Winkel in P_l hat, wenn P_l auf dem Halbkreis über der Strecke zwischen P_k und P_m liegt (Satz des Thales).

Wir fordern nun, dass der gewünschte stumpfe Winkel in P_l liegt. Dieses ist offensichtlich der Fall, wenn P_l und P_k auf einem Kreisbogen liegen, der weniger als die Hälfte des Umkreises vom regelmäßigen n-Eck einnimmt. Zunächst legen wir also einen beliebigen Punkt P_k fest. Dafür haben wir in beiden Fällen n Möglichkeiten.

1. Fall: Sei n gerade.

   Wir suchen nun die beiden fehlenden Punkte mit obiger Forderung. Zählen wir $\frac{n}{2}$ Punkte von P_k weiter und setzen den Punkt P_m, so hat jedes Dreieck in P_m einen rechten Winkel. Wir können also die fehlenden 2 Punkte für das stumpfe Dreieck aus $\frac{n}{2} - 1$ auswählen.

2. Fall: Sei n ungerade.

   Zeichnen wir den Durchmesser durch P_k, so liegen in diesem Fall genau $\frac{n-1}{2}$ Eckpunkte auf jedem Halbkreis. Davon können wir wieder 2 beliebig auswählen.

Sei $A(n)$ die Gesamtanzahl der stumpfwinkligen Dreiecke, erhalten wir somit:

$$A(n) = \begin{cases} n\binom{\frac{n}{2}-1}{2} & , n \text{ gerade} \\ n\binom{\frac{n-1}{2}}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten

Alternative Lösung:

Ist das $\triangle P_kP_lP_m$ stumpfwinklig, so ist genau ein Winkel größer als 90°; dieser sei bei P_l. Der Kreisbogen von P_k nach P_m, der P_l enthält, ist kleiner als der halbe Umfang. Andererseits bilden je drei Punkte, die auf einem Kreisbogen kürzer als der halbe Umfang liegen, ein stumpfwinkliges Dreieck. Also ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl von Möglichkeiten, drei der Punkte derartig auszuwählen.

Für die Auswahl des "ersten" Punktes P_k gibt es n Möglichkeiten, da alle n Punkte in Betracht kommen. Für jede Auswahl von P_k kann dann für P_l und P_m jede Auswahl von 2 Punkten aus den Punkten $P_{k+1}, P_{k+2}, ...; P_{k+\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ verwendet werden, wobei wir in dieser Liste $P_{n+i} \equiv P_i$ $(i = 1, ..., n)$ setzen. Also ist

$$n \cdot \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2} = n \cdot \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1\right) = \frac{1}{2}n \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{8}n(n-1)(n-3) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{8}n(n-2)(n-4) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

die gesuchte Gesamtanzahl aller Möglichkeiten.

Übernommen von [12]

Aufgabe 5 - 061245
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$.

Zu lösen ist

$$5x + 2y + z = 10n \quad (\star)$$

Betrachten wir die kleinste natürliche Zahl. Sei also $n = 1$. Dann suchen wir also die nichtnegativen Lösungen für $5x + 2y + z = 10 \iff 2y + z = 10 - 5x$.
Offensichtlich kann x also nur die Werte 0,1,2 annehmen. Für $x = 0$ kann z die Werte 10,8,6,...,0 annehmen. Für $x = 1$ kann z die Werte 5,3,1 annehmen und für $x = 2$ kann z nur den Wert 0 annehmen.
Wir erhalten also insgesamt $6 + 3 + 1 = 10$ Lösungen.

Nun setzen wir in $(\star)$ mal $x \mapsto x - 2$. Wir erhalten:

$$5(x-2) + 2y + z = 10n \iff 5x + 2y + z = 10(n+1) \quad (\square)$$

Sei nun $A(n+1)$ die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen von $(\square)$. Dann ist $A(n+1) - A(n)$ gleich die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen für $x = 0$ und $x = 1$ in $(\square)$.

1. Fall: Sei $x = 0$; $2y + z = 10n + 10$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 5$ und somit erhalten wir $5n + 6$ Lösungen.
2. Fall: Sei $x = 1$; $5 + 2y + z = 10n + 10 \iff 2y + z = 10n + 5$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 2$ und somit erhalten wir $5n + 3$ Lösungen.

Es gilt somit $A(n+1) - A(n) = 10n + 9$ sowie $A(1) = 10$. Rekursiv können wir also $A(n)$ berechnen.

$$(A(n) = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k+9) = 10 + 9(n-1) + 10\frac{(n-1)n}{2} = 5n^2 + 4n + 1$$

Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösung:
Offenbar gibt es für jedes $0 \leq x \leq 2n$ und jedes $0 \leq y \leq \frac{10n-5x}{2}$ genau ein $0 \leq z = 10n - 5x - 2y$.
Es ist also die Summe

$$A(n) = \sum_{x=0}^{2n}\left(1 + \left[\frac{10n-5x}{2}\right]\right) = 2n + 1 + \sum_{x=0}^{2n}\left[\frac{10n-5x}{2}\right]$$

zu bestimmen.
Für $x = 2n$ erhalten wir in der zweiten Summe den Wert 0. Alle übrigen Summanden erhält man, indem man für x entweder $2k$ oder $2k + 1$ einsetzt, wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchläuft.
Also ist

$$A(n) = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{10n - 5\cdot 2k}{2}\right] + \left[\frac{10n - 5\cdot(2k+1)}{2}\right]\right) =$$

$$= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}(5(n-k) + 5(n-k) - 3) = 2n + 1 - 3n + 10\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) =$$

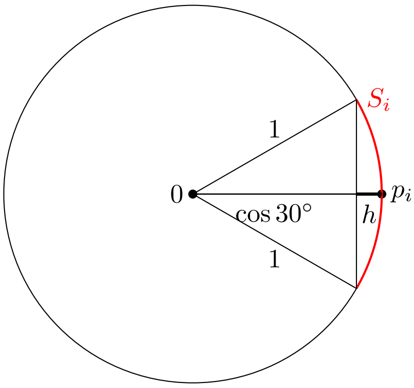
$$= 1 - n + 10\sum_{\ell=1}^{n}\ell = 1 - n + 10\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = 1 - n + 5n^2 + 5n = 5n^2 + 4n + 1$$

Lösung von cyrix

Aufgabe 6 - 061246
Man beweise folgenden Satz:
Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, ..., n$; $n > 2$, so im dreidimensionalen Raum, dass jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

Wir legen alle Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei o.B.d.A. $Q = 0$ sei.
Nach Annahme ist in jedem der Dreiecke P_iP_jQ die Seite P_iP_j am längsten. Insbesondere schließen also die Vektoren P_i und P_j einen Winkel von mindestens 60° ein.
Daher genügt es zu zeigen: Wenn n paarweise verschiedene Vektoren $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ paarweise miteinander Winkel von jeweils mindestens 60° einschließen, dann gilt $n < 15$.
Da der Winkel zwischen zwei Vektoren nicht von der Länge der Vektoren sondern nur von deren Orientierung abhängt, können wir für den Beweis dieser neuen Behauptung sogar o.B.d.A. annehmen, dass $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf der Einheitskugel liegen.

Es sei für $i = 1, \ldots, n$ die Menge $S_i \subset \mathbb{R}^3$ definiert als die Menge derjenigen Punkte auf der Einheitskugel, deren Ortsvektor mit p_i einen Winkel kleiner als 30° einschließen.



Die S_i sind Kugelsegmente der Höhe $h = 1 - \cos(30°) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und haben somit eine Mantelfläche von $2\pi h = (2 - \sqrt{3})\pi$.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass diese Kugelsegmente paarweise disjunkt sind, also $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Da die Oberfläche der Einheitskugel 4π ist muss somit gelten $(2 - \sqrt{3})\pi n \leq 4\pi$, also

$$n \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + \sqrt{48} < 8 + 7 = 15.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

9.9 VII. Olympiade 1967

9.9.1 I. Runde 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071211
Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jeder der vier gibt über diese Zahl die folgenden drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11fache der Zahl ist kleiner als 1000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12fache der Zahl ist größer als 1000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?

Zur Abkürzung bezeichnen wir die gegebenen Auskünfte mit A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 u.s.w. Wir untersuchen zunächst die Auskünfte C_1, C_2, C_3. Von ihnen ist mindestens eine wahr und mindestens eine falsch. Es ergeben sich also die in der folgenden Tafel aufgeführten sechs Fälle, wobei jeweils zur Abkürzung eine wahre Aussage mit W und eine falsche mit F bezeichnet wird:

	1	2	3	4	5	6
C_1	W	W	W	F	F	F
C_2	W	F	F	W	W	F
C_3	F	W	F	W	F	W

1. Sind C_1 und C_2 wahr, so ist die gedachte Zahl z eine durch 7 teilbare Primzahl, also $z = 7$. Dann ist auch C_3 wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Sind C_1 und C_3 wahr und ist C_2 falsch, so ist z eine nicht durch 7 teilbare Primzahl und $z > 20$. Dann sind die Auskünfte B_1, B_2 und B_3 sämtlich falsch, was der Voraussetzung widerspricht, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

3. Ist C_1 wahr und sind C_2 und C_3 falsch, so ist z Primzahl und $z \geq 20$. Dann sind A_1 und A_2 falsch, also A_3 wahr, d.h. $11z < 1000$, $z \leq 90$. Daher sind ferner B_1 und B_2 falsch, also B_3 wahr, d.h. $12z > 1000$, $z \geq 84$.

   Nun ist unter den Zahlen 84, 85, ..., 90 nur die Zahl 89 eine Primzahl, es ist also $z = 89$. Man überzeugt sich zum Abschluss davon, dass dann D_1 wahr und D_2 und D_3 falsch sind, dass also alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Sind C_2 und C_3 wahr und ist C_1 falsch, so ist $z = 14$. Dann sind D_1, D_2 und D_3 falsch, so dass dieser Fall nicht eintreten kann.

5. Ist C_2 wahr und sind C_1 und C_3 falsch, so ist $z \geq 20$ und z durch 7 teilbar. Dann sind aber D_1, D_2, D_3 falsch, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

6. Sind C_1 und C_2 falsch und ist C_3 wahr, so ist $z < 20$, z nicht Primzahl und nicht durch 7 teilbar. Dann sind B_2, B_3 falsch und B_1 wahr, also $z = 10$.

   Dann sind D_1, D_2, D_3 wahr, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

Daher entspricht nur der 3. Fall allen gestellten Bedingungen. Die zu ermittelnde Zahl ist 89.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 071212
Die Rentabilität des Einsatzes von Rohbraunkohle oder Braunkohlenbriketts wird auch durch die Transportkosten beeinflusst. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten (in M je Mill. kcal) einschließlich der Transportkosten für Rohbraunkohle bzw. Braunkohlenbriketts, und zwar für Transportentfernungen von 0 km, 100 km und 200 km.

Transportentfernung	Kosten in M je Mill. kcal	
in km	Rohbraunkohle	Braunkohlenbriketts
x	y	z
0	4,0	8,0
100	8,6	9,2
200	12,1	10,0

Allgemein lassen sich die Kosten für die Entfernungen bis etwa 400 km durch eine Funktion vom Typ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ darstellen.

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in beiden Fällen! Entscheiden Sie, für welche Transportentfernungen bis 400 km der Einsatz von Rohbraunkohle billiger ist!

(a) Ermittelt werden sollen die Kostenfunktionen $f_1(x)$ für Rohbraunkohle und $f_2(x)$ für Braunkohlenbriketts. Für Rohbraunkohle gelten die Beziehungen:

$$f_1(0) = 4$$
$$f_1(100) = \frac{43}{5}$$
$$f_1(200) = \frac{121}{10}$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_1(x) = 4 + \frac{103}{2000}x - \frac{11}{200000}x^2$$

Für Braunkohlebriketts gelten die Beziehungen:

$$f_2(0) = 8$$
$$f_2(100) = \frac{46}{5}$$
$$f_2(200) = 10$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_2(x) = 8 + \frac{7}{500}x - \frac{1}{50000}x^2$$

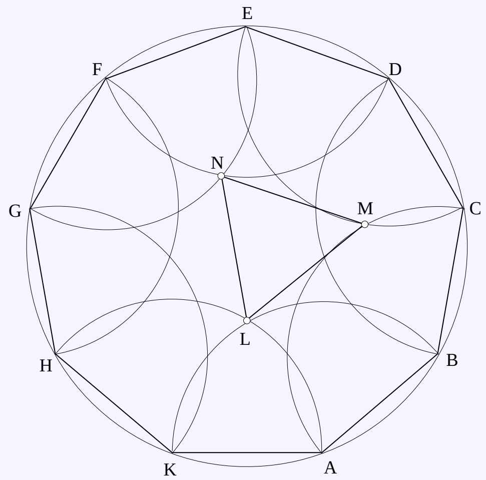
(b) Gesucht sind die Entfernungen, in denen Rohbraunkohle günstiger ist und umgekehrt. Die markanten Entfernungen sind die, für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat die positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{3750 - 50\sqrt{3385}}{7} \approx 120 \quad \text{und}$$
$$x_2 = \frac{3750 + 50\sqrt{3385}}{7} \approx 951$$

Bei rund 120 km sind beide Preise gleich (der zweite Wert entfällt, da er außerhalb der zu betrachtenden 400 km Entfernung liegt). In der Tabelle steht, dass bei 0 km die Rohbraunkohle billiger sei, also ist bis zu einer Entfernung von etwa 120 km Rohbraunkohle vorzuziehen, während danach Braunkohlebriketts billiger werden.

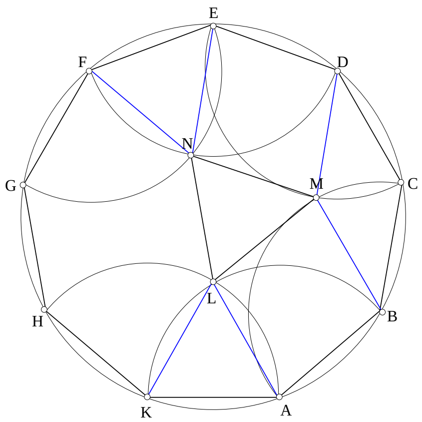
Aufgabe gelöst von Daniel Gutekunst

Aufgabe 3 - 071213



Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit seinem Umkreis.
Um die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H und K dieses Neunecks sind in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise Kreisbögen gezeichnet, deren Radien ebenso lang wie die Neuneckseiten sind.

Untersuchen Sie, ob die in der Figur mit L, M und N bezeichneten Schnittpunkte dieser Kreisbögen Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind!



Sei $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots$ die Kantenlänge des regelmäßigen Neunecks, und sei S_{XY} der Schnittpunkt der Kreisbogen um X und Y mit dem Radius a. Ferner beträgt jeder Innenwinkel $\frac{7}{9} \cdot 180° = 140°$.

Es ist $M = S_{BD}$, also $a = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{BC} = \overline{DC}$. Damit ist $BCDM$ ein Rhombus und $\angle BMD = \angle BCD = 140°$.

Es ist $N = S_{FE}$ und $L = S_{KA}$, woraus die gleichseitigen Dreiecke $\triangle NFE$ und $\triangle LKA$ entstehen. Insbesondere ist $a = \overline{AL} = \overline{EN}$.

Im Rhombus gilt $\angle MBC = \angle MDC = (360° - 2 \cdot 140°)/2 = 40°$. Damit ist $\angle MDE = \angle MBA = 100°$. Außerdem ist $\angle LAB = \angle NED = 140° - 60° = 80°$.

Die Strecken $\overline{AL}$ und $\overline{BM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch A und B haben. Die Strecken $\overline{EN}$ und $\overline{DM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch E und D haben.

Es folgt, dass $EDMN$ und $ABML$ kongruente Rhomben sind, insbesondere ist $\overline{ML} = \overline{MN}$. Ebenfalls folgt $\angle LMB = \angle NMD = \angle LAB = \angle NED = 80°$. Schließlich ist dann $\angle LMN = 360° - \angle LMB - \angle NMD - \angle BCD = 60°$.

Daraus folgt, dass $\triangle LMN$ gleichseitig ist (was zu zeigen war).

Aufgabe gelöst von Daniel Gutekunst

Aufgabe 4 - 071214
Zur Verfügung stehen eine Holzkugel, ein Zirkel, mit dem man sowohl auf einer (genügend groß gedachten) ebenen Fläche als auch auf der Kugeloberfläche zeichnen kann, Bleistift, ein starr geradliniges (ohne Längenskale) Lineal und (ebenes) Zeichenpapier.

Man konstruiere den Radius der Holzkugel!

Man kann die Kugel zunächst auf einem Blatt (auf dem der Radius zu konstruieren ist) positionieren.

Danach kann man das Lineal senkrecht zum Boden an die Kugel heranstellen (ein Lineal hat rechte Winkel) und am unteren Ende des Lineals mit dem Bleistift eine Markierung machen. Das wiederholt man noch 2 mal mit anderen Punkten an der Kugel.

Nun hat man auf dem Papier 3 Punkte, die auf dem größten in die Kugel passenden Kreis liegen. Verbindet man die 3 Punkte, erhält man ein Dreieck, bei dem man wiederum den Umkreis (selber Radius wie Kugel) konstruieren kann.

Man verbindet also die 3 Punkte mit dem Lineal und konstruiert mit dem Zirkel die 3 Mittelsenkrechten, deren Schnittpunkt der Umkreismittelpunkt ist. Man nimmt nun diesen Mittelpunkt und einen Eckpunkt des Dreiecks in die Zirkelspanne und kann sie auf eine Gerade abtragen und erhält so den Radius.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, den Zirkel an einen beliebigen Punkt der Kugel zu halten und mit dem anderen Zirkelende so lange auf der Kugel entlangwandert, bis dieses gerade noch so an der Kugel anliegt und bei weiterem "Wandern" in beliebiger Richtung die Kugeloberfläche verlassen würde. Dann hat man den Kugeldurchmesser in der Zirkelspanne.

Diese beiden Verfahren sind recht ungenau. Man kann auch mit folgendem Verfahren vorankommen, indem die Kugel als Kreis auf die Papierfläche projiziert werden soll:

1. Man wählt einen beliebigen Punkt B auf der Kugeloberfläche
2. Es wird ein Kreis k um B auf der Kugeloberfläche gezeichnet. Die Zirkelspanne sei dabei r_1. Achtung: der gezeichnete Kreis hat nicht den Radius r_1!
3. Auf dem Blatt wird eine waagerechte Linie w gezeichnet, auf der ein Punkt B^* festgelegt wird. Um B^* wird ein Kreis mit dem Radius r_1 gezeichnet.
4. Nun wird auf dem Kreis k auf der Kugel ein beliebiger Punkt A gewählt. Den Durchmesser d_k dieses Kreises kann man mit dem Zirkel ermitteln, indem man ihn in A sticht und den maximalen Abstand sucht.
5. Mittels einer Grundkonstruktion auf dem Papier kann d_k halbiert werden.
6. Auf w wird eine Senkrechte konstruiert und von dem Schnittpunkt $\frac{d_k}{2}$ jeweils nach unten und nach oben abgetragen. Es entsteht eine Strecke, die so lange auf w parallelverschoben wird, bis sie den Kreis mit dem Radius r_1 trifft. Einer dieser Schnittpunkte sei A^* genannt.
7. Abschließend wird die Mittelsenkrechte von A^* und B^* konstruiert. Ihr Schnittpunkt mit w heiße M^*. Die Strecke $\overline{B^*M^*}$ bzw. $\overline{A^*M^*}$ entspricht nun dem Radius der Kugel.

Aufgabe gelöst von Felix Kaschura

9.9.2 II. Runde 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071221
Es seien x_k und y_k ganzrationale Zahlen, die die Bedingungen $0 \leq x_k \leq 2$ und $0 \leq y_k \leq 2$ erfüllen.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von Pk bedeuten!
Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 genau dann als gleich, wenn jede Ecke von Δ_1 auch Ecke von Δ_2 ist.
b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

a) Es gibt insgesamt 9 Paare (x,y) "ganzrationaler" (= ganzer) Zahlen mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 2$, also 9 Punkte $P(x,y)$ mit ganzzahligen Koordinaten $x,y \in \{0,1,2\}$. Es gibt $\binom{9}{3} = 84$ Möglichkeiten, 3 dieser 9 Punkte auszuwählen. Dabei liegen jedoch in 8 Fällen die 3 Punkte auf einer Geraden (entweder parallel zur x- oder y-Achse oder auf einer der Diagonalen $y = x$ oder $y = 3 - x$. Somit bilden in 84 - 8 = 76 Fällen die drei Punkte ein nicht-entartetes Dreieck.

b) Es gibt 8 Klassen von Dreiecken, wobei die Dreiecke einer Klasse zueinander kongruent sind. Nämlich:

Klasse	Repräsentant	Anzahl	Flächeninhalt
1.	(0,0), (0,1), (1,0)	16	1/2
2.	(0,0), (0,1), (1,2)	16	1/2
3.	(0,0), (0,1), (2,0)	16	1
4.	(0,0), (0,1), (2,2)	8	1
5.	(0,0), (0,2), (1,2)	8	1
6.	(0,0), (0,2), (2,0)	4	2
7.	(0,0), (0,2), (2,1)	4	2
8.	(0,0), (1,2), (2,1)	4	3/2
Summe:		76	

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - 071222
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat.
Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Anmerkung: In dieser Lösung wird angenommen, dass die Menge der Gegenstände endlich sei, was in der Olympiade Punktabzug bringen könnte. In der zweiten Lösung wurde so eine Annahme nicht getroffen.

Seien die verschiedenen Formen beliebig als Form 1, Form 2, ... und die verschiedenen Farben beliebig mit Farbe 1, Farbe 2, .. bezeichnet. Aussage bezeichne im Folgenden die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Angenommen, es gäbe alle Formen in allen Farben. Dann zeigen Form 1 mit Farbe 1 und Form 2 mit Farbe 2 (beide existieren nach Voraussetzung) die zu zeigende Aussage. Angenommen, es gäbe die Form i in allen Farben und Form j nicht in Farbe k (welche zur Menge der vorkommenden Farben gehöre). Dann zeigen Form i in Farbe k und Form j in einer anderen Farbe die Aussage.
Analog wäre die Aussage gezeigt, wenn es eine Farbe gibt, sodass alle Formen diese Farbe haben.

Nun nehmen wir an, dass es keine Form gibt, die in jeder Farbe vorkommt, und keine Farbe, welche alle Formen haben.
Betrachte eine Form i, welche eine minimale Anzahl von Farben (größer gleich 1) aufweist, eine dieser Farben sei Farbe k. Betrachte die Form j, welche nicht in Farbe k vorkommt. Wegen der Minimalität (bezüglich der Anzahl der Farben) von Form i muss Form j nun in einer Farbe l vorkommen, in welcher Form i nicht vorkommt. Form i mit Farbe k und Form j in Farbe l zeigen die Aussage.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

2. Lösung:
Es bezeichne $f(x)$ die Farbe und $g(x)$ die Form eines Gegenstands x. Nach Voraussetzung gibt es a und b mit $f(a) \neq f(b)$. Ist $g(a) \neq g(b)$, so haben wir die gesuchten Gegenstände gefunden, und wir sind fertig. Anderenfalls gilt $g(a) = g(b)$, und wir betrachten zwei Gegenstände c und d mit $g(c) \neq g(d)$. Ist $f(c) \neq f(d)$, sind wir wieder fertig, da zwei Gegenstände mit den gesuchten Eigenschaften gefunden sind, nämlich c und d. Andernfalls gilt $f(c) = f(d)$. Da $f(a) \neq f(b)$, kann nicht gleichzeitig $f(c) = f(d) = f(a)$ und $f(c) = f(d) = f(b)$ gelten.

Sei also etwa $f(c) = f(d) \neq f(a)$. Ebenso kann nicht gleichzeitig $g(a) = g(c)$ und $g(a) = g(d)$ gelten. Sei also etwa $g(a) \neq g(c)$. Dann ist also $f(a) \neq f(c)$ und $g(a) \neq g(c)$, und die beiden Gegenstände sind gefunden.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 3 - 071223
Beweisen Sie, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

Die Umordnungsungleichung besagt insbesondere, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ und $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ gilt:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$$

und

$$x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \geq x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1.$$

Falls eine der Zahlen a,b,c Null ist, dann ist

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

erfüllt, denn es steht auf der linken Seite eine nichtnegative Zahl und auf der rechten Seite 0.
Seien also a,b,c positiv. Da die zu beweisende Ungleichung symmetrisch in a,b,c ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $a \geq b \geq c$. Nach Division durch $\sqrt{abc}$ auf beiden Seiten bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} \geq a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5}$$

gilt. Wegen $a^{2.5} \geq b^{2.5} \geq c^{2.5}$ und $\frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{ac}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ gilt also nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} &\geq \frac{a^{2,5}}{\sqrt{ac}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ab}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{bc}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}}\end{aligned}$$

Wegen $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ und $\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}} &\geq \frac{a^2}{\sqrt{a}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}} \\ &= a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5},\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe gelöst von Nuramon

2.Beweis: Es gilt $(3{,}0{,}0) \succ \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Somit folgt die Behauptung einfach durch Muirheads Ungleichung: Wenn eine Folge A eine Folge B majorisiert, dann gilt für eine Menge positiver reeller Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}$$

Lösungsvorschlag von Küstenkind

Aufgabe 4 - 071224
Beweisen Sie, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist. Da

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^3 + 3n + 1)^2$$

gilt, liegt $n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlichen denen von $n^2 + 3n$ und $n^2 + 3n + 1$ und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 071225
Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x \cdot (ax^2 + by^2 - a) = 0 \qquad (1)$$
$$y \cdot (ax^2 + by^2 - b) = 0 \qquad (2)$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ und $a \neq b$.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x = 0$.

   Dann geht die zweite Gleichung über in $y \cdot b \cdot (y^2 - 1) = 0$, was wegen $b \neq 0$ auf $y = 0$ oder $y = \pm 1$ führt. Für alle drei Elemente $(x,y) \in \{(0,-1),(0,0),(0,1)\}$ bestätigt die Probe, dass es sich tatsächlich um Lösungen des Gleichungssystems handelt.

2. Fall: $x \neq 0$.

   Dann folgt aus der ersten Gleichung $ax^2 + by^2 - a = 0$, also aufgrund $a \neq b$ damit $ax^2 + by^2 - b \neq 0$, sodass aus aus der zweiten Gleichung direkt $y = 0$ folgt. Dies in die eben erhaltene Gleichung eingesetzt, liefert $ax^2 - a = 0$ bzw. $x = \pm 1$. Auch hier sind wieder alle Elemente der Menge $\{(-1,0), (1,0)\}$ Lösungen des Gleichungssystems, wie die Probe bestätigt.

Damit hat das angegebene Gleichungssystem insgesamt fünf Lösungen, die in den beiden Fällen notiert wurden.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:
Es muss $xy = 0$ sein, da andernfalls die Klammerausdrücke in den zwei gegebenen Gleichungen 0 wären, was dann sofort auf den Widerspruch $a = b$ führen würde.
Durch Ausmultiplizieren der Gleichungen, Einsetzen von $xy = 0$ und Kürzen durch a bzw. b ergibt sich dann, dass das gegebene Gleichungssystem äquivalent ist zu einem anderen, in dem a und b dann gar nicht mehr vorkommen, nämlich

$$xy = 0,\ x^3 = x,\ y^3 = y$$

mit den 5 offensichtlichen Lösungen $(x,y) \in \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 071226
Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.
Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

Die Eckpunkte der Grundfläche seien in der Reihenfolge mit P_1 bis P_6 bezeichnet sowie die Spitze der Pyramide mit S und der Mittelpunkt der Grundfläche mit F. Dann ist auch F der Fußpunkt der Höhe von S auf die Grundfläche, da von einer geraden Pyramide ausgegangen wird.
(Sonst könnte man nicht vom Flächeninhalt "einer" Seitenfläche der Pyramide sprechen, da sie unterschiedliche Flächeninhalte haben könnten, wäre die Pyramide nicht gerade.)

Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke FS, also der Mittelpunkt der Höhe der Pyramide und ϵ die Ebene des zu betrachtenden Schnitts.

Der Schnitt verlaufe durch die Mittelpunkte M_1 und M_3 der Seiten P_1P_2 und P_3P_4, die weder benachbart noch parallel sind. Insbesondere ist dann also die Gerade durch die Diagonale P_1P_4 des Sechsecks parallel zur Schnittebene ϵ.

Sei weiterhin $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ das Sechseck, welches als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durch den Mittelpunkt M der Höhe entsteht, wobei jeder Punkt Q_i auf der Gerade SP_i liege. Da ϵ erstens durch M, welcher gleichzeitig Mittelpunkt dieses zweiten Sechsecks ist, verläuft, zweitens parallel zu P_1P_4 ist und drittens nach dem Strahlensatz die Geraden P_1P_4 und Q_1Q_4 parallel sind, muss die Strecke Q_1Q_4, die M als eigenen Mittelpunkt enthält, in ϵ liegen. Somit schneidet ϵ also die Geraden P_1S und P_4S in Q_1 bzw. Q_4.

Analog sei das Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe von $\frac{3}{4}|SF|$ definiert, wobei wieder die Punkte R_i auf den Geraden SP_i liegen sollen. Der Schnitt von ϵ mit dieser zur Grundfläche parallelen Ebene liefert wieder eine Gerade, die parallel zu R_1R_4 ist.

Sei d der Abstand der parallelen Geraden P_1P_4 und P_5P_6. Dann beträgt nach dem Strahlensatz der Abstand der parallelen Geraden R_1R_4 und R_5R_6 genau $\frac{1}{4}d$.

Der Abstand des Schnitts von ϵ mit der Grundfläche, also der Geraden M_1M_3, hat einen Abstand $\frac{1}{2}d$ von der dazu parallelen Gerade P_1P_4. Und in der zu Grundfläche parallelen Ebene durch M (also in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche) ist der Schnitt von ϵ mit dieser Ebene identisch mit der Geraden R_1R_4, sodass der entsprechende Abstand Null beträgt.
Daher gilt nach Strahlensatz (mit Zentrum M in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche), dass der Schnitt von ϵ mit der zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe $\frac{3}{4}|SF|$ genau den Abstand $\frac{1}{4}d$ zur entsprechenden parallelen Gerade R_1R_4 hat. Da weiterhin diese Schnittgerade von ϵ mit der gerade betrachteten Ebene in der von R_1R_4 erzeugten Halbebene liegt, in der nicht R_2 und R_3 liegen; in der im gleichen Abstand zu R_1R_4 aber der Gerade R_5R_6 verläuft, muss also der Schnitt von ϵ mit dieser Ebene gerade die Gerade R_5R_6 sein. Damit schneidet ϵ die Geraden SP_5 und SP_6 in R_5 bzw. R_6.

Die entstehende Schnittfigur beim Schnitt von ϵ mit der sechsseitigen Pyramide ist demnach genau das Sechseck $M_1M_3Q_4R_5R_6Q_1$. Dieses lässt sich zerlegen in die beiden Trapeze $M_1M_3Q_4Q_1$ und $Q_1Q_4R_5R_6$, deren Flächeninhalte – in Abhängigkeit der Kantenlänge a des Sechsecks der Grundfläche und der Höhe $h = |SF|$ der Pyramide – im Folgenden ermittelt werden:

Sei P_0 der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_3P_4 und es entsteht das gleichseitige Dreieck $\triangle P_2P_0P_3$. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|P_0M_1|}{|P_0P_2|} = \frac{|M_1M_3|}{|P_2P_3|}$, also $|M_1M_3| = \frac{3}{2}a$. Analog folgt auch $|P_1P_4| = 2a$. Aus letzterem folgt mittels Strahlensatz (mit Zentrum S), dass $|Q_1Q_4| = \frac{1}{2}|P_1P_4| = a$ gilt. Damit kennen wir die Längen der parallelen Strecken im Trapez $M_1M_3Q_4Q_1$.

Für den Abstand dieser beiden Parallelen betrachten wir das rechtwinklige Dreieck bestehend aus M, F und dem Mittelpunkt N der Strecke M_1M_3, wobei der rechte Winkel bei F liegt. Es ist $|MF| = \frac{1}{2}|SF| = \frac{1}{2}h$. Für die Streckenlänge $|FN|$ gilt, dass die Strecke die halbe Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_2P_3F$

ist, also $|FN| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt. Damit beträgt der Abstand der beiden Geraden M_1M_3 und Q_1Q_4 genau

$$h_1 := |NM| = \sqrt{|MF|^2 + |FN|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes $M_1M_3Q_4Q_1$ ergibt sich damit zu

$$A_1 := \frac{1}{2} \cdot (|M_1M_3| + |Q_1Q_4|) \cdot h_1 = \frac{5}{16}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Für die Bestimmung des Flächeninhalts des Trapezes $Q_1Q_4R_5R_6$ beachte man, dass aufgrund des Strahlensatzes (mit Zentrum S) $|R_5R_6| = \frac{1}{4}|P_5P_6| = \frac{1}{4}a$ und (mit Zentrum M) $h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$ gilt, wobei h_2 der Abstand der Parallelen Q_1Q_4 und R_5R_6 ist. Also ergibt sich für dieses Trapez der Flächeninhalt zu

$$A_2 := \frac{1}{2}(|Q_1Q_4| + |R_5R_6|) \cdot h_2 = \frac{5}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2} = \frac{1}{4}A_1$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt A der gesamten Schnittfigur zu

$$A := A_1 + A_2 = \frac{5}{4} \cdot A_1 = \frac{25}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Um den Flächeninhalt der Seitenfläche $\triangle P_1P_2S$ (und damit jeder Seitenfläche) der Pyramide zu bestimmen, benötigen wir die Länge ihrer Seitenhöhe h_s. Diese ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle SFM_1$ mit rechtem Winkel bei F. Es ist FM_1 die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2F$, sodass $|FM_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt. Also ist $|SF| = h$, also

$$h_s = |M_1S| = \sqrt{|SF|^2 + |FM_1|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Daraus ergibt sich nun der Flächeninhalt A_S einer Seitenfläche der Pyramide zu $A_S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$ und damit für den Flächeninhalt Schnittfigur

$$A = \frac{25}{16} \cdot A_S$$

Aufgabe gelöst von cyrix

9.9.3 III. Runde 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071231
Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.
Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Die Mittelpunkte der drei großen Kugeln liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Tischplatte in einem Abstand von r verläuft. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ mit Kantenlänge $2r$ und sei S der Schwerpunkt dieses Dreiecks.
Dann gilt $|M_1S| = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt und jede Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck auch eine Höhe ist, deren Länge durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras als $\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ ermittelt werden kann.

Sei M der Mittelpunkt der vierten Kugel. Da sie die drei großen berührt, muss M aus Symmetriegründen auf dem Lot von S auf die Tischebene liegen. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle M_1SM$ mit rechtem Winkel bei S.
Ist R der gesuchte Radius der vierten Kugel, so gilt einerseits $|SM| = r - R$, da die vierte Kugel auch die Tischplatte (von oben) berührt und die Berührungsradien aller Kugeln auf die Tischplatte senkrecht zu dieser stehen, also der der vierten Kugel auch auf der Gerade MS liegt. Andererseits berühren sich aber auch die vierte und die erste Kugel, sodass ihre Mittelpunkte M_1 und M den Abstand $r + R$ haben.

Setzt man dies in die durch den Satz von Pythagoras gegebenen Gleichung für das rechtwinklige Dreieck $\triangle M_1SM$ ein, erhält man

$$(r+R)^2 = |M_1M|^2 = |M_1S|^2 + |SM|^2 = \frac{4}{3}r^2 + (r-R)^2$$

bzw. $4rR = (r+R)^2 - (r-R)^2 = \frac{4}{3}r^2$, also wegen $r > 0$ schließlich $R = \frac{1}{3}r$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 071232
Es ist das Produkt

$$\sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ \sin 45^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ \sin 85^\circ$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
Beispiel: $\sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Ich verwende

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

und

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Mit der Doppelwinkelfunktion des Sinus und den bekannten Sinuswerten für 30° und 45° lässt sich das Produkt zunächst schreiben als $\frac{1}{64}\sqrt{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$. Das verbleibende Produkt der Sinuswerte lässt sich vereinfachen zu:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ\right)\sin 70^\circ = \frac{1}{4}\left(2\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 30^\circ + \sin 110^\circ - \sin 70^\circ\right) = \frac{1}{8}$$

Somit ist der Produktwert $\frac{1}{512}\sqrt{2}$.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 3 - 071233
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Es ist

$$7^1 \equiv 7 \pmod{100} \qquad 7^2 \equiv 49 \pmod{100}$$
$$7^3 \equiv 43 \pmod{100} \qquad 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100} \qquad 7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist. Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod{4}, \text{ also } \quad 7^7 \equiv -1 \pmod{100}$$

d.h. $7^7 = 4m - 1$, wobei m eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Da somit

$$7^{7^7} ? 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod{4}$$

d.h. $7^{7^7} = 4m' - 1$ (m' natürliche von 0 verschiedene Zahl) ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100}$$

d.h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 071234
Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \qquad (1)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie!
Die Funktion $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\phi(x+1) = (x+1)\phi(x) \qquad (2)$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

Zuerst nehmen wir an, dass g 1-periodisch ist, für alle reellen x also $g(x+1) = g(x)$ gilt. Dann ist

$$\phi(x+1) = f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \phi(x)$$

erfüllt also die gewünschte Funktionalgleichung.

Anders herum sei nun für jedes x die Gleichung $\phi(x+1) = (x+1) \cdot \phi(x)$ erfüllt, was nach Einsetzen der Definition von ϕ äquivalent ist zu

$$f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x+1) \cdot g(x)$$

Da $f(x+1) \neq 0$, kann man diese zweite Gleichheit durch Division durch $f(x+1)$ zum Gewünschten $g(x+1) = g(x)$ äquivalent umformen.

Bemerkung: Die Annahme aus der Aufgabenstellung, dass $f(x)$ für alle reellen Zahlen ungleich 0 wäre, steht im Widerspruch zur Funktionalgleichung, die f erfüllen soll, denn es ist sonst $f(0) = 0 \cdot f(-1) = 0$. Man kann die Aufgabe aber leicht retten, indem man sich nur auf positive Argumente x einschränkt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 071235
In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)
Beweisen Sie, dass man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, dass in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Die Farben seien von 1 bis 6 durchnummeriert.
O.B.d.A. existiere der Stoff mit den Farben 1 und 2, den wir kurz mit 1-2 bezeichnen wollen. Dann gilt für die vier übrigen Farben der Menge $R = \{3,4,5,6\}$, dass sie untereinander noch jeweils mit mindestens einer weiteren Farbe aus R in einem gemeinsamen Stoff vorkommen müssen, denn jede Farbe f von ihnen muss neben den (ggf. existierenden) Stoffen 1-f und 2-f noch in mindestens einem weiteren Stoff vorkommen.
O.B.d.A. existiere der Stoff 3-4. Nun führen wir eine Fallunterscheidung danach durch, in welchen Stoffen die Farben 5 und 6 enthalten sind:

1. Fall: Es gibt den Stoff 5-6. Dann bilden die drei Stoffe 1-2, 3-4 und 5-6 eine gewünschte Auswahl von 3 Stoffen mit allen sechs Farben.

2. Fall: Es gibt den Stoff 5-6 nicht, aber die Farben 5 und 6 sind mit verschiedenen Farben aus $\{3,4\}$ in einem Stoff verwoben. O.B.d.A. existieren also die Stoffe 3-5 und 4-6. Dann bilden die Stoffe 1-2, 3-5 und 5-6 eine entsprechende Stoffauswahl.

3. Fall: Die Farben 5 und 6 tauchen nur gemeinsam mit einer der beiden Fabren 3 oder 4 in einem Stoff auf, d.h., es gibt o.B.d.A. die Stoffe 3-5 und 3-6, aber weder 4-5, 4-6 noch 5-6. Damit existiert aber für jede der Farben 4, 5 und 6 jeweils nur eine weitere Farbe aus R, mit der sie gemeinsam in einem Stoff vorkommt. Demnach muss für jede dieser drei Farben f jeweils der Stoff 1-f als auch 2-f tatsächlich existieren, damit f in mindestens drei verschiedenen Stoffen vorkommt. Dann bilden die Stoffe 1-4, 2-5 und 3-6 eine gewünschte Auswahl.

Aufgabe von cyrix gelöst

Aufgabe 6 - 071236
Beweisen Sie, dass es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d.h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, dass diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

Gibt es unter den sechs Punkten vier, M, A, B und C so, dass M im Inneren des Dreiecks ABC liegt, dann zerlegen die Strecken MA, MB und MC den Vollwinkel bei M in drei Teilwinkel. Mindestens einer von diesen, o.B.d.A. $\angle AMB$ beträgt dann mindestens $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ und mit dem Dreieck AMB ist ein gewünschtes gefunden.

Andernfalls befindet sich keiner der Punkte im Inneren der durch die sechs Punkte aufgespannten konvexen Figur. Damit, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, muss es sich bei dieser Figur um ein konvexes Sechseck handeln. Dieses besitzt eine Innenwinkelsumme von $(6-2) \cdot 180° = 720°$, sodass mindestens einer der Innenwinkel mindestens $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$ beträgt.
Das Dreieck, dass durch den Punkt, an dem dieser Innenwinkel liegt, sowie seinen beiden Nachbarn entsteht, erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe von cyrix gelöst

9.9.4 IV. Runde 1967, Klasse 12

Aufgabe 1 - 071241
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$x_1 + ax_2 + x_3 = b \qquad (1)$$
$$x_2 + ax_3 + x_4 = b \qquad (2)$$
$$x_3 + ax_4 + x_1 = b \qquad (3)$$
$$x_4 + ax_1 + x_2 = b \qquad (4)$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Fall 1: $a = 0$. Dann ist das Gleichungssystem äquivalent zu $x_1 + x_3 = b = x_2 + x_4$, sodass alle Lösungsquadrupel die Form $(s,t,b-s,b-t)$ mit zwei reellen Parametern s und t besitzen. Einsetzen bestätigt, dass das alles auch Lösungen sind.

Fall 2: $a \neq 0$. Dann führt das Gleichsetzen von Gleichung (1) mit (3) auf $ax_2 = ax_4$ bzw. $x_2 = x_4$. Analog erhält man mit Gleichungen (2) und (4) die Identität $x_1 = x_3$. Einsetzen liefert nun $2x_1 + ax_2 = b = 2x_2 + ax_1$, also $(2-a)x_1 = (2-a)x_2$.

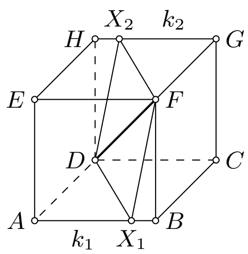
Fall 2.1: $a \neq 2$. Dann folgt $x_1 = x_2$, also sind alle vier Variablen gleich und man erhält $(2+a)x_1 = b$.
Fall 2.1.1: $a \neq -2$. Dann sind genau die Quadrupel $\left(\frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}, \frac{b}{2+a}\right)$ Lösungen des Gleichungssystems, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt.
Fall 2.1.2: $a = -2$ und $b = 0$. Dann sind die Lösungsquadrupel gegeben durch (t,t,t,t), wobei t die reellen Zahlen durchläuft. Auch hier bestätigt die Probe das Ergebnis.
Fall 2.1.3: $a = -2$ und $b \neq 0$. Dann gibt es wegen $(2+a)x_1 = (2-2)x_1 = 0 \neq b$ keine Lösung.

Fall 2.2: $a = 2$. Dann ist $2x_1+2x_2 = b$, sodass man genau alle Lösungstripel erhält durch $\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right)$, wobei auch hier der Parameter t die reellen Zahlen durchläuft, und man durch Einsetzen bestätigt, dass dies alles Lösungen sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 071242
Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir alle Ebenen, die die Körperdiagonale enthalten (siehe Abbildung).



Sei ϵ einer dieser Ebenen. ϵ enthält außer D und F noch (mindestens einer auf einer Würfelkante k_1 gelegenen von D und F verschiedenen Punkt X_1.
Geht k_1 von F aus, dann verläuft ϵ sowohl durch diese Würfelkante als auch durch die den Punkt D enthaltende zu k_1 parallele Kante k_2. Entsprechend den drei von F ausgehenden Kanten gibt es drei derartige Lagen der Ebene ϵ und die dabei entstehenden Schnittflächen F_ϵ sind kongruente Rechtecke mit dem Flächeninhalt

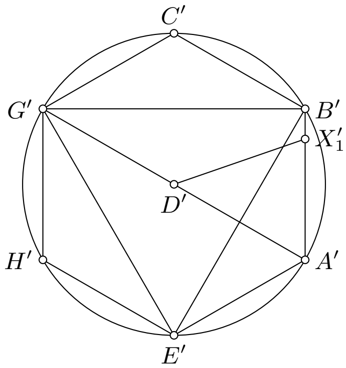
$$|F_\epsilon| = a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$$

Geht k_1 nicht von D oder F aus, d.h. bezeichnet k_1 einer der sechs Kanten AB, BC, CG, GH, HE oder EA, dann gibt es unter diesen sechs Kanten eine zu k_1 parallele Kante k_2. Da ϵ k_1 schneidet, so schneidet die Ebene ϵ auch k_2 in einem Punkt X_2, wobei X_1FX_2D ein Parallelogramm mit der Diagonalen DF ist.

X_1FX_2D ist die Schnittfläche von ϵ mit einem Würfel. Durch entsprechende Wahl von X_1 (und damit auch von X_2) auf einem der beiden anderen Paare paralleler Kanten entsteht eine zu X_1FX_2D kongruente Schnittfläche.

Da die Diagonale DF die Schnittfläche in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, wird der Flächeninhalt der Schnittfläche genau dann ein Minimum, wenn die Höhe l zur Grundseite DF der zugehörigen Dreiecke eine minimale Länge hat.

Sei X_1 aus AB gelegen. Projiziert man den Würfel parallel zu FD auf eine zu FD senkrechte Ebenem so verzerren sich die Strecken l, AC, CH, HA, BG, GE und EB nicht, und werden die Bilder der Originalpunkte durch einen Strich gekennzeichnet, so bilden A', B', C', G', H', E' die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit dem Mittelpunkt D'.



Wegen $l = X_1'D'$ hat l offenbar genau dann den kleinsten Wert, wenn der Punkt X_1' der Strecke $A'B'$ diese Strecke halbiert, also $X_1'D'$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle A'B'D'$ ist. Dann gilt $|l| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ und für die Maßzahl der entsprechenden Schnittfläche

$$|F_e| = a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

Wegen $2a^2 > \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ ist diese Schnittfläche tatsächlich minimal.
Entsprechend der Lage von X_1, X_2 auf einem der drei ober betrachteten Paare paralleler Kanten gibt es drei Lagen von ϵ, in denen diese minimale Schnittfläche ausgeschnitten wird.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 071243
Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!

Da n ungerade ist, gilt für alle reellen x die Identität $(-x)^n = -x^n$. Insbesondere erhält man also durch Einsetzen von $-x$ in die Funktionalgleichung eine zweite:

$$a \cdot f(-x^n) + f(x^n) = -bx$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $(a+1) \cdot (f(x^n) + f(-x^n)) = 0$, also wegen $a \neq -1$ schließlich $f(-x^n) = -f(x^n)$. Setzt man dies wiederum in die Ausgangs-Funktionalgleichung ein, erhält man $(a-1) \cdot f(x^n) = bx$ bzw. nach Division durch $a - 1 \neq 0$ und der passenden Substitution

$$f(x) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{x}$$

Man überprüft schnell, dass diese Funktion tatsächlich auch die Funktionalgleichung erfüllt, da

$$f(x^n) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{x^n} = \frac{b}{a-1} \cdot x \qquad \text{und}$$

$$f(-x^n) = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{-x^n} = \frac{b}{a-1} \cdot \sqrt[n]{(-x)^n} = \frac{b}{a-1} \cdot (-x)$$

also gilt:

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = a \cdot \frac{b}{a-1} \cdot x - \frac{b}{a-1} \cdot x = (a-1) \cdot \frac{b}{a-1} \cdot x = bx$$

Bemerkung: Damit diese Funktionen wohldefiniert sind, muss man für negative reelle Zahlen x und ungerade Wurzelexponenten n die Wurzel-Funktion in ihrem Definitionsbereich auf die gesamten reellen Zahlen erweitern via $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, sodass sie auf dem Bereich der gesamten reellen Zahlen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $p : x \mapsto x^n$ ist.
Dies ist möglich, da p eine eineindeutige Abbildung von den reellen Zahlen auf die reellen Zahlen ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 071244
Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.
Man beweise, dass es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Seien die Folgenglieder mit $a_0, a_1, \ldots, a_{15}$ bezeichnet und es gelte (da die Folge geometrisch ist) $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^i$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q.

Da $a_{15} = a_0 \cdot \frac{p^{15}}{q^{15}}$ ist und p^{15} und q^{15} teilerfremd sind, muss q^{15} ein Teiler von a_0 sein. Es ist $a_0 < 10^9$. Also muss $q < 4$ gelten, denn sonst wäre

$$a_0 \geq q^{15} \geq 4^{15} = 2^{30} = \left(2^{10}\right)^3 = 1024^3 > 1000^3 = 10^9$$

Wegen $a_9 < 10^{10}$ und $a_0 \geq 10^8$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^9 = \frac{a_9}{a_0} < 10^2$. Insbesondere ist also $\frac{p}{q} < 2$, da sonst $\left(\frac{p}{q}\right)^9 \geq 2^9 = 512 > 10^2$ wäre.
Als mögliche Quotienten $\frac{p}{q}$ aufeinander folgender Folgenglieder verbleiben also nur die rationalen Zahlen zwischen 1 und 2, welche einen Nenner von höchstens 3 besitzen. Dies sind $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$.
Wegen $a_{14} \geq 10^{11}$ und $a_9 < 10^{10}$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{a_{14}}{a_9} > 10$. Es ist aber $\left(\frac{4}{3}\right)^5 < \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32} < 10$, sodass als einzig möglicher Quotient $\frac{p}{q}$ der Wert $\frac{5}{3}$ verbleibt.

Damit gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $a_i = n \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ für alle $0 \leq i \leq 15$ gilt.
Wegen $n \cdot 3^6 \cdot 5^9 = a_9 < 10^{10}$ und $3^6 \cdot 5^9 = (3^2 \cdot 5^3)^3 = (9 \cdot 125)^3 = (1000+125)^3 > 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 125 = 10^9 + 375 \cdot 10^6 > 1{,}25 \cdot 10^9 = \frac{1}{8} \cdot 10^{10}$ ist $n < 8$.

Aus $10^8 \leq a_0 = n \cdot 3^{15}$ folgt mit $3^{15} = 3^6 \cdot 3 \cdot (3^4)^2 = 9^3 \cdot 3 \cdot 81^2 = 729 \cdot 3 \cdot 6561 < 750 \cdot 20000 = 1{,}5 * 10^7$, dass $n > 6$ ist, denn sonst wäre $a_0 \leq 6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^7 < 10^8$.
Damit folgt zusammen, dass die Folge genau aus den Zahlen $a_i = 7 \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ mit $0 \leq i \leq 15$ bestehen muss.

Bemerkung: Die Anzahl der Stellen der einzelnen Folgenglieder kann man nun nachrechnen. Dafür eignet sich ein Rechenwerkzeug, kann aber auch von Hand nachvollzogen werden.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 071245
Es ist zu beweisen, dass für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0$$

erfüllt ist.

Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad , \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Damit lässt sich die linke Seite schreiben als:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin x + \sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) =$$

$$= \sin x\left(1 + \cos x + 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \cos^2 x\right)\right)$$

Und damit geht in die Ungleichung über in:

$$\sin x\left(\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3}\right) > 0$$

$\sin x$ ist im gegebenen Intervall stets positiv.
$\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} = 0$ hat keine Nullstelle, da nach Substitution $u = \cos^2 x$ die quadratische Gleichung $\frac{4}{3}u^2 x + u + \frac{2}{3}$ keine reelle Lösung hat. Damit ist der Term $\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} > 0$ und das Produkt ebenfalls > 0.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 6 - 071246
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.

Der Beweis des Satzes erfordert zwei Schritte; es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

1. Ist ein Dreieck gleichschenklig, so sind mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang.
2. Sind in einem Dreieck mindestens zwei Winkelhalbierende gleichlang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Beweis zu 1.:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Winkelhalbierenden $AE = w_\alpha$ und $BF = w_\beta$. Ferner sei dieses Dreieck gleichschenklig mit $AC = BC$, also $\angle CAB = \alpha = \angle ABC = \beta$. Dann folgt aus

$$\angle EAB = \angle ABF = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABE = \angle FAB \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$$

Somit gilt $AE = BF$, d.h. $w_\alpha = w_\beta$, was zu beweisen war.

Beweis zu 2.:
Es sei in dem wie oben bezeichneten Dreieck $\triangle ABC$ $w_\alpha = w_\beta$, d.h., $AE = BF$.

Den Beweis, dass dann $\alpha = \beta$ gilt, führen wir indirekt. Angenommen diese Behauptung sei falsch; dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha > \beta$ gilt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.
Der Punkt G sei so gelegen, dass $FG \parallel AE$ und $FG = AE = w_\alpha$ gilt. Dann liegt G außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Kosinussatz gilt nun

$$BE^2 = c^2 + w_\alpha^2 - 2w_\alpha c\cos\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad AF^2 = c^2 + w_\beta^2 - 2w_\beta c\cos\frac{\beta}{2}$$

Nach Voraussetzung ist $w_\alpha = w_\beta$ und $\frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2} < 90°$, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Daraus folgt

$$BE > AF \qquad (1)$$

Da $AEGF$ auf Grund der obigen Voraussetzung ein Parallelogramm ist, gilt $AF = EG$. In dem Dreieck $\triangle BGE$ gilt daher wegen (1) $BE > EG$, also

$$\angle BGE > \angle EBG \qquad (2)$$

Ferner gilt wegen $\angle FAE = \angle EGF$

$$\frac{\alpha}{2} = \angle EGF > \angle FBE = \frac{\beta}{2} \qquad (3)$$

Durch Addition erhält man aus (2) und (3): $\angle BGF > \angle FGB$.

Das ist ein Widerspruch, weil das Dreieck $\triangle FGB$ gleichschenklig mit $AE = BF = FG$. Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

Übernommen aus [5]

9.10 VIII. Olympiade 1968

9.10.1 I. Runde 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081211
Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, "Vierer mit", Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wie viel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
"Vierer mit" bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, dass die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim "Vierer mit" abschloss. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Die UdSSR hat 36,5 Punkte; sie muss also bei mindestens einer Disziplin eine Medaille erhalten haben, deren Punktzahl nicht ganzzahlig ist. Dies ist nur der Fall bei den Silbermedaillen im "Vierer mit" und im "Doppelvierer".

Da es nur zwei solcher Medaillen gibt, kann die DDR nun nur noch maximal eine davon erhalten haben. Das würde jedoch zu einer nicht-ganzzahligen Gesamtpunktzahl führen, die DDR hat aber 36 Punkte. In den Disziplinen "Vierer mit" und "Doppelvierer" ist für sie nur noch möglich, eine Gold- oder eine Bronzemedaille zu erhalten. Da bekannt ist, dass die DDR beim "Doppelvierer" besser als beim "Vierer mit" abschnitt, erhielt sie folglich beim "Vierer mit" die Bronze- und beim Doppelvierer die Goldmedaille.

Hier erhielt die DDR also $9 + 6 = 15$ Punkte. Sie erhielt also in den restlichen drei Disziplinen insgesamt $37 - 15 = 22$ Punkte. Die maximale mögliche Punktzahl liegt hier mit drei Goldmedaillen bei $12 + 6 + 6 = 24$. Da die DDR im "Doppelzweier" besser war als beim "Einer", kann sie im "Einer" keine Goldmedaille, sondern maximal eine Silbermedaille erhalten haben, als Maximalpunktzahl ergibt sich folglich: $12 + 6 + 5 = 23$.

Da die DDR in den drei Disziplinen jedoch nur 22 Punkte hat, muss sie in (mindestens) einer Disziplin schlechter abgeschnitten haben als "Achter" Gold, "Doppelzweier" Gold, "Einer" Bronze. Bei "Achter" sind die Punktabstufungen zwei Punkte, hier kann also nicht genau ein Punkt verloren werden. Es muss also "Doppelzweier" oder "Einer" genau eine Medaille schlechter sein. Wenn im "Doppelzweier" eine Silbermedaille erzielt würde, so wäre die DDR hier genauso gut gewesen wie im "Einer", da dies nicht der Fall ist, muss im "Einer" eine Bronzemedaille erzielt worden sein.

Es ergibt sich also für die DDR:
Einer: Bronze 4
Doppelzweier: Gold 6
Vierer mit: Bronze 6
Doppelvierer: Gold 9
Achter: Gold 12
Insgesamt: 3 Goldmedaillen, 2 Bronzemedaillen, 37 Punkte

Für die UdSSR sind nun noch, wenn man die Unmöglichkeit einer Goldmedaille in den Disziplinen, in denen die DDR diese bereits hat, berücksichtigt, maximal $6 + 5 + 9 + 7{,}5 + 10 = 37{,}5$ Punkte möglich.
Da sie nur 36,5 Punkte hat und nur in den Disziplinen "Einer" und "Doppelzweier" die Punktabstufung 1 vorhanden ist, muss sie entweder im "Einer" oder im "Doppelzweier" genau eine Medaille schlechter gewesen sein.

Hätte sie im "Einer" nur die Silbermedaille, so wäre sie hier genauso gut wie im "Doppelzweier", das ist aber nicht der Fall. Folglich hat die UdSSR im "Doppelzweier" die Bronzemedaille erhalten.

Es ergibt sich also für die UdSSR:
Einer: Gold 6
Doppelzweier: Bronze 4
Vierer mit: Gold 9
Doppelvierer: Silber 7,5
Achter: Silber 10
Insgesamt: 2 Goldmedaillen, 2 Silbermedaillen, 1 Bronzemedaille, 36,5 Punkte

Aufgabe gelöst von Annika Heckel

Aufgabe 2 - 081212

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Aus den gegebenen 15 Punkten lassen sich genau $\binom{15}{3}$ voneinander verschiedene Punkttripel bilden. Die Punkte eines jeden solchen Tripels sind genau dann die Ecken eines Dreiecks, wenn sie nicht auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Im gegebenen Fall befinden sich jedoch genau 5 der Punkte auf BC, 6 auf CA und 7 auf AB. Aus diesen sind dabei jeweils $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{7}{3}$ der $\binom{15}{3}$ Tripel gebildet. Daher ist die gesuchte Anzahl Z der Dreiecke

$$Z = \binom{15}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 390.$$

b) Auf Grund der gleichen Überlegungen erhält man jetzt

$$Z = \binom{k+m+n+3}{3} - \binom{k+2}{3} - \binom{m+2}{3} - \binom{n+2}{3}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 081213
In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\angle CSD$!

Man fällt das Lot AM von A auf die Tetraederkante CD. Dann ist $AM \simeq BM$, da beide Strecken Höhen einer Seitenfläche ein und desselben regelmäßigen Tetraeders sind. Weiter ist mit $\alpha = |\angle ASB|$, wenn BQ Tetraederhöhe ist,

$$\alpha = 360° - 90° - 90° - |\angle QMB|,$$

also

$$\cos\alpha = \cos(180° - |\angle QMB|) = -\frac{QM}{MB} = -\frac{1}{3},$$

woraus $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ folgt. Zur Erinnerung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Tafel benutze man die Relation $\alpha = 180° - \arccos\frac{1}{3}$. Man findet dann $\cos(70{,}6°) < \frac{1}{3} < \cos(70{,}5°)$, so dass $180° - 70{,}5° = 109{,}5°$ ein Näherungswert der geforderten Art ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 081214
Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, dass für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2+b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3+b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie lässt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, dass $a^3 + b$ zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!

a) Es gilt:

$$\delta = \frac{\left(x+\frac{y}{2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y}\right)^2}{x+\frac{y}{2x}+\sqrt{x^2+y}} = \frac{y^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{y}{2x}+x\sqrt{1+\frac{y}{x^2}}},$$

also $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$.

b) Entsprechend ergibt sich, wenn man $\sqrt[3]{x^2+y}$ durch $x + \frac{y}{3x^2}$ ersetzt, für den Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{3x^2} - \sqrt[3]{x^3+y}$$

die Eingabelung

$$0 < \delta < \frac{x^2(9x^3+y)}{81x^8},$$

denn es gilt

$$\delta = \frac{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^3 - (x^3+y)}{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^2 + \left(x+\frac{y}{3x^2}\right)\sqrt[3]{x^3+y} + \left(\sqrt[3]{x^3+y}\right)^2} < \frac{(9x^3+y)y^2}{3x^2(3x^2)^3}.$$

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49+7} = 7 + \frac{7}{2\cdot 7} - \delta = 7{,}5 - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{49}{8\cdot 7^3} = \frac{1}{56}$, also $0 < \delta < 0{,}0179$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $0 < \delta < 0{,}0167$ ist.)

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64+16} = 4 + \frac{16}{3\cdot 16} - \delta = \frac{13}{3} - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{16^2(9\cdot 64+16)}{81\cdot 4^8} = \frac{37}{16\cdot 81} < 0{,}029$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $\delta < 0{,}025$ ist.)

Übernommen von [5]

9.10.2 II. Runde 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081221
Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p+10$ als auch $p+14$ Primzahlen sind!

Sei $a \in \{0,1,2\}$ der Rest von p bei Division durch 3.
Gilt $a = 1$, so ist $p + 14$ durch 3 teilbar und wegen $p + 14 > 3$ keine Primzahl.
Gilt $a = 2$, so ist analog $p + 10$ durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also muss p durch 3 teilbar sein, es muss also $p = 3$ gelten.
Dann gilt $p+10 = 13, p+14 = 17$ und da dies Primzahlen sind gibt es genau eine Lösung, nämlich $p = 3$.

Aufgabe gelöst von ZePhoCa

Aufgabe 2 - 081222
In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.
Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

Der Winkel zwischen zwei Seitenflächen liegt in einer Ebene, die senkrecht auf den beiden Seitenflächen steht. Diese senkrechte Ebene schneidet die beiden Seitenflächen in zwei Seitenflächenhöhen, die senkrecht auf einer Seitenlange stehen und einen gemeinsamen Fußpunkt haben.
Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächenhöhen ist der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen. $\angle AEB$ ist ein solcher Winkel. Seine Größe sei τ. Es gilt somit nach Aufgabenstellung $\tau = 90°$. Dreieck AEB ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach Innenwinkelsummensatz gilt somit $\tau + 2\epsilon = 180°$ und somit $\epsilon = 45°$. Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AB:

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE|\cos\epsilon \quad (*)$$

Da die Dreiecke ACS und BCS kongruent und gleichschenklig sind, ist $|AE| = |BE|$. Einsetzen in $(*)$ liefert zudem mit $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $|AB| = a$:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|AB||AE| \cdot \sqrt{2} = |AB|^2 \iff |AE| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Sei $\varphi = \angle BCE$. Dreieck CBE ist rechtwinklig. Es gilt: $\sin\varphi = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} \iff \varphi = 45°$.
Dreieck CBS ist gleichschenklig mit Basis CB. Sei h_s die Höhe auf der Basis und s die Länge der Seitenkante. Es gilt $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{s} \iff s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$
Dreieck ABC ist gleichseitig. Die Höhe im gleichseitigen beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und die Seitenhalbierenden (im Dreieck gleichzeitig Höhe) schneiden sich im Verhältnis 2:1 , wobei die Strecke vom Schwerpunkt zum Eckpunkt doppelt so lang ist, wie die Strecke vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Seite.
Dreieck HCS ist rechtwinklig. Nach dem Satz Satz des Pythagoras gilt:

$$\left(\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \iff h = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

Der Quotient berechnet sich also zu $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösung:
Das gleichseitige Dreieck ABC liege in der xy-Ebene, der Punkt A liege im Ursprung, B auf der x-Achse. Dann sind die Ortsvektoren von B und C:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Spitze S der Pyramide

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor auf die Seitenfläche ABS ist dann:

$$\vec{n}_{ABS} = \vec{b} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor auf ACS:

$$\vec{n}_{ACS} = \vec{c} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Sollen die beiden Flächen senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren null sein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} = 0$$

Das bedeutet:

$$\frac{1}{2}a^2h^2 - \frac{3}{36}a^4 = 0$$

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{6}{36}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 081223

Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6$ so an, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung gilt:

$$x^{12} + 1 = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)(x^2 + a_3x + b_3) \cdot (x^2 + a_4x + b_4)(x^2 + a_5x + b_5)(x^2 + a_6x + b_6)$$

Wähle

$$b_1 = \cdots = b_6 = 1, \quad a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$
$$a_4 = -a_3, \quad a_5 = -a_2 \text{ und } a_6 = -a_1$$

Dann ist

$$(x^2 + a_ix + b_i)(x^2 + a_{7-i}x + b_{7-i}) = (x^2 + 1 + a_ix)(x^2 + 1 - a_ix) = x^4 + (2 - a_i^2)x^2 + 1$$

also

$$\begin{aligned} T &:= (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)(x^2 + a_3x + b_3)(x^2 + a_4x + b_4)(x^2 + a_5x + b_5)(x^2 + a_6x + b_6) \\ &= \left(x^4 + \left(2 - (2 + \sqrt{3})\right) x^2 + 1\right) \cdot \left(x^4 + (2 - 2)\, x^2 + 1\right) \cdot \left(x^4 + \left(2 - (2 - \sqrt{3})\right) x^2 + 1\right) \\ &= \left(x^4 + 1\right) \cdot \left(x^4 + 1 - \sqrt{3}x^2\right) \cdot \left(x^4 + 1 + \sqrt{3}x^2\right) \\ &= \left(x^4 + 1\right) \cdot \left(x^8 + 2x^4 + 1 - 3x^4\right) = \left(x^4 + 1\right) \cdot \left(x^8 - x^4 + 1\right) \\ &= x^{12} + x^8 - x^8 - x^4 + x^4 + 1 = x^{12} + 1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es ist $x^{24}-1=(x^{12}-1)(x^{12}+1)$. Also sind die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ genau diejenigen von $x^{24}-1$, die keine Nullstellen von $x^{12}-1$ sind.
Die komplexen Nullstellen von x^n-1 lauten $\zeta_n^k=\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$, wobei i die ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft.

Damit erhalten wir die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ als

$$x_k=\zeta_{24}^{2k-1}=\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$

(Die vierundzwanzigsten Einheitswurzeln mit geradem k sind gleichzeitig auch zwölfte Einheitswurzeln, also Nullstellen von $x^{12}-1$, die hier ausgeschlossen sein sollen.)

Wir erhalten als Zerlegung des Polynoms $x^{12}+1$ in seine Linearfaktoren die Darstellung

$$x^{12}+1=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{12})$$

Wegen $\cos(2\pi-\phi)=\cos(-\phi)=\cos(\phi)$ und $\sin(2\pi-\phi)=\sin(-\phi)=-\sin(\phi)$ können wir nun den ersten und letzten dieser komplexen Linearfaktoren, den zweiten und vorletzten, usw., zusammenfassen: Für ein k aus $\{7;8;\ldots;12\}$ gilt

$$(x-x_k)(x-x_{13-k})=\left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)-i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)=$$
$$=x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\cos^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+\sin^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$
$$=x^2-2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+1$$

was nun ein rein reelles quadratisches Polynom ist. Setzt man $a_k:=-2\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$, erhält man genau die oben genannten Werte.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Für alle reellen Zahlen x gilt

$$\begin{aligned}x^{12}&=(x^4+1)(x^8-x^4+1)=(x^4+2x^2+1-2x^2)(x^8+2x^4+1-3x^4)\\&=((x^2+1)^2-2x^2)((x^4+1)^2-3x^4)\\&=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^4+1+\sqrt{3}x^2)(x^4+1-\sqrt{3}x^2)\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}x^4+1+\sqrt{3}x&=x^4+2x^2+1-(2-\sqrt{3})x^2=(x^2+1)^2-(2-\sqrt{3})x^2\\&=(x^2+1+\sqrt{2-\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2-\sqrt{3}}x)\end{aligned}$$

und analog

$$x^4+1-\sqrt{3}x=(x^2+1+\sqrt{2+\sqrt{3}}x)(x^2+1-\sqrt{2+\sqrt{3}}x)$$

Man erhält daher

$$\begin{aligned}x^{12}+1=&(x^2+2\sqrt{2}+1)(x^2-2\sqrt{2}+1)(x^2+\sqrt{2-\sqrt{3}}+1)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{3}}+1)\\&(x^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+1)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}+1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2}; & b_1 &= 1,\\
a_2 &= -\sqrt{2}; & b_2 &= 1,\\
a_3 &= \sqrt{2-\sqrt{3}}; & b_3 &= 1,\\
a_4 &= -\sqrt{2-\sqrt{3}}; & b_4 &= 1,\\
a_5 &= \sqrt{2+\sqrt{3}}; & b_5 &= 1,\\
a_6 &= -\sqrt{2+\sqrt{3}}; & b_6 &= 1
\end{aligned}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 081224
Es sind, alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4| = |x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|$$

erfüllt ist.

Für die linke Seite der Gleichung gilt:

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4| = \pm(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$$

Und für die rechte Seite:

$$|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4| = \pm(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

Somit folgt aus der Ausgangsgleichung

Fall 1: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ oder
Fall 2: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = -(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Wir ermitteln nun, für welche (nicht ganzzahligen) Werte x die Terme

$$a = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4) \qquad \text{und} \qquad b = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

das gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben, also für welche Werte x Fall 1 oder Fall 2 zu betrachten ist.

	$x<-4$	$-4<x<-3$	$-3<x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$
a	>0	>0	<0	<0	>0	>0
b	>0	<0	<0	>0	>0	>0
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 1

	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$x>4$
a	>0	<0	<0	>0
b	<0	<0	>0	>0
	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1

Ausmultiplizieren liefert

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = x^4-2x^3-13x^2+14x+24 \quad \text{und}$$

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = x^4+2x^3-13x^2-14x+24$$

Fall 1: Zu lösen ist

$$x^4-2x^3-13x^2+14x+24 = x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \quad\iff\quad 4x^3-28x=0$$

$$\iff \quad x^3-7x=0 \quad\iff\quad x=0 \text{ oder } x=\sqrt{7} \text{ oder } x=-\sqrt{7}$$

$x_0 = 0$ ist offenbar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Für $x_1 = \sqrt{7}$ gilt $2 < x_1 < 3$. x_1 liegt somit in einem Bereich, für den Fall 1 zuständig ist (siehe Tabelle) und ist somit eine Lösung. Auch $x_2 = -\sqrt{7}$ ist wegen $-3 < x_2 < -2$ eine Lösung.

Fall 2: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = -x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 14x - 24 \quad\iff\quad 2x^4 - 26x^2 + 48 = 0$$

$$\iff\quad x^4 - 13x^2 + 24 = 0 \quad\iff x = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$$

$$\text{oder } x = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$$

Für $x_3 = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$ gilt $x_3 < \sqrt{\frac{13+\sqrt{81}}{2}} = \sqrt{11} < 4$ und $x_3 > \sqrt{\frac{13+\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{10{,}5} > 3$. Somit liegt x_3 im Fall-2-Bereich und ist daher eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Analog folgt mit $x_4 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$, $x_5 = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$ und $x_6 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$, dass $-4 < x_4 < -3$, $1 < x_5 < 2$ und $-2 < x_6 < -1$ und daher x_4, x_5 und x_6 Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Insgesamt haben wir also sieben Lösungen x_0,...,x_6.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

Wir setzen

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \tag{1}$$
$$g(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \tag{2}$$

Die gegebene Gleichung ist genau für alle diejenigen x erfüllt, für die $|f(x)| = |g(x)|$, also $f(x) = g(x)$ oder $f(x) = -g(x)$ ist.

a) Es sei $f(x) = g(x)$.
Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2 \cdot 2x^3 - 2 \cdot 14x = 0 \qquad , \qquad x(x^2 - 7) = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \sqrt{7}, \qquad x_3 = -\sqrt{7}$$

b) Es sei $f(x) = -g(x)$.
Nach (1) und (2) ist dies äquivalent mit

$$2x^4 - 2 \cdot 13x^2 + 2 \cdot 24 = 0, \qquad \left(x^2 - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{73}{4} = 0, \qquad \left(x^2 - \frac{13+\sqrt{73}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{13-\sqrt{73}}{2}\right) = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen

$$x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{26 + 2\sqrt{73}} \qquad , \qquad x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{26 + 2\sqrt{73}}$$
$$x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{26 - 2\sqrt{73}} \qquad , \qquad x_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{26 - 2\sqrt{73}}$$

Da wir nur äquivalente Umformungen durchgeführt haben, hat die gegebene Gleichung genau sieben reelle Lösungen, nämlich die oben angegebenen Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 081225
Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ ohne die Wurzeln auszurechnen.

Für alle reellen Zahlen x, y ist $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$, also $x - y = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$. Mit $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{3}$ für die linke und $x = \sqrt[3]{3}$ sowie $y = \sqrt[3]{2}$ für die rechte Seite der zu zeigenden Ungleichung geht diese äquivalent über in

$$\frac{4-3}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2} < \frac{3-2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

also

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

was aufgrund der strengen Monotonie der dritten Wurzel und $16 > 9$; $12 > 6$ und $9 > 4$ eine wahre Aussage ist. Damit ist die Ungleichung aus der Aufgabenstellung gezeigt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, es würde

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \tag{1}$$

gelten. Dann wäre

$$(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 \leq (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3$$
$$4 - 3\sqrt[3]{48} + 3\sqrt[3]{36} - 3 \geq 3 - 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12} - 2$$
$$\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} \leq \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$$

und nach Division durch $\sqrt[3]{12}$:

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \leq (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) : \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

im Widerspruch zu (1).

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 081226
Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a > b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

Es sei $|AB| = a$, $|CD| = b$, $AB \parallel CD$ und S der Schnittpunkt von AD sowie BC. Weiterhin sei F_T der Flächeninhalt des Trapezes, F_{SAB} der des Dreiecks $\triangle SAB$ und F_{SCD} der des Dreiecks $\triangle SCD$. Dann gilt $F_{SAB} = F_T + F_{SCD}$.

Nach dem Strahlensatz gilt $F_{SCD} = F_{SAB}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2$, also $F_T = F_{SAB}\cdot\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = F_{SAB}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Es ist $F_T = d\cdot\frac{a+b}{2}$, da $\frac{a+b}{2}$ die Länge der Mittellinie des Trapezes und d der Abstand der Parallelen ist. Also ist

$$\frac{d}{2} = F_{SAB}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2\cdot(a+b)} = F_{SAB}\cdot\frac{a-b}{a^2}$$

Andererseits ist $F_{SAB} = \frac{1}{2}\cdot(|AS|+|BS|+a)\cdot\frac{d}{2}$. Dies ergibt sich daraus, dass der Inkreis des Trapezes auch gleichzeitig einer des Dreiecks $\triangle SAB$ ist. Zeichnet man die Verbindungen des Inkreismittelpunkts zu den Eckpunkten des Dreiecks und die Berührungsradien auf die drei Seiten ein, wird das Dreieck $\triangle SAB$ in insgesamt sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren eine Katheten jeweils ein Radius des Inkreises sind, und deren andere Katheten genau den Umfang des Dreiecks zerlegen.

Setzt man hierin den zuvor erhaltenen Term für $\frac{d}{2}$ ein und kürzt durch F_{SAB}, erhält man

$$1 = \frac{1}{2}\cdot(|AS|+|BS|+a)\cdot\frac{a-b}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2a^2}{a-b} = a + |AS| + |BS|$$

also

$$|AS| + |BS| = \frac{2a^2}{a-b} - a = \frac{a^2+ab}{a-b} = a \cdot \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$(|AS| + |BS|)^2 = |AS|^2 + |BS|^2 + 2 \cdot |AS| \cdot |BS| = a^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle SAB$ gilt $a^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos\alpha$. Die Differenz der letzten beiden Identitäten liefert

$$2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot (1+\cos\alpha) = a^2 \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1 \right) = a^2 \cdot \frac{4ab}{(a-b)^2}$$

also

$$F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Damit erhält man

$$d = 2F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, lässt sich das Ergebnis auch schreiben als

$$d = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

9.10.3 III. Runde 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Damit die Brüche definiert sind, müssen die Nenner verschieden von Null sein. Also gilt $a \neq 0$, $x \neq -a$ und $x \neq 2a$. Unter diesen Bedingungen geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner über in
$2x(x-2a) + a(x+a) = 4x + 6 - a$ bzw.

$$0 = 2x^2 - 4ax + ax + a^2 - 4x - 6 + a = 2x^2 - (3a+4)x + (a^2 + a - 6)$$

Diese quadratische Gleichung in x hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3a+4}{4} \pm \sqrt{\frac{(3a+4)^2}{16} - \frac{8\cdot(a^2+a-6)}{16}} = \frac{3a+4 \pm \sqrt{9a^2+24a+16-8a^2-8a+48}}{4} =$$

$$= \frac{3a+4 \pm \sqrt{a^2+16a+64}}{4} = \frac{3a+4 \pm (a+8)}{4}$$

Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{3a+4-(a+8)}{4} = \frac{2a-4}{4} = \frac{a}{2} - 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3a+4+a+8}{4} = a+3$$

Es sind hierbei noch die auftretenden Scheinlösungen auszuschließen, die eine der drei Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$ bzw. $x \neq 2a$ nicht erfüllen.
1. Fall: $x_1 = -a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = -a$ bzw. $a - 2 = -2a$, also $a = \frac{2}{3}$.
2. Fall: $x_2 = -a$. Dann ist $a + 3 = -a$, also $a = -\frac{3}{2}$.
3. Fall: $x_1 = 2a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = 2a$ bzw. $a - 2 = 4a$, also $a = -\frac{2}{3}$.
4. Fall: $x_2 = 2a$. Dann ist $a + 3 = 2a$, also $a = 3$.
Für alle anderen reellen Werte von a sind genau die beiden Werte $x_1 = \frac{a}{2} - 1$ und $x_2 = a + 3$ Lösungen der Ausgangsgleichung, die genau für $a = -8$ zusammenfallen und sonst voneinander verschieden sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

a) Die Gültigkeit der gegebenen Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$, $x \neq 2a$ und der Gleichung

$$2x^2 - (3a+4)x + a^2 + a - 6 = 0$$

b) Diese Gleichung hat, ohne Beachtung der vorgenannten Bedingungen betrachtet, genau die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$.

c) Mit Hilfe der nachfolgenden Fallunterscheidung kann man aus den in b) erhaltenen reellen Zahlen x_1 und x_2 alle die aussondern, die den in a) genannten Bedingungen für x nicht genügen.

c1) Es gilt $x_1 = a + 3 = -a$ genau für $a = -7$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = -\frac{7}{4}$.

c2) Es gilt $x_1 = a + 3 = 2a$ genau für $a = 3$, und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_2 = \frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$.

c3) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{2} = -a$ genau für $a = \frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt sich $x_1 = a + 3 = \frac{11}{3}$,

c4) Es gilt $x_2 = \frac{a-2}{a} = 2a$ genau für $a = -\frac{2}{3}$ und ist dies der Fall, so ergibt $x_1 = a + 3 = \frac{7}{3}$.

d) Aus a), b) und c) ergibt sich die folgende Lösungsübersicht: Die gegebene Gleichung hat für $a \neq 0$, $a \neq -\frac{3}{2}$, $a \neq 3$, $a \neq \frac{2}{3}$, $a = -\frac{2}{3}$ die Lösungen $x_1 = a + 3$, $x_2 = \frac{a-2}{2}$ (diese sind voneinander verschieden,

wenn außerdem noch $a \neq -8$ gilt; ist $a = -8$, so fallen x_1 und x_2 zu der einzigen Lösung $x_1 = -5$ zusammen);
für $a = -\frac{3}{2}$ die Lösung $x_2 = -\frac{7}{4}$
für $a = 3$ die Lösung $x_2 = \frac{1}{2}$
für $a = \frac{2}{3}$ die Lösung $x_1 = \frac{11}{3}$
für $a = -\frac{2}{3}$ die Lösung $x_1 = \frac{7}{3}$
für $a = 0$ keine Lösung.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 081232
a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$, streng monoton fallend ist.
b) Beweisen Sie, dass alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Die Folge a_n ist streng monoton fallend genau dann, wenn es auch die Folge $b_n = a_n - \frac{7}{10}$ auch ist. Dabei ist

$$b_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - \left(5n + \frac{7}{10}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25n^2 + 7n + 1} - \left(5n + \frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n + \frac{7}{10}\right)}{\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n + \frac{7}{10}} = \frac{(25n^2 + 7n + 1) - \left(5n + \frac{7}{10}\right)^2}{\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{(25n^2 + 7n + 1) - \left(25n^2 + 7n + \frac{49}{100}\right)}{\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

$$= \frac{\frac{51}{100}}{\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5n + \frac{7}{10}}$$

Da der Zähler dieses Bruchs konstant, der Nenner aber eine in n streng monoton wachsende Funktion ist, ist die Folge b_n – und mit ihr auch die Folge a_n streng monoton fallend. Darüber hinaus sind für alle n Zähler und Nenner von b_n offensichtlich positiv, sodass für alle n $b_n > 0$ und $a_n = b_n + \frac{7}{10} > \frac{7}{10}$ folgt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 081233
Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ϵ und g die Gerade, die diese Strecke enthält.
a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ϵ, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.
Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

a) Für einen Berührungspunkt B eines Kreises k, der die Sehne P_1P_2 enthält (und für den also g eine Sekante ist, die auch den Punkt Q enthält) mit der Tangente durch Q gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz $|BQ|^2 = |QP_1| \cdot |QP_2|$. Insbesondere ist die rechte Seite dieser Gleichung konstant und nicht vom betrachteten Kreis k abhängig. Damit liegen alle diese Berührungspunkte für alle solche Kreise k auf einem Kreis um Q mit Radius $\sqrt{|QP_1| \cdot |QP_2|}$.

b) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt B, der auf beiden Kreisen nach Aufgabenteil a) um Q_1 bzw. Q_2 liegt. Dabei sind zur Lage des Punktes B zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: B liegt nicht auf g. Dann gibt es genau einen Kreis, der die drei Punkte B, P_1 und P_2 enthält. Sein Mittelpunkt sei M. Nach Aufgabenteil a) berühren aber sowohl die Gerade Q_1B als auch Q_2B den Kreis k in B und stehen somit senkrecht auf MB. Da es nur eine solche Orthogonale zu MB durch B gibt, müssen die beiden Geraden Q_1B und Q_2B identisch sein, ihre Schnittpunkte mit g aber auch. Da B nicht auf g liegt, ist dieser Schnittpunkt aber eindeutig bestimmt, sodass $Q_1 = Q_2$ entgegen der Voraussetzung folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Fall 2: B liegt auf g. Es seien $r_1 = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|}$ und $r_2 = \sqrt{|Q_2P_1| \cdot |Q_2P_2|}$ die Radien der beiden Kreise. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

Fall 2.1: Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_1P_2. O.B.d.A. gelte $|Q_1P_1| < |Q_1P_2|$. Dann ist $r_1 < \sqrt{|Q_1P_2| \cdot |Q_1P_2|} = |Q_1P_2| < |Q_1Q_2|$. Analog ist auch $r_2 < |Q_1Q_2|$. Damit muss jeder Schnittpunkt B beider Kreise auf g zwischen ihnen liegen.
Dann ist

$$|Q_1Q_2| = |Q_1B| + |Q_2B| = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|} + \sqrt{|Q21P_1| \cdot |Q_2P_2|} <$$

$$< \frac{1}{2} \cdot (|Q_1P_1| + |Q_1P_2| + |Q_2P_1| + |Q_2P_2|) = |Q_1M| + |MQ_2| = |Q_1Q_2|$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 2.2.: Q_1 und Q_2 liegen auf der gleichen Seite von P_1P_2. O.B.d.A. liegen die Punkte dann in der Reihenfolge Q_2, Q_1, P_1, P_2 auf g. Es ist dann wegen $|P_1Q_2| > |P_1Q_1|$ und $|P_2Q_2| > |P_2Q_1|$ auch $r_2 > r_1$. Insbesondere kann dann nicht B "vor" Q_2 liegen, da dann $r_1 = |BQ_1| = |BQ_2| + |Q_1Q_2| > r_2$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist. Auch kann B nicht auf der Strecke Q_2Q_1 liegen, da sonst der Widerspruch durch $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2B| + |BQ_1| = |Q_2Q_1| < |Q_2P_1|$ folgen würde.

Also muss B auf g "nach" Q_1 liegen. Da $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2P_2|$ gilt, liegt der einzige Schnittpunkt des Kreises um Q_2 mit g, der "nach" Q_1 liegt, auf der Strecke P_1P_2. Dieser hat die Entfernung $r_2 - |Q_2P_1|$ von P_1. Analog hat der Schnittpunkt des Kreises um Q_1 mit g, der "nach" Q_1 auf g liegt, die Entfernung $r_1 - |Q_1P_1|$ von P_1. Damit B als Schnittpunkt dieser beiden Kreise an der angegebenen Stelle existiert, müssen diese Werte gleich sein.

Es seien x und t positive reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion $f_t(x) := \sqrt{x \cdot (t+x)} - x$. Dann ist die Entfernung des zu betrachtenden Schnittpunktes des Kreises um Q_2 mit g von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ und analog die des Schnittpunktes des Kreises um Q_1 von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$. Es genügt also für die Nichtexistenz eines gemeinsamen Schnittpunktes B beider Kreise auf g zu zeigen, dass für konstantes $t > 0$ die Funktion $f_t(x)$ streng monoton für alle $x > 0$ ist.

Es ist dabei $f_t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} - 1$. Um die strenge Monotonie für $f_t(x)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass für die zu betrachtenden positiven Werte von x stets auch $f_t'(x) > 0$ ist. Für $x = t$ ist dies jedenfalls der Fall, denn $f_t'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{\sqrt{t \cdot 2t}} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 > 0$. Die letzte Ungleichung sieht man dadurch ein, dass man sie äquivalent zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ bzw. $3 > 2\sqrt{2}$ und schließlich der offensichtlich wahren Ungleichung $9 > 4 \cdot 2 = 8$ umformt.

Wäre $f_t(x)$ nicht streng monoton für alle $x > 0$, so müsste es also aufgrund der Stetigkeit von $f_t'(x)$ mindestens eine Nullstelle dieser Funktion geben. Es ist aber die Gleichung $f_t'(x) = 0$ äquivalent zu

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} = 1$ bzw. $2x + t = 2\sqrt{x \cdot (t+x)}$, woraus

$$4x^2 + 4xt + t^2 = (2x+t)^2 = 4x(t+x) = 4x^2 + 4xt$$

also $t^2 = 0$ und damit $t = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Damit hat $f_t'(x)$ für alle $t > 0$ keine Nullstellen, ist $f_t(x)$ streng monoton und nimmt also für verschiedene Argumente x auch verschiedene Funktionswerte an. Insbesondere sind also wegen $P_1 \neq P_2$ und $Q_1 \neq Q_2$ auch $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$ und $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ verschieden, sodass die beiden Kreise gemäß Teilaufgabe a) um Q_1 bzw. Q_2 keinen gemeinsamen Punkt auf g, und damit auch auf ganz ϵ, besitzen, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 081234
Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden.
Während im Jahre 1950 noch 92760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wie viel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?
b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d.h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?
c) Mit wie viel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

a) Es sei q der (als konstant angenommene) Quotient der Anzahl der Krankheitsfälle in einem Jahr bezogen auf die des Vorjahres.

Dann gilt aufgrund der Aufgabenstellung $92760 \cdot q^{16} = 13777$ bzw. $q = \sqrt[16]{\frac{13777}{92760}}$. Mit einem Taschenrechner erhält man $q \approx 0.8876$, sodass die Anzahl der Krankheitsfälle im Schnitt pro Jahr um ca. 11.24% zurückgegangen ist.

Bemerkung: Als diese Aufgabe gestellt wurde, waren Taschenrechner noch nicht verfügbar, wohl aber Logarithmentafeln.
An diesen liest man leicht $\lg(1.3777) \approx 0.139$ und $\lg(9.2670) \approx 0.967$ ab, woraus man $\lg\left(\frac{13777}{92760}\right) \approx 0.139 - 0.967 = -0.828$ und damit $\lg(q) \approx -\frac{0.828}{16} \approx -0.052$ erhält. Wieder kann man an einer solchen Tafel den Wert $10^{1-0.052} = 10^{0.948} \approx 8.872$ ablesen, was auf $q \approx 0.8872$ führt. Die Rechnung wird natürlich genauer, wenn man nicht nur drei-stellige Mantissen, wie hier angenommen, zur Verfügung hat. Es stellt sich auch die Frage, für welche Werte die Tabellen vorlagen...

b) Für die Halbwertszeit t, gemessen in Jahren, gilt $q^t = \frac{1}{2}$, also $t \cdot \lg(q) = -\lg(2)$ bzw. $t = -\frac{\lg(2)}{\lg(q)} \approx 5.8$, sodass knapp alle Jahre eine Halbierung der Anzahl der Krankheitsfälle eintritt.

c) Nimmt man weiter eine gleichbleibende prozentuale Verringerung der Krankheitsfälle pro Jahr an, so sinkt deren Anzahl von 1966 bis 1970 um den Faktor q^4, sodass man dann etwa noch ca. $13777 \cdot 0.8876^4 \approx 8500$ Krankheitsfälle erwartet.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 081235
Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.
(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.
(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.
(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.
(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, dass von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.
Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Die Aussagen 1) und 4) können nicht beide gleichzeitig erfüllt sein, da es höchstens eine Kante mit Länge des Kugeldurchmessers geben kann.
Eine Pyramide mit der rechtwinkligen Grundfläche mit den Seiten $3; 4; 5$ und einer Höhe 2,5, wobei die Spitze über dem Mittelpunkt der Hypotenuse liegt, erfüllt die Bedingungen 1), 2), 5) und 6).

Diese hat das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\frac{3\cdot 4}{2}\cdot 2{,}5 = 5$. Streckung um den Faktor 2 ergibt eine Pyramide mit den Volumen 40 und den Grundkanten 6; 8; 10. Die anderen Kanten sind gleichlang, da die Spitze direkt über dem Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche liegt und haben die Länge $5\sqrt{2}$.
Dieses lässt sich leicht an dem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck bestehend aus der Hypotenuse und der Spitze ablesen.

Quelle anonym

Aufgabe 6 - 081236
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

Unter Verwendung von

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$$

sowie

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

wird die Ausgangsgleichung zu

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x) = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\right)$$

woraus sich unmittelbar

$$\sin^2(2x) = \frac{4(a-1)}{2a-3} \quad (*)$$

und wegen $0 \leq \sin^2(2x) \leq 1$ die Bedingung $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ für a ergibt. Speziell für $a = \frac{5}{6}$ ist (*) dann äquivalent zu

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Es gilt für alle reellen x

$$1 = (\sin^2 x + cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$$

also

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

ferner ist

$$\begin{aligned} 1 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x \\ &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x \end{aligned}$$

also

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

Die gegebene Gleichung ist daher äquivalent mit jeder der folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x &= a - 2a\sin^2 x\cos^2 x \\ (2a-3)\sin^2 x\cos^2 x &= a - 1 \end{aligned}$$

und weiter mit
$$4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{4(a-1)}{2a-3} \qquad , \qquad \sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$$
da die vorhergehenden Gleichungen für $2a-3=0$ sicher keine Lösungen haben.
Die gegebene Gleichung hat also genau dann mindestens eine reelle Lösung, wenn

$$0 \leq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leq 1 \tag{1}$$

gilt.
Angenommen, für ein a gelte (1). Dann ist $a \neq \frac{3}{2}$. Wäre nun $a > \frac{3}{2}$, so folgte $a \leq \frac{1}{2}$, also ein Widerspruch. Daher ergibt sich $a < \frac{3}{2}$ und wegen $2a-3<0$

$$0 \geq 4(a-1) \geq 2a-3 \tag{2}$$

also $a \leq 1$ und $a \geq \frac{1}{2}$. Mithin kann (1) höchstens für alle a mit

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \tag{3}$$

gelten.
Trifft umgekehrt (3) zu, so gilt (2) und zugleich $a < \frac{3}{2}$, woraus in der Tat folgt, dass (1) erfüllt ist. Die obige Gleichung hat also genau für alle $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ mindestens eine reelle Lösung.
Für $a = \frac{5}{6}$ erhält man
$$|\sin 2x| = 2\sqrt{\frac{1-\frac{5}{6}}{3-\frac{10}{6}}} = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
mit $2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, d.h. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ (k eine ganze Zahl), also sämtliche Lösungen.

Übernommen aus [2]

9.10.4 IV. Runde 1968, Klasse 12

Aufgabe 1 - 081241
Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0, q > 0$).
Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.
Beweisen Sie!
Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4... \\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3} \\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2} \\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung p/q stets gleiche Nenner.

Für Ziffern $a,b,c,d \in \{0,1,...,9\}$ bezeichnen wir mit $[abcd]$ die (bis zu) vierstellige Zahl

$$[abcd] := 1000a + 100b + 10c + d$$

Dann ist $10000z_1 - z_1 = [a_1a_2a_3a_4]$, also $z_1 = \frac{[a_1a_2a_3a_4]}{9999}$. Entsprechend ist $z_2 = \frac{[a_4a_1a_2a_3]}{9999}$, $z_3 = \frac{[a_3a_4a_1a_2]}{9999}$ und $z_4 = \frac{[a_2a_3a_4a_1]}{9999}$. Diese vier Brüche haben jetzt zwar denselben Nenner, jedoch liegen sie noch nicht unbedingt in gekürzter Form vor.

Die Primfaktorzerlegung der Nenner der vier Brüche lautet $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Also lassen sich hier bestenfalls die Faktoren 3, (oder sogar 9), 11 und 101 kürzen.
Bekanntlich ist eine ganze Zahl genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Die Quersumme der vier Zähler ist jedoch identisch, also lässt sich bei allen vier Brüchen entweder 3 oder 9 oder keins von beiden kürzen.
Ebenfalls ist allgemein bekannt, dass eine ganze Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme der Zahl durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme der Zähler lautet hier $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ bzw. das Negative von diesem Wert. Also gilt auch hier: Entweder sind alle vier Zähler durch 11 teilbar oder keiner der Zähler. Und daher: Entweder lassen sich alle vier Brüche durch 11 kürzen oder keiner.

Schließlich gilt für $x := [abcd]$, dass x genau dann durch 101 teilbar ist, wenn $a = c$ und $b = d$. (Begründung: Wenn $[abcd] = 101y$, dann ist $y < 100$ und damit $y = 10e + f$ für gewisse $e,f \in \{0,1,...,9\}$ und daher $101y = [efef]$). Nach Voraussetzung ist jedoch der Fall, dass $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$ ausgeschlossen, also ist keiner der vier Zähler durch 101 teilbar und daher bei keinem der vier Brüche der Faktor 101 kürzbar.

Zusammenfassend: Bei keinem der vier Brüche z_1,z_2,z_3,z_4 lässt sich in obiger Darstellung der Faktor 101 kürzen, und die Faktoren 3 (bzw. 9) und 11 lassen sich in allen oder in keinem der Brüche kürzen. Somit besitzen alle vier Brüche in gekürzter Darstellung denselben Nenner.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - 081242
In einer Ebene ϵ liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als "Spiegelung am Kreis k" bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ϵ ein Punkt P' aus ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $MP \cdot MP' = r^2$.
a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!
b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, dass M außerhalb von k_1 liegt.
Konstruieren Sie k_1' , d.h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

a) Man zeichne die Gerade s durch M und P. Die Orthogonale zu s durch M schneide k in C und C'. Die Orthogonale zu CP schneide s in Q. Die Spiegelung von Q an M ist dann P'.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle QPC$ rechtwinklig in C und QM seine Höhe auf die Hypotenuse QP. Dann gilt nach dem Höhensatz $|QM| \cdot |MP| = |MQ|^2 = r^2$. Spiegelt man Q nun noch an M, so liegen dessen Spiegelpunkt P' und P auf s auf der gleichen Seite von M, also P' auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl. Weiterhin ist $|MP'|$, also $|MP| \cdot |MP'| = |MP| \cdot |MQ| = r^2$, wie gewünscht.

b) Es sei M_1 der Mittelpunkt von k_1. Ist dieser nicht gegeben, so kann man ihn sich leicht als Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks auf k_1 durch Schnitt von zwei der drei zugehörigen Mittelsenkrechten erhalten.

Da M außerhalb von k_1 liegt, kann man die durch M verlaufenden Tangenten t_1 und t_2 an k_1 konstruieren. Dazu schneide man den Kreis um den Mittelpunkt der Strecke MM_1 und dem Durchmesser MM_1 mit k_1 und erhalte die Berührungspunkte B_1 und B_2. Die Geraden MB_1 und MB_2 sind dann die gesuchten Tangenten t_1 bzw. t_2 an k_1.

Begründung zur Tangentenkonstruktion:
Nach Konstruktion und Satz von Thales sind die Dreiecke $\triangle MM_1B_1$ und $\triangle MM_1B_2$ rechtwinklig, da B_1 und B_2 auf dem Kreis mit Durchmesser MM_1 liegen. Also sind die Geraden MB_1 und B_1M_1 bzw. MB_2 und B_2M_1 jeweils senkrecht zueinander. Dabei sind B_1M_1 und B_2M_1 Radien, auf die die Geraden MB_1 bzw. MB_2 in den Punkten auf der Kreislinie senkrecht stehen. Die Geraden MB_1 und MB_2 berühren also k_1 in B_1 bzw. B_2, sind demnach Tangenten an k_1 und verlaufen durch M.

Weiter zur Konstruktion:
Man konstruiere gemäß Teilaufgabe a) die Spiegelpunkte B_1' von B_1 und B_2' von B_2, errichte auf t_1 die Senkrechte durch B_1', auf t_2 die Senkrechte durch B_2' und bezeichne deren Schnittpunkt als M'. Abschließend konstruiere man den Kreis k_1' um M' durch B_1'.

Begründung:
Da alle Punkte auf k_1 im von t_1 und t_2 aufgespannten Winkel mit Scheitelpunkt M liegen, muss dies analog für k_1' auch gelten, da ja auch alle von M ausgehenden und durch Punkte von k_1 verlaufenden Strahlen in diesem Winkel liefen.

Da t_1 sowie t_2 jeweils nur einen Punkt mit k_1 gemeinsam haben, muss das für k_1' auch gelten. Setzen wir hier voraus, dass das Bild eines Kreises k_1, der nicht durch M verläuft, wieder ein Kreis ist, erhält man dessen Mittelpunkt also dadurch, dass man die Orthogonalen durch die konstruierten Berührungspunkte an den Tangenten schneidet.

Es bleibt zu zeigen, dass k_1' tatsächlich das Bild von k_1 ist. Sei dazu P ein von B_1 und B_2 verschiedener Punkt auf k_1 und Q der zweite Schnittpunkt des von M ausgehenden Strahl s durch P mit k_1. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz bezogen auf den Kreis k_1 die Gleichung $|MP| \cdot |MQ| = |MB_1|^2$. Es seien P' und Q' die Spiegelpunkte von P bzw. Q. Dann liegen diese beiden Punkte auch auf dem Strahl s und es gilt $|MP| \cdot |MP'| = r^2 = |MQ| \cdot |MQ'|$, also

$$|MP'| \cdot |MQ'| = \frac{r^2}{|MP|} \cdot \frac{r^2}{|MQ|} = \frac{r^4}{|MP| \cdot |MQ|} = \frac{r^4}{|MB_1|^2} = \left(\frac{r^2}{|MB_1|}\right)^2 = |MB_1'|^2$$

Damit gilt nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatz, dass die drei Punkte P', Q' und B_1' auf einem Kreis liegen, für den die Gerade MB_1' eine Tangente ist. Also liegen die Bilder aller Punkte von k_1 auf k_1'.

Da die Spiegelung an k bei zweifacher Ausführung jeden Punkt wieder auf sich selbst abbildet und das Bild aller Punkte von k_1' nach der gleichen Argumentation auf k_1 liegen muss, ist tatsächlich der gesamte Kreis k_1' das Bild der Punkte des gesamten Kreises k_1.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 081243
Eine Menge M von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M eindeutig ein Element w aus M zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d.h. wenn für alle Elemente u, v, w aus M gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und es sei M die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus M werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche
a) ob M eine Halbgruppe ist;
b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d.h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

a) Zum Beweis der Abgeschlossenheit seien $u,v \in M$, also $0 \leq u < c$ und $0 \leq v < c$. Dann ist offensichtlich auch $u \otimes v$ als Quotient einer nichtnegativen reellen Zahl $u+v$ und einer positiven reellen Zahl $1+\frac{uv}{c^2} \geq 1+\frac{0\cdot 0}{c^2} = 1 > 0$ selbst nichtnegativ. Weiterhin ist

$$u \otimes v < c \Leftrightarrow \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} < c \Leftrightarrow cu + cv < c^2 + uv \Leftrightarrow 0 < c^2 - cu - cv + uv = (c-u)(c-v)$$

was offensichtlich wegen $u < c$ und $v < c$ wahr ist.
Für den Beweis der Assoziativität berechnen wir beide Terme:

$$(u \otimes v) \otimes w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c}^2} \otimes w = \left(c^2 \cdot \frac{u+v}{c^2+uv}\right) \otimes w =$$

$$= c^2 \cdot \frac{c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} + w}{c^2 + c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} \cdot w} = \frac{\frac{c^2(u+v)+c^2 w + uvw}{c^2+uv}}{1+\frac{(u+v)w}{c^2+uv}} == \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+uv+uw+vw}$$

und

$$u \otimes (v \otimes w) = u \otimes \left(c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}\right) =$$

$$= c^2 \cdot \frac{u + c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}}{c^2 + u \cdot c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}} = \frac{\frac{c^2 \cdot u + uvw + c^2 \cdot (v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u(v+w)}{c^2+vw}} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+vw+uv+uw}$$

sodass offenbar $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ gilt. Damit ist M bezüglich der Verknüpfung $\otimes$ eine Halbgruppe.

b) Es ist

$$u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} = c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} \Leftrightarrow (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1)$$

$$\Leftrightarrow uc^2 + u^2 v_2 + v_1 c^2 + uv_1 v_2 = uc^2 + u^2 v_1 + v_2 c^2 + uv_1 v_2$$

$$\Leftrightarrow u^2(v_2 - v_1) - (v_2 - v_1)c^2 = (v_2 - v_1)(u^2 - c^2) = 0$$

Da aber $u < c$ gilt, ist $u^2 - c^2 \neq 0$, also $u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow v_2 - v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.
Weiterhin ist $\otimes$ kommutativ, da für alle $uv \in M$ die Beziehung

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = v \otimes u$$

gilt.
Insbesondere folgt also aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ sofort durch Ausnutzung der Kommutativität auf beiden Seiten der Gleichung $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$, und daraus – wie eben gezeigt – wieder $v_1 = v_2$.
Damit ist die (kommutative) Halbgruppe $(M,\otimes)$ regulär.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 081244
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

Aufgrund der zweiten Gleichung haben beide Variablen das gleiche Vorzeichen. Wären beide negativ, so auch $x+y$. Dann wäre aber $\log_2(x+y)$ nicht definiert. Demnach sind sowohl x als auch y positiv. Damit $\log_2(x-y)$ definiert ist, muss $x > y$ gelten, also aufgrund der zweiten Gleichung dann $x+y > x > \sqrt{3}$. Damit ist $\log_2(x+y)$ stehts positiv und die Betragsstriche können entfallen.
Es verbleiben zwei Fälle:
1. Fall: $x - y \geq 1$.
Dann ist auch $\log_2(x-y) \geq 0$ und die erste Gleichung wird zu

$$3 = \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = \log_2(x^2 - y^2)$$

also $x^2 - y^2 = 8$ bzw. $x^4 - (xy)^2 = x^4 - 9 = 8x^2$, was mit der Substitution $t = x^2$ übergeht in die quadratische Gleichung $t^2 - 8t - 9 = 0$, die die Lösungen $4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$ hat. Da $t = x^2 \geq 0$ ist, entfällt die negative Lösung -1 und es verbleibt $t = x^2 = 9$, also $x = 3$ und $y = 1$. Die Probe bestätigt, dass diese Variablenbelegung auch das Ausgangsgleichungssystem löst.
2. Fall: $x - y < 1$.
Dann ist $\log_2(x-y) < 0$, sodass die erste Gleichung übergeht in

$$3 = \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = \log_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

also $8 = \frac{x+y}{x-y}$ bzw. $x+y = 8(x-y)$, also $9y = 7x$ bzw. $y = \frac{7}{9}x$ und damit $3 = xy = \frac{7}{9}x^2$, welches auf $x^2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ und (wegen $x > 0$) auf $x = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$ sowie $y = \frac{7}{9}x = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Zur Probe: Es ist $x \cdot y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{1}{7} \cdot 21 = 3$, sodass die zweite Gleichung erfüllt ist. Weiterhin ist

$$x + y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9+7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

sodass man $\log_2(x+y) = \log_2(16) - \log_2(\sqrt{21}) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ erhält. Da $21 < 256$ ist, folgt $\frac{1}{2}\log_2(21) < \frac{1}{2}\log_2(256) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, sodass $|\log_2(x+y)| = \log_2(x+y) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ gilt.
Darüber hinaus ist $x - y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9-7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, sodass man

$$\log_2(x-y) = \log_2(2) - \log_2(\sqrt{21}) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(21)$$

erhält. Wegen $21 > 4$ ist $\frac{1}{2}\log_2(21) > \frac{1}{2}\log_2(4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, sodass $|\log_2(x-y)| = -\log_2(x-y) = \frac{1}{2}\log_2(21) - 1$ ist. Zusammen mit dem zuvor berechneten ist dann $|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21) - \frac{1}{2}\log_2(21) - 1 = 4 - 1 = 3$, sodass auch die zweite Gleichung von diesem Paar erfüllt wird.
Zusammen ergeben sich also genau zwei Lösungspaare, nämlich $(x,y) = (3,1)$ oder $(x,y) = \left(\frac{3}{7} \cdot \sqrt{21}, \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21}\right)$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 081245
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

Es ist

$$\sin 5x = 5 \sin x \cos^{5-1} x - \binom{5}{3} \sin^3 x \cos^{5-3} x + \binom{5}{5} \sin^5 x \cos^{5-5} x = 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x$$

$$= \sin x(5\cos^4 x - 10(1-\cos^2 x)\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2)$$
$$= \sin x(5\cos^4 x - 10\cos^2 x + 10\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$$
$$= 16\sin x\left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}\right)$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}$$

Für die linke Seite nutzen wir nun (zweimal) die Produktformel:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$
$$= \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x\left(2 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Direkte Berechnung der Summe und des Produkts:
Das Produkt ist einfach und braucht nur die Doppelwinkelfunktion des Sinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)}{2\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = -\frac{1}{4}$$

Für die Summe braucht man zudem noch die Produktformel des Kosinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Alternativ lassen sich Produkt und Summe auch über die Einzelwerte berechnen, welche Rainer Müller in 041244 verwendet. Im Gegensatz zu seiner Methode könnte man diese Werte wie folgt berechnen:
Es ist

$$\cos(72°) = 2\cos^2(36°) - 1 = 2\cos^2(144°) - 1 = 2(2\cos^2(72°) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(72°) - 8\cos^2(72°) + 1$$

Damit ist $t = \cos(72°)$ Nullstelle von $8t^4 + 8t^2 - t + 1$.
Offensichtlich ist $t = 1$ Nullstelle. Es folgt damit $8t^4 + 8t^2 - t + 1 = (t-1)(8t^3 + 8t^2 - 1)$
Der zweite Faktor ist offensichtlich

$$8t^3 + 4t^2 + 4t^2 - 1 = 4t^2(2t+1) + (2t-1)(2t+1) = (2t+1)(4t^2 + 2t - 1)$$

Die Kosinuswerte für $t = 1$ und $t = -\frac{1}{2}$ sind bekannt. Damit muss $4t^2 + 2t - 1$ der Faktor werden, welcher Null ergibt. Vom Verlauf der Kosinusfunktion weiß man, welche Nullstelle zu wählen ist.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösung:
Es sei $z := \cos x + i\sin x$ und es sei $\omega := e^{\frac{i\pi}{5}}$. Dann ist ω^2 eine primitive fünfte Einheitswurzel und somit gilt $u^5 - 1 = (u-1)(u-\omega^2)(u-\omega^4)(u-\omega^{-2})(u-\omega^{-4})$ für alle $u \in \mathbb{C}$. Außerdem haben z und ω beide Betrag 1, also gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$ und $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$.
Somit ist

$$\begin{aligned}\sin(5x) = \operatorname{Im} z^5 &= \frac{1}{2i}(z^5 - z^{-5})\\ &= \frac{1}{2iz^5}(z^{10} - 1) = \frac{1}{2iz^5}((z^2)^5 - 1)\\ &= \frac{1}{2iz^5}(z^2-1)(z^2-\omega^2)(z^2-\omega^4)(z^2-\omega^{-2})(z^2-\omega^{-4}).\end{aligned}$$

Wegen
$$z^2-\omega^{2k}=z\omega^k(z\omega^{-k}-z^{-1}\omega^k)=z\omega^k\cdot 2i\,\mathrm{Im}(z\omega^{-k})=2iz\cdot\omega^k\cdot\sin\left(x-\frac{k\pi}{5}\right),$$
folgt weiter:
$$\begin{aligned}\sin(5x)&=\frac{1}{2iz^5}(z^2-1)(z^2-\omega^2)(z^2-\omega^4)(z^2-\omega^{-2})(z^2-\omega^{-4})\\&=\frac{1}{2iz^5}\cdot(2iz)^5\cdot\omega^{0+1+2-1-2}\cdot\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\\&=16\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 081246
Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt.
Man beweise, dass dann auch das Polynom
$$F(x)=f(x)+h\cdot f'(x)+h^2\cdot f''(x)+...+h^n\cdot f^{(n)}(x)$$
keine reellen Nullstellen hat!

Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x\in mathbbR: f(x)>0$ oder $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)<0$ gelten. O.B.d.A. gelte $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)>0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d.h. es existiert ein $x_0\in\mathbb{R}$ mit $\forall x\in\mathbb{R}: F(x)\geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0)>0$ gilt.
Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x)=F(x)-hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):
$$F=\sum_{k=0}^{\infty}h^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}f=\left(1-h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}f.$$
Wegen $F'(x_0)=0$ folgt somit
$$F(x_0)=f(x_0)+hF'(x_0)=f(x_0)>0.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Diese Aufgabe ist mit der Aufgabe 101242 identisch.

9.11 IX. Olympiade 1969

9.11.1 I. Runde 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091211
Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, dass jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, dass je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten.

Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

Bezeichnet man die Anzahl der anwesenden Herren mit h, die der Damen mit d, so beträgt die Anzahl der an diesem Abend ausgeführten Tänze sowohl $3h$ als auch $2d$, so dass zwischen h und d die Beziehung

$$3h = 2d \qquad (1)$$

besteht. Eine weitere folgt daraus, dass die Anzahl der Paare von Herren, nämlich $\frac{1}{2}(h-1)h$, mit der Anzahl der Damen übereinstimmt, also auch

$$\frac{1}{2}(h-1)h = d \qquad (2)$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt $h = 4, d = 6$, so dass nur diese Anzahlen für die Lösung in Frage kommen.

Dass mit diesen Anzahlen tatsächlich eine (und bis auf die willkürliche Nummerierung de Teilnehmer auch genau eine) Lösung existiert, die allen drei gestellten Bedingungen genügt, zeigt nachfolgende Aufstellung der 12 Tanzpaare, in welcher die Herren von 1 bis 4, die Damen von 1' bis 6' nummeriert sind:

$$11', 22', 33', 14', 25', 36', 21', 32', 13', 44', 45', 46'$$

Hierin treten wie gefordert 1, 2, 3 und 4 je genau dreimal und 1', 2', ..., 6' je genau zweimal auf.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 091212

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

Es wird sogleich der allgemeine Fall b) gelöst:

b) Setzt man $z = x + \frac{3}{2}$, dann ist x eine Lösung der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a \qquad (1)$$

genau dann, wenn z eine Lösung der Gleichung

$$\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right) = a \qquad \text{bzw.} \qquad (2)$$

$$\left(z^2-\frac{9}{4}\right)\left(z^2-\frac{1}{4}\right) = a$$

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} - a = 0 \qquad (3)$$

ist. Nun ist die Gleichung (3) erfüllt genau dann, wenn

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16} + a} = \frac{5}{4} + \sqrt{1+a} \qquad \text{oder} \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+a} \qquad (4{,}5)$$

gilt. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: (zugleich Antwort zu Aufgabe a):

Für $a = \frac{9}{16}$ folgt aus (4) und (5)

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{10}{4} \qquad ; \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 0$$

Daher hat die Gleichung (3) in diesem Fall genau drei Lösungen, nämlich

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Die Gleichung (1) hat daher in diesem Fall ebenfalls genau drei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

2. Fall: Für $a < -1$ hat die Gleichung (3) und damit auch Gleichung (1) keine Lösung, weil $1 + a < 0$ ist.

3. Fall: Für $a = -1$ hat die Gleichung (3) genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. Fall: Für $a > -1$ und $\sqrt{1+a} < \frac{5}{4}$, d.h. $1 + a < \frac{25}{16}$, also $a < \frac{9}{16}$, d.h. für $-1 < a < \frac{9}{16}$ hat die Gleichung (4) genau vier Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_3 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}; \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}$$

5. Fall: Für $a > \frac{9}{16}$ wird $\frac{5}{4} - \sqrt{1+a} < \frac{5}{4} - \frac{5}{4}$; die Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}$$

Zusammenfassung:

Daher hat die Gleichung (1), wenn man nur reelle Lösungen zulässt, keine Lösung, falls $a < -1$, genau eine Lösung in keinem Falle, genau zwei Lösungen falls $a = -1$, oder $a > \frac{9}{16}$, genau drei Lösungen, falls $a = \frac{9}{16}$, genau vier Lösungen, falls $-1 < a < \frac{9}{16}$, mehr als vier Lösungen in keinem Falle.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 091213
Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist.

Anmerkung: a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$.

Da für alle positiven ganzen Zahlen

$$(a^a)^a = a^{a \cdot a} = a^{\left(a^2\right)}$$

gilt, kann die gegebene Gleichung auch in der Form $a^{a^a} = a^{\left(a^2\right)}$ geschrieben werden.

(1) Für $a \neq 1$ folgt hieraus die Bedingung, dass die Exponenten übereinstimmen müssen, so dass $a^a = a^2$ gefolgert werden kann. Wegen $a \neq 1$ folgt daraus weiter die Bedingung $a = 2$. Also kann für $a \neq 1$ nur die natürliche Zahl 2 Lösung sein.

    Tatsächlich gilt $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

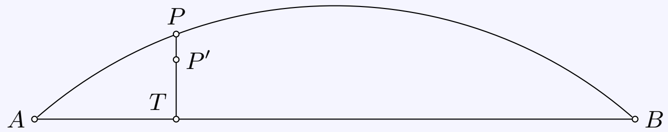
(2) Prüft man den bisher ausgeschlossenen Fall $a = 1$ unmittelbar durch Einsetzen in die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass auch die natürliche Zahl 1 die gegebene Gleichung löst; denn es gilt $1^{1^1} = 1 = (1^1)^1$.

Weitere Lösungswerte gibt es nicht.

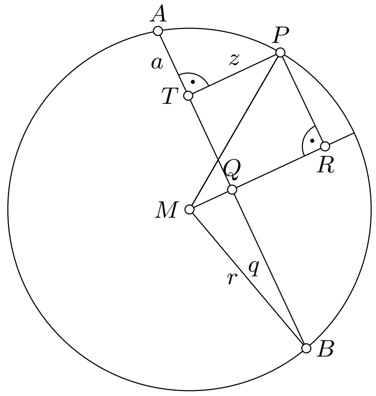
Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 091214
In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$. Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqslant \frac{1}{5}r$.



Es ist zu beweisen, dass dann der relative Fehler $\delta = \dfrac{|z - z'|}{z}$ stets kleiner als 0,0051, d.h. 0,51 % ist.



Es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, Q der Mittelpunkt der Sehne AB, PR das Lot von P auf die Gerade durch M und Q. Dann kann o.B.d.A. $0 < a \leq b$ vorausgesetzt werden, da dies gegebenenfalls durch entsprechende Wahl der Bezeichnungen stets erreicht werden kann.

Dabei gilt $PR = \frac{1}{2}(b - a)$ und $BQ = \frac{1}{2}(b + a)$. Setzt man nun $PR = p$, $BQ = q$, so erhält man

$$z = \sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2} \qquad \text{und} \qquad z' = \frac{(q-p)(q+p)}{2r} \qquad \text{also}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{q^2 - p^2}{2r(\sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2})} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - q^2}}{2r}$$

Aus $0 < a \leq b$ und $a + b \leq \frac{1}{5}r$ folgt $0 \leq p < q \leq \frac{1}{10}r$, also

$$r\sqrt{0{,}99} \leq \sqrt{r^2 - q^2} < \sqrt{r^2 - p^2} \leq r$$

und hieraus $\sqrt{0{,}99} < \frac{z'}{z} < 1$, also $\delta = \left|1 - \frac{z'}{z}\right| = 1 - \frac{z'}{z} < 1 - \sqrt{0{,}99}$.

Nun ist $(1 - 0{,}0051)^2 = 1 - 0{,}0102 + 0{,}00002601 < 0{,}99$, also $1 - 0{,}0051 < \sqrt{0{,}99}$.
Daher gilt: $\delta < 1 - \sqrt{0{,}99} < 0{,}0051$. Der relative Fehler ist kleiner als 0,0051, d.s. 0,51 %.

Übernommen von [5]

9.11.2 II. Runde 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091221
Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ durch die (independente) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c0 \qquad (1)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D(1)_n = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.
a) Es seien $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D(1)_n$, $D(2)_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
b) Es ist allgemein zu beweisen, dass für (1) die Folge $D(2)_n$ konstant ist.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	7	13	21	31	43
$D(1)_n$	2	4	6	8	10	12	
$D(2)_n$	2	2	2	2	2		

b) Es ist für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n

$$D(1)_n = a_{n+1} - a_n = c_2((n+1)^2 - n^2) + c_1((n+1) - n) + c_0 - c_0 = 2c_2 n + c_2 + c_1 \quad \text{und}$$

$$D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n = 2c_2((n+1) - n) + (c_2 + c_1) - (c_2 + c_1) = 2c_2$$

was die Behauptung zeigt, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 091222
In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ϵ die Ebene durch G, B, E.
Es ist zu beweisen, dass die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ϵ steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

Durch Drehung um 120° um die Raumdiagonale geht der Würfel in sich selbst über, sodass die drei Eckpunkte B, G und E zyklisch die Reihenfolge tauschen. Damit geht aber auch die Ebene ϵ bei dieser Drehung in sich selbst über und steht somit senkrecht zur Drehachse FD.
Das Tetraeder $BGEF$ hat das Volumen $\frac{1}{6}a^3$. Das gleichseitige Dreieck $\triangle BGE$ besitzt die Kantenlänge $\sqrt{2}a$ und damit einen Flächeninhalt von

$$F_{\triangle BGH} \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Da sich das Volumen dieses Tetraeders auch als $\frac{1}{3} F_{\triangle BGH} \cdot h$ berechnen lässt, wobei h die Länge des Lots des Punktes F auf die Ebene ϵ ist, folgt

$$h = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a = \frac{1}{\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

da die Raumdiagonale BD die Länge $\sqrt{3}a$ besitzt, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 091223
Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \qquad (1) \qquad ; \qquad x - y = bz \qquad (2) \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = cz \qquad (3)$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Aus (1) und (2) folgt:

$$x = az - y = bz + y \Rightarrow az - bz = 2y \Rightarrow y = \frac{a-b}{2}z \qquad (4) \text{ und}$$

$$x = \frac{2a-(a-b)}{2} = \frac{a+b}{2}z \qquad (5)$$

Hieraus ergibt sich für (3):

$$cz = x^2 + y^2 = [(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2]z^2$$

und weiter:

$$cz = \frac{z^2}{4}(a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{z^2}{2}(a^2 + b^2) \qquad (6)$$

1. Fall: $z = 0 \Rightarrow$ mit (4) und (5) $x = 0, y = 0$
2. Fall: $z \neq 0 \Rightarrow$ mit (6) $z = \frac{2c}{a^2+b^2}c$ und weiter mit (4) und (5): $x = \frac{a+b}{a^2+b^2}c$ und $y = \frac{a-b}{a^2+b^2}c$.
Die Probe bestätigt die Richtigkeit beider Lösungen.

Aufgabe gelöst von Manuela Kugel

Aufgabe 4 - 091224
Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so dass ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muss, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muss erfüllt sein, damit
a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler
den Gewinn erzwingen kann?

Es gelten folgende Feststellungen:

I. Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler gewonnen.

II. Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, dass ein Spieler den Gewinn erzwingen kann, wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln n der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muss dieser eine Anzahl a Kugeln mit $1 \leq a \leq k \quad (1)$ entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leq k + 1 - a \leq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln in der Schachtel.

III. Aus I. und II. folgt: Jede Zahl z der Form

$$m(k + 1) + 1, m = 0, 1, 2, ..., \quad (2)$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d.h., lässt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

IV. Ferner folgt als eine Lösung zu a) : Ist n von der Form $m(k + 1) + r$, $m = 0, 1, 2, ...$, $1 < r \leq k + 1$, d.h., lässt n bei Division durch $k+1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen.
Er kann nämlich im ersten Zug $r - 1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0 < r - 1 \leq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

V. Da die unter III. und IV. angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.

Lösung von Unbekannt

9.11.3 III. Runde 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091231
a) Es ist zu beweisen, dass die Zahl

$$z = \frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 6538^3 + 65539^3}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 32771}$$

ganzrational ist!
b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Mit $n := 2^{15} = 32768$ ist

$$z = \frac{(2n-3)^3 + (2n-2)^3 + (2n-1)^3 + (2n)^3 + (2n+1)^3 + (2n+2)^3 + (2n+3)^3}{(n-3)(n-2) + (n-1)n + n(n+1) + (n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{7 \cdot (2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 \cdot (-3-2-1+1+2+3)}{4n^2 + n \cdot (-3-2-1+1+2+3) + 6 + 6} +$$

$$+ \frac{3 \cdot (2n) \cdot ((-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2) - 3^3 - 2^3 - 1^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3)}{4n^2 + n \cdot (-3-2-1+1+2+3) + 6 + 6}$$

$$= \frac{56n^3 + 168n}{4n^2 + 12} = \frac{4 \cdot 14 \cdot n \cdot (n^2+3)}{4 \cdot (n^2+3)} = 4n = 2^{17} = 131072$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 091232
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, dass jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, dass Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so dass diese Wünsche erfüllt sind!

Wir führen eine Fallunterscheidung danach durch, welche der Fahrten von Dieter übernommen wird:

Fall 1: Dieter fährt als Erster. Dann fährt Christian nach 1. als Dritter und nach 3. Bodo nicht als Zweiter, also Vierter, sodass für Axel nur der zweite Platz verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Dieter, Axel, Christian, Bodo, welche der Bedingung 2 widerspricht. In diesem Fall gibt es also keine gültige Lösung.

Fall 2: Dieter fährt als Zweiter. Dann fährt nach 2. Christian als Erster und nach 3. Axel nicht als Dritter, also als Vierter, womit für Bodo nur die dritte Position verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Dieter, Bodo, Axel. Die Probe bestätigt diese Lösung.

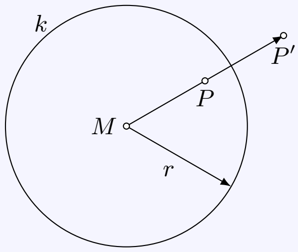
Fall 3: Dieter fährt als Dritter. Dann fährt nach 4. Axel als Zweiter. Nach 2. fährt Christian als Erster und schließlich Bodo als Vierter. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Axel, Dieter, Bodo. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 4: Dieter fährt als Vierter. Dann fährt nach 5. Christian als Dritter, Axel als Erster und Bodo schließlich als Zweiter. Es ergibt sich die Reihenfolge Axel, Bodo, Christian, Dieter, die aber 2. widerspricht, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Es gibt also genau zwei zulässige Reihenfolgen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 091233



Gegeben sei in einer Ebene ϵ ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $MP \cdot MP_1 = r^2$ ist.
Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ϵ, der k orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.
Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Es wird k_1 auf sich selbst abgebildet.
Beweis:
Seien S und T die beiden Schnittpunkte von k und k_1. Dann gilt offensichtlich $|MS| \cdot |MS| = r^2 = |MT| \cdot |MT|$, sodass die Punkte S und T ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich k sind.

Sei nun P ein Punkt auf k_1, der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von M ausgehende Strahl durch P den Kreis k_1 in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von M ausgehenden Tangenten an k_1 durch S und T verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt P_1.
Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz (bezogen auf k_1, die Sehne PP_1 und die Tangente MS) die Beziehung $|MP| \cdot |MP_1| = |MS|^2 = r^2$, sodass jeder Punkt auf k_1 wieder auf einen Punkt auf k_1 abgebildet wird.
Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar:

Wird sie zwei mal angewendet, erhält man wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf k_1 der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf k_1 sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich k von Punkten auf k_1 wieder genau k_1 selbst ist $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 091234
Beweisen Sie, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot ... \cdot \frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl) kleiner als 0,02 ist!

Nach der dritten binomischen Formel gilt $(2n+1)(2n-1) = (2n)^2 - 1^2 < (2n)^2$. Setzen wir ein paar Werte für n ein:

$$n = 1: \quad 3 \cdot 1 < 2^2 \qquad n = 2: \quad 5 \cdot 3 < 4^2$$

$$n = 3: \quad 7 \cdot 5 < 6^2 \qquad ... \qquad n = 1250: \quad 2501 \cdot 2499 < 2500^2$$

Multiplizieren wir die Ungleichungen:

$$1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2 \cdot 2501 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2$$

$$\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2} < \frac{1}{2501}$$

Ziehen wir noch die Wurzel:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2499}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2500} < \frac{1}{\sqrt{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

2. Lösung:
Es ist wegen $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$:

$$2501 \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2497 \cdot 2499}{2498^2} \cdot \frac{2499 \cdot 2501}{2500^2} < 1 \quad \text{also}$$

$$p < \sqrt{\frac{1}{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Aufgabe gelöst cyrix

Dritte Lösung:

Neben dem Produkt p betrachten wir noch das Produkt

$$q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2498}{2499}$$

Da $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ und allgemein für alle von null verschiedenen natürlichen Zahlen n wegen $4n^2 - 1 < 4n^2$

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$$

gilt, ist $p < q$. Hieraus erhält man $p^2 < pq$. Da $pq = \frac{1}{2500}$ ist, gilt $p^2 < \frac{1}{2500}$, woraus wegen $\frac{1}{50} > 0$ die Behauptung $p < \frac{1}{50} = 0{,}02$ folgt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 091235
Die Ebene ϵ eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, dass die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.
Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Seien M_A,M_B,M_C und r_A,r_B,r_C die Mittelpunkte bzw. die Radien der Kugeln. Das Viereck ABM_BM_A hat in A und B zwei rechte Winkel und die Seiten AM_A und BM_B sind parallel. Da die Kugel sich berühren hat M_AM_B die Länge $r_A + r_B$. Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung $|AB|^2 + (|AM_A| - |BM_B|)^2 = |M_AM_B|^2$.
Einsetzen und kürzen liefert die Gleichung $c^2 = 4r_Ar_B$. Zusammen mit den Gleichungen zu den beiden anderen Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$c^2 = 4r_Ar_B b^2 = 4r_Ar_C a^2 = 4r_Br_C \ .$$

Dieses hat die Lösung $r_A = \frac{bc}{2a}$,$r_B = \frac{ac}{2b}$, $r_C = \frac{ab}{2c}$

Quelle anonym

Aufgabe 6 - 091236
a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d.h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!
b) Zeigen Sie, dass es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

a) Mit $\sin x$ und $\cos x$ ist auch die Funktion $y = \sin x + \cos x$ 2π-periodisch stetig und differenzierbar. Also nimmt sie ihre globalen Extremwerte an Stellen an, für die die Ableitungsfunktion $y' = \cos x - \sin x$ verschwindet, für die also $\cos x = \sin x$ gilt.

Dies ist im Intervall $[0; 360°)$ genau für $x = 45°$ und $x = 225°$ der Fall. Dann nimmt y die Werte $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ bzw. $y = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ an, welche dann Maximum und Minimum der Funktion sind. Aufgrund der Stetigkeit werden auch alle Werte dazwischen angenommen (Zwischenwertsatz), sodass sich

$W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ergibt.

b) Wir zeigen allgemeiner, dass für jedes nicht-negative ganze n ein Polynom $g_n(y)$ mit $\sin^n x + \cos^n x = g_n(y) = g_n(\sin x + \cos x)$ existiert:

Für $n = 0$ wähle man $g_0(y) := 2$, da $\sin^0 x + \cos^0 x = 1 + 1 = 2$ gilt.
Für $n = 1$ wähle man $g_1(y) := y$, da $\sin^1 x + \cos^1 x = \sin x + \cos x = y$ gilt.
Für $n = 2$ wähle man $g_1(y) := 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Insbesondere ist auch

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)) = \frac{1}{2} \cdot (y^2 - 1) =: h(y)$$

ein Polynom in y.
Sei ab nun die Aussage schon für alle Werte $k \leq n$ bewiesen. Dann ist

$$y^{n+1} = (\sin x + \cos x)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x =$$

$$= \sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

also

$$\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x = y^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

Wegen $\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{n+1-i}$ können wir nun je zwei solche Summanden zusammenfassen und erhalten für ein solches Paar mit $i < \frac{n+1}{2}$:

$$\binom{n+1}{i} \cdot (\sin^i x \cos^{n+1-i} x + \sin^{n+1-i} x \cos^i x) = \binom{n+1}{i} \cdot \sin^i x \cos^i x \cdot (\cos^{n+1-2i} x + \sin^{n+1-2i} x) =$$

$$= \binom{n+1}{i} \cdot h(y)^i \cdot g_{n+1-2i}(y)$$

Existiert ein "mittlerer Summand", also eine ganze Zahl i mit $i = \frac{n+1}{2}$, so lässt sich der zugehörige Summand $\binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x$ mit keinem anderen zusammenfassen. Er ist aber wegen $i = n + 1 - i$ gleich dem Wert $\binom{n+1}{i} h(y)^i$.
Damit ist auch $\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x$ darstellbar als Differenz eines Polynoms mit einer Summe von Produkten von Polynomen, also insgesamt einem Polynom, in der Variablen $y = \sin x + \cos x$, $\square$.
Einsetzen von $n = 7$ liefert dann die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

a) Für jedes reelle x gilt

$$y^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

d.h.

$$y^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \qquad \text{also} \qquad y^2 = 1 + \sin 2x \tag{1}$$

Daher hat y^2 das Intervall $[0, 2]$ als Wertevorrat. Da mit jedem $y = \sin x + \cos x$ auch der Wert

$$\sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) = -y$$

im Wertevorrat der Funktion $y = \sin x + \cos x$ auftritt, folgt nun, dass der Wertevorrat W das Intervall $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ist.

b) Für jedes reelle x gilt

$$y^7 = \sin^7 x + \cos^7 x + 7 \sin x \cos x(\sin^5 x + \cos^5 x) + 21 \sin^2 x \cos^2 x(\sin^3 x + \cos^3 x)$$
$$+ 35 \sin^3 x \cos^3 x(\sin x + \cos x) \tag{2}$$
$$y^5 = \sin^5 x + \cos^5 x + 5 \sin x \cos x(\sin^3 x + \cos^3 x) + 10 \sin^2 x \cos^2 x(\sin x + \cos x) \tag{3}$$
$$y^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x \cos x(\sin x + \cos x) \tag{4}$$

Aus (4) und (1) folgt

$$\sin^3 x + \cos^3 x = y^3 - \frac{3}{2}(y^2-1)y = \frac{1}{2}(-y^3+3x) \tag{5}$$

Aus (3), (5) und (1) ergibt sich

$$\sin^5 x + \cos^5 x = y^5 - \frac{5}{2}(y^2-1)\frac{1}{2}(-y^3+3y) - \frac{10}{4}(y^2-1)^2 y = \frac{1}{4}(-y^5+5y) \tag{6}$$

und aus (2), (5), (6) und (1) schließlich

$$\begin{aligned}\sin^7 x + \cos^7 x = y^7 - \frac{7}{2}(y^2-1)\frac{1}{4}(-y^5+5y) - \frac{21}{4}(y^2-1)^2\frac{1}{2}(-y^3+3y)\\ - \frac{35}{8}(y^2-1)^3 y = \frac{1}{8}(y^7-7y^5+7y^3+7y)\end{aligned}$$

Es sind noch andere, z. T. elegantere, z. T. auch nicht so systematisch aufgebaute Lösungswege möglich. Man kann den "Abbau" von $\sin^7 x + \cos^7 x$ auch damit beginnen, dass man die Teilbarkeit von $\sin^7 x + \cos^7 x$ durch $\sin x + \cos x$ ausnutzt und den Quotienten $\sin^6 x - \sin^5 x \cos x + ... + \cos^6 x$ weiter betrachtet, wobei man außer (1) statt (2), (3), (4) entsprechend

$$\begin{aligned}1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x\\ 1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x\end{aligned}$$

heranzieht.

Übernommen aus [2]

9.11.4 IV. Runde 1969, Klasse 12

Aufgabe 1 - 091241
An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

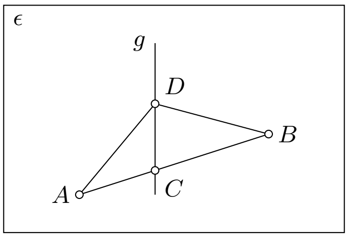
Es seien s_1,s_2,s_3 die Anzahlen der Freunde, die genau eine, zwei bzw. drei Sprachen beherrschen. Laut Aufgabenstellung gilt dann

(1) $s_1 + s_2 + s_3 = 30$
(2) $2s_3 < s_2 < 3s_1$
(3) $s_1 = s_3$
Aus (1) und (3) folgt $2s_1 + s_2 = 30$ und mit (2) dann
(4) $2s_1 < 30 - 2s_1 < 3s_1$
(4) ist äquivalent zu $s_1 < 7{,}5$ und $s_1 > 6$.
Somit ist $s_1 = s_3 = 7$ und $s_2 = 16$.

d,f,r seien die Anzahlen der Freunde, die nur Deutsch, Französisch bzw. Russisch beherrschen. Dann ist folglich $d + r + f = s_1 = 7$.
Weiterhin folgt aus der Aufgabenstellung, dass $r < d < f$ und $d < 3r$.
Eine einfache Fallunterscheidung zeigt nun, dass dies nur erfüllt sein kann, wenn $d = 2$,$r = 1$ und $f = 4$. ($s_3 = 7$, siehe oben.)

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 2 - 091242
Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ möglichst klein ist.



Man betrachtet die Ebene ϵ, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g, dass das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ϵ liegt, und zwar so, dass B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen (Abbildung).
Der Schnittpunkt C der Strecke AB' mit der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art und der einzige.
Beweis:
Sei D ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt: $DB = DB'$. Daher gilt auch

$$AD + DB = AD + DB'$$

Nun ist stets $AD+DB' \geq AC+CB'$ (Dreiecksgleichung), wobei das Gleichheitszeichen genau für $D = C$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 091243
Es ist zu beweisen, dass für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

Wir definieren für alle nicht-negativen ganzzahligen n die Funktion

$$f_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(Insbesondere ist f_0 die Funktion, die konstant 1 ist.) Dann gilt für alle $n \geq 1$ offenbar $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.
Wir zeigen nun im Folgenden induktiv für alle nicht-negativen ganzzahligen n die schärfere Aussage: "Ist n gerade, so ist $f_n(x)$ stets positiv. Und ist n ungerade, so hat f_n genau eine Nullstelle.

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt (wegen $f_1(x) = 1+x$) diese Behauptung offenbar. Sei ab nun $n \geq 2$ und es gelte diese Behauptung für $n-1$. Wir betrachten nun die Funktion f_n mit ihrer Ableitungsfunktion f_{n-1}.
Ist n ungerade, so ist f_{n-1} nach Annahme stets positiv, also f_n streng monoton steigend. Da die höchste Potenz von x einen ungeraden Exponenten (und positiven Koeffizienten) besitzt, ist $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Da die Funktion f_n also negative wie positive Funktionswerte annimmt, stetig und streng monoton steigend ist, gibt es genau eine Stelle, an der sie den Funktionswert 0 annimmt.

Ist n dagegen gerade, so besitzt nach Annahme f_{n-1} genau eine Nullstelle x_0. Für kleinere Argumente ist f_{n-1}, wie gerade gesehen, negativ, und für größere positiv. Also ist f_n im Intervall $(-\infty, x_0)$ streng monoton fallend und im Intervall (x_0, ∞) streng monoton steigend. Damit nimmt sie an der Stelle x_0 ihr globales Maximum an. Jedoch ist $f_n(x_0) = f_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = 0 + \frac{1}{n!} \cdot x_0^n > 0$. Letzteres gilt, da der Exponent n eine gerade Zahl ist und wegen $f_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ auch $x_0 \neq 0$ ist.
Die Behauptung der Aufgabenstellung folgt aus dieser strengeren sofort, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 091244
Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, ..., P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k $(k = 1, 2, ..., n)$ können parallel zu sich selbst so verschoben werden, dass sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z.B. mit Hilfe des Satzes unter a)), dass folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

a) Zur Vereinfachung der Notation definieren wir $P_0 := P_n$.
Der Winkel $\angle P_{k+1}MP_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radien MP_{k+1} und MP_k ergibt sich zu $\frac{2\pi}{n}$.
In einem regelmäßigen n-Eck betragen alle Innenwinkel $\frac{n-2}{n} \cdot \pi = \pi - \frac{2\pi}{n}$, was genau dem Nebenwinkel zu $\angle P_{k+1}MP_k$ der Geraden, auf denen die beiden Radien liegen, entspricht.

Startet man also mit der Strecke MP_0 und verschiebt die Strecke MP_1 parallel so, dass M auf P_0 abgebildet wird, entsteht dort der passende Innenwinkel. Diese Konstruktion kann man nun fortsetzen, indem man MP_2 parallel so verschiebt, dass M auf den Bildpunkt von P_1 abgebildet wird, sodass man einen zweiten passenden Innenwinkel angefügt hat.

So fügt man nach und nach durch Verschiebung des Radius MP_k derart, dass M auf den Bildpunkt von P_{k-1} bezüglich der Verschiebung des vorherigen Radius' abgebildet wird, alle Radien des Ausgangs-n-Ecks als neue Kanten zu dem entstehenden n-Eck hinzu, wobei je zwei aufeinanderfolgende dieser Radien dann den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks bilden. Weiterhin sind die Radien alle gleich lang, sodass sich tatsächlich ein regelmäßiges n-Eck bildet.

b) In die Ebene des Ausgangs-n-Ecks fügen wir derart Koordinatenbezeichnungen ein, dass der Umkreismittelpunkt dieses n-Ecks der Koordinatenursprung ist und $P_0 := P_n$ der Punkt $(1|0)$. Dann ergeben sich aufgrund der Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis und $\angle P_k M P_0 = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ die Koordinaten der Punkte P_k zu

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \middle| \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Verschiebt man die Radien nun parallel, so ist die (vorzeichenbehaftete) Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte eines solchen Radius genauso groß wie die der Endpunkte des Radius' selbst. Für die Verschiebung des Radius MP_k ergibt sich also eine solche Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte von $\cos\frac{2k\pi}{n}$.
Fügt man nun die Radien entsprechend Teilaufgabe a) zu einem geschlossenen Streckenzug zusammen, addieren sich also diese Differenzen der x-Koordinaten insgesamt zu Null, was genau Gleichung (1) entspricht. Analog erhält man bei der Betrachtung der Differenz der y-Koordinaten Gleichung (2), $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 091245
Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

Zunächst ist klar, dass die Ausgangsgleichung

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x) \quad (*)$$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ stets die Lösung $x = \frac{\pi}{4}$ besitzt.

Weiterhin ist jeder Lösung $\tilde{x} \in (0, \frac{\pi}{4})$ in umkehrbar eindeutiger Weise die Lösung $\frac{\pi}{2} - \tilde{x}$ zugeordnet, da (*) gegenüber einer Vertauschung $x \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ offensichtlich invariant ist.

Aus dieser Vorbemerkung folgt bereits, dass die Fälle a) und c) in der Aufgabenstellung für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ gar nicht auftreten können. Ferner dürfen wir uns bei der Suche nach weiteren Lösungen außer $x = \frac{\pi}{4}$ zu einem gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ nun auf das Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ beschränken, was die Fälle b) und d) betrifft.
Wir betrachten dazu die Funktion $\tilde{\lambda} : (0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\tan^4 x - \cot^4 x}$$

was man Kürzen durch $\sin^4 x - \cos^4 x \neq 0$ auch einfacher schreiben kann als

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\sin^4 x \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sin^4(2x)}{8(2 - \sin^2(2x))}$$

Aus der zweiten Darstellung folgt insbesondere sofort, dass $\tilde{\lambda}(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{4})$ streng monoton steigend ist und dort jeden Wert in $(0, \frac{1}{8})$ genau einmal annimmt.

Der Fall d) (mit dann genau 3 Lösungen) tritt also genau für $\lambda \in (0, \frac{1}{8})$ ein, für die anderen $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{8})$ bleibt es bei der einen Lösung $x = \frac{\pi}{4}$, was also dann dem Fall b) entspricht.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Die reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist genau dann Lösung der gegebenen Gleichung, wenn sie Lösung einer der folgenden drei Gleichungen ist:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x) \tag{1}$$
$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cos^4 x} \tag{2}$$
$$(\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x \cos^4 x - \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x)) = 0 \tag{3}$$

Hieraus folgt, dass $x = \frac{\pi}{4}$ für jedes λ Lösung von (1) ist und dass eine Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ genau dann Lösung von (1) ist, wenn sie Lösung einer der folgenden vier Gleichungen ist:

$$\sin^4 x \cos^4 x = \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x) \tag{4}$$
$$\frac{1}{16}\sin^4 2x = \lambda((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) \tag{5}$$
$$\frac{1}{16}\sin^4 2x = \lambda(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) \tag{6}$$
$$\sin^2 3x + 8\lambda \sin^2 2x - 16\lambda = 0 \tag{7}$$

Die Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ist genau dann Lösung von (7), wenn die Zahl $z = \sin^2 2x$ eine Lösung von

$$z^2 + 8\lambda z - 16\lambda = 0 \tag{8}$$

ist, für die $0 < z < 1$ gilt. Dabei gehören zu jeder derartigen Lösung von (8) genau zwei Lösungen von (7) mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$. Die Gleichung (8) hat genau dann eine reelle Lösung, wenn für die Diskriminante

$$D = 16\lambda^2 + 16\lambda = 16\lambda(\lambda + 1) \geq 0$$

gilt. Die beiden Lösungen lauten in diesem Fall

$$z_1 = 4(\sqrt{\lambda(\lambda+1)} - \lambda) \qquad \text{und} \qquad z_2 = -4(\sqrt{\lambda(\lambda+1)} + \lambda)$$

Für die Lösung z_2 gilt sicher nicht $0 < z_2 < 1$; denn anderenfalls müsste $0 > \sqrt{\lambda(\lambda+1)} + \lambda > -\frac{1}{4}$, also

$$-\lambda > \sqrt{\lambda(\lambda+1)} > -\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \tag{9}$$

sein. Folglich wäre $\lambda < 0$ und wegen $D \geq 0$, $\lambda + 1 < 0$ also auch $\lambda + \frac{1}{4} < \lambda + 1 < 0$. Daher ergäbe sich aus (9)

$$\lambda(\lambda+1) > \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 \qquad \text{also} \qquad \lambda^2 + \lambda > \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$$

und weiter $\lambda > \frac{1}{8}$, was mit $\lambda < 0$ unvereinbar ist.
Aus $D \geq 0$ folgt, dass entweder $\lambda \geq 0$ oder $\lambda \leq -1$ ist, und aus $0 < z_1 < 1$ ergibt sich

$$\lambda < \sqrt{\lambda(\lambda+1)} < \lambda + \frac{1}{4} \tag{10}$$

insbesondere also $\lambda > -\frac{1}{4}$, also $\lambda \geq 0$ wegen $D \geq 0$ und, da $\lambda = 0$ mit (10) unvereinbar ist, sogar $\lambda > 0$.
Im Fall $\lambda > 0$ ist (10) äquivalent mit

$$\lambda^2 < \lambda^2 + \lambda < \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$$

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} \qquad \text{und} \qquad \lambda < \frac{1}{8}$$

Daher hat (8) im Fall $0 < \lambda < \frac{1}{8}$ und nur dann eine Lösung z_1 mit $0 < z_1 < 1$, und zwar jeweils genau eine solche Lösung.
Daher gilt für die Gleichung (1) folgendes:

Der Fall a) tritt niemals ein,
der Fall b) tritt genau dann ein, wenn $\lambda \leq 0$ oder $\lambda \geq \frac{1}{8}$ ist,
der Fall c) tritt niemals ein,

der Fall d) tritt genau dann ein, wenn $0 < \lambda < \frac{1}{8}$ ist. (1) hat dann stets genau drei Lösungen.

Bemerkung: Im Fall $\lambda = \frac{1}{8}$ ist die einzige in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gelegene Lösung $\frac{\pi}{4}$ von (1) eine dreifache Wurzel der Gleichung (1).

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6 - 091246
Es ist zu beweisen, dass für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

Wir beweisen den folgenden Satz:
Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2,..., x_n$. Wir betrachten die n symmetrischen Funktionen

$$s_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}}$$

$$...$$

$$s_i = \sqrt[i]{\frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdot ... \cdot x_{j_i}}$$

$$s_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

Dann gilt für alle $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichungskette $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$.
Offenbar ist $s_1 \geq s_n$ die Ungleichung zwischen dem arithmetischem und geometrischem Mittel.
Für $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt: $s_1 = s_2 = ... = s_n = x_1$. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt: $s_{n-1} >= s_n$ und $s_i \geq s_n, i = 1,...,n-1$.

Wir betrachten das Polynom

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

$P(x)$ hat genau n nichtnegative Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$ und ist ausmultipliziert:

$$P(x) = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} s_1 + \binom{n}{2} s_2^2 * x^{n-2} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} s_n^n.$$

Es sei $i \in \{2,3,..,n-1\}$. Wir betrachten die $n-i$-te Ableitung von $P(x)$:

$$P^{(n-i)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (i+1) \left(x^i - \binom{i}{1} s_1 x^{i-1} + \binom{i}{2} s_2^2 x^{i-2} \mp ... + (-1)^i \binom{i}{i} s_i^i \right)$$

Nach dem Satz von Rolle hat $P'(x)$ genau $n-1$ nichtnegative reelle Nullstellen. Per Induktion folgt sofort,dass $P^{(n-i)}(x)$ genau i nichtnegative reelle Nullstellen $(x_1)^*, (x_2)^*, ..., (x_i)^*$ hat. Dabei ist

$$(x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i} s_i^i \quad \text{und}$$

$$(x_1)^* \cdot (x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-1})^* + (x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-2})^*(x_i)^* + ... + (x_2)^*(x_3)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1}$$

Nach der AGM folgt:

$$\frac{1}{i} \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1} \geq \sqrt[i]{x_1^{i-1} x_2^{i-1} \cdot ... \cdot x_i^{i-1}} = \sqrt[i]{(s_i^i)^{i-1}}$$

und $s_{i-1}^{i-1} \geq s_i^{i-1}$, also $s_{i-1} \geq s_i$. Insbesondere ist $s_2 \geq s_3$.

Aufgabe gelöst von Sonnhard Graubner

Anmerkung: Diese Aufgabe ging in die Geschichte der Mathematik-Olympiade als "Pirlscher Hammer". Nur einem Schüler, Wolfgang Burmeister (vier 1.Preise bei der Internationalen Mathematik-Olympiade), gelang eine Lösung.

9.12 X. Olympiade 1970

9.12.1 I. Runde 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101211
In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

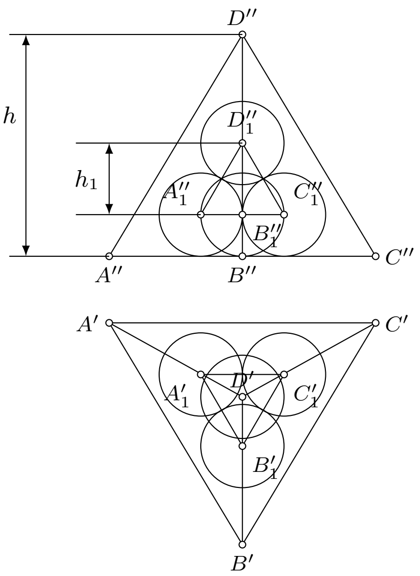
Nach 3. folgt, dass 1 oder 2 Einzelväter anwesend waren, also sind 16 oder 17 Väter (von den anwesenden 18) mit der Mutter da (4).
Nach 2. folgt, dass höchstens 7 Mütter alleine da waren, von den insgesamt 24 Müttern sind also mindestens 17 Mütter mit dem Vater da (5).
Nach diesen beiden Aussagen (4) und (5) folgt, dass genau 17 Elternpaare da sind, somit also noch ein Einzelvater und 7 Einzelmütter (6).
Nach 1. sind von 18 Schülern beide Eltern da, d.h 17 Elternpaare (6) gehören zu 18 Kindern, also befindet sich darunter ein Geschwisterpaar (7). Jetzt bleibt noch ein Einzelvater für 2 Kinder nach 3. und (4), also sind die Kinder auch Geschwister. Also gibt es in der Klasse 2 Geschwisterpaare, also 4 Kinder, die Geschwister in der Klasse haben.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 101212
In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, dass jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a!

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.



Da laut Aufgabe jede der Kugeln die drei anderen von außen berührt, bilden die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte aller vier Kugeln die Kanten eines regulären Tetraeders T_1 mit der Kantenlänge $2r$.

Zu je drei der Kugeln existiert ferner genau eine Seitenfläche F des gegebenen Tetraeders T, die von diesen drei Kugeln berührt wird. Deren Mittelpunkte haben daher von F den Abstände r. Somit ist diejenige Seitenfläche F_1 des Tetraeders T_1, auf der die genannten drei Mittelpunkte liegen, parallel zu F im Abstand r.

Dreht man nun die gesamte Figur so um eine Höhe von T, dass eine andere Seitenfläche F' von T in die Lage F kommt, so kommt eine andere Seitenfläche F_1' von T_1 in die Lage F_1. Daher liegen entsprechende Höhen der beiden Tetraeder jeweils auf der gleichen Geraden. Infolgedessen fallen die Höhenschnittpunkte beider Tetraeder zusammen.

Bezeichnet man die Länge der Höhe des gegebenen Tetraeders mit h, die des in ihm liegenden Tetraeders mit h_1, so ist

$$d = \frac{h_1}{4} + r = \frac{h}{4} \tag{1}$$

der Abstand d des gemeinsamen Höhenschnittpunktes zu jeder Fläche des gegebenen Tetraeders. Nun gilt für die Länge h der Höhe eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a die Beziehung $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Analog erhält man

$$h_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{r}{6}\sqrt{6} + r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

also

$$r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

woraus man

$$r = \frac{a \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12 \cdot (6 + \sqrt{6})} = \frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$$

erhält.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 101213
Beweisen Sie!

Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$ gilt: $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} 2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &= 2a^2 + 2b^2 + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + 8 \\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2 + \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(ab)^2} + 8 \end{aligned}$$

Wegen $a + b = 1$ ist also

$$2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = (a-b)^2 + \frac{(a-b)^2 + 1}{(ab)^2} + 9 \tag{2}$$

Der Term (2) erreicht für positive a, b mit $a + b = 1$ sein Minimum genau dann, wenn $a = b$ ist.

Beweis: Es gilt $(a - b)^2 \geq 0$ für alle positiven reellen Zahlen a und b, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall wird der erste Summand von (2) gleich 0, und beim zweiten Summanden erreicht der Zähler sein Minimum. Nun gilt

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt wieder genau ein, wenn $a = b$ ist. In diesem Fall erhält man daher für den Nenner des zweiten Summanden ein Maximum. Deshalb erreicht auch der zweite Summand und somit die Summe für $a = b$, d.h. wegen $a + b = 1$ für $a = b = \frac{1}{2}$, ihr Minimum.

Folglich ist der kleinste Wert, den der Term (1) unter Berücksichtigung von $a + b = 1$ annimmt,

$$2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2 = 25$$

Daher gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 101214
Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesetzt.

a) Man beweise, dass folgender Schluss richtig ist:

Voraussetzung: $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.

Behauptung: Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0), f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel (p, q, r) ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, dass ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

a) Auf Grund der Voraussetzung sind $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ und $f(-1) = a + b + c$ ganzzahlig, also auch $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a$ und $f(1) - f(-1) = 2b$. Daher gilt $a = \frac{m}{2}$ und $b = \frac{n}{2}$ mit ganzen Zahlen m und n.

Ferner ist $f(1) - f(0) = a + b = \frac{m+n}{2}$ ganzzahlig, also sind m und n entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Nun gilt

$$f(x) = \frac{mx^2 + nx}{2} + c$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle geraden x ganzzahlig ist.
Sind nun x sowie m und n ungerade, so sind auch mx^2 und nx ungerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig. Ist x ungerade und sind m und n gerade, so sind auch mx^2 und nx gerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.
Damit ist bewiesen, dass $f(x)$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlig ist.

b) Unter der nun zugrunde gelegten Voraussetzung kann nicht auf die angegebene Behauptung geschlossen werden; denn z.B. für $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0$ ist zwar $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(-1) = 0$ jedoch $f(1) = \frac{2}{3}$.

c) Weitere Tripel ganzer Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben, bestehen z.B. aus

$$p = n - 1 \quad , \quad q = n \quad , \quad r = n + 1$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Sind nämlich

$$\begin{aligned} f(n-1) &= (n-1)^2 a + (n-1)b + c \\ f(n) &= n^2 a + nb + c \\ f(n+l) &= (n+1)^2 a + (n+1)b + c \end{aligned}$$

ganzzahlig, so sind auch die paarweise gebildeten Differenzen $(2n-1)a+b$ und $(2n+1)a+b$ sowie $4na+2b$ ganzzahlig. Daraus folgt, dass auch $2a$, also auch $4na$ und mithin $2b$ ganzzahlig sind, woraus wiederum eie unter a) die Ganzzahligkeit von $a + b$ abgeleitet werden kann.
Da von den Zahlen $n - 1, n, n + 1$ mindestens eine gerade ist, folgt unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $2a$ und $2b$, dass c ebenfalls ganzzahlig ist.
Wie unter a) lässt sich dann zeigen, dass $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlig ist.

Übernommen von [5]

9.12.2 II. Runde 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101221
Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

Aus

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2(x^2 + y^2) + (x^6 + y^6 - \frac{7}{16}) = (x^2 + y^2)^3 - \frac{7}{16} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

erhält man sofort

$$x^2y^2 = \frac{3}{16} \qquad (3)$$

und durch Einsetzen in (1) weiter

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = (x^2 - \frac{1}{4})(x^2 - \frac{3}{4}) = 0 \qquad (4)$$

mit den Lösungen

$$x \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

was dann in Verbindung mit (3) die 8 endgültigen Lösungen

$$(x,y) \in \{\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$$

ergibt.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, es sei (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems (*), (**). Dann gilt

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{sowie} \qquad x^6 + 1 - 3x^3 + 3x^4 - x^6 = \frac{7}{16}$$

also

$$3x^4 - 3x^2 + \frac{9}{16} = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0$$

Daher sind (x_1^2, y_1^2), (x_2^2, y_2^2) mit

$$x_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad y_1^2 = \frac{1}{4}$$

sowie

$$x_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad y_2^2 = \frac{3}{4}$$

die einzigen Paare, deren Komponenten durch Quadrieren aus den Komponenten einer Lösung (x, y) von (*), (**) in der entsprechenden Weise entstehen können. Also können nur die geordneten Paare

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Lösungen des Gleichungssystems (*), (**) sein.
Tatsächlich sind für diese acht geordneten Paare die Gleichungen (*) und (**) erfüllt. Das gegebene Gleichungssystem hat also genau acht reelle Lösungen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 101222
Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k > 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)...[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.
a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a > k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung gilt:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Zeigen Sie, dass für $k > 2$ gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} \cdot (-1)^{k+1}$$

a) Es ist

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{(k+1) \cdot a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} \cdot ([k+1] + [a-k]) =$$

$$= \frac{(a+1)a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Es ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot \ldots \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{1 \cdot (1-2) \cdot \ldots \cdot (1-2(k-1))}{k! \cdot 2^k} =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2-1) \cdot \ldots \cdot (2(k-1)-1)}{k! \cdot 2^k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{k! \cdot 2^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-4)} =$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{k! \cdot 2^{k+(k-2)} \cdot (2k-2)!}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 101223
Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
...	

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:
Die einzige Zahl in der Zeile 0 sei die Zahl 1. Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.
Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, dass in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

Für die Zeile 0 stimmt die Aussage offenbar.
Summieren wir nun alle Elemente der Zeile $n+1$, und stellen uns jede einzelne Zahl in dieser Zeile $n+1$ ersetzt vor durch die Summe der drei Zahlen aus Zeile n, aus der sie entsteht, dann erhalten wir eine Summe, deren Summanden ausschließlich Zahlen aus der n-ten Zeile sind (sowie Rand-Nullen).
Jede Zahl aus Zeile n taucht dabei in der Summe s_{n+1} genau drei mal auf: Sie ist nämlich beteiligt an der Bildung der Zahl direkt unter sich, sowie jeweils rechts bzw. links daneben. Damit gilt $s_{n+1} = 3 \cdot s_n$, was dann induktiv die Behauptung zeigt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Offenbar gilt $s_0 = 3^0$, d. h., die Behauptung ist richtig für $n = 0$. Ferner steht nach Definition in Zeile 0 genau eine Zahl.
Wir zeigen nun, dass aus der Richtigkeit der Behauptung sowie der weiteren Aussage, dass in Zeile n genau $2n+1$ positive Zahlen stehen, für die ganze Zahl $n = k \geq 0$ auch die Richtigkeit für $n = k+1$ folgt:

Bezeichnet man die von null verschiedenen Zahlen der Zeile k der Reihe nach mit $a_0, a_1, ..., a_{2k}$, so gilt laut Induktionsvoraussetzung

$$s_k = a_0 + a_1 + ... + a_{2k} = 3^k \qquad a_i > 0, i = 0,1,...,2k$$

Nach dem angegebenen Bildungsgesetz des Zahlenschemas sind dann in Zeile $k+1$ genau die folgenden Zahlen von null verschieden:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 + 0 + a_0 \\ b_1 &= 0 + a_0 + a_1 \\ b_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ b_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &... \\ b_{2k} &= a_{2k-2} + a_{2k-1} + a_{2k} \\ b_{2k+1} &= a_{2k-1} + a_{2k} + 0 \\ b_{2k+2} &= a_{2k} + 0 + 0 \end{aligned}$$

Jede von ihnen ist somit positiv, und ihre Anzahl beträgt $2k+3 = 2(k+1)+1$. In ihrer Summe $s_{k+1} = b_0 + b_1 + ... + b_{2k+2}$ tritt jeder der Summanden a_i $(i = 0,1,2,...,2k)$ genau dreimal auf. Daher gilt

$$s_{k+1} = 3(a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2k}) = 3s_k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$

Somit sind die Aussage über die Anzahl der von null verschiedenen a_i, $(a_i > 0)$ und die zu beweisende Behauptung, die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n des gegebenen Zahlenschemas betrage 3^n, für alle ganzen Zahlen $n > 0$ bewiesen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 101224
Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und δ die Größe des Winkels $\angle BSA$.
Beweisen Sie, dass dann $ac - bd = ef \cdot \cos\delta$ gilt!

Sei $e_1 = AS, e_2 = CS, f_1 = BS, f_2 = DS$. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned} 2e_1 f_1 \cos\delta &= e_1^2 + f_1^2 - a^2 \\ 2e_2 f_2 \cos\delta &= e_2^2 + f_2^2 - c^2 \\ -2e_2 f_1 \cos\delta = 2e_2 f_1 \cos(180° - \delta) &= e_2^2 + f_1^2 - b^2 \\ -2e_1 f_2 \cos\delta = 2e_1 f_2 \cos(180° - \delta) &= e_1^2 + f_2^2 - d^2 \ . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$2ef \cos\delta = 2(e_1 + e_2)(f_1 + f_2) \cos\delta$$

$$= (e_1^2 + f_1^2 - a^2) + (e_2^2 + f_2^2 - c^2) - (e_2^2 + f_1^2 - b^2) - (e_1^2 + f_2^2 - d^2)$$

$$\begin{aligned} &= -a^2 - c^2 + b^2 + d^2 \\ &= 2ac - 2bd - (a+c)^2 + (b+d)^2 \\ &= 2ac - 2bd + (b+d-a-c)(a+c+b+d) \ . \end{aligned}$$

Da in einem Tangentenviereck $a+c = b+d$ gilt, ist die letze Zeile gleich $2(ac-bd)$, woraus die Behauptung folgt.

Quelle anonym

9.12.3 III. Runde 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101231
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2 \gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, also

$$\sin \gamma = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + 4 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \beta \cos \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \\ &= \sin^2(\alpha - \beta) + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \geq \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \end{aligned}$$

□.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Für beliebige α und β gilt

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta))$$

Auf Grund der Voraussetzungen über α, β, γ ist

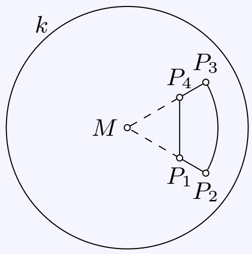
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta &= \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\pi - 2\gamma)) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos 2\gamma)) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma) = \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 101232
In einer Ebene ϵ liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ϵ der folgendermaßen definierte Punkt P' in ϵ zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $MP \cdot MP' = r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:



P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $MP_1 = MP_4 < MP_2 = MP_3$. Der Winkel $\angle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overgroup{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.
Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Den Bildpunkt P' eines beliebigen von M verschiedenen Punktes P im Inneren von k erhält man konstruktiv wie folgt:

(a) Zeichne den von M ausgehenden Strahl s durch P.
(b) Errichte in P die Orthogonale auf s und erhalte als einen der beiden Schnittpunkte von dieser mit k den Punkt C, sodass $\angle CPM = 90°$ und $|CM| = r$ gilt.
(c) Man errichte auf der Geraden MC in C die Orthogonale und schneide diese mit s. Der Schnittpunkt heiße P'.

Begründung: Es liegt P' auch auf s und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MP'C$ mit Fußpunkt P der Höhe von C auf die Hypotenuse MP' ist $|MP| \cdot |MP'| = |MC|^2 = r^2$.

Da P_1 bis P_4 alle im Innern des Kreises k liegen, kann man mit der vorgenannten Konstruktion ihre Spiegelpunkte P_1' bis P_4' erhalten. Da alle Punkte P auf dem von M ausgehenden Strahl, die zwischen P_1 und P_2 liegen, auch auf solche P' abgebildet werden, die zwischen P_2' und P_1' auf dem gleichen Strahl liegen, wird die Strecke P_1P_2 auf die Strecke $P_1'P_2'$ abgebildet. Analoges gilt für die Strecke P_3P_4, die auf $P3'P_4'$ abgebildet wird.

Für alle Punkte P auf dem Kreis um M durch P_2 gilt, dass die Bildpunkte auf einem Kreis um M mit Radius $\frac{r^2}{|MP_2|}$ liegen. Damit geht der Bogen $\overgroup{P_2P_3}$ in den Bogen $\overgroup{P_2'P_3'}$ im gleichen Winkel über.
Schließlich wird die Gerade durch P_4 und P_1 auf einen Kreis durch P_4', P_1' und M abgebildet; die Strecke P_4P_1 also auf den Bogen $\overgroup{P_4P_1}$ dieses Kreises, der M nicht enthält.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 101233
Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Da $x^2 \geq 0$ ist, ist die Frage äquivalent zur Untersuchung der Funktion $g(z) := \frac{1-z}{z^3+4}$, wobei man nur diejenigen z mit $z \geq 0$ betrachtet, denn es ist $g(x^2) = f(x)$.

Wegen $z \geq 0$ ist $1 - z \leq 1$ und $z^3 + 4 \geq 4 > 0$, also $g(z) \leq \frac{1}{4}$. Tatsächlich ist $g(0) = f(0) = \frac{1}{4}$, sodass dies der größte Funktionswert ist, den g bzw. f in ihren jeweiligen betrachteten Definitionsbereichen annehmen.
Wir betrachten nun die Funktion

$$g'(z) = \frac{-(z^3+4) - (1-z) \cdot 3z^2}{(z^3+4)^2} = -\frac{1}{(z^3+4)^2} \cdot (z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3)$$

Es ist

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 2z^3 - 3z^2 - 4 = (z-2) \cdot (2z^2 + z + 2)$$

Da

$$2z^2 + z + 2 = (z^2 + 2z + 1) + z^2 + 1 = (z+1)^2 + z^2 + 1 \geq 1 > 0$$

gilt, verschwindet also $g'(z)$ genau für $z = 2$.
Im Intervall $[0; \infty)$ nimmt g, wie schon gesehen, an der Stelle 0 sein globales Maximum von $\frac{1}{4} > 0$ an. Für $z > 1$ ist $g(z)$ sogar negativ, aber aufgrund des größeren Grades des Polynoms im Nenner im Vergleich zu dem des Zählers ist $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Also kann nicht g monoton fallend sein, sodass, da

es stetig differenzierbar ist, seine Ableitungsfunktion mindestens eine Nullstelle haben muss, an welcher die Funktion g von monoton fallend auf monoton steigend wechselt. Diese Stelle ist, wie oben berechnet, eindeutig bestimmt mit $z = 2$.

Also ist $g(z)$ für alle z im Intervall $[0, 2]$ monoton fallend und für alle z im Intervall $[2, \infty)$ monoton steigend, sodass an der Stelle $z = 2$ die Funktion g ihr globales Minimum mit $g(2) = \frac{1-2}{2^3+4} = -\frac{1}{12}$ annimmt.
Damit ist auch das globale Minimum von f gleich diesem Wert $-\frac{1}{12}$ und wird an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 101234
Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

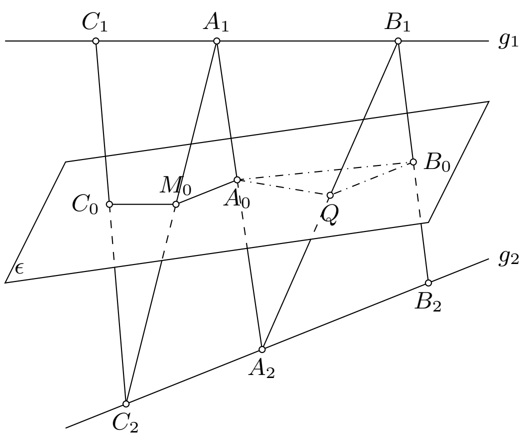
Ist $t = 1$, so erfüllen offenbar alle ganzrationalen Funktionen f die Eigenschaft $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
Ist $t = 0$, so folgt $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ für beliebige reelle x. Dies wird offenbar von allen ganzrationalen Funktionen mit Absolutglied 0 erfüllt.
Sei ab nun $t \notin 0; 1$. Dann sind die Potenzen $t, t^2, t^3, \dots$ alle paarweise verschieden. Dann folgt induktiv für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichheit

$$f(t^k) = f(t \cdot t^{k-1}) = t \cdot f(t^{k-1}) = \dots = t^k \cdot f(1)$$

Wir betrachten die ganzrationale Funktion $g(x) := f(x) - x \cdot f(1)$.
Dann gilt mit der eben gezeigten Eigenschaft für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichung $g(t^k) = f(t^k) - t^k \cdot f(1) = 0$, sodass g die unendlich vielen paarweise verschiedenen Nullstellen t^k, $k \in \mathbb{N}$ besitzt.
Da aber nur eine einzige ganzrationale Funktion, nämlich die Nullfunktion, unendlich viele Nullstellen besitzt, ist $g(x) = 0$ für alle x, womit $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle reellen Zahlen x folgt.
Die einzigen Funktionen, die dies erfüllen, sind die linearen Funktionen ohne Absolutglied, also $f(x) = a \cdot x$ mit einer reellen Zahl a. (Dann ist $f(1) = a$.) Die Probe bestätigt, dass diese Funktionen tatsächlich die Funktionalgleichung erfüllen: $f(t \cdot x) = a \cdot (t \cdot x) = t \cdot (a \cdot x) = t \cdot f(x)$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 101235
Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, dass P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ϵ genau dann parallel, wenn es in ϵ eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.



Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. B_1A_2 in erwähnten Verhältnis von innen teilen, seien A_0, B_0 bzw. Q genannt, woraus $Q \neq A_0$ und $Q \neq B_0$ folgt.
Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_0Q \parallel g_1 \qquad \text{und} \qquad QB_0 \parallel g_2 \tag{1}$$

Aus $g_1 \nparallel g_2$ folgt jetzt $A_0Q \nparallel QB_0$ und damit $A_0 \neq B_0$. Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_0 und B_0; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.
Also bestimmen A_0, B_0 und Q eine Ebene ϵ, die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

II) Seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0, der von A_1C_2 sei M_0.
Analog zu (I) folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$. Daher und aus (I) folgt $M_0A_0 \parallel B_0Q$ sowie $C_0M_0 \parallel QA_0$. Also gehört mit A_0 auch M_0 und mit M_0 aus C_0 zu ϵ.

Daraus folgt:
Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punktr auf g_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilen, gehören zu ϵ.

III) C_0 sei beliebiger Punkt aus ϵ.
Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ϵ gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der M_0 genannt sei.
Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit AQ_0, also h_2 und folglich M_0. Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der C_2 genannt sei.

Ebenso (mit $C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1$ statt $A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2$) folgt dass sich die Geraden durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der C_1 genannt sei.
Dann folgt der Reihe nach, dass auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 von innen im erwähnten Verhältnis geteilt werden.

Damit gehört jeder Punkt von ϵ zum geometrischen Ort.
Also ist der gesuchte geometrische Ort die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ϵ.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 101236
Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

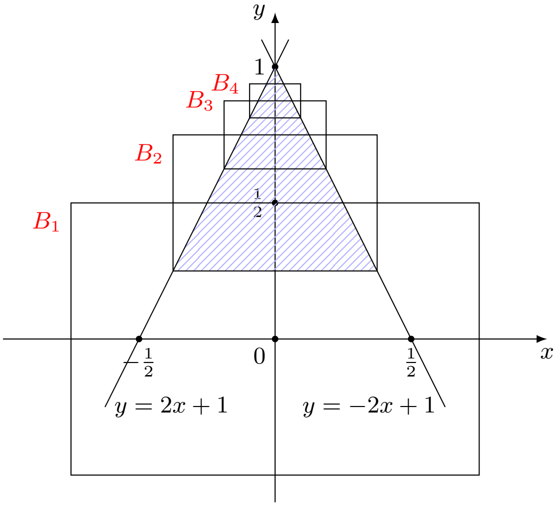
$$y \geq 0 \tag{1}$$
$$y - 2x \leq 1 \tag{2}$$
$$y + 2x \leq 1 \tag{3}$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \tag{4}$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \tag{5}$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.
b) Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.
c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und $y \leq 1 - \frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, dass es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n_1}$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?

a) Die Menge M_1 besteht aus allen Punkten der schraffiert gezeichneten Dreiecksfläche, einschließlich der Randpunkte. Die Mengen B_1, B_2, B_3, B_4 bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkte (also ohne die jeweiligen Randpunkte).



b) Wegen (1), (2), (3) gilt $P_1(0;1) \in M_1$. Die Abstände der oberen Seiten der B_n enthaltenden Rechtecke von der x-Achse sind

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Für alle $n = 1,2,...$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin B_n$ $(n = 1,2,3,...)$. Der Punkt $(0;1)$ gehört zu M_1, da der die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt, wie man aus $1 \geq 0$, $1 - 2 \cdot 0 \leq 1$, $1 + 2 \cdot 0 \leq 1$, ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,2,...$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,2,...$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c) 1. Wir zeigen: Ist eine positive ganze Zahl $n_0 \leq 9$, so hat sie nicht die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Zu M_2 gehört auch der Punkt $(0; \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6) erfüllt. Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,...,n_0$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,...,n_0$, die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

2. Wir zeigen: Ist eine ganze Zahl $n_1 \geq 10$, so hat sie die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Sei (x,y) irgendein Punkt aus M_2. Dann erfüllt er die Ungleichungen (1), (29, (3), (6). Aus (1), (6) folgt

$$\frac{1}{1000} \leq 1 - y \leq 1 \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leq 1$$

Wegen

$$1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > ... > \frac{1}{2^{n_1}}$$

gibt es somit unter den Zahlen $n = 1,2,...,n : 1$ eine, für die $\frac{1}{2^n} < 1 - y \leq \frac{1}{2^{n_1}}$ gilt. Für diese gilt dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \qquad \text{also} \qquad 1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n}$$

ferner wegen (2), (3) auch $y - 1 \leq 2x \leq 1 - y$, also

$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

und somit insgesamt $(x,y) \in B_n$, womit die Behauptung gezeigt ist.

3. Aus 2. folgt die zu beweisende Existenz einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus 1. und 2. folgt, dass die gesuchte kleinste Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

Übernommen von [5]

9.12.4 IV. Runde 1970, Klasse 12

Aufgabe 1 - 101241
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so dass $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ erfüllt ist.
Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Mit (*) bezeichnen wir im folgenden die Ungleichung $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass $a=0$. In diesem Fall sind die beiden Wurzeln nur für $x=0$ reell, (*) ist dann aber nicht erfüllt.
Für $a<0$ können für keinen Wert x beide Wurzeln reell sein, da ansonsten $x\geq -a$ und $x\leq a$ gelten müsste.

Sei von nun an $a>0$. Dann sind genau für alle $x\in[-a,a]$ beide Wurzeln reell.
Quadrieren von (*) ist eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv sind; (*) ist also äquivalent zu

$$a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x>a^2 \iff (**)\ 2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a$$

Für $0<a<2$ ist $a^2-2a<0$, (**) also für alle $x\in[-a,a]$ erfüllt.

Es verbleibt der Fall $a\geq 2$.
Quadrieren von (**) ist wieder eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten ≥ 0 sind; (**) ist also äquivalent zu

$$4(a^2-x^2)>a^4-4a^3+4a^2 \iff (***)\ 4x^2<4a^3-a^4=a^2a(4-a)$$

Falls $a\geq 4$, ist die rechte Seite von (***) ≤ 0, (***) kann also von keinem x erfüllt werden.

Schließlich sei nun $2\leq a<4$.
Dann ist (***) äquivalent zu $|x|<\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}$. Da $\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\leq a \iff a(4-a)\leq 4$ und letzteres für alle $a\in[2,4)$ erfüllt ist, ist das Intervall $I=\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)},\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$ im intervall $[-a,a]$ enthalten und somit erfüllen alle $x\in I$ die Ungleichung (***).

Zusammenfassend:

- $a<0$: Für kein x sind beide Wurzeln reell und somit ist (*) für kein x erfüllt.
- $a=0$: Genau für $x=0$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.
- $0<a<2$: Genau für $x\in[-a,a]$ sind beide Wurzeln reell und ist (*) erfüllt.
- $2\leq a<4$: Genau für $x\in[-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, und genau für

  $$x\in\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)},\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$$

  ist zusätzlich (*) erfüllt.
- $a\geq 4$: Genau für $x\in[-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

Angenommen, die Ungleichung besitzt für eine reelle Zahl a eine reelle Lösung x. Da beide Wurzeln reell sein sollen, müssen die beiden Bedingungen $a+x\geq 0$, $a-x\geq 0$ oder, umgeformt, $-a\leq x$, $x\leq a$ gleichzeitig erfüllt sein.
Sie sind mit der Ungleichung

$$|x|\leq a \tag{1}$$

äquivalent, die also neben der gegebenen Ungleichung stets erfüllt sein muss.

a) Für $a<0$ kann (1) wegen $|x|>0$ nicht erfüllt werden, so dass es keine reelle Lösung x gibt.

b) Für $a = 0$ muss wegen (1) $x = 0$ gelten. Für $x = 0$ ist aber die gegebene Ungleichung nicht erfüllt. Somit kann auch in diesem Fall keine reelle Lösung für x existieren.

c) Es bleibt nur noch der Fall $a > 0$ zu untersuchen. Es sei $a > 0$.
Wegen (1) ergibt sich daraus $a^2 - x^2 \geq 0$, und aus der gegebenen Ungleichung folgt durch Quadrieren die dann zu ihr äquivalente Ungleichung $2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$ oder

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a(a-2) \tag{2}$$

Hier wechselt die rechte Seite bei $a = 2$ das Vorzeichen, so dass eine Fallunterscheidung notwendig wird:

c1) Es sei $0 < a < 2$. Dann gilt $a(a-2) < 0$. Also ist (2) erfüllt, sobald $a^2 - x^2 \geq 0$ gilt.
Das trifft für alle x mit (1), d.h.mit $-a \leq x \leq a$ zu.

c2) Es sei $a = 2$. Dann gilt $a(a-2) = 0$, so dass (2) für $\sqrt{4 - x^2} > 0$, also für $-2 < x < 2$ und nur für diese erfüllt ist.

c3) Es sei $a > 2$. Dann gilt $a(a-2) > 0$. Aus (2) folgt

$$4(a^2 - x^2) > a^2(a-2)^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 < \frac{1}{4}a^3(4-a) \tag{3}$$

Anmerkung: Ist (3) erfüllt, so ist $4(a^2 - x^2) > a^2(a-2)^2 \geq 0$, also die Bedingung (1), ja sogar

$$|x| < a \tag{4}$$

von selbst mit erfüllt. Da die rechte Seite von (3) positiv sein muss, kann (3) für $a \geq 4$ nie erfüllt sein. Somit bleibt nur noch der Fall $2 < a < 4$ zu untersuchen. Tatsächlich sind unter dieser Voraussetzung alle x mit

$$x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} \tag{5}$$

und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichung, da dann (5) mit (3) äquivalent ist So ergibt sich folgende Übersicht:

Parameterwerte	Zugehörige Lösungen
$a \leq 0$	keine
$0 < a < 2$	$-a \leq x \leq a$
$a = 2$	$-2 < x < 2$
$2 < a < 4$	$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$
$4 \leq a$	keine

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 101242
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

definiert ist.

Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O.B.d.A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Diese Aufgabe ist mit der Aufgabe 081246 identisch.

Aufgabe 3 - 101243
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Bezeichne die gegebenen Flächen mit F_i, $i \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$. Betrachte die Dreier-Schnitte

$$A_i := \cap_{j \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}} F_j$$

welche nach Voraussetzung alle nicht leer sind, und wähle für jedes A_i einen Punkt $P_i \in A_i$.
Wir betrachten das Problem für allgemeine konvexe Flächen und nutzen die eine konvexe Fläche definierende Eigenschaft aus, dass mit zwei Punkten auch die Verbindungslinie der zwei Punkte in der Fläche enthalten ist.
Daraus folgt, dass die Verbindungslinie P_iP_j in $F_k \cap F_m$ enthalten ist (mit $k{,}m \in \{1{,}2{,}3{,}4\} \setminus \{i{,}j\}$ und $k \neq m$, $i \neq j$). Wenn zwei der Punkte P_i übereinstimmen, so ist dies der gesuchte Punkt, da er in allen der gegebenen Flächen enthalten ist.

Seien die P_i nun also alle verschieden. Wenn drei der P_i auf einer Linie liegen, so ist der mittlere von ihnen in allen vier Flächen enthalten (denn der linke und rechte Punkt, sowie deren Verbindungslinie [wegen Konvexität], sind in der für den mittleren Punkt noch eventuell fehlenden Fläche enthalten) und damit der gesuchte Punkt.
Wenn keine drei der P_i auf einer Linie liegen, so bilden sie ein nicht-entartetes Viereck, sodass es zwei sich schneidende Verbindungslinien P_iP_j und P_kP_m gibt, mit $i{,}j{,}k{,}m$ paarweise verschieden. Der Schnittpunkt ist in allen Flächen enthalten und damit der gesuchte Punkt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 4 - 101244
Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$x + a_1y = b_1 \qquad (1) \qquad ; \qquad a_2y + b_2z = a_3 \qquad (2) \qquad ; \qquad b_3x + a_4z = b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für $a2$, dann B für $b2$ u.s.w., zum Schluss B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.
A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.
a) Kann A so spielen, d.h., kann er die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, ..., b_3$ durch B so auswählen, dass er gewinnt?
b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ solche Werte angeben, dass er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Die Antwort zu b (und damit auch zu a) lautet ja.

A wählt $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = a_4 = 1$. Das Gleichungssystem lautet dann

(1) $x = b_1$
(2) $y + b_2z = 0$
(3) $b_3x + z = b_4$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige und ganzzahlige Lösung

$$x = b_1 \qquad , \quad y = b_1b_2b_3 - b_2b_4 \qquad , \qquad z = b_4 - b_1b_3$$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 5 - 101245
Es seien $A_0A_1...A_n$ $(n > 2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, ..., A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.
Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1...A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, dass also $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$ gilt.

Seien s_k die Länge der Strecke $A_{k-1}A_k$ und r_k der Abstand von A_k zur Gerade g. Die Rotationsfläche wird aus Mantelflächen von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Eine einzelne Mantelfäche F_k definiert durch die Punkte $A_{k_1}A_k$ hat die Oberfläche $F_k = \pi s_k(r_{k-1} + r_k)$. Die Summe der F_k ergibt dann F.
Falls es keinen Punkt A_m, der genau auf der Mitte des Polygonzuges liegt, fügen wir diesen hinzu. Der so entstandene Polygonzug erzeugt dieselbe Oberfläche.

Behauptung: Die durch $A_0 \dots A_m$ erzeugte Fläche hat höchstens den Flächeninhalt $\pi\frac{s^2}{4}$, d.h. $F_1 + \dots + F_m \leq \pi\frac{s^2}{4}$

Beweis:
Für r_k haben wir die Abschätzung $r_k \leq |A_0A_k| \leq p_k$ mit $p_k := s_1 + \dots s_k$, da eine Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Weiterhin gilt $|r_k - r_{k-1}| \leq s_k$, da s_k die Kante eines Kegelstumpfes mit Radien r_k,r_{k-1} ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_k &= \pi s_k(r_{k-1} + r_k) \\ &= \pi s_k(2r_{k-1} + (r_k - r_{k-1}) \\ &\leq \pi s_k(2p_{k-1} + s_k) \\ &= \pi\left[(p_{k-1} + s_k)^2 - p_{k-1}^2\right] \\ &= \pi(p_k^2 - p_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch aufsummieren $F_1 + \dots + F_m \leq \pi(p_0^2 - p_m^2) = \pi\frac{s^2}{4}$, da $p_0 = 0$ und nach Wahl $p_m = \frac{s}{2}$ gilt.
Wegen Symmetrie gilt ebenso $F_{m+1} + \dots + F_n \leq \pi\frac{s^2}{4}$. Hieraus folgt insgesamt $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$.

Quelle anonym

Aufgabe 6A - 101246A
Definition: Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.
Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Bei P mit der Operation A handelt es sich um eine Gruppe. Zu zeigen sind die Eigenschaften a, b und c.

a) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente von P. Dann ist

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1a_0 + b_1a_1x = c_0 + c_1x$$

mit $c_0 = b_0 + b_1a_0$ und $c_1 = b_1a_1$. Da a_1,$b_1 \neq 0$, ist auch $c_1 \neq 0$ und somit $f(x) \circ g(x) = c_0 + c_1x$ ein Element von P.

b) Seien $f(x), g(x), h(x) \in P$. Dann ist

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = g(f(x)) \circ h(x) = h(g(f(x))) = f(x) \circ h(g(x)) = f(x) \circ (g(x) \circ h(x))$$

c) Seien $f(x) = a_0 + a_1 x$ und $g(x) = b_0 + b_1 x$ Elemente aus P. Definiere dann

$$h(x) = b_0 - \frac{a_0 b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} x$$

Da $a_1 \neq 0$, ist $h(x)$ ein Element aus P, und es ist

$$f(x) \circ h(x) = h(f(x)) = b_0 - \frac{a_0 b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}(a_0 + a_1 x) = b_0 + b_1 x = g(x)$$

Sei weiterhin $k(x) = \frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} x$. $k(x)$ ist ebenfalls ein Element aus P, und es ist

$$k(x) \circ f(x) = f(k(x)) = a_0 + a_1 (\frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} x) = b_0 + b_1 x = g(x)$$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 6B - 101246B
In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, dass in beliebigen Punkten P' von t (mit $AP' = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, dass die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $P'P = y < r$.
a) Man beweise, dass dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!
b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise: Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt. Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, dass für alle positiven reellen Zahlen $x \leq \frac{1}{n} r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, dass also $\delta \leq 0{,}001$ gilt.

a) Wir legen in die Ebene ein x-z-Koordinatensystem, sodass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung und der Berührungspunkt A im Punkt $(0, r)$ liegt. Die Tangente t bildet die Gerade $z = r$.

Ein Punkt P' habe die Koordinaten $(x$,1) und somit den Abstand x zu A. (Da Figur ist symmetrisch zur Geraden $x = 0$, sodass man sich o.B.d.A. auf positive x beschränken kann.) Die Senkrechte zu t durch P' ist die Parallele zur z-Achse durch P', haben also x-Koordinate x. Damit hat auch P die x-Koordinate x.

Da alle Punkte auf dem Kreis $x^2 + z^2 = r^2$ erfüllen und es mit P um den "oberen" Schnittpunkt mit dem Kreis geht, lässt sich dessen z-Koordinate erhalten als $z = \sqrt{r^2 - x^2}$. Der Abstand $|P'P|$ ist damit $y = r - z = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.
Mit diesem Wert für y rechnet man schnell nach, dass $2r - y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ und

$$\frac{x^2}{2r - y} = \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x^2 \cdot (r - \sqrt{r^2 - x^2})}{(r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot (r - \sqrt{r^2 - x^2})} = \frac{x^2 \cdot y}{r^2 - (r^2 - x^2)} = y \cdot \frac{x^2}{x^2} = y$$

ist.

b) Es ist

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{r} = \left| \frac{y}{r} - \frac{y_1}{r} \right| = \left| (1 - \sqrt{1 - t^2}) - \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \right|$$

mit $t := \frac{x}{r}$.
Dabei ist für alle reellen $1 > t > 0$

$$1 - \sqrt{1 - t^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{1} = \frac{(1 - \sqrt{1 - t^2}) \cdot (1 + \sqrt{1 - t^2})}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = \frac{1 - (1 - t^2)}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = \frac{t^2}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = t^2 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}}$$

und also
$$\delta = \left| t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}t^2 \right| = t^2 \cdot \left| \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} \right|$$

Dabei ist wegen $0 < t^2 < 1$ auch $0 < \sqrt{1-t^2} < 1$ und $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} < 1$, also $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Damit ist $\delta < \frac{1}{2}t^2$.

Ist $t < \frac{1}{23}$, so ist $t^2 < \frac{1}{23^2} = \frac{1}{529} < \frac{1}{500}$ und damit $\delta < \frac{1}{2}t^2 < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Also folgt für alle $n \geq 23$, dass für alle $x \leq \frac{1}{n}r$ die Abweichung δ höchstens 0,001 beträgt. Gegebenenfalls gilt dies auch für noch kleinere natürliche Zahlen n. Jedoch gibt es in jedem Fall ein kleinstes solches n.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.13 XI. Olympiade 1971

9.13.1 I. Runde 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111211
Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der Nationalen Volksarmee der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als "Zweitsprache" noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.

(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.

(2) E beherrscht keine Fremdsprache.

(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.

(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch noch Polnisch noch Russisch.

(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.

(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.

Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er - wenn überhaupt - beherrscht.

Die Ausgangssituation:
Zweitsprache: B=Bulgarisch, P=Polnisch, U=Ungarisch, R=Russisch, D=Deutsch
Nationalität: b=Bulgare, p=Pole, u=Ungar, r=Russe, d=Deutscher)
A: B P U R D b p u r d
B: B P U R D b p u r d
C: B P U R D b p u r d
D: B P U R D b p u r d
E: b p u r d

B spricht keine slawischen Sprachen, also kein B, P und R und ist auch kein b, p, r. ⇒ B: U D u d

Mit (6) ist klar, daß D und B weder der Bulgare noch der Ungar sind. Wenn B nicht der Ungar ist, dann ist er der Deutsche (d) und spricht als Zweitsprache ungarisch (U). ⇒ B: U d ⇒ D: B P U R D p r d

D und B sprechen beide eine Sprache, also D entweder Deutsch als Zweitsprache, da er der Deutsche nicht mehr sein kann oder Ungarisch als Zweitsprache, da er auch der Ungar nicht ist. ⇒ D: U D p r

Nach (5) muss C der Ungar sein, da er neben Ungarisch auch die Sprache von E spricht und nicht der Deutsche ist.
Somit spricht D als Fremdsprache Deutsch. A, C und E sprechen also kein Deutsch. A, D und E sprechen als Zweitsprache kein Ungarisch (nach (1a)).
⇒ A: B P R b p r ; ⇒ C: B P R u ; ⇒ D: D p r ; ⇒ E: b p r

Der Ungar, also C, spricht nach (6) kein Bulgarisch. ⇒ C: P R u

Die Fremdsprache von C ist nach (5) die Muttersprache von E, also ist E nicht der Bulgare. Damit steht A als Bulgare fest. ⇒ A: P R b ; ⇒ E: p r

Nach (6) ist die Fremdsprache des Bulgaren somit die Muttersprache von D und damit Polnisch oder Russisch. Mit (3) und (1a) muss A damit auch Russisch sprechen. Russisch als Zweitsprache ist somit für C ausgeschlossen. ⇒ A: R b ; ⇒ C: P u

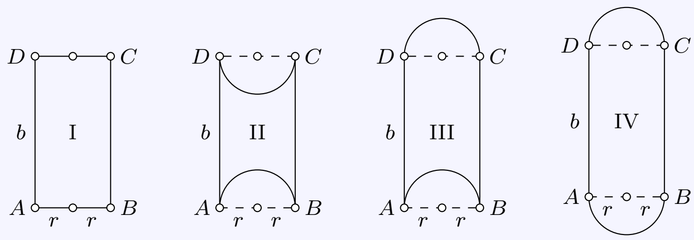
Da C als Fremdsprache Polnisch spricht und sich nach (5) mit E verständigen kann, steht E als Pole fest. Die Muttersprache für D ist damit Russisch.

Lösung:
A ist Bulgare und spricht Russisch. B ist Deutscher und spricht Ungarisch. C ist Ungar und spricht Polnisch. D ist Russe und spricht Deutsch. E ist Pole.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 111212

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedes Mal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:



Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartigen Streckenverhältnisse anzugeben.

Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.

a) Der Flächeninhalt der Figur 1 ist gleich $F = 2br$. Daraus folgt $b = \frac{F}{2r}$. Ferner ist der Umfang dieser Figur gleich

$$u = 2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r = \frac{F}{r} - 4\sqrt{F} + 4r + 4\sqrt{F} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r}\right)^2 + 4\sqrt{F} \geq 4\sqrt{F}$$

Der Umfang wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r} = 0 \qquad (1)$$

erfüllbar ist, genau dann am kleinsten, wenn (1), d.h. $F = 4r^2$, gilt. Das trifft zu, wenn

$$\frac{b}{r} = \frac{F}{2r^2} = \frac{4r^2}{2r^2} = 2$$

ist. Somit beträgt der Minimalumfang $u = 2b + 4r = 4r + 4r = 8r$. Ferner gilt für ihn

$$\frac{u}{\sqrt{F}} = \frac{8r}{2r} = 4$$

Im Fall der Figuren II, III und IV erhalten wir für F, b und u die jeweils in Spalte 2, 3 bzw. der Tabelle angegebenen Werte. Daher gilt in alle Fällen

$$u = \frac{F}{r} + kr$$

wobei k eine positive reelle Zahl ist, die im Fall I gleich 4, im Fall II gleich 3π, im Fall III gleich 2π und im Fall IV gleich π ist.

Figur	F	b	u	F	$\frac{b}{r}$	u	$\frac{u}{\sqrt{F}}$
Spalte 1	2	3	4	5	6	7	8
I	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b+4r=\frac{F}{r}+4r$	$4r^2$	2	$8r$	4
II	$2br-\pi r^2$	$\frac{F}{2r}+\frac{\pi}{2}$	$2b+4r=\frac{F}{r}+3\pi r$	$3\pi r^2$	2π	$6\pi r$	$2\sqrt{3\pi}\approx 6{,}140$
III	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b+4r=\frac{F}{r}+2\pi r$	$2\pi r^2$	π	$4\pi r$	$2\sqrt{2\pi}\approx 5{,}013$
IV	$2br+\pi r^2$	$\frac{F}{2r}-\frac{\pi}{2}$	$2b+4r=\frac{F}{r}+\pi r$	πr^2	0	$2\pi r$	$2\sqrt{\pi}\approx 3{,}545$

Die Werte in der 5. bis 8. Spalte entsprechen dem Fall, dass u ein Minimum wird.

Mithin gilt in allen Fällen analog wie im Fall I

$$u=\frac{F}{r}+kr=\frac{F}{r}-2\sqrt{Fk}+kr+2\sqrt{Fk}=\left(\sqrt{\frac{F}{r}}-\sqrt{kr}\right)^2+2\sqrt{Fk}\geq 2\sqrt{Fk}$$

Der Umfang der Figur wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}}=\sqrt{kr} \tag{2}$$

erfüllt ist, genau dann am kleinsten, wenn (2), d.h. $F=kr^2$ gilt.
Setzen wir nun für k die obigen Werte ein, so erhalten wir, dass u genau dann ein Minimum wird, wenn die Werte für F so lauten, wie sie in Spalte 5 angegeben sind. Ferner erhalten wir unter Benutzung der Werte der Spalten 3 und 4, dass dies genau für die in den Spalten 6, 7 und 8 angegebenen Werte von $\frac{b}{r}$, u bzw. $\frac{u}{\sqrt{F}}$ zutrifft.

b) Aus den Zahlen der Spalte 8 ergibt sich nun die folgende Ordnung der Figuren nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt: II, III, I, IV.

Nachweis dieser Reihenfolge ohne dezimale Berechnung der Wurzeln:

Aus $2<\pi<4$ folgt $12\pi>8\pi>16>4\pi$, also

$$2\sqrt{3\pi}>2\sqrt{2\pi}>4>2\sqrt{\pi}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 111213
Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom $f(x)=(x+1)^4-(kx)^2$

a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene,
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene,
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

Es sei $k=0$. Dann gilt $f(x)=(x+1)^4$; die Funktion $f(x)$ hat also genau eine reelle Nullstelle, nämlich $x=-1$.

Es sei $k>0$. Dann können wir folgende Umformung vornehmen: $f(x)=g(x)h(x)$ mit

$$\begin{aligned}
g(x)&=(x+1)^2+kx=\left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k^2}{4}+k\right)\\
&=\left(x+1+\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+k}\right)\left(x+1+\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+k}\right)\\
h(x)&=(x+1)^2-kx=\left(x+1+\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k^2}{4}-k\right)
\end{aligned}$$

Zur weiteren Umrechnung von $h(x)$ unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: $\frac{k^2}{4} - k > 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k > 4$. Dann gilt:

$$h(x) = \left(x + 1 + \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right)\left(x + 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right)$$

und $h(x)$ hat daher genau zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen.

Fall 2: $\frac{k^2}{4} - k = 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k = 4$. Dann gilt: $h(x) = \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2$ und $h(x)$ hat daher genau eine Nullstelle.

Fall 3: $\frac{k^2}{4} - k < 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k < 4$. Dann gilt:

$$h(x) > \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2 \geq 0$$

und $h(x)$ hat daher keine Nullstelle.

In alle drei Fällen hat $g(x)$ wegen $k > 0$ genau zwei voneinander verschiedene Nullstellen. Weiterhin ist keine der Nullstellen von $g(x)$ gleich einer der Nullstellen von $h(x)$ (falls solche existieren); denn wäre eine Zahl x_0 sowohl Nullstelle von $g(x)$ als auch Nullstelle von $h(x)$, so wäre für sie:

$$(x_0 + 1)^2 + kx_0 = (x_0 + 1)^2 - kx_0 \qquad (1)$$

$$(x_0 + 1)^2 + kx_0 = 0 \qquad (2)$$

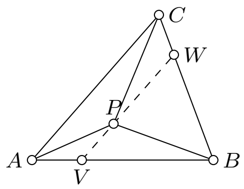
Aus (1) folgte dann wegen $k > 0$ aber $x_0 = 0$, und dies steht im Widerspruch zu (2).

Also erhalten wir für $k = 0$ die Antwort a), für $k > 0$ im Fall 1 die Antwort d), im Fall 2 die Antwort c), im Fall 3 die Antwort b) und niemals die Antwort e).

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 111214
In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$ sei P ein im Inneren des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, dass dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.



Die Parallele zu AC durch P schneide die Seite AB in V und die Seite CB in W. Dann ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle VBW \sim \triangle ABC$, also $|VB| \geq |BW| \geq |VW|$.

Weiter gilt nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck $\triangle BPW$ die Ungleichung $|\angle VPB| > |\angle VWB|$. Weil in jedem Dreieck, also auch im $\triangle VBW$, dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, ist zunächst $|\angle VWB| \geq |\angle BVN|$ und damit auch $|PB| < |VB|$. Daraus folgt

$$|VW| + |PB| < |VB| + |BW| \qquad (1)$$

Aus den Dreiecken $\triangle AVP$ und $\triangle CPW$ erhält man

$$|PA| < |AV| + |VP| \quad (2) \qquad \text{bzw.} \qquad |PC| < |CW| + |WP| \quad (3)$$

Durch Addition folgt schließlich aus (1), (2) und (3)

$$|PA| + |PB| + |PC| + |VW| < (|AV| + |VB|) + (|CW| + |BW|) + (|VP| + |WP|)$$

also

$$|PA| + |PB| + |PC| + < |AB| + |BC|$$

Übernommen von [5]

9.13.2 II. Runde 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111221
Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b.
Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.
a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.
b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

a) Für das Volumen V des Prismas gilt $V = c^2 h$ mit $h = a + b$. Aus $a^3 + b^3 = V = c^2(a + b)$ erhalten wir

$$c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

b) Aus der Gleichung $c^2 = a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60°)$ können wir mittels Kosinussatz eine Konstruktionsvorschrift ablesen: Konstruiere aus a,b mit eingeschlossenem Winkel $\gamma = 60°$ ein Dreieck. Die dritte Seite des Dreiecks hat dann die gesuchte Länge c.

Quelle anonym

Aufgabe 2 - 111222
Beweisen Sie, dass für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

Beweis: Aus der Lösbarkeit von $x^2 = 7n + 3$ in $\mathbb{Z}$ würde sofort auch die Lösbarkeit der Kongruenz $x^2 \equiv 3 \mod 7$ folgen.
Diese ist aber unlösbar, die man wohl am einfachsten durch Einsetzen aller "Kandidaten" $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ sieht.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Jede ganze Zahl lässt sich in genau einer der Formen $7m$, $7m \pm 1$, $7m \pm 2$ oder $7m \pm 3$ (m eine ganze Zahl) darstellen. Die Quadrate davon sind:

$$\begin{aligned}
(7m)^2 &= 7(7m^2) + 0 \\
(7m \pm 1)^2 &= 7(7m^2 \pm 2m) + 1 \\
(7m \pm 2)^2 &= 7(7m^2 \pm 4m) + 4 \\
(7m \pm 3)^2 &= 7(7m^2 \pm 6m + 1) + 2
\end{aligned}$$

Die Quadrate ganzer Zahlen lassen sich demnach nur in einer der Formen $7n$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$ (n eine ganze Zahl) darstellen. Daher kann eine Zahl der Form $7n + 3$ nicht das Quadrat einer ganzen Zahl sein.

Ein anderer Lösungsweg:
Für jede ganze Zahl z gilt genau eine der Kongruenzen:

$$z \equiv 0 \pmod 7, \quad z \equiv \pm 1 \pmod 7, \quad z \equiv \pm 2 \pmod 7, \quad z \equiv \pm 3 \pmod 7$$

Daher gilt für z^2 genau eine der folgenden Kongruenzen:

$$z^2 \equiv 0 \pmod 7, \quad z^2 \equiv 1 \pmod 7, \quad z^2 \equiv 4 \pmod 7, \quad z^2 \equiv 2 \pmod 7$$

Also gilt für z^2 niemals $z^2 \equiv 3 \pmod 7$. Folglich kann eine Zahl der Form $7n + 3$ niemals Quadrat einer ganzen Zahl sein.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 111223
Klaus bemerkt, dass die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

In einer Minute überstreicht der Minutenzeiger einen Winkel von $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $\frac{360^\circ}{12\cdot 60} = 0{,}5^\circ$.

Um x Minuten nach 6 Uhr schließt der Minutenzeiger mit der 12-Uhr-Position also einen Winkel von $6x^\circ$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $(180 + 0{,}5x)^\circ$ ein. Für die beiden genannten Zeitpunkte a Minuten nach 6 Uhr und b Minuten nach 6 Uhr mit $a < b$ gilt daher

$$180 + 0{,}5a - 6a = 110 \qquad \text{und} \qquad 6b - (180 + 0{,}5b) = 110$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $\frac{11}{2}b - \frac{11}{2}a = 220$ bzw. $b - a = 40$. Zwischen den beiden Zeitpunkten liegen also exakt 40 Minuten.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Aufgabe 4 - 111224
Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Es ist zu beweisen, dass keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

Angenommen ein Kreis um M enthält zwei rationale Punkte P,Q. Dann liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ.

Da P,Q rationale Koordinaten haben, sind ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke und die Steigung der Mittelsenkrechten rational. Daher liegt M auf einer Gerade $y = ax + b$ mit a,$b \in \mathbb{Q}$. Aus $\sqrt{3} - a\sqrt{2} = b$ folgt $3 - 2a\sqrt{6} + 2a^2 = b^2 \Rightarrow 2a\sqrt{6} = 3 + 2a^2 - b^2$, was nicht möglich ist, da $\sqrt{6}$ irrational ist.

Falls $a = 0$, so hat $b^2 = 3$ keine rationale Lösung. Falls die Mittelsenkrechte parallel zur y-Achse ist, erhalten wir durch Vertauschen der Koordinaten analog einen Widerspruch.

Quelle anonym

9.13.3 III. Runde 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111231
Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90°$.
a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d.h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent).
Deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

Es sei S der Schnittpunkt von g und h. Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene dieser beiden Geraden, dass g auf der x-Achse, S im Koordinatenursprung und h derart zu liegen kommt, dass diese Gerade durch den ersten Quadranten (bzw. auf der y-Achse) verläuft.

Der Punkt S ist Fixpunkt beider Spiegelungen, wird also auch durch die Hintereinanderausführung beider Spiegelungen wieder auf sich selbst abgebildet.

Für einen von S verschiedenen Punkt P kann man dessen Polarkoordinaten mit dem Paar (r,ϕ) angeben, wobei $r > 0$ die Entfernung $|SP|$ und ϕ den Winkel, den ein Strahl, beginnend mit der positiven x-Achse, überstreichen muss, bis er P erreicht, darstellt. Dabei ist der Winkel ϕ modulo 360° zu lesen, da Polarkoordinaten, bei denen sich das Argument ϕ um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, den gleichen Punkt in der Ebene beschreiben.

Der Punkt P mit Koordinaten (r,ϕ) wird durch Spiegelung an g, also an der x-Achse, auf den Punkt P_g mit Koordinaten $(r, -\phi)$ abgebildet.

Spiegelt man dagegen den Punkt P an der Geraden h, so bleibt wieder dessen Betrag r erhalten, da Spiegelungen längentreu sind, und die Strecke SP also die gleiche Länge wie die Strecke SP_h besitzt. Um das Argument vom Spiegelpunkt P_h zu ermitteln, beachten wir, dass der von S ausgehende Strahl, der sich von P bis zum positiven Ast von h bewegt, einen Winkel von $\alpha - \phi$ überstreicht. Bis P_h muss nun der Strahl von eben jenem positiven Ast von h in der gleichen Richtung einen gleichgroßen Winkel überstreichen, bis er P_h erreicht. Also besitzt P_h das Argument $\alpha + (\alpha - \phi) = 2\alpha - \phi$ und damit die Polarkoordinaten $(r,2\alpha - \phi)$.

Auf analoge Weise können wir nun den Punkt P_g an h spiegeln und erhalten den Punkt P_{gh} mit den Polarkoordinaten $(r,2\alpha - (-\phi)) = (r,\phi + 2\alpha)$. Jeder von S verschiedene Punkt P wird also durch die Hintereinanderausführung der Spiegelungen erst an g und dann an h um den Winkel 2α in mathematisch positiver Richtung um S gedreht. Der Punkt S bleibt dabei fix und ist das Drehzentrum.

Spiegelt man dagegen P_h an g, so erhält man den Punkt P_{hg} mit den Polarkoordinaten $(r, -(2\alpha - \phi)) = (r,\phi - 2\alpha)$. Dies stellt also eine Drehung um den Winkel -2α in mathematisch positiver Richtung um das Drehzentrum S dar. Dies liefert also nur dann die gleiche Drehung wie die zuvor betrachtete, wenn $P_{gh} = P_{hg}$ gilt, also sich die Argumente $\phi \pm 2\alpha$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheiden. Wegen $0 < \alpha \leq 90°$ ist dies nur genau für $\alpha = 90°$ der Fall.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 111232
Man beweise, dass die Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Diese Gleichung lässt sich nach Division durch 9^x auch schreiben als

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 1 = 0$$

d.h., $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $u^2 + u - 1 = 0$, woraus sich unmittelbar die sehr viel einfachere Gleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ergibt. Diese hat auf jeden Fall eine eindeutig bestimmte reelle Lösung $\tilde{x} > 0$. Wäre $\tilde{x}$ rational, also $\tilde{x} = \frac{r}{s}$ für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$, so würde daraus unmittelbar

$$\left(\frac{2}{3}\right)^r = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^s$$

und weiter

$$2^{r+s} = 3^r(\sqrt{5}-1)^s$$

folgen. (Anmerkung siehe unten)

Diese letzte Gleichung kann aber nicht gelten, da deren rechte Seite in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ offensichtlich durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht, was den geforderten Widerspruch ergibt.

Aufgabe gelöst von weird

Anmerkung von cyrix:
Es ist nach dem binomischen Satz

$$(\sqrt{5}-1)^s = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \sqrt{5}^k \cdot (-1)^{s-k}$$

Die Summanden für gerade k haben alle das gleiche Vorzeichen sowie die für ungerade k. Insbesondere ist also die Summe der Summanden mit ungeradem k nicht 0.
Wegen $\binom{s}{k} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{5}^{2m} = 5^m \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{5}^{2m+1} = \sqrt{5} \cdot 5^m$ gibt es also rationale Zahlen a und b mit $b \neq 0$ und $(\sqrt{5}-1)^s = a + b\sqrt{5}$.
Gäbe es eine rationale Lösung der Ausgangsgleichung, so müsste also

$$\frac{2^{r+s}}{3^s} = (\sqrt{5}-1)^s = a + b\sqrt{5} \quad \text{also}$$

$$\sqrt{5} = \frac{\frac{2^{r+s}}{3^s} - a}{b} \in \mathbb{Q}$$

gelten, was ein Widerspruch ist. Damit gibt es keine rationale Lösung der Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$.

Zweite Lösung:

Angenommen, es gäbe eine rationale Nullstelle x_0 von (*). Dann folgt

$$(2 \cdot 2)^{x_0} + (2 \cdot 3)^{x_0} - (3 \cdot 3)^{x_0} = 0$$

also nach Division durch $(2 \cdot 2)^{x_0}$ $(\neq 0)$

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x_0} \tag{1}$$

Setzt man nun $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = z$, so ergibt sich aus (1)

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{2}$$

Die Gleichung (2) hat genau die reellen Lösungen

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad , \qquad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Von diesen ist nur z_1 positiv. Somit folgt weiter

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

Es sei nun $x_0 = \frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q. Wegen $z_1 > 1$, also $x_0 > 0$, kann dann $p > 0$ und $q > 0$ angenommen werden. Aus (3) folgt weiter

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{also} \qquad 3^p = 2^{p-q}(1+\sqrt{5})^q \tag{4}$$

Unter Benutzung des binomischen Satzes ergibt sich $(1+\sqrt{5})^q = a + b\sqrt{5}$ mit positiven ganzen Zahlen a und b. Aus (4) folgt schließlich

$$\sqrt{5} = \frac{3^p \cdot 2^{q-p} - a}{b}$$

Diese Gleichung enthält den Widerspruch, dass $\sqrt{5}$ als eine rationale Zahl dargestellt wird. Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe eine rationale Nullstelle von (*), falsch war.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 111233

21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abbildung angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, dass jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt.
Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.
Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden lässt.

Ein 3×7-Tableau, welches ganz oder teilweise mit den Ziffern 1,2,3 ausgefüllt ist, heißt im Folgenden zulässig, wenn folgende Bedingungen für die bereits eingetragenen Ziffern erfüllt sind:
- Jede Ziffer kommt in dem Tableau höchstens dreimal vor
- Für jede Spalte sind alle ihre Ziffern verschieden
- Für je zwei verschiedene Spalten gibt es höchstens eine Ziffer, welche in beiden Spalten vorkommt.

Ferner denken wir uns die Kästchen eines Tableaus in dem Sinn geordnet, als ein Kästchen vor einem anderen kommt, wenn seine Spaltennummer kleiner ist, und bei gleicher Spaltennummer, wenn seine Zeilennummer dann kleiner ist. Des weiteren nennen wir im Folgenden ein Kästchen frei, wenn in dieses bis dahin noch keine Ziffer eingetragen wurde.

Folgender Greedy-Algorithmus liefert dann das gewünschte Ergebnis:
Beginnend mit dem noch leeren Tableau, welches offensichtlich zulässig ist, fügt man einfach jede Ziffer der Folge

1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7

in genau dieser Reihenfolgen an der ersten freien Stelle in das Tableau ein, für welches dieses weiterhin zulässig ist. Das Endtableau unten erfüllt dann offensichtlich alle Bedingungen der Aufgabe hier:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 111234
a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Man zeige, dass die so definierte Folge a_n eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n > 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass a_n eine geometrische Folge ist!

Wir zeigen induktiv, dass $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 0$ und $n = 1$:

$$-4(-\frac{1}{2})^0 = -4 = a_0$$
$$-4(-\frac{1}{2})^1 = -4(-\frac{1}{2}) = 2 = a_1$$

Induktionsschritt:
Die Gleichung $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gelte für alle $n \leq k$ (mit $k \geq 1$). Nun ist

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2} = \frac{-4(-\frac{1}{2})^k + -4(-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} = -4 \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^k + (-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} =$$
$$= -4 \cdot \frac{-2(-\frac{1}{2})^{k+1} + (-2)^2(-\frac{1}{2})^{k+1}}{2} = -4 \cdot \frac{-2 + (-2)^2}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} =$$
$$= -4 \cdot \frac{-2+4}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} = -4 \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1}$$

a_n ist also tatsächlich eine geometrische Folge mit dem Startglied -4 und dem Faktor $-\frac{1}{2}$.

Für die Summe der a_n gilt nach der Summenformel geometrischer Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = -4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$$

Zu b) Ist $a_0 = a_1 = 0$, so sind alle weiteren Folgenglieder ebenfalls 0 und es liegt eine geometrische Reihe vor.
Ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es keinen Faktor f mit $a_1 = f \cdot a_0$ gibt.
Ist $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es wegen $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \neq 0$ keinen Faktor f mit $a_2 = f \cdot a_1$ gibt.

Seien im Folgenden also a_0 und a_1 von 0 verschieden.
Notwendigerweise müssen zumindest die ersten drei Glieder eine geometrische Reihe bilden. Es muss also $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$ gelten. Daraus folgt $a_1^2 = a_0 \cdot a_2 = a_0 \cdot \frac{a_0+a_1}{2}$ bzw. $2a_1^2 = a_0^2 + a_0 a_1$.

a_0 ist also Lösung der Gleichung: $a_0^2 + a_0 a_1 - 2a_1^2 = 0$.
Diese Gleichung hat zwei Lösungen $-a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 + 2a_1^2} = -a_1/2 \pm 3|a_1|/2$. Es gilt also $a_0 = -a_1/2 + 3a_1/2 = a_1$ oder $a_0 = -a_1/2 - 3a_1/2 = -2a_1$. Die Betragsstriche dürfen im letzten Schritt weggelassen werden, da ja sowieso beide Fälle - mit negativem und mit positivem Vorzeichen - erfasst werden.

Dieses Kriterium deckt auch die Fälle, in denen eines der beiden Anfangsglieder gleich 0 ist mit ab, so dass sich folgendes notwendige Kriterium ergibt: Entweder ist $a_0 = a_1$ oder $a_0 = -2a_1$.

Dieses Kriterium ist gleichzeitig hinreichend.
Ist $a_0 = a_1$ so sind alle Folgenglieder identisch und es ergibt sich eine geometrische Reihe mit dem Faktor 1.
Gilt $a_0 = -2a_1$, so lässt sich der Induktionsbeweis aus a) direkt übertragen, es muss lediglich der Faktor -4 durch a_0 ersetzt werden. Beim Nachweis des Induktionsanfangs kommt die Bedingung $a_0 = -2a_1$ zum Tragen.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 5 - 111235
Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geq \frac{2}{1 - \sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Eine zentrale Rolle in den folgenden Überlegungen wird die Funktion

$$f : (0, \frac{\pi}{2}) \to (1,\infty), \quad t \mapsto \frac{1}{1-\sin t}$$

spielen. Ihre Ableitungen

$$f'(t) = \frac{\cos t}{(1-\sin t)^2}$$

sowie

$$f''(t) = \frac{-\sin t(1-\sin t)^2 + 2(1-\sin t)(1-\sin^2 t)}{(1-\sin t)^4} = \frac{2+\sin t}{(1-\sin t)^2}$$

zeigen, dass sowohl f, als auch f' auf dem betrachteten Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend sind.

Um dies zu verwenden, formen wir (1) zunächst um zu

$$f(2y) - f(x+y) \geq f(x+y) - f(2x)$$

woraus wir in Verbindung mit der Monotonie von f sofort ersehen können, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau für $x = y$ gilt. Insbesondere können wir daher im Folgenden o.B.d.A. $x < y$ voraussetzen. Damit wird dann (1) für diesen Fall zu

$$\frac{f(2y) - f(x+y)}{2y - (x+y)} > \frac{f(x+y) - f(2x)}{(x+y) - 2x} \qquad (*)$$

Dass dies gilt, ist aber nach dem schon Bewiesenen klar, denn nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gilt

$$\exists u \in (x+y,2y) : \frac{f(2y) - f(x+y)}{2y - (x+y)} = f'(u) \quad \text{bzw.} \quad \exists v \in (2x,x+y) : \frac{f(x+y) - f(2x)}{(x+y) - 2x} = f'(v)$$

und aus der simplen Tatsache

$$u > v \Rightarrow f'(u) > f'(v)$$

folgt also dann auch sofort (*) und damit unsere Behauptung hier.

Zweite Lösung:

Aufgabe gelöst von weird

Für alle reellen Zahlenpaare (x, y) gilt

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2 \qquad (1)$$

sowie

$$1 - \sin 2y = \sin^2 y + \cos^2 y - 2\sin y \cos y = (\cos y - \sin y)^2 \qquad (2)$$

wegen (**) ist dabei

$$\cos x - \sin x > 0 \qquad \text{und} \qquad \cos y - \sin y > 0$$

Ferner gilt für alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b)

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Setzt man hierin $a = \frac{1}{\cos x - \sin x}$, $b = \frac{1}{\cos y - \sin y}$, so folgt für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit (**) wegen (1) und (2)

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{(\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y)}$$
$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{\cos x \cos y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \sin \sin y}$$
$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{(\cos(x-y) - \sin(x+y))} \geq \frac{2}{1-\sin(x+y)}$$

weil wegen (**)

$$0 < (\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y) = \cos(x-y) - \sin(x+y) \leq 1 - \sin(x+y) \qquad (3)$$

gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Notwendig dafür, dass Gleichheit in (*) eintritt, ist, dass auch in (3) u eintritt, also muss $\cos(x-y) = 1$ gelten. Das gilt wegen (**) nur für $x = y$.
Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie man durch Einsetzen von $x = y$ in beide Seiten von (*) erkennt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6A - 111236A
Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun K die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in K eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man beweise, dass K eine Gruppe bezüglich A ist.

Für die Lösung dieser Aufgabe erweist es sich als zweckmäßig, die Elemente von K in der Form

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad (\varphi \in [0{,}2\pi))$$

anzuschreiben, wobei hier für jedes $(a{,}b) \in K$ in der umkehrbar eindeutigen Zuordnung $(a{,}b) \leftrightarrow \varphi$ der Winkel $\varphi \in [0{,}2\pi)$ jeweils eindeutig bestimmt ist. Die Verknüpfung $\circ$ ist für $\varphi{,}\psi \in [0{,}2\pi)$ gegeben durch

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)$$

wofür man bekanntlich auch einfacher

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)))$$

schreiben kann. Insbesondere gilt somit für $\alpha{,}\beta{,}\gamma \in [0{,}2\pi)$

$$((\cos\alpha, \sin\alpha) \circ (\cos\beta, \sin\beta)) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma) = (\cos((\alpha + \beta) + \gamma), \sin((\alpha + \beta) + \gamma))$$

was also dann ident ist mit

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \circ ((\cos\beta, \sin\beta) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma)) = (\cos(\alpha + (\beta + \gamma)), \sin(\alpha + (\beta + \gamma)))$$

und somit die Assoziativität von $\circ$ beweist.
Für den Punkt c) genügt es wegen der Kommutativät von $\circ$ nur die Lösbarkeit der ersten Gleichung zu zeigen. Diese folgt aber für $\mu, \nu \in [0{,}2\pi)$ sofort aus

$$(\cos\mu, \sin\mu) \circ (\cos(\nu - \mu), \sin(\nu - \mu)) = (\cos\nu, \sin\nu)$$

Aufgabe gelöst von weird

2. Lösung:
Wir identifizieren dass Paar $(a{,}b)$ reeller Zahlen mit der komplexen Zahl $a+ib$. Dann ist die beschriebene Verknüpfung $\circ$ zweier Paare reeller Zahlen genau die Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen und K genau die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Diese bilden mit der Multiplikation eine Gruppe:

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ gilt $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| = 1 \cdot 1 = 1$.

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ und kommutativ.

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ seien die komplexen Zahlen x und y definiert durch $x := y := v \cdot \bar{u}$, wobei $\bar{u}$ die zu u komplex konjugierte Zahl sei. Dann gilt wegen $|\bar{u}| = |u| = 1$ sowie $\bar{u} \cdot u = 1^2$ auch $|x| = |y| = 1$ und $u \cdot x = y \cdot u = v \cdot \bar{u} \cdot u = v \cdot 1^2 = v$.

Also bildet auch K bezüglich der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe, $\Box$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 111236B
50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.
Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:
1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.
2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ u anzusetzen.
3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

w und s seien die Anzahlen der weißen bzw. schwarzen Kugeln, die in Urne 1 gelegt werden. Nach Voraussetzung ist dann $(w,s) \neq (0,0)$ und $(w,s) \neq (50,50)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus Urne 1 bzw. Urne 2 gezogene Kugel weiß ist, beträgt $p_1(w,s) = \frac{w}{w+s}$ bzw. $p_2(w,s) = \frac{50-w}{100-w-s}$.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist also $p(w,s) = \frac{1}{2}(p_1(w,s)+p_2(w,s))$. Gesucht sind w und s, sodass $p(w,s)$ maximal wird.
Für $w = s$ gilt $p(w,s) = \frac{1}{2}$. Später werden wir sehen, dass dies nicht der gesuchte Maximalwert ist. Sei nun vorerst $w \neq s$.

Da nicht in beiden Urnen mehr schwarze als weiße Kugeln sein können, wird ohne Einschränkung angenommen, dass in Urne 1 mehr weiße als schwarze Urnen sind, also dass $s < w$ gilt.
Einfache algebraische Umformungen zeigen dann:
Für $0 < s < w \leq 50$ gilt $p_1(w-1,s-1) > p_1(w,s)$ und $p_2(w-1,s-1) > p_2(w,s)$.

Somit kann das Maximum von $p(w,s)$ nicht für $0 < s < w \leq 50$ angenommen werden, da $p(w-1,s-1) > p(w,s)$.
Das Maximum von $p(w,s)$ wird also für $s = 0$ (und $w > 0$) angenommen.

Es gilt $p(w,0) = \frac{1}{2}(1 + \frac{50-w}{100-w}) = 1 - \frac{25}{100-w}$. Dies wird für $w = 1$ maximal, und dann ist $p(1,0) = \frac{74}{99}$.
Wegen $\frac{74}{99} > \frac{1}{2}$ ist also $\frac{74}{99}$ die größtmögliche erreichbare Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn in Urne 1 eine weiße und keine schwarze Kugel (oder 49 weiße und 50 schwarze Kugeln gelegt) werden.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf und einem weiteren Autor

9.13.4 IV. Runde 1971, Klasse 12

Aufgabe 1 - 111241
Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \qquad (1)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die folgende Ungleichung (2) erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \qquad (2)$$

In (1) dürfen alle x eingesetzt werden, für die keiner der beiden Nenner 0 wird, also alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2{,}8\}$. Wir unterscheiden die Fälle $x \geq 3$ und $x < 3$.

Fall 1: $x \geq 3$
Dann ist der Ausdruck (1) gleich

$$\frac{2x}{x-3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2+5x-8}{(x-8)(x+2)}$$

Fall 1.1: Für $x > 8$ (oder $x < -2$, was in Fall 1 aber nicht möglich ist) ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu

$$2x^2+5x-8 \geq (x-8)(x+2) \iff x^2+11x+8 \geq 0 \iff (x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$$

Letzteres ist immer erfüllt. Dieser Fall liefert also alle $x > 8$ als Lösung von (2).
Fall 1.2: Für $-2 < x < 8$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Die Rechnung bleibt aber identisch, und (2) ist dann äquivalent zu $(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \leq 0$. Dies ist nie erfüllt.

Fall 2: $x < 3$
Dann ist der Ausdruck (1) gleich

$$\frac{2x}{-x+3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{1-2x}{x+2}$$

Fall 2.1: Für $x > -2$ ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu

$$1-2x \geq x+2 \iff x \leq -\frac{1}{3}$$

Dieser Fall liefert also alle x mit $-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ als Lösung von (2).
Fall 2.2: Für $x < -2$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Ungleichung (2) ist dann äquivalent zu $1-2x \leq x+2 \iff x \geq -\frac{1}{3}$, was in diesem Fall nicht möglich ist.

Zusammenfassend: Genau alle $x \in (-2, -\frac{1}{3}] \cup (8,\infty)$ sind Lösung von (2).

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

Zweite Lösung:

a) Für $x \leq 3$ ist $|x-3| = 3-x$, der Ausdruck (1) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{-2x+1}{x+2}$.

a1) Für $x < -2$ existiert (1). Ferner ist $x+2 < 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn $-2x+1 \leq x+2$ gilt. Da dies äquivalent mit $x \geq -\frac{1}{3}$ ist, was zu $x < -2$ im Widerspruch steht, gibt es kein $x < -2$, das (2) erfüllt.

a2) Für $x = -2$ existiert (1) nicht.

a3) Für $-2 < x \leq 3$ existiert (1). Ferner ist $x+2 > 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn $-2x+1 \geq x+2$ gilt. Da dies äquivalent mit $x \leq \frac{1}{3}$ ist, erfüllen von den x mit $-2 < x \leq 3$ genau die x mit $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$

die Ungleichung (2).

b) Für $x > 3$ ist $|x-3] = x-3$, der Ausdruck (1) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{2x}{x-8} + \frac{1}{x+2}$.

b1) Für $3 < x < 8$ existiert (1). Ferner ist $(x-8)(x+2) < 0$, also (**) genau dann erfüllt, wenn

$$2x(x+2) + x - 8 \leq (x-8)(x+2)$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \leq 0$$

ist, was zu $x^2 + 11x + 8 > 3^2 + 11 \cdot 3 + 8$ im Widerspruch steht, gibt es kein x mit $3 < x < 8$, das (2) erfüllt.

b2) Für $x = 8$ existiert (1) nicht.

b3) Für $x > 8$ existiert (1). Ferner ist $(x-8)(x+2) > 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn

$$2x(x+2) + x - 8 \geq (x-8)(x+2)$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \geq 0$$

ist, was für $x > 8$ stets richtig ist, erfüllen alle x mit $x > 8$ die Ungleichung (2).

Ergebnis: (1) existiert, wenn $x \neq -2$ und $x \neq 8$ gilt; (2) wird genau dann erfüllt, wenn entweder $-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ oder $x > 8$ gilt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 111242
Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt } (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Man beweise, dass die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

f ist periodisch mit der Periode π. Falls $a = \frac{m}{n}$ rational ist, gilt

$$F(x + n\pi) = f(x + n\pi) + f(\frac{m}{n}x + m\pi) = F(x)$$

$f(x)$ ist nicht negativ und $f(x) \leq \frac{1}{2}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x = n\pi$.
Sei nun F periodisch mit der Periode p. Dann gilt: $1 = F(0) = F(p) = f(p) + f(ap)$.
Diese Gleichung ist nur für $f(p) = \frac{1}{2} \wedge f(ap) = \frac{1}{2}$ erfüllt. Also gibt es ganze Zahlen $m,n \in \mathbb{Z}$, so dass $p = n\pi$ und $ap = m\pi$ gilt. Hieraus folgt $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Quelle anonym

Zweite Lösung:

a) Angenommen, F sei periodisch. Dann gibt es eine von null verschiedene reelle Zahl t mit der Eigenschaft, dass $F(x) = F(x + t)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Insbesondere gilt

$$1 = F(0) = F(t) \tag{1}$$

Aus (1) folgt zunächst, dass t und at von allen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$ verschieden sind, weil sonst $F(t) < 1$ wäre. Hiernach ergibt sich aus (1) weiter

$$1 = \frac{1}{2 + \tan^2 t} + \frac{1}{2 + \tan^2 at} \tag{2}$$

Aus (2) folgt, da jeder der beiden Summanden auf der rechten Seite kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{1}{2+\tan^2 t} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad t = m\pi \tag{3}$$

und

$$\frac{1}{2+\tan^2 at} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad at = n\pi \tag{4}$$

wobei m und n ganze Zahlen sind und wegen $t \neq 0$ auch $m \neq 0$ gilt. Aus (3) und (4) erhält man durch Division

$$a = \frac{m}{n}$$

d. h., a ist eine rationale Zahl. Mithin ist F höchstens dann periodisch, wenn a rational ist.

b) Angenommen, a sei eine rationale Zahl, d. h., es gelte $a = \frac{n}{m}$, wobei n und m ganze Zahlen sind und $m \neq 0$ gilt. Auf Grund der Definition von f hat f die Periode π, also gilt für alle reellen x

$$f(x) = f(x+m\pi) \qquad \text{sowie} \qquad f(ax) = f(ax+n\pi) = f(a(x+m\pi))$$

und daher

$$F(x) = F(x+m\pi)$$

Wegen $m \neq 0$ ist somit F periodisch.
Aus a) und b) folgt daher, dass F genau dann periodisch ist, wenn a eine rationale Zahl ist.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 111243
Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei der Punkte P_i, P_j $(i, j = 1, 2, 3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen $0°$ und $180°$ liegt.
Man beweise, dass für diese Größen die Ungleichung $\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}$ gilt.

Wir schneiden die von Q ausgehenden und durch die P_i verlaufenden Strahlen mit einer Kugeloberfläche mit Radius 1 um Q. Dann erhalten wir auf dieser Kugeloberfläche als Schnitt die Punkte Q_i, wobei P_i auf dem von Q ausgehenden Strahl durch Q_i liegt. Damit ist $\alpha_{ij} = \angle P_iQP_j = \angle Q_iQQ_j$ und die Großkreis-Bögen zwischen je zwei dieser Punkte P_i und P_j besitzen genau die Länge α_{ij}, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.

Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche der (kürzere) Bogen des Großkreises ist, auf dem die beiden Punkte liegen, (welche eindeutig ist, sofern sich die beiden Punkte nicht diametral auf der Kugel gegenüberliegen), folgt, da alle Winkel α_{ij} echt zwischen 0 und $\pi = 180°$ liegen, dass der direkte Weg von Q_1 nach Q_2 entlang des kürzeren Großkreis-Bogens durch diese beide Punkte kürzer ist als der Weg von Q_1 über Q_3 nach Q_2 entlang der entsprechenden Großkreis-Bögen, also $\alpha_{12} < \alpha_{31} + \alpha_{23}$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix und MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 111244
a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$ erfüllen.
b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

a) Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu $(x^2+1)(xz+y-x^3) = 0$. Der erste Faktor ist für alle reelle Zahlen positiv. Daher reicht es den zweiten zu betrachten. Für $x = 0$ ist $y = 0$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, also haben wir die Tripel (0,0,z). Für $x \neq 0$ können wir die Gleichung nach z auflösen $z = x^2 - \frac{y}{x}$ und erhalten für beliebige x,$y \in \mathbb{R}$ das Lösungstripel (x,y,$x^2 - \frac{y}{x}$).

b) Aus $x = 0$ folgt $y = 0$. Aus $z = 0$ folgt $y = x^3$. Also haben die beiden anderen Koordinaten dasselbe Vorzeichen. Daher bleibt nur $y = 0$ übrig. In diesem Fall gilt $z = x^2$. Nur für $x < 0$ haben wir unterschiedliche Vorzeichen und somit sind die gesuchten Triple $\{(x{,}0{,}x^2)|x < 0\}$.

Quelle anonym

Zweite Lösung:

a) Aus der in der Aufgabe genannten Gleichung folgt

$$(x^2 + 1)(xz + y - x^3) = 0$$

wegen $x^2 + 1 \neq 0$ also

$$xz + y - x^3 = 0$$

Somit können höchstens Tripel $(x, x^3 - xz, z)$ mit beliebigen reellen Zahlen x, z die genannte Gleichung erfüllen. Eine Probe zeigt, dass jedes solche Tripel dies auch tut.

b) Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel der in a) genannten Art, das zusätzlich die in b) aufgeführten Bedingungen erfüllt.
Wäre in diesem Tripel $x = 0$, so folgte aus a) auch $y = 0$, und (x, y, z) wäre keine Lösung der Aufgabe b). Wäre $z = 0$, so folgte $y = x^3$ und daraus, dass $xy = x^4 \geq 0$ wäre, also x und y nicht verschiedenes Vorzeichen hätten: (x, y, z) wäre also keine Lösung der Aufgabe b).
Falls es also ein unter b) gesuchtes Tripel gibt, muss $y = 0$ und somit $x \neq 0$ sein, so dass aus $y = x^3 - xz$ weiter $z = x > 0$ und damit $x < 0$ folgt.

Somit können höchstens Tripel $(x, 0, x^2)$ mit $x < 0$ die in a) und b) geforderten Eigenschaften haben. Eine Probe zeigt, dass jedes solche Tripel diese Eigenschaften besitzt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 111245
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:
Hängt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge der Zahl $x + 1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Wir bezeichnen die Zahl, die aus einem x durch das beschriebene Anhängen entsteht, als y. Im dekadischen System hat x die Form abc, d.h. $x = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ mit $a{,}b{,}c \in \{0{,}...{,}9\}$. Zusätzlich gilt $a \neq 0$, da x dreistellig sein soll, und $x \neq 999$, da y sechsstellig sein soll.
Es ist

$$y = (10^3 + 1)(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) + 1 = (10^3 + 1)x + 1$$

und dies soll stets gleich einer Quadratzahl n^2 mit $n \in \mathbb{Z}$ sein. Wegen $10^3 + 1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und da 7,11,13 Primzahlen sind, folgt daraus $n \equiv \pm 1 \mod 7$, $n \equiv \pm 1 \mod 11$, $n \equiv \pm 1 \mod 13$. Dies liefert acht mögliche Kongruenzsysteme modulo 7, 11 und 13, die n erfüllen soll.

Da 7,11,13 teilerfremd sind, kann man diese Kongruenzsysteme mit dem chinesischen Restsatz für ganze Zahlen lösen (den man schnell und elementar beweisen kann und der daher sicherlich in der Olympiade benutzt werden kann, da es sich um die Klasse 12 und Stufe 4 handelt).

Nach dem chinesischen Restsatz gilt $n = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i + k \cdot M$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist und a_i die Kongruenzen bezeichnet (hier 1 oder -1). Außerdem ist $e_i = s_i \cdot M_i$, mit $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $m_3 = 13$ und $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, $M_i = M/m_i$. s_i ist eine ganze Zahl, die sich aus dem erweiterten euklidischen Algorithmus ergibt: Da m_i und M_i teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen r_i, s_i mit $r_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$. Man findet mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus $(r_1{,}s_1) = (41{,}-2)$, $(r_2, s_2) = (-33{,}4)$, $(r_3, s_3) = (6{,}1)$ und erhält mit dem chinesischen Restsatz die Lösungen für n für die acht Kongruenzsysteme zu $n \in \{1, -1, 573, -573, 727, -727, 155, -155\} + 7 \cdot 11 \cdot 13\,\mathbb{Z}$.

Wegen $10^5 < n^2 < 10^6$ folgt $316 < n < 1000$ oder $-1000 < n < -316$. Deshalb kommen für n nur folgende Zahlen in Frage (erinnere $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$): 573, $-573 + 1001 = 428$, $-155 + 1001 = 846$, 727 (hier nur die positiven aufgezählt).
Quadrieren liefert $y = 328329$, $y = 183184$, $y = 715716$, $y = 528529$ und dementsprechend $x = 328$, $x = 183$, $x = 715$, $x = 528$, was alle gesuchten Lösungen sind.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Zweite Lösung:

Die Ermittlung aller dreistelligen natürlichen Zahlen x, die der angegebenen Bedingung genügen, ist gleichbedeutend mit der Lösung der diophantischen Gleichung

$$y^2 = 1000x + x + 1 \qquad \text{wobei} \qquad 100 \leq x < 999 \tag{1,2}$$

und folglich

$$316 < y < 1000 \tag{3}$$

ist. Die Gleichung (1) ist äquivalent mit $y^2 - 1 = 1001x$ bzw. mit

$$(y-1)(y+1) = 1001x \tag{4}$$

Es gilt daher: 1001 ist ein Teiler von $(y-1)(y+1)$. Wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und wegen (3) muss y einer der folgenden Bedingungen genügen:

$$y = 11 \cdot 13a \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 143a \pm 1 \quad (2 < a < 7) \tag{5}$$
$$y = 7 \cdot 13b \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 91b \pm 1 \quad (2 < b < 11 \tag{6}$$
$$y = 7 \cdot 11c \pm 1, \quad \text{d.h. } y = 77c \pm 1 \quad (4 < c < 13) \tag{7}$$

Diese Fälle sind nun nacheinander zu untersuchen:

Fall (5): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $143a + 1$, so erhält man

$$143a(143a \pm 2) = 1001x$$
$$143a^2 \pm 2a = 7x$$
$$140a^2 + 30a^2 \pm 2a = 7x$$
$$140a^2 + a(3a \pm 2) = 7x$$

Hieraus folgt $7 \mid a(3a + 2)$. Da $2 < a < 7$ ist, brauchen im weiteren nur noch die Zahlen

$$y = 143 \cdot 3 - 1 = 428 \qquad \text{und} \qquad y = 143 \cdot 4 + 1 = 573$$

untersucht zu werden.
Wegen $428^2 = 183184$, $573^2 = 328329$ sind 183 und 328 zwei der gesuchten Zahlen.

Fall (6): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $91b \pm 1$, so erhält man

$$91b(91b \pm 2) = 1001x$$
$$91b^2 \pm 2b = 11x$$
$$88b^2 + b(3b \pm 2) = 11x$$

Hieraus folgt $11 \mid b(3b \pm 2)$. Da $3 < b < 11$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 91 \cdot 8 - 1 = 727$ untersucht zu werden.
Wegen $727^2 = 528529$ ist auch 528 eine der gesuchten Zahlen.

Fall (7): Setzt man anstelle von y in Gleichung (4) den Term $77c \pm 1$, so erhält man

$$77c(77c \pm 2) = 1001x$$
$$77c^2 \pm 2c = 13x$$
$$65c^2 + c(12c \pm 2) = 13x$$

Hieraus folgt $13 \mid c(12c \pm 2)$. Da $4 < c < 13$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 77 \cdot 11 - 1 = 846$ untersucht zu werden.
Wegen $846^2 = 715716$ ist auch 715 eine der gesuchten Zahlen.
Weitere solcher Zahlen kann es nicht geben; alle gesuchten Zahlen sind also 183, 328, 528, 715.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6A - 111246A
Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, dass auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.
Man beweise, dass dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

Angenommen es gebe 3 Punkte A,B,C, die nicht auf einer Gerade liegen.
Durch Wahl äußerer Punkte - z.B. Ecken der konvexen Hülle - können wir ebenfalls annehmen, dass weiter Punkte der Menge, die auf den Geraden AB, BC, AC liegen, sich nur auf den Seiten des Dreiecks befinden. Daher gibt es Punkte P,Q,R auf den Dreiecksseiten, die ebenfalls zu der Menge gehören, welche nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen.
Da A,B,C nicht auf den Geraden PQ,QR,PR liegen, gibt es drei weitere Punkte auf diesen Geraden, die zu der Menge gehören. Daher hat die Menge mindestens 9 Punkte. Widerspruch!

Quelle anonym

Aufgabe 6B - 111246B
Als "Abstand" zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.
Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.
Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der "Abstand" von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

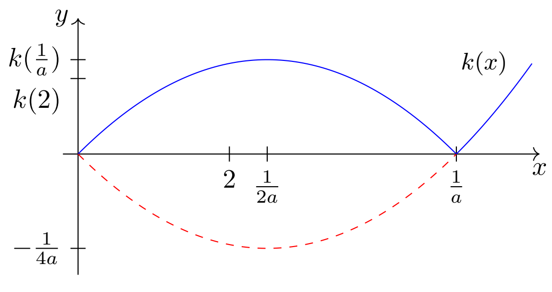
Da für alle $x \in (-2,2)$: $f(x) = f(-x)$ und $g(x) = g(-x)$ richtig ist, braucht man die Funktion k

$$k(x,a) = |h(x,a)| \qquad \text{mit} \qquad h(x,a) = f(x) - g8x)$$

(a ist ein Parameter, der allen reellen Zahlen größer als Null annehmen darf) nur im Intervall (0,2) zu betrachten. Es ist

$$h(x,a) = ax^2 - x = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}$$

Das Bild von h ist für jedes zugelassene a eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, die die x-Achse bei 0 und $\frac{1}{a}$ schneidet und die den Scheitelpunkt $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a}\right)$ besitzt.



Um die Funktion l

$$l(a) = \max_{x\in(0,2)} k(x,a) \qquad , \quad a > 0$$

auf absolutes Minimum zu untersuchen, werden drei Fälle unterschieden:

1. Fall: $2 \leq \frac{1}{2a} \leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ (Abbildung)

$$l(a) = k(2,a) = -h(2,a) = -4a + 2$$

2. Fall: $\frac{1}{2a} \leq 2 \leq \frac{1}{a} \leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$

$$l(a) = k\left(\frac{1}{2a},a\right) = -h\left(\frac{1}{2a},a\right) = \frac{1}{4a}$$

3. Fall: $\frac{1}{a} \leq 2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a$; das Intervall $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ wird wegen die hier möglichen Fälle

$$(3'): \quad l(a) = k\left(\frac{1}{2a}, a\right) = \frac{1}{4a} \qquad ; \qquad (3''): \quad l(a) = k(2,a) = 4a - 2$$

noch zerlegt. Zur Ungleichung $\frac{1}{4a} \geq 4a - 2$ gehört der Fall 3'. Es ist

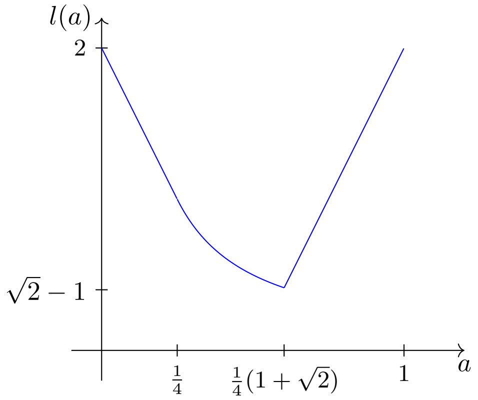
$$\frac{1}{4a} \geq 4a - 2 \leftrightarrow 0 \geq 16a^2 - 8a - 1 \leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{2}), \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$$

Wegen $a \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ und $\left[\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{2}), \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ ist also $l(a) = \frac{1}{4a}$ für $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ und $l(a) = 4a - 2$ für $a \in \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right)$.

Damit ist insgesamt

$$l(a) = \begin{cases} -4a + 2 & \text{für } a \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{4a} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right] \\ \frac{1}{4a-2} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right) \end{cases}$$

Da l im Intervall $\left(0, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ streng monoton fallend ist und in $\left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right)$ streng monoton wachsend ist, besitzt l an der Stellen $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$ und nur an dieser Stelle das absolute Minimum.



Übernommen aus [5]

9.14 XII. Olympiade 1972

9.14.1 I. Runde 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121211
Eine "utopische Aufgabe":

Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben Rot, Gelb, Schwarz und Blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt. Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten:

Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, dass der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, dass die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichen. Immerhin konnte man ermitteln, dass für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, dass der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, dass der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut?

Bezeichnet man die Kosmonauten nach der Farbe ihrer Raumanzüge - rot, gelb, schwarz und blau - in dieser Reihenfolge mit I, II, III und IV, so sind am Anfang, wenn nur die Information vorliegt, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D gekommen sind, folgende $4^3 = 24$ Möglichkeiten ihrer Herkunft vorhanden:

	I	II	III	IV		I	II	III	IV		I	II	III	IV
1.	A	B	C	D	9.	B	C	A	D	17.	C	D	A	B
2.	A	B	D	C	10.	B	C	D	A	18.	C	D	B	A
3.	A	C	B	D	11.	B	D	A	C	19.	D	A	B	C
4.	A	C	D	B	12.	B	D	C	A	20.	D	A	C	B
5.	A	D	B	C	13.	C	A	B	D	21.	D	B	A	C
6.	A	D	C	B	14.	C	A	D	B	22.	D	B	C	A
7.	B	A	C	D	15.	C	B	A	D	23.	D	C	A	B
8.	B	A	D	C	16.	C	B	D	A	24.	D	C	B	A

Nach der ersten Angabe sind I und III miteinander bekannt, aber sowohl die Bewohner von A und B als auch die von $CundD$ kannten sich nicht. Dies bedeutet, dass keines der nicht geordneten Paare (A, B) und (C, D) mit dem nicht geordneten Paar (I, III) übereinstimmt. Somit ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 3, 5, 9, 11 sowie die Fälle 14, 16, 20 und 22 ausscheiden.

Nach der zweiten Information konnten sich die nicht geordneten Paare (I, III) und (II, IV) gut verständigen, während dies für das nicht geordnete Paar (A, D) nicht zutraf.

Hiernach kann das Paar (A, D) mit keinem der Paare (I,III), (II, IV) übereinstimmen. Deshalb ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 2, 4, 21 und 23 sowie die Fälle 7, 12, 13 und 18 ausscheiden.

Die dritte Bedingung besagt, dass keines der beiden geordneten Paare (B, D) und (C, A) mit dem Paar (II, IV) übereinstimmen kann. Gleichbedeutend hiermit ist das Ausscheiden der Fälle 1, 15, 10, 24.

Die Berücksichtigung aller drei Angaben ist somit gleichwertig mit der Möglichkeit genau der nachstehenden Fälle:

	I II	III	IV	
6.	A	D	C	B
8.	B	A	D	C
17.	C	D	A	B
19.	D	A	B	C

Diese Zusammenstellung zeigt, dass der Kosmonaut II derjenige ist, der nur noch vom Planeten A oder vom Planeten D stammen kann.

Indem dann festgestellt wird, dass er von D gekommen ist, sind genau die Fälle 8 und 19 zu streichen. Aus den verbleibenden Fällen 6 und 17 geht hervor, dass IV vom Planeten B gekommen ist. Die beiden Kosmonauten von A und C haben demnach die Raumanzugfarben rot und schwarz. Die Aussage über die Anfangsbuchstaben der Farbe ist somit äquivalent damit, dass genau der Fall 17 zutrifft, d.h., man erhält folgendes Ergebnis:

Farbe	rot	gelb	schwarz	blau
Planet	C	D	A	B

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 121212
Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a,b,c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Aus $1 < c < \sqrt{2}, 1 < a, 1 < b$ folgt $c^2 < 2 = 1 + 1 < a^2 + b^2$. Also ist

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Auf Grund des Kosinussatzes gilt nun

$$\cos\angle(a,b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Wegen (1) und $2ab > 0$ folgt daraus $\cos\angle(a,b) > 0$; also ist $\angle(a,b) < 90°$.
Entsprechend folgt auch $\angle(a,c) < 90°$ und $\angle(b,c) < 90°$. Daher ist das betrachtete Dreieck spitzwinklig.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 121213
Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \qquad (**)$$

ermittelt werden, so dass der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht.

Man zeige, dass dies immer möglich ist und dass die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

Die Verschiebung werde durch die Transformation $x \to x - h$ charakterisiert. Da

$$(x-h)^3 = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \qquad \text{und} \qquad a(x-h)^2 = ax^2 - 2axh + ah^2$$

ist und $b(x-h)+c$ kein quadratisches Glied mehr enthält, hat die aus der Funktion (*) entstehende Funktion (**) genau die gewünschte Gestalt, wenn $h = \frac{a}{3}$ gilt. Für die Funktion (**) erhält man in diesem Fall

$$y = x^2 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \qquad \text{also}$$

$$m = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{und} \qquad n = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 121214
Es sind alle geordneten Paare $(x,\, y)$ positiver ganzer Zahlen x und y ($x \leqslant y$)anzugeben, für die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ erfüllt ist.

Angenommen, es seien x und y zwei derartige positive ganze Zahlen, so dass

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} = 6\sqrt{5 \cdot 11} \tag{1}$$

gilt. Dann folgt

$$x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \cdot 5 \cdot 11 \tag{2}$$

Nun sei t der größte gemeinsame Teiler von x und y; dann gilt $x = tu$ und $y = tv$, wobei u und v positive ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teller 1 sind, für die $u \leq v$ gilt.

Ferner ist wegen (2) $\sqrt{xy} = t\sqrt{uv}$ eine positive ganze Zahl, woraus wegen der Teilerfremdheit von u, v weiter $u = u_1^2, v = v_1^2$ folgt, wobei u_1 und v_1 teilerfremde positive ganze Zahlen sind, für die $u_1 \leq v_1$ gilt. Daraus folgt wegen (2)

$$t(u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1) = t(u_1 + v_1)^2 = 36 \cdot 5 \cdot 11$$

also kann nur einer der folgenden vier Fälle vorliegen:

a) $t = 36 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 1$;
b) $t = 9 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 2$;
c) $t = 4 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 3$;
d) $t = 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 5$.

Fall a) ist durch u_1, v_1 mit den oben angegebenen Eigenschaften nicht erfüllbar,

Fall b) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 1$ und damit $x = 495, y = 495$,

Fall c) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 2$ und damit $x = 220, y = 880$,

Fall d) nur durch $u_1 = l, v_1 = 5$ und damit $x = 55, y = 1375$ erfüllbar.

Daher können nur diese Werte die geforderten Eigenschaften haben. Eine Probe zeigt, dass sie diese tatsächlich besitzen.

Also sind genau die folgenden geordneten Paare positiver ganzer Zahlen Lösungen der gegebenen Gleichung: $(55, 1375)$, $(220, 880)$, $(495, 495)$.

Übernommen von [5]

Zweite Lösung:

Angenommen, (x, y) sei eine Lösung der Aufgabe. Dann gilt

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \qquad \text{bzw.} \qquad x + y + 2\sqrt{xy} = 1980$$

also

$$2\sqrt{xy} = 1980 - (x+y) \qquad \text{bzw.} \qquad 4xy = (1980 - (x+y))^2$$

also
$$0 = (1980 - (x + y))^2 - 4xy = (1980 - (x - y))^2 - 4 \cdot 1980y$$
woraus man
$$4 \cdot 1980y = (1980 - (x - y))^2 \tag{2}$$
erhält. Wegen $4 \cdot 1980y = 12^2 \cdot 5 \cdot 11$ folgt aus (2)
$$y = 55n^2$$
wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen (1) folgt daraus
$$\sqrt{x} = 6\sqrt{55} - n\sqrt{55} = m \cdot \sqrt{55}$$
wobei m eine natürliche Zahl ist. Also hat die Lösung die Form $(55m^2, 55n^2)$ mit $m + n = 6$ und (wegen $0 < x \leq y$) $0 < m \leq n$. Daraus folgt $1 \leq m \leq 3$.
Mithin können höchstens die Paare (55, 1375), (220, 880), (495, 495) Lösung sein. Wie man durch Einsetzen bestätigt, sind sie es auch alle drei.

Übernommen aus [2]

9.14.2 II. Runde 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121221
Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, dass dann

$$x = u \cdot v; \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2+y^2 = z^2$ gilt, d.h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

a) Da u,v ungerade sind, sind $u^2 - v^2, u^2 + v^2$ gerade und somit x,y,$z \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$4x^2 + 4y^2 = 4uv + (u^2 - v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2) = 4z^2$$

und somit $x^2 + y^2 = z^2$.

b) Aus $u > v$ folgt

$$u + v > 2v \Rightarrow (u + v)^2 > 4v^2 > 2v^2 \Rightarrow 0 < (u + v)^2 - 2v^2 = u^2 - v^2 + 2uv = 2x - 2y$$

Also gilt stets $y < x$.

Quelle anonym

Zweite Lösung:

a) Da u und v ungerade natürliche Zahlen, also $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ gerade Zahlen sind und wegen $u > v$ auch $y > 0$ gilt, sind x, y, z natürliche Zahlen, und es gilt

$$x^2 + y^2 = u^2v^2 + \frac{u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4} = \frac{u^4 + 2u^2v^2 + v^4}{4} = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2 = z^2$$

w.z.b.w.

b) Es sei $D = x-y$. Dann gilt $D \neq 0$; denn aus $D = 0$ würde $x = y$ folgen, d.h. $2x^2 = z^2$, im Widerspruch zu der Feststellung, dass x und z natürliche Zahlen sind. Nun gilt

$$D = uv - \frac{u^2 - v^2}{2} = \frac{v^2 + 2uv + u^2 - 2u^2}{2} = \frac{(u + v)^2 - 2u^2}{2}$$

Aus $D > 0$, d.h. $x > y$, folgt $u + v > u\sqrt{2}$, also $u < (l + \sqrt{2})v$ und umgekehrt.
Aus $D < 0$, d.h. $x < y$, folgt $u > (1 + \sqrt{2})v$ und umgekehrt. Daher ist im Fall $(v <)\ u < (1 + \sqrt{2})v$ die Zahl x, im Fall $u > (1 + \sqrt{2})v$ die Zahl y die größere der beiden Zahlen x, y.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 121222
Es sind alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a, b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynom $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann Teiler eines Polynom $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so dass $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

Gemäß Angabe muss für gewisse c,$d \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + ax^2 + b$$

gelten. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man daraus das folgende nichtlineare Gleichungssystem für die Variablen a,b,c,d:
(1) $a + c = 0$. (2) $b + ac + d = a$. (3) $ad + bc = 0$. (4) $bd = b$.

Zu seiner Lösung führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $b = 0$.
(3) wird dann zu $ad = 0$. Gilt hier $a = 0$, so folgt daraus sofort auch $c = d = 0$, ansonsten können wir hierin durch a kürzen, woraus dann $d = 0$, $c = 1$, $a = -1$, $b = 0$ in dieser Reihenfolge folgt. Insgesamt entsprechen diese beiden Fälle den Zerlegungen

$$x^2\, x^2 = x^4 \quad \text{bzw.} \quad (x^2 - x)(x^2 + x) = x^4 - x^2$$

2.Fall: $b \neq 0$.
Damit muss wegen (4) dann jedenfalls $d = 1$ gelten und (3) kann man wegen $c = -a$ auch schreiben in der Form $a = ab$. Hier gilt nun entweder $b = 1$, wonach aus (2) dann $a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2) = 0$ folgt, was die Lösungen

$$(a,bc,d) = (1,1,-1,1) \quad \text{bzw.} \quad (a,b,c,d) = (-2,1,2,1)$$

impliziert, oder es ist $a = 0$, was auf die Lösung

$$(a,b,c,d) = (0,-1,0,1)$$

führt. Diese weiteren Lösungen entsprechen damit folgenden Zerlegungen

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$
$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$$

welche offensichtlich wieder die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, es gäbe ein geordnetes Paar (a, b) reeller Zahlen, so dass $f(x)$ ein Teiler von $g(x)$ ist. Dann gibt es ein Polynom $h(x)$, für das $f(x)h(x) = g(x)$ gilt. Der Grad von $f(x)h(x)$ ist um 2 größer als der Grad von $h(x)$; dieser beträgt daher 2.
Das Produkt des höchsten Koeffizienten 1 von $f(x)$ mit dem höchsten Koeffizienten von $h(x)$ ist gleich 1; der letztere ist daher ebenfalls 1. Das Glied mit x^2 in $f(x)$ hat nämlich ebenso wie das Glied mit x^4 in $g(x)$ den Koeffizienten 1.
Daher hat auch das Glied mit x^2 in $h(x)$ den Koeffizienten 1. Somit gibt es zwei reelle Zahlen u und v mit $h(x) = x^2 + ux + v$, und für diese gilt

$$\begin{aligned} x^4 + ax^2 + b &= (x^2 + ax + b)(x^2 + ux + v) \\ &= x^4 + (a + u)x^3 + (v + b + au)x^2 + (av + bu)x + bv \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus

$$a + u = 0 \tag{1}$$
$$au + b + v = a \tag{2}$$
$$ab + bu = 0 \tag{3}$$
$$bv = b \tag{4}$$

Aus (1) folgt $u = -a$; aus (4) folgt

$$b = 0 \qquad \text{oder} \qquad b = 1 \tag{5,6}$$

Im Fall $b = 0$ folgt aus (3) $av = 0$, also

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad v = 0 \tag{7,8}$$

Für $v = 0$ führt (2) auf $-a^2 = a$, also

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a = -1$$

Für $v = 1$ führt (3) auf $a - ba = 0$, also

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad b = 1 \tag{9,10}$$

Für $a = 0$ führt (2) auf $b + 1 = 0$, also $b = -1$.
Für $b = 1$ führt (2) auf $-a^2 + 2 = a$, also

$$a = 1 \qquad \text{oder} \qquad a = -2$$

Daher können höchstens die geordneten Paare $(0,0), (-1,0), (0,-1), (1,1), (-2,1)$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

x^2 ein Teiler von x^4;
$x^2 - x$ ein Teiler $x^4 - x^2$;
$x^2 - 1$ ein Teiler $x^4 - 1$;
$x^2 + x + 1$ ein Teiler von $x^4 + x^2 + 1$;
$x^2 - 2x + 1$ ein Teiler von $x^4 - 2x^2 + 1$.

Anderer Lösungsweg:
Die Division $(x^4 + ax^2 + b) : (x^2 + ax + b)$ ergibt

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + a^2 + a - b) + (a^3 + a^2 - 2ab)x + a^2b + ab - b^2 - b$$

Daher ist $x^2 + ax + b$ genau dann Teiler von $x^4 - ax^2 + b$, wenn sich

$$a(a^2 + a - 2b) = 0 \qquad \text{und} \qquad b(a^2 + a - b - 1) = 0 \tag{11,12}$$

ergibt. Dieses Gleichungssystem besitzt genau die folgenden geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen als Lösung: $(0,0), (0,-1), (-1,0), (1,1), (2,1)$.
Es ist nämlich (11) äquivalent mit $a = 0$ oder $a^2 + a = 2b$ und (12) äquivalent mit $b = 0$ oder $a^2 + a = b + 1$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 121223
Man beweise, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Quadratische Reste modulo 6 sind $\{0; 1; 3; 4\}$, da $0^2 \equiv 0 \pmod 6$, $1^2 \equiv 1 \pmod 6$, $2^2 \equiv 4 \pmod 6$, $3^2 \equiv 3 \pmod 6$, $4^2 \equiv 4 \pmod 6$, $5^2 \equiv 1 \pmod 6$.
$6n + 2 \equiv 2 \pmod 6$, d.h. $6n + 2$ kann niemals Quadrat werden. qed.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Zweite Lösung:

Jede natürliche Zahl m ist von einer der Formen $3g$, $3g + 1$, $3g + 2$ mit ganzzahligem g. Deren Quadrat g^2, $9g^2 + 6g + 1$, $9g^2 + 12g + 4$ lässt daher bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1.
Dagegen lässt für jede natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ bei Division durch 3 den Rest 2 und kann somit für kein natürliches m mit m^2 übereinstimmen, w. z. b. w.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 4 - 121224
In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:
(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.
Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass Anfangs- und Endhaltestelle einer Buslinie zu den drei Haltestellen, die es laut (1) gibt, hinzuzählen. Jede Buslinie führt also von Anfangshaltestelle mit genau einem Zwischenstopp zur Endhaltestelle. In den folgenden Überlegungen stehen unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Haltestellen.

Linie 1 möge die drei Haltestellen A, B und C bedienen. In welcher Reihenfolge ist hier irrelevant. Wir schreiben:
Linie 1: A-B-C

Linie 2, die es nach Voraussetzung gibt, hat laut (2) mit Linie 1 genau eine Haltestelle gemeinsam. Dies sei o.B.d.A. die Haltestelle A. D und E seien die beiden anderen Haltestellen der Linie 2. Also:
Linie 2: A-D-E

Nach (3) muss es Linien 3 und 4 geben, die B und D bzw. B und E verbinden. (Eine Linie mit den Haltestellen B, D und E kann es nicht geben, da diese mit Linie 2 zwei Haltestellen gemeinsam hätte.) F und G seien die jeweils dritten Haltestellen der Linie 3 und 4. (F und G können nicht identisch sein, da sonst die Linien 3 und 4 zwei Haltestellen gemeinsam hätten, nämlich B und F=G.). Somit:
Linie 3: B-D-F
Linie 4: B-E-G

C und D liegen noch auf keiner gemeinsamen Linie. Also muss es eine weitere Linie geben, die C und D anfährt. Außerdem muss diese mit Linie 4 eine gemeinsame Haltestelle besitzen, was nur G sein kann (da sonst B und C oder D und E auf zwei Linien lägen). Also:
Linie 5: C-D-G

Analog muss es eine Linie geben, die C und E bedient, und diese muss wegen Linie 3 die Haltestelle F besitzen. Also:
Linie 6: C-E-F

Jetzt fehlt noch eine Verbindung zwischen A und F. Diese muss mit Linie 5 eine gemeinsame Haltestelle haben, was nur G sein kann. Also:
Linie 7: A-F-G

Die Linien 1 bis 7 erfüllen offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3). Eine weitere Linie kann nicht hinzugefügt werden, ohne eine der Bedingungen (1), (2) oder (3) zu verletzen. Die einzige mögliche Anzahl ist also 7.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

9.14.3 III. Runde 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4$$

erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

Unter Benutzung der Umformung

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}$$

lässt sich die Ausgangsgleichung auch einfach schreiben als

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

mit den beiden Lösungen

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Eine reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ erfüllt genau dann die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4 \qquad (1)$$

wenn sie jede der folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4, \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4, \quad \frac{2}{\sin 2x} = 4, \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Eine reelle Zahl $2x$ mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (oder gleichbedeutend hiermit $0 < 2x < \pi$) erfüllt (2) genau dann, wenn $2x = \frac{\pi}{6}$ oder $2x = \frac{5\pi}{6}$ ist.
Daher sind alle reellen Zahlen x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, die (1) erfüllen, $x = \frac{\pi}{12}$ und $x = \frac{5\pi}{12}$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 121232
Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleich weit entfernt sind.

Vorbemerkung: Wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, so können auch nicht drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. (1)

Wir unterscheiden danach, wie viele Punkte jeweils auf den beiden Seiten einer solchen Ebene E liegen.

1. Fall: Alle vier Punkte liegen auf der gleichen Seite von E. Dieser Fall ist nicht möglich, weil es sonst eine Ebene gäbe, die parallel zu E ist und alle vier Punkte enthält.

2. Fall: Drei Punkte liegen auf der einen Seite von E, der vierte auf der anderen. Die drei Punkte auf der einen Seite von E liegen in einer Ebene E', die parallel zu E ist, da sie alle den gleichen Abstand zu E haben. Diese Ebene ist wegen (1) eindeutig bestimmt.

Betrachten wir nun das Lot l des vierten Punktes auf E', so steht l auch senkrecht auf E. E muss daher l genau halbieren, damit der Abstand aller vier Punkte zu E gleichgroß ist. Damit ist E eindeutig bestimmt. E ist parallel zu E' und geht durch den Mittelpunkt von l.

Da es vier Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt derjenige ist, der alleine auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier vier verschiedene Ebenen.

3. Fall: Auf beiden Seiten liegen je zwei Punkte. Diese beiden Paare bestimmen zwei Geraden g und h. Diese Geraden schneiden sich nicht und sind nicht parallel, da sonst alle vier Punkte in einer Ebene liegen würden. Die Geraden sind also windschief zueinander.
Eine Ebene, die zu zwei auf der gleichen Seite liegenden Punkten den gleichen Abstand hat, hat auch zur gesamten Geraden durch diese zwei Punkte den gleichen Abstand.

Die Ebene E muss zu den Gerade g und h parallel sein und den Abstand beider Geraden halbiert. Damit ist E eindeutig bestimmt.
Da es drei Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt zusammen mt P_1 auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier drei verschiedene Ebenen.

Insgesamt gibt es also sieben Ebenen, die von allen vier Punkten den gleichen Abstand haben.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 3 - 121233
Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: "Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"
Zuschauer: "Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."
Reporter: "Wie wurden die Punkte verteilt?"
Zuschauer: "In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."
Reporter: "In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"
Zuschauer: "Ich weiß es nicht."
Reporter: "Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"
Zuschauer: "Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei.

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!
a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?
(Es sei bekannt, dass in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

Es bezeichne im Folgenden k die Anzahl der Wettkämpfe und P die Gesamtzahl der für jeden Wettkampf zu verteilenden Punkte. Da laut Angabe die Gesamtpunktezahl für alle Wettkämpfe zusammengenommen $40(= 9 + 22 + 9)$ beträgt, wissen wir, dass $k \cdot P = 40$ sein muss. Ferner ist $P \geq 6(= 3 + 2 + 1)$, da die Punktezahlen für die einzelnen Platzierungen laut Angabe verschiedene positive ganze Zahlen sind. Dies schränkt dann auch k auf die drei Fälle $k = 2{,}4{,}5$ ein, welche wir nachfolgend untersuchen.

1.Fall: $k = 2$, $P = 20$
Hier müsste dann ADorf allein für seinen Sieg im Weitsprung schon mehr als 10 Punkte bekommen, obwohl seine Geamtpunktzahl nur 9 beträgt, Widerspruch!
2.Fall: $k = 4$, $P = 10$
Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es dann mindestens 6 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der Höchstwert für einen solchen Sieg, sonst wäre die Punktestände von jeweils 9 für ADorf und CeDorf nicht möglich. Dies impliziert dann automatisch die Punkteverteilung 6,3,1 für die drei Plätze in jedem Wettkampf, womit aber z.B. BeDorf dann nicht auf seine 22 Punkte kommt.
3. Fall: $k = 5$, $P = 8$

Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es diesmal mindestens 5 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der höchste Wert für einen Sieg, für den eine additive Zerlegung von P in 3 verschiedene positve ganze Zahlen möglich ist, nämlich in diesem Fall $P = 8 = 5 + 2 + 1$. Abgesehen von der Reihenfolge der Summanden gibt es aber dann jeweils eine kompatible Zerlegung des Punktestandes für jeden der drei Bewerber, nämlich
ADorf: $5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$
BeDorf: $2 + 5 + 5 + 5 + 5 = 22$
CeDorf: $1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
Insbesondere stehen damit auch die Antworten auf obige Fragen fest:
a) BeDorf gewann im Kugelstoßen, weil es mit Ausnahme von Weitsprung ja alle Wettbewerbe gewonnen hat.

b) Aus dem gleichen Grund wieder BeDorf mit seinem einzigen 2.PLatz, eben dann in Weitsprung.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 121234
Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an+b$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben.
Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.
Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

Nach dem euklidischen Algorithmus ist für alle natürlichen Zahlen n

$$ggT(z_n,a) = ggT(an + b,a) = ggT(b,a)$$

unabhängig vom Index n. Damit besitzen alle Folgenglieder den gleichen größten gemeinsamen Teiler d.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Für jedes Element z_ν der Folge (ν eine der Zahlen 0, 1, 2, ...) gilt:
a) d ist (als ein gemeinsamer Teiler von a und z_n auch) ein gemeinsamer Teiler von a und $z_n+(\nu-n)a = z_\nu$.

b) Ist t ein gemeinsamer Teiler von a und z_ν, so ist t auch ein gemeinsamer Teiler von a und $z_n+(\nu-v)a = z_n$, folglich auch ein Teiler ihres größten gemeinsamen Teilers d.

c) Aus a) und b) folgt: Der größte gemeinsame Teiler von a und z_ν ist d. Also haben alle Elemente der Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 121235
Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.
Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n $(n \geq 4)$ an, für die das gilt.

O.B.d.A. sei die Kantenlänge des n-Ecks gleich 1. Die kürzeste Diagonale, die zwei Kanten umspannt, sei d_2. Dann ist

$$1 < d_2 < 2$$

Die maximale Diagonale nennen wir d_m. Laut Aufgabenstellung soll $d_m = 1 + d_2$ gelten, woraus folgt:

$$2 < d_m < 3 \tag{1}$$

Wenn $n = 6$ ist, ist $d_m = 2$, und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Für $n = 4$ und $n = 5$ ist jeweils sogar $d_m < 2$. Daher muss $n \geq 7$ sein.
Der Umfang des Umkreises bei einem n-Eck mit geradem n ist πd_m, da d_m durch den Mittelpunkt verläuft. Der Umfang des Umkreises ist größer als der Umfang des n-Ecks:

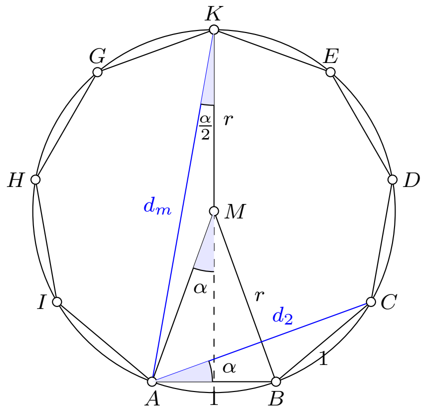
$$\pi d_m > n \qquad ; \qquad d_m > \frac{n}{\pi}$$

Wenn $n \geq 10$ ist, ist $d_m > 3$ und damit (1) nicht erfüllbar. Skizziert man ein 8-Eck, kann man mithilfe des Satzes von Pythagoras die Diagonalen recht einfach berechnen. Es ist für $n = 8$:

$$d_2 = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} \approx 1.8$$

$$d_m = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \approx \sqrt{6{,}8} \approx 2.6$$

Beim 8-Eck ist die Differenz zwischen maximaler Diagonale d_m und kürzester Diagonale d_2 zu klein, so dass nur ungerade $n \geq 7$ in Frage kommen.
Nachfolgend eine Zeichnung eines n-Ecks mit ungeradem n:



Es ist

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

Damit folgt:

$$d_2 = 2\cos\alpha$$

und

$$d_m = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Es muss gelten:

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 2\cos\alpha + 1$$

Mit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ erhält man

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 3 - 4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\tfrac{1}{2} = 3\sin\tfrac{1}{2}\alpha - 4\sin^3\tfrac{1}{2}\alpha$$

An dieser Stelle kann die Gleichung für den Sinus des dreifachen Winkels verwendet werden:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Dann ist nämlich

$$\sin\tfrac{3}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{3}{2}\alpha = 30°$$

$$\alpha = 20°$$

Man sieht daher, dass tatsächlich nur das 9-Eck die Voraussetzung erfüllt, da $\alpha = \frac{180°}{9} = 20°$ ist. (Die weiteren Lösungen der kubischen Gleichung ergeben $\alpha = 100°$ und $\alpha = 260°$, woraus sich kein sinnvolles n-Eck konstruieren lässt).

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6A - 121236A
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x \cdot f(x+1)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.
b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.
c) Man gebe eine spezielle Funktion f_0 an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

a) Induktiv zeigt man leicht für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung $f(n) = \frac{1}{(n-1)!} \neq 0$: Sicherlich stimmt diese Aussage für $n = 1$, denn $f(1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{(1-1)!}$. Und gilt die Aussage für ein $n > 0$ so wegen $f(n+1) = \frac{1}{n} \cdot f(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1-1)!}$ auch für $n+1$, also für alle positiven ganzen Zahlen.

Dagegen ist $f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$ und somit folgt für alle negativen ganzen Zahlen n wegen $f(n) = n \cdot f(n+1) = n \cdot 0 = 0$ auch $f(n) = 0$. Es ist also $f(n)$ für ganzzahlige n genau dann gleich Null, wenn n eine nichtpositive ganze Zahl ist.

b) Ist x eine ganze Zahl, so auch $n+x$. Dann ist $f(n+x) = 0$, falls $n+x \leq 0$ gilt, und sonst $f(n+x) = \frac{1}{(n+x-1)!}$. Sei ab nun $x \notin \mathbb{Z}$.

Ist $m = n$, so gilt $f(n+x) = f(m+x)$.

Ist $n > m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden der Bedingung (1) $f(n+x) = \frac{1}{n-1+x} \cdot \frac{1}{n-2+x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m+x} \cdot f(m+x)$.

Und ist $n < m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden von (1) $f(n+x) = (m-1+x) \cdot (m-2+x) \cdot \ldots \cdot (n+x) \cdot f(m+x)$.

c) Die folgende Funktion f_0 erfüllt alle genannten Eigenschaften: $f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x-1)!} & \text{, wenn } x \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$.

Offenbar erfüllt f_0 die Bedingung (2), da $f_0(1) = \frac{1}{0!} = 1$ gilt und, wie in Aufgabenteil a) nachgerechnet, auch die Bedingung (1) für alle ganzen Zahlen x. Ist dagegen $x \notin \mathbb{Z}$, so gilt erst recht $0 = f(x) = x \cdot 0 = x \cdot f(x+1)$, sodass f_0 eine solche Funktion ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 121236B
Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, dass sie die Strecke AB in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.
a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei aus den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, dass sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren lässt.
b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert: Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein "Fall" bezeichnet.
Ein "Fall" heiße ein "günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, dass sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden lässt.
Ist z die Anzahl aller möglichen "Fälle" und z_1 die Anzahl aller "günstigen Fälle" so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

a) O.B.d.A. habe die Strecke AB die Länge $2n$, sodass die drei zu betrachtenden Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB die Längen k, $m-k$ bzw. $2n-m$ besitzen. Aus diesen Strecken lässt sich genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn die drei Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

Die erste Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_kP_m| > |P_mB|$ ist also äquivalent zu $k + (m-k) > 2n - m$ bzw. $2m > 2n$, also $m > n$.
Die zweite Dreiecksungleichung $|P_kP_m| + |P_mB| > |AP_k|$ ist äquivalent zu $(m-k) + (2n-m) > k$ bzw. $2n > 2k$, also $n > k$.
Die dritte Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_mB| > |P_kP_m|$ ist äquivalent zu $k + (2n-m) > m - k$ bzw. $2m < 2n + 2k$, also $m < n + k$.

Damit gibt es für jedes $1 \leq k \leq n-1$ also jeweils genau die $k-1$ Möglichkeiten für m mit $n+1 \leq m \leq n+k-1$, sodass sich ein Dreieck aus den drei entstehenden Teilstrecken konstruieren lässt. Es gibt also

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1) = \sum_{k=0}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

günstige Auswahlen von k und m, dagegen aber $\binom{2n-1}{2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ gleich mögliche, sodass sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$P = \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n-8}{4n-2} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{6}{4n-2}\right)$$

ergibt.

b) Offensichtlich geht für $n \to \infty$ der Bruch $\frac{6}{4n-2}$ gegen 0, sodass $\lim_{n\to\infty} P = \frac{1}{4}$ folgt.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.14.4 IV. Runde 1972, Klasse 12

Aufgabe 1 - 121241
Man untersuche, ob unter allen Paaren (a,b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

Wegen der Symmetrie der Funktion können wir statt $f(a,b)$ auch $g(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} - x^2 - \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}$ mit $x := \frac{a}{b} > 0$ betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) - x - \frac{1}{x} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}\right)\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

Die Faktoren in der letzten Zeile sind alle nicht negativ. Nur $(x-1)^2$ wird für $x = 1$ null. Somit erhalten wir $g(x) \geq x + \frac{1}{x} \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $x = 1$ gilt. Daher nimmt f ihr Minimum bei $f(a,a) = 2$ an.

Quelle anonym

Aufgabe 2 - 121242
Es sind alle Paare (x,y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung erfüllt ist:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

Mit $x = z - 4$ wird die Gleichung handlicher:

$$\begin{aligned} (z-4)(z-3)(z+3)(z+4) = y^2 \qquad \text{bzw.} \\ (z^2-16)(z^2-9) = z^4 - 25z^2 + 144 = (z^2-12)^2 - z^2 = y^2 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung $(z^2-12)^2 - z^2 = y^2$ wird ersichtlich, dass für ein Paar (z,y), das die Gleichung erfüllt, zum einen

$$(z^2-12)^2 > y^2$$

gilt (für $z \neq 0$), aber auch

$$(z^2-13)^2 = z^4 - 26z^2 + 169 < z^4 - 24z^2 + 144 - z^2 = y^2$$

für $z^2 > 25$. Dies bedeutet, dass $(z^2-12)^2 - z^2$ echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt und daher nicht gleich einer Quadratzahl y^2 sein kann. Folglich muss man nur die Fälle für $z^2 \leq 25$ prüfen.
Man sieht schnell, dass genau $z \in \{-5,-4,-3,0,3,4,5\}$ eine Quadratzahl liefert. Die Lösung der Aufgabe lautet also $(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-8,0),(-7,0),(-4,\pm 12),(-1,0)(0,0),(1,\pm 12)\}$.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Zweite Lösung:
Ich gehe dazu mit $z = x + 4$ ebenfalls von der Gleichung

$$(z^2-16)(z^2-9) = z^4 - 25z^2 - 144 = y^2$$

aus, welche sich nach einer einfachen Umformung auch schreiben lässt als

$$\left(z^2 - \frac{25}{2}\right)^2 = \frac{(2y)^2 + 49}{4} \qquad (*)$$

Damit haben wir nur mehr die einfache Frage zu beantworten, für welche Werte von y der Term $(2y)^2+49$ eine Quadratzahl ist. Wir müssen dazu nur zwei Fälle betrachten:
1. Fall: $y=0$
Einsetzen in (*) ergibt dann $z \in \{\pm 3, \pm 4\}$, also dann die Lösungen

$$(x,y) \in \{(-8,0),(-7,0),(-1,0),(0,0)\}$$

2. Fall: $y \neq 0$
Ist dann $(2y)^2+49 = u^2$ für ein $u \in \mathbb{N}^*$, so ist $(2|y|,7,u)$ ein primitives pythagoräisches Zahlentripel, d.h., es muss

$$rs = |y|,\ r^2-s^2 = 7,\ r^2+s^2 = u$$

für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$ gelten, wobei offensichtlich $r \leq 4$ sein muss. Tatsächlich ist $r=4$, $s=3$ die einzige Lösung von $r^2-s^2=7$ in natürlichen Zahlen. Daraus folgt sofort $y=\pm 12$, sowie $z \in \{0, \pm 5\}$, was dann auf die restlichen 6 Lösungen

$$(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-4,\pm 12),(1,\pm 12)\}$$

hier führt.

Aufgabe gelöst von weird

Dritte Lösung:

Angenommen, (x,y) sei ein Paar der geforderten Art. Dann ist $u=x+4$ eine ganze Zahl, die die Gleichung

$$(u-4)(u-3)(u+3)(u+4) = y^2 \qquad \text{also} \qquad (u^2-9)(u^2-16) = y^2 \tag{1}$$

erfüllt. Für $t = u^2 - \frac{25}{2}$ ist dann $2t$ ganz, und es gilt

$$\left(t+\frac{7}{2}\right)\left(t-\frac{7}{2}\right) = y^2$$

also $(2t)^2-(2y)^2 = 49$ bzw.

$$(2t+2y)(2t-2y) = 49 \tag{2}$$

Also kann $2t+2y$ nur eine der Zahlen 49, 7, 1, -1, -7, -49 sein.
Die Werte, die sich daraus für die zuvor genannten Größen ergeben, zeigt die folgende Tabelle, aus der zugleich ersichtlich ist, dass durch die gefundenen Werte für x und y auch die vorgegebene Gleichung erfüllt wird:

$2t+2y$	$2t-2y$	t	y	u^2	u	x	$x(x+1)(x+7)(x+8)$	y^2
4	1	12,5	12	25	5	1	1·2·8·9	144
					-5	-2	(-9)·(-8)·(-2)·(-1)	144
7	7	3,5	0	16	4	0	0·1·7·8	0
					-4	-8	(-8)·(-7)·(-1)·0	0
-1	49	12,5	-12	25	5	1	1·2·8·9	144
					-5	-9	(-9)(-8)(-2)(-1)	144
-1	49	-12,5	12	0	0	-4	(-4)(-3)·3·4	144
7	-7	3,5	0	9	3	-1	(-1)·0·6·7	0
					-3	-7	(-7)(-6)·0·1	0
-49	-1	-12,5	-12	0	0	-4	(-4)(-3)·3·4	144

Die gegebene Gleichung ist somit genau für die folgenden geordneten Paare ganzer Zahlen (x,y) erfüllt: (1,12), $(-9,12)$, $(0,0)$, $(-8,0)$, $(1,-12)$, $(-9,-12)$, $(-4,12)$, $(-1,0)$, $(-7,0)$, $(-4,-12)$.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 121243
Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

1. Ein auf der Kugeloberfläche κ gezeichneter Kreis k kann durch einen Schnitt von κ mit der Ebene ϵ erzeugt werden.
Im Folgenden soll der auf κ liegende Kreis k_i als Schnittkurve von κ mit der Ebene ϵ_i interpretiert werden. Entsprechend werden zwei auf κ liegende und voneinander verschiedene Kreise k_i und k_j als Schnitte von κ mit den Ebenen ϵ_i und ϵ_j angesehen. Für die Lage der Schnittebenen ϵ_i und ϵ_j sind vier Fälle zu unterscheiden:

a) ϵ_i und ϵ_j sind parallel zueinander,
b) ϵ_i und ϵ_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ meidet,
c) ϵ_i und ϵ_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ berührt,
d) ϵ_i und ϵ_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ in zwei voneinander verschiedenen Punkten schneidet.

In den Fällen a), b), c) wird die Kugeloberfläche durch k_i und k_j in drei paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt. Im Falle d) wird κ in vier paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt.

2. Auf κ seine $p-1$ paarweise voneinander verschiedene Kreise k_i vorgegeben. p_{p-1} sei die Höchstzahl der durch $p-1$ Kreise auf κ erzeugbaren, paarweise verschieden Gebiete.
s_p sei die Anzahl der getrennt liegenden Punkte, die die p-te Kreis k_p mit den $p-1$ auf κ vorgelegten Kreisen gemeinsam hat.
Für $s_p \geq 2$ teilt der je zwei benachbarte Punkte von k_p verbindende Kreisbogenabschnitt das zugehörige Gebiet von κ in genau zwei Gebiete.
Für $s_p = 0$ und $s_p = 1$ wächst die Anzahl der Gebiete infolge der Zufügung von k_p um eins. Aus der Zugabe des Kreises k_p resultiert also eine Vergrößerung der Anzahl der Gebiete um $x_p \geq 1$.
Nach diesen Überlegungen gilt die Rekursionsformel

$$n_p = n_{p-1} + x_p \qquad (1)$$

für $p \geq 1$.

3. Da nach der größten Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten auf κ gefragt ist, muss man die Schnittebenen ϵ_i so legen, dass jeder neu hinzukommende Kreis k_i einen möglichst großen Summanden x_p in die Rekursionsformel (1) einbringt.
Nach 1. und 2. kann x_p nicht größer sein als in dem Fall, dass k_p jeden der $p-1$ vorliegenden Kreise in zwei Punkten schneidet und sämtliche auf κ existierenden Schnittpunkte durch den Schnitt von genau zwei Kreisen erzeugt werden. In (1) muss daher gelten:

$$x_p \leq 2(p-1) \qquad (2)$$

4. Mit (2) nimmt die Rekursionsformel (1) die Form

$$n_p \leq n_{p-1} + 2(p-1) \qquad (3)$$

an. Der Anschauung ist zu entnehmen, dass $n_1 = 2$ gilt. Daraus folgt weiter mit (3):

$$\begin{aligned} n_2 &\leq 2 + 2\cdot 1 \\ n_3 &\leq 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ n_4 &\leq 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ &\dots \\ n_p &\leq 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + 2(p-1) \qquad (4) \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Summationsformel für die arithmetische Reihe ergibt sich für (4) die Darstellung

$$n_p \leq 2 + p(p-1) \qquad (5)$$

5. Jetzt wird gezeigt, dass auf κ tatsächlich ein p-Tupel von Kreisen existiert, bei welchem jeder der paarweise voneinander verschiedenen Kreise mit jeden anderen genau zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam hat und auch durch keinen der Kreisschnittpunkte mehr als zwei Kreise hindurchgehen.

Im Mittelpunkt der Kugel liege der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Von der x- und y-Achse wird die zu κ gehörige Äquatorebene aufgespannt. Die z-Achse werde mit der Achse des Drehkegels Φ zur Deckung gebracht, dessen Öffnungswinkel 45° beträgt und dessen Spitze im Ursprung liegt.
Die Tangentialebenen an die Kegelfläche berühren diese längs einer Erzeugenden. Daher gehen die Tangentialebenen von Φ durch den Kugelmittelpunkt und schneiden κ in Großkreisen.

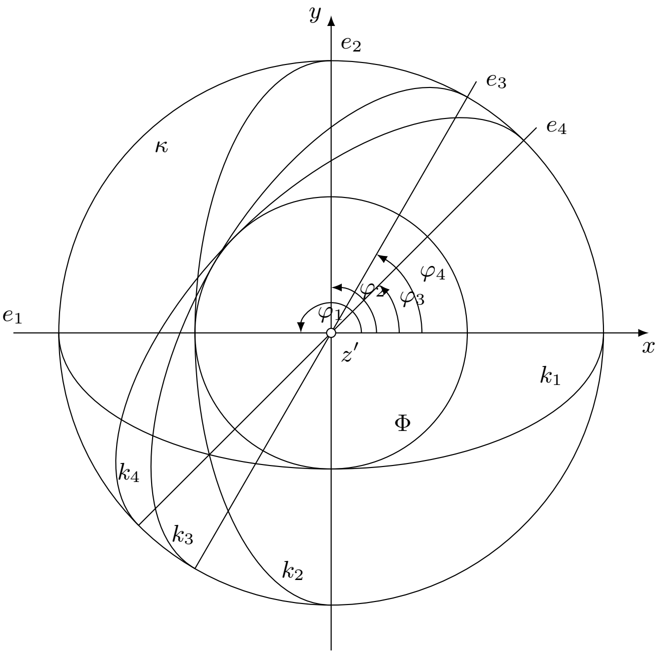


Abbildung: Normalprojektion von κ mit den Kreisen k_1, k_2, k_3 und k_4 auf die Äquatorebene von κ

Zwei voneinander verschiedene Tangentialebenen ϵ_i und ϵ_j schneiden sich in dem Kugeldurchmesser g_{ij}. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind mit den Schnittpunkten der Großkreise k_i und k_j identisch.
Die Tangentialebene ϵ_i von Φ schneidet die Äquatorebene von κ in der Spur e_i. Die in e_i liegende Streichrichtung von ϵ_i ist so orientiert, dass die Ebene ϵ_i beim Blick in diese Richtung von links nach rechts fallend erscheint. Die positive x-Achse schließt mit dem in Streichrichtung der Ebene ϵ_i zeigenden Strahl r_i^+ den Winkel φ_i ein.

Trifft man die Vereinbarung $\varphi_i = \frac{\pi}{i}$ $(i = 1,2,3,...,p)$, so hat man p Tangentialebenen an Φ, die κ nach einem p-Tupel von Großkreisen k_i mit den geforderten Eigenschaften schneiden. In diesem Fall ergibt sich als Zahl für die Gebietseinteilung auf κ der Wert $2 + p(p-1)$, so dass wegen (5)

$$n_p = 2 + p(p-1) \qquad (6)$$

gilt. (siehe Abbildung)

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 121244
Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3;4;0)$ bzw. $(10;8;4)$.
Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so dass das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Punkt P_1: Das bedeutet Übergang von den Koordinaten (X,Y,Z) zu (x,y,z) gemäß der Vorschrift

$$(x;y;z) = (X;Y;Z) - (3;4;0) \qquad (1)$$

Durch diese Koordinatentransformation gehen offensichtlich Punkte mit ganzrationalen Koordinaten genau in Punkte der gleichen Art über; insbesondere erhält der Punkt P_2 die Koordinaten $(7;4;4)$. Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten sind genau dann Lösung wenn

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}; \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_1P_2}; \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \overrightarrow{P_1P_4} = 0$$

gilt. Sind die Koordinaten von $P_4(x;y;z)$, so bedeuten diese Bedingungen für sie wegen $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 9$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad (2) \qquad ; \qquad 7x + 4y + 4z = 0 \quad (3)$$

Aus (3) folgt

$$z = -\left(y + \frac{7}{4}x\right) \qquad (4)$$

und nach Einsetzen in (2)

$$y^2 + \frac{7}{4}xy + \frac{65}{32}x^2 - \frac{81}{2} = 0$$

Hieraus ergibt sich

$$y_{1;2} = \frac{1}{8}(-7x \pm 9\sqrt{32 - x^2})$$

Da x und y ganzrationale Zahlen sind, muss $\sqrt{32 - x^2}$ rational und daher $32 - x^2$ eine Quadratzahl sein. Dafür kommt nur $x_{1,2} = \pm 4$ in Frage. Man erhält daraus, und mit (4)

$$\begin{array}{ccccccc} y_{11} = 1 & ; & y_{21} = -8 & ; & y_{12} = 8 & ; & y_{22} - 1 \\ z_{11} = -8 & ; & z_{21} = 1 & ; & z_{12} = -1 & ; & z_{22} = 8 \end{array}$$

Durch Einsetzen bestätigt man, dass diese Werte Lösungen des System (2), (3) sind. Es ergeben sich vier Quadrate, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Mit (1) finden man für die Koordinaten der Eckpunkte

$$P_{31} = (14{,}9, -4) \quad ; \quad P_{41} = (7, 5, -8) \quad ; \quad P_{32} = (14{,}0{,}5) \quad ; \quad P_{42} = (7, -4{,}1)$$
$$P_{33} = (6{,}16{,}3) \quad ; \quad P_{43} = (-1{,}12, -1) \quad ; \quad P_{34} = (6{,}7{,}12) \quad ; \quad P_{44} = (-1{,}3{,}8)$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 121245
Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen 0 und 1 befanden.
Danach ersetzt er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden musste.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzig mal durch. Zum Schluss stellte er fest, dass er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

Antwort: Nein.
Beweis: Angenommen, die Antwort wäre "ja".
Nach jeder Operation sind die Zahlen gegenüberliegender Flächen gleich, insbesondere gilt dies nach der 25ten Operation und damit auch am Anfang. Man braucht also nur irgendwelche drei Seitenflächen des Würfels zu betrachten, die eine Ecke gemeinsam haben (das Problem reduziert sich also effektiv auf das eines Dreiecks statt eines Würfels, wobei die Zahlen an den Dreiecksecken stehen).
Bezeichne die Zahlen, die auf drei solchen Flächen nach der i-ten Operation stehen, jeweils als a_i, b_i, c_i $(i \geq 0)$, d.h. a_0,b_0,c_0 sind die Zahlen am Anfang.
Man hat

$$a_{i+1} = \frac{b_i + c_i}{2}, \qquad b_{i+1} = \frac{a_i + c_i}{2}, \qquad c_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

(für alle $i \geq 0$), woraus nach Addieren zum einen folgt, dass $a_i + b_i + c_i$ eine Invariante ist für alle $i \geq 0$ (bezeichne die Summe mit s), und zum anderen findet man $c_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} - c_i$. Mit $a_{i+1} + b_{i+1} = s - c_{i+1}$ ist dann also $2c_{i+1} = s - c_i$.

Die explizite Lösung dieser Rekursionsgleichung ist $c_i = \dfrac{c_0}{(-2)^i} + \dfrac{s}{2}\dfrac{-1 + 1/(-2)^i}{-3/2}$.
Nach der Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 0, aufgrund der Symmetrie der Gleichungen wählen wir o.B.d.A. $c_0 = 0$. Daraus folgt nun $c_{25} = 0 = \frac{s}{2}\frac{-1+1/(-2)^i}{-3/2}$ und wegen $-1 + 1/(-2)^{25} \neq 0$ folgt $s = 0$.
Sei nun o.B.d.A. $b_0 = 1$ (nach Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 1). Es gilt eine analoge explizite Gleichung für b_i wie für c_i, und mit $s = 0$ folgt $b_{25} = 1 = 1/(-2)^{25}$, Widerspruch.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6A - 121246A
Man zeige , dass der Term
$$\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$
im Intervall $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, dass für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenzen beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung: Es gilt $\pi=3{,}14159+\delta$ mit $0<\delta<10^{-5}$ und $\sqrt{2}=1{,}41421+\epsilon$ mit $0<\epsilon<10^{-5}$.

Man betrachte die Funktion
$$f(x)=x-\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$
Dann ist zu zeigen, $|f(x)|<10^{-4}$ für $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$. Für die 1.Ableitung gilt:
$$\begin{aligned}f'(x)&=1-\frac{(14\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)(9+6\cos x)+(14+\cos x)6\sin^2 x}{(9+6\cos x)^2}\\&=1-\frac{42\cos x+6\cos^2 x+2\cos^3 x+25}{3(3+2\cos x)^2}\\&=\frac{2(1-\cos x)^3}{3(3+2\cos x)^2}\end{aligned}$$
Wegen $1-\cos x\geq 0$ gilt für alle x des zu untersuchenden Intervall $f'(x)\geq 0$. Damit ist $f(x)$ im Intervall $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ monoton wachsend, und es gilt für $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$
$$f(0)\leq f(x)\leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
Offenbar ist $f(0)=0$. Um die Behauptung nachzuweisen, genügt es also $\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ abzuschätzen:
$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{\pi}{4}-\frac{\left(14+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{2}}{9+3\sqrt{2}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\left(7\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)(3-\sqrt{2})}{3(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\frac{41}{2}\sqrt{2}-\frac{25}{2}}{21}=\frac{1}{84}(21\pi-82\sqrt{2}+50)\end{aligned}$$
Es ist $21\pi=21(3{,}14159+\delta)=65{,}97339+21\delta$ und $82\sqrt{2}=82(1{,}41421+\epsilon)=115{,}96522+82\epsilon$.
Damit ist
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{84}(0{,}00817+21\delta+82\epsilon)<\frac{81{,}7+2{,}1}{84}\cdot 10^{-4}=\frac{83{,}8}{84}\cdot 10^{-4}<10^{-4}$$
und somit gilt für $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$
$$0=f(0)\leq f(x)=|f(x)|\leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)<10^{-4}$$
Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 121246B
In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben.
Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, dass B auf k_1 und C auf k_2 liegen.
a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.
b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solcher Dreiecke gibt.

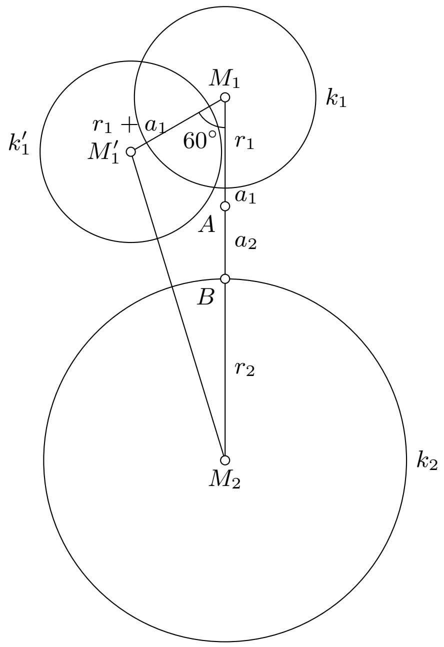
Angenommen, es existiert ein $B \in k_1$ und ein $C \in k_2$ mit $AB = BC = CA$, dann erhalte ich den Punkt C, falls B schon festliegt, durch Drehen der Strecke AB um A um den Winkel von 60°.
Falls ich einen beliebigen Punkt B auf k_1 wähle und AB um A um 60° drehe, ist es wahrscheinlich, dass der Endpunkt der Strecke AB nach der Drehung auf der Kreislinie k_2 liegt. Drehe ich aber den ganzen Kreis k_1 um A um 60°, und gibt es ein solches Dreieck, dann schneidet der gedrehte Kreis k_1 der Kreis k_2 sicher in einem Punkt C', der den Bedingungen der Aufgabe genügt; denn der Urpunkt B der Drehung um A um 60° von C' liegt auf k_1, und es gilt sicher

$$\angle C'AB' = 60^\circ \qquad \text{und} \qquad C'A = B'A$$

Damit ist $\triangle AB'C'$ ein gesuchtes Dreieck.

Konstruktion: Die Kreislinie k_1 wird um A einmal um 60° im mathematisch positiven Drehsinn und einmal im mathematisch negativen Drehsinn gedreht. Es entstehen die Kreislinien k_1' und k_1''.
Falls Punkte C mit $C \in k_2 \cap k_1'$ oder $C \in k_2 \cap k_1''$ existieren, so sind diese Punkte Lösungen der Aufgabe. Die entsprechenden Punkte B erhält man durch Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks über AC und der Bedingung $B \in k_1$.

Determination: Als höchste Anzahl von Lösungen können vier gleichseitige Dreiecke auftreten und zwar genau dann, wenn $k_1' \cap k_2$ und $k_1'' \cap k_2$ jeweils genau zwei Punkte enthalten.
k_1' und k_1'' können jeweils k_2 in höchstens zwei Punkten schneiden, da vorausgesetzt war, dass k_2 nicht mit k_1' oder k_1'' identisch ist.
Der Fall, dass vier gleichseitige Dreiecke auftreten, ist möglich, wie im folgenden gezeigt wird (Abbildung).



Ich wähle den Punkt A auf der Verbindungsstrecke von M_1 und M_2 und werden beweisen, dass a_1 und a_2 so gewählt werden können, dass $M_2M_1' < r_1 + r_2$ ausfällt. Es gilt nämlich nach dem Kosinussatz:

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)^2 + (r_1 + a_1)^2 - (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)(r_1 + a_1)$$

Für $a_1 = a_2 = 0$ gilt sicher

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2 + r_1)^2 + r_1^2 - (r_2 + r_1)r_1 = (r_2 + r_1)^2 - r_1r_2 < (r_1 + r_2)^2$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit von $M_1'M_2$ von a_1 und a_2 lassen sich $a_1, a_2 > 0$ finden, für die ebenfalls noch $(M_1M_2)^2 < (r_1 + r_2)^2$ gilt. Damit schneidet dann k_1' den Kreis k_2 in zwei Punkten und wegen der Symmetrie auch k_1'' den Kreis k_2.
Damit können keine zwei der vier Punkte zusammenfallen, da sowieso $k_1' \cap k_2$ zwei Punkte enthält, ebenso $k_1'' \cap k_2$. Es könnten sich dann höchstens k_1' und k_1'' auf k_2 in B schneiden (wegen der Symmetrie).
Dies würde dann zur Folge haben, dass $\angle M_1'BM_1 > 60^\circ$ und $\angle BM_1'M_1 > 60^\circ$ gilt (nach dem Satz, dass der größeren Seite im Dreieck der größere Winkel gegenüberliegt).

Damit würde die Winkelsumme in diesem Dreieck größer als 180° sein, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.
Damit ist vier die maximale Lösungsanzahl, wenn nicht unendlich viele Lösungen existieren.

Übernommen aus [3]

9.15 XIII. Olympiade 1973

9.15.1 I. Runde 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131211
Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus M), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl aller natürlicher Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen $a_9 10^9 + ... + a_1 10^1 + a_0$, wobei jedes a_i eine der neun Ziffern $\neq 5$ ist.

Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10}. Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$10^{10} - 9^{10} = (10 - 9)(10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + ... + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9) > 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + ...9^1 \cdot 9^8 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen dieses Bereichs, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 131212
Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Es seien r_1 bzw. r_2 die Radien der Grund- bzw. Deckfläche eines Kreiskegelstumpfes ($r_1 \geq r_2 > 0$) und h die Höhenlänge dieses Körpers. Dann gilt für das Volumen V, des betrachteten Körpers

$$V_1 = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Ferner gilt für das Volumen v_2 des ausgeschnittenen Kegelkörpers

$$V_2 = \frac{\pi}{3} h r_2^2 \qquad (1)$$

und daher für das Volumen V des Restkörpers

$$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2) \qquad (2)$$

Wegen (1) und (2) entspricht $r_1 : r_2$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $6r_2^2 = r_1^2 + r_1 r_2$ und $r_1 \geq r_2 > 0$ oder, gleichbedeutend hiermit,

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1}{r_2} - 6 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{r_1}{r_2} \geq 1$$

ist. Daher kann nur

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 2 \qquad (3)$$

den Bedingungen der Aufgabe genügen. Durch Einsetzen in (3) und Rückwärtsschließen ergibt sich, dass für $\frac{r_1}{r_2} = 2$ tatsächlich $V = 6V_2$ ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 131213
Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $M = \{a,a^2,...,a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen M_1 und M_2, für die die Summe der in M_1 enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in M_2 enthaltenen Zahlen ist.

Angenommen, die Menge M kann so in in zwei elementfremde Teilmengen M_1 und M_2 aufgeteilt werden, dass die jeweiligen Elementesummen gleich groß sind, dann ergibt die Differenz dieser beiden Summen Null. Jedes Element dieser Gleichung der Menge M_1 hat dann ein positives und das der Menge M_2 ein negatives Vorzeichen und lässt sich wie folgt schreiben:

$$\pm a \pm a^2 \pm a^3 \pm ... \pm a^n \quad = \quad 0$$

Nach Division durch a^2 (was nicht Null sein kann, da $a \geq 2$ ist) erhält man

$$\begin{aligned} \pm\frac{1}{a} \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm ... \pm a^{n-2} \quad &= \quad 0 \\ \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm ... \pm a^{n-2} \quad &= \quad \mp\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Die linke Seite ist die Summe mehrerer ganzzahliger (positiver oder negativer) Zahlen, die rechte Seite ist auf jeden Fall nicht ganzzahlig ($\frac{1}{n}$ ist für $n \geq 2$ nie ganzzahlig). Aus diesem offensichtlichen Widerspruch folgt das Gegenteil der Annahme und mithin das zu Beweisende.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 131214
Gegeben seien k reelle Zahlen a_1, a_2, ... , a_k (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ und

(2) $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$ gilt.

Man beweise, dass dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0 < n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Wir setzen $x_1 = a_1$ und $x_m = a_m - a_{m-1}$, für $m = 2,3,...,k$. Dann gilt $x_m \geq 0$ für $m = 1,2,...,k$ sowie

$$\begin{aligned} &a_1 = x_1 \\ &a_2 = x_1 + x_2 \\ &s_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ &\quad ...... \\ &a_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \\ &\quad ...... \\ &a_k = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + ... + x_k \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $-\frac{k}{n} \leq -1$ und (2)

$$k\left(x_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x_3 + ... + \left(1 - \frac{n-1}{n}x_n\right)\right) \leq$$

$$\leq kx_1 + (k-1)x_2 + (k-2)x_3 + ... + (k-(n-1))x_n + ... + x_k = a_1 + ... + a_k = 1$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{n}(a_1 + .. + a_n) = \frac{1}{n}(nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + ... + x_n) \leq \frac{1}{k}$$

w.z.b.w.

Übernommen von [5]

9.15.2 II. Runde 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131221
Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0; q \neq 0; q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ gilt.
a) Man beweise, dass die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \quad \text{und} \quad \{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.
b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0; q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

a) Es sind $b_i = a_0 \cdot q^{i+1} - a_0 \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i$ und analog $c_i = (b_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)^2) \cdot q^i$ geometrische Folgen.

b) Aus $a_i = c_i$ folgt mit der eben hergeleiteten Form von c_i wegen $a_0 \neq 0$ direkt $(q-1)^2 = 1$, also $q = 1 \pm 1$, wobei $q = 1 - 1 = 0$ als Lösung entfällt, sodass nur $q = 1 + 1 = 2$ für beliebige $a_0 \neq 0$ verbleibt. Einsetzen dieser Werte zeigt $b_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i$ und damit auch $c_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i = a_i$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 131222
Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen.
Dabei musste jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.
Schüler A meint, dass es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte.
Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, dass es sogar acht solcher Schüler geben müsse.
Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

Anwendung des Schubfachprinzips:
Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei $n,k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Hier sind die n Objekte nun einfach die 41 Schüler und die k Mengen sind einfach die 6 Mengen, welche der Aufteilung der Schüler gemäß den 3! Permutationen der 3 Startbahnen entsprechen, d.h., es ist $n = 41$ und $k = 6$. Also muss es dann tatsächlich mindestens 7 ($= \lceil \frac{41}{6} \rceil$) Schüler geben, für welche die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmt. Für 8 Schüler kann man dagegen diese Aussage nicht mehr machen, wie die einfache Gleichung

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6 = 41$$

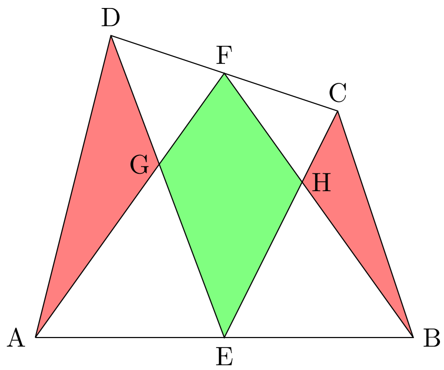
zeigt, welche eine mögliche "Belegung" der 6 Permutationen der Startbahnen angibt, bei der es keine 8 Schüler mit der gleichen Reihenfolge der Startbahnen gibt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 131223
In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

Mit Beträgen bezeichnen wir im folgenden den Flächeninhalt eines Vielecks. Dann können wir die Behauptung (durch ergänzen der vier weißen Teildreiecke) äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
& |EHFG| = |AGD| + |BHC| \\
\iff & 2|EHFG| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\
& \qquad = 2|AGD| + 2|BHC| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\
\iff & |ABF| + |CDE| = (|AED| + |EBC|) + (|CFB| + |FDA|) \ .
\end{aligned}$$



Da F der Mittelpunkt der Strecke CD ist, ist die Höhe des Dreiecks ABF gerade das arithmetische Mittel der Höhen der Dreiecke AED und EBC. Daraus folgt $|ABF| = |AED| + |EBC|$ und analog $|CDE| = |CFB| + |FDA|$ und somit die Behauptung.

Quelle anonym

Aufgabe 4 - 131224
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Multipliziert man Gleichung (2) mit x und zieht davon (1) ab, so erhält man

$$xy(y^2 + 1) - (y^2 + 1) = 0$$

Hier dürfen wir wegen $y^2 + 1 > 0$ durch $y^2 + 1$ kürzen, was auf die einfache Beziehung

$$xy = 1$$

führt. Multipliziert man nun (1) mit x^2 und führt dann hierin die Ersetzung $xy = 1$ durch, so erhält man als neue Gleichung

$$x^5 + x^3 + x^2 + 1 = 0$$

in der Variablen x allein.

Eine offensichtliche Lösung davon ist $x = -1$ und nach Kürzen durch den Linearfaktor $x + 1$ ergibt sich daraus weiter

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

Diese dividieren wir nun durch $x^2 \neq 0$ und erhalten so mit der Substitution $z := x + \frac{1}{x}$ die einfache Gleichung

$$z^2 - z = 0$$

in z mit den beiden Lösungen $z \in \{0,1\}$. Für beide Werte von z ist aber

$$x + \frac{1}{x} = z \quad \text{bzw.} \quad x^2 - zx + 1 = 0$$

in reellen Zahlen unlösbar, wie man leicht nachprüft.

Zusammenfassend bleibt es also bei der einen Lösung $x = -1$ für x und wegen $xy = 1$ gilt dann auch $y = -1$. Tatsächlich erfüllt $(x,y) = (-1, -1)$ beide Gleichungen (1) und (2) und ist somit die einzige reelle Lösung hier.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, das reelle Zahlenpaar (x, y) sei eine Lösung des Gleichungssystems (*), (**). Dann folgt durch Subtraktion aus den Gleichungen (*) und (**)

$$x^3 - y^3 - x^3 + y^2 + x - y = 0 \qquad \text{also} \qquad (x-y)(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1) = 0 \tag{1}$$

Die Gleichung (1) ist nur dann erfüllt, wenn

$$x - y = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = 0 \tag{2,3}$$

ist. Im Fall (2) gilt $x = y$, also wegen (*)

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (x+1)(x^2+1) = 0$$

Da für alle reellen Zahlen x stets $x^2 + 1 > 0$ gilt, folgt hieraus $x = -1$ und wegen (2) daraus $y = -1$.

Im Fall (3) erhält man

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 &= 0 \\ \frac{1}{2}((x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2y + 1)) &= 0 \\ \frac{1}{2}((x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wäre aber nur dann erfüllt, wenn $(x-1)^2 = 0$, also $x = 1$, und $(y-1)^2 = 0$, also $y = 1$, und $(x+y)^2 = 0$, also $x = -y$ wäre. Das ist aber wegen $1 \neq -1$ nicht möglich. Daher gibt es im Fall (3) keine Lösung.
Das Gleichungssystem (*), (**) hat somit höchstens die reelle Lösung $(-1, -1)$. Tatsächlich ist

$$(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$$

d.h, für $x = y = -1$ sind (*) und (**) erfüllt. Im Bereich der reellen Zahlen hat das Gleichungssystem (*), (**) somit genau die Lösung $(-1, -1)$.

Übernommen aus [2]

9.15.3 III. Runde 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131231
Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder.
Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Sohn und Tochter alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

Es seien jeweils v das Alter des Vaters, t das Alter der Tochter und s das Alter des Sohnes in vollen Jahren. Die Anzahl voller Jahrzehnte sei mit n ausgedrückt. Mit $v,s,t,n \in \mathbb{N}$.
Dem Aufgabentext ist zu entnehmen:

$$n > 1 \quad (i)$$

$$v - t > 20 \quad (ii)$$

$$v - s < 40 \quad (iii)$$

$$v - 10 = t - 10 + s - 10 \qquad ; \qquad t = v + 10 - s \quad (1)$$

$$v - 10n = 8(s - 10n) \qquad ; \qquad v = 8s - 70n \quad (2)$$

$$t - 10n = 3(s - 10n) \qquad ; \qquad t - 10n = 3s - 30n \quad (3)$$

Wir setzen (1) in (3) ein und erhalten

$$v + 10 - s - 10n = 3s - 30n \qquad ; \qquad v = 4s - 20n - 10 \quad (4)$$

Durch Gleichsetzen von(2) und (4) ergibt sich nach Umformung

$$s = 12{,}5n - 2{,}5 \quad (5)$$

woraus folgt dass n für ganzzahlige Werte ungerade - und mit (i) größer als 1 sein muss. Mit dem Wert 3 in (5) eingesetzt berechnet sich zunächst das Alter des Sohnes

$$s = 12{,}5 \cdot 3 - 2{,}5 = 35$$

Wir setzen weiter ein und erhalten

$$v = 8 \cdot 35 - 70 \cdot 3 = 70$$

$$t = 70 + 10 - 35 = 45$$

Mit der Überprüfung von (ii) und (iii)

$$70 - 45 = 25 > 20 \quad (ii)$$

$$70 - 35 = 35 < 40 \quad (iii)$$

sind auch diese Kriterien erfüllt.
Der Vater ist 70, die Tochter ist 45 und der Sohn ist 35 Jahre alt.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Zweite Lösung:

Angenommen, die Angabe eines Alters des Vaters von x Jahren, der Tochter von y Jahren und des Sohnes von z Jahren entspräche den Voraussetzungen der Aufgabe. Die Aussage über den 10 Jahre zurückliegenden Zeitpunkt führt dann auf die Gleichung

$$x - 10 = (y - 10) + (z - 10) \qquad \text{also} \qquad x + 10 = y + z \tag{1}$$

Die Aussagen über den Zeitpunkt vor einigen Jahrzehnten, also vor $10n$ Jahren (n natürliche Zahl, $n > 1$) führen auf die Gleichungen

$$x - 10n = 8(z - 10n) \qquad , \qquad y - 10n = 3(z - 10n) \tag{2,3}$$

Ferner gilt

$$x - y > 20 \qquad , \qquad x - z < 40 \tag{4,5}$$

Aus (1), (2), (3) ergibt sich

$$x = 30n - 20, \qquad y = \frac{35}{2}n - \frac{15}{2}, \qquad z = \frac{25}{2}n - \frac{5}{2}$$

Hieraus und aus (4) folgt $\frac{25}{2}n - \frac{25}{2} > 20$, also $n > \frac{65}{25} > 2$; aus (5) folgt $\frac{35}{2}n - \frac{35}{2} < 40$, also $n < \frac{115}{25} < 4$.
Daher ergibt sich $n = 3$ und somit $x = 70$, $y = 45$, $z = 35$.
Also können nur die Angaben, der Vater sei 70 Jahre, die Tochter 45 Jahre und der Sohn 35 Jahre alt, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

In der Tat ist das der Fall; denn nach ihnen war der Vater vor zehn Jahren 60 Jahre, die Kinder 35 bzw. 25 Jahre alt, der Vater also so alt wie die Kinder zusammen. Ferner war vor drei Jahrzehnten der Sohn 5 Jahre und der Vater 40 Jahre alt, also achtmal so alt wie sein Sohn.
Gleichzeitig war damals die Tochter 15 Jahre, also dreimal so alt wie ihr Bruder. Schließlich beträgt der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter 25 Jahre, also mehr als 20 Jahre, und zwischen Vater und Sohn 35 Jahre, also weniger als 40 Jahre. Daher sind alle Bedingungen erfüllt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 131232
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

Es sei o.B.d.A. $a \leq b$. Mit Division durch b und der Substitution $0 < x := \frac{a}{b} \leq 1$ geht die zu zeigende Ungleichung in die folgende äquivalente Ungleichung über $\sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[m]{1 + x^m}$ bzw. nach Potenzieren mit nm in $(1 + x^n)^m < (1 + x^m)^n$. Da $0 < x \leq 1$ ist, gilt auch $0 < x^{n-m} \leq 1$ und damit

$$1 + x^n = 1 + x^m \cdot x^{n-m} \leq 1 + x^m \qquad \text{sowie} \qquad (1 + x^n)^m \leq (1 + x^m)^m < (1 + x^m)^n, \ \square$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

O.B.d.A. sei $a \leq b$. Ferner sei $x = \frac{a}{b}$ gesetzt. Dann gilt $0 < x \leq 1$ und somit wegen $n > m > 0$ sicher $x^n \leq x^m$, also

$$(x^n + 1)^m \leq (x^m + 1)^m < (x^m + 1)^n$$

d.h. $\left(\frac{a^n + b^n}{b^n}\right)^m < \left(\frac{a^m + b^m}{b^m}\right)^n$, also $(a^n + b^n)^m < (a^m + b^m)^n$ und daher wegen $\frac{1}{mn} > 0$

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Übernommen aus [2]

Aufgabe 3 - 131233
Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck.
Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb von V.

Die Innenwinkel in V bei A, B, C und D seien wie üblich mit α, β, γ und δ bezeichnet.

Sei zuerst V ein konvexes Viereck und es sei o.B.d.A. $\alpha+\beta \geq 180°$. (Da $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$ gilt, beträgt mindestens eine der beiden Summen $\alpha+\beta$ bzw. $\gamma+\delta$ mindestens $180°$.)

Die Parallele zu DA durch B schneide die Gerade CD in P. Dann liegt P im Innern oder auf der Strecke CD, da $\angle ABP = 180° - \alpha \leq \beta$ ist, da $\angle ABP$ und α Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind. Analog ist auch mindestens eine der beiden Summen $\alpha+\delta$ und $\beta+\gamma$ mindestens $180°$, sodass wir (unter gegebenenfalls erfolgender Variablenumbenennung) o.B.d.A. $\alpha+\delta \geq 180°$ annehmen können und nun analog oben der Schnittpunkt Q der Parallelen zu AB durch D mit BC im Innern oder auf dem Rand der Strecke BC liegt, da $\angle ADQ = 180° - \alpha \leq \delta$ gilt.

Da nun die Strecken BP und DQ gegenüberliegende Seiten des konvexen Vierecks V miteinander verbinden, besitzen sie einen Schnittpunkt A' im Innern oder auf dem Rand von V. Nach Konstruktion ist das Viereck $ABA'D$ ein Parallelogramm und nicht alle der vier Punkte A', B', C' und D' liegen außerhalb von V.

Sei nun umgekehrt V ein nichtkonvexes, nicht überschlagenes Viereck mit überstumpfen Innenwinkel α. Aufgrund der Innenwinkelsumme von V kann es nur einen überstumpfen Innenwinkel geben. Dann liegt die Diagonale BD (bis auf die Endpunkte) außerhalb von V. Damit liegen alle Punkte von V in nur einer der beiden von der Geraden BD erzeugten Halbebenen. Im Parallelogramm $ABA'D$ liegen aber A und A' in verschiedenen von der Diagonalen BD erzeugten Halbebenen, also A' außerhalb von V.

Analog liegt auch im Parallelogramm $C'BCD$ der Punkt C' in der von BD erzeugten Halbebene, in der C, und damit V, nicht liegt. Also ist auch C' ein Punkt, der außerhalb von V liegt. Weiterhin ist $\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta < 180° - \beta$ und damit $\angle B'CB = 180° - \beta > \gamma = \angle DCB$, sodass B' außerhalb von V liegt. Analog (durch Vertauschen der Rollen von B und D) folgt schließlich auch $\angle DCD' = 180° - \delta > \gamma = \angle DCB$, sodass auch D' außerhalb von V liegt.

Damit befinden sich für ein nicht überschlagenes Viereck $V = ABCD$ genau dann die vier Punkte A', B', C' und D' außerhalb von V, wenn V nichtkonvex ist, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 131234
Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, ..., 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.
Man beweise, dass die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn gilt:

$$P_1P_2 + P_3P_4 = P_1P_3 + P_2P_4 = P_1P_4 + P_2P_3$$

Es sei r_i der Radius der Kugel K_i.
Wir nehmen zuerst an, dass sich die Kugeln K_i jeweils von außen berühren. Dann ist die Summe der Radien zweier dieser Kugeln genau gleich der Entfernung von deren Mittelpunkten. Also ist für $1 \leq i < j \leq 4$ die Summe $r_i + r_j = |P_iP_j|$. Insbesondere ist

$$|P_1P_2| + |P_3P_4| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = |P_1P_3| + |P_2P_4| = |P_1P_4| + |P_2P_3|$$

Sei nun umgekehrt die Gleichheit dieser Streckensummen gegeben. Wir wählen dann

$$\begin{aligned} r_1 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_1P_3| - |P_2P_3|), \\ r_2 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_2P_3| - |P_1P_3|), \\ r_3 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_3| + |P_2P_3| - |P_1P_2|) \quad \text{und} \\ r_4 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + |P_2P_4| - |P_1P_2|) \end{aligned}$$

wobei r_1 bis r_3 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ und r_4 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_4$ positiv sind.

Es ist dann

$$r_1 + r_2 = |P_1P_2|,$$
$$r_1 + r_3 = |P_1P_3|,$$
$$r_2 + r_3 = |P_2P_3|,$$
$$r_1 + r_4 = \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_4| + |P_1P_3|) - |P_2P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - |P_2P_3|) = |P_1P_4|,$$
$$r_2 + r_4 = \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_4| + |P_2P_3|) - |P_1P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_3| + |P_2P_4|) - |P_1P_3|) = |P_2P_4|,$$
$$r_3 + r_4 = \frac{1}{2} \cdot ((|P_1P_3| + |P_2P_4|) + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - 2|P_1P_2|)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (2(|P_1P_2| + |P_3P_4|) - 2|P_1P_2|) = |P_3P_4|,$$

sodass sich die Kugeln K_i jeweils gegenseitig von außen berühren, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 131235
Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Im Dreieck $\triangle ABC$ sei die Länge der Seite, die dem Winkel mit Größe α gegenüberliegt, mit $a = \sqrt{2}$ bezeichnet, analog $b = \sqrt{3}$ und $c = \sqrt{4} = 2$. Dann gilt nach dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, also

$$bc \sin\alpha = ac \sin\beta = ab \sin\gamma =: T$$

Die zu betrachtende Gleichung $x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$ geht durch Multiplikation mit abc und Division durch T dann äquivalent über in $0 = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 2z$ bzw. $-2z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$. Quadrieren liefert

$$4z^2 = 2x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{6} \qquad \text{bzw.} 2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Q}$$

Da $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ gilt, aber $2xy$ als ganze Zahl rational ist, muss $2xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$ gelten.
Ist $x = 0$, so folgt aus $\sqrt{3}y = -2z \in \mathbb{Q}$ auch $y = z = 0$ und analog aus $y = 0$ aus $\sqrt{2}x = -2z \in \mathbb{Q}$ genauso nun $x = z = 0$, sodass es nur höchstens diese eine Lösung $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ gibt.
Einsetzen dieser Werte bestätigt aber schnell, dass dies auch wirklich eine, also die einzige, Lösung der zu betrachtenden Gleichung ist, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

O.B.d.A. kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass $|BC| = \sqrt{2}$, $|CA| = \sqrt{3}$, $|AB| = \sqrt{4}$, $\alpha = |\angle CAB|$, $\beta = |\angle ABC|$ und $\gamma = |\angle BCA|$ gilt. Ist d der Durchmesser des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt auf Grund des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{d}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{d}, \quad \sin\gamma = \frac{2}{d}$$

Folglich ist die gegebene Gleichung äquivalent mit

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + 2z = 0 \tag{1}$$

Angenommen, es seien x, y und z ganze Zahlen derart, dass das Tripel (x, y, z) eine Lösung der Gleichung (1) darstellt. Dann gilt

$$2xy\sqrt{6} + 2x^2 + 3y^2 = 4z^2 \qquad \text{also} \qquad 2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^3 - 3y^2$$

Da x, y und z ganze Zahlen sind, muss x oder y gleich null sein, weil $\sqrt{6}$ irrational ist.
Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt wegen der Irrationalität von $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2}$ und auf Grund von (1) $x = y = z = 0$.
Offensichtlich erfüllt das Zahlentripel $(0,0,0)$ die Gleichung (1). Daher ist es die einzige derartige Lösung dieser Gleichung und damit auch der gegebenen Gleichung.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 6A - 131236A
Eine Menge G von Elementen $u,v,w,...$ heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d.h., jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u,v,w aus G gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei P die Menge aller reeller Zahlen. Für je zwei Elemente a,b aus P ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, dass die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

Da die oben definierte Operation $\circ$ offenbar die Gruppeneigenschaft erfüllt, wenden wir uns nun dem Nachweis von (2) zu, indem wir $(u \circ v) \circ w$ für drei beliebige Elemente $u,v,w \in P$ explizit berechnen. Zunächst ist

$$(u \circ v) \circ w = (u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})\sqrt{w^2+1} + w\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1}$$

und indem man hier die Identität

$$\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1} = \sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uv$$

verwendet, welche man etwa durch Quadrieren und Ausmultiplizieren leicht bestätigen kann, folgt daraus weiter

$$(u \circ v) \circ w = u\sqrt{(v^2+1)(w^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)(w^2+1)} + w\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uvw \qquad (*)$$

Hier fällt sofort auf, dass der rechtsstehende Ausdruck in (*) gegenüber einer beliebigen Vertauschung von u,v,w invariant ist, sodass wir also auch für $(v \circ w) \circ u$ das gleiche Ergebnis erhalten würden. Da aber $\circ$ offensichtlich kommutativ ist, folgt daraus schließlich

$$(u \circ v) \circ w = (v \circ w) \circ u = u \circ (v \circ w)$$

also die zu beweisende Assoziativität.
Für den Nachweis von (3) zeigen wir schließlich wegen der Kommutativität von $\circ$ nur die Lösbarkeit der Gleichung $u \circ x = v$, indem wir einfach eine Lösung, nämlich

$$x = (-u) \circ v$$

explizit angeben, was äquivalent ist zum Bestehen der Gleichung

$$u \circ (-u) \circ v = v$$

ist, welche man mithilfe von (*) sofort wie folgt nachrechnen kann

$$u\sqrt{((-u)^2+1)(v^2+1)} + (-u)\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)^2} + u(-u)v = v$$

womit dann auch (3) bewiesen ist.

Aufgabe gelöst von weird

Alternativlösung:

Seien $u,v \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $a,b \in \mathbb{R}$ mit $u = \sinh(a)$ und $v = \sinh(b)$. Es gilt

$$u \circ v = \sinh(a)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(a) = \sinh(a+b).$$

Damit kann man die Gruppenaxiome leicht nachrechnen: (1) ist sowieso klar. (2) Für $w = \sinh(c)$ gilt

$$\begin{aligned}(u \circ v) \circ w &= \sinh(a+b) \circ \sinh(c) = \sinh((a+b)+c)\\ &= \sinh(a+(b+c)) = \sinh(a) \circ \sinh(b+c)\\ &= u \circ (v \circ w).\end{aligned}$$

(3) Für $x := \sinh(b-a)$ gilt

$$u \circ x = \sinh(a + (b-a)) = \sinh(b) = v.$$

Analog gilt für $y := \sinh(b-a)$, dass $y \circ u = v$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6B - 131236B
M sei die Menge aller Punkte $P(x,y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x,y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus M der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweis: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

Es gibt 25 Punkte und daher insgesamt

$$n = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Auswahlmöglichkeiten für die (ungeordneten) Punktepaare. Klarerweise ist der Abstand für so ein Punktpaar jedenfalls dann ganzrational, wenn für die beiden Punkte eine der beiden Koordinaten übereinstimmt, was dann also in

$$100 \ \left(= 2 \cdot 5 \cdot \binom{5}{4}\right)$$

Fällen zutrifft. Dazu kommen dann noch alle 8 Punktepaare $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$, für welche gilt

$$\{|x_1 - x2|,|y_1 - y_2|\} = \{3,4\}$$

da für sie der Abstand $5 \ = (\sqrt{3^2+4^2})$ beträgt, also dann ebenfalls ganzrational ist. Es gilt somit $m = 108$ und

$$\frac{m}{n} = \frac{108}{300} = \frac{9}{25} = 0.36$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit hier.

Aufgabe gelöst von weird

9.15.4 IV. Runde 1973, Klasse 12

Aufgabe 1 - 131241
Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ψ und ζ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, ... \qquad (1)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, dass die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

Da die beiden Vektoren ψ und ζ in einer Ebene liegen sollen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Ebene von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Dies kann durch Drehung der Ebene erreicht werden. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $\zeta = \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ gelten. Mit $|\psi - n\zeta|$ wird die Länge des Vektors $\psi - n\zeta$ bezeichnet. Deshalb kann die Folge durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| = \left|\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ beschrieben werden. Ferner bezeichne

$$\langle\psi, \zeta\rangle = \langle\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\rangle = \psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2$$

das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren ψ und ζ.

a) Eine Folge (c_n) heißt nach Definition streng monoton wachsend, falls

$$c_n < c_{n+1}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Offensichtlich gilt $c_n \geq 0$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. Somit erhalten wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
&c_n < c_{n+1}\\
\iff &\sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2} < \sqrt{(\psi_1 - (n+1)\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\zeta_2)^2}\\
\iff &(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2 < (\psi_1 - (n+1)\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\zeta_2)^2\\
\iff &\psi_1^2 - 2n\psi_1\zeta_1 + n^2\zeta_1^2 + \psi_2^2 - 2n\psi_2\zeta_2 + n^2\zeta_2^2 < \psi_1^2 - 2(n+1)\psi_1\zeta_1 + (n+1)^2\zeta_1^2 + \psi_2^2\\
&\qquad - 2(n+1)\psi_2\zeta_2 + (n+1)^2\zeta_2^2\\
\iff &2(\psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2) < (2n+1) \cdot \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)\\
\iff &\frac{2\langle\psi, \zeta\rangle}{|\zeta|^2} < 2n + 1\\
\iff &\frac{\langle\psi, \zeta\rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} < n.
\end{aligned}$$

Damit die Folge streng monoton wachsend ist, muss

$$\frac{\langle\psi, \zeta\rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} < 1$$

sein. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\langle\psi, \zeta\rangle}{|\zeta|^2} < \frac{3}{2}$$

und dies entspricht unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung für strenges, monotones Wachsen der Folge (c_n).

b) Da sich in der Definition der Definition das Relationszeichen umkehrt, folgt somit die Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &> c_{n+1} \\ \iff \frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} &> n \end{aligned}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dies ist allerdings nicht für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ möglich, da die Vektoren ψ und ζ fixiert sind. Somit gibt es keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Folge (c_n) streng monoton fallend ist.

c) Dies ist möglich. Aufgrund der Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} \\ \iff \frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} &< n. \end{aligned}$$

aus a) sehen wir, dass eine natürliche Zahl n_0 derart existiert, dass die Folge (c_n) für alle $n > n_0$ monoton wachsend ist. Dementsprechend ist sie vorher monoton fallend.

Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 2 - 131242

Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z.B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[-0{,}7] = -1$.)

a) Man zeige, dass es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, dass die Zahlen

$$c_n = a \cdot n + b - [a \cdot n + b], \qquad (n = 1, 2, ...)$$

eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und dass dabei alle $c_n \neq 0$ sind.

b) Man beweise, dass für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

a) Seien $a = 1/2$ und $b = 1/3$, so folgt

$$c_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2) + \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2}(n+2) + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1 - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1\right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1 - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}\right] - 1 = c_n$$

Die Folge ist also periodisch mit Periode 2. Rechnen wir die ersten beiden Folgeglieder aus, gilt

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}\right] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 2 \mid n \\ \frac{5}{6}, & 2 \nmid n \end{cases}.$$

Somit erfüllt c_n die gewünschten Anforderungen.

b) Wir zeigen sogar, dass die Folge nur endlich viele Werte annimmt. Da a rational ist, gibt es teilerfremde ganze Zahlen p,q mit $q > 0$ und $a = p/q$. Somit folgt

$$c_{n+q} = \frac{p}{q}(n+q) + b - \left[\frac{p}{q}(n+q) + b\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b + p\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b\right] - p = c_n.$$

Es werden also höchstens q paarweise verschiedene Werte angenommen. Somit gibt es unter diesem einen minimalen.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 3 - 131243
Es seien n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, dass es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, dass dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Zunächst wählen wir eine Gerade, die zu keiner der Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 parallel ist und die alle Punkte von M_1 auf der rechten Seite hat. Hierbei sind 'linke Seite' und 'rechte Seite' vereinfachte Bezeichnungen für die beiden Halbebenen, in welche die Gerade die Ebene teilt, und für stetige Bewegungen der Gerade (wie stetige Verschiebungen und Rotationen) soll sich diese Einteilung stetig ändern, d.h. wir springen in unserer Bezeichnung nicht zwischen links und rechts.

Wenn diese Gerade nun nach rechts verschoben wird, so kann die Anzahl der Punkte aus M_1, die sich auf der rechten Seite befinden, nur in diskreten Einerschritten abnehmen (nach Voraussetzung der Aufgabenstellung und Konstruktion der Gerade). Zudem ist, wenn man die Gerade hinreichend weit nach rechts verschoben hat, jeder Punkt von M_1 auf der linken Seite der verschobenen Gerade (so eine Verschiebung existiert aufgrund der Endlichkeit von M_1).

Da M_1 eine gerade Anzahl von Punkten hat, gibt es somit eine Verschiebung der Gerade, für die M_1 halbiert wird, d.h. auf beiden Seiten der Gerade sind jeweils n_1 Punkte aus M_1. Bezeichne diese verschobene Gerade mit g.

Betrachte nun die Verbindungsstrecke eines Punktes P_l der linken und eines Punktes P_r der rechten Seite von g ($P_l, P_r \in M_1$), die mit g von allen derartigen Verbindungsstrecken den kleinsten Winkel α einschließt, wobei der eingeschlossene Winkel als orientierter Winkel zu verstehen ist, der auf der linken Seite von g betrachtet und entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv definiert wird. Drehe g nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Schnittpunkt von P_lP_r mit g.

Wegen der Minimalität von α wird bei dieser Drehung kein weiterer Punkt von M_1 überstrichen, bis schließlich erstmalig die Punkte P_l und P_r auf der gedrehten Gerade g' liegen; nach Voraussetzung der Aufgabenstellung liegt dann auch kein weiterer Punkt auf g'. Wird g' (um beliebige hinreichend kleine Winkel größer 0) weiter gedreht zu g'', so liegt P_l auf der rechten und P_r auf der linken Seite von g'' (und kein weiterer Punkt von M_1 wird dabei überstrichen), sodass g'' weiterhin M_1 halbiert.

Mit dem oben beschriebenen Rotationsschema lassen sich also Geraden konstruieren, die M_1 halbieren und eine beliebige Orientierung haben, aber nicht parallel zu den (endlich vielen) Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 sind. Insbesondere kann man eine Gerade g''' konstruieren, die M_1 halbiert, zu g parallel ist und alle Punkte aus M_1, die auf der linken Seite von g waren, auf der rechten Seite hat. (g''' entsteht also gewissermaßen aus einer Rotation von g um insgesamt 180°, allerdings um im Allgemeinen wechselnde Drehpunkte)

O.B.d.A. seien nun weniger als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g (falls es genau n_2 Punkte wären, wären wir fertig). Damit sind also mehr als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g'''. Bei dem Rotationsvorgang von g nach g''' nach obigem Schema kann sich die Anzahl der Punkte von M_2, die auf der linken Seite der rotierenden Gerade liegen, nur in diskreten Schritten um 0 oder ± 1 oder ± 2 ändern (betragsmäßig mehr als zwei geht nach Voraussetzung der Aufgabenstellung nicht).

Die Änderung um ± 1 oder ± 2 geschieht nur dann, wenn gerade kein Punkt von M_1 überstrichen wird (da bei der Rotation immer entweder keiner oder genau zwei Punkte von M_1 überstrichen werden, und nach Voraussetzung der Aufgabenstellung keine drei Punkte aus $M_1 \cup M_2$ auf einer Geraden liegen).

Weil auf der linken Seite von g und g''' weniger bzw. mehr als n_2 Punkte von M_2 liegen, wird also irgendwann während des Rotationsvorganges die Anzahl der Punkte aus M_2 auf der linken Seite der rotierenden Gerade von $n_2 - 1$ auf n_2 oder von $n_2 - 2$ auf n_2 wachsen (dann wären wir fertig) oder von $n_2 - 1$ auf $n_2 + 1$ wachsen, indem zwei Punkte P_1, P_2 von M_2 überstrichen werden, die auf der rechten Seite der Geraden liegen.

Betrachte also den letzteren Fall, wenn P_1 und P_2 auf der rotierenden Gerade liegen. Drehe die Gerade nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt zwischen P_1 und P_2 um einen hinreichend kleinen Winkel größer 0, sodass die Gerade h entsteht. Da der Drehwinkel hinreichend klein ist, wird kein Punkt aus M_1 überstrichen, sodass h immer noch M_1 halbiert.

Weiterhin halbiert h die Menge M_2, da einer der Punkte P_1, P_2 rechts von h und der andere links von h liegt, und kein weiterer Punkt aus M_2 überstrichen wurde.
h ist also so eine gesuchte Gerade, die M_1 und M_2 halbiert.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 4 - 131244
Man ermittle alle Paare (f,g) von Funktionen, die für alle von $-1; 0$ und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen erfüllen:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1)$$
$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = x^2 \cdot g(x) \qquad (2)$$

Gleichung (2) ist äquivalent zu $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 \cdot g(x)$.
Führt man in der ersten Gleichung die Substitution $x \leftarrow \frac{1}{x}$ durch, erhält man $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot g(x)$, zusammen also

$$1 + (x - x^3) \cdot g(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

und

$$\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{x^3 - x} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

also $x \cdot f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und damit

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3} = -g(x)$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 131245
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, dass $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

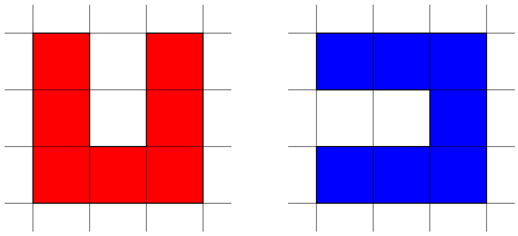
a) Sei $F := Q_1 \dots Q_6$ und sei P_k eine beliebige Ecke von E.

Bemerkung: Im Folgenden ist mit E bzw. F jeweils die Menge aller Punkte gemeint, die im Inneren oder auf dem Rand des entsprechenden n-Ecks liegen.

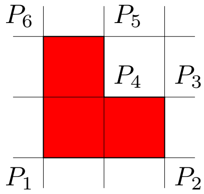
Angenommen P_k läge außerhalb von F.
Da F konvex ist, gäbe es dann eine Gerade, die die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, wobei P_k im Inneren der einen und E im Inneren der anderen Halbebene liegt. Der Schnitt von E mit der Halbebene, die P_k enthält, hätte dann einen positiven Flächeninhalt und somit wäre der Flächeninhalt von F echt kleiner als der von E. Das ist ein Widerspruch dazu, dass E und F kongruent sind.

Also liegt jede Ecke von E im Inneren oder auf dem Rand von F.
Da F und E konvex sind, muss somit E komplett in F enthalten sein.
Da andererseits nach Voraussetzung auch F komplett in E enthalten ist, folgt $F = E$. Daraus folgt, dass die Menge der Ecken von F gleich der Menge der Ecken von E sein muss, also die Behauptung.

b) Ja, gibt es:



c) Nein:



Angenommen $F := Q_1 \dots Q_6$ ist ein zu E kongruentes Sechseck, wobei $Q_1, \dots, Q_6$ im Inneren oder auf dem Rand von E liegen.
Die einzigen Punkte in E, die Abstand $2\sqrt{2}$ zu einander haben, sind P_2 und P_6. Also muss $\{P_2,P_6\} = \{Q_2,Q_6\}$ gelten.
Es ist Q_4 der Mittelpunkt von Q_2Q_6, also muss $Q_4 = P_4$ gelten.
Da die Dreiecke $P_1P_2P_6$ und $Q_1Q_2Q_6$ kongruent sind und Q_1 in E liegen soll, muss $P_1 = Q_1$ gelten.
Da Q_3 und Q_5 auf verschiedenen Seiten von Q_2Q_6 liegen müssen und die Dreiecke $Q_2Q_3Q_4$ und $P_2P_3P_4$ bzw. $Q_4Q_5Q_6$ bzw. $P_4P_5P_6$ kongruent sind, folgt, dass $\{Q_3, Q_5\} = \{P_3, P_5\}$ gilt.
Also ist jedes Q_i eine Ecke E.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6A - 131246A
Erklärungen: Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, ..., K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, ..., S_n$ angebracht.
Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt vom eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.
Unter einem "Schaltbild" B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z.B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_0 bezeichnet sei.
Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der "Summe" $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Es sei B dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{n_1}, ..., S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{k_1}, ..., S_{k_p}$ eingeschaltet sind.
Dann beginne man mit dem Schaltbild B_0 und
(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, ..., K_{n_p}$, jeden genau einmal. Anschließend (ohne nach B_0 zurückzugehen!)
(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, ..., K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem "Produkt" $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:
Man beginne mit dem Schaltbild B_0, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend
(c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jedoch noch genau einmal.
Man beweise die folgenden beiden Aussagen:
(1) Sind B, B', B'' Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'')$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

zu (1): Offenbar sind die Schaltvorgänge für alle Stromkreise jeweils unabhängig voneinander, sodass es genügt, sich auf einen einzelnen Stromkreis zu konzentrieren: Gilt für diesen die Aussage, dann gilt sie für alle Stromkreise, also auch die gesamten Schaltbilder.

Enthält ein Schaltbild B einen Knopf, der den Stromkreis S schaltet, so weisen wir B den Wert 1 zu, sonst 0. Dann gilt offenbar $B \oplus B' \equiv B + B' \pmod 2$, denn zweimaliges Schalten verändert den Zustand des Stromkreises nicht. Analog folgt $B \otimes B' \equiv B \cdot B' \pmod 2$, wie man leicht für alle vier möglichen Fälle nachrechnet.
Dann ist aber

$$B \oplus B') \otimes B'' \equiv (B + B') \cdot B'' = (B \cdot B'') + (B' \cdot B'') \equiv (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'') \pmod 2$$

sodass (1) folgt.

zu (2): Wieder betrachten wir nur genau einen Stromkreis, da die Behauptung für alle Stromkreise unabhängig ist. Für einen Schaltplan B^* mit $B^* \oplus B' = B$ muss also für jeden Stromkreis S die Kongruenz $B^* + B' \equiv B \pmod 2$ bzw. $B^* \equiv B - B' \equiv B + B' \pmod 2$ erfüllen:
Ist diese Restklasse 0, so darf in B^* kein Knopf für den zugehörigen Stromkreis S enthalten sein; ist sie 1, dann muss der entsprechende Knopf in B^* enthalten sein. Umgekehrt gilt dann aber auch die gewünschte Gleichung $B^* \oplus B' = B$. Damit ist B^* eindeutig bestimmt und hat die Form $B \oplus B'$, □.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 131246B
a) Man beweise folgende Behauptung:
Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen gelten:

$$f(x) > f''(x) \qquad (1)$$
$$f'(x) > f''(x) \qquad (2)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch $f(x) > f'(x) \quad (3)$ ersetzt?

a) Wir nehmen an, es gäbe eine ganzrationale Funktion f, die beiden angegebenen Bedingungen (1) und (2) genügt.

Es kann f keine konstante Funktion sein, da wegen $f'(x) = f''(x) = 0$ die Bedingung (2) nicht erfüllt ist. Auch kann f keine lineare (und nicht konstante) Funktion sein, da diese eine Nullstelle x besitzt, für die dann wegen $f(x) = 0 = f''(x)$ die Bedingung (1) nicht erfüllt ist.

Habe also ab nun f mindestens den Grad $n \geq 2$. Dann hat f' den Grad $n-1$ sowie f'' den Grad $n-2$, sodass die ganzrationalen Funktionen $g := f - f'$ und $h := f' - f''$ den Grad n bzw. $n-1$ besitzen.
Eine der beiden natürlichen Zahlen n und $n-1$ ist ungerade. Ist dies n, dann hat g ungeraden Grad, besitzt also eine Nullstelle x, für die $f(x) = f'(x)$ gilt, was ein Widerspruch zu (1) ist. Ist dagegen $n-1$ ungerade, so folgt analog, dass h eine Nullstelle x besitzt, was dann zu $f'(x) = f''(x)$, also einem Widerspruch zu (2) führt.

Damit kann es also keine solche Funktion f geben, was die Behauptung beweist, □.

b) Ersetzt man die Bedingung (2) durch (3), so erhält man keine wahre Aussage mehr, wie die Funktion $f(x) = 1$, die für alle reellen x konstant den Funktionswert 1 besitzt, zeigt, denn es ist für diese Funktion und alle reellen Zahlen x

$$f(x) = 1 > 0 = f'(x) = f''$$

sodass sie beide Bedingungen (1) und (3) erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.16 XIV. Olympiade 1974

9.16.1 I. Runde 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141211
Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z.B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)

a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahl der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.

b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

a) Bezeichnet man die Anzahl der Herren mit h, die der Damen mit d, so ist $h \cdot d = 480 \quad (1)$.

Werden weiter die Anzahlen derjenigen Herren, die mit 10 bzw. 11 bzw. 12 Damen getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2, h_3 und entsprechend die Anzahlen der Damen, die mit 12, 13 bzw. 14 Herren getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet, so ist

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \qquad ; \qquad d_1 + d_2 + d_3 = h$$

während die Anzahl T der am dem Abend ausgeführten Tänze auf zwei Arten angegeben werden kann:

$$T = 10h_1 + 11h_2 + 12h_3 \qquad ; \qquad T = 12d_1 + 13d_2 + 14d_3$$

Aus den Umformungen

$$T = 10(h_1 + h_2 + h_3) + h_2 + 2h_3 \qquad ; \qquad T = 12(d_1 + d_2 + d_3) + d_2 + 2d_3$$
$$T = 12(h_1 + h_2 + h_3) - 2h_1 - h_2 \qquad ; \qquad T = 14(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_1 - d_2$$

ergibt sich

$$10h < T \quad , \quad 12d < T \quad , \quad 12h > T \quad , \quad 14d > T$$

und daraus $12d < T < 12h$ und $10h < T < 14d$, also $d < h$, $h < \frac{7}{5}d$ zusammengefasst

$$d < h < \frac{7}{5}d \tag{2}$$

Weiter ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen $h \geq 12$, $d \geq 10$. Die Faktorzerlegungen von 480, bei denen beide Faktoren diesen Bedingungen genügen, sind

$$10 \cdot 48 \quad , \quad 12 \cdot 40 \quad , \quad 15 \cdot 32 \quad , \quad 16 \cdot 30 \quad , \quad 20 \cdot 24$$

Daraus ergibt sich wegen (1), dass $h = 24$, $d = 20$ sein muss, weil nur in diesem Fall auch (2) erfüllt ist.

Damit sind diese Angaben als einzige Möglichkeit für die Anzahlen der Herren und Damen ermittelt.

b) Bei diesen Anzahlen sind in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllbar, wie folgendes Beispiel einer Übersicht der Tanzpaarungen zeigt (siehe Abbildung):

Herr Nr. ⟶

Dame Nr. ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10 Damen mit je 14 Herren
2	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
3	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	
4	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	
7	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	×	4 Damen mit je 13 Herren
8	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	
10	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	
11		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×										×	6 Damen mit je 12 Herren
12			×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×									
13				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×								
14					×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×							
15						×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×						
16							×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					
17								×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×				
18									×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
19										×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		
20											×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
	11 Herren mit je 10 Damen											2 H mit je 11 D		11 Herren mit je 10 Damen											

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 141212
Man beweise:

Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

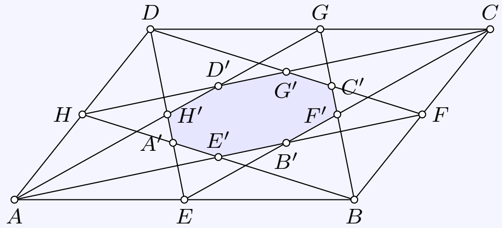
Nach Voraussetzung existiert eine ganze Zahl g mit $m + n = 7g$, also $m = 7g - n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m^7 + n^7 &= (7g - n)^7 + n^7 \\ &= (7g)^7 - 7(7g)^6 n + 21(7g)^5 n^2 - 35(7g)^4 n^3 + 35(7g)^3 n^4 - 21(7g)^2 n^5 + 7(7g)n^6 \end{aligned}$$

ist durch 49 teilbar, w.z.b.w.

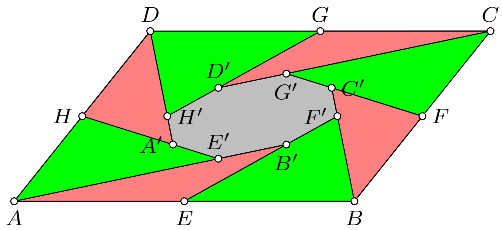
Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 141213



In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA.
Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A',
der von HB mit AF sei E',
der von AF mit EC sei B',
der von EC mit GB sei F',
der von GB mit FD sei C',
der von FD mit CH sei G',
der von CH mit GA sei D', und
der von GA mit DE sei H' (siehe Abbildung).

Man beweise, dass der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.



Es sei definiert: $a := \overline{AB} = \overline{CD}$, $b := \overline{BC} = \overline{AD}$, h_a als Höhe des Parallelogrammes bzgl. a und analog h_b bzgl. b. Dann gilt für den Flächeninhalt des Parallelogrammes: $A_{ABCD} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Das Parallelogramm lässt sich in die grünen, roten und grauen Teilfiguren gemäß Zeichnung zerlegen. Der gesuchte Flächeninhalt der grauen Figur ist somit die Differenz zwischen der Parallelogrammfläche und der Summe aller roten und grünen Dreiecksflächen.

Weiterhin gilt: $\triangle EBF' \equiv \triangle GCF'$ ($\angle EF'B = \angle GF'C$ als Wechselwinkel, $\angle EBF' = \angle F'GC$ als Scheitelwinkel an geschnittenen Parallelen, $\overline{EB} = \overline{CG} = a/2$). Die Höhen in den beiden Dreiecken sind also gleich groß und also die Höhen bzgl. $\overline{EB}$ bzw. $\overline{CG}$ auch halb so groß wie h_a. Damit ergibt sich: $A_{EBF'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{8} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$. Analog kann nachgewiesen werden, dass alle grünen Dreiecksflächen ein Achtel der Parallelogrammfläche einnehmen.

Im Dreieck ABC gilt: EB' liegt auf der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ und AB' auf der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$. Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck selbige im Verhältnis 1:2 teilt, gilt, dass der Abstand von B' zu $\overline{AB}$ ein Drittel des Abstandes von C zu $\overline{AB}$ beträgt. Damit ist die Höhe im Dreieck AEB' bzgl. AE ein Drittel von h_a. Für den Flächeninhalt in diesem Dreieck gilt folglich: $A_{AEB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{3} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD}$. Analoges gilt für die restlichen roten Dreiecke.

Zusammenfassend erhält man für den gesuchten Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A &= A_{ABCD} - 4 \cdot A_{rot} - 4 \cdot A_{gruen} \\ &= A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD} \\ &= \frac{24 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{4}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABCD} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 141214
Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a, \quad ; \quad x^2y^3z = b, \quad ; \quad x^3yz^2 = c \qquad (*,**,***)$$

1) keine,
2) genau eine,
3) genau zwei,
4) mehr als zwei, jedoch endlich viele,
5) unendlich viele

reelle Lösungen (x, y, z) hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

Ist (x, y, z) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*), (**), (***) durch Multiplikation, dass

$$x^6y^6z^6 = abc \qquad (1)$$

gelten muss. Daher hat das gegebene Gleichungssystem im Fall $abc < 0$ keine reelle Lösung. Im Fall $abc = 0$ kann es nur dann eine Lösung haben, wenn $a = b = c = 0$ ist; denn aus (1) ergibt sich, dass wenigstens eine der Zahlen x,y,z gleich null sein muss. Tatsächlich sind im Fall $a = b = c = 0$ die Tripel $(0, y, z), (x, 0, z), (x, y, 0)$ für alle reellen x, y, z Lösungen.

Im Fall $abc > 0$ setzen wir

$$g = \sqrt[6]{abc} \qquad (2)$$

Dann ergibt sich aus (*), (**), (***)

$$yz^2 = \frac{a}{g} \quad ; \quad xy^2 = \frac{b}{g} \quad ; \quad zx^2 = \frac{c}{g} \qquad (3,4,5)$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation von (3) und (4) bzw. von (3) und (5) bzw. von (4) und (5)

$$xy^3z^2 = \frac{ab}{g2} \quad ; \quad x^2yz^3 = \frac{ac}{g2} \quad ; \quad x^3y^2z = \frac{bc}{g2} \qquad (6,7,8)$$

Aus (7) und (***) bzw. (8) und (**) ergibt sich

$$\frac{z}{x} = \frac{a}{g^2} \quad \text{also} \quad z = \frac{a}{g^2}x \quad \text{bzw.} \qquad (9)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{g^2}{c} \quad \text{also} \quad y = \frac{g^2}{c}x \qquad (10)$$

Aus (*), (9) und (10) folgt schließlich

$$x^6\frac{g^4}{c^2}\frac{a^3}{g^6} = a \quad \text{also} \quad x^6 = \frac{c^2}{a^2}g^2$$

so dass als Lösungen nur die beiden Tripel

$$\left(\pm\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right| g}, \pm\frac{g^2}{c}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right| g}, \pm\frac{a}{g^2}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right| g}\right)$$

in Betracht kommen, die wegen $abc \neq 0$ voneinander verschieden sind. Wie man durch Einsetzen in (*),(**),(***) nachprüft, sind beide Tripel auch wirklich Lösungen.

Damit ergibt sich:
a) Im Fall $abc < 0$ und im Fall $abc = 0, |a| + |b| + |c| > 0$ hat das System keine Lösung.
b) und d) Diese Fälle kommen nicht vor.
c) In Fall $abc > 0$ hat das System genau zwei Lösungen.
e) Im Fall $a = b = c = 0$ hat das System unendlich viele Lösungen.

Übernommen von [5]

9.16.2 II. Runde 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141221
Es sei x_n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.
Man gebe die Glieder x_1, x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(n) = x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ an.

Es gilt

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4}$$

was die Vermutung nahelegt, dass allgemein die Formel

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gelten könnte. Tatsächlich trifft sie für $n = 0$ offenbar zu, und falls sie für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist, so gilt sie wegen

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{1}{(n+1) + 1}$$

dann auch für $n + 1$, was also dann induktiv ihre Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$ beweist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 141222
Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, dass
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleich groß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleich groß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

Sei s_1 die nach (2) jeweils gleiche Zeilensumme und $s_2 > 15$ die nach (3) jeweils gleiche Spaltensumme. Für die Summe s sämtlicher Tabellenelemente gilt demnach

$$s = 3s_1 = 4s_2 \Rightarrow s > 60 \ \wedge \ 12 \mid s$$

Das kleinste s, welches daher in Frage kommt, ist somit $s = 72$. Des weiteren gilt für s, da auch die 0 in der Tabelle vorkommen muss und jeder Eintrag höchstens zweimal vorkommen darf, die Abschätzung nach oben

$$s \leq 0 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 = 74$$

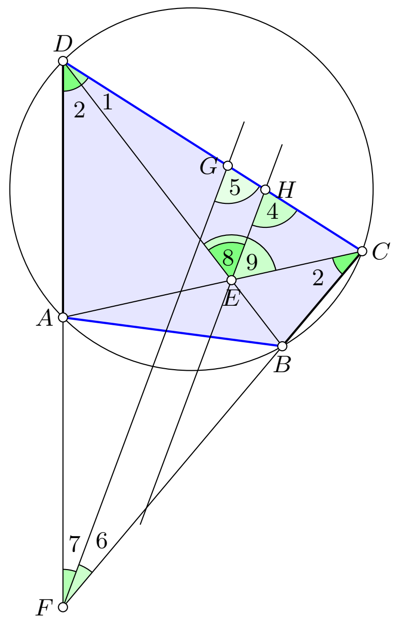
Daraus folgen unmittelbar die Werte

$$s = 72,\ s_1 = \frac{72}{3} = 24,\ s_2 = \frac{72}{4} = 18$$

Dieser Wert $s_2 = 18$ ist aber für die Spalte, in der 0 vorkommt, nur erreichbar, wenn die beiden anderen Elemente der Spalte jeweils 9 sind. Damit ist Zeilensumme $s_1 = 24$ für die Zeile, in der 0 vorkommt nicht mehr erreichbar, da die 9 nun nicht mehr verwendet werden darf und auch die 8 höchstens zweimal vorkommen darf, aber $8 + 8 + 7 + 0 < 24$ ist. Es gibt somit unter den angegebenen Bedingungen keine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 141223
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so dass sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden.
Die Gerade g halbiere den Winkel $\angle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\angle AFB$.
Man beweise, dass dann $g \parallel h$ ist.



Nach Sehnensatz zerlegen die Diagonalen das Viereck in 2 Paare ähnlicher Dreiecke, womit die Gleichheit der Winkel 2 folgt. Nun ist:

$$\angle 6 = \frac{1}{2}\angle 7 = \frac{1}{2}\left(180° - \angle D - \angle C\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 5 = \angle D + \angle 6 = \angle D + 90° - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Wir weisen nun nach, dass $\angle 5 = \angle 4$. Es ist:

$$\angle 8 = \frac{1}{2}\angle 9 = \frac{1}{2}\left(180° - \angle 1 - (\angle C - \angle 2)\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 4 = \angle 8 + \angle 1 = 90° - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C + \angle 1 = 90° + \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C =$$

$$= 90° + \frac{1}{2}\left(\angle 1 + \angle 2\right) - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 4 - 141224
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \qquad (1)\\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \qquad (2)\\ x^4 + y^4 + z^4 &= a \qquad (3) \end{aligned}$$

a) keine reellen Lösungen (x, y, z)
b) genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung hat.

Es gilt zunächst
$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = z^2 - (1-z^2) = 2z^2 - 1$$
und analog natürlich auch
$$2xz = 2y^2 - 1, \quad 2yz = 2x^2 - 1$$
Daraus folgt unmittelbar
$$\begin{aligned} a = x^4+y^4+z^4 &= (x^2+y^2+z^2)^2 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2}((2z^2-1)^2 + (2y^2-1)^2 + (2x^2-1)^2) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(4(x^4+y^4+z^4) - 4(x^2+y^2+z^2) + 3) = 1 - \frac{1}{2}(4a - 4 + 3) = -2a + \frac{3}{2} \end{aligned}$$
also dann $a = \frac{1}{2}$.
Zusammenfassend ist also a) genau für $a \neq \frac{1}{2}$, b) nie und c) genau für $a = \frac{1}{2}$ erfüllt, in welchem Fall die unendlich vielen Lösungen von (1) und (2) ((3) ist ja dann automatisch erfüllt!) geometrisch gesprochen alle auf einem speziellen Großkreis der Einheitskugel um den Ursprung liegen.

Aufgabe gelöst von weird

Zweite Lösung:

Angenommen, (x,y,z) sei eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann gilt wegen (1)
$$z = -x - y \tag{4}$$
und daher wegen (2)
$$x^2+y^2+z^2+2xy+y^2 = 1 \qquad \text{also} \qquad x^2+y^2+xy = \frac{1}{2}$$
und mithin
$$(x^2+y^2+xy)^2 = x^4+y^4+3x^2y^2+2xy(x^2+y^2) = \frac{1}{4} \tag{5}$$
Andererseits folgt aus (3) und (4)
$$a = x^4+y^4+z^4 = x^4+y^4+(x^2+y^2+2xy)^2 = 2(x^4+y^4+3x^2y^2+2xy(x^2+y^2))$$
also
$$x^4+y^4+3x^2y^2+2xy(x^2+y^2) = \frac{a}{2} \tag{6}$$
Fall 1: Ist $a \neq 3$, so widersprechen die Gleichungen (5) und (6) einander. Daher hat in diesem Fall das Gleichungssystem (1), (2), (3) keine Lösung.

Fall 2: Ist $a = 3$, so folgt aus (5) - das ist nun dasselbe wie (6) - und (4), dass höchstens diejenigen Tripel $(x, y, -x-y)$ Lösungen von (1), (2), (3) sein können, bei denen x und y die Gleichung
$$x^2+y^2+xy = \frac{1}{2} \tag{7}$$
erfüllen. Umgekehrt gilt im Fall $a = \frac{1}{2}$ für jedes Tripel $(x, y, -x-y)$ mit der Eigenschaft (7)
$$\begin{aligned} x+y+z &= x+y+(-x-y) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= x^2+y^2+(-x-y)^2 = 2(x^2+y^2+xy) = 2\frac{1}{2} = 1 \\ x^4+y^4+z^4 &= x^4+y^4+(-x-y)^4 = 2(x^2+y^2+xy)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = a \end{aligned}$$
Daher hat im Fall $a = \frac{1}{2}$ das gegebene Gleichungssystem genau diese Tripel als Lösung. Wie das Beispiel
$$\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \qquad , \qquad \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
zeigt, gibt es mehrere solche Tripel. (Es gibt sogar unendlich viele derartige Tripel, da die Gleichung (7) unendlich viele reelle Lösungen (x,y) hat.)

Das Gleichungssystem (1), (2), (3) hat also
a) keine reelle Lösung, wenn $a \neq \frac{1}{2}$ ist,
b) in keinem Fall genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung, wenn $a = \frac{1}{2}$ ist.

Übernommen aus [2]

9.16.3 III. Runde 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141231
In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, dass in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 u.s.w. in dieser Reihenfolge stehen.
Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen.
Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.
Anmerkung:
Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

Geht man von der fertigen Turmaufstellung am Ende aus, so muss dann in jeder Reihe genau einer der 8 Türme stehen und gleiches gilt auch für die Spalten. Die Nummern der aufgestellten Türme sind daher aufsteigend geordnet von der Form

$$8(k-1)+s_k,\ k=1{,}2{,}...{,}8$$

wobei hier die Spaltennummern $s_1{,}s_2{,}...{,}s_8$ die Bedingung

$$\{s_1{,}s_2{,}...{,}s_8\}=\{1{,}2{,}...{,}8\}$$

erfüllen müssen, welche zunächst bei 8 Türmen klarerweise notwendig, aber dann auch hinreichend dafür ist, dass sich keine zwei der Türme gegenseitig schlagen können. Daraus folgt aber wegen der Kommutativität der Addition sofort

$$s_1+s_2+...+s_8=1+2+\ldots+8=\frac{8\cdot 9}{2}=36$$

und somit

$$S=\sum_{k=1}^{8}(8(k-1)+s_k)=9\sum_{k=1}^{8}k-8\cdot 8=9\cdot 36-64=260$$

d.h., S hat unabhängig von der Aufstellung der Türme, sofern diese nur den Bedingungen der Aufgabe hier genügt, stets den gleichen Wert 260.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 141232
Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a,b) aus rationalen Zahlen a,b, für die $a+b=c$ gilt.
Beweisen Sie, dass unter allen Produkten $a\cdot b$ mit $(a,b)\in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a,b) mit $a=b$ gebildet wurde!

Wegen

$$a\cdot b=\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

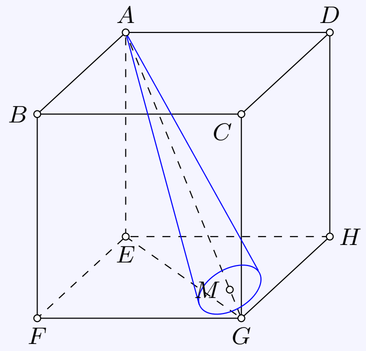
für $(a{,}b)\in M$ wird der Maximalwert für $a\cdot b$, nämlich $a\cdot b=\left(\frac{c}{2}\right)^2$, genau für $a=b$, also dann für

$$(a{,}b)=\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)\in M$$

erreicht.

Aufgabe gelöst von weird

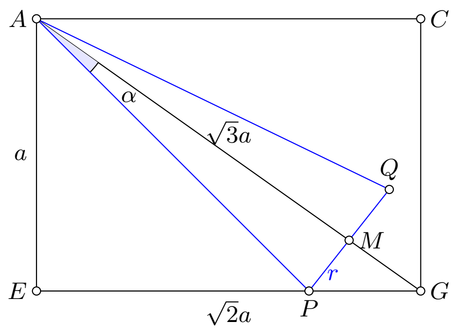
Aufgabe 3 - 141233



Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:
a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.
Man beweise:
Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

Wir betrachten einen Schnitt durch die Ebene $AEGC$:



Der Berührungspunkt des Kegels auf der Würfelfläche $EFGH$ ist P. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke PGM und AGE gilt:

$$\frac{r}{\overline{GM}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a}$$
$$\overline{GM} = \sqrt{2}\,r$$

In dem rechtwinkligen Dreieck APM gilt dann:

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r}{r}$$
$$\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r = r\cot\alpha$$
$$\sqrt{3}\,a = r(\cot\alpha + \sqrt{2})$$
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 141234
Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y = \log_a(bx + c)$ mit a, b, c reell; $a > 1$ gibt, deren Graph in einem x, y-Koordinatensystem durch die Punkte $(2; 2)$, $(-1; 0)$ und $(0; 1)$ verläuft.
Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a, b, c) an, für die das zutrifft.

Wegen $1 = y(0) = \log_a(c)$ ist $c = a$. Wegen

$$0 = y(-1) = \log_a((1-) \cdot b + c) = \log_a(c - b)$$

ist $c - b = 1$, also $b = c - 1 = a - 1$. Und wegen

$$2 = y(2) = \log_a(2b + c) = \log_a(3a - 2)$$

ist $a^2 = 3a - 2$, also $a^2 - 3a + 2 = 0$ bzw.

$$a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

wobei die Lösung der quadratischen Gleichung mit negativem Vorzeichen der Wurzel entfällt, da sie auf $a = 1$ führt, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also muss $a = c = 2$ und $b = 1$ gelten. Einsetzen dieser Werte bestätigt, dass die entsprechende Funktion durch die drei Punkte verläuft, sodass es genau eine solche Funktion gibt, nämlich die mit den Parametern $(a,b,c) = (2,1,2)$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Zweite Lösung:

Angenommen, es gäbe ein solches Zahlentripel, für das die angegebene Funktion die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt

$$\log_a(2b + c) = 2 \qquad (1)$$
$$\log_a(-b + c) = 0 \qquad (2)$$
$$\log_a c = 1 \qquad (3)$$

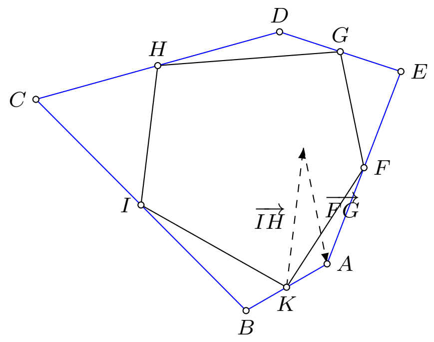
Aus (3) folgt $c = a$, aus (2) entsprechend $b = c - 1$. Daraus und aus (1) erhält man $\log_c(3c - 2) = 2$, also $3c - 2 = c^2$.
Diese Gleichung hat genau die Lösungen $c = 1$ und $c = 2$. Wegen $c = a > 1$ können somit höchstens für $c = 2$ und damit $a = 2$ sowie $b = 1$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.
Tatsächlich gilt für die Funktion $y = \log_2(x + 2)$

$$\log_2(2 + 2) = 2, \quad \log_2(-1 + 2) = 0, \quad \log_2 2 = 1$$

Folglich ist (2, 1, 2) das einzige reelle Zahlentripel, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 5 - 141235
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, dass F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.
Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist.
Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.



Setzen wir $\vec{f}, \vec{g}, ..., \vec{k}$ für die Ortsvektoren von F, G, H, I, K und analog $\vec{a}, \vec{b}, ..., \vec{e}$ für die gesuchten Punkte A, B, C, D, E, F des "Mittenfünfecks".

Damit z.B. K Mittelpunkt von A und B ist, muss gelten

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \vec{k} \tag{1}$$

Für die anderen Punkte wird damit

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \vec{i} \quad ; \quad \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} = \vec{h} \quad ; \quad \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} = \vec{g} \quad ; \quad \frac{\vec{e}+\vec{a}}{2} = \vec{f} \tag{2,3,4,5}$$

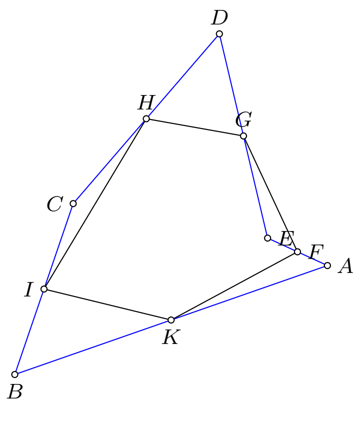
Addition und Subtraktion dieser Gleichungen in der Form (1)-(2)+(3)-(4)+(5) ergibt

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{e}}{2} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

und da die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ sich in der Summe aufheben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

Damit kann der Punkt A konstruiert werden, in dem an K die Vektoren $\overrightarrow{IH}$ und $\overrightarrow{GF}$ addiert werden. (siehe Abbildung). Die Punkte B, C, D, E ergeben sich durch anschließende Punktspiegelung an den Punkten K, I, H und G.
Beispiel 2:



Nachweis:
Für den Punkt A wird nach oben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

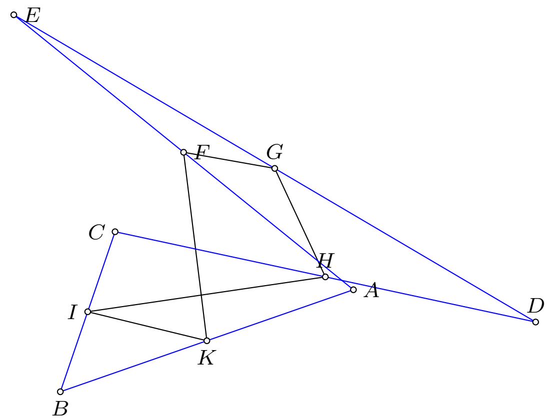
sowie für den Punkt B in analoger Weise

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}$$

und somit

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f} + \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}}{2} = \frac{2\vec{k}}{2} = \vec{k}$$

Damit ist K Mittelpunkt von A und B. Für die Punkte F, G, H und I ergibt sich dies in gleicher Weise. Damit erfüllt das Fünfeck $ABCDE$ die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen.
Da jeder Konstruktionsschritt eindeutig ist, ist $ABCDE$ das einzige Fünfeck entsprechend der Aufgabenstellung.
Beispiel 3 (nicht konvexes Ausgangsfünfeck):



Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 6A - 141236A
Ein in einem industriellen Prozess eingebauter Messkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird.
Jede Übertragungseinheit A_i $(i = 1, 2, 3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.
Es sei nun bekannt, dass am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?
Hinweis:
Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.
Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.
a) Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.
b) Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, dass unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

Wir gehen davon aus, dass die Ereignisse einer fehlerhaften Weitergabe des empfangenen Signals für die drei Übertragungseinheiten stochastisch unabhängig voneinander sind.

Das Ausgangssignal von M wird genau dann genauso von R empfangen, wenn entweder keine der Übertragungseinheiten eine fehlerhafte Übertragung des jeweils empfangenen Signals vornimmt, oder aber genau zwei.

Der erste Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - 0{,}01)^3 = 0{,}99^3$ auf.
Für den zweiten Fall gibt es genau drei Möglichkeiten, die beiden fehlerhaft sendenden Übertragungseinheiten auszuwählen und für jede dieser Möglichkeiten dann eine entsprechende Übertragungswahrscheinlichkeit

von $0{,}99 \cdot 0{,}01^2$, sodass sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$P = \frac{99^3 + 3 \cdot 99 \cdot 1^2}{100^3} = \frac{99 \cdot (99^2 + 3)}{10^6} = \frac{99 \cdot 9804}{10^6} = \frac{970596}{10^6} = 0{,}970596 = 97{,}0596\%.$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 141236B
Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x) - 1}$$

für alle reellen x. (1)
a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d.h., dass es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so dass $f(x+q) = f(x)$ für alle reellen x gilt. (2)
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.
Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \cdot \sin^2 x}{c + d \cdot \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

a) Für eine beliebige reelle Zahl x berechnen wir $f(x+2p)$.

$$f(x+2p) = \frac{f(x+p)}{3f(x+p) - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)}{3f(x)-1} - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)-(3f(x)-1)}{3f(x)-1}} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{1}{3f(x)-1}} = f(x).$$

Die Funktion f ist also $2p$-periodisch. Es erfüllt also $q = 2p$ die gewünschte Eigenschaft.

b) Sei p beliebig. Wir wählen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ ungerade ist} \end{cases}.$$

So gilt für alle x mit geradem $[\frac{x}{p}]$

$$\frac{f(x)}{3f(x) - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 1 = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ ungerade ist.

Für alle x mit ungeradem $[\frac{x}{p}]$ gilt

$$\frac{f(x)}{3f(x) - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2} = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ gerade ist.

Aufgabe gelöst von ochen

9.16.4 IV. Runde 1974, Klasse 12

Aufgabe 1 - 141241
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \qquad (1)$$

a) Die Ungleichung (1) ist wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ äquivalent mit

$$\frac{a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc}{abcd} \geq \frac{b^2cd + c^2ad + d^2ab + a^2bc}{abcd}$$
$$a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc \geq a^2bc + b^2cd + c^2ad + d^2ab$$
$$a^2c(d-b) + b^2d(a-c) + c^2a(b-d) + d^2b(c-a) \geq 0$$
$$(d-b)(a^2c - ac^2) + (c-a)(bd^2 + b^2d) \geq 0$$
$$(d-b)(a-c)ac + (c-a)(d-b)bd \geq 0$$
$$(d-b)(c-a)(bd-ac) \geq 0 \qquad (2)$$

Wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt $d - b \geq 0$, $c - a \geq 0$ und $bd - ac \geq 0$.
Daher gilt die Ungleichung (2) und wegen Äquivalenz aller Ungleichungen auch die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$.

b) Aus (2) ergibt sich, dass das Gleichheitszeichen (1) genau dann gilt, wenn $a - c = 0$, d.h. $a = c$, oder $d - b = 0$, d.h. $d = b$, oder $bd - ac = 0$, d.h. $ac = bd$ ist.
Wegen $a \leq b \leq c$ ist $a = c$ gleichbedeutend mit $a = b = c$. Wegen $b \leq c \leq d$ ist $b = d$ gleichbedeutend mit $b = c = d$. Aus $ac = bd$ folgt $a = b$. Wäre $a < b$, so wäre wegen $c \leq d$ auch $ac < bd$.
Ebenso folgt, dass $c = d$ gelten muss. Daher ist $ac = bd$ gleichbedeutend mit $a = b$ und $c = d$.
Notwendig und hinreichend dafür, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt, ist die Bedingung, dass in mindestens zwei der drei Ungleichungen $a \leq b \leq c \leq d$ das Gleichheitszeichen gilt.

Übernommen aus [5]

Zweite Lösung:

Es liegt nahe, folgende Substitutionen vorzunehmen:

$$\frac{a}{b} = u, \quad \frac{b}{c} = v, \quad \frac{c}{d} = w$$

Dann gilt

$$0 < u \leq 1, \quad 0 < v \leq 1, \quad 0 < w \leq 1 \qquad (1)$$

sowie $\frac{a}{d} = \frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{d} = uvw$, und die zu beweisende Aussage ist äquivalent damit, dass unter der Bedingung (1)

$$u + v + w + \frac{1}{uvw} \geq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + uvw$$

gilt, also dass

$$(uvw)^2 - uvw(u+v+w) + vw + wu + uv - 1 \leq 0$$

und dass weiter

$$(vw-1)(wu-1)(uv-1) \leq 0 \qquad (2)$$

ist, was wegen (1) richtig ist. Das Gleichheitszeichen gilt dabei in (*) genau dann, wenn es in (2) steht, also wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:
a) $v = w = 1$, d.h. $b = c = d$;
b) $w = u = 1$, d.h. $a = b$ und $c = d$;
c) $u = v = 1$, d.h. $a = b = c$,
oder, anders ausgedrückt, wenn unter den Zahlen a, b, c, d höchstens zwei verschiedene vorkommen.

Übernommen aus [2]

Aufgabe 2 - 141242
Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Messwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$.
Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Messwerte so verändert werden, dass die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich $180°$ ist.
Es ist zu beweisen, dass für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt.

Wegen $u + v + w = 180° + \delta$ und $(u + x) + (v + y) + (w + z) = 180°$ gilt $x + y + z = -\delta$.
Für $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ ist $S = x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{\delta^2}{3}$.
Sind aber x,y,z beliebige den gegebenen Bedingungen entsprechende Korrekturwerte mit $a = x + \frac{\delta}{3}$, $b = y + \frac{\delta}{3}$, $c = z + \frac{\delta}{3}$ so gilt $a + b + c = 0$ und

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(a - \frac{\delta}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{\delta}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{\delta}{3}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{2}{3}(a + b + c) + \frac{\delta^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{\delta^2}{3}$$

Da a,b,c reelle Zahlen sind, ist $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ und $c^2 \geq 0$ und wir erhalten

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{\delta^2}{3}$$

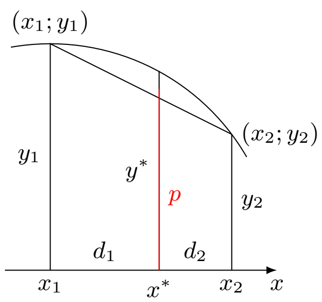
Das Gleichheitszeichen gilt genau da, wenn $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ und $c^2 00$, also $a = b = c = 0$ gilt. Damit ist $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten, wenn $x = -\frac{\delta}{3}$, $y = -\frac{\delta}{3}$ und $z = -\frac{\delta}{3}$ ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 141243
In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(a) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.
Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(b) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.
Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.

Hinweise:
(1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ begrenzten Sehne gelegenen Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.
(2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

(A) ist richtig.
Zum Beweis nehmen wir an, dass f in J streng konkav ist und dass x_1, x^*, x_2 mit $x_1 < x^* < x_2$ drei Abszissenwerte in J seien.
Wir setzen $y_1 = f(x_1)$, $y^* = f(x^*)$, $y_2 = f(x_2)$ und bezeichnen mit p bzw. q die Ordinate des auf der Sehne mit den Endpunkten $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ bzw. des auf der Sehne mit den Endpunkten $\left(x_1, \frac{1}{y_1}\right)$, $\left(x_2, \frac{1}{y_2}\right)$ gelegenen Punktes, dessen Abszisse x^* ist. (siehe Abbildung)



Ferner setzen wir $d_1 = x^* - x_1$, $d_2 = x_2 - x^*$. Dann gilt

$$p - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \qquad (1)$$

$$q - \frac{1}{y_1} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \quad \text{also} \qquad (2)$$

$$p = \frac{y_2 - y_1}{d_1 + d_2} d_1 + y_1 = \frac{d_1 y_2 + d_2 y_1}{d_1 + d_2} \qquad (3)$$

$$q = \frac{d_1 \cdot \frac{1}{y_1} + d_2 \cdot \frac{1}{y_2}}{d_1 + d_2} - \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \qquad (4)$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad \text{also} \qquad (5)$$

$$p > 0 \qquad (6)$$

$$p < y^* \qquad (7)$$

Ferner gilt $d_1 d_2 (y_1 - y_2)^2 \geq 0$, also

$$d_1^2 y_1 y_2 + d_1 d_2 y_1^2 + d_1 d_2 y_2^2 + d_2^2 y_1 y_2 \geq d_1^2 y_1 y_2 + 2 d_1 d_2 y_1 y_2 + d_2^2 y_1 y_2$$

$$(d_1 y_2 + d_2 y_1)(d_1 y_1 + d_2 y_2) \geq (d_1 + d_2)^2 y_1 y_2$$

also wegen (3), (4), (5), (6) und (7)

$$q = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \geq \frac{d_1 + d_2}{d_1 y_2 + d_2 y_1} = \frac{1}{p} > \frac{1}{y^*}$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also in J streng konvex, w.z.b.w.

(B) ist falsch.
Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels, nämlich einer Funktion f, die in einem Intervall J nur positive Funktionswerte annimmt und dort streng konvex ist, während die Funktion $\frac{1}{f}$ in diesem Intervall streng konkav ist.
Eine solche Funktion ist z.B. die im Intervall $J = (0, +\infty)$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Diese Funktion nimmt wegen $\frac{1}{x} > 0$ im Intervall J nur positive Funktionswerte an.
b) Diese Funktion ist in J streng konvex. Für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ gilt nämlich

$$(x^* - x_1)(x_2 - x^*) > 0, \quad \text{also}$$

$$-{x^*}^2 + x_1 x^* + x_2 x^* > x_1 x_2, \quad \text{d.h.} \quad -x^* + x_1 + x_2 > \frac{x_1 x_2}{x^*}$$

Daher gilt für die Ordinate p eines auf der Sehne durch $\left(x_1; \frac{1}{x_1}\right)$, $\left(x_2; \frac{1}{x_2}\right)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x^*:

$$p = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1 + x_2}{x_1 x_2} > \frac{1}{x^*}$$

Daraus folgt, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ in J streng konvex ist.

c) Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist aber wegen $\frac{1}{f(x)} = x$ nicht streng konkav. Es gilt nämlich sogar für drei beliebige Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$, dass die Ordinate q eines auf der Sehne durch $(x_1; x_1)$, $(x_2; x_2)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x gleich x ist, so dass also insbesondere $\frac{1}{f}$ nicht streng konkav ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 141244
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen gelten:

$$24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0 \qquad (1) \quad \text{und}$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \qquad (2)$$

Angenommen, für ein Paar $(x; y)$ gelten (1) und (2). dann setzen wir $u = x - 1$ und $v = y + 1$, so dass (1) äquivalent mit

$$24(u+1)^2 - 25(u+1)(v-1) - 73(u+1) + 25(v+1) - 35 = 0$$
$$24u^2 - 84 - 25uv = 0 \qquad (3)$$

ist, während (2) mit

$$u^2 - v^2 = 7 \qquad (7)$$

äquivalent ist, Nun setzen wie $a = u + v$, $b = u - v$ und damit $u = \frac{a+b}{2}$, $v = \frac{a-b}{2}$. Dann geht (4) über in die äquivalente Gleichung $a \cdot b = 7$ (5), während aus 83) die Gleichung

$$6a^2 + 12ab + 6b^2 - 84 - \frac{25}{4}a^2 + \frac{25}{4}b^2 = 0$$

folgt. Hieraus erhält man in Verbindung mit (5)

$$-\frac{1}{4}a^2 + 84 + \frac{49}{4}b^2 - 84 = 0 \qquad ; \qquad a^2 = 49b^2 \qquad (6)$$

Nun haben nach (5) a und b dasselbe Vorzeichen, und darum folgt aus (6) $a = 7b$ und hieraus $a^2 = 7ab = 49$ (7). Es kommen also höchstens $(a; b) = (7; 1)$ und $(a; b) = (-7; -1)$ als Lösungen von (7) und (5) in Frage.
Wegen $x = u + 1 = \frac{a+b}{2} + 1$, $y = v - 1 = \frac{a-b}{2} - 1$ können daher höchstens mit $(x; y) = (5; 2)$ und $(x; y) = (-3; -4)$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt werden. Die Probe bestätigt die gefundenen Lösungen.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 141245
Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet.
Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.
a) Man zeige, dass es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.
b) Man beweise, dass für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^* zusammenfällt.

a) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Dieses Tetraeder ist die Vereinigung der vier (durchschnittsfremden) Tetraeder $A_1A_2A_3P$, $A_1A_2A_4P$, $A_1A_3A_4P$, $A_2A_3A_4P$. Für die Volumina gilt:

$$\frac{1}{3}Gh = V_{A_1A_2A_3A_4} = V_{A_1A_2A_3P} + V_{A_1A_2A_4P} + V_{A_1A_3A_4P} + V_{A_2A_3A_4P} =$$
$$= \frac{1}{3}G_1x_1 + \frac{1}{3}G_2x_2 + \frac{1}{3}G_3x_3 + \frac{1}{3}G_4x_4$$

wobei G das Maß der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_4$, $G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecke $A_1A_3A_4$, $G_4 = G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_2A_3A_4$ ist (die Gleichheit gilt, da es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt) und x_1, x_2, x_3, x_4 die Abstände des Punktes P von den Tetraederseiten in der entsprechenden Reihenfolge sind.

Wegen der Inhaltsgleichheit der Seitenflächen folgt hieraus

$$h = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad (*)$$

Angenommen, es existiert ein Punkt P^+ mit den geforderten Eigenschaften. Dann liegt P^+ auf der zu $A_1A_2A_3$ im Abstand $\frac{h}{4}$ liegenden parallelen Ebene ϵ_1, deren Durchschnitt mit dem Tetraeder nicht leer ist, analog auf der zu $A_1A_2A_4$ liegenden Ebene ϵ_2 und da diese Ebenen nicht zueinander parallel sind, auf der Schnittgeraden g von ϵ_1 und ϵ_2, die ihrerseits parallel zu A_1A_2 ist.

Die in analoger Weise zu $A_1A_3A_4$ parallele Ebene ϵ_3 schneidet demzufolge g in genau einem Punkt P_s.

Jeder Punkt P, der den Bedingungen der Aufgabe genügt, muss notwendig aus ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 liegen, d.h. aber, er muss mit P_s zusammenfallen.

Der Punkt P_s hat von $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ und $A_1A_3A_4$ die Abstände $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{h}{4}$; wegen (*) ist dann jedoch $x_4 = \frac{h}{4}$ und P_s ist der gesuchte Punkt P^+.

b) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des Tetraeders, x_1, x_2, x_3, x_4 seien wie in a) die Abstände zu den Tetraederseiten.

Da x_1, x_2, x_3, x_4 nichtnegative Zahlen sind, gilt die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Wegen (*) ist die rechte Seite der Ungleichung gleich $\frac{1}{4}$.

Das Gleichheitszeichen wird bekanntlich genau dann angenommen, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, d.h., wenn $x_i = \frac{h}{4}$, $i = 1{,}2{,}3{,}4$ ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $P \equiv P^+$ ist.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6A - 141246A
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.
Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben.
Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).
Man beweise:
Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen "möglichen Fall".
Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein "günstiger Fall". Die Anzahl aller "möglichen Fälle" sei a_n genannt, die Anzahl aller "günstigen Fälle" g_n.
Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Die Anzahl aller Möglichkeiten, n Briefe an n Adressaten zu verteilen, ist $n!$. Durch vollständige Induktion beweisen wir:
Die Anzahl g_n aller günstigen Fälle ist

$$g_n = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n + (-1)^3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n + ... + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^n \qquad (1)$$

I. Für $n = 2$ ist unter allen Möglichkeiten genau eine günstig, also ist $g_2 = 1 = (-1)^2$.
Für $n = 3$ sind unter allen Möglichkeiten

$$(1 \to 1{,}2 \to 2, 3 \to 3), \quad (1 \to 1{,}2 \to 3, 3 \to 2), \quad (1 \to 2{,}2 \to 1, 3 \to 3)$$

$$(1 \to 2{,}2 \to 3, 3 \to 1), \quad (1 \to 3{,}2 \to 1, 3 \to 2), \quad (1 \to 3{,}2 \to 2, 3 \to 1)$$

genau zwei (die vierte und die fünfte) günstig, also gilt: $g_3 = 2(-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3$.

II. Für ein $n \geq 4$ sei die Richtigkeit von (1) für alle ν mit $2 \leq \nu < n$ statt n vorausgesetzt, dann folgt:
Dafür, dass Brief 1 nicht an Adressat 2 gelangt, gibt es genau $n - 1$ Möglichkeiten. In jeder von ihnen lässt sich die Nummerierung des Paare aus Adressat und zugehörigem Brief so wählen, dass Brief 1 an Adressat 2 gelangt. Nun gibt es genau folgende Möglichkeiten:

a) Brief 2 gelangt an Adressat 1, und die Briefe $3, 4, ..., n$ werden so an die Adressaten 3,4,...,n verteilt, dass kein Brief an den gleich nummerierten Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-2} Möglichkeiten.

b) Brief 2 gelangt an einen der Adressaten 3,4,...,n, der etwa mit k bezeichnet sei, und die Briefe 3,4,...,n werden so an die von k verschiedenen unter den Adressaten $1, 3,4, ...,n$ verteilt, dass kein Brief an der gleich nummerierten Adressaten gelangt.

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung:
Man stelle eine neue Zuordnung zwischen den Briefen 2,3,4,...,n und den Adressaten 1,3,4,...,n her, nämlich $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 4$, ..., $n \leftrightarrow n$, und fordere nun eine Zustellung der Briefe 2,3,4,...,n an je genau einen der Adressaten 1,3,4,...,n, bei der kein Brief an den ihm gemäß der neuen Zuordnung gehörigen Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-1} Möglichkeiten.

Damit ergibt sich $g_n = (n-1)(g_{n-2} + g_{n-1})$, nach Induktionsannahme also

$$g_n = (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-2) + ... + (-1)^{n-3} \cdot (n-2) + (-1)^{n-2} + (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1) + ...$$
$$... + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)(n-1) + (-1)^{n-2} \cdot (n-1) + (-1)^{n-1}] =$$
$$= (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-2)n + ... + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)n + (-1)^{n-2} \cdot n + (-1)^{n-1}] =$$
$$= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1)n + ... + (-1)^{n-3}(n-2)(n-1)n + (-1)^{n-2}(n-1)n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

und damit die Richtigkeit von (1) für n.
Damit ist (1) durch vollständige Induktion bewiesen, und es ergibt sich

$$q_n = \frac{g_n}{n!} = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

w.z.b.w.

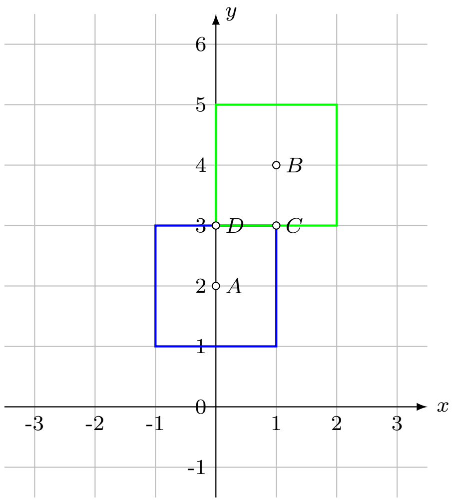
Übernommen aus [5]

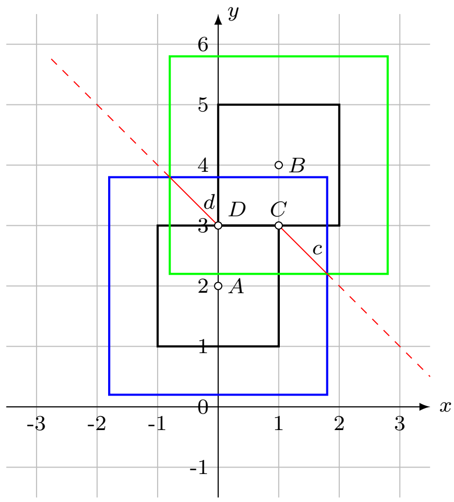
Aufgabe 6B - 141246B
In der Ebene sei der "Abstand" zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:
Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr "Abstand"

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0; 2)$ und $B(1; 4)$ gleich weit entfernt sind.

Der so definierte Abstand zwischen zwei Punkten ist das Maximum aus horizontalem und vertikalem Abstand. Das heißt doch nichts anderes, als dass die Punkte, die einen konstanten Abstand zu einem gegebenen Punkt A haben sollen, ein Quadrat darstellen, in dessen Mittelpunkt sich der Punkt A befindet. Man muss also zwei gleich große Quadrate um die zwei Punkte A und B konstruieren. Die gemeinsamen Punkte beider Quadrate sind dann die gesuchte Lösungsmenge.





Die beiden kleinstmöglichen Quadrate sind die in der linken Grafik gezeigten. Sie teilen sogar eine ganze Strecke, nämlich CD. Lässt man die Quadrate nun größer werden, haben sie nur noch zwei Schnittpunkte (rechtes Bild).

Angefangen bei den kleinstmöglichen Quadraten in der vorigen Skizze, liegen die Schnittpunkte der größeren Quadrate auf den Diagonalen c und d (rot dargestellt). Die Quadrate kann man beliebig groß werden lassen. Daher kann man die Lösungsmenge wie folgt angeben:

$$M = \begin{cases} y = 3 - x & x < 0 \\ y = 3 & 0 \leq x \leq 1 \\ y = 4 - x & x > 1 \end{cases}$$

Oder zusammengefasst in einer Gleichung:

$$y = \frac{7}{2} - x - \frac{1}{2}|x - 1| + \frac{1}{2}|x|$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

9.17 XV. Olympiade 1975

9.17.1 I. Runde 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151211
An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, dass es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

Sei S einer von sechs beliebig herausgegriffenen Schülern S, A, B, C, D, E der genannten Schule. Wir nehmen zunächst an, dass S bereits gegen wenigstens drei der restlichen fünf Schüler, etwa gegen A, B, C, spielte.

Entweder gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S bereits spielte, zwei, die ebenfalls bereits gegeneinander antraten (etwa A, B), oder zwischen diesen drei Schülern wurde noch kein Spiel ausgetragen.

Im ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, von denen bereits jeder gegen jeden gespielt hat, im zweiten Fall hat zwischen den drei Schülern A, B, C noch kein Spiel stattgefunden. In jedem dieser Fälle ist damit die behauptete Aussage bewiesen. Hat andererseits S gegen keine drei, der Schüler A, B, C, D, E gespielt, dann gibt es unter ihnen drei, etwa A, B, C, gegen die er noch nicht antrat.

Analog gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S nicht antrat, entweder zwei, die ebenfalls noch nicht gegeneinander antraten (etwa A, B), oder von diesen drei Schülern spielte bereits jeder gegen jeden. In ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen wurde, im zweiten Fall hat von den drei Schülern A, B, C bereits jeder gegen jeden gespielt. Da keine weiteren Fälle möglich sind, ist die behauptete Aussage damit in jedem Falle bewiesen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 151212
Man beweise, dass es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.

Bemerkung: Eine Halbkugel(-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

Durch den Mittelpunkt der Kugel und zwei der drei ausgewählten Punkte gibt es stets eine Ebene. Durch diese werden zwei Halbkugeln bestimmt, die die gesamte Kugeloberfläche überdecken.

Daher liegt der dritte ausgewählte Punkt in (wenigstens) einer dieser beiden Halbkugeln. Diese Halbkugel enthält aber (auf ihrer Randlinie) auch die beiden zuerst genannten Punkte.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 151213
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \qquad (11)$$
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \qquad (12)$$
$$\frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{20} \quad \text{gilt.} \qquad (13)$$

Angenommen (x,y,z) ist Lösung des Gleichungssystems. Dann erhält man aus (1), (2), (3) durch Addition und Halbierung

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{47}{60} \qquad (4)$$

Subtrahiert man (1) bzw. (2) bzw. (3) von (4), so erhält man

$$\frac{1}{y+z} = \frac{1}{5} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+z} = \frac{1}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}$$

woraus $x+y=3$, $y+z=5$, $x+z=4$ folgt. Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt nach Division durch 2

$$x+y+z=\frac{1}{2}(3+4+5)=6$$

woraus sich analog zum oben dargelegten Vorgehen

$$x=(x+y+z)-(y+z)=1 \qquad ; \qquad y=2 \qquad ; \qquad z=3$$

ergibt. Daher kann höchstens das Tripel (1,2,3) Lösung sein. Tatsächlich ist

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \qquad ; \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15} \qquad ; \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 151214
Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.

Man beweise, dass keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.

Jedes $z \in M$ hat die Quersumme $g(z)=1+2+3+4+5+6+7=28$ und lässt daher bei Division durch 3 und durch 9 den Rest 1.

Angenommen, $z_1=a_0+a_1\cdot 10^1+...+a_6\cdot 10^6 \in M$ wäre durch $z_2=b_0+b_1\cdot 10^2+...+b_6\cdot 10^6 \in M$ teilbar $((a_0,a_1,...,a_6)$ und $(b_0,b_1,...,b_6)$ zwei verschiedene Anordnungen der Ziffern 1,2,...,7), d.h., es gäbe eine ganze Zahl k mit $z_1=kz_2$.

Wegen $z_1>0, z_2>0$ folgte dann $k>0$, wegen $z_1\neq z_2$ folgte $k\neq 1$. Ferner wäre

$$kz_2=z_1\leq 765431<7\cdot 10^6+7\cdot 10^5<7\cdot(10^6+2\cdot 10^5)<7\cdot 1234567\leq 7z_2$$

also $k\leq 7$.
Da je zwei Zahlen z_1 und z_2 aus M bei Division durch 9 den gleichen Rest lassen, müsste die Zahl $z_1-z_2=(k-1)\cdot z_2$ durch 9 teilbar sein. Das steht im Widerspruch dazu, dass z_2 nicht durch 3 und $k-1$ (als eine der Zahlen $2-1,...,7-1$) nicht durch 9 teilbar wäre.

Folglich ist keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar.

Übernommen von [5]

9.17.2 II. Runde 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151221
a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} \cdot b + c_2 a^{n-2} \cdot b^2 + ... + c_n b^n \qquad (1)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0 + c_1 + c_2 = 79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.
b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass aus (1) durch die Ersetzung $a = x^2, b = \frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n = c_0 x^{k_0} + c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + ... + c_n x^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i = 0$ hat, d.h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.
b) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

a) Für festes n gilt $c_0 = \binom{n}{0} = 1$, $c_1 = \binom{n}{1} = n$ und $c_2 = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Es ist also die Gleichung

$$1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) = 79$$

zu lösen. Nach der Multiplikation mit 2 und der Subtraktion von 79 erhalten wir die quadratische Gleichung

$$n^2 + n + 156 = 0.$$

Diese lässt sich mit der pq-Formel lösen und wir erhalten die Lösungen

$$n_1 = 12, \quad n_2 = -13.$$

Offenbar ist hier nur $n = 12$ sinnvoll. Dies ist die einzige Zahl, die die in a) gegebene Bedingung erfüllt.

b) Das Monom x^0 entsteht, wenn es eine Zahl k gibt, so dass k mal x^2 und $n-k$ mal $\frac{1}{x}$ mit einander multipliziert werden und

$$2k + (-1)(n-k) = 0 \quad (2)$$

ist. Da keine Summanden negativ eingehen, kann es auch nicht wieder verschwinden. Gleichung (2) ist also auch die einzige Bedingung, der n genügen muss. Außerdem ist sie äquivalent zu $n = 3k$. Es muss also n durch 3 teilbar sein.

c) Es erfüllt 12 als einzige natürliche Zahl sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 2 - 151222
Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

Es sei $ABCDS$ eine Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist und deren Spitze S sei.
Die senkrecht auf der Grundfläche stehenden Seitenflächen haben eine Pyramidenkante gemeinsam, da sie sonst parallelen Ebenen angehören würden, was bei einer Pyramide nicht möglich ist. Diese zur Grundfläche senkrechte Pyramidenkante sei SD.
Daher sind für die zur Grundfläche nicht senkrechten Seitenflächen BCS und ABS die Neigungswinkel gleich den Winkeln $\angle SAD$ und $\angle SCD$. Außerdem ist die Länge von SD gleich der Länge h der Höhe der

Pyramide.

O.B.d.A. gelte nun $\angle SAD = \alpha, \angle SCD = \beta$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} h = SD &= AD \cdot \tan\alpha \qquad (1) \\ &= CD \cdot \tan\beta \qquad (2) \\ Q &= AD \cdot CD \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Multiplikation und anschließendem Einsetzen von (3) und Radizieren:

$$h^2 = AD \cdot CD \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta \qquad ; \qquad h = \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3}Qh = \frac{1}{3}Q\sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 151223
Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren.
An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

Wenn die erste Abteilung m Mathematiker entsendet, dann muss sie $6-m$ Ingenieure entsenden. Umgedreht muss die zweite Abteilung $6-m$ Mathematiker und m Ingenieure entsenden. Dabei ist m ganzzahlig und mindestens 0, aber höchstens 5, da es in der ersten Abteilung nur 5 Mathematiker gibt.

Es gibt dann $\binom{5}{m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{5}{m}$ Möglichkeiten die Personen aus ihren entsprechenden Gruppen auszuwählen. Die gesuchte Anzahl ist die Summe aller dieser Produkte über m=0 bis 5:

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{5}{m}^2 \cdot \binom{7}{6-m}^2 = \binom{5}{0}^2 \cdot \binom{7}{6}^2 + \binom{5}{1}^2 \cdot \binom{7}{5}^2 + \binom{5}{2}^2 \cdot \binom{7}{4}^2 +$$

$$+\binom{5}{3}^2 \cdot \binom{7}{3}^2 + \binom{5}{4}^2 \cdot \binom{7}{2}^2 + \binom{5}{5}^2 \cdot \binom{7}{1}^2$$

$$= 1^2 \cdot 7^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 10^2 \cdot 35^2 + 5^2 \cdot 21^2 + 1^2 \cdot 7^2 = 2 \cdot (7^2 + 105^2 + 350^2) = 2 \cdot (49 + 11025 + 122500) = 267148$$

Es gibt also insgesamt 267148 Möglichkeiten die Teilnehmer auszuwählen.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 151224
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \qquad (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \qquad (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \qquad (3) \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

Zunächst gilt

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2}((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)) = \frac{1}{2}(a^2 - a^2) = 0$$

Daraus folgt unmittelbar

$$a^3 = (x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz)+3y(xy+yz)+3z(xz+yz)+6xyz =$$
$$= a^3 + 3x(-yz) + 3y(-xz) + 3z(-xy) + 6xy = a^3 - 3xyz$$

und damit weiter $xyz = 0$, d.h., mindestens eine der 3 Variablen x,y,z muss 0 sein.
Sei nun o.B.d.A. $z = 0$. Aus

$$2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = a^2 - a^2 = 0$$

folgt aber weiter, dass dann auch x oder y den Wert 0 haben muss. Ist etwas $y = 0$, so ist dann $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ tatsächlich eine Lösung und alle insgesamt 3 Lösungen erhält man daraus durch eine einfache Vertauschung der Variablen x,y,z.

Aufgabe gelöst von weird

9.17.3 III. Runde 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151231
Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.
Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest.
Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ.
Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

Eine fünfstellige natürliche Zahl Z mit identischen Ziffern kann folgendermaßen dargestellt werden

$$Z = x + 10x + 100x + 1000x + 10000x = 11111x \qquad (1)$$

wobei x eine einstellige natürliche Zahl ist ($0 < x < 10$). Da analoge Beziehungen auch für drei- und vierstellige natürliche Zahlen mit identischen Ziffern gelten,kann man die Divisionsaufgabe A folgendermaßen schreiben

$$11111x = 16 \cdot 1111y + R \qquad (2)$$

wobei $0 < x < 10$, $0 < y < 10$, $0 < R < 1111y$ (3) gilt und sowohl x als auch y eine einstellige natürliche Zahl ist. Der Rest R ist eine natürliche Zahl. Eine zu (2) äquivalente Beziehung kann man auch für die Divisionsaufgabe A' aufstellen

$$1111x = 16 \cdot 111y + (R - 2000) \qquad (4)$$

wobei zusätzlich zu (3) auch $0 < (R - 2000) < 111y$ (5) erfüllt sein muss. Stellt man nun sowohl (2) als auch (4) nach R um und setzt die so gewonnen Beziehungen gleich, so erhält man

$$(11111 - 1111)x = 16 \cdot (1111 - 111)y + 2000 \qquad (6)$$

Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen

$$x = \frac{8}{5}y + \frac{1}{5} \qquad (7)$$

Setzt man nun die 9 verschiedenen Werte für y ein [vergleiche (3)], so stellt man fest, dass sich nur für $y = 3$ und für $y = 8$ eine natürliche Zahl für x ergibt. Da das Ergebnis für x bei $y = 8$ nicht einstellig ist, gibt es nur ein mögliche Kombination: $x = 5, y = 3$.
Einsetzen in (2) ergibt unmittelbar

$$55555 = 16 \cdot 3333 + R \Rightarrow R = 2227 \qquad (8)$$

womit gezeigt wäre, dass alle Forderungen aus (3) und (5) erfüllt sind.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Divisionsaufgabe A gibt; der Dividend ist dabei durch 55555, der Divisor durch 3333 gegeben.

Aufgabe gelöst von Arnd Hübsch

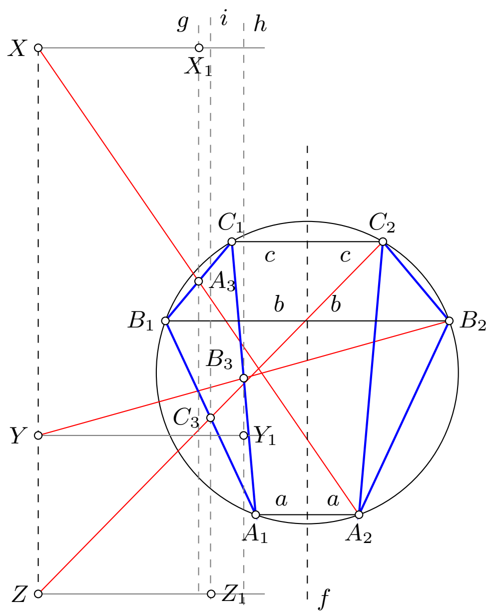
Aufgabe 2 - 151232
Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine "Einheit von M" bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung $\frac{x}{e} \in M$ gilt.
(So besitzt z.B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten +1 und -1, während z.B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z.B. +1 und -1 Einheiten.
a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.
b) Man beweise, dass M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Man sieht per Induktion leicht: Ist e eine Einheit von M, dann sind auch alle Potenzen e^n für $n \in \mathbb{N}$ Einheiten von M. Daher genügt es eine einzige Einheit $e \neq \pm 1$ anzugeben um zu zeigen, dass es unendlich viele verschiedene gibt.
Wir zeigen, dass $3+2\sqrt{2}$ eine Einheit von M ist. Für $a+b\sqrt{2} \in M$ gilt nämlich:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = (3a-4b)+(3b-2a)\sqrt{2} \in M.$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3 - 151233
Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegende Punkte.
Man beweise, dass X, Y und Z auf ein und derselben Geraden liegen.



Voraussetzung: A_3 halbiert B_1C_1 und A_2X, B_3 halbiert A_1C_1 und B_2Y, C_3 halbiert A_1B_1 und C_2Z
Behauptung: X, Y und Z liegen auf derselben Gerade

Beweis: Es werden folgende zu den parallelen Sehnen senkrechte Geraden eingeführt:
f durch den Kreismittelpunkt, g durch A_3, h durch B_3, i durch C_3.
Allgemein werde der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g durch $d(gP)$ bezeichnet.
a, b bzw. c sind wie folgt definiert: $a := d(fA_2)$, $b := d(fB_2)$, $c := d(fC_2)$. Da der Durchmesser (hier durch f repräsentiert) eines Kreises senkrecht stehende Sehnen halbiert, gilt ebenfalls $d(fA_1) = a$, $d(fB_1) = b$, $d(fC_1) = c$.
Mit der Voraussetzung lässt sich nun der Abstand von A_3, B_3 und C_3 zu f ausdrücken:

$$d(fA_3) = \frac{d(fB_1)+d(fC_1)}{2} = \frac{b+c}{2}$$

und analog

$$d(fB_3) = \frac{a+c}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad d(fC_3) = \frac{a+b}{2}$$

Schließlich ergeben sich nun für die Abstände der Punkte X, Y, Z zu f folgende Gleichungen:

$$d(fX) = d(gX)+d(fA_3) = d(gA_2)+d(fA_3) = a+d(fA_3)+d(fA_3) = a+2\cdot\frac{b+c}{2} = a+b+c$$

$$d(fY) = d(hY)+d(hB_3) = d(hB_2)+d(fB_3) = b+d(fB_3)+d(fB_3) = b+2\cdot\frac{a+c}{2} = a+b+c$$

$$d(fZ) = d(iZ) + d(iC_3) = d(iC_2) + d(fC_3) = c + d(fC_3) + d(fC_3) = c + 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b + c$$

Damit liegen die drei Punkte X, Y und Z auf derselben Seite einer Geraden (f) und haben denselben Abstand zu ihr. Daraus folgt, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen (die parallel zu f verläuft). q.e.d.

Aufgabe gelöst von Felix Kaschura

Aufgabe 4 - 151234
Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$

darstellen lässt.
Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad \text{alle} \quad a_m = ... = a_0 = 0$$

verschieden ist.

Es seien $f_1(x) = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$ und $f_2(x) = \frac{u_2(x)}{v_2(x)}$ echt gebrochen rationale Funktionen, wobei für $i = 1{,}2$ die Polynome u_i den jeweiligen Grad z_i und die Polynome v_i den jeweiligen Grad n_i haben, wobei jeweils $z_i < n_i$ gilt.

Dann ist
$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{u_1(x) \cdot v_2(x) + u_2(x) \cdot v_1(x)}{v_1(x) \cdot v_2(x)}$$

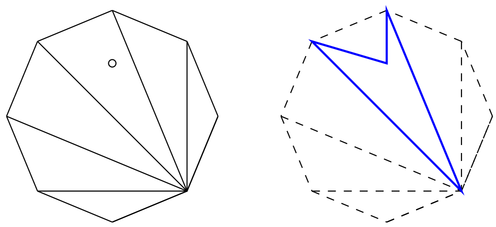
Das Nenner-Polynom besitzt den Grad $n_1 + n_2$, während das Zähler-Polynom höchstens den Grad $max(z_1 + n_2, z_2 + n_1) < n_1 + n_2$ besitzt, sodass auch die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ in jedem Fall echt gebrochen ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 151235
In der Ebene mögen n Punkte ($n \geq 4$) so gelegen sein, dass je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.
Man beweise, dass dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Wir betrachten die konvexe Hülle aller n Punkte. Diese bildet ein konvexes k-Eck mit $k \leq n$. Gilt $k = n$, sind die n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks und wir sind fertig.

Nehmen wir also an, es gelte $k < n$. Wir triangulieren unser k-Eck, indem wir einen der Eckpunkte des k-Ecks auswählen und ihn mit allen anderen Eckpunkten durch Strecken verbinden.



Diese Strecken befinden sich alle im k-Eck, da dieses konvex ist. Wir erhalten $k-2$ Dreiecke. Da $k < n$ ist, gibt es einen der n Punkte, welches sich im Inneren oder auf einer Seite eines der Dreiecke befindet.

Die Eckpunkte des Dreiecks und der Punkt im Inneren oder auf der Seite des Dreiecks bilden aber die Eckpunkte eines konkaven oder entarteten Vierecks. Also war unsere Annahme falsch und es muss $k = n$ gelten.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 6A - 151236A
Gegeben seien n Punkte einer Ebene ($n > 0$), von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, dass es keine drei Punkte gibt, von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, dass sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken gilt:

$$Z_v \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

Man zeige ferner, dass sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.
Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

Der Einfachheit wegen zählen wir die Verbindungsstrecken doppelt, indem Verbindungen $P_1 - P_2$ und $P_2 - P_1$ als verschiedene Verbindungen gezählt werden. Die Behauptung der Aufgabenstellung wird damit zu $Z \leq \frac{n^2}{2}$ für gerade n, und $Z \leq \frac{n^2-1}{2}$ für ungerade n; kurz also $Z \leq [\frac{n^2}{2}]$ für alle n.

Wir betrachten eine Konfiguration gemäß der Aufgabenstellung und einen Punkt P_1 mit der höchsten Anzahl a an Punkten, mit denen er verbunden ist, bezeichne diese mit P_2,...,P_{a+1}. Zwischen keinem der Punkte, mit denen P_1 verbunden ist, kann es eine Verbindungslinie geben (da sonst ein Dreieck entstünde). Damit ist jeder von P_2,...,P_{a+1} mit maximal $n-a$ Punkten verbunden.

Betrachte nun die übrigen $n-a-1$ Punkte. Jeder von ihnen ist mit maximal a Punkten verbunden (wegen der Maximalität von a). Insgesamt haben wir also höchstens $Z = a + a(n-a) + (n-a-1)a = 2a(n-a)$ Verbindungen, wobei a nur ganzzahlige Werte von 0 bis $n-1$ annehmen kann. Man sieht leicht, dass Z maximal ist, wenn der Betrag der Differenz von a und $n-a$, d.h. $|n-2a|$, kleinstmöglich ist, und dies ist der Fall für $a = [\frac{n}{2}]$. Das liefert $Z \leq 2[\frac{n}{2}](n - [\frac{n}{2}])$.
Für gerade n ist dies $Z \leq \frac{n^2}{2}$ und für ungerade n ist es $Z \leq 2\frac{n-1}{2}(n - \frac{n-1}{2}) = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}$, was die Behauptung zeigt.

Gleichheit wird für folgende Konfiguration angenommen:
Wähle $a = [\frac{n}{2}]$ und verbinde P_1 mit P_2,...,P_{a+1}. Verbinde nun jeden von P_2,...,P_{a+1} mit jedem der übrigen Punkten P_{a+2},...,P_n. Das ergibt wie oben $2a(n-a)$ Verbindungen, was Gleichheit in der Ungleichung für Z entspricht.
Bei dieser Konfiguration entsteht kein Dreieck, da es sowohl zwischen keinen zwei der Punkte P_2,...,P_{a+1} als auch zwischen keinen zwei der Punkte P_{a+2},...,P_n eine Verbindungslinie gibt, und P_1 nur mit den Punkten P_2,...,P_{a+1} verbunden ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6B - 151236B
Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte.
Bei der Division dieses Polynoms durch $(x-p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x-q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$?

Sei $R(x)$ das Polynom, dass bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x-p)(x-q)$ entsteht. Da $(x-p)(x-q)$ den Grad 2 hat, kann R maximal den Grad 1 haben. Es gibt weiter Polynome P_1,P_2,P_3 mit

$$P(x) = (x-p)P_1(x) + r = (x-q)P_2(x) + s = (x-p)(x-q)P_3(x) + R(x).$$

Somit folgt

$$P(p) = r = R(p) \quad \text{und} \quad P(q) = s = R(q).$$

Da R höchstens den Grad 1 hat, ist es damit eindeutig bestimmt und es gilt

$$R(x) = \frac{s-r}{q-p}(x-p) + r.$$

Aufgabe gelöst von ochen

9.17.4 IV. Runde 1975, Klasse 12

Aufgabe 1 - 151241
Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so dass $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt.
Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

Eine Folge $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... wird genau dann durch ein Polynom k-ten Grades mit $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ beschrieben, wenn ihre Differenzenfolge $P'(0) := P(1) - P(2)$, $P'(1) := P(2) - P(1)$, ... durch ein Polynom $(k-1)$-sten Grades beschrieben wird.

Angewendet auf die Zahlenwerte der Aufgabe erhält man:

$$P'(0) = -55, \quad P'(1) = 46, \quad P'(2) = 27, \quad P''(0) = 101, \quad P''(1) = -19$$

also genügt kein Polynom zweiten Grades $P'''(0) = -120$.
Setzt man also nun P''' mit dem Wert von $P'''(0)$ identisch fort, erhält man entsprechend ein kubisches Polynom für P mit den geforderten Anfangswerten.
Insbesondere ergibt sich

$$P'''(1) = -120, \quad P'''(2) = -120; \quad P''(2) = -139, \quad P''(3) = -259;$$

$$P'(3) = -112, \quad P'(4) = -371; \quad P(4) = -20 \quad \text{und} \quad P(5) = -391$$

Bemerkung: Die Funktion P' ist die "diskrete Ableitung" der Funktion P.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:
Das Polynom hat die Form $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mit den angegebenen Bedingungen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 &= 74 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 19 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 65 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 92 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht a_0,a_1,a_2,a_3 bestimmen und erhält $P(x) = -20x^3 + 110{,}5x^2 - 145{,}5x + 74$. Damit errechnet man $P(4) = -20$ und $P(5) = -391$.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 151242
Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:
Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

Da $f(0) = 4 > 0$ und wegen $a > 0$, $f(2) = -8a < 0$ gilt und die Funktion f stetig ist, besitzt f im Intervall $0 < x < 2$ wenigstens eine reelle Nullstelle.
Da für alle $x > 0$ sicher $f(x) = -2x - 3ax^2 < 0$ ist, folgt, dass f für alle positive x streng monoton fallend ist. Somit liegt im Intervall $0 < x < 2$ genau eine Nullstelle von f. Es genügt daher, $2 - ar > 0$ zu betrachten.

Im Intervall $2 - ar < x < 2$ liegt genau dann eine Nullstelle von f, wenn für alle positiven a: $f(2 - ar) > 0$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} f(2-ar) &= 4 - (2-ar)^2 - a(2-ar)^3 \\ &= a[a^3r^2 + ar(12-r) - 6a^2r^2 - 4(2-r)] \end{aligned}$$

für alle positiven a genau dann größer als null, wenn für alle positiven a

$$g(a) = a^3r^3 + ar(12 - r) - 6a^2r^2 - 4(2 - r) > 0$$

ausfällt. Ist nun $r > 0$ eine reelle Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so gilt:

$$\lim_{a\to 0} g(a) = 4r - 8 \geq 0$$

Das bedeutet $r \geq 2$.
Umgekehrt hat auch jedes $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft. Für $r = 2$ ist nämlich wegen

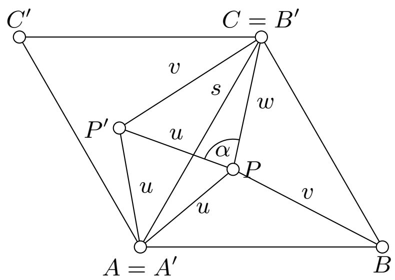
$$\begin{aligned} \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &> 0 \\ a^2 - 3a + \frac{5}{2} &> 0 \qquad \text{also} \\ 8a^3 + 20a - 24a^2 = f(2 - 2a) &> 0 \end{aligned}$$

für alle positiven reellen s.
Ist aber $r > 2$, so folgt wegen des monotonen Fallens von f und der soeben bewiesenen Ungleichung $f(2-2a) > 0$ aus $0 < 2-ar < 2-2a$, dass $f(2-ar) > 0$ ist. Damit haben genau alle $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 3 - 151243
P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände $PA = u$, $PB = v$, $PC = w$ hat.
Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

Zunächst wird das in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Dreieck ABC samt dem im Innern dieses Dreiecks liegenden Punkt P mit einem Winkel der Größe $\varphi = 60°$ um den Punkt A gedreht. Damit entsteht die in der Abbildung wiedergegebene Figur.



Nach Voraussetzung und Konstruktion gilt $C = B'$ und

$$\begin{aligned} \angle PAP' &= 60° \qquad (1) \\ u = AP &= AP' \qquad (2) \\ v = PB &= P'C \qquad (3) \end{aligned}$$

Dabei ist B' der Bildpunkt von B, P' der Bildpunkt von P. Aus (2) folgt, dass das Dreieck PAP' gleichschenklig ist. Aus (1) folgt mit 82) nach dem Basiswinkelsatz:

$$\angle APP' = \angle AP'P \qquad (4)$$

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck gilt:

$$\angle PAP' + \angle AP'P + \angle P'PA = 180° \qquad (5)$$

Aus (5) folgt mit (1) und (4): $\angle APP' = 60°$ (6). Damit ist gezeigt, dass das Dreieck APP' gleichseitig ist. Es gilt also $PP' = u$ (7).

Weiterhin setzt man $\angle P'PC = \alpha$ und wendet den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie unter Beachtung von (3) und (7) auf das Dreieck $P'PC$ an:

$$\cos\alpha = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw} \qquad (8)$$

Weil P ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, gilt $\angle ABC < 180°$. Daraus folgt $\alpha < 180°$ und weiterhin $\sin\alpha > 0$. Unter Verwendung der Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw}\right)^2} \qquad (9)$$

Hieraus ergibt sich durch algebraische Umformung:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2uw}\sqrt{(u^2 + v^3 + w^2)^2 - 2u^4 - 2v^4 - 2w^4} \qquad (10)$$

Mit (8) und (10) ist jetzt unter Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck APC möglich, die Länge s der Dreiecksseite AC durch u, v und w auszudrücken. Man erhält:

$$s^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\alpha + 60°) \qquad (11)$$

Wegen $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha\cos 60° - \sin\alpha\sin 60°$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt mit (8), (10) und (11):

$$s^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)} \qquad (12)$$

Da die Länge s der Strecke AC positiv ist, ergibt sich aus (12):

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)}}$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 151244
Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x, y, z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solcher Tripel jeweils die Zahl

$$f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$$

zuordnet. Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f und weisen Sie nach, daß jeder Wert in diesem Bereich angenommen wird!

Es gilt für alle x,y,z:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \geq 0 \qquad (1)$$

Für $x = y = 0$, $z = \pi$ folgt $f(x,y,z) = 0$, d.h., die untere Grenze wird in Gleichung (1) angenommen. Weiterhin gilt:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 3 \qquad (2)$$

Für $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ folgt: $f(x,y,z) = \frac{9}{4}$ (3).
Behauptung: $W_f = \left\{a | 0 \leq a \leq \frac{9}{4}\right\}$.
Beweis: Für alle r ($r \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\left(|r| - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \text{d.h.} \quad |r|^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \text{oder} \quad r^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0$$

Sei $s \in \mathbb{R}$ und $|s| \leq 1$. Dann gilt erst recht

$$r^2 - |rs| + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad \text{und somit} \qquad r^2 + rs + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad (4)$$

Sei nun $r := \cos(x + y)$ und $:= \cos(x - y)$. Dann erhält aus (4):

$$\cos^2(x + y) + \cos(x + y)\cdot\cos(x - y) \geq -\frac{1}{4} \quad \text{bzw.}$$

$$[2\cos^2(x+y)-1]+[2\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)]\geq -\frac{3}{2}$$

Da $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$ und $2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta$ gilt, erhält man

$$\cos(2x+2y)+\cos 2x+\cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$\cos 2(x+y)+\cos 2x+\cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$3-\cos 2x-\cos 2y-\cos 2(x+y) \leq \frac{9}{4}$$

Diese Ausdruck kann wir folgt zerlegt werden:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2y\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(x+y)\right)\leq\frac{9}{4}$$

Da $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, ergibt sich:

$$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2(x+y)\leq\frac{9}{4}$$

Mit $x+y=\pi-z$ erhält man schließlich

$$0\leq\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z\leq\frac{9}{4}$$

Da $f(x,y,z)$ eine stetige Funktion von (x,y,z) ist und ihr Definitionsbereich der gesamte dreidimensionale euklidische Raum zusammenhängend ist, sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Zwischenwertsatzes für Funktionen von mehreren Variablen erfüllt. Daher nimmt f jeden Wert aus $\left[0;\frac{9}{4}\right]$ an.
Somit ist der Wertebereich von f die Mengen der reellen Zahlen

$$W_f=\left\{a|0\leq a\leq\frac{9}{4}\right\}$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 151245
Bekanntlich gilt:
Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ Teile zerlegt.
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen sind und keine zwei zueinander parallel sind.

Man A_n $(n=0,1,2,...)$ sei die Anzahl der Teile bezeichnet, in die der Raum durch die n Ebenen (mit den angegebenen Bedingungen) zerlegt wird. Offensichtlich ist $A_0=1$ $\quad(*)$.
Für $n>0$ seien $E_1,...,E_n$ Ebenen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Dann schneidet die Ebene E_n die Ebenen $E_1,...,E_{n-1}$ in $n-1$ Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen und keine zwei parallel sind.
Diese Geraden zerlegen nun nach der Vorbemerkung die Ebene E_n in $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ Teile. Jeder dieser Ebenenteile zerlegt genau einen unter den bereits vorher vorhandenen A_{n-1} Raumteilen in genau zwei Raumteile; alle übrigen (bereits vorher vorhandenen Raumteile) bleiben unverändert. Demnach gilt:

$$A_n=A_{n-1}+\frac{1}{2}(n^2-n+2)\qquad(**)$$

für $n=1,2,...$. Aus (*) und (**) erhält man durch vollständige Induktion:

$$A_n=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+2)=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k+n$$

Bekanntlich gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also folgt:

$$A_n = \frac{12 + n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 12n}{12}$$
$$= \frac{12(n+1) + (n+1)(2n^2 + n - 3n)}{12} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$$

w.z.b.w.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 151246A
Mit R^n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R^n ist durch

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.
Es sei M eine Teilmenge von R^n, für die gilt:
Mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) \in M \qquad (1)$$

Ein n-Tupel $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ heißt x-Element von M, wenn aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2}(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

und damit $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ist $*$-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0 < \lambda < 1$ aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

also

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

folgt.

a) Wenn für beliebiges r mit $0 < r < 1$ aus der Darstellung

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

stets $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt, so gilt das insbesondere für $r = \frac{1}{2}$. Also ist $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element.

b) Es sei $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ ein $*$-Element, und es seien $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ und eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ derart gegeben, das

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

ist. Dann existiert eine reelle Zahl $t > 0$ derart, dass für $p = r + t$ und $q = r - t$ gilt: $0 < p,q < 1$ (Jedes $0 < t < \min(r,1 - r)$ leistet das Verlangte). Es wird

$$p(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - p)(y_1,y_2,...,y_n) = (a_1,a_2,...,a_n) \qquad \text{und}$$

$$q(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - q)(y_1,y_2,...,y_n) = (b_1,b_2,...,b_n)$$

gesetzt. Wegen (1) ist dann $(a_1,a_2,...,a_n),(b_1,b_2,...,b_n) \in M$ und es gilt:

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = \left(\frac{p+q}{2}x_1, \frac{p+q}{2}x_2, ..., \frac{p+q}{2}x_n\right) + \left(\frac{2-p-q}{2}y_1, ..., \frac{2-p-q}{2}y_n\right)$$

Wegen $\frac{p+q}{2} = r$ und $\frac{2-p-q}{2} = 1 - r$ folgt

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

Da $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element ist, folgt hieraus $a_i = b_i$ für $i = 1,2,...,n$, also

$$a_i - b_i = px_i + (1 - p)y_i - qx_i - (1 - q)y_i = (p - q)(x_i - y_i) = 0$$

Wegen $p - q = 2t > 0$ folgt hieraus $x_i = y_i$ für $i = 1,2,...,n$ und damit gilt

$$s_i = rx_i + (1 - r)x_i = x_i = y_i$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 151246B
In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{2k}; \qquad N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}; \qquad m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist.
a) Man berechne die Summen M, N und m.
b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} (k - x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.
Man berechne $f(x)$ und weise nach, dass f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für $x = m$ annimmt.

a) 1. Es gilt:

$$M = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + ... + \binom{2n-1}{2n-2}$$

Es sei:

$$M' = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + ... + \binom{2n-1}{2n-1}$$

Dann gilt:

$$M + M' = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + ... + \binom{2n-1}{2n-1} = (1 + 1)^{2n-1} = 2^{2n-1} \qquad (1)$$

$$M - M' = (1 - 1)^{2n+1} = 0$$

Daraus folgt:

$$2M = 2^{n-1}, \qquad \text{also} \qquad M = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} = 2^{2n-2} \qquad (2)$$

$$2M' = 2^{2n-1}, \qquad \text{also} \qquad M' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} = 2^{2n-2} \qquad (3)$$

2. Analog wird N berechnet. Mit $N' = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$ gilt:

$$N + N' = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad ; \qquad N - N' = (1-1)^{2n} = 0$$

Daraus folgt:

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1} \qquad (4) \qquad N' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2n-1} \qquad (5)$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2k\frac{2n(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2n\frac{(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2k-1)} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\end{aligned}$$

und damit wegen (3)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = n\cdot 2^{2n-2} \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$m = \frac{1}{N}\cdot \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = \frac{n\cdot 2^{2n-2}}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2} \qquad (7)$$

b) Man erhält:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{N}\cdot \sum_{k=0}^{n}(k-x)^2\binom{2n}{2k} = \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(2k-2x)^2\binom{2n}{2k} \\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(4k^2-8kx+4x^2)\binom{2n}{2k} \\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}[2k(2k-1)+2k(1-4x)+4x^2]\binom{2n}{2k} \\ &= \frac{1}{4N}\left[\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} + 2(1-4x)\cdot \sum_{k=0}^{n}k\binom{2n}{2k} + 4x^2\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\right] \qquad (8)\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} &= \sum_{k=1}^{n}2k(2k-1)\frac{2n(2n-1)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}2n(2n-1)\binom{2n-2}{2k-2} = 2n(2n-1)2^{2n-3} \qquad (9)\end{aligned}$$

Aus (9), (6), (4) und (8) folgt weiter

$$f(x) = \frac{1}{4N}[2n(2n-1)2^{2n-3} + 2(1-4x)n\cdot 2^{n-2} + 4x^2\cdot 2^{2n-1}] \qquad (10)$$

und hieraus wegen $N = 2^{2n-1}$, also $4N = 2^{2n+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}(n^2\cdot 2^{2n-2} - n\cdot 2^{2n-2} + 2n\cdot 2^{2n-2} - nx\cdot 2^{2n+1} + x^2\cdot 2^{2n+1}) =$$

$$= x^2 - nx + \frac{n}{8} + \frac{n^2}{4} = \left(x-\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{8} \geq \frac{n}{8}$$

worin das Gleichheitszeichen für $x = \frac{n}{2} = m$ gilt. Daher besitzt f den kleinsten Funktionswert $\frac{n}{8}$ an der Stelle $x = m$.

Übernommen aus [3]

9.18 XVI. Olympiade 1976

9.18.1 I. Runde 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161211
Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), die das Gleichungssystem erfüllen:

$$x + yz = 7 \quad (1)$$
$$xy + z = 5 \quad (2)$$
$$x + y + z = 6 \quad (3)$$

Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Nach (3) gilt dann

$$x = 6 - y - z \quad (4)$$

Setzt man dies in (1), (2) ein, so folgt

$$6 - y - z + yz = 7 \qquad ; 6y - y^2 - yz + z = 5 \quad (5,6)$$

Addiert man (5), (6), so ergibt sich

$$6 + 5y - y^2 = 12 \qquad ; \qquad y^2 - 5y + 6 = 0$$

Daher kann nur $y = 2$ oder $y = 3$ sein.
Aus $y = 2$ und (5);(4) folgt $4 - z + 2z = 7$; $z = 3, x = 1$
Aus $y = 3$ und (5);(4) folgt $3 - z + 3z = 7$; $z = 2, x = 1$

Das gegebene System kann somit nur die Lösungen (1,2,3) und (1,3,2) haben. Die Probe bestätigt, dass beide Tripel tatsächlich Lösungen sind.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 161212
Man beweise, dass für jedes Dreieck ABC die Gleichung

$$\overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma = 2F$$

gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

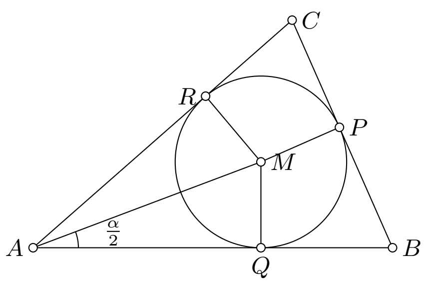
Die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten BC, CA bzw. AB seine P, Q bzw. R. Dann ist das Dreieck AMR bei R rechtwinklig, also gilt

$$AR = MA \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad MR = MA \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

demzufolge ist der Flächeninhalt F_1 von $\triangle AMR$

$$F_1 = \frac{1}{2}AR \cdot MR = \frac{1}{2}MA^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}MA^2 \sin\alpha$$

Denselben Flächeninhalt hat auch $\triangle AMQ$.



Entsprechend erhält man den Flächeninhalt F_2 von $\triangle BMP$ und $\triangle BMR$ sowie den Flächeninhalt F_3 von $\triangle CMQ$ und $\triangle CMP$:

$$F_2 = \frac{1}{4}MB^2 \sin\beta \qquad ; \qquad F_3 = \frac{1}{4}MC^2 \sin\gamma$$

Hieraus ergibt sich:

$$2F = 2(2F_1 + 2F_2 + 2F_3) = 4(F1 + F_2 + F_3) = \overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 161213
Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:

2 Zelte für je 3 Personen,
1 Zelt für 8 Personen,
2 Zelte für je 10 Personen und
2 Zelte für je 16 Personen.

Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, dass es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist. Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.

a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?

b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

Die Zelte für 3 Personen seine mit Z_{31}, Z_{32}, das für 8 Personen mit Z_8, die für 10 Personen mit Z_{101}, Z_{102}, die für 16 Personen mit Z_{161}, Z_{162} bezeichnet.

Zunächst können nach den Angaben über die Auslastung die Zelte Z_{31}, Z_{32} nur mit je 2 Jungen belegt werden. Ferner folgt, dass die Zahl der Personen mindestens 34 $(= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8)$ beträgt.

Für die einzelnen Zelte ergeben sich folgende mögliche Belegungen (dabei bezeichne J die Zahl der Jungen und M die der Mädchen).

Zelt	J	M
Z_{31}	2	-
Z_{32}	2	-
Z_8	4 oder 5	4
Z_{101}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{102}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{161}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8
Z_{162}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8

Es sei n_i die Belegungszahl für Z_i $(i = 31, 32, 9, 101, 102, 161, 162)$. Wäre $n_{161} \geq 9$ und $n_{162} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 9 + 9 = 22$ und wegen $J + M \leq 44$ folglich $M \leq 22$ im Widerspruch zu $M > J$. O.B.d.A. sei darum $n_{162} = 8$.

Fallunterscheidung für n_8:

Es sei $n_8 = 5$ (d.h. dieses Zelt wurde mit 5 Jungen belegt). Wäre außerdem $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 2 + 5 + 9 = 18$ und damit $M \leq 5 + 5 + 8 = 18$ (Belegung der Zelte Z_{101}, Z_{102} und Z_{162}), im Widerspruch zu $M > J$. Es gilt also $n_{161} = 8$.

Wäre $n_{101} > 5$ und $n_{102} > 5$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21$ und $M \leq 8 + 8 = 16$, im Widerspruch zu $M > J$.

Für $n_{101} = n_{102} = 5$ gilt $J + M = 2 + 2 + 5 + 5 + 5 + 8 + 8 = 35$. Da hierbei nur die ersten beiden Zelte mit über 50 % ausgelastet sind, lässt sich diese Belegung auch unter Beachtung von $M > J$ realisieren.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5, so gilt

$$J + M \leq 2 + 2 + 5 + 5 + 7 + 8 + 8 = 37 \qquad \text{wobei} \qquad J \geq 2 + 2 + 5 + 6 = 15$$

gilt, also eine Belegung mit $M > J$ möglich ist. Im Falle $n_8 = 5$ können also höchstens 37 Schüler berücksichtigt werden.

Es sei $n_8 = 4$ (d.h. dieses Zelt kann entweder mit Jungen oder Mädchen belegt werden). Wäre mindestens eine der Zahlen n_{101}, n_{102} größer als 5 und zugleich $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2+2+6+9 = 19$ und, im Widerspruch zu $M > J$ da $M \leq 4+5+8 = 17$.

Ist $n_{101} = n_{102} = 5$, so gilt $J + M \leq 2+2+4+5+5+11+8 = 37$. Wegen $J \geq 2+2+11 = 15$ ist eine solche Belegung möglich.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5 und folglich $n_{161} = 8$, so gilt

$$J + M \leq 2+2+4+5+6+7+8+8 = 36$$

Der nun noch als einziger verbleibende Fall $n_{101} > 5$ und $_{102} > 5$ kann dadurch realisiert werden, dass Z_{31} und Z_{32} mit je 2 Jungen, Z_8 mit 4 Mädchen, Z_{101} und Z_{102} mit je 7 Jungen, Z_{161} und Z_{162} mit je 8 Mädchen belegt werden. Das sind 18 Jungen und 20 Mädchen, also insgesamt 38 Personen. Mithin beträgt die gesuchte maximale Belegungszahl 38.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 161214
Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.

Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.

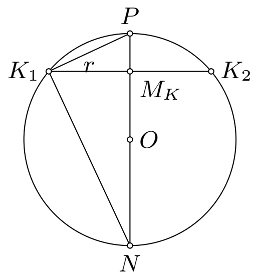
Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

Im ersten Schritt wird der Durchmesser $2R$ der Kugel konstruiert.

a) Man zeichnet um einen beliebigen Punkt P der Kugeloberfläche mit einem beliebig, aber genügend klein gewählten Abstand s der Zirkelspitzen einen Kreis K und ermittelt den Radius r von K. Dazu werden auf K drei beliebige, voneinander verschiedene Punkte $P_1, P_2, P3$ markiert; die Abstände P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 werden mit dem Zirkel auf der Kugel abgegriffen.

   Mit diesen Abständen wird als ebene Hilfsfigur ein zu dem in der Ebene des Kreises K gelegenen Dreieck $P_1P_2P_3$ kongruentes Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ und dessen Umkreis K' konstruiert. Sein Radius ist dann gleich r.

b) Durch P und den Kugelmittelpunkt O denke man sich eine Ebene ϵ gelegt.



   In der in ϵ gelegenen Schnittfigur (siehe Abbildung), seien mit K_1, K_2 die Schnittpunkte des Kreises K mit ϵ, mit M_K der Mittelpunkt von K und mit N der zweite Schnittpunkt von der P_0 enthaltenden Geraden mit dem Schnittkreis bezeichnet.

   Um eine Strecke der Länge R zu konstruieren, genügt es dann, wegen $PN = 2R$, als ebene Hilfskonstruktion ein zum Dreieck PK_1N kongruentes Dreieck zu konstruieren.

Man zeichnet eine Strecke mit der Länge $ST = r$. Auf ST wird in T die Senkrechte errichtet. Der Kreis mit dem Radius s um S schneidet dann wegen $s > r$ die Gerade t in zwei voneinander verschiedenen Punkten M_1, M_2. Die Senkrechte auf SM_1 in S schneidet t in einem Punkt Q. Wegen

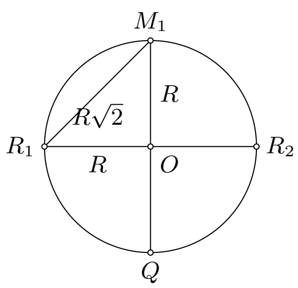
$$K_1P = SM_1 \quad ; \quad ST = K_1M_K \quad ; \quad \angle STM_1 = \angle K_1M_KP$$

gilt $\triangle K_1M_KP \cong \triangle STM_1$, also gilt $\angle SM_1T = \angle K_1PM_K$. daher und wegen $\angle M_1SQ = \angle PK_1N$ ist das Dreieck M_1SQ zum Dreieck PK_1N kongruent, und es gilt $M_1Q = 2R$.

2) Nun wird der Großkreis durch A und B konstruiert.

Da jeder Großkreis den Radius R hat, muss der Abstand der Zirkelspitzen, wenn man einen Großkreis auf der Kugel um einen beliebigen Punkt P der Kugelfläche konstruieren will, gleich $R\sqrt{2}$ sein.

Umgekehrt ist auch jeder Kreis, der mit $s = R\sqrt{2}$ um einen Punkt der Kugeloberfläche, konstruiert wird, ein Großkreis. Indem man auf der konstruierten Strecke M_1Q in der Ebene der Hilfekonstruktion die Mittelsenkrechte errichtet, und um den Halbierungspunkt von M_1Q einen Kreis mit dem Radius R beschreibt, der die Mittelsenkrechte in zwei Punkten R_1 und R_2 schneidet, erhält man die Strecke M_1R_1 mit $M_1R_1 = R\sqrt{2}$ (Abbildung), und es folgt durch Vergleich mit dem kongruenten Kreis in der oberen Abbildung, dass der um P mit dem Abstand $R\sqrt{2}$ der Zirkelspitzen auf der Kugeloberfläche konstruierte Kreis in der zu OP senkrechten Ebene durch O liegt, also der behauptete Großkreis ist.



Auf der Kugel wird nun um A und B mit einem Abstand der Zirkelspitzen von $R\sqrt{2}$ je ein Großkreis konstruiert. Diese Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; denn die Ebenen, in denen sie verlaufen, haben diejenige Gerade durch O gemeinsam, die sowohl zu OA als auch zu OB senkrecht ist.

Der Kreis um einen dieser Punkte mit dem Abstand der Zirkelspitzen von $s = R\sqrt{2}$ ist dann ebenfalls Großkreis und verläuft durch A und B. Damit ist die verlangte Konstruktion beschrieben.

Übernommen von [5]

9.18.2 II. Runde 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161221
Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d. Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.
Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

Folgende Beziehungen gelten dann

$$A = a \cdot b \quad (1) \qquad ; \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2) \qquad ; \qquad a = \frac{b+d}{2} \quad (3)$$

Umstellen von (1) und (2) und Einsetzen in (3) ergibt

$$a = \frac{A + \sqrt{a^4 + f^2}}{2a}$$
$$(2a^2 - A)^2 = a^4 + A^2$$
$$a^2(3a^2 - 4A) = 0$$

mit den Lösungen $a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{A}$ und $a_2 = 0$, wobei a_2 entfällt.

Rückwärtseinsetzen in (1), (2) ergibt $b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{A}$ und $d = \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{A}$. Ein Probe in (3) bestätigt die Korrektheit der Lösung.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 161222
Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d.h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Für jedes $n = 1, 2, ...$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.
a) Man ermittle das Volumen V_{10}.
b) Man ermittle S_{10}.
c) Man berechne $\lim_{n\to\infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.
Hinweis:
Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

Sei K eine Kugel mit Radius R, Z ein ihr einbeschriebener Zylinder mit quadratischem Achsenabschnitt und k eine diesem Zylinder einbeschriebene Kugel mit Radius r.

Ein ebener Schnitt, der den Achsenabschnitt des Zylinders enthält, erzeugt als Schnittfigur einen Kreis mit Radius R, dem ein Quadrat einbeschrieben ist, welchem ein Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Also ist $2R$ die Länge der Diagonalen des Quadrats und $2r$ dessen Kantenlänge, sodass $R = \sqrt{2}r$ bzw. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ gilt. Ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Kugel K, so beträgt also das Volumen v von k genau $v = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = V \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Damit ergibt sich für die Aufgabe

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \cdot r^3$$

und

$$S_n = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^k\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^n - \sqrt{2}^n}{4^n - \sqrt{2}\cdot 4^{n-1}}$$

Insbesondere ist also

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^9 \cdot r^3 = \frac{2^2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2^4 \cdot \sqrt{2}}{2^{18}} \cdot r^3 = \frac{\sqrt{2}}{2^{12} \cdot 3} \cdot \pi \cdot r^3$$

und

$$S_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^{10} - \sqrt{2}^{10}}{4^{10} - \sqrt{2} \cdot 4^9} = \frac{2^2}{3}\pi \cdot \frac{2^{20} - 2^5}{2^{20} - \sqrt{2} \cdot 2^{18}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2^{15} - 1}{2^{13} - \sqrt{2} \cdot 2^{11}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{32767}{8192 - 2048\sqrt{2}}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{4^2 - 2^2} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{9}\pi \cdot r^3$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 161223
In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Man beweise, dass es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

Sei der Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ der Umkreis eines Quadrates, so ist die Diagonale von diesem Quadrat $d = 2r = \frac{2}{7}$ und dessen Seitenlänge

$$s = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{(\frac{2}{7})^2}{2}} = \sqrt{\frac{4}{98}} > \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0{,}20$$

Die Gesamtfläche von dem Quadrat mit der Seitenlänge 1 kann nun mit der Anzahl 25 der Quadrate der Seitenlänge $s = 0{,}20$ vollständig ausgefüllt werden. Mit der Anordnung von jeweils 2 Punkten in jedem der 25 Quadrate befinden sich 50 Punkte im Quadrat mit der Seitenlänge 1. Fügen wir nun Punkt Nr. 51 hinzu so erhalten wir bei beliebiger Anordnung aller 51 Punkte stets ein Quadrat bzw. einen Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ in dem sich mindestens 3 Punkte befinden. □

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 4 - 161224
Es seien x und y
a) nichtnegative reelle Zahlen,
b) nichtnegative ganze Zahlen,
für die die Ungleichungen

$$8x + 3y \leq 25 \qquad (1)$$
$$-2x + 3y \leq 10 \qquad (2)$$

erfüllt sind. Man weise nach, dass für die Summe

$$z = 2x + y \qquad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

a) Multipliziert man dir Ungleichung (1) mit 4/15 und Ungleichung (2) mit 1/15 und addiert beide, so ergibt sich:

$\frac{32}{15}x + \frac{12}{15}y - \frac{2}{15}x + \frac{3}{15}y \leq \frac{100}{15} + \frac{10}{15}$ bzw. zusammengefasst $2x + y \leq \frac{22}{3}$.(4) z ist also höchstens $\frac{22}{3}$.

Für $x = \frac{3}{2}$ und $y = \frac{13}{3}$ sind (1) und (2) erfüllt: $12 + 13 \leq 25$ und $-3 + 13 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 3 + \frac{13}{3} = \frac{22}{3}$.

z ist also nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist $\frac{22}{3}$.

b) Die hier zugelassenen Paare $(x; y)$ bilden eine Teilmenge der in a) zugelassenen Paare. z kann in diesem Fall also keinen größeren Wert annehmen als in a). Es gilt daher ebenfalls $z \leq \frac{22}{3}$ (5).
Da x und y ganzzahlig sind, ist auch $z = 2x + y$ ganzzahlig. Damit kann (5) verschärft werden zu $z \leq 7$.

Für $x = 2$ und $y = 3$ sind (1) und (2) erfüllt: $16 + 9 \leq 25$ und $-4 + 9 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 4 + 3 = 7$.

z ist also auch hier nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist 7.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

9.18.3 III. Runde 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161231
Man gebe alle Paare (x,y) reeller Zahlen an, für die gilt:

$$x^2 + y = 2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad y^2 + x = 2 \quad (2)$$

Indem man die beiden Gleichungen voneinander abzieht, erhält man die neue Gleichung

$$x^2 - y^2 = x - y \quad (*)$$

Wir machen hier folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x = y$
Einsetzen in (1) ergibt dann

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0$$

was auf die Lösungen

$$(x,y) \in \{(1,1),(-2,-2)\}$$

führt.
2. Fall: $x \neq y$.
Indem man (*) durch $x - y$ kürzt, ergibt sich daraus

$$x + y = 1 \quad \text{bzw.} \quad y = 1 - x$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man damit weiter

$$x^2 - x - 1 = 0$$

was auf die weiteren zwei Lösungen

$$(x,y) \in \{(1 \pm \sqrt{5})/2,(1 \mp \sqrt{5})/2)\}$$

führt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 161232
In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, dass die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.
Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen r und h.
Man weise insbesondere nach, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r_1}{h}$$

ist.

Wir packen Kreise in ein gleichschenkliges Dreieck. Es ergeben sich dann ähnliche Dreiecke und es gilt (ein Kreis im Dreieck):

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_1}{h - r_1} \iff r_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}+r} \cdot h$$

Nun packen wir den zweiten Kreis in das Dreieck. Es gilt:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_2}{h - 2r_1 - r2}$$

$$rh - 2rr_1 - rr_2 = r_2\sqrt{r^2+h^2}$$

$$r_2 = \frac{r(h-2r_1)}{r+\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_1(h-2r_1)}{h} = q \cdot r_1$$

Für den dritten Kreis:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_3}{h-2r_1-2r_2-r_3}$$
$$rh - 2rr_1 - 2rr_2 - rr_3 = r_3\sqrt{r^2+h^2}$$
$$r(h-2r_1-2r_2) = r_3(r+\sqrt{r^2+h^2})$$
$$r_3 = \frac{r_1}{h}(h-2r_1-2r_2) = r_2 - 2\frac{r_1 r_2}{h} = r_2\left(1-2\frac{r_1}{h}\right) = r_2\frac{h-2r_1}{h} = r_2\cdot q$$

Sowie analog der n-te Kreis:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_n}{h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}-r_n}$$
$$rh - 2rr_1 - 2rr_2 - \ldots - 2rr_{n-1} - rr_n = r_n\sqrt{r^2+h^2}$$
$$r(h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}) = r_n(r+\sqrt{r^2+h^2})$$
$$r_n = \frac{r_1}{h}(h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}) = r_{n-1} - 2\frac{r_1 r_{n-1}}{h} = r_{n-1}\left(1-2\frac{r_1}{h}\right) = r_{n-1}\frac{h-2r_1}{h} = r_{n-1}\cdot q$$

Aus $r_n = r_{n-1}\cdot q$ folgt sofort, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge ist.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 3 - 161233
Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind.
Ein Punkt dieser Menge heiße außergewöhnlich, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.
Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.
Man beweise:
Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

Bezeichne eine Strecke als "außergewöhnlich", wenn sie einen roten mit einem grünen Punkt verbindet. Unter den Strecken, die von einem außergewöhnlichen Punkt zu anderen Punkten der Menge ausgehen, sind also mehr als die Hälfte außergewöhnlich.
Beim Umfärben eines außergewöhnlichen Punktes reduziert sich somit die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken, die von diesem Punkt ausgehen, um mindestens eins. Insbesondere reduziert sich insgesamt die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken in der gegebenen Anordnung von Punkten und Verbindungsstrecken um mindestens eins.

Die Anzahl der Verbindungsstrecken zweier verschiedener Punkte der gegebenen Punktmenge ist endlich, nennen wir sie n.
Nach höchstens n-maligem Ausführen des Umfärbeverfahrens hat man also die Situation erreicht, dass keine außergewöhnliche Strecke mehr vorliegt (d.h. nur gleichfarbige Punkte haben Verbindungsstrecken untereinander, sodass es insbesondere keine außergewöhnlichen Punkte gibt), oder dass kein Punkt mehr außergewöhnlich ist und das Umfärbeverfahren folglich nicht mehr durchgeführt werden kann. Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 4 - 161234
a) Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x+y+z=\pi$ die Ungleichung gilt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Wir substituieren z:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2\pi - 2x - 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2x + 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$1 - (1 - \cos 2x)(1 - \cos 2y) + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$-(2\sin^2 x)(2\sin^2 y) + (2\sin x \cos x)(2\sin y \cos y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$-4\sin^2 x \sin^2 y + 4\sin x \sin y \cos x \cos y \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y \cos(x + y) \leq \tfrac{1}{2}$$

Wir setzen noch $2\sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ ein:

$$2\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)\cos(x + y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)\cos(x + y) \leq \tfrac{1}{4} \qquad (2)$$

Wir substituieren nun

$$x + y = u \qquad (3)$$

und

$$x - y = w \qquad (4)$$

und betrachten die linke Seite der Ungleichung (2) als Funktion $f(u,w)$, deren absolutes Maximum wir suchen:

$$f(u,w) = (\cos w - \cos u)\cos u = \cos u \cos w - \cos^2 u \qquad (5)$$

Bei gegebenem u nimmt f offensichtlich extremale Werte an, wenn $\cos w$ extremal ist, also bei Vielfachen von π:

$$w = k\pi \qquad (6)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Leiten wir dagegen nach u ab, erhalten wir Extremstellen oder Sattelpunkte bei:

$$\frac{\partial f(u,w)}{\partial u} = -\cos w \sin u + 2\sin u \cos u = 0$$
$$\sin u(2\cos u - \cos w) = 0$$

$\sin u = 0$ kommt als Maximum nicht in Frage, da dann $\cos u = \pm 1$ ist, und laut (5) die Funktion f je nach dem gewählten w die Werte -2 oder 0 annimmt, was nicht maximal sein kann. Also muss stattdessen gelten:

$$2\cos u = \cos w$$
$$\cos u = \tfrac{1}{2}\cos w \qquad (7)$$

Setzt man das in (5) ein, erhält man für diese speziellen Werte:

$$f_u(w) = \tfrac{1}{2}\cos w \cos w - (\tfrac{1}{2}\cos w)^2 = \tfrac{1}{4}\cos^2 w \leq \tfrac{1}{4}$$

Damit sind Ungleichungen (2) und letztlich auch (1) erfüllt. Die Gleichheit tritt ein, wenn $\cos^2 w = 1$ ist, was laut (6) bei Vielfachen von π der Fall ist. Wegen (4) gilt:

$$x - y = k\pi$$
$$x = y + k\pi \qquad (8)$$

Setzt man (3) in (7) ein, erhält man:

$$\cos(x + y) = \cos(2y + k\pi) = \tfrac{1}{2}\cos(k\pi)$$
$$(-1)^k \cos 2y = \tfrac{1}{2}(-1)^k$$
$$\cos 2y = \tfrac{1}{2} \qquad (9)$$

Dann gilt wegen (8):

$$\cos 2x = \cos(2y + 2k\pi) = \cos(2y) = \tfrac{1}{2}$$

was wegen der Symmetrie bezüglich x und y zu erwarten war. Da in Ungleichung (1) nur $2x$, $2y$ und $2z$ vorkommen, können aufgrund der Periodizität der Kosinus-Funktion Vielfache von π beliebig zu jeder Variablen addiert werden. Wir betrachten nachfolgend daher nur die Hauptwerte $-\frac{\pi}{2} \leq x,y \leq \frac{\pi}{2}$. (9) ist erfüllt, wenn

$$2y = \pm\tfrac{\pi}{3}$$

$$y = \pm\tfrac{\pi}{6}$$

Desgleichen gilt für x, wobei allerdings x und y nicht unterschiedliche Vorzeichen haben dürfen, denn dann wäre $z = \pi$ und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Zusammenfassend muss also gelten:

$$x = \pm\tfrac{\pi}{6} + n\pi$$

$$y = x - k\pi$$

und

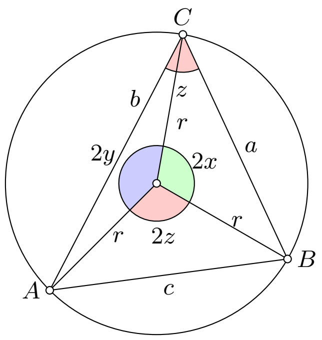
$$z = \pi - (x + y) = \pi - 2x + k\pi$$

$$z = -2x + (k+1)\pi$$

mit $k,n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:



Laut Kosinussatz gilt z.B.

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2x$$

$$2r^2 \cos 2x = 2r^2 - a^2$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{a^2}{2r^2}$$

Sinngemäß genauso für y und z. Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} + 1 - \frac{b^2}{2r^2} - 1 + \frac{c^2}{2r^2} \leq \tfrac{3}{2}$$

$$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2r^2} \leq \tfrac{1}{2}$$

$$c^2 - a^2 - b^2 \leq r^2$$

$$c^2 \leq r^2 + a^2 + b^2$$

Man kann weiter schlussfolgern (wiederum per Kosinussatz):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos z$$

Setzt man das in die vorige Gleichung ein, erhält man:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos z \leq r^2 + a^2 + b^2$$

$$-2ab\cos z \le r^2$$

Außerdem ist

$$c = 2r\sin z$$

Wir multiplizieren die vorige Gleichung daher mit $4\sin^2 z$. Es muss also gelten:

$$-8ab\sin^2 z\cos z \le c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos z$$

Und daher:

$$0 \le (a-b)^2 + 2ab(1-\cos z) + 8ab\sin^2 z\cos z$$

Da $(a-b)^2$ durchaus gleich null sein kann, muss man verschärfend fordern:

$$0 \le 2ab(1-\cos z) + 8ab\sin^2 z\cos z$$

Wir teilen durch $2ab$:

$$0 \le 1 - \cos z + 4\sin^2 z\cos z$$

$$0 \le 1 + 3\cos z - 4\cos^3 z$$

$$0 \le 1 - \cos 3z$$

Diese Ungleichung ist tatsächlich immer erfüllt, womit die Ungleichung der Aufgabenstellung bewiesen ist. Gleichheit tritt ein, wenn einerseits $a = b$ ist, und andererseits $\cos 3z = 1$.
Allerdings erfüllt $z = 0$ die Ungleichung der Aufgabenstellung tatsächlich nicht, weil wir oben die Ungleichung mit $\sin^2 z$ multipliziert und dadurch die Phantomlösung $z = 0$ erzeugt haben. Es muss stattdessen gelten, dass

$$3z = 2\pi$$

$$z = \frac{2}{3}\pi = 120°$$

ist. Da außerdem $a = b$ sein muss, ist $x = y$ und aufgrund der Innenwinkelsumme gilt dann $x = y = \frac{1}{6}\pi = 30°$. Über die rein geometrischen Überlegungen hinaus kann man festhalten, dass die Kosinus-Funktion gerade und periodisch ist. Daher ist $x = y = -30°$ in Kombination mit $z = -120°$ ebenfalls eine gültige Lösung. Außerdem können wegen der Periodizität beliebige Vielfache von $\pi = 180°$ zu allen drei Variablen addiert werden.

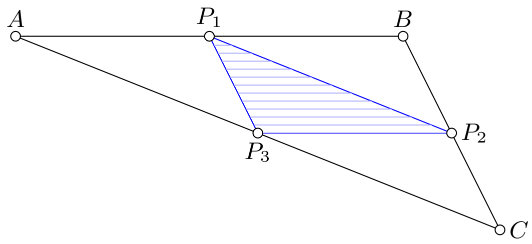
Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 161235
In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Man beweise, dass für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Nach der Voraussetzung, dass nicht alle Punkte der Menge auf derselben Gerade liegen, gibt es mindestens drei Punkte, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden. Betrachte von allen Dreiecken, deren Eckpunkte aus der betrachteten Menge sind, eines mit dem größten Flächeninhalt (so ein Dreieck existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Dreiecke).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Dreiecks mit P_1, P_2, P_3. Da dessen Flächeninhalt maximal ist, müssen alle anderen Punkte in einem Gebiet (oder auf dessen Rand) liegen, welches begrenzt wird durch die Parallelen zur Seite P_iP_j durch die Punkte P_k sowie P'_k (für alle $i,j,k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden), wobei P'_k den Spiegelpunkt von P_k bezüglich der Seite P_iP_j bezeichnet. Das folgt einfach daraus, dass die Fläche eines Dreiecks gleich "Grundseite mal Höhe durch 2" ist.

Die Parallelen zu P_iP_j durch die jeweiligen Punkte P_k ergeben ein Dreieck ABC, welches bereits ein geschlossenes Gebiet ist, sodass die Parallelen durch die Spiegelpunkte P'_k nicht mehr betrachtet werden müssen. Man überlegt sich leicht, dass die Seitenlängen von ΔABC dem Doppelten der jeweiligen Seitenlängen von $\Delta P_1P_2P_3$ entsprechen.

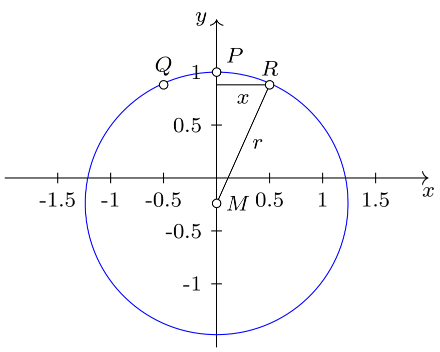


Damit gilt für die Dreiecksfläche $A_{\Delta ABC} = 4 \cdot A_{\Delta P_1P_2P_3} \leq 4$, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6A - 161236A
Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0;1)$, $Q(x;\cos x)$ und $R(-x;\cos(-x))$ gelegt.
a) Man gebe eine Funktion f so an, dass für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.
b) Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.
c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x, für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

Mit $\cos(-x) = \cos(x)$ ergibt sich folgende Skizze:



Es gilt

$$(r - (1 - \cos x))^2 + x^2 = r^2$$
$$r^2 - 2r(1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + x^2 = r^2$$
$$2r(1 - \cos x) = (1 - \cos x)^2 + x^2$$
$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$

Also lautet die in Aufgabenteil a) gesuchte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$

Aufgabenteil b): Während x gegen unendlich geht, wird der Nenner im letzten Term periodisch gleich null. Es existiert daher kein Grenzwert.

Aufgabenteil c): Wir benutzen $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Dann ist

$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \frac{x^2}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$$

Da im Definitionsbereich $\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2} > 0$, gilt $f(x) > 1$. Außerdem ist $\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)$ streng monoton steigend. Der größte Funktionswert liegt daher bei $x = \frac{\pi}{2}$ vor, und es ist

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \sin^2\tfrac{\pi}{4} + \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2} + (\frac{\pi}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{\pi^2+4}{8}$$

Der Wertebereich ist somit $\left]1; \frac{\pi^2+4}{8}\right]$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6B - 161236B

Es sei M eine Menge, für die folgendes gilt:
(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, dass $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:
Wenn für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ die Beziehung $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ g ilt, dann gilt für alle $p \in M, q \in M, r \in M, s \in M$ die Beziehung

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

Zunächst sammeln wir nochmal alle unsere Voraussetzungen:

(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei;
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es ein genau ein $x \in M$ derart, dass $x \circ b = c$ gilt. Dieses Element x werde mit $x = \dfrac{c}{b}$ bezeichnet;
(3) Für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ gilt die Beziehung

$$(a \circ b) \cdot (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)\,.$$

Es gilt für beliebige $p \in M$, $q \in M$, $r \in M$, $s \in M$

$$p \overset{(2)}{=} \left(\frac{p}{q}\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{q}{s}\right) \circ s\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{r}{s}\right) \circ s\right) \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ r.$$

Nach Voraussetzung (2) folgt somit

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right).$$

Ein letztes Mal folgt mit Voraussetzung (2) somit

$$\frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{q}{s}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)}$$

und die Behauptung.

Aufgabe gelöst von svrc

9.18.4 IV. Runde 1976, Klasse 12

Aufgabe 1 - 161241
Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller reeller Zahlen x mit $a < x < b$ sei I genannt.
Eine in I definierte Funktion f, sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist g genau dann an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Der geforderte Beweis ist erbracht, wenn die folgenden drei Aussagen als richtig nachgewiesen sind:

(1) Ist $f(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.
(2) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.
(3) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Zu (1): Ist $f(x_0) > 0$, so existiert wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) Stetigkeit von f an der Stelle x_0 eine Umgebung von $_0$, in der $f(x_0) > 0$ ist. In dieser Umgebung (einschließlich x_0) gilt somit $g(x) = f(x)$, also ist g ebenso wie f an der Stelle x_0 differenzierbar.
Ist $f(x_0) < 0$, so existiert entsprechend eine Umgebung von x_0, in der $g(x) = -f(x)$ gilt, woraus die Behauptung in analoger Weise folgt.

Zu (2): Wegen $f'(x_0) = 0$, also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = 0$, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung von x_0, in der (für $x \neq x_0$) $\frac{|f(x)|}{x-x_0} < \epsilon$ gilt.
Daher und wegen $\frac{|g(x)|}{x-x_0} = \frac{|f(x)|}{x-x_0}$ hat auch g an der Stelle x_0 die Ableitung 0.

Zu (3) beweise wir die äquivalente Aussage:
(3'): Ist $f(x_0) = 0$ und g an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.
Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0}$. Da für alle $x > x_0$ aus I nun $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$; da für alle $x < x_0$ aus I aber $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \leq 0$.
Hieraus ergibt sich entsprechend wie in (2) wegen $|\frac{f(x)}{x-x_0}| = |\frac{g(x)}{x-x_0}|$ auch $f'(x_0)$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 2 - 161242
Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$.
Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, dass jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.
Hinweis:
Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

Ordnet man jeder Verteilungsmöglichkeit das Tripel $(x_1, x2, x3)$ zu, wobei x_1, x_2 und x_3 die Anzahlen der roten, grünen und schwarzen Kugeln in Q_1 bezeichnen, so gilt nach Voraussetzung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3n \qquad ; \qquad 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2n \qquad (1)$$

Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller Tripel ganze Zahlen, die (1) genügen. Ist $x_1 = k$ ($k =$ 0,1,...,n), dann ergibt sich aus (1):

$$x_2 + x_3 = 3n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, \quad x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \leq 2n$ kann x_2 genau eine der Zahlen $n - k$, $n - k + 1$, ..., $2n$ sein. Im Fall $x_1 = k$ ($k =$ 0,1,..n) gibt es also genau $n + k - 1$ Möglichkeiten.

Ist $x_1 = n + k$ $(k = 1,2,...,n)$, so ergibt sich aus (1):

$$x_2 \neq x_3 = 2n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \geq 0$ kann x_2 genau eine der Zahlen $0,1,...,2n - k$ annehmen. Im Fall $x_1 = n + k$ $(k = 1,2,...,n)$ gibt es also genau $2n - k + 1$ Möglichkeiten.
Wegen $0 \leq x_1 \leq 2n$ gibt es für x_1 keine weiteren Fälle. Für die Anzahl A aller Möglichkeiten erhält man folglich:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n}(n+k+1) + \sum_{k=1}^{n}(2n-k+1) \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (2n+1)(n+1) - n(n+1) + n(2n+1) = 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten beträgt $3n^2 + 3n + 1$.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 161243
Ist $P_1P_2P_3P_4$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ϵ_i und die Größe des Winkels zwischen ϵ_{i-1} und ϵ_i mit α_i bezeichnet $(i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch den Index 4 ersetzt).
Man beweise:
Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

Da P_1, P_2, P_3, P_4 auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels mit der Spitze S liegen, haben die Strahlen SP_i $(i = 1,...,4)$ mit einer (in demselben Halbraum wie die Pyramide liegenden) geeigneten zur Kegelachse senkrechten Ebene ϵ Schnittpunkte Q_i. Der Schnittpunkt von ϵ mit der Kegelachse sei mit M bezeichnet.
Da für jedes $i = 1,..,4$ die Punkte S_i, P_i, Q_i auf einer Geraden liegen, fallen die durch S_i, Q_i, Q_{i+1} bestimmten Ebenen mit der Ebene ϵ_i zusammen.
Es gilt $SQ_i = SQ_j$ $(i, j = 1,...4)$, da $\epsilon \perp SM$ und die Q_i dem Schnittkreis k des Kegels mit ϵ angehören.

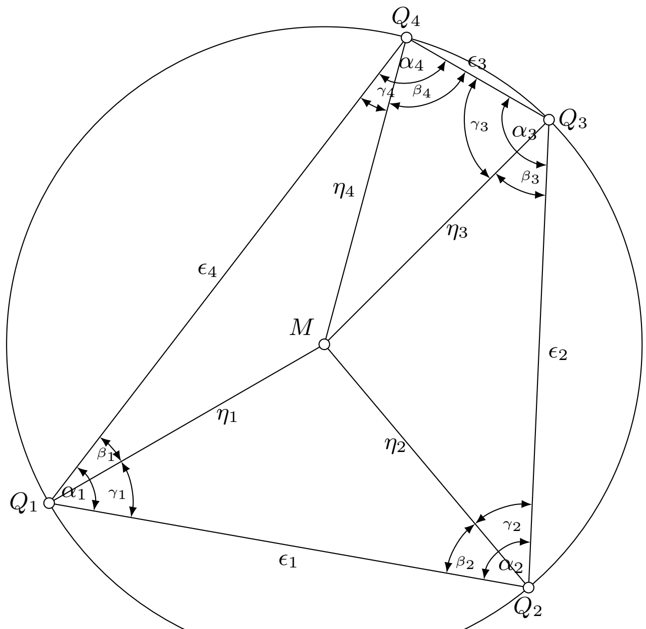


Abbildung: Von den Flächen ϵ_i, η_i $(i = 1,...,4)$ wurden nur die in k liegenden Strecken gezeichnet; die eingezeichneten Winkelangaben $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ geben nicht die wahre Größe an.

Aus demselben Grunde gilt $MQ_i = MQ_j$ ($i,j = 1,...,4$), d.h. die Grundflächen der Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ mit der Spitze S sind für $i = 1,...,4$ gleichschenklige Dreiecke, so dass wegen $\epsilon \perp SM$ die durch S, M und die Mittelpunkte M_i ($i = 1,...,4$) von Q_iQ_{i+1} gehenden Ebenen für die entsprechenden Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ Symmetrieebenen darstellen, d.h., $MQ_iQ_{i+1}S$ in die bez. der entsprechenden Ebenen MQ_iQ_{i+1} zueinander symmetrischen Tetraeder SMM_iQ_i und SMM_iQ_{i+1} zerlegen.

Mit η_i seien die durch S, M und Q_i bestimmten Ebenen bezeichnet; die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ϵ_{i-1} und η_i sei mit β_i, die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ϵ_i und η_i sei mit γ_i bezeichnet. Dann gilt auf Grund der Symmetrie stets

$$\beta_{i+1} = \gamma_i \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (1)$$

Da das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ konvex ist, sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) M liegt innerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$ bzw. auf einer seiner Seiten. Dann ist $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ ($i = 1,...,4$) (siehe Abbildung).
Folglich gilt nach (1)

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 + \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = \beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

b) M liegt außerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$.
Dann gibt es einen Index i_0 so, dass M in Außenwinkeln bei Q_{i_0} und Q_{i_0+1} liegt. Durch zyklische Vertauschung der Indizes, die weder die Voraussetzungen, noch die Behauptung der Aufgabe ändert, kann $i_0 = 1$ erreicht werden. Dann liegt ϵ_1 in dem Winkel zwischen ϵ_4 und η_1, also ist

$$\alpha_1 = \beta_1 - \gamma_1 \qquad (2)$$

Ferner liegt ϵ_1 in dem Winkel zwischen ϵ_2 und η_2, also gilt

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \beta_2 \qquad (3)$$

Für $i = 3,4$ liegt η_i in dem Winkel zwischen ϵ_{i-1} und ϵ_i, also ist

$$\alpha_i = \beta_i + \gamma_i \qquad (4)$$

Also gilt

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 - \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = -\beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 161244
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \qquad (1)$$

Die Ungleichung (1) ist wegen $1+|a+b| > 0$, $1+|a| > 0$, $1+|b| > 0$ für alle reellen a, b erfüllt, wenn jede der folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

$$|a+b|(1+|a|)(1+|b|) \leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|) \qquad (2)$$

$$|a+b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \leq |a|+|b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+2|a|\cdot|b|+2|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (3)$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| + |a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (4)$$

Nun ist für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b| \leq |a| + |b| + |a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (5)$$

erfüllt, also sind auch die Ungleichung (4) und daher die Ungleichungen (3), (2) und (1) erfüllt. w.z.b.w.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 161245
Man ermittle die Anzahl aller Paare (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, dass die Gleichung $x^5 + px + q = 0$ mindestens eine rationale Lösung hat.

Angenommen, für ein Paar (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ sei x eine rationale Lösung der Gleichung $x^5 + px + q = 0$.
Wegen $p \geq 1$, $q \geq 1$ gilt dann $x = -\frac{a}{b} < 0$, wobei a,b teilerfremde Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ sind. Es gilt also

$$-\frac{a^5}{b^5} - p\frac{a}{b} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad qb^5 = pab^4 + a^5$$

Daher gilt $b|a^5$, also $b = 1$, da a und b teilerfremd sind. Daraus ergibt sich:

$$q = pa + a^5 \quad \Rightarrow \quad q = a(p + a^4)$$

Wegen p,q,$a \geq 1$ und $q \leq 100$ gilt daher $1 \leq a < 3$, also $a = 1$ oder $a = 2$.

1. Im Falle $a = 1$ erhält man $q = p + 1$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 99$, d.h., es gibt in diesem Falle nur 99 Paare $(p, p + 1)$ ($p = 1$,2,...,99), die die geforderte Eigenschaft haben können.

2. Im Falle $a = 2$ erhält man $q = 2p + 32$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 34$, d.h., es gibt in diesem Falle nur 34 Paare $(p, 2 + +32)$ ($p = 1$,2,...,34), die die geforderte Eigenschaft haben können.

Die angegebenen $99 + 34 = 133$ Paare sind wegen $p + 1 < 2p + 32$ sämtlich voneinander verschieden. Ferner haben sie die geforderte Eigenschaft; denn es gilt
im Falle 1: $x = -\frac{a}{b} = -1$, also $x^5 + px + (p + 1) = 0$ und
im Falle 2: $x = -\frac{a}{b} = -2$, also $x5 + px + (2p + 32) = 0$.
Daher gibt es genau 133 Paare (p,q) mit der verlangten Eigenschaft.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6A - 161246A
Es sind alle Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen x gilt $x \cdot f(x - 1) = (x - 2) \cdot f(x)$.

Für $x = 2$ folgt: $2 \cdot f(1) = 0$, d.h., $x = 1$ ist Nullstelle von $f(x)$.
Für $x = 1$ folgt daraus: $1 \cdot f(0) = 0$, d.h., $x = 0$ ist Nullstellen von $f8x)$.
Somit kann $f(x)$ dargestellt werden, als

$$f(x) = x \cdot (x - 1) \cdot g(x)$$

mit einem Polynom $g(x)$. Setzt man diesen Ansatz in die Funktionalgleichung ein, so ergibt sich:

$$x \cdot [(x - 1)(x - 2)g(x - 1)] = (x - 2) \cdot [x \cdot (x - 1)g(x)]$$

Hieraus folgt für alle $x \neq 0, 1, 2$ die Beziehung $g(x - 1) = g(x)$, d.h., $g(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1. Daraus folgt, da $g(x)$ ein Polynom ist:

$$g(x) = c = \text{const.}$$

Somit erhält man, dass alle Polynome der geforderten Art in der Form

$$f(x) = c \cdot x \cdot (x - 1) \qquad (2)$$

mit reellem c darstellbar sind. Setzt man die gefundene Darstellung in die Funktionalgleichung ein, so entsteht die Identität

$$x \cdot c \cdot (x - 1)(x - 2) = (x - 2) \cdot c \cdot x \cdot (x - 1)$$

so dass auch tatsächlich jedes Polynom der Form (1) den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 6B - 161246B
Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.
Hinweis:
Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

a) Die Strecken, die den Mittelpunkt des n-Ecks mit dessen Eckpunkten verbinden, zerlegen das n-Eck in n spitzwinklige Dreiecke. In eine kleinere Anzahl von sämtlich spitzwinkligen Dreiecken lässt sich das n-Eck nicht zerlegen.

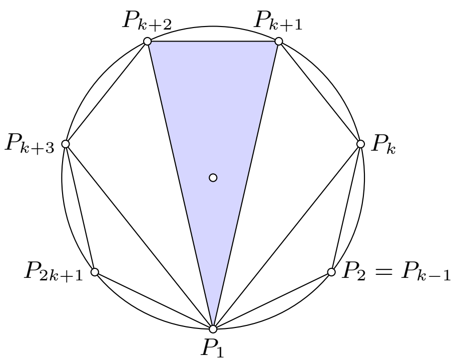
Andernfalls müssten zwei nebeneinander liegende Seiten des n-Ecks zu ein und demselben Zerlegungsdreieck gehören, das dann aber, da der Winkel zwischen diesen beiden Seiten für $n = 5$ stumpf ist, kein spitzwinkliges Dreiecke mehr ist.

b) Jedes Dreieck ABC lässt sich in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegen. Man verbinde hierzu den Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden mit den drei Eckpunkten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \angle ASB &= \pi - \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC + \angle CAB) \\ &= \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \angle ACB) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \angle ACB > \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Analog gilt $\angle BSC, \angle CSA > \frac{\pi}{2}$.
Jedes beliebige regelmäßige n-Eck $P_1P_2...P_n$ $(n \geq 5)$ lässt sich in stumpfwinklige Dreiecke zerlegen.

Es sei $n = 2k + 1$ (k natürliche Zahl):
Das n-Eck wird durch $(n - 3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4, ..., P_{n-1}$ in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe Abbildung für $n = 7$)



Die Winkel

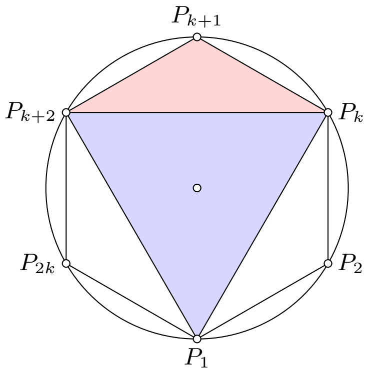
$$\angle P_1P_2P_3, \angle P_1P_3P_4, ..., \angle P_1P_kP_{k+1}, \angle P_{k+2}P_{k+3}P_1, ..., \angle P_{n-1}P_nP_1$$

sind als Peripheriewinkel im umbeschriebenen Kreis über den angegebenen Diagonalen, von denen keine Durchmesser ist, größer als 90°, da der entsprechende Eckpunkt auf dem kleineren der beiden Teilbögen liegt.
Das Dreieck $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ kann, wie angegeben, in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine verlangte Zerlegung gefunden ist.

Es sei $n = 2k$:

Das n-Eck wird wieder durch $(n-3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4,..., P_{n-1}$ in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe nachfolgende Abbildung für $n=6$)
Die Diagonale P_1P_{k+1} ist Durchmesser im umbeschriebenen Kreis von $P_1P_2...P_n$, also sind die Dreiecke $P_1P_kP_{k+1}$ und $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ nicht stumpfwinklig.

Das Viereck $P_1P_kP_{k+1}P_{k+2}$ wird nun in die Dreiecke $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ (stumpfwinklig, da zwei der Dreiecksseiten benachbarte n-Eckseiten sind) und $P_1P_kP_{k+2}$ zerlegt. Das Dreieck $P_1P_kP_{k+2}$ kann dann wieder wie angegeben in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine gesuchte Zerlegung gefunden wurde.



Es wird nun gezeigt, dass eine Zerlegung in weniger als n stumpfwinklige Dreiecke nicht existieren kann. Dazu wird zuerst nachgewiesen, dass keine Zerlegung in stumpfwinklige Dreiecke existiert, die ausschließlich durch Diagonalen entsteht, d.h., bei der die Eckpunkte sämtlicher Zerlegungsdreiecke zugleich Eckpunkte des n-Ecks sind.

Angenommen, es existiert eine solche Zerlegung. Es sei o.B.d.A. P_1P_m einer Diagonale dieser Zerlegung mit maximaler Länge. Nach Voraussetzung ist sie Seite zweier Zerlegungsdreiecke $P_1P_rP_m$ und $P_1P_mP_s$ mit $1 < r < m < s$.
Da P_1, P_r, P_m, P_s Eckpunkte des n-Ecks sind, ist das Viereck $P_1P_rP_mP_s$ Sehnenviereck und es gilt

$$\angle P_1P_rP_m + \angle P_mP_sP_1 = \pi$$

Dann ist jedoch einer der beiden Winkel, o.B.d.A. $\angle P_1P_rP_m$, nicht größer als $\frac{\pi}{2}$. Wegen der Maximalität von P_1P_m muss aber $\angle P_1P_rP_m$ als Winkel, der der größten Seite gegenüber liegt, der größte Winkel im Dreieck $P_1P_rP_m$ sein. Folglich kann das Dreieck $P_1P_rP_m$ im Widerspruch zur Annahme nicht stumpfwinklig sein.

Da nach Voraussetzung kein Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks innerer Punkt einer n-Eckseite sein kann, muss folglich ein innerer Punkt P des n-Ecks existieren, der Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks ist. Er kann dann nicht innerer Punkt eines Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks sein, ist also in allen Zerlegungsdreiecken, die ihn überhaupt enthalten, Eckpunkt.
Die Winkel, deren Scheitelpunkt P ist, haben die Winkelsumme 2π. Die Winkel, für die die Punkte $P_1, P_2, ..., P_n$ Scheitelpunkte sind, haben die Winkelsumme $(n-2)\pi$.

Folglich kann die Anzahl der Zerlegungsdreiecke nicht kleiner als $\frac{1}{\pi} \cdot [2\pi + (n-2)\pi] = n$ sein.

Übernommen aus [5]

9.19 XVII. Olympiade 1977

9.19.1 I. Runde 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171211
Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

Angenommen, eine natürliche Zahl a habe die geforderten Eigenschaften. Dann ist a durch die Primzahlen 17, 19 und 23 teilbar, also auch durch ihr Produkt $17 \cdot 19 \cdot 23 = 7429$. Daher gibt es eine ganze Zahl n mit $a = 7429n$.

Da a fünfstellig ist, gilt $10000 \leq 7429n \leq 99999$, also $2 \leq n \leq 13$. Ist y die Einerziffer von a, so gilt: Da a die Zehnerziffer 0 hat, hat die Zahl $a - y$ an ihren beiden letzten Stellen je eine 0, sie ist also durch 1100 teilbar. Daher gibt es eine ganze Zahl g mit $7429n - y = 100g$ bzw.

$$29n = 100(g - 74n) + y$$

Setzt man $x = g - 74n$, dann erhält man $29n = 100x + y$ bzw. $100x = 29n - y$. Wegen $2 \leq n \leq 13$ und $0 \leq y \leq 9$ gilt nun

$$49 = 29 \cdot 2 - 9 \leq 29n - y = 100x \leq 29 \cdot 13 - 0 = 377$$

Daraus folgt $1 \leq x \leq 3$. Aus $29n = 100x + y$ bzw. $29(n - 3x) = 13x + y$ erhält man, wenn man $z = n - 3x$ setzt,

$$13 = 13 \cdot 1 + 0 \leq 29z = 13x + y \leq 13 \cdot 3 + 9 = 48$$

also $z = 1$.
Daraus ergibt sich $13x + y = 29$, also ist $29 - y$ durch 13 teilbar, was wegen $0 \leq y \leq 9$ nur für $y = 3$ gilt. Mithin gilt $x = 2$, $n = 3x + z = 7, a = 7929 \cdot 7 = 52003$. Daher kann nur diese Zahl die verlangten Eigenschaften haben.

Sie hat diese Eigenschaften; denn sie ist als Vielfaches von $17 \cdot 19 \cdot 23$ durch 17, 19 und 23 teilbar und hat 0 als Zehnerziffer.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 171212
Man ermittle alle reellen Lösungen $(x,\, y)$ des Gleichungssystems

$$2 \cdot \sqrt{x+y} + x + y = 8 \qquad (1)$$
$$x^3 + y^3 = 40. \qquad (2)$$

Angenommen, es sei (x,y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt $x + y \geq 0$. Setzt man $z = \sqrt{x+y}$, so gilt $z \geq 0$ und wegen (1)

$$z^2 + 2z - 8 = 0 \qquad (3)$$

Die quadratische Gleichung (3) hat genau eine nichtnegative reelle Lösung, nämlich $z = 2$. Daraus folgt

$$x + y = 4 \qquad ; \qquad y = 4 - x \qquad (4)$$

also wegen (2)

$$x^3 + (4 - x)^3 = 40$$
$$x^3 + (64 - 48x + 12x^2 - x^3 - 40 = 0$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad (5)$$

Die quadratische Gleichung (5) hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 2\sqrt{2}$; dann ist wegen (4) $y_1 = 2 - \sqrt{2}$, und $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, dann ist $y_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sein.

Für $(x,y) = (2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ sowie für $(x,y) = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ gilt nun

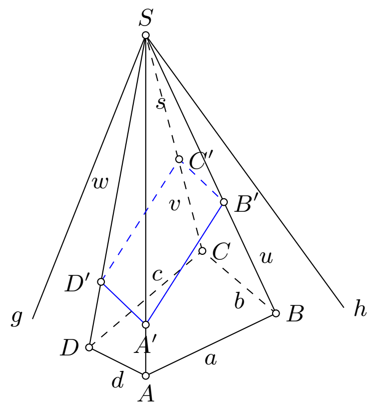
$$2\sqrt{x+y} + x + y = 2\sqrt{4} + 4 = 8$$
$$x^3 + y^2 = (2+\sqrt{2})^3 + (2-\sqrt{2})^3 = 2(8+12) = 40$$

d.h., die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt. Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ und $(x,y) = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 171213
Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, dass A, B, C, D in einer Ebene ξ liegen; dass sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und dass S nicht in ξ liegt.

Es ist zu beweisen, dass dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCDS$ eine Ebene existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.



Nach Voraussetzung ist $A \neq B$, und S liegt nicht auf der Geraden durch A, B. Daher gibt es genau eine Ebene α durch A, B, S. Ebenso gibt es eine Ebene β durch B, C, S, genau eine Ebene γ durch C, D, S und genau eine Ebene δ durch D, A, S. Für diese Ebenen gilt:

(1) α und ξ haben genau die Gerade a durch A, B gemeinsam,
β und ξ haben genau die Gerade b durch B, C gemeinsam,
γ und ξ haben genau die Gerade c durch C, D gemeinsam,
δ und ξ haben genau die Gerade d durch D, A gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch A und B. Wäre $\alpha = \xi$, so läge S auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(2) α und β haben genau die Gerade u durch B, S gemeinsam,
β und γ haben genau die Gerade v durch C, S gemeinsam,
γ und δ haben genau die Gerade w durch D, S gemeinsam,
δ und α haben genau die Gerade d durch A, S gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch B und S. Wäre $\alpha = \beta$, so lägen A, B, C, S auf α, also wäre $\alpha = \xi$, und S läge auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(3) α und γ haben genau eine Gerade gemeinsam,
β und δ haben genau eine Gerade gemeinsam,

Beweis: α und γ durch S. Wäre $\alpha = \gamma$, so lägen A, B, C, D, S auf α, also S auf ξ. Ebenso folgt die andere Aussage.

(4) g und h haben genau den Punkt S gemeinsam, folglich gibt es genau eine Ebene η durch g, h.

Beweis: g und h gehen durch S. Wäre $g = h$, so gingen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch g; nach (2) wäre $u = v = w = s = g$, also lägen A, B, C, D, S auf g.

(5) α und η haben genau die Gerade g gemeinsam,

β und η haben genau die Gerade h gemeinsam,

γ und η haben genau die Gerade g gemeinsam,

δ und η haben genau die Gerade h gemeinsam.

Beweis: α und η gehen durch g. Wäre $\alpha = \eta$, so ginge außer β, δ auch α durch h, nach (2) wäre $u = v = h$, also lägen A, B, S auf h. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(6) A liegt nicht η,

B liegt nicht η,

C liegt nicht η,

D liegt nicht η,

Beweis: Läge A auf η, so läge A nach (5) sowohl auf g als auch auf h; nach (4) wäre daher $A = S$. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(7) A und B liegen auf derselben Seite von η,

B und C liegen auf derselben Seite von η,

C und D liegen auf derselben Seite von η,

Beweis: Lägen A und B nicht auf derselben Seite von η, so ginge η nach (6) durch einen Punkt P zwischen A und B. Nach Voraussetzung wäre $P \neq S$; die Gerade durch P und S stimmte nach (5) mit g überein. Also läge P auf γ und folglich nach (1) auf c.

Das steht im Widerspruch dazu, dass die Geraden a und c sich wegen der Konvexität von $ABCD$ nicht zwischen A und B schneiden können. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

Verschiebt man nun η parallel zu sich nach derjenigen Seite hin, auf der A,B,C und D liegen, jedoch um ein so kleines Stück, dass auch der zu η nächstgelegene unter den vier Punkten A, B, C, D noch nicht erreicht wird, so erhält man eine Ebene ϵ, die alle vier Strecken AS, BC, CS, DS in inneren Punkten schneidet.

Sind A', B', C', D' die Schnittpunkte, so gilt $A' \neq B'$, $B' \neq C'$, $C' \neq D'$, $D' \neq A'$, (da ABS, BCS, CDS, DAS nicht entartete Dreiecke sind) und weiter:

(8) Die Gerade durch A', B' ist parallel zu g,

Die Gerade durch B', C' ist parallel zu h,

Die Gerade durch C', D' ist parallel zu g,

Die Gerade durch D', A' ist parallel zu h,

Beweis: Die Ebene α scheidet η nach (5) genau in g, also schneidet sie die zu η parallele Ebene ϵ genau in einer zu g parallelen Geraden. Auf dieser liegen A' und B'. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

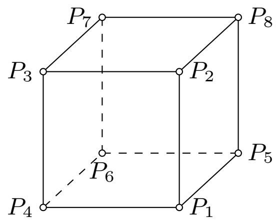
Mit (8) ist der verlangte Beweis geführt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 171214

Jemand sucht alle Möglichkeiten, vier Ecken eines gegebenen Würfels schwarz zu markieren. Er betrachtet zwei dieser Markierungsmöglichkeiten genau dann als gleich, wenn es eine Drehung des Würfels gibt, die die eine der beiden Markierungsmöglichkeiten in die andere überführt.

Ermitteln Sie alle verschiedenen Markierungsmöglichkeiten!



Die Eckpunkte des gegebenen Würfels seien wie in der Abbildung mit $P_1, P_2, ..., P_8$ bezeichnet.

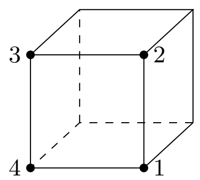
Jede der gesuchten Markierungen wird durch genau einen der drei folgenden Fälle erfasst. Dabei können Markierungsmöglichkeiten, die im Sinne der Aufgabenstellung einander gleich sind, nur durch denselben Fall erfasst werden, da die Eigenschaften, die die Fälle unterschieden, von Drehungen des Würfels unabhängig sind.

Fall 1: Es gibt eine Seitenfläche des Würfels, in der alle vier markierten Punkte liegen.

Fall 2: Es gibt eine Seitenfläche des Würfels, in der genau drei der markierten Punkte liegen.

Fall 3: Jede Seitenfläche des Würfels enthält höchstens zwei der markierten Punkte.

zu 1.: Da sich jede Seitenfläche in jede andere durch eine Drehung des Würfels überführen lässt, gehören alle Markierungen des Falles 1 zu derjenigen Markierungsmöglichkeit, bei der P_1, P_2, P_3, P_4 markiert sind.



zu 2.: Aus den gleichen Grund gehören alle Markierungen des Falles 2 zu einer derjenigen Markierungsmöglichkeit, bei denen genau drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 markiert sind und folglich genau einer von ihnen nicht markiert ist.

Da sich jeder der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in jeden anderen von ihnen durch eine Drehung des Würfels überführen lässt, die die gesamte Seitenfläche $P_1P_2P_3P_4$ in sich überführt, so folgt:

Aller Markierungen des Falles 2 gehören zu einer derjenigen Markierungsmöglichkeit, bei denen P_1, P_2, P_3 markiert sind, P_4 aber nicht. Als vierte Punkt ist somit einer der Punkte P_5, P_6, P_7, P_8 markiert; hiernach wird jede Markierung des Falles genau durch einen der drei folgenden Unterfälle erfasst, wobei wieder Markierungsmöglichkeiten, die im Sinne der Aufgabenstellung einander gleich sind, nur durch denselben Unterfall erfasst werden (da die nachstehend genannten Anzahlen von Seitenflächen, die die Unterfälle unterscheiden, von Drehungen des Würfels unabhängig sind).

2.1.: Wird P_8 markiert, so hat genau eine Seitenfläche, nämlich $P_1P_2P_3P_4$, die Eigenschaft, dass drei ihrer Punkte markiert sind.

2.2.: Wird P_6 markiert, so haben genau drei Seitenflächen diese Eigenschaft.

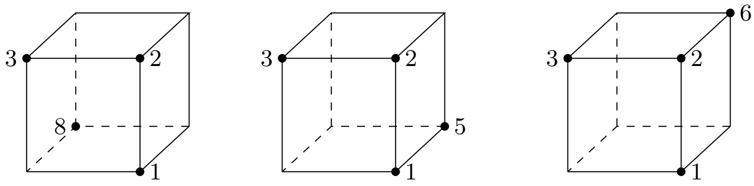
2.3.: Wird P_5 oder P_7 markiert, so haben genau zwei Seitenflächen diese Eigenschaft.

Gäbe es nun eine Drehung, die die Markierungsmöglichkeit P_1, P_2, P_3, P_5 in P_1, P_2, P_3, P_7 überführt, so müsste sie der Menge der drei in $P_1P_2P_3P_4$ gelegenen Punkte P_1, P_2, P_3 entweder in sich oder in die Menge der drei in $P_2P_3P_7P_6$ gelegenen Punkte überführen.

Das erste ist nur so möglich, dass jeder Punkt des Würfels in sich selbst übergeht, das zweite nur so, dass P_1 in P_7, P_2 in P_3, P_3 in P_2 sowie P_5 in P_8 übergeht. Hiermit kann also die Markierungsmöglichkeit P_1, P_2, P_3, P_5 nicht in P_1, P_2, P_3, P_7 überführt werden.

Daher liegen im Fall 2 genau die folgenden vier im Sinne der Aufgabenstellung verschiedenen Markierungsmöglichkeiten vor:

$$P_1, P_2, P_3, P_8 \quad , \quad P_1, P_2, P_3, P_6 \quad , \quad P_1, P_2, P_3, P_5 \quad , \quad P_1, P_2, P_3, P_7$$

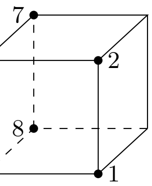


Zu 3.: Jede Markierung des Falles 3 wird durch genau einen der zwei folgenden Unterfälle erfasst, wobei wieder Markierungsmöglichkeiten, die im Sinne der Aufgabenstellung einander gleich sind, nur durch denselben Unterfall erfasst werden.

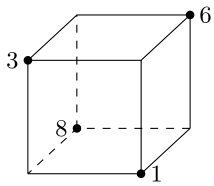
3.1: Es gibt eine Kante des Würfels, die zwei markierte Punkte enthält.

3.2: Es gibt keine Kante des Würfels, die zwei markierte Punkte enthält.

zu 3.1: Da sich jede Kante des Würfels in jede andere durch eine Drehung des Würfels überführen lässt, gehören alle Markierungen des Unterfalles 3.1. zu einer derjenigen Markierungsmöglichkeiten, bei denen P_1 und P_2 markiert sind. Dann ist keiner der Punkte P_3, P_4, P_5, P_6 markiert, da sonst eine Seitenfläche mit mehr als zwei markierten Punkten existieren würde. Also list die Markierungsmöglichkeit P_1, P_2, P_7, P_8 vor.



zu 3.2: Da sich jede Kante in jede andere durch eine Drehung des Würfels überführen lässt, gehören alle Markierungen des Unterfalls 3.2 zu einer derjenigen Markierungsmöglichkeiten, bei der P_1 markiert ist. Dann ist keiner der Punkte P_2, P_4, P_5 markiert. Wäre ferner P_7 markiert, so wäre keiner der Punkte P_3, P_6, P_8 markiert, und es gäbe nicht vier markierte Punkte. Also liegt die Markierungsmöglichkeit P_1, P_3, P_6, P_8 vor.



Damit sind alle verschiedenen Markierungsmöglichkeiten ermittelt.

Übernommen von [5]

9.19.2 II. Runde 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171221
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt:
Wenn
(1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn
(2) b_1 $(\neq 0)$ das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1 = -3b_1$,
(4) $a_2 = 2b_2$,
(5) $a_3 = b_3$,
(6) d ist eine ganze Zahl.

Für die arithmetische Folge gilt: $a_{i+1} = a_i + d$.
Für die geometrische Folge gilt: $b_{i+1} = b_i \cdot q$ mit $q = \frac{b_{i+1}}{b_i}$. Mit (3),(4),(5) lassen sich sich zunächst die Gleichungen für d: (i) und für q: (ii) ermitteln.

$$\frac{b_2}{b_1} = q = \frac{\frac{a_2}{2}}{\frac{a_1}{-3}} = -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} \quad ; \quad \frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} = \frac{2a_3}{a_2}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{a_2}{(a_2-d)} = 2\frac{(a_2+d)}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}a_2^2 = 2(a_2+d)(a_2-d)$$

$$-\frac{3}{2}a_2^2 = 2a_2^2 - 2d^2 \quad ; \quad d = \pm\sqrt{7}\cdot\frac{a_2}{2} \quad (i)$$

$$q = 2\frac{a_3}{a_2} = 2\frac{a_2+d}{a_2} = a_2\frac{(2+\sqrt{7})}{a_2} = \pm\sqrt{7}+2 \quad (ii)$$

Aus der Summe der Glieder $\sum_{i=1}^{3} a_i$ berechnet sich b_2 und daraus mit (4) auch sofort a_2.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3a_2 = -\frac{3b_2}{2+\sqrt{7}} + 2b_2 + 2b_2 + \sqrt{7}b_2$$

$$3a_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 2b_2(2+\sqrt{7}) + b_2\sqrt{7}(2+\sqrt{7})$$
$$6b_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 4b_2 + 2b_2\sqrt{7} + 2\sqrt{7}b_2 + 7b_2$$
$$b_2 = \sqrt{7} \quad ; \quad a_2 = 2\sqrt{7}$$

Mit (i) und (ii) existieren jeweils zwei Lösungen für $d = \pm 7$ und $q = \pm\sqrt{7}+2$, woraus sich die nachstehenden Werte ergeben.

d	a_1	a_2	a_3	q	b_1	b_2	b_3	a_1/b_1	a_2/b_2	a_3/b_3
7	$2\sqrt{7}-7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}+7$	$2+\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2+\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2+\sqrt{7})$	-3	2	1
7	-1,71	5,28	12,29	4,64	0,57	2,64	12,29	-3	2	1
-7	$2\sqrt{7}+7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}-7$	$2-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2-\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2-\sqrt{7})$	-3	2	1
-7	12,29	5,28	-1,71	-0,64	-4,097	2,64	-1,71	-3	2	1

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 2 - 171222
Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen x, die diesen Bedingungen genügen:

(A1) x ist dreistellig.
(A2) Es gilt: $500 < x < 600$.
(A3) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
(B1) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.
(B2) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
(B3) x ist durch 5 teilbar.
(C1) x ist eine Quadratzahl.
(C2) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
(C3) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
(D1) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
(D2) x ist Primzahl.
(D3) x ist ungerade.

Angenommen, eine Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Es gilt also
(1) A macht genau zwei wahre Aussagen.
(2) B, C und D machen jeweils genau eine oder genau zwei wahre Aussagen.

Wäre A1 falsch, dann wäre auch A2 falsch, im Widerspruch zu (1). Also ist A1 richtig. (3)
Im folgenden sei h die Hunderterziffer der Zahl, z die Zehnerziffer und e die Einerziffer.

Fall 1)

Angenommen A3 wäre richtig, dann ist die Zahl dreistellig und ihre Quersumme müsste zweistellig sein. Da die Quersumme eine dreistelligen Zahl höchstens 27 ist, muss wegen A3 die erste Ziffer der Quersumme gleich 1 sein.
Sei r die Einerziffer der Quersumme, so gilt wegen A3:

$$h + z + e = 10 + r \Leftrightarrow h + z + e + r = 10 + 2r$$

h, z, e und r sind dabei gerade die vier Ziffern 3, 5, 7, 9. Es gilt also $10 + 2r = h + z + e + r = 24$. Daraus folgt $r = 7$. h, z und e sind also 3, 5 und 9.
Da A2 wegen (1) nicht erfüllt ist, kommen die vier Kombinationen 359, 395, 935 und 953 in Frage.

Für keine der Zahlen 359, 395, 935 und 953 ist B1 erfüllt. Für 359 und 953 (beides sind Primzahlen) ist weder B2 noch B3 erfüllt. Das steht im Widerspruch zu (2).
Die Primfaktorzerlegungen der beiden übrigen Zahlen lauten: $395 = 5 \cdot 79$ und $935 = 5 \cdot 11 \cdot 174$. B2 ist also nur für 935 erfüllt und B3 für 395 und 935.

C1 und C3 gelten weder für 395 noch für 935. Wegen (2) muss also C2 gelten.
Führt man die in C2 beschriebene Prozedur durch, so erhält man die Zahlen 953 und 359. Beides sind (wie oben bereits erwähnt) Primzahlen C2 ist also erfüllt.
Sowohl für 395 als auch für 935 ist D3 wahr und D2 falsch. Unabhängig von D1 ist also die Bedingung aus (2) erfüllt.
Im Fall 1) kommen also nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.

Fall 2)

Angenommen A3 wäre falsch, dann liegt die Zahl wegen (1) und A2 zwischen 500 und 600.
C2 ist dann nicht erfüllt, weil die neu gebildete Zahl am Ende eine 5 hätte und damit durch 5 teilbar wäre. Es muss wegen (2) also entweder C1 oder C3 gelten.
C1 gilt wegen $22^2 = 484 < 500 < 600 < 625 = 25^2$ nur für $23^2 = 529$ und $24^2 = 576$. C3 gilt nur für 555.

Für die drei Zahlen 529, 576 und 555 gilt nun:
B1 ist nur für 555 erfüllt.
B2 ist nur für 555 erfüllt – $529 = 23 \cdot 23$, $576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$.
B3 ist nur für 555 erfüllt.
Alle drei Zahlen widersprechen also der Bedingung (2).

Fazit: Es kommen insgesamt nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.
Für beide Zahlen sind (1) und (2) erfüllt. Die wahren Aussagen sind:
395: A1, A3, B3, C2, D3
935: A1, A3, B3, C2, D1, D3

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 3 - 171223
Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die

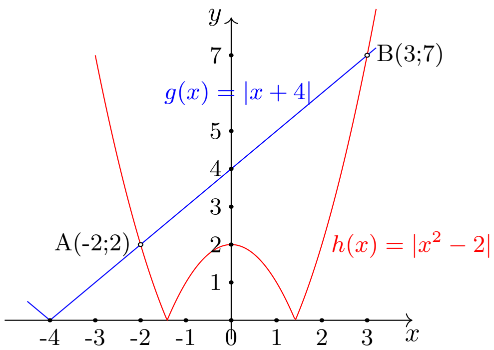
$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$$

ganzzahlig ist.

Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, d.h. auch $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ oder $x + 4 = 0$ gilt. Die Gleichung $|x + 4| = |x^2 - 2|$ hat ihre Lösungen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.
Man kann sich überlegen, dass nur im Intervall $[-2; 3]$ die Beziehung $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ gilt, wie auch durch folgende Grafik verdeutlicht wird:



Eine zusätzliche Möglichkeit für ein ganzzahligen Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ergibt sich für $x = -4$, da durch ein Zähler $= 0$ der ganze Bruch 0 wird (Nenner wird nicht 0).
Da x ganzzahlig sein soll, verbleiben für x nur die Möglichkeiten $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Einsetzen von x in die Ausgangsfunktion ergibt

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-4	3	-2	4	-1	0	0	1
1	-2	2	6	3	4		

Da in jedem Fall $f(x)$ ganzzahlig ist, ist die gesuchte Lösungsmenge $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Aufgabe gelöst von Steffen Polster

2. Lösung:
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, also $x^2 - 2$ ein Teiler von $x + 4$ ist. Damit ist $x^2 - 2$ auch ein Teiler von $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$ und damit auch von $x^2 - 16 - (x^2 - 2) = 14$.

Wegen $x^2 \geq 0$ ist $x^2 - 2 \geq -2$, sodass, da 14 genau die ganzzahligen Teiler ± 1, ± 2, ± 7 und ± 14 besitzt, $x^2 - 2 \in \{-2, -1, 1, 2, 7, 14\}$ bzw. $x^2 \in \{0,1,3,4,9,16\}$, also $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ gilt.
Für alle diese Werte, bis auf $x = 4$, zeigt die Probe, dass $f(x)$ tatsächlich auch eine ganze Zahl ist, sodass genau für diejenigen ganzen Zahlen x mit $-4 \leq x \leq 3$ der Funktionswert $f(x)$ auch eine ganze Zahl ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 171224
Gegeben sei in einer Ebene ϵ ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ϵ, für die $AX + BX = CX$ gilt.

I. Wir skalieren das Dreieck bis es den Umkreisradius 1 hat und legen es in ein Koordinatensystem, sodass $A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $C = (1,0)$ gilt. Für die gesuchten Punkte $X = (x,y)$ folgt

$$\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Quadrieren beider Seiten ergibt

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = (x-1)^2+y^2.$$

Wenn wir die Quadrate subtrahieren, ausmultiplizieren und erneut zusammenfassen, erhalten wir

$$2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = -(x+2)^2 - y^2 + 3.$$

Nochmaliges Quadrieren ergibt

$$4((x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)((x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2) = (-(x+2)^2 - y^2 + 3)^2.$$

Multiplizieren wir dies wieder aus, erhalten wir

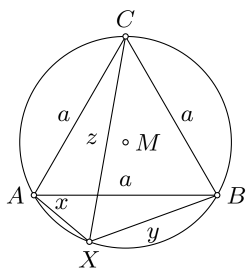
$$4x^4+8x^3+8x^2y^2+12x^2+8xy^2+8x+4y^4-4y^2+4 = x^4+8x^3+2x^2y^2+18x^2+8xy^2+8x+y^4+2y^2+1.$$

Wenn wir die rechte Seite subtrahieren und anschließend zusammmenfassen, bekommen wir als Ergebnis

$$3(x^2+y^2-1)^2 = 0.$$

Alle Punkte X, die der Bedingung $|AX| + |BX| = |CX|$ genügen, liegen also auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

II. Liegt ein Punkt X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, so bilden das Dreieck ABC und X ein Sehnenviereck. In diesem sind die Diagonalen (X liege zuerst zwischen A und B) einmal $|AB| = a$ und einmal $|CX| = z$. Die Viereckseiten sind $|CA| = a$, $|CB| = a$, $|AX| = x$ und $|BX| = y$.



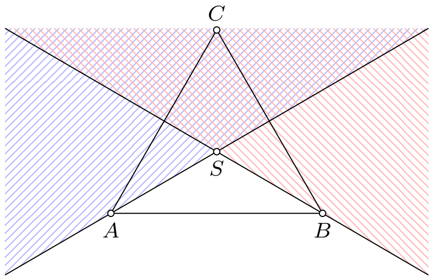
Nach dem Satz des Ptolemäus für Sehnenvierecke ist dann $x \cdot a + y \cdot a = z \cdot a$ womit sofort das Gesuchte ($a > 0$) $|AX| + |BX| = |CX|$ folgt.
Für $X = A$ bzw. $X = B$ ergibt sich mit $|AX| = 0$ und $|BX| = a$ bzw. mit $|BX| = 0$ und $|AX| = a$, dass die Punkte A und B ebenfalls zur Lösungsmenge gehören.

Liegt X nicht zwischen A und B sondern auf den Kreisbögen $\overset{\frown}{AC}$ bzw. $\overset{\frown}{BC}$ erhält man für das Sehnenviereck nach dem Satz des Ptolemäus entweder $x \cdot a + z \cdot a = y \cdot a$ oder $y \cdot a + z \cdot a = x \cdot a$. Für derartige X ist $AX + BX = CX$ nicht erfüllt.

Die Menge alle Punkte X mit der geforderten Eigenschaft ist damit der Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ inkl. seiner Randpunkte.

Aufgabe gelöst von ochen

2. Lösung:



Der Schwerpunkt von $\triangle ABC$ sei S. Liegt ein Punkt X auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C, so ist $BX > CX$ (da diese Gerade die Mittelsenkrechte von BC ist), also erst recht $AX + BX > CX$. Liegt X auf derselben Seite der Geraden durch B und S wie C, so gilt entsprechend $AX > CX$, also $AX + BX > CX$.
Gehört ein Punkt X der Fläche des Dreiecks ABC an, ist aber von A und V verschieden, so gilt

- $AX + BX \geq AB$ (Dreiecksungleichung)
- $> CX$ (da alle Punkte der Dreiecksfläche außer A und B im Innern des Kreises um C durch A und B liegen).

Für $X = A$ und für $X = B$ gilt die Gleichung $AX + BX = CX$.

Die nun noch verbleibenden Punkte X liegen sämtlich in derjenigen Halbebene H, die von der Geraden durch A und B begrenzt wird und nicht C enthält. Außerdem kann durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass X nicht auf der Verlängerung von CA liegt, so dass die Punkte A, C, X ein (nicht entartetes) Dreieck bilden.

Es sei $\triangle AXY$ dasjenige gleichseitige Dreieck, für das Y und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und X liegen. Dann gilt

$$AX = AY \qquad , \qquad AB = AC \tag{1}$$

und die Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken AXY, ABX ist gleich der Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken ABC, ABX.

Nach den Angaben über X ist diese Summe entweder kleiner oder größer als 180°; in beiden Fällen folgt, dass die Dreiecke ABY und ACX bei A gleichgroße Innenwinkel haben. Hieraus und aus (1) ergibt sich $\triangle ABY \cong \triangle ACX$, also $BY = CX$.

Also gilt genau dann $AX + BX = CY$, wenn $XY + BX = BY$ gilt. Diese ist genau dann der Fall, wenn X auf der Strecke BY liegt, d.h. die Summe der Innenwinkel bei X in den Dreiecken AXY und AXB genau 180° beträgt.
Hierfür ist $\angle AXB = 120°$ notwendig und hinreichend und dies ist (für die im vorliegenden Fall betrachteten X) gleichwertig damit, dass X auf dem in H verlaufenden Kreisbogen liegt, der zu einem Zentriwinkel der Größe 240° gehört.

Wegen $\angle ASC + \angle CSB = 240°$ ist S der zugehörige Kreismittelpunkt. Die gesuchte Menge ist also derjenige Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Unkreises des Dreiecks ABC, der C nicht enthält.

Übernommen von [5]

9.19.3 III. Runde 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171231
Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2+121} \tag{1}$$

für $n = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

1. Untere Grenze:
$\frac{4n}{4n^2+121}$ ist, da n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Lässt man n gegen Unendlich laufen, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4n^2+121} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{4+\frac{121}{n^2}} = \frac{0}{0+4} = 0$$

(a_n) ist also eine Nullfolge. Da alle ihre Folgenglieder positiv sind, ist 0 die untere Grenze (die aber niemals in der Folge vorkommt).
2. Obere Grenze:
Man subtrahiere a_{n+1} von a_n:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4n}{4n^2+121} - \frac{4(n+1)}{4(n+1)^2+121} = \frac{4n\cdot(4n^2+8n+125)-(4n+4)\cdot(4n^2+121)}{(4n^2+121)\cdot(4(n+1)^2+121)} =$$

$$= \frac{16n^2+16n-484}{(4n^2+121)\cdot((2n+2)^2+121)}$$

Der Nenner ist, weil n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Der Zähler wird mit größer werdendem n auch immer größer. Die einzige zutreffende Nullstelle des Zählers liegt zwischen $n = 5$ und $n = 6$:

$$n = 5: \quad 16n^2+16n-484 = -4 < 0$$
$$n = 6: \quad 16n^2+16n-484 = 188 > 0$$

Für alle $n \leq 5$ ist also $16n^2+16n-484$ und damit $a_n - a_{n+1} < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ für $n < 6$.
(a_n) steigt also bis zu a_6 streng monoton. Für alle $n > 5$ ist $16n^2+16n-484$ und damit an $-a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$. (a_n) fällt also bis a_6 streng monoton.
Folglich nimmt die Folge bei a_6 ihren größten Wert an. $a_6 = \frac{24}{265}$ ist die obere Grenze der Folge.

Aufgabe gelöst von Annika Heckel

Aufgabe 2 - 171232
Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0$$

Die Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = x^3\cdot(x+1) + a^2x^2 + (x+1) = (x^3+1)\cdot(x+1) + a^2x^2$$

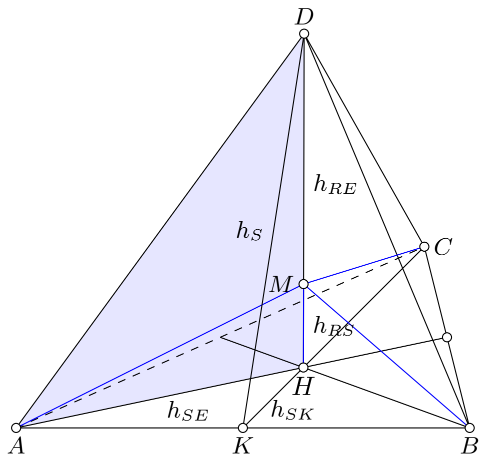
$(x+1)$ ist genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist $(x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1)$
(x^3+1) ist ebenfalls genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist $(x^3+1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1)$.

Folglich sind $(x+1)$ und (x^3+1) stets beide negativ oder beide größer oder gleich 0. Also ist ihr Produkt $(x+1)\cdot(x^3+1)$ stets größer gleich 0.
a^2x^2 ist als Quadratzahl stets größer oder gleich 0.
Es gilt also $(x^3+1)\cdot(x+1)+a^2x^2 \geq 0$, wobei der Gleichheitsfall nur eintritt, wenn sowohl $(x^3+1)\cdot(x+1)$ als auch a^2x^2 gleich 0 ist.
Also muss gelten:
(1) $(x^3+1)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sowie

(2) $a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $x = 0$ aus $x = -1$ (s.o.) folgt also $a = 0$.
Folglich gibt es nur für $a = 0$ eine Lösung, nämlich $x = -1$.

Aufgabe gelöst von Annika Heckel

Aufgabe 3 - 171233
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, dass gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.
Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.



Als Mittelpunkt (z.B. H) einer Seite bezeichne ich den Punkt, in dem sich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte bzw. Höhen (was bei einem gleichseitigen Dreieck alles das Gleiche ist) schneiden.
Als Raumhöhe bezeichne ich die Strecke vom Mittelpunkt einer Seite zur gegenüberliegenden Tetraeder-Ecke. Diese Strecke tritt senkrecht aus der Seite mit dem Mittelpunkt.
Als Raummittelpunkt M bezeichne ich den Punkt, in dem sich die 4 Raumhöhen schneiden.

Die Punkte auf den Raumhöhen haben denselben Abstand von 3 Seiten, der Raummittelpunkt sogar von 4 Seiten. Die Mittelpunkte von 4 der Kugeln liegen auf jeweils einer Raumhöhe und haben denselben Abstand von der dazugehörigen Ecke/Seite. Der Mittelpunkt der fünften Kugel ist der Raummittelpunkt.

Zunächst berechne ich die Seitenmittelpunkte. Dabei berechne ich eher Abstände als Punkte. Für die Seitenhöhe h_S gilt

$$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Mittelpunkt im Verhältnis 2 zu 1. Damit folgt für den Abstand einer Ecke zum Seitenmittelpunkt (z.B. AH)

$$h_{SE} = \frac{2}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{3}s$$

und von der Kante (z.B. KH)

$$h_{SK} = \frac{1}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{6}s$$

Für die Raumhöhe h_R gilt nun:

$$h_R^2 + H_{SK}^2 = h_S^2 \Rightarrow h_R = \frac{2\sqrt{2}}{3}h_S = \frac{\sqrt{6}}{3}s$$

Um die Abstände des Raummittelpunktes M von den Ecken h_{RE} (rote Linien) bzw. Seiten h_{RS} zu berechnen, betrachte ich das rechtwinklige Dreieck (z.B. $\triangle MHA$) vom Raummittelpunkt M zu einem Seitenmittelpunkt (z.B. H) zu einer Ecke (z.B. A) dieser Seite und zurück. Es gilt

$$h_{RE}^2 = h_{RS}^2 + h_{SE}^2 \quad \text{und} \quad h_{RE} + h_{RS} = h_R$$

Es ergibt sich $h_{RS} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Der Umkugelradius h_{RE} ist gleich $\frac{\sqrt{6}}{4}s$.

Nun versucht man eine Kugel in eine Ecke zu platzieren, d.h. bei einem gegeben Radius r die Kugel auf einer Raumhöhe so weit zur Ecke hin zu schieben, bis die Kugel alle 3 Seiten berührt. Die Berührungspunke liegen dabei auf den Seitenhöhen.
Ist die Bedingung (Berührung) für eine Seite erfüllt, gilt sie auch für die anderen zwei.

Für den Winkel α, den die Raumhöhe mit einer der drei möglichen Seitenhöhen einschließt, gilt $\sin\alpha = \frac{h_{SK}}{h_S} = \frac{1}{3}$. Für den Abstand z, den der Mittelpunkt der Kugel (in 2D übertragen ein Kreis) von der Ecke haben muss, gilt $\sin\alpha = \frac{r}{z}$ (Radius und Seitenhöhe stehen senkrecht aufeinander), also $z = 3r$.
Damit alle 4 Kugeln die fünfte Kugel in der Mitte berühren, muss die Summe aus Abstand z der ersten Kugel von einer Ecke plus deren Radius plus nochmals diesem Radius (für die Kugel im Raummittelpunkt) gleich der vollen Strecke von der Ecke bis zum Mittelpunkt sein:

$$5r = h_{RE} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{20}$$

Wegen $r < h_{RS}$ befindet sich auch die fünfte Kugel im Inneren des Tetraeders, womit alle Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe gelöst von Daniel Gutekunst

Aufgabe 4 - 171234
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Beweis: Ausgehend von

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

erhält man durch Einsetzen von $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ und Kürzen durch 2 die weitere Ungleichung

$$bc + ac - ab \leq \frac{5}{6} < 1$$

und daraus nach Division durch $abc > 0$ schließlich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

wie behauptet.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 171235
Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt

$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$$

Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Es sei U der Umkreismittelpunkt, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ und F seine Fläche. Dann zerlegen die Strecken AI, BI und CI das Dreieck in drei Teildreiecke, die jeweils die Grundseiten AB, AC bzw. BC und eine dazu zugehörige Höhe der Länge r besitzen. Also ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|AB| + |AC| + |BC|) = \frac{1}{2} \cdot ur$$

und damit $ur = 2F$.
Die drei (ggf. auch zu einer Strecke entarteten) Dreiecke $\triangle ABU$, $\triangle ACU$ und $\triangle BCU$ sind jeweils gleichschenklig mit Schenkellänge R, besitzen also jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \angle x$, wobei x der Innenwinkel des betreffenden Dreiecks bei U ist.

Da der Sinus nur Werte ≤ 1 annimmt und nicht alle drei hier betrachteten Dreiecke rechtwinklig bei U sein können (liegt U im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks $\triangle ABC$, so ergänzen sich diese drei Innenwinkel der Teildreiecke bei U zu 360°, sonst bildet die Summe von zwei dieser drei Innenwinkel den dritten), aber diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ vollständig überdecken, gilt $F < 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot R^2$ bzw. $R^2 > \frac{2}{3}F = \frac{1}{3} \cdot ur$, also $R > \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$.

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C, so ist U nach der Umkehrung des Satzes von Thales der Mittelpunkt von AB. Damit gilt $|AB| = 2R$. Ist h die Höhe von C auf AB, so ist offenbar $h \leq |CU| = R$, also $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$. Damit ergibt sich nun $R^2 \geq F = \frac{1}{2} \cdot ur$ bzw. $R \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 171236A
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in $\mathbb{R}$ stetig sind und die Eigenschaft haben, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung $f(x^n) = f(x) \quad (1)$ gilt.
b) Man gebe eine in $\mathbb{R}$ definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Es sei f eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x^n)$ für alle reellen Zahlen x. Weiter sei $c := f(1)$. Sei eine beliebige reelle Zahl $x > 0$. Wir betrachten die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = x^{1/n^k}$ für alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = 1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl $k > 0$ gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(x^{n\cdot 1/n^k}) = f(x^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(1) = c$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = \frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = c$ aus $y_k > 0$ für alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = c.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x \geq 0$.
Wir untersuchen nun, wie sich f für negative reelle Zahlen verhält.
Wenn n gerade ist, erhalten wir

$$f(x) = f(x^n) = c$$

für jede reelle Zahl $x < 0$, da $x^n > 0$ ist.

Wenn n ungerade ist, betrachten wir eine beliebige reelle Zahl $x < 0$ und definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = -|x|^{1/n^k}$ ur alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} -\exp\left(\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -\exp\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl k gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(-|x|^{n\cdot 1/n^k}) = f(-|x|^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(-1) = d$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = -\frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = d$ aus $y_k < 0$ fuer alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$c = f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = d.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen x.

b) Wir betrachten

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

so gilt

$$\begin{aligned} f(x^n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|n\ln|x||\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}(\ln(n) + \ln|\ln|x||)\right) \\ &= \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||)\right) = f(x) \end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 6B - 171236B
Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $[\frac{7}{2}] = 3$; $[5] = 5$; $[-\pi] = -4$.
Man beweise:
Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + ... + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

Es ist $0 \leq x - [x] < 1$. Also existiert eine eindeutig bestimmte, positive ganze Zahl $k \leq n$ mit

$$\frac{k-1}{n} \leq x - [x] < \frac{k}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad [x] + \frac{k-1}{n} \leq x < [x] + \frac{k}{n}$$

sowie für alle ganzen Zahlen i:

$$[x] + \frac{k-1+i}{n} \leq x + \frac{i}{n} < [x] + \frac{k+i}{n}.$$

Da $[x]$ eine ganze Zahl ist, ist für $0 \leq i \leq n-k$ wegen

$$[x] \leq [x] + \frac{k-1+i}{n} \leq x + \frac{i}{n} < [x] + \frac{k+i}{n} \leq [x] + \frac{k+n-k}{n} = [x] + 1$$

also $\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x]$.

Analog ist für $n-k+1=n-(k-1) \leq i \leq n-1$ wegen

$$[x]+1=[x]+\frac{k-1+n-k+1}{n} \leq [x]+\frac{k-1+i}{n} \leq x+\frac{i}{n} < [x]+\frac{k+i}{n} \leq [x]+\frac{k+n-1}{n} < [x]+\frac{n+n}{n}=[x]+2$$

diesmal $\left[x+\frac{i}{n}\right]=[x]+1$.
Also ist

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=n \cdot [x]+k-1,$$

da genau die $k-1$ Summanden für $i=n-1$ bis $i=n-(k-1)$ den Wert $[x]+1$ und die übrigen $n-k+1$ Summanden den Wert $[x]$ besitzen.

Weiterhin ist $n[x]+(k-1) \leq nx < n[x]+k$, also $[nx]=n[x]+k-1$, woraus direkt das Gewünschte folgt, $\Box$.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.19.4 IV. Runde 1977, Klasse 12

Aufgabe 1 - 171241
Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert:

$$d_1(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$$

$d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie zwei Strecken auf den Geraden $x = -1$ bzw. $x = 1$ begrenzt wird.
(Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefasst.)
Es seien nun f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1} \quad \text{und} \quad h(x) = 1$$

definierte Funktionen.
a) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n,h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n,h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Die Funktionen f_n und h im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetig. Mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Partialsummen ergibt sich, sofern $x \neq 1$ ist:

$$f_n(x) = (1-x)\frac{x^n - 1}{x - 1} \qquad \text{also} \qquad f_n(x) = 1 - x^n \qquad (1)$$

Wegen $f_n(1) = 0$ gilt die Beziehung (1) auch für $x = 1$. Daher gilt $|f_n(x) - (x)| = |1 - x^n - 1| = |x^n|$, also $d_1(f_n,h) = \max |x^n| = 1$. Ferner ist die Definition von $d_2(f,g)$ gleichwertig mit

$$d_2(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx \qquad \text{somit gilt} \qquad d_2(f_n,h) = \int_{-1}^{1} |x^n| dx$$

Da das Bild von $y = |x^n|$ für $-1 \leq x \leq 0$ durch Spiegelung an der y-Achse in das Bild von $y = x^n (= |x^n|)$ für $0 \leq x \leq 1$ übergeht, ist demnach

$$d_2(f_n,h) = 2 \cdot \int_0^1 x^n dx = 2 \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

Somit ergibt sich

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} d_1(f_n,h) = 1 \qquad ; \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} d_2(f_n,h) = 0$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 2 - 171242
Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1 \qquad (1)$$
$$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1 \qquad (2)$$

definierten Funktionen. Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind. Für diese Funktionen gelten:

$$f_1(1) = -1, \quad f_6(1) = f_7(1) = 1 \qquad (3)$$
$$f_3(f_4(1)) = -1 \qquad (4)$$
$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1 \qquad (5)$$

Man beweise, dass in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

Zunächst stellen wir fest, dass jede der gegebenen Funktionen bereits festgelegt sind, wenn man ihren Funktionswert in genau einem Argument kennt. Daher folgt sofort $f_6 \equiv f_7 \equiv g$ und $f_1 \equiv h$, womit Gleichung (5) äquivalent ist zu

$$(f_2 \circ \cdots \circ f_5)(1) = 1. \quad (6)$$

Aus $f_3(f_4(1)) = -1$ folgt, dass $f_3 \equiv g$ und $f_4 \equiv h$, oder $f_3 \equiv h$ und $f_4 \equiv g$ gilt. Insbesondere ist

$$f_3(f_4(-1)) = 1. \quad (7)$$

Wenn nun $f_5 \equiv g$ gilt, so folgt aus Gleichung (6) $f_2(-1) = 1$, also $f_2 \equiv h$. Aus $f_5 \equiv h$ würde zusammen mit Gleichung (7) hingegen $f_2 \equiv g$ folgen.
Da also genau eine Funktion von f_2, f_5 gleich g ist und genau eine Funktion von f_3, f_4 gleich g ist, ergibt sich die gesuchte Anzahl zu 4.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 3 - 171243
a) Man gebe alle Möglichkeiten an, eine gegebene Dreiecksfläche D in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
b) Man beweise:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig.

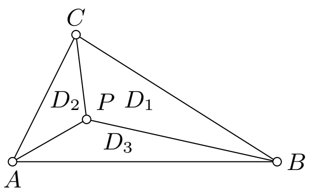
Liegt eine Zerlegung der Dreiecksfläche $D(ABC)$ in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 vor, so muss in der Figur zusätzlich zu den Eckpunkten der Dreiecksfläche D wenigstens noch ein vierter Punkt $P \in D$ existieren, der Eckpunkt einer Dreiecksfläche D ist. Dieser Punkt P kann ein innerer Punkt von D oder ein von den Eckpunkten A, B, C verschiedener Randpunkt von D sein.

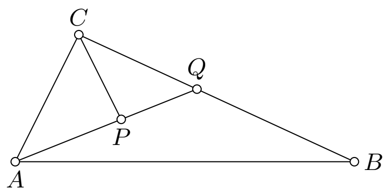
1. Es werde angenommen, dass P ein innerer Punkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit den Eckpunkten A bzw. B bzw. C durch je eine Strecke zu verbinden. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist einem der Eckpunkte (etwa A) durch eine Gerade zu verbinden. Die Verbindungsgerade schneidet die Gegenseite (hier a) in Q. Soll P ein Eckpunkt von wenigstens einer der Dreiecksflächen D_i sein, ist P mit einem der noch freien Eckpunkte (hier B oder C) zu verbinden.

Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksflächen werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D ausgeschöpft, wenn P ein innerer Punkt von D ist (siehe Abbildung 1 und 2).



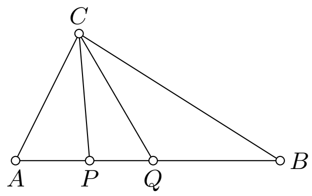


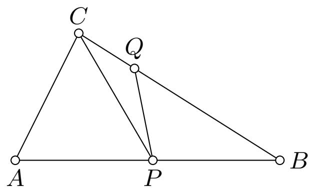
2. Es werde angenommen, dass P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D durch eine Strecke (hier PC) zu verbinden. Durch diesen Eckpunkt (hier C) ist eine weitere, von PC verschiedene Dreieckstransversale zu legen, die die Gegenseite in Q schneidet. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist mit einem von den Eckpunkten verschiedenen Randpunkt Q von D zu verbinden. Dabei muss Q auf einer vom gegenüberliegenden Eckpunkt von P (hier C) ausgehenden Seite liegen.

Durch die Strecke PQ wird D in einer Vierecks- und Dreiecksfläche zerlegt. Die geforderte Zerlegung von D wird durch Einzeichnen einer Diagonalen in die Vierecksfläche herbeigeführt. Dabei ist es unwesentlich, ob die Diagonale durch P oder Q geht.
Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksfläche werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D erschöpft, wenn P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. (siehe Abbildung 3 und 4)





3. Lässt sich für die Zerlegung der Dreiecksfläche D in die Dreiecksflächen D_i nach einer der vier möglichen Arten zeigen, dass wenigstens vier der entstehenden Innenwinkel von D_i der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind, so ist dies hinreichend dafür, dass diese Dreiecksflächen nicht ähnlich zueinander sind.

Wird eine der DreiecksflächenD_i als gleichschenklig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass wenigstens drei der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind. Wird eine der Dreiecksflächen D_i als gleichseitig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass die Größe eines der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkels von 60° verschieden ist.

Folgende Hilfssätze werden zur Beweisführung herangezogen, ohne dabei zitiert zu werden:

α): Die Summe der Innenwinkelgrößen im Dreieck beträgt 180°.
β): Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größengleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.
γ): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind zueinander größengleich.

4.1. In der Zerlegung 1a) seien die Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zueinander ähnlich. Da die Innenwinkelgrößen der D_i bei P die Summe von 360° haben, müssen wenigstens zwei dieser Innenwinkel stumpf sein.
O.B.d.A. kann angenommen werden, D_1 und D_2 haben in P stumpfe Winkel. Da ein Dreieck höchstens einen stumpfen Winkel haben kann und D_1 und D_2 ähnliche Dreiecksflächen sind, müssen diese stumpfen Winkel größengleich sein.
Nun werde angenommen, in D_3 sei der Winkel $\angle PBA$ stumpf. Dann müsste

$$\angle APC = \angle CPB = \angle PBA$$

gelten. Wegen des eingangs zitierten Satzes γ) gilt $CP \parallel BA$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass P ein innerer Punkt von D ist.
Analog lässt sich der Widerspruch herbeiführen, wenn $\angle PAB$ als stumpf vorausgesetzt wird. Folglich ist $\angle APB$ stumpf, und es gilt:

$$\angle CPA = \angle BPC = \angle APB = 120°$$

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $BP = h \cdot CP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = k^2 \cdot CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $CP = h \cdot BP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.
Die Ähnlichkeitsforderung an die Dreiecksflächen D_i ist daher nur für $k = 1$ erfüllbar. Die Dreiecksflächen D_i sind in diesem Fall gleichschenklig. Die Dreiecksfläche D ist gleichseitig.

4.2. In der Zerlegung 1b) (siehe Abbildung 2) sei die Dreiecksfläche PQC nicht gleichschenklig, und außerdem gelte $\angle PQC \neq 90°$.
Dann sind die vier Winkel $\angle CPQ, \angle PQC, \angle QCP, \angle PQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Hat die Dreiecksfläche PQC unter sonst gleichen Voraussetzungen einen rechten Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQ$, $\angle QCP$, $\angle APC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und nicht rechtwinklig bei Q, so sind der Außenwinkel $\angle PQB$ und zwei geeignet gewählte Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig mit rechtem Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle APC$, $\angle CPQ$, $\angle PQC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 1b) (Abbildung 2) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_i führen kann.

4.3 In der Zerlegung 2a) (siehe Abbildung 3) gelte $CP \neq CQ$. Ferner liege weder bei P noch bei Q ein rechter Winkel. Dann sind die vier Winkel $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$, $\angle CQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Hat die Dreiecksfläche PQC bei Q einen rechten Winkel (P liegt zwischen A und Q), so sind die Winkel $\angle CAP$, $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Analoges gilt, wenn ein rechter Winkel bei P liegt.
Gilt $CP = CQ$, so sind die drei Winkel $\angle CAP, \angle CPA, \angle CPQ$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle APC = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 2a) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen führen kann.

4.4 Ist die Dreiecksfläche PQC in Abbildung 4 nicht gleichschenklig und besitzt sie bei Q keinen rechten Winkel, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQC$, $\angle QCP$, $\angle PQB$ ihrer Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und gilt $\angle PQC \neq 90°$, so ist der Nebenwinkel $\angle PQB$ größenmäßig verschieden von dem Scheitel- und Basiswinkel dieser Dreiecksfläche. Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.

Ist die Dreiecksfläche PQC bei Q rechtwinklig und sonst beliebig, so kann die Ähnlichkeitsforderung im Fall 2b) für die Dreiecksflächen D_i in zweifacher Weise erfüllt werden:

1. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle CAP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt $\angle APC = 90°$. Hieraus resultiert $\angle ACP = \angle CPQ = \angle QBP$. Die Dreiecksflächen D_i sind untereinander und auch zur Dreiecksfläche D ähnlich.

2. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle ACP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt weiter $\angle APC = 90°$.
Hieraus resultiert $\angle CAP = \angle CPQ = \angle QBP$.
Daher ist die Dreiecksfläche $D(ABC)$ gleichschenklig und die Dreiecksflächen Di sind zueinander ähnlich.
Die Dreiecksfläche D ist genau dann ähnlich zu den Dreiecksflächen D_i, wenn $\angle ACB$ ein rechter Winkel ist.
Diese Zerlegung kann auch dem Fall 1 zugeordnet werden.

Damit ist gezeigt:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig. Die erste zerlegende Strecke ist das Lot vom Scheitel der gleichschenkligen Dreiecksfläche bzw. Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite.
Die zweite zerlegende Strecke ist das Lot vom Lotfußpunkt der ersten zerlegenden Strecke auf eine vom Scheitelpunkt ausgehende Dreiecksseite. Für gleichseitige Dreiecksflächen ist auch eine Zerlegung nach 1a) in kongruente Dreiecksflächen möglich.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 171244
Definition:
Es sei mit $d(X, Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge m bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von m, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus m gilt $d(X,Y) \leq d$.
(2) Es gibt Punkte P, Q aus m, für die $d(P,Q) = d$ ist.
Man beweise:
a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.
b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ϵ_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebenen Schnittfläche ϵ_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

Für je zwei Punkte X, Y einer Teilmenge von m gilt wegen (1) $d(X, Y) \leq d$. Es genügt also, Bedingung (2) für wenigstens eine der Teilpunktmengen nachzuweisen.

a) Es sei Z ein Streckenzug gemäß Aufgabenstellung. Da die Ränder jeweils zu den entsprechenden Flächen gehört, ist M Punkt beider Teilflächen. M' sei der durch Spiegelung am Kreismittelpunkt aus M hervorgegangene Punkt.
Der Abstand $d(M,M')$ ist gleich dem Durchmesser d des Kreises; denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$d(M,M') \leq d(M,O) + d(O,M') \leq \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$$

wobei O der Mittelpunkt des Kreises ist; dabei kann nur $d(M,M') = d$ zutreffen, da M,O,M' Punkte auf einer Geraden sind und M,M' auf der Kreislinie liegen. Außerdem ist M' Element wenigstens einer der Teilflächen. Damit gibt es wenigstens eine Teilfläche, deren Durchmesser gleich d ist, nämlich eine, die M und M' enthält.

b) Die Schnittflächen ϵ_1 und ϵ_2 enthalten als ebene Figuren wenigstens je drei nichtkollineare Punkte, sie bestimmen daher je eine Ebene π_1 bzw. π_2. Mit K bezeichnen wir die Menge aller Punkte des Kugelkörpers, die entsprechenden Teilpunktmengen seien K_1, K_2, K_3, wobei o.B.d.A. $K_1 \cap \pi_1 = \epsilon_1$ und $K_2 \cap \pi_2 = K_3 \cap \pi_2 = \epsilon_2$.

Fall 1: Da drei Teilkörper entstehen sollen, kann $\pi_1 = \pi_2$ nicht zutreffen.
Fall 2: $\pi_2 \cap \pi_2 = \varnothing$, d.h., die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
Die Ebene π, die parallel zu π_1 (bzw. π_2) durch den Mittelpunkt O der Kugel verläuft, hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist.
Für jeden Punkt M der zugehörigen Kreislinie und den durch Spiegelung von M an O entstehenden Punkt M' gilt wie oben $d(M,M') = d$. Wegen der Parallelität der Ebenen π, π_1, π_2, gehören die Punkte M und M' zu wenigstens einem der Teile K_1, K_2, K_3.

Fall 3: π_2 und π_2 schneiden sich in einer Geraden g.
3.1. $g \cap K = \varnothing$.
Die durch g und O bestimmte Ebene π' hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist. Wie im Fall 2 besitzt die Kreisfläche den Durchmesser d und gehört ganz zu einem der drei Teilkörper von K, womit dieser den Durchmesser d besitzt.

3.2. $g \cap K \neq \varnothing$.
Es sei M ein gemeinsamer Punkt von g und der Kugeloberfläche, dann ist M Element von K_1, K_2 und K_3.
Der aus M durch Spiegelung an O entstehende Punkt M' gehört zu wenigstens einem der drei Teilkörper, dieser hat den Durchmesser $d(M,M') = d$.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 171245
Es seien $f_1, f_2, ...$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$
$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)}$$

für $k = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

Wir werden mittels vollständiger Induktion nach n zeigen:
Für $x > 4$ gilt $f_n(x) < 2x \qquad (1)$.
Zunächst folgt aus $x > 4$: $16 < x^2$ bzw. $x^2 + 48 < x^2 + 3x^2 = 4x^2$. Hieraus erhält man unter Beachtung von $x > 4$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 48} < 2x$$

d.h., die Behauptung (1) ist für $n = 1$ richtig. Es sei (1) für ein festes b richtig. Dann gilt

$$f_n(x) < 2x \qquad \text{und damit} \qquad 6f_n(x) < 12x < 3x^2 \quad (x > 4)$$

Hieraus erhalten wir

$$(f_{n+1}(x))^2 = x^3 + 6f_n x < 4x^2$$

und damit die Behauptung (1).
Völlig analog lässt sich zeigen: Für $0 \leq x < 4$ gilt $f_n(x) > 2x \quad (2)$.
Wegen $f_n(x) \geq 0$ kommen für die Gleichung $f_n(x) = 2x$ nur nichtnegative x in Betracht. Aus (1) und (2) folgt unter der Beachtung der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$, dass $x = 4$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $f_n(x) = 2x$ ist.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 171246A
Es sei n eine positive Zahl, $(a_1, ..., a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a2 \leq ... \leq a_n$.
Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, ..., a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, dass die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.
Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den dazugehörigen minimalen Wert von z an.

Die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

ist auf $(-\infty, \infty)$ definiert und als Summe endlich vieler stetiger Funktionen stetig. In der Aufgabe ist nach der Existenz des Minimums - und falls eines existiert - der Menge der Minimalpunkte gefragt.
Für $x - a_1 \leq 0$ folgt $x - a_i \leq 0$ für $i = 1,...,n$, d.h.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} -(x - a_i) = -nx + c_0 \qquad \text{mit} \qquad c_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Der Graph der Funktion in $(-\infty, a_1)$ ist ein Strahl mit dem Anstieg $-n$, also für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
Für $x - a_n \geq 0$ folgt analog $f(x) = nx - c_0$; der Graph von $f(x)$ in (a_n, ∞) ist ein Strahl mit dem Anstieg n, und es gilt für $x \to \infty \quad f(x) \to \infty$.
Es existiert also eine reelle Zahl $R > 0$, so dass für ein $x \in [-R, R]$ gilt $f(x) < f(y)$ für alle y mit $|y| > R$.
Nach einem Satz von Weierstrass existiert dann in dem abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$ ein x^*, in dem die stetige Funktion $f(x)$ bzgl. $(-\infty, \infty)$ ihr Minimum erreicht.
Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Für $(a_1, a_2, ..., a_n)$ unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:
Falls $a_i = a_1$ für $i = 1,...,n$, so ist offenbar $f(a_1) = \min f(x)$; es ist dann der Wert des Minimums $f(a_1) = 0$ und die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_1\}$.

Andernfalls existieren $i, k \in \{1,...,n\}$ mit $i < k$, wobei k der kleinste Index mit $a_i \neq a_k$ ist. Für $x \in (a_i, a_k)$ gilt nun

$$x - a_1 \geq ... \geq x - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad 0 \geq x - a_{i+1} \geq ... \geq x - a_n \qquad \text{, so dass}$$

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{i} x - a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} -(x - a_\mu) = ix - (n - i)x - \sum_{\mu=1}^{i} a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} a_\mu = (2i - n)x + c_i$$

Der Graph von $f(x)$ ist somit in jedem solchen Intervall eine Strecke; das Minimum bez. eines jeden solchen Intervalls $[a_i, a_k]$ wird in a_i erreicht, falls der Anstieg $(2i - n)$ der Strecke nicht negativ, und in a_k, falls der Anstieg nicht positiv ist.

Zusammenfassend lässt sich (unter Verwendung dessen, dass $2i - n \geq 0$ genau dann, wenn $i \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist) dies in folgender Weise sagen:
Es ist $f(x)$ über $(-\infty, \infty)$ für $x \in (-\infty, a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]})$ stückweise linear mit nichtpositivem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ erreicht.
Für $x \in (a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}, \infty)$ ist $f(x)$ eine stückweise lineare Funktion mit nichtnegativem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ erreicht.

Ist nun n eine ungerade Zahl, so ist $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$, und es gilt

$$\min f(x) = f(a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}) = \sum_{\mu=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{n-\mu+1} - a_\mu$$

die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\}$.
Ist n eine gerade Zahl, so gilt für $x \in [a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$, da der Anstieg der Geraden in diesem Intervall gleich 0 ist, dass

$$f(x) = \text{const} = \min f(x) = -\sum_{\mu=1}^{\frac{n}{2}} a_\mu + \sum_{\mu=\frac{n}{2}+1}^{n} a_\mu$$

ist; die Menge der Minimalpunkte ist $[a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$ (wobei dieses Intervall gegebenenfalls aus nur einem einzigen Punkt bestehen kann).

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 171246B
a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1...A_{2n-1}$.
Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße einseitig, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Eckpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken einseitig ist.
b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ falls er existiert.
Hinweis:
Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller einseitigen unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als $w_n = \frac{g_n}{m_n}$.

a) B sei die Menge aller einseitigen Dreiecke. Dann ist B die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$B_i = \{\{A_i,A_j,A_k\} \mid i < j < k \leq i+n\} \qquad (i = 0,1,...,2n-1)$$

wobei wir $A_{2n} = A_0, A_{2n+1} = A_1, ..., A_{2n+n-1} = A_{n-1}$ setzen.
Alle Mengen B_i haben dieselbe Anzahl von Elementen; es gilt $|B_i| = \binom{n}{2}$. Folglich ist

$$g_n = |B| = 2n\binom{n}{2} = n^2(n-1)$$

Aus den Ecken $A_0,A_1,...A_{2n-1}$ lassen sich $m_n = \binom{2n}{3}$ Dreiecke bilden. Somit ist $w_n = \frac{n^2(n-1)}{\binom{2n}{3}} = \frac{3n}{2(2n-1)}$
b) $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf

9.20 XVIII. Olympiade 1978

9.20.1 I. Runde 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181211
Bei der Mathematikolympiade treffen sich drei Schüler. "Ist euch schon aufgefallen", fragt einer von ihnen, ein Mädchen, dass wir Lang, Dick und Dünn heißen und dass auch genau einer von uns außergewöhnlich lang, genau ein anderer beachtlich dick und der dritte erschreckend dünn ist?"

"Ja, tatsächlich", entgegnet darauf ein anderer, der dünne Schüler, "aber bei keinem von uns stimmen Name und die den jeweiligen Schüler charakterisierende Eigenschaft überein." "Da hast du völlig recht!" stimmt ihm der Schüler namens Lang zu.

Wie heißt hiernach der lange Schüler, wie der dicke und wie der dünne Schüler, wenn darüber hinaus vorausgesetzt wird, dass das Mädchen, das gefragt hat, nicht dick ist? Welche der charakterisierenden Eigenschaften und welchen Namen hat das Mädchen?

Der dünne Schüler hat (nach seiner Aussage) nicht den Namen Dünn, und er ist von dem - ihm zustimmenden - Schüler namens Lang verschieden; also heißt er Dick.

Somit heißt der lange Schüler nicht Dick; und da er auch den Namen Lang nicht trägt, heißt er Dünn. Für den dicken Schüler verbleibt folglich der Name Lang.

Das Mädchen ist von dem - ihm entgegnenden - dünnen Schüler verschieden, ferner ist es nach Voraussetzung nicht dick; folglich ist es der lange Schüler namens Dünn.

Hinweis: Der Versuch; direkt und allein deswegen zu schließen, das Mädchen könne nicht Lang heißen, weil der Schüler Lang demjenigen Schüler zustimmt, der dem Mädchen etwas entgegnet; kann nicht als korrekt gewertet werden.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 181212
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n > 5$ gilt:

Jedes Quadrat lässt sich in n Teilquadrate zerlegen.

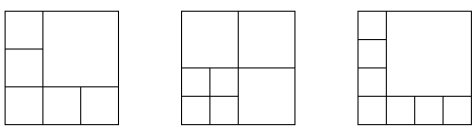
Erklärung: Sind Q, T_1, ..., T_n Quadrate (als Flächen, einschließlich ihrer Randpunkte betrachtet), so liegt genau dann eine Zerlegung von Q in T_1, ..., T_n als Teilquadrate vor, wenn

(1) Q die Vereinigungsmenge der Mengen T_1, ..., T_n ist und

(2) für $i \neq j$ der Durchschnitt von T_i mit T_j stets entweder keine Punkte oder nur solche Punkte enthält, die sowohl für T_i als auch für T_j Randpunkte sind.

Teilt man zwei einander benachbarte Seiten eines beliebigen Quadrats Q in 2, 3 bzw. 4 gleichlange Teilstrecken und errichtet man über jeder Teilstrecke das im Innern von Q gelegene Quadrat, so wird Q in 4, 6 bzw. 8 Teilquadrate zerlegt.

Je eines dieser Teilquadrate kann seinerseits in 4 Quadrate zerlegt werden, wo- durch sich die Anzahl der Teilquadrate um genau 3 vergrößert. So gelangt man (ausgehend von einer Zerlegung in 4 Teilquadrate) auch zu einer Zerlegung in 7 Teilquadrate.



Nach weiterer m-maliger Vergrößerung der Anzahl der Teilquadrate um je 3 ergibt sich:

Wenn eine natürliche Zahl $n \geq 9$ von einer der Formen

$$n = 3m + 6, \qquad n = 3m + 7, \qquad n = 3m + 8$$

mit natürlichem m ist, so lässt sich Q in n Teilquadrate zerlegen.
Somit genügt es zu zeigen, dass jedes natürliche $n \geq 9$ derart darzustellen ist. Nun lässt jede natürliche Zahl n bei Division durch 3 einen der Reste $r =, r = 1, r = 2$, d.h. n ist von der Form

$$n = 3g + r \qquad (g \text{ ganz; } r = 0,1,2)$$

Wegen $n \geq 9$ und $r < 3$ gilt hierin $3g = n - r > 6$, also $g > 2$; somit ist in

$$n = 3(g-2) + 6 + r$$

(einerseits $6 + r$ eine der Zahlen 6, 7, 8 und andererseits) $m = g - 2$ eine natürliche Zahl.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 181213
Man ermittle alle Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3, \qquad y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

Angenommen, (x,y) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann ist $x \neq 0$ (und $y \neq 0$), und es gilt

$$x^2y + x + y^2 = 3xy \qquad (1)$$
$$xy^2 + y + x^2 = 3xy$$

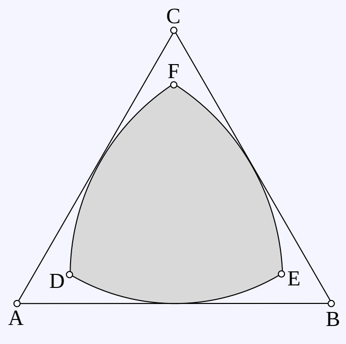
Durch Subtraktion erhält man daraus

$$(x-y)(xy + 1 - x - y) = 0 \qquad \text{also} \qquad (x-y)(x-1)(y-1) = 0$$

hieraus folgt, dass (mindestens) eine der Gleichungen $x = y$, $x = 1$, $y = 1$ gilt.
Aus $x = y$ und (1) folgt $x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x-1)^2 = 0$, wegen $x = y$ also $x = 1$ $y = 1$.
Aus $x = 1$ und (1) folgt $y^2 - 2y + 1 = 0, (y-1)^2 = 0$, also $y = 1$.
Aus $y = 1$ und (1) folgt $x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$, also $x = 1$.
Also kann nur das Paar $(1,1)$ Lösung des Gleichungssysteme sein. In der Tat erfüllt es wegen $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$ beide Gleichungen des Systems.

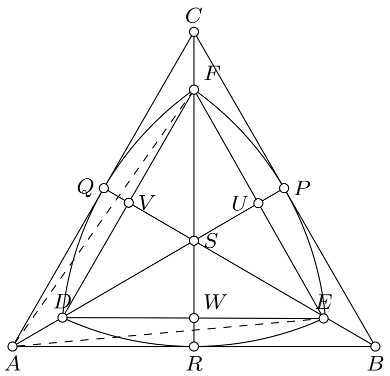
Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 181214



Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein.

Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).



Das Dreieck sei ABC; der Kreis um A, B bzw. C der jeweils die Gegenseite berührt, sei k_A, k_B bzw. k_C. Der im Dreieck ABC gelegene Schnittpunkt D von k_B und k_C liegt auf der durch A gehenden Symmetrieachse des Dreiecks.

Die Kreise k_B, k_C haben als Radius die Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ des Dreiecks; daher hat in dem gleichschenkligen Dreieck BCD die Höhe DP die Länge

$$DP = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Entsprechendes gilt für die im Dreieck ABC gelegenen Schnittpunkte E, F von k_C und k_A bzw. von k_A und k_B sowie für ihre Lote EQ, FR auf CA bzw. AB.

Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so gilt wegen

$$SP = SQ = SR = \frac{a}{6}\sqrt{3} \qquad ; \qquad SD = SE = SF = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und wegen $SA = SB = SC = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ folgt aus dem Strahlensatz

$$EF = FD = DE = a \cdot \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{3} \cdot 3} = \frac{a}{2}\sqrt{6} - \frac{a}{2}$$

ferner schneiden EF, FD bzw. DE jeweils AP, BQ bzw. CR in U, V bzw. W, wobei

$$SU = SV = SW = \frac{EF}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{12}\sqrt{3} \qquad \text{also}$$
$$AU = BV = CW = AS + SU = \frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

ist.
Bezeichnet φ die (in Grad gemessene) Größe der zu den im Dreieck ABC verlaufenden Bögen $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}$, $\overset{\frown}{DE}$ in k_A bzw. k_B bzw. k_C gehörenden Zentriwinkel, so gilt folglich

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{6} - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt je eines der zu diesen Bögen gehörenden Kreissegmente beträgt

$$\pi \cdot AE^2 \cdot \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AU = a^2\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480°} - \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{2}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{3}\right) = a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480°} - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\right)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF beträgt

$$\frac{1}{4}EF^2\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{7}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt

$$a^2\left(\frac{\pi\cdot\varphi}{160^\circ}-\frac{3}{16}\sqrt{3}-\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{7}{16}\sqrt{3}-\frac{3}{8}\sqrt{2}\right)=a^2\left(\frac{\pi\cdot\varphi}{160^\circ}+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$$

Die Berechnung von $z=\frac{\pi\cdot\varphi}{160^\circ}+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$ ergibt sich mit Hilfe der Zahlentafel ($[\varphi]$ bezeichnet die Maßzahl von φ)

$\sqrt{2}=1{,}414$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}707$	$\sqrt{3}=1{,}732$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}=0{,}2887$	$\sqrt{18}=4{,}243$
$\sin\frac{\varphi}{2}=0{,}4183$	$\frac{\varphi}{2}=24{,}73^\circ$	$\lg\frac{\varphi}{2}=1{,}392$	$\lg\pi=0{,}4971$	$\lg 80=1.9031$
$\frac{\pi\cdot\varphi}{160^\circ}=0{,}971$	$\lg\frac{\pi\cdot\varphi}{160^\circ}=0{,}9872-1$	$\frac{1}{4}\sqrt{3}=0{,}433$	$\frac{3}{4}\sqrt{2}=1{,}061$	

Auf 3 Dezimalen genau ist $z=0{,}344$.

Übernommen von [5]

9.20.2 II. Runde 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181221
Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, dass durch $a_n = \frac{n+b}{cn+d}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt.
Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

Eine solche Folge kann es nicht geben. Aus

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{c}$$

folgt $c = 2$. Weiter folgt $2 + 2b = c + d = 2 + d$ aus

$$\frac{1}{2} = a_1 = \frac{1+b}{c+d} = \frac{1+b}{2+d}.$$

Wir erhalten also $2b = d$. Setzen wir dies ein, bekommen wir

$$a_n = \frac{n+b}{cn+d} = \frac{n+b}{2n+2b} = \frac{1}{2}$$

Aus $a_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ folgt also bereits, dass die Folge konstant 2 ist. Somit kann insbesondere nicht mehr $a_2 = \frac{3}{8}$ gelten.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 2 - 181222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k = \frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

Die Aufgabe wird im wesentlichen gelöst durch eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 5x + 7}$$

welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, da der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt. Mithilfe der beiden Ableitungen

$$f'(x) = \frac{7 - x^2}{x^2 - 5x + 7)^2} \quad \text{bzw.} \quad f''(x) = \frac{2(x^3 - 21x + 35)}{(x^2 - 5x + 7)^3}$$

sowie

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

sieht man sofort, dass die Funktion bei $x = -\sqrt{7}$ ein absolutes Minimum und bei $x = \sqrt{7}$ ein absolutes Maximum hat, sodass also dann

$$[f(-\sqrt{7}), f(\sqrt{7})] \approx [-0.097, 3.43]$$

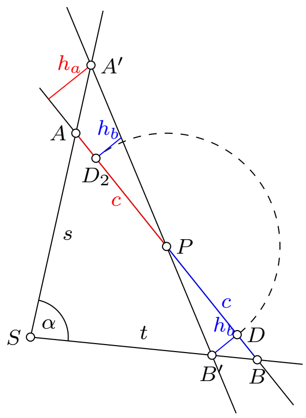
der Wertebereich der Funktion ist, der also insbesondere als einzige ganze Zahlen k nur die Werte $k =$ 0,1,2,3 enthält. Dabei liefert dann

- $f(x) = 0$ die Lösung $x_1 = 0$,
- $f(x) = 1$, also $x^2 - 6x + 7 = 0$, die beiden Lösungen $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}$
- $f(x) = 2$, also $2x^2 - 11x + 14 = (2x - 7)(x - 2) = 0$, die beiden Lösungen $x_4 = \frac{7}{2}$, $x_5 = 2$
- $f(x) = 3$, also $3x^2 - 16x + 21 = (3x - 7)(x - 3) = 0$, die beiden Lösungen $x_6 = \frac{7}{3}$, $x_7 = 3$

was somit die in der Aufgabe gestellte Frage beantwortet.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 181223
Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0° < \alpha < 180°$ gilt.
Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels.
Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t. Man beweise, dass es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.



Damit das Dreieck SAB einen minimalen Flächeninhalt hat, ist die Gerade g so zu legen, dass der Punkt P den Mittelpunkt der Strecke AB darstellt.

Beweis:
In obiger Zeichnung liegen A und B so, dass P der Mittelpunkt der Strecke AB ist. A' und B' seien beliebige Punkte, wobei natürlich voraussetzungsgemäß P auch auf der Strecke $A'B'$ liegen muss.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $SA'B'$ lässt sich aus dem Flächeninhalt des Dreiecks SAB berechnen, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks APA' addiert und den von BPB' subtrahiert. Der Flächeninhalt von SAB ist dann minimal, wenn der Flächeninhalt von APA' größer ist als der von BPB'.

Das ist auch tatsächlich der Fall. Da $AP = PB = c$ ist, haben die beiden Dreiecke APA' und BPB' eine gleichlange Grundseite, aber es gilt $h_A > h_B$, wie man der Zeichnung leicht entnehmen kann.

Konstruktion der Geraden:
Man trage auf dem Strahl SP von S die Streckenlänge $2|SP|$ ab und erhalte den Verdopplungspunkt V von SP. Nun zeichne man die Parallelen zu s bzw. t durch V und erhalte die Schnittpunkte B bzw. A mit t bzw. s. Nach Konstruktion ist nun das Viereck $SAVB$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen SV und AB sich gegenseitig halbieren. Da der Mittelpunkt von SV nach Konstruktion P ist, ist P auch Mittelpunkt der so erhaltenen Strecke AB.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras und cyrix

Aufgabe 4 - 181224
Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:
(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
(6) Die Anzahl der Fußballer ist größer als die Anzahl der Schwimmer, diese wiederum ist größer als die Anzahl der Turner und diese größer als die Anzahl der Leichtathleten.
(7) Die Anzahl der Fußballer ist gleich der Summe der Anzahl der Turner und der Leichtathleten.
In (6) und (7) bezeichnet Fußballer, Schwimmer u.s.w. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.
Gib die Anzahl der Fußballer, der Schwimmer, der Turner und der Leichtathleten in meiner Klasse an!
Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, dass diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei. Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Für eine einfachere Sprechweise verwenden wir im Folgenden die Kurzbezeichnungen F,S,T,L für die 4 Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen und Leichtathletik und auch für ev. Kombinationen derselben. Ferner seien f,s,t,l die Anzahlen der Schüler, welche eine der Sportarten F,S,T,L (ev. in Kombination mit einer anderen) gewählt haben.

Wir denken uns dann der Einfachheit halber die 15 Schüler so durchnummeriert, dass die Schüler mit den Nummern $1-5$ alle S in der Kombination SF bzw. SL gewählt haben, womit diese Kombinationsmöglichkeiten von S lt. Angabe dann "ausgeschöpft" sind und für die restlichen 10 Schüler dann nur mehr die 5 Möglichkeiten F,T,FL,ST,TL zur Auswahl stehen.
Insbesondere muss als dann von diesen 10 Schülern entweder F oder T (aber nicht beide!) auf jeden Fall gewählt werden, was als dann schon mal auf die wichtige Beziehung

$$(f-3)+t=10$$

zwischen f und t hier führt. Eingesetzt in $t+l=f$, was ja laut (7) gelten soll, ergibt sich daraus weiter die Gleichung

$$2t+l=13 \quad (*)$$

welche gewissermaßen den "Dreh- und Angelpunkt" für diese Aufgabe hier darstellt. Da nämlich nach jedenfalls (5) $l \geq 2$ gilt, $l \geq 5$ sofort auf den Widerspruch $t \leq 4 < l$ zu (6) führen würde und l außerdem nach (*) ungerade sein muss, bleibt als dann nur mehr als einzige Möglichkeit

$$l=3,\ t=5,\ f=t+l=8 \quad (**)$$

Von den restlichen 10 Schülern muss also genau einmal L (jeweils in Kombination mit F oder T) gewählt werden, und ein- oder zweimal S (jeweils in Kombination mit T), was unter Berücksichtigung von (**) dann alle Bedingungen der Aufgabe hier erfüllt. Insgesamt gilt somit

$$f=8,\ s \in \{6{,}7\},\ t=5,\ l=3$$

mit der einzigen Mehrdeutigkeit, was s betrifft.

Aufgabe gelöst von weird

9.20.3 III. Runde 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181231
Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) - f(x) = x + 1$ erfüllen.

Wir wählen den Ansatz

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dann ist

$$f(x+1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$$

Durch Einsetzen in die Aufgabenstellung erhält man:

$$2ax + a + b = x + 1$$

woraus $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ folgt. Somit erfüllen alle Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) + c$$

die Gleichung.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 181232
Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ϵ eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ϵ ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ϵ alle diejenigen Punkte C auf ϵ, für die die Abstandssumme $AC + BC$ möglichst klein ist.

Falls die Strecke AB und ϵ gemeinsame Punkte haben, so haben alle diese gemeinsamen Punkte C die Eigenschaft, dass

$$AC + BC = AB$$

gilt. Die Abstandssumme wird also für alle Punkte C, die im Schnitt der Ebene ϵ und der Strecke AB liegen, minimal. Für alle Punkte C', die nicht in diesem Schnitt liegen, gilt dagegen

$$AC + BC > AB.$$

Falls Schnitt der Ebene ϵ und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C im Schnitt der Ebene ϵ und der Strecke AB liegt.

Falls die Strecke AB und ϵ keine gemeinsame Punkte haben, so liegen A und B auf der gleichen Seite von ϵ. Sei B' der Spiegelpunkt von B an der Ebene ϵ, so haben die Strecke AB' und ϵ einen gemeinsamen Punkt. Weiter folgt folgt für alle Punkte C

$$AC + BC = AC + B'C \geq AB'.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn C der Schnittpunkt der Strecke AB' mit der Ebene ϵ ist. Falls Schnitt der Ebene ϵ und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C der Schnittpunkt der Ebene ϵ und der Strecke AB' ist.

Aufgabe gelöst von ochen

Aufgabe 3 - 181233
Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i.
(2) Jede der Mengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ enthält genau 1111 Elemente.
(3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

Die Angaben der Aufgabe führen sofort auf den Widerspruch

$$22222 = |M| = |\bigcup_{i=1}^{50} M_i| \geq \sum_{1\leq i\leq 50} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq 50} |M_i \cap M_j| = 50 \cdot 1111 - \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 22 = 28600$$

was zeigt, dass die Bedingungen (1)-(3) zusammen nicht erfüllbar sind.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 181234
Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x\sqrt{k})$$

definierte Funktion f nicht periodisch.

Es genügt dafür offenbar zu zeigen, dass die Gleichung $f(x) = n$ genau eine Lösung, nämlich $x = 0$ besitzt, da dies mit einer Periodizität von f klarerweise nicht vereinbar ist.
Aus $f(x) = n$ folgt nämlich, dass alle Summanden in obiger Summe den Wert 1 haben müssten, d.h., es müsste insbesondere

$$\cos(x) = \cos(x\sqrt{2}) = 1$$

gelten. Daraus folgen aber insbesondere die Gleichungen $x = 2j\pi$ für ein $j \in \mathbb{Z}$, sowie $x\sqrt{2} = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und die daraus resultierende Gleichung

$$j\sqrt{2} = k$$

führt nur dann nicht auf einen Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, wenn $j = k = 0$, also $x = 0$ ist, q.e.d.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 181235
Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1, ..., x_n \geq 0$, für die $x_1 + ... + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + ... + x_n^3$
a) möglichst groß, b) möglichst klein ist.
Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.

Aufgabenteil a)
Wir behaupten, dass die Summe $s = \sum_{k=1}^{n} x_i^3$ genau dann maximal ist, wenn von den n Summanden $n-1$ Summanden gleich null und ein Summand gleich 1 ist. Die Summe wäre dann $s_{max} = 1$, was den Maximalwert darstellt.

Beweis:
Wir betrachten zwei Summenglieder x_i und x_j. Im Rahmen der Randbedingung $\sum_{k=1}^{n} x_i = 1$ ist zulässig, zwei Summanden zu addieren als einen neuen Summanden, und den anderen null zu setzen. Sei $x_i' = x_i + x_j$ und $x_j' = 0$. Dann ist

$$x_i'^3 + x_j'^3 = (x_i + x_j)^3 = x_i^3 + 3x_i^2 x_j + 3x_i x_j^2 + x_j^3 = x_i^3 + x_j^3 + 3x_i x_j (x_i + x_j)$$

Da $x_{i,j} \geq 0$, folgt daraus, dass

$$x_i'^3 + x_j'^3 \geq x_i^3 + x_j^3$$

(Gleichheit tritt nur ein, wenn mindestens einer der Summanden ohnehin schon null ist). Die Summe der dritten Potenzen wird also größer, wenn man aus zwei Summanden einen macht und den anderen null setzt. Das wiederholt man so oft, bis nur noch ein Summand übrig ist, der voraussetzungsgemäß gleich eins ist.
Aufgabenteil b)

Es sei $x_i = \frac{1}{n} + z_i$. Damit die genannte Bedingung erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{k=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + z_i \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} z_i = 1$$

so dass

$$\sum_{k=1}^{n} z_i = 0$$

sein muss. Die zu minimierende Summe ist

$$s = \sum_{k=1}^{n} x_i^3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + z_i \right)^3$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2} z_i + \frac{3}{n} z_i^2 + z_i^3 \right)$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} \sum_{k=1}^{n} z_i + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{n} + z_i \right) z_i^2$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + x_i \right) z_i^2$$

Da $\left(\frac{2}{n} + x_i\right) > 0$ und $z_i^2 > 0$, sind alle Summanden positiv, so dass gilt

$$s \geq \frac{1}{n^2} = s_{min}$$

Das ist der gesuchte minimale Wert, der genau dann eintritt, wenn alle $z_i = 0$ bzw. alle $x_i = \frac{1}{n}$ sind.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Anmerkung von cyrix:
Das arithmetische Mittel A der x_i ist offenbar $A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}$, während ihr kubisches Mittel K wie folgt definiert ist: $\sqrt[3]{\frac{x_1^3 + \cdots + x_n^3}{n}}$. Nach der Ungleichung zwischen kubischem und arithmetischem Mittel gilt $K \geq A$, wobei Gleichheit genau für $x_1 = \cdots = x_n$ eintritt. Also ist

$$x_1^3 + \cdots + x_n^3 = n \cdot K^3 \geq n \cdot A^3 = \frac{1}{n^2}$$

der gesuchte kleinstmögliche Wert, der angenommen wird.

Aufgabe 6A - 181236A
Es sei (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelte.
Man zeige, daß es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so dass für alle $n = 1, 2, ...$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

Zum Beweis benötigen wir zwei Aussagen.

Lemma 1:

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Beweis - Lemma 1:

Der Beweis erfolgt durch Ausmultiplizieren:

$$(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)=a^3+a^2\cdot b+a\cdot b^2-a^2\cdot b-a\cdot b^2-b^3=a^3-b^3.$$

Lemma 2:

Die Folge (a_n) ist beschränkt und es gilt

$$-1\leq a_n\leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

für alle $n=1,2,3,\ldots$.

Beweis - Lemma 2:

Diese Aussage wird mittels vollständiger Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1^3=\frac{1}{2}\cdot a_0^2-1=-1$ und somit $-1\leq a_1\leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $-1\leq a_n\leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Es gilt nach der Induktionsvoraussetzung

$$-1\leq \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2-1\leq \frac{1}{2}\cdot a_n^2-1=a_{n+1}^3=\frac{1}{2}\cdot a_n^2-1\leq -\frac{1}{2}$$

und somit

$$-1\leq a_{n+1}\leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Lösung:

Mit Lemma 1 und der Definition der Folge (a_n) sehen wir, dass

$$\left|a_{n+1}^3-a_n^3\right|=|a_{n+1}-a_n|\cdot\left|a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|a_n^2-a_{n-1}^2\right|=\frac{1}{2}\cdot|a_n-a_{n-1}|\cdot|a_n+a_{n-1}|$$

für alle $n=1,2,3,\ldots$ gilt. Somit ergibt sich

$$|a_{n+1}-a_n|\cdot\left|a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2\right|=\frac{1}{2}\cdot|a_n-a_{n-1}|\cdot|a_n+a_{n-1}|$$

und daher wegen Lemma 2

$$|a_{n+1}-a_n|=|a_n-a_{n-1}|\cdot\frac{|a_{n+1}+a_n|}{2\cdot\left|a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2\right|}$$

für alle $n=1,2,3,\ldots$, da der Bruch auf der rechten Seite definiert ist. Mit Lemma 2 kann die rechte Seite durch

$$|a_{n+1}-a_n|=|a_n-a_{n-1}|\cdot\frac{|a_{n+1}+a_n|}{2\cdot\left|a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2\right|}\leq|a_n-a_{n-1}|\cdot\frac{|2|}{2\cdot\left|3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right|}=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3}\cdot|a_n-a_{n-1}|$$

nach oben abgeschätzt werden. Wähle folglich $q=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3}<0{,}53$.

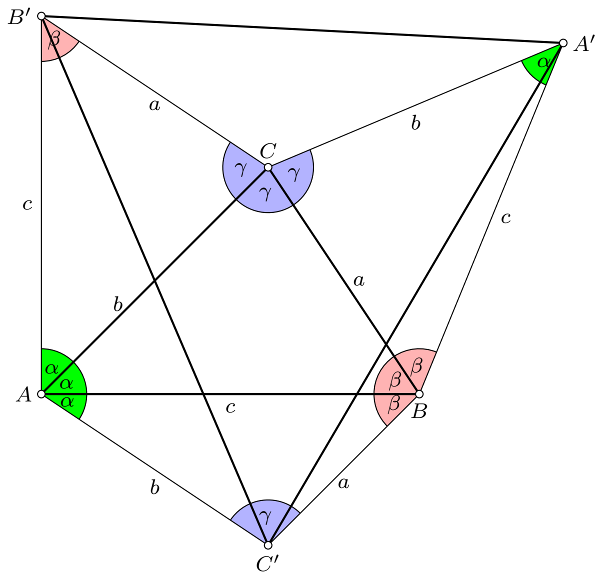
Aufgabe gelöst von svrc

Aufgabe 6B - 181236B

Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C, B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A, C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.

Mit diesen Bezeichnungen beweise man:

Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck - mit jeweils A,A' bzw. B,B' bzw. C,C' als entsprechende Ecken -, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.



Wir zeigen die Kontraposition. Ist $\triangle ABC$ nicht gleichseitig, so sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ nicht ähnlich.

Sei also Dreieck $\triangle ABC$ nicht gleichseitig. O.b.d.A. nehme ich $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ an. Dann ist der Winkel $\alpha < 60°$ und $\gamma > 60°$. Jetzt unterscheide ich die Fälle $\beta \leq 60°$ und $\beta \geq 60°$.

Fall 1: $\beta \leq 60°$.
Da Winkel $\angle C'AB' = 3\alpha < 180°$ und $\angle A'BC' = 3\beta \leq 180°$, liegt A' innerhalb und B innerhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle BC'A = \gamma$. Deshalb ist Winkel $|\angle A'C'B'| < \angle BC'A = \gamma$. (Beachte, dass die Orientierung im Fall $\gamma > 90°$ des Dreieck $\triangle A'B'C'$ ändern kann und deshalb Winkel $A'C'B'$ negativ werden kann.)

Fall 2: $\beta \geq 60°$.
In diesem Fall ist $\gamma < 120°$. Da Winkel $\angle B'CA' = 3\gamma > 180°$ und Winkel $\angle A'BC' = 3\beta \geq 180°$, liegt B' ausserhalb und C' ausserhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle CA'B = \alpha$.

Deshalb ist Winkel $\angle B'A'C' > \angle CA'B = \alpha$.

Aufgabe gelöst von moudi

9.20.4 IV. Runde 1978, Klasse 12

Aufgabe 1 - 181241
Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30$$
$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, dass für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

Zu den gegebenen Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ gibt es genau zwei eindeutig bestimmte Polynome $h(x)$ und $q(x)$ derart, dass $f(x) = g(x) \cdot h(x) + q(x)$ für alle reellen x gilt und $q(x)$ das Nullpolynom ist oder kleineren Grad als $g(x)$ hat.
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = g(x)[x^9 - x^8 + x^7 + (-a+2)x^6 + (a-2)x^5 + (a-4)a^4 + (a^2-4a+4)x^3 + (-a^2+8)x^2+$$

$$+(-3a^2+12a-8)x+(-a^3+6a^2+4a+5)]+(a^3+6a^2+32a+15)x^2+(5a^3-24a^2+16a+33)x+a^4-6a^3+4a^2+5a+30$$

Eine ganze Zahl a hat daher genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn für sie alle reellen x

$$q(x) = (a^3 + 6a^2 + 32a + 15)x^2 + (5a^3 - 24a^2 + 16a + 33)x + a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 = 0$$

ist, d.h., wenn die Gleichungen

$$a^3 + 6a^2 - 32a + 15 = 0 \qquad (1)$$
$$5a^3 - 24a^2 + 16 + 33 = 0 \qquad (2)$$
$$a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 = 0 \qquad (3)$$

gelten.
Angenommen, eine ganze Zahl a erfüllt (1), (2), (3). Dann folgt $a|33$ und $a|30$, also $a|3$, d.h. a ist eine der Zahlen 1, -1, 3, -3.
Wegen

$$1^3 + 6 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 15 = -10$$
$$(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 32 \cdot (-1) + 15 = 52$$
$$(-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 32 \cdot (-3) + 15 = 138$$

verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3$. In der Tat erfüllt $a = 3$ die Gleichungen (1), (2), (3). Daher hat genau die Zahl $a = 3$ die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe gelöst von Bern Noack, Übernommen aus [3]

Aufgabe 2 - 181242
Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten.
Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten lässt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist.
Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten:
Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.
Man beweise, dass dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

Die Posten wollen wir mit $A, B, C, Q, R, X, Y, ...$ bezeichnen, eine Buchstabenreihenfolge $BCRX$ bezeichne einen Weg von B über C und R nach X, mit (ARB) bezeichnen wir die minimale Entfernung innerhalb des Straßennetzes N von A nach B über R, und $(ARB)^*$ sei die minimale Weglänge von A nach B über

R nach Sperrung eines Verbindungsweges zwischen zwei benachbarten Posten auf ungesperrten Wegen innerhalb des Netzes N.

Entsprechend sind mit (AB) bzw. $(AB)^*$ die minimalen Entfernungen innerhalb des Netzes vor bzw. nach Sperrung von A nach B gemeint.
Weiterhin sei P die Menge aller Posten. Es seien A und B benachbarte, R und Q beliebige Posten, und ein Streckenabschnitt AB werde gesperrt.
Für den Fall, dass ein Weg von A nach B existiert, dessen Länge nicht größer als die Länge des gesperrten Abschnitts ist, ist die Behauptung richtig. Wir nehmen also an, dass $(AB)^* > (AB)$ gilt und definieren für jeden Posten des Netzes N:

$$M_C = \{X | X \in P \wedge (XC)^* = (XC)\}$$

Jeder Posten X der Menge P gehört zu M_A oder M_B; denn sonst hätten wir $(XA)^* > (XA)$ und $(XB)^* > (XB)$, also ist BA Teilweg des Weges von X nach A mit minimaler Länge (XA) und AB Teilweg des Weges von X nach B mit minimaler Länge (XB), d.h.

$$\begin{aligned} (XA) &= (XB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XA) + (AB) \qquad \text{also} \\ (XA) &= (XA) + (AB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XB) + (BA) + (AB) \end{aligned}$$

Das bedeutet aber $(AB) + (BA) = 0$, was nur für $A = B$ möglich ist. Offenbar gehören A zu M_A und B zu M_B.
Für Posten X, Y aus M_A gilt $(XY)^* = (XY)$, denn aus $(XY)^* > (XY)$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} (XY) &= (XBAY) = (XA) + (AB) + (BY) \qquad \text{oder} \\ (XY) &= (XBAY) = (XB) + (BA) + (AY) \qquad \text{und weiter} \\ (XY)^* &\le (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY) \\ &\le (XA) + (ABY) = (XA) + (AB) + (BY) = (XY) \qquad \text{oder} \\ (XY)^* &\le (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY) \\ &\le (XBA) + (AY) = (XB) + (BA) + (BA) + (AY) = (XY) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu $(XY)^* > (XY)$.
Analog gilt für $X, Y \in M_B$ ebenfalls $(XB)^* = (XY)$. Nach den bisherigen Überlegungen ist o.B.d.A. nur noch der Fall $R \in M_A, Q \in M_A$, $(RQ)^* > (RQ)$ zu diskutieren.

1. Es gibt einen Posten Y mit $Y \in M_A \cap M_B$. Dann gilt wegen $R, Y \in M_A$ und $Y, Q \in M_B$ offenbar:

$$(RY)^* + (YQ)^* = (RY) + (YQ) = (RYQ)^* < 200km < 300km$$

2. Es gilt $M_A \cap M_B = \varnothing$. Nach Voraussetzung und wegen $P = M_A \cup M_B$ muss es nach Sperrung eines Abschnitts von $A \in M_A$ nach $B \in M_B$ minimaler Länge einen Weg von einem Posten$X \in M_A$ zu einem Posten $Y \in M_B$ geben, auf dem keine weiteren Posten zu finden sind, d.h., X und Y sind benachbart.
Daraus ergibt sich:

$$(RQ)^* \le (RX)^* + 100km + (YQ)^* = (RX) + 100km + (YQ) < 100km + 100km + 100km = 300km$$

Übernommen aus [3]

2. Lösung:
Seien A,B benachbarte Posten, s.d. deren Verbindung gesperrt ist und P,Q zwei beliebige Posten. Dann gibt es eine Vebindung $w : P \to Q$. Falls jeder Posten auf dem Weg eine Verbindung zu P oder Q, die nicht über $A \to B$ geht und kleiner als 100 km ist, können wir zwei benachbarte Posten X,Y mit Wegen $u : P \to X$ und $v : Y \to Q$ wählen, so dass der Weg $P \xrightarrow{u} X \to Y \xrightarrow{v} Q$ nicht über $A \to B$ geht und insgesamt kleiner als 300 km ist.

Falls es einen Posten auf w gibt, der von P und Q nur über $A \to B$ mit weniger als 100 km erreicht werden kann, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, d.h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \to A \xrightarrow{q_2} X$ von den wir o.B.d.A. annehmen können, dass p_1,p_2,q_1,q_2 nicht über $A \to B$ führen. Daraus erhalten wir zwei neue Wege $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{q_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \xrightarrow{p_2} X$, s.d. deren Summe der Längen kleiner als 200 km ist. Also ist einer der Wege im Widerspruch zur Annahme kürzer als 100 km.

2) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in der gleichen Richtung durchlaufen, d.h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} A \to B \xrightarrow{q_2} X$. Dann ist der Weg $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{-q_1} Q$ kürzer als 200 km, der nicht über $A \to B$ läuft.

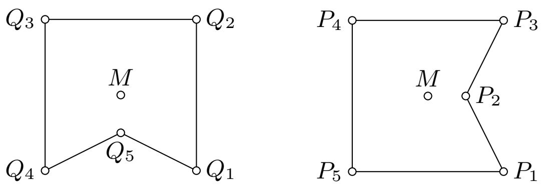
Quelle anonym

Aufgabe 3 - 181243
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, ..., Q_n$ so gelegen, dass $Q_1, ..., Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine Ecke von E. (1)
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist.
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

(a) Wegen der Konvexität von E liegt jede Seite von F und damit die ganze n-Ecksfläche von F in der n-Ecksfläche von E. Als zu E kongruente Figur hat F den gleichen Flächeninhalt wie E. Daher fällt mit F mit E zusammen. Mithin ist jede Ecke von F Ecke von E, was zu beweisen war.

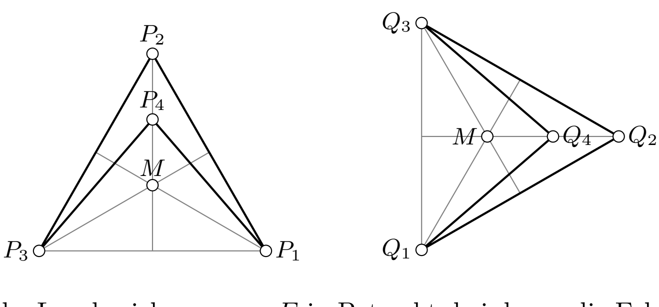
Die unter (b) aufgeworfene Frage kann durch ein Beispiel beantwortet werden.
Gesucht wird ein nicht-konvexes Polygon $F(Q_1...Q_n)$, welches dem dazu kongruenten Polygon $E(P_1...P_n)$ derart aufgepasst werden kann, dass sich die Eckpunkte von F mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken, ohne dass hierbei sämtliche Eckpunkte von F auf Eckpunkte von E zu liegen kommen.

Konstruktion:
Aus dem Quadrat $\square(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ wird ein gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck mit der Strecke Q_4Q_1 als Basis herausgeschnitten. Der Scheitel dieses Dreiecks sei Q_5.
Bringt man dieses Polygon F mit dem hierzu kongruenten Polygon $E(P_1P_2P_3P_4P_5)$ durch Parallelverschiebung in eine solche Lage, dass sich Q_1 mit P_1 deckt, so wird offensichtlich, dass das vorliegende nicht-konvexe Polygon E ein Beispiel ist, auf das die Aussage (a) nicht übertragen werden kann (siehe Abbildung)



Die unter (c) aufgeworfene Problemstellung kann wiederum durch ein Beispiel erledigt werden. Wir suchen ein nicht-konvexes n-Eck E, für das die Aussage (a) wahr ist.

Konstruktion:
Vorgelegt sei ein gleichseitiges Dreieck $\triangle(P_1P_2P_3)$ mit M als Mittelpunkt. P_4 sei der Halbierungspunkte der Strecke MP_2.
$E(P_1P_2P_3P_4)$ ist ein nicht-konvexes Viereck. Das hierzu kongruente Viereck $F(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ ist nun so auf E zu legen, dass sich die Punkte Q_i mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken.
Bei geeigneter Wahl der Punktbezeichnung ist das Dreieck $\triangle(Q_1Q_2Q_3)$ ebenfalls gleichseitig.



Für F kommen nur solche Lagebeziehungen zu E in Betracht, bei denen die Eckpunkte der kongruenten gleichseitigen Dreiecke zur Deckung gelangen. Soll außerdem Q_4 nicht außerhalb E liegen, ist zusätzlich F in eine solche Stellung zu bringen, dass sich Q_4 mit P_4 deckt.

Andernfalls fiele Q_4 in einen inneren Punkt der Strecke MP_3 oder MP_1. Diese liegen jedoch außerhalb von E.

Damit ist gezeigt, dass sich die Eckpunkte Q_i von F bezüglich E nur dann in die geforderte Lage bringen lassen, wenn die Punkte Q_i in die Eckpunkte von E fallen. Zugleich gehen, wie im Falle des konvexen Polygons, Randpunkte von F in Randpunkte von E über.
Die eingangs gestellte Frage ist also mit nein zu beantworten.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 181244
Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m > n$ die durch

$$s(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |i-j|$$

definierte Summe $s(m,n)$ den Wert hat:

$$s(m,n) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n)$$

(I) Es wird bewiesen, dass die Behauptung für den kleinstmöglichen Wert 2 von m und alle zugehörigen Werte von n zutrifft: Als zugehörigen Wert gibt es genau $n = 1$, und in der Tat gilt einerseits

$$s(2,1) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{1} |i-j| = \sum_{i=1}^{2} |i-1] = 0+1 = 1$$

und andererseits

$$\frac{1}{3}(1-1)\cdot 1\cdot (1+1) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot (2-1) = 1$$

(II) Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ wird gezeigt, dass aus der Richtigkeit der Behauptung für $m = k$ und alle zugehörigen Werte von n die Richtigkeit der Behauptung für $m = k+1$ und alle zugehörigen Werte von n folgt:
Für die zu $m = k+1$ gehörigen Werte von n gilt $k+1 > n$, also $k \geq n$.

Fallunterscheidung:
1. Fall $k > n$. Es gilt

$$s(k+1,n) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{n} |i-j| = s(k,n) + \sum_{j=1}^{n} |k+1-j| = s(k,n) + \sum_{j=1}^{n} (k+1-j)0$$

$$= s(k,n) + \frac{k+(k+1-n)}{2}\cdot n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}kn(k-n) + \frac{1}{2}(2k+1-n)n =$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(k+1)(k+1-n)$$

wie behauptet.
2. Fall $n = k$. Es gilt einerseits

$$s(k+1,k) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k} |i-j| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |i-j| + \sum_{j=1}^{k} |k+1-j| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |i-j| + |i-k| \right) + \sum_{j=1}^{k} |k+1-j| = s(k,k-1) + \sum_{i=1}^{k} (k-j) + \sum_{j=1}^{k} |k+1-j| =$$

$$= \frac{1}{3}(k-2)(k-1)k + \frac{1}{2}k(k-1)\cdot 1 + \frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= \frac{1}{6}k(2k^2 + 3k + 1) = \frac{1}{6}k(2k + 1)(k + 1)$$

andererseits erhält man für $m = k + 1$ und $n = k$ auch

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}mn(m-n) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1) \cdot 1 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 181245
Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Man zeige, dass es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_j = n! + j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weitere Zahl a_k $(k \neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

Es sei j eine der Zahlen $1, 2, ..., n$.
1. Fall: Es existiert ein Primteiler p_j von a_j mit $p_j \geq n$.
Wir behaupten, dass dieser Primteiler kein weiteres a_k $(k \neq j)$ teilt.
Angenommen, es existierte ein $k \neq j$, $0 < k \leq n$ derart, dass p_j a_k teilt. Dann würde p_j aber auch $a_k - a_j = k_j$ teilen, was wegen $|k - j| < n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $p_j \geq n$ steht.

2. Fall: Sämtliche Primteiler von a_j sind kleiner als n.
Dann ist

$$q = \frac{a_j}{j} = \frac{n!}{j} + 1$$

eine ganze Zahl, für die folgendes gilt:
q ist größer als 1 und besitzt daher Primteiler, die, da q ein Teiler von a_j ist, sämtlich kleiner als n sind. Diese Primteiler können keine der Zahlen m mit $1 < m < n$ und $m \neq j$ sein, da m ein Teiler von $\frac{n!}{j}$, also keiner von $\frac{n!}{j} + 1$ wäre. Dann muss aber j Primteiler von q und damit von a_i, a_j also von der Form j^i sein.
Es bleibt zu zeigen, dass für kein k mit $0 < k \leq n$ und $k \neq j$ j Teiler von a_k ist.
Angenommen also, ein solches k existierte. Wie im ersten Fall müsste dann j auch Teiler von $k - j$ und damit von k sein, d.h., es existierte eine ganze Zahl g mit $k = g_j$. Es ist $0 < g_j \leq nm$ $g_j \neq j$, also g_j Teiler von $\frac{n!}{j}$.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass j die Zahl $q = \frac{n!}{j} + 1$ teilt. Mit $p_j = j$ ist also auch im zweiten Fall eine Primzahl gefunden, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 181246A
Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s.
Um jeden Punkt A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt.
Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.
Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Es sei M der Mittelpunkt des regelmäßigen Fünfecks $A_1A_2A_3A_4A_5$ und r sein Umkreisradius. Dann ist $\angle A_1MA_2 = \frac{360°}{5} = 72°$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle A_1A_2M$ ist

$$s^2 = |A_1A_2|^2 = r^2 + r^2 - 2^2 \cdot \cos 72° = r^2 \cdot (2 - 2\cos 72°)$$

Mit $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ folgt also $\frac{s^2}{4} = r^2 \cdot \frac{4+1-\sqrt{5}}{2}$ bzw.

$$r^2 = s^2 \cdot \frac{2}{5 - \sqrt{5}} = s^2 \cdot \frac{2(5 + \sqrt{5})}{25 - 5} = s^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

Aus Symmetriegründen liegen die Mittelpunkte M_1 von K_1' und M_2 von K_2' auf verschiedenen Seiten der durch das Fünfeck definierten Ebene ϵ, wobei die Lote dieser Mittelpunkte auf ϵ beide den Fußpunkt M besitzen und die gleiche Länge h besitzen.

Damit sind die Dreiecke $\triangle A_1MM_1$ und $\triangle A_1MM_2$ jeweils rechtwinklig in M, wobei die einen Katheten jeweils die Länge $|A_1M| = r$, die zweiten Katheten die Länge $|MM_1| = |MM_2| = h$ und die Hypotenusen die Länge $|A_1M_1| = |A_1M_2| = s$ besitzen, wobei letzteres daraus folgt, dass die Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln genau die Entfernung der Summe ihrer beider Radien besitzen. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $r^2 + h^2 = s^2$ bzw.

$$h^2 = s^2 - r^2 = s^2 \cdot \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = s^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} = s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{20}}{20} > s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{25}}{20} = s^2 \cdot \frac{10-5}{20} = \frac{1}{4}s^2$$

also $h > \frac{1}{2}s$, sodass keine der beiden Kugeln K_1' und K_2' die Ebene ϵ des Fünfecks berührt oder schneidet. Also berühren oder schneiden sie sich auch gegenseitig nicht.

Bemerkung zur Berechnung von $\cos 72°$:

Es ist einerseits $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und andererseits

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Mit $x := 18°$ folgt wegen $\sin 2x = \sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos 54° = \cos 3x$ also $2\sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ bzw. nach Division durch $\cos x = \cos 18° \neq 0$ also

$$2\sin x = 4\cos^2 x - 3 = 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 1 - 4\sin^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in $\sin x$ hat die Lösungen $-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Da $\sin x = \sin 18°$ positiv ist, folgt

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 181246B
a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54 \qquad (1)$$
$$55y + z \leq 54 \qquad (2)$$
$$55x - 4z \geq 4 \qquad (3)$$
$$55y - 4z \geq 4 \qquad (4)$$
$$z \geq -1 \qquad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M$ die Ungleichung

$$f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.
b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind.
Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $(x_1, y_1, z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M'$ die Ungleichung

$$f(x_1, y_1, z_1) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.

a) Es seien x, y, z reelle Zahlen, für die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gilt wegen (3) und (1)

$$4z - 55x \leq -4; \qquad z + 55x \leq 54 \qquad \text{also} \qquad 5z \leq 40 \to z \leq 10$$

Wegen (5) gilt daher $-1 \leq z \leq 10$ (7). Nun folgt aus (1) und (3)

$$\frac{4+4z}{55} \leq x \leq \frac{54-z}{55} \qquad (8)$$

aus (2) und (4)

$$\frac{4+4z}{55} \leq y \leq \frac{54-z}{55} \qquad (9)$$

Wegen (7) ist $\frac{4 \cdot 4z}{55} \geq 0$, $0 < \frac{44}{45} \leq \frac{54-z}{55} \leq 1$, also $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ (10). Daraus folgt:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\left(\frac{54-z}{55}\right)^2 + z^2 \qquad (11)$$

Nun gilt für die quadratische Fuktion

$$g(z) = 2\left(\frac{54-z}{55}\right)^2 + z^2 \quad \text{mit} \quad -1 \leq z \leq 10$$

$$g(z) > 0; \qquad g(-1) = 3; \qquad g(10) = 101{,}28$$

also nimmt diese Funktion in ihrem Definitionsbereich ein Maximum für $z = 10$ an. Daher gilt: $f8x,y,z) \leq 101{,}28$ (12). Für $z_0 = 10$, $x_0 = y_0 = \frac{54-z_0}{55} = 0{,}8$ (13) wird nun $f(x_0, y_0, z_0) = 101{,}28$ (14), d.h. das Tripel $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}8; 0{,}8; 10)$ hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

b) Es seien nun x, y, z ganze Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gelten wieder die Ungleichungen (7), (8), (9) und (10), also kann nur entweder $x = 0$ oder $x = 1$ sein. Ferner gilt entweder $y = 0$ oder $y = 1$.
Ist $x = 0$, so folgt aus (3) $z \leq -1$, und daher wegen $z \geq -1$: $z = -1$.
Ist $x = 1$, so folgt aus (1) $z \leq -1$, also erneut $z = -1$.

Daher gibt es höchstens die folgenden ganzzahligen Tripel für die die Ungleichungen (1) bis 85) erfüllt sind:

$$(0; 0; -1), \qquad (0; 1; -1), \qquad (1; 0; -1), \qquad (1; 1; -1)$$

Sie erfüllen in der Tat diese Ungleichungen, ferner gilt:

$$f(0; 0; -1) = 1, \qquad f(0; 1; -1) = f(1; 0; -1) = 2, \qquad f(1; 1; -1) = 3$$

Also hat das Tripel $(x_1, y_1, z_1) = (1; 1; -1)$ die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft mit $f(x_1, y_1, z_1) = 3$.
Übernommen aus [3]

9.21 XIX. Olympiade 1979

9.21.1 I. Runde 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191211
Es sei (bezüglich eines kartesischen x,y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

Für jede reelle Zahl $c \geq 50$ gilt:
Jede Sehne von p durch den Punkt $(0; c)$ liegt auf einer Geraden, die

$$y = mx + c \tag{1}$$

(mit einer reellen Zahl m) als Gleichung hat. Ein Punkt $(x; y)$ ist genau dann Schnittpunkt dieser Geraden mit p wenn x und y das Gleichungssystem

$$y = mx + c \qquad , \qquad y = x^2$$

erfüllen. Daher schneidet p die Gerade (1) genau in den Punkten $(x_l; y_1)$, $(x_2; y_2)$, wobei

$$x_{1;2} = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 4c}) \qquad , \qquad y_{1;2} = \frac{1}{2}(m^2 + 2c \pm m\sqrt{m^2 + 4c})$$

ist. Die Sehne, die diese beiden Punkte verbindet, hat wegen

$$x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4c} \qquad , \qquad y_1 - y_2 = m\sqrt{m2 + 3c}$$

die Länge

$$s = \sqrt{m^2 + 4c + m2(m2 + 4c)} = \sqrt{m^4 + (4c + 1)m^2 + 4c}$$

Daher gilt genau dann $s = 2$, wenn

$$m^4 + (4c + 1)m^2 + 4c - 4 = 0 \tag{2}$$

ist. Diese Gleichung wird (bei gegebenem $c \geq 0$) genau dann von einer reellen Zahl m erfüllt, wenn m und eine reelle Zahl r die Gleichungen

$$r = m^2 \qquad ; \qquad r^2 + (4c + 1)r + 4c - 4 = 0 \tag{3,4}$$

erfüllen. Wegen $(4c - 1)^2 - 4(4c - 4) = (4c - 1)^2 + 26 > 0$ ist (4) gleichbedeutend damit, dass entweder

$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c + 1) + \sqrt{(4c - 1)^2 + 16}\right) \qquad \text{oder} \tag{5}$$

$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c + 1) - \sqrt{(4c - 1)^2 + 16}\right) \tag{6}$$

gilt. Hiervon führt (6) auf $r < 0$ im Widerspruch zu (3). Ferner ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann positiv, wenn

$$\sqrt{(4c - 1)^2 + 16} > 4c + 1$$

oder, wegen $4c + 1 > 0$, der Reige nach äquivalent hiermit

$$4c^2 - 8c + 17 > 4c^2 + 8c + 1 \Rightarrow c < 1$$

gilt; entsprechend ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann gleich 0, wenn $c = 1$ gilt. Daraus folgt:

a) Für $c = 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau die Lösung $r = 0$, $m = 0$. Also hat genau für $m = 0$ die durch (1) gegebene Gerade die Eigenschaft, dass die auf ihr gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Damit ist der in a) verlangte Beweis geführt.

b) Für $c > 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) keine Lösung, also gibt es keine Sehne von p, die durch den Punkt $(0; c)$ geht und die Länge 2 hat.

Für $0 \leq c < 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau diejenigen Lösungen, in denen r die in (5) angegebene Zahl und $m = \sqrt{r}$ oder $m = -\sqrt{r}$ ist. Daher haben genau für diese beiden Werte von m die durch (1) gegebenen Geraden die Eigenschaft, dass die auf der betreffenden Geraden gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Wegen $r > 0$ sind diese beiden Geraden, also auch dje auf ihnen gelegenen Sehnen, voneinander verschieden.

Die in b) gesuchten Zahlen c sind folglich genau die Zahlen mit $<\leq c < 1$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 191212
Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B', oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

Es seien U' und V' zwei beliebige Städte in Spiegelland, nach (1) also Partnerstädte von Städten U bzw. V in Normalland. Nach Voraussetzung ist U mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden.

Beweis:
Wegen $P = Q$, was aus (4) folgt, ist U nicht mit beiden Städten P, Q identisch. Mit einer von ihnen identisch und mit der anderen verbunden kann U nicht sein; denn dann wären P und Q unmittelbar miteinander verbunden, im Widerspruch zu (4). Mit beiden Städten P, Q verbunden, kann U auch nicht sein; denn dann wäre Q von P aus durch einmaliges Umsteigen in U zu erreichen, ebenfalls im Widerspruch zu (4).

O.B.d.A. sei U mit P weder identisch noch verbunden; dann existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen U' und der Partnerstadt P' von P.

Ferner existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen P' und der Partnerstadt Q' von Q, da P und Q nach (4) miteinander weder identisch noch verbunden sind.

Schließlich ist auch V mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden (Beweis wie oben). Trifft dies für P zu, so kommt man (da wie oben V' und P' verbunden sind) von U' über P' nach V'. Trifft es aber für Q zu, so kommt man (da nun, V' und Q' verbunden sind) von U' über P' und Q' nach V'.

Damit ist die behauptete Möglichkeit, ohne mehr als zweimaliges Umsteigen von U' nach V' zu gelangen, in jedem Fall nachgewiesen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 191213
Von einem Dreieck werde gefordert, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, dass diese Forderung erfüllbar ist und dass durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

Angenommen, es gibt ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. die den Seiten mit den Längen a bzw. b gegenüberliegenden Winkel mögen die Größen α bzw. β, und der dritte Dreieckswinkel möge die Größe γ haben.

Dann hat das Dreieck den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}(a^2-b^2)$$

Hieraus ergibt sich

$$(a-b)^2 + 2ab(1-\sin\gamma) = 0 \qquad (1)$$

Da $(a-b)^2 \geq 0$, $a<0$, $b>0$, $\sin\gamma \leq 1$ gilt, ist (1) nur erfüllbar, wenn $a-b=0$ und $1-\sin\gamma=0$ also $a=b$ und $\gamma=90°$ und somit $\alpha=\beta=45°$ ist.

Damit ist gezeigt, dass die Winkelgrößen durch die genannte Forderung eindeutig bestimmt sind.

Umgekehrt hat für diese Werte der Winkelgrößen, d.h. für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $a=b$, der Flächeninhalt des Dreiecks den Wert $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$, womit die Forderung als erfüllbar nachgewiesen ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 191214
a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (1)$$
$$0{,}069x + y = 0{,}3 \qquad (2)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_0,\, y_0)$ hat, und ermitteln Sie diese!
Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x *innerhalb einer gegebenen -Umgebung von 0,069 verändert*, d.h., für gegebenes reelles $\delta>0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leq h \leq \delta$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$7x + 100y = 0 \qquad (3)$$
$$(0{,}069+h)x + y = 0{,}3 \qquad (4)$$

betrachtet. Man möchte erreichen, dass sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 *um höchstens 1% ändern kann.* Damit ist die folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta>0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ (*bezüglich (3) maximaler relativer Fehler* von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta>0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!
c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \leq 0{,}01$ gilt!

Angenommen, $(x; y)$ sei eine Lösung (1), (4). Dann folgt

$$\begin{aligned} 7x + 100y &= 0 \\ (6{,}9 + 100h)x + 100y &= 30 \\ (0{,}1 - 100h)x &= -30 \end{aligned}$$

Ist $h = 0{,}001$, so bedeutet dies einen Widerspruch.
Ist $h \neq 0{,}001$, so folgt $x = -\frac{30}{0{,}1-100h}$; hieraus und aus (1) erhält man

$$y = -\frac{7}{100}x = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

Daher kann das System (1), (4) nur im Fall $h \neq 0{,}001$ eine Lösung haben, und zwar nur die angegebenen x, y. Diese erfüllen in der Tat (1) und (4).

Also gibt es genau dann für alle h aus (3) eine eindeutig bestimmte Lösung des Systems (1), (4), wenn $\delta < 0{,}001$ ist, und für alle diese h ist

$$x_h = -\frac{30}{0{,}1 - 100h} \qquad , \qquad y_h = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

a) Insbesondere ergibt sich $x_0 = -300, y_0 = 21$.

b) Hieraus folgt weiter

$$x_0 - x_h = \frac{-30 + 30000h + 30}{0{,}1 - 100h} = \frac{30000h}{0{,}1 - 100h}$$

unter Berücksichtigung von $h < 0{,}001$ also

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|} = \frac{100|h|}{0{,}1 - 100h}$$

Aus (3) folgt nun einerseits $|h| \leq \delta$, andererseits $0{,}1 - 100h \geq 0{,}1 - 100\delta$ (> 0), also

$$\eta \leq \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

und für $h = \delta$ gilt hierin das Gleichheitszeichen. Damit ist für jedes $\delta < 0{,}001$ die Existenz des bezüglich (3) maximalen relativen Fehlers von x nachgewiesen, und zwar ist

$$\eta_{\max} = \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

Ist dagegen $\delta \geq 0{,}001$, so kann ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler von x schon deswegen nicht existieren, weil nun in (3) auch der Wert $h = 0{,}001$ zugelassen ist, für den nicht einmal eine Lösung $(x_h; y_h)$ existiert.

Also sind die in b) gesuchten δ alle diejenigen, für die $0 < \delta < 0{,}001$ gilt.

c) Die Forderung

$$\frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta} \leq 0{,}01$$

ist für $0 < \delta < 0{,}001$ äquivalent mit $100\delta \leq 0{,}001 - \delta$, also $\delta \leq \frac{0{,}001}{101} = \frac{1}{10100}$.

Daher sind die in c) gesuchten δ alle diejenigen, für die gilt

$$0 < \delta \leq \frac{1}{10100} \quad (= 0{,}0000\overline{099})$$

Übernommen von [5]

9.21.2 II. Runde 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191221
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= 1 \\ y - \frac{1}{z} &= 1 \qquad (1) \\ z - \frac{1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Mittels paarweiser Subtraktion von je zwei der drei Gleichungen erhält man sofort das neue Gleichungssystem

$$x - y = \frac{z-y}{yz}, \quad x - z = \frac{x-y}{xy}, \quad y - z = \frac{x-z}{xz} \qquad (*)$$

und daraus durch Multiplizieren wiederum die neue Gleichung

$$(x-y)(x-z)(y-z) = \frac{(x-y)(x-z)(z-y)}{(xyz)^2}$$

Ware hier $(x-y)(x-z)(y-z) \neq 0$, so könnte hier durch diesen Ausdruck kürzen, was sofort auf den Widerspruch $(xyz)^2 = -1$ führen würde. Es muss also

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0$$

gelten, d.h., mindestens eine der Differenzen $x-y$,$x-z$,$y-z$ hat den Wert 0. Durch Einsetzen in (*) sieht man aber sofort, dass dann auch die beiden anderen Differenzen verschwinden, d.h., dass $x = y = z$ gelten muss.
Der Rest ist sehr einfach: Unter Benutzung von $x = y$ wird etwa die erste Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems zu

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

woraus sich dann sofort auch dessen insgesamt zwei Lösungen zu

$$x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ergeben.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 191222
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\angle DAB$ mit α bezeichnet.
Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$\begin{aligned} AB \parallel CD &\qquad (1) \\ |AB| > |CD| &\qquad (2) \\ |BC| = |CD| = |DA| &\qquad (3) \\ AC \perp BC &\qquad (4) \end{aligned}$$

Man beweise, dass die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und dass die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

Nach (1) handelt es sich bei $ABCD$ um ein Trapez, nach (3) wegen $|BC| = |DA|$ (und $|AB| \neq |CD|$) sogar um ein symmetrisches. Also ist $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle CAB = 90° - \angle CAB$.
Weiterhin sind im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ACD$ die beiden Basiswinkel $\angle DAC$ und $\angle ACD$ gleich groß sowie auch die Wechselwinkel $\angle ACD$ und CAB an den geschnittenen Parallelen AB und CD.
Damit ist $2\angle CAB = \angle CAB + \angle DAC = \alpha = 90° - \angle CAB$, also $\angle CAB = 30°$ und $\alpha = 60°$. Damit ist α eindeutig bestimmt.

Tatsächlich ist bei einem symmetrischen Trapez $ABCD$ mit $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 60°$ und $\angle BCD = \angle CDA = 120°$ die Diagonale AC die Winkelhalbierende des Winkels $\angle DAB$, sodass sie senkrecht auf der Seite BC steht und die Seiten DA, CD und BC gleich lang sind.
Weiterhin ist AB die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$, also insbesondere länger als die Kathete BC, sodass auch $|AB| > |CD|$ folgt.

Abschließend ist nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ das Verhältnis $|BC| : |AB| = \sin\angle CAB = \sin 30° = 1 : 2$, also auch $|CD| : |AB| = 1 : 2$. Ist h der Abstand der beiden Parallelen AB und CD, so berechnet sich F_1 zu $F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$ und F_2 zu $F_2 = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h$, sodass $F_1 : F_2 = |AB| : |CD| = 2 : 1$ folgt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 191223
100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen.
Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar
a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung:
Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.
Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!
(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, dass jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

Die Städte seien mit 1 bis 100 durchnummeriert. Die gleiche Nummer trägt der Tourist aus der betreffenden Stadt.

Im Fall a) ist n=3.

Dies ist so möglich: Am ersten Tag besuchen alle Touristen Stadt 1, am zweiten Tag Stadt 2 und am dritten Tag Stadt 3.
Seien i und j beliebige Touristen, so ist mindestens eine der drei Zahlen 1, 2 und 3 von i und j verschieden. Diese Zahl sei x$\leq$ 3.
Spätestens in der x-ten Stadt machen sich i und j miteinander bekannt, da sie sich zusammen in einer Stadt aufhalten, die von i und j verschieden ist. Mit weniger als 3 besuchten Städten ist das nicht möglich, da die beiden Bewohner der ersten beiden von der Gruppe besuchten Städte sich in beiden Städten nicht miteinander bekannt machen.

Im Fall b) ist n=2.

Die Touristen 2 bis 100 starten in Stadt 1, Tourist 1 startet in Stadt 3.
Als erstes wechselt Tourist 2 die Stadt und fährt nach 3. (a)
Dann fahren die Touristen 3 bis 99 nach Stadt 2. (b)
Anschließend wechselt Tourist 1 nach Stadt 2. (c)
Zu diesem Zeitpunkt hat jeder Tourist genau 2 Städte besucht.

Tourist 1 hat Tourist 2 in Stadt 3 kennengelernt (zwischen (a) und (c)).
Tourist 1 hat die Touristen 3 bis 99 in Stadt 2 kennengelernt (nach (c)).

Die Touristen 2 bis 99 haben sich paarweise in Stadt 1 kennengelernt (vor (a)).
Mit n=1 sind die Bedingungen nicht erfüllbar. Dazu müssten sich alle Touristen in der selben Stadt kennenlernen, weil sie die Stadt nicht wechseln, bevor sich alle kennen. Der Tourist, der aber aus genau dieser Stadt kommt, hat noch keinen kennengelernt.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 191224
a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.

Was a) betrifft, hat der Zähler von $f_1(x)$ die Periode $\pi\sqrt{2}$ und sein Nenner die Periode $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$. f_1 hat daher insgesamt die Periode $\pi\sqrt{2}$.

Nur leicht komplizierter liegen die Dinge bei b). Hier hat die Funktion f_2 Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt. Wäre f_2 aber wirklich periodisch, so hätte die (stetig ergänzte) Funktion

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sin x} = \frac{1}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

aufgrund dieser zwei Darstellungen einerseits eine Periode $p \geq 2\pi$, anderseits aber die Periode $p = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} < 2\pi$, Widerspruch! f_2 ist daher nicht periodisch.

b) Die Funktion f_2 hat Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt.

Angenommen es gäbe $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, so dass f_2 die Periode $k\pi$ hat. Da dann auch $2k\pi$ eine Periode von f_2 wäre, können wir o.B.d.A. annehmen, dass k gerade ist.
Aus $f_2(\frac{\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ würde somit

$$\sin^2\left((\frac{\pi}{2} + k\pi)\sqrt{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)$$

folgen.
Wegen $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - 2\cos(2x))$ und $\cos(y) = \cos(z) \iff y + z \in 2\pi\mathbb{Z} \vee y - z \in 2\pi\mathbb{Z}$ wäre dann

$$2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} + 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \vee \qquad 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} - 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

also

$$(1+k)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \qquad \vee \qquad k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}.$$

Das ist aber unmöglich, da $\sqrt{2}$ irrational ist und $k \neq 0 \neq 1 + k$ gilt.

Also ist f_2 nicht periodisch.

Aufgabe gelöst von weird und Nuramon

9.21.3 III. Runde 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191231
Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

Eine Teilmenge von $N = \{1,2,...,n\}$ hat offensichtlich genau dann keine gemeinsamen Elemente mit $M = \{1,2,...,m\}$, wenn sie auch Teilmenge von $M \setminus N$ ist.
Indem man also deren Anzahl von der Gesamtzahl der Teilmengen von N abzieht, ergibt sich dann also für die fragliche Anzahl $A_{m,n}$ aller derjenigen Teilmengen von N, welche gemeinsame Elemente mit M haben, zu

$$A_{m,n} = \begin{cases} 2^n - 1, & \text{falls } n \leq m \\ 2^{n-m}(2^m - 1), & \text{falls } n > m \end{cases}$$

bzw. zusammengefasst

$$A_{m,n} = 2^n - 2^{\max(n-m,0)}$$

Aufgabe gelöst von weird

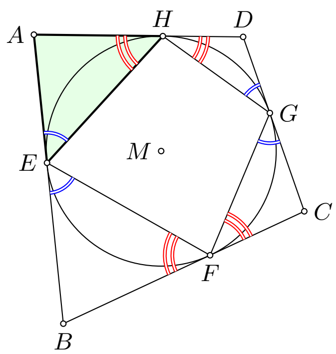
Aufgabe 2 - 191232
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, dass sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d.h. es wird vorausgesetzt:

$$AE : EB = DA : BC; BF : FC = AB : CD; CG : GD = BC : DA; DH : HA = CD : AB \qquad (1)$$

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck $ABCD$ gilt $AB + CD = BC + DA$ (d.h. $ABCD$ ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck $EFGH$ für die Größe der Innenwinkel

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

gilt (d.h. wenn $EFGH$ ein Sehnenviereck ist).



Die Bedingung

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

ist äquivalent zu

$$\angle AEH + \angle FEB + \angle CGF + \angle HGD = \angle BFE + \angle GFC + \angle DHG + \angle EHA \qquad (2),$$

d.h. wir gehen von den Innenwinkeln zu den Winkeln der Dreiecke AEH, BFE, CGF und DHG über. Im folgenden zeigen wir, dass aus $AB+CD = BC+DA$, $AB+CD < BC+DA$ und $AB+CD > BC+DA$ jeweils $\angle AEH = \angle EHA$, $\angle AEH > \angle EHA$ und $\angle AEH < \angle EHA$ im Dreieck AEH folgt, d.h. das Größenverhältnis der an den Seiten anliegenden Winkel ist umgekehrt zu dem Größenverhältnis der Summe der Seiten.

Dieses gilt ebenfalls für die anderen drei Dreiecke und somit ist (2) äquivalent zu $AB+CD = BC+DA$, da aus $AB + CD \neq BC + DA$ die Ungleichheit in (2) folgt.

Aus $AE + EB = AB$ und $AE : EB = DA : BC$ folgt $AE = \frac{AB \cdot DA}{BC+DA}$ und $EB = \frac{AB \cdot BC}{BC+DA}$. Anlog erhalten wir $AH = \frac{AB \cdot DA}{AB+CD}$ und somit $\frac{AE}{AH} = \frac{AB+CD}{BC+DA}$. Aus $AB + CD = BC + DA$ folgt, dass $\triangle AEH$ gleichschenklig mit $\angle AEH = \angle EHA$ ist. Entsprechend gilt

$$AB + CD < BC + DA \Rightarrow AE < AH \Rightarrow \angle EHA < \angle AEH$$

wegen der Größenbeziehung zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck AEH. Aus Symmetrie gilt ebenfalls $AB + CD > BC + DA \Rightarrow \angle EHA > \angle AEH$.

Quelle anonym

Aufgabe 3A - 191233A
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Für alle Paare $(x_1; x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Aus (1) folgt $f(0+0) = f(0)+f(0)$, also $f(0) = 2f(0)$ und damit, nach Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten, $f(0) = 0$. Weiterhin gilt $f(x - x) = f(x) + f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $0 = f(x) + f(-x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$. Wegen $f(1) = 1$ haben wir insbesondere $f(-1) = -1$ und $f(x + 1) = f(x) + 1$.
Für alle $x \notin \{0, -1\}$ haben wir nun

$$\frac{f(x)}{x^2} + 1 = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1+x}{x}\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^2$$

und

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{f(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1+f(x)}{(1+x)^2}$$

was kombiniert dann

$$\frac{f(x)}{x^2} + 1 = \left(1 - \frac{1+f(x)}{(1+x)^2}\right)\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{1+f(x)}{x^2}$$

also

$$2\frac{f(x)}{x^2} = \frac{2}{x}$$

und damit, zusammen mit $f(0) = 0$ und $f(-1) = -1$ (aus den Vorüberlegungen bzw. (1) und (2)), gilt $f(x) = x$ für alle x.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Anmerkung von MontyPythagoras und Kornkreis:
Wegen $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ gilt für $x_2 = 0$ offenkundig $f(0) = 0$. Wenn wir nun den Differenzenquotienten bilden:

$$f(x + h) = f(x) + f(h)$$

$$f(x + h) - f(x) = f(h) - f(0)$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Im Grenzübergang $h \to 0$ folgt

$$f'(x) = f'(0)$$

und somit

$$f(x) = mx + b$$

Wegen $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x)$ muss gelten:

$$\frac{m}{x} + b = \frac{1}{x^2}(mx + b) = \frac{m}{x} + \frac{b}{x^2}$$

Daraus folgt $b = 0$, und wegen $f(1) = 1$ kommt nur $m = 1$ in Frage. Die Funktion muss also lauten

$$f(x) = x$$

wenn sie differenzierbar sein soll.
Man kann zeigen, dass eine Funktion, die die erste Funktionalgleichung (1) erfüllt (eine der Cauchy-Funktionalgleichungen) entweder linear ist oder einen Graphen besitzt, der dicht in $\mathbb{R}^2$ liegt.
Von letzteren gibt es unendlich viele, sodass unendlich viele Lösungen der ersten Funktionalgleichung nirgendwo stetig und damit nirgendwo differenzierbar sind.

Aufgabe 3B - 191233B
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} > 1000 \qquad (1)$$

gilt.
Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, dass jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Wir nutzen eine bekannte Ungleichung des natürlichen Logarithmus, und zwar:

$$x > \ln(1+x) \quad \forall \quad x > 0$$

Daher ist

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

Die Summe in der Aufgabenstellung ist dann

$$s = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$

Mit obiger Ungleichung gilt:

$$s > \sum_{k=n}^{n^2} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n^2+1) - \ln n$$

(Die Summe ist eine Teleskopsumme). Somit gilt

$$s > \ln\frac{n^2+1}{n}$$

Wenn dieser Term größer als 1000 ist, ist auch $s > 1000$. Daher ist eine hinreichende Bedingung:

$$\frac{n^2+1}{n} > e^{1000}$$

Offensichtlich ist n sehr groß, so dass man $(n^2 + 1)$ durch n annähern kann. Dann gilt

$$n > e^{1000} \approx 1{,}97 \times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0 \times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p \geq 436$.

2. Lösung:
Es ist

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

da $\frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist. Damit ergibt sich als Abgrenzung für die Summe:

$$s = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=n}^{n^2} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \sum_{k=n}^{n^2} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Die Integrale reihen sich in den Summen nun "nahtlos" aneinander, so dass man folgern kann:

$$\int_n^{n^2+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \int_{n-1}^{n^2} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Daraus folgt:

$$\ln(n^2+1) - \ln n < s < \ln(n^2) - \ln(n-1)$$

$$\ln \frac{n^2+1}{n} < s < \ln \frac{n^2}{n-1}$$

Die Ungleichung der Aufgabenstellung ist erfüllt, wenn gilt

$$\ln \frac{n^2+1}{n} > 1000$$

$$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > e^{1000}$$

Daraus folgt:

$$n = \lceil e^{1000} \rceil \approx 1{,}97 \times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0 \times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p \geq 436$.

Anmerkung: Man kann durch Verwendung der sogenannten "erzeugenden Funktion" die Summe auch exakt berechnen: Sei

$$s(x) = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{x^k}{k}$$

wobei s(1) die gesuchte Summe darstellt. Einmal ableiten:

$$s'(x) = \sum_{k=n}^{n^2} x^{k-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^{n^2-1}$$

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{n^2-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-2} x^k$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2}-1}{x-1} - \frac{x^{n-1}-1}{x-1}$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2}-x^{n-1}}{x-1}$$

$$s(x) = \int_0^x \frac{t^{n^2}-t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

da $s(0) = 0$. Daher gilt:

$$\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{t^{n^2}-t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

Das hilft in Bezug auf die obige Abschätzung nicht weiter, da dieses Integral nicht elementar lösbar ist außer durch eine Summenbildung, die uns zum Startpunkt zurückbringt.

Beide Lösungen von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 191234
Man untersuche, ob unter allen Tetraedern $ABCD$ mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\angle BDC$, $\angle CDA$, $\angle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $AB+AC+AD+BC+BD+CD$ existiert.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Aufgrund der rechten Winkel gilt nach dem Satz von Pythagoras $|AB| = \sqrt{|AD|^2+|BD|^2}$, $|AC| = \sqrt{|AD|^2+|CD|^2}$ und $|BC| = \sqrt{|BD|^2+|CD|^2}$.

Für beliebige positive reelle Zahlen x und y gilt $\frac{x^+y^2-2xy}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$, also

$$x^2+y^2 \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} \qquad \text{und damit} \qquad \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(x+y)$$

wobei Gleichheit nur für $x=y$ gilt.

Setzt man dies ein, so erhält man

$$|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD| \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(|AD|+|BD|)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(|AD|+|CD|)+|AD|+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(|BD|+|CD|)+|BD|+|CD| =$$

$$= (|AD|+|BD|+|CD|)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (|AD|+|BD|+|CD|)\cdot(1+\sqrt{2})$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD|=|BD|=|CD|$ eintritt.

Das Volumen V des Tetraeders $ABCD$ bestimmt sich aufgrund der rechten Winkel bei D zu $V = \frac{1}{6}\cdot|AD|\cdot|BD|\cdot|CD|$, sodass $\sqrt[3]{|AD|\cdot|BD|\cdot|CD|} = \sqrt[3]{6V}$ folgt.

Für beliebige positive reelle Zahlen x, y und z gilt aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, wobei Gleichheit nur genau für $x=y=z$ eintritt.

Also ist

$$|AD|+|BD|+|CD| = 3\cdot\frac{|AD|+|BD|+|CD|}{3} \geq 3\cdot\sqrt[3]{6V}$$

und damit

$$|AB|+|AC|+|AD|+|BC|+|BD|+|CD| \geq 3\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt[3]{6V}$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD|=|BD|=|CD|$ eintritt. Damit ist der dafür entstehende Term auf der rechten Seite genau die gesuchte kleinste Summe.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 191235
Man beweise:
Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q}-\frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q}+\frac{1}{9q^2}$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1:

Sei $p \geq q$. Dann gilt

$$\frac{p}{q}-\frac{1}{9q^2} \geq 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} > \frac{6}{9} > \frac{3\cdot\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

was den Voraussetzungen widerspricht.

Fall 2:

Sei $p < q$. Dann gilt
$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Multiplikation mit $9 \cdot \sqrt{3} \cdot q^2$ liefert
$$9 \cdot \sqrt{3} \cdot p \cdot q - \sqrt{3} < 9 \cdot q^2 < 9 \cdot \sqrt{3} \cdot p \cdot q + \sqrt{3}$$

und somit
$$\sqrt{3} \cdot (9pq - 1) < 9q^2 < \sqrt{3} \cdot (9pq + 1)\,.$$

Quadrieren gibt
$$3 \cdot (9pq - 1)^2 < 81q^4 < 3 \cdot (9pq + 1)^2\,.$$

Division durch 3 ergibt
$$(9pq - 1)^2 < 27q^4 < (9pq + 1)^2\,.$$

Division durch $9q^2$ liefert
$$\left(3p - \frac{1}{3q}\right)^2 < 3q^2 < \left(3p + \frac{1}{3q}\right)^2.$$

Ausmultiplizieren führt zu
$$9p^2 - 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2} < 3q^2 < 9p^2 + 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Wegen $p < q$ gilt
$$9p^2 - 2 < 3q^2 < 9p^2 + 3.$$

Somit muss
$$3q^2 = s$$

mit
$$s \in \left\{9p^2 - 1, 9p^2, 9p^2 + 1, 9p^2 + 2\right\}$$

sein.

Fall 2.1:
Falls $3q^2 = 9p^2 - 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{\ mod}\,3 = 0 \mathbf{\ mod}\,3$ und $9p^2 - 1 \mathbf{\ mod}\,3 = 2 \mathbf{\ mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.2:
Falls $3q^2 = 9p^2$ ist, muss $p = \frac{q}{\sqrt{3}}$ und somit $p \notin \mathbb{N}$ sein. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

Fall 2.3:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{\ mod}\,3 = 0 \mathbf{\ mod}\,3$ und $9p^2 + 1 \mathbf{\ mod}\,3 = 1 \mathbf{\ mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.4:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 2$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{\ mod}\,3 = 0 \mathbf{\ mod}\,3$ und $9p^2 + 2 \mathbf{\ mod}\,3 = 2 \mathbf{\ mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Somit widerspricht auch Fall 2 den Voraussetzungen. Insgesamt kann gefolgert werden, dass es keine positiven ganzen Zahlen p und q geben kann, welche die vorausgesetzten Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe gelöst von svrc

2. Lösung:
Man betrachte zunächst nur die linke Hälfte der Ungleichung:
$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$

Analog dazu aus der rechten Hälfte:

$$p > \frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q}$$

Wir führen das wieder zusammen und quadrieren:

$$\frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q} < p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$

$$\frac{1}{3}q^2 - \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2} < p^2 < \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2}$$

Noch mit 3 multiplizieren:

$$q^2 - \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2} < 3p^2 < q^2 + \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2}$$

Da $\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{9} \cdot 1.8 = 0.4$ und $\frac{1}{27q^2} \leq \frac{1}{27} < 0.04$ ist, kann man daraus ableiten, dass

$$q^2 - 1 < 3p^2 < q^2 + 1$$

sein muss. Daraus folgt aber direkt $q^2 = 3p^2$ bzw.

$$q = \sqrt{3}\, p$$

was aufgrund der Irrationalität von $\sqrt{3}$ nicht möglich ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6 - 191236
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a.
Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^5 + y^5 = 1 \qquad , \qquad x + y = a$$

Wir nutzen die Symmetrie, indem wir $x = \frac{a}{2} + z$ und $y = \frac{a}{2} - z$ substituieren. Die zweite Bedingung ist dadurch automatisch erfüllt. Aus der ersten Bedingung folgt:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)^5 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^5 = 1$$

$$2\left(\frac{a}{2}\right)^5 + 2 \cdot 10 \left(\frac{a}{2}\right)^3 z^2 + 2 \cdot 5 \left(\frac{a}{2}\right) z^4 = 1$$

Das ist eine biquadratische Gleichung, die leicht zu lösen ist:

$$\frac{a^5}{16} + \frac{5a^3}{2} z^2 + 5az^4 = 1$$

$$z^4 + \frac{1}{2}a^2 z^2 + \frac{a^4}{80} - \frac{1}{5a} = 0$$

$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{80}a^4 + \frac{1}{5a}}$$

(Da $z^2 \geq 0$ gelten muss, kommt nur diese Lösung in Frage).

$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{20}a^4 + \frac{1}{5a}} = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}}$$

Damit gilt:

$$z = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}}}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}} - a^2}$$

Die Lösungen lauten dann aufgrund der Symmetrie $(x,y) = (x_1,x_2)$ und $(x,y) = (x_2,x_1)$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

9.21.4 IV. Runde 1979, Klasse 12

Aufgabe 1 - 191241
Man ermittle alle Paare $(f(x); g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.
(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.
(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.
(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.
(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

Angenommen, für zwei Polynome $f(x), g(x)$ seien die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.
1. Zunächst wird gezeigt, dass durch die Bedingungen (1) bis (5) die Funktionswerte $f(k), g(k)$ für $k =$ 1,2,3,4 eindeutig bestimmt sind. Wäre $f(4) = 1$, so führten (3) und (5) auf den Widerspruch $g(1) = 1$, $g(1) = 0$. Also ist nach (1) $f(4) = 0$. Nach (4) folgt hieraus $g(2) = 0, g(4) = 0$.
Aus (2) ergibt sich daher, dass weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$ sein kann, somit ist nach (1) $f(1) = 1, f(2) = 0$. Hiernach erhält man aus (3) $g(1) = 1, g(3) = 1$.
Somit ergibt (5), dass nicht $f(3) = 1$ gelten kann; nach (1) ist also $f(3) = 0$. Wir erhalten also

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 0; \quad f(3) = 0; \quad f(4) = 0; \quad g(1) = 1; \quad g(2) = 0; \quad g(3) = 1; \quad g(4) = 0 \qquad (6)$$

2. Die Gleichungen (6) lauten ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 0 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 &= 0 \qquad \text{und} \\ b_3 + b_2 + b_1 + b_0 &= 1 \\ 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 &= 0 \\ 27b_3 + 9b_2 + 3b_1 + b_0 &= 1 \\ 64b_3 + 16b_2 + 4b_1 + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dies sind zwei lineare Gleichungssysteme für die Koeffizienten, die man z.B. durch schrittweise Elimination einer Unbekannten auflösen kann. Man erhält so:

$$a_0 = 4; \quad a_1 = -\frac{13}{3}; \quad a_2 = \frac{3}{2}; \quad a_3 = -\frac{1}{6} \qquad \text{und}$$
$$b_0 = 8; \quad b_1 = -\frac{34}{3}; \quad b_2 = 5; \quad b_3 = -\frac{2}{3}$$

Es können daher nur die Polynome

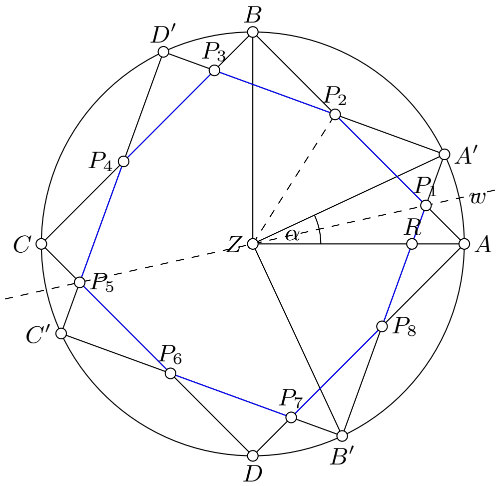
$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4 \qquad \text{und} \qquad g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllten. Dass (1) erfüllt ist, kann man mit einer Probe leicht nachprüfen. (2) ist erfüllt, denn es ist weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$. (3) ist erfüllt, denn es ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$. (4) ist erfüllt, denn es ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$ und (5) ist erfüllt, denn es ist weder $f(3) = 1$ noch $f(4) = 1$.
Daher erfüllt genau das Paar $(f(x), g(x))$ mit $f(x), g(x)$ aus (7) alle Bedingungen der Aufgabenstellung.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 2 - 191242
Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ϵ liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ϵ als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben.
Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cup Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt.
Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

Für beliebige $Q, Q' \in M$ gilt: Ist $Q = Q'$, so ist $Q \cap Q'$ die Quadratfläche Q mit dem Umfang $4a$.
Ist $Q \neq Q'$, so kann man, wenn AB eine beliebige Seite der Quadratfläche Q ist, die Ecken von Q und Q' so mit A, B, C, D bzw. A', B', C', D' bezeichnen, dass die Punkte $A, A', B, D', C, C', D, B'$ auf dem gemeinsamen Umkreis von Q und Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind (siehe Abbildung).



Hiernach hat der Winkel $\angle AZA'$ eine Größe α mit $0° < \alpha < 90°$. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w dieses Winkels geht A in A' über, also Q' in Q, folglich (wegen des Umlaufsinns) B in B', C in C', D in D' und daher der wegen $0° < \alpha < 90°$ existierende Schnittpunkt P_1 von AB mit $A'B'$ in sich über. Also liegt P_1 auf w.
Die Strecken AB und $A'B'$ schneiden einander also in demjenigen Punkt P_1 auf AB, für den $\angle AZP_1 = \frac{\alpha}{2}$ gilt. Ebenso folgt:
AB und $D'A'$ schneiden einander in demjenigen Punkt P_2 auf AB, für den $\angle BZP_2 = \frac{90°-\alpha}{2} = 45° - \frac{a}{2}$ ist.
Da also $\angle AZP_2 = \frac{\alpha}{2} + 45°$ gilt, ist wegen $0° < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + 45° < 90°$ die Strecke P_1P_2 folglich eine Seite der Polygonfläche $Q \cap Q'$.
Ebenso findet man die weiteren Schnittpunkte P_3, P_4 von BC mit $D'A'$ bzw. $C'D'$, P_5, P_6 von CD mit $C'D'$ bzw. $B'C'$, P_7, P_8 von DA mit $B'C'$ bzw. $A'B'$ und damit $Q \cap Q'$ als die Achtecksfläche $P_1P_2...P_8$.

Bei Spiegelung an w geht der Schnittpunkt P_2 von AB und $D'A'$ über in den Schnittpunkt von $A'B'$ und DA, d.h. in P_8. Also ist $P_1P_2 = P_1P_8$.
Ebenso folgt, dass je zwei benachbarte Seiten von $Q \cap Q'$ dieselbe Länge $s = P_1P_2$ haben, somit gilt $u(Q \cap Q') = 8s$.
Wegen $\angle A'Z'B' = 90°$ und $0° < \alpha < 90°$ schneiden die Strecken ZA und $A'B'$ einander in einem Punkt R, und es gilt $\angle ARP_8 = \angle A'RZ$ (Scheitelwinkel) sowie $\angle RAP_8 = 45° = \angle RA'Z$. Somit gilt $\angle P_1P_8A = \angle RP_8A = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck), wegen $\angle P_1AP_8 = 90°$ also $AP_1 = s \cdot \sin\alpha$.
Ebenso erhält man $\angle P_2P_3B = 90° - \alpha$, also $P_2B = s \cdot \cos\alpha$. Aus

$$a = AP_1 + P_1P_2 + P_2B = s(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha) \qquad \text{folgt somit}$$

$$s = \frac{a}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$$

Nun nimmt

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}(\cos\alpha \cdot \cos 45° + \sin\alpha \cdot \sin 45°) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$$

wegen $-45° < \alpha - 45° < 45°$ für genau $\alpha - 45° = 0$ seinen größten Wert an, und dieser beträgt $\sqrt{2}$. Daher existiert für alle $Q, Q' \in M$ mit $Q \neq Q'$ ein kleinstmöglicher Wert von $u(Q \cap Q') = 8s$, und dieser beträgt

$$\frac{8a}{1+\sqrt{2}} = 8a(\sqrt{2}-1)$$

Wegen $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$, also $8a(\sqrt{2}-1) < 4a$ ist dies zugleich der kleinstmögliche Wert von $u(Q \cap Q')$ für alle $Q, Q' \in M$ auch bei zugelassenem $Q = Q'$.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 3 - 191243
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y \qquad ; \qquad 2y + y^2z = z \qquad ; \qquad 2z + z^2x = x$$

gilt. Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+, -, \cdot, :$, von reellwertigen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

Betrachten wir etwa die letzte Gleichung $2z + z^2x = x$, so kann man auch in der Form $2z = x(1 - z^2)$ schreiben, wobei hier $1 - z^2 \neq 0$ ist, da $1 - z^2 = 0$ sofort auf den Widerspruch $\pm 2 = 0$ führen würde. Nach zyklischer Vertauschung der Variablen x,y,z, gegen welche unser Gleichungssystem ja ersichtlich invariant ist, ergeben sich daraus sofort die drei weiteren Gleichungen

$$x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad z = \frac{2y}{1-y^2} \quad (*)$$

welche von ihrer Form her sofort an die Formel

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

aus der Trigonometrie erinnern. Es ist daher der Ansatz

$$x = \tan\alpha, \quad y = \tan\beta, \quad z = \tan\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$$

sehr naheliegend, womit sich dann (*) auch einfach schreiben lässt als

$$\alpha \equiv 2\gamma \mod \pi, \quad \beta \equiv 2\alpha \mod \pi, \quad \gamma \equiv 2\beta \mod \pi \quad (**)$$

Einsetzen führt dann auf

$$7\alpha = 8\alpha - \alpha \equiv 4\beta - \alpha \equiv 2\gamma - \alpha \equiv 0 \mod \pi$$

d.h., im Intervall $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ hat α die insgesamt 7 Lösungen

$$\alpha \in \{0, \pm\frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\}$$

womit wir in Verbindung mit (**) nun auch die vollständige Lösung des gegebenen Gleichungssystems leicht angeben können:

$$x = \tan\alpha, \quad y = \tan(2\alpha), \quad z = \tan(4\alpha) \quad (\alpha \in \{0, \pm\frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\})$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 191244
Man beweise, dass für keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m \quad (1)$ gilt!

Aus der Annahme der Existenz natürlicher Zahlen $n \geq 1$, $m \geq 2$ und b die der Gleichung (1) genüge, ergibt sich wegen $n \geq 1$ nach einer binomischen Formel

$$(2n)^{2n} - 1 = ((2n)^n - 1)((2n)^n + 1) = b^m$$

wobei $(2n)^n - 1$ und $(2n)^n + 1$ teilerfremd sind, da es sich um aufeinanderfolgende ungerade Zahlen handelt. Demzufolge muss jeder Primfaktor von $(2n)^n - 1$ und jeder Primfaktor von $(2n)^n + 1$ in den entsprechenden Primzerlegungen in einer Anzahl auftreten, die ein natürliches Vielfaches von m ist. Das bedeutet, es gibt natürliche Zahlen h und k mit

$$(2n)^n - 1 = h^m \qquad ; \qquad (2n)^n + 1 = k^m \qquad (*)$$

Damit erhält man unter Beachtung von $m \geq 2$

$$2 = k^m - h^n = (k-h)\sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i$$

Andererseits gilt aber mit $n \geq 1$ und (*)

$$k^m > k^h \geq (2 \cdot 1)^1 - 1 = 1$$

also $k > h \geq 1$, woraus sich $k - h \geq 1$ und

$$\sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i = k^{m-1} + k^{m-2}h + ... + h^{m-1} > mh^{m-1} \geq 2$$

ergibt. Das liefert aber den Widerspruch

$$2 = (k-h)\sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i > 1 \cdot 2$$

Damit kann die oben gemachte Annahme nicht zutreffen.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 191245
Man beweise:
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Für die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}}$ ist die folgende Darstellung möglich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \qquad (1)$$

$$\text{mit} \qquad S_k = \sum_{j=1}^{n^i} \frac{1}{kn^i + j} \qquad (2)$$

Weiterhin gilt

$$S_k > \frac{n^i}{(k+1)n^i} = \frac{1}{k+1} \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \qquad (4)$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten von (4) den Ausdruck $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n^i}$, so folgt nach dem Monotoniegesetz der Addition (Subtraktion) bei Ungleichungen:

$$\frac{1}{n^i+1}+\frac{1}{n^i+2}+...+\frac{1}{n^{i+1}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \qquad (5)$$

Diese Ungleichung besteht für alle natürliche Zahlen $i \geq 1$. Ist $i-j \geq 1$, so gilt auch:

$$\frac{1}{n^{i-j}+1}+\frac{1}{n^{i-j}+2}+...+\frac{1}{n^{i-j+1}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \qquad (5)$$

Notiert man die Ungleichung (6) nacheinander für $j = 0,1,...,i-1$, so erhält man i Ungleichungen, deren rechte Seiten untereinander gleich sind. Nach bekannten Sätzen über das Rechnen mit Ungleichungen dürfen gleichgerichtete Ungleichungen addiert werden. Addiert man außerdem auf beiden Seiten die Summe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n^{i+1}}>(i+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) \qquad (7)$$

Setzt man in Ungleichung (7) $i+1=k$, so folgt die zu beweisende Ungleichung in der vorgelegten Form.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 191246A
Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)=z$$

gilt.
Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an der Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $\{x_k\}$, die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $\{f(x_k)\}$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist.
Man zeige:
a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt:
Die durch $f(x)=Ax+B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.
b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a=0$ den Funktionswert $f(0)=0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p,q die Gleichung $f(p+q)=f(p)+f(q)$.

a) Für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Ax_k+B)\right)$$
$$=A\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)+B=Aa+B=f(a)$$

da nach Voraussetzung gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)=a$$

Damit ist bewiesen, dass für jede solche Folge (x_k) die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist, w.z.b.w.

b) Für den Beweis dieses Teils der Behauptung wird die C-Konvergenz einer spezielle ausgewählten Folge benutzt.
Für beliebige reelle Zahlen p,q wird die Folge

$$(x_k)=(p,q,-(p+q)mp,q,-(p+q),...)$$

betrachtet. Für sie gilt offenbar

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = p \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2} x_k = p+q \quad ; \quad \sum_{k=1}^{3} x_k = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{4} x_k = p \quad ; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = p+q \quad ; \quad \sum_{k=1}^{6} x_k = 0$$

und allgemein für $m = 0,1,2,...$:

$$\text{im Falle } n = 3m+1: \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p}{n}$$

$$\text{im Falle } n = 3m+2: \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p+q}{n}$$

$$\text{im Falle } n = 3m+3: \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

Da die Folgen $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{p+q}{n}\right)$ gegen Null konvergieren, konvergiert auch die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$ gegen Null. Die Folge (x_k) ist daher C-konvergent gegen Null.

Sei f eine für alle reelle Zahlen x definierte Funktion, die an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle $C - stetig$ ist.

Dann ist nach Voraussetzung die Folge $(f(x_k))$ C-konvergent gegen $f(0) = 0$, d.h. die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$ konvergiert gegen Null. Das gilt dann auch für ihre Teilfolge $\left(\frac{1}{3m}\sum\limits_{k=1}^{3m} f(x_k)\right)$, d.h. es ist

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = 0$$

Da für beliebiges m

$$\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = \frac{1}{3}[(f(p) + f(q) + (f - (p+q))]$$

gilt, ist diese Teilfolge eine Folge mit konstanten Gliedern. Folglich gilt für beliebige p, q:

$$f(p) + f(q) + f(-(p+q)) = 0 \qquad (1)$$

Aus (1) folgt für $p = 0$ und beliebiges reelles q' wegen $f(0) = 0$:

$$f(0) + f(q') = f(q') = -f(-q') \qquad (2)$$

Für $q' = p + q$ folgt somit $f(p+q) = -f(-(p+q))$. Damit ergibt sich aus (1) und 82) die zu beweisende Behauptung $f(p) + f(q) = f(p+q)$.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 191246B
In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.
Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von n Zügen bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Gemäß Angabe haben wir hier vier Gruppen von je 5 Handschuhen zu folgenden Typen
• WL (=weiß und für linke Hand)
• WR (=weiß und für rechte Hand)
• SL (=schwarz und für linke Hand)
• SR (=schwarz und für rechte Hand)
Bei einer Ziehung von k Handschuhen, d.h., nach k "Zügen", kommt es genau dann zu einem Erfolg, wenn wenn zwei Handschuhe der Typen WL und WR oder zwei Handschuhe der Typen SL und SR darunter sind. Diese Paarungen müssen aber spätestens nach 11 ($= 5 + 5 + 1$) Zügen auf jeden Fall auftreten, was dann schon einmal die Frage in a) beantwortet.

Für b) betrachten wir die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs nach k Zügen, wobei hier das kleinste k zu berechnen ist, für welches diese < 0.01, also dann relativ klein ist. Wir gehen daher im Folgenden davon aus $k > 5$ sein wird, was dann auch durch die Rechnung nachträglich bestätigt wird.

Damit dann ein Misserfolg nach $k \in \{6,7,8,9,10\}$ Zügen eintritt, dürfen für gezogenen Handschuhe natürlich nur einer der 4 Typenkombinationen WL-SL, WL-SR, WR-SL, WR-SR auftreten. Die Wahrscheinlichkeit P_k für einen Misserfolg nach k Zügen beträgt daher

$$P_k = 4 \prod_{j=1}^{k} \frac{11-j}{21-j}$$

und speziell für $k = 6$ und $k = 7$ erhält man so die Werte

$$P_6 \approx 0.02167 \quad \text{bzw.} \quad P_7 \approx 0.00619$$

Die Antwort auf die Frage in b) ist somit $k = 7$.

Aufgabe gelöst von weird

Alternative Lösung

(a) Ein Spiel mit zehn Zügen ist nicht mit Sicherheit erfolgreich, denn man kann z.B. zehn linke Handschuhe entnehmen.
Ein Spiel mit elf Zügen ist dagegen immer erfolgreich, denn man muss dann mindestens sechs Handschuhe von gleicher Farbe entnehmen, und da jeweils nur fünf linke bzw. rechte Handschuhe vorhanden sind, ist darunter mindestens ein passendes Paar. Die in (a) gesuchte Zahl ist also $n = 11$.

(b) Gibt $f(m)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Spiel mit m Zügen erfolgreich ist, so haben wir $f(1) = 0$, $f(11) = 1$ und $f(m)$ ist monoton wachsend, d. h. $f(m) \leq f(m+1)$ für $m = 1, 2, ...$

Mithin ist k genau die (eindeutig bestimmte) Zahl mit $f(k) > 0{,}99$ und $f(k-1) \leq 0{,}99$.

Die 20 Handschuhe fassen wir zu vier Klassen zusammen: die weißen linken in WL, die weißen rechten in WR, die schwarzen linken in SL, die schwarze rechten in SR.
Wir entnehmen m Handschuhe mit $6 \leq m \leq 10$ und betrachten die Menge E der entnommenen Handschuhe. Die Handschuhe sind natürlich unterscheidbar, die Reihenfolge des Entnehmens ist jedoch nicht mehr erkennbar.

Insgesamt gibt es $\binom{20}{m}$ Möglichkeiten für E.
Wir berechnen jetzt die Anzahl der Möglichkeiten, kein passendes Paar in E zu haben. Dann sind die Handschuhe aus E aus genau zwei Klassen. Als Zusammenstellung der Klassen kommen die vier Kombinationen WL–SL, WL–SR, WR–SL, WR–SR in Betracht.
In jedem der vier Fälle gibt es genau $\binom{10}{m}$ Möglichkeiten für E. Also gilt:

$$f(m) = 1 - \frac{4 \cdot \binom{10}{m}}{\binom{20}{m}}$$

Speziell ist

$$f(6) = 1 - \frac{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} = 1 - \frac{7}{323} < 0{,}99 \qquad \text{und}$$

und

$$f(7) = 1 - \frac{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = 1 - \frac{2}{323} > 0{,}99$$

Die in b) gesuchte Zahl ist also $k = 7$.

Übernommen von [12]

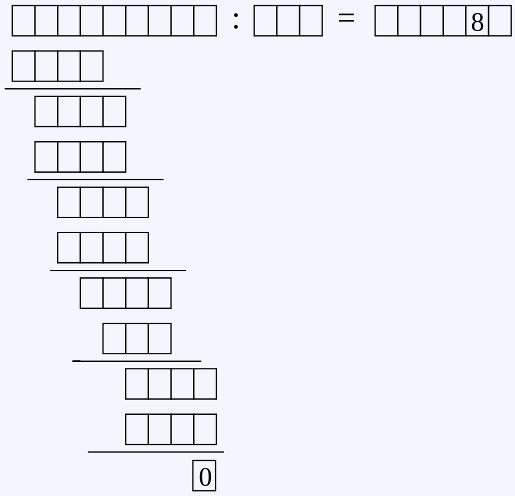
9.22 XX. Olympiade 1980

9.22.1 I. Runde 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201211

In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!



Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, so folgt:
Die fünfte Ziffer des Quotienten lautet 0, da in der 9. Zeile des Schemas gleich zwei neue Ziffern des Dividenden auftreten.

Ist x der Divisor, so steht in der 8. Zeile die Zahl $8x$, da sie dreistellig ist, während die Zahlen in der 2., 4., 6. und 10. Zeile vierstellig, also größer als $8x$ sind, lauten sie $9x$; d,h., die erste, zweite, dritte und sechste Ziffer des Quotienten lautet 9; dieser beträgt somit 999809.

Da $8x$ dreistellig ist, gilt $8x < 1000$, als $x < 125$ (1)

In der 9. und 10. Zeile steht (wegen der Differenz 0 in der 11. Zeile) die Zahl $9x$. Wegen (1) gilt für sie demnach $9x < 1125$.
Führt man die im Schema vorgesehene Subtraktion der Zahl in der 8. von der Zahl in der 7. Zeile durch, so erhält man ein zweistelliges Ergebnis. gebildet aus den ersten beiden Ziffern der 9. Zeile. Dieses ist folglich kleiner als 12. Somit ist die Summe aus 12 und der Zahl in der 8. Zeile größer als die Zahl in der 7. Zeile und daher (da diese vierstellig ist) größer als 999; d.h., es gilt

$$12 + 8x > 999 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{987}{8} \quad (= 123\frac{3}{8})$$

Aus (1), (2) und der Ganzzahligkeit von x folgt $x = 124$. Somit beträgt der Dividend $999809 \cdot 124 = 123976316$, und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{ccccccccc l}
1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 6 & 3 & 1 & 6 & : \; 1 \; 2 \; 4 \; = \; 9 \; 9 \; 9 \; 8 \; 0 \; 9 \\
1 & 1 & 1 & 6 & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & 1 & 2 & 3 & 7 & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 6 & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 1 & 2 & 1 & 6 & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 6 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 1 & 0 & 0 & 3 & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 2 & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 6 & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 6 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

handeln. Diese stellt in der Tat eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe dar; insbesondere ist keine ihrer mehrstelligen Zahlen mit einer ersten Ziffer 0 geschrieben.
Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 201212
Vier Personen A, B, C, D machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl x. Es ist bekannt, dass

(1) von A, B, C genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,

(2) D zwei wahre Aussagen macht.

Die von A, B, C, D gemachten Aussagen lauten:

(A1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von x ist gerade.

(A2) x ist Quadratzahl.

(B1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von x mindestens einmal vorhanden.

(B2) x ist vierstellig.

(C1) x ist durch 10 teilbar.

(C2) x lässt bei Division durch 3 den Rest 1 .

(D1) In der dekadischen Darstellung von x ist, falls x aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.

(D2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von x ist nicht größer als 2.

Man ermittle alle Zahlen x, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

Wenn für eine Zahl x die Aussagen (D1) und (D2) wahr sind, so folgt; dass die Ziffern von x abwechselnd gerade und ungerade sind.

Weiter folgt, dass höchstens zwei gerade Ziffern und - abwechselnd mit ihnen - höchstens drei ungerade Ziffern vorkommen. Somit ist die Zahl x höchstens fünfstellig, und wenn sie fünfstellig ist, beginnt sie mit einer ungeraden Ziffer. Hiernach können (D1) und (D2) nur für die Zahlen x in der folgenden Tabelle wahr sein.

Umgekehrt bestätigt man (D1) und (D2) für alle diese Zahlen. Sie sind also genau diejenigen Zahlen, die die Bedingung (2) erfüllen- Für jede von ihnen ist in der Tabelle angegeben, ob die Aussagen (A1) bis (C2) wahr oder falsch sind. So erhält man die anschließend genannten Anzahlen der falschen Aussagen von A, B und C.

x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	falsche A	Aussagen B	von C
0	W	W	F	F	W	F	0	2	1
1	F	W	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
2	W	F	F	F	F	F	1	2	2
3	F	F	F	F	F	F	2	2	2
4	W	W	F	F	F	W	0	2	1
5	F	F	F	F	F	F	2	2	2
6	W	F	F	F	F	F	1	2	2
7	F	F	F	F	F	W	2	2	1
8	W	F	F	F	F	F	1	2	2
9	F	W	W	F	F	F	**1**	**1**	**2**
12	W	F	F	F	F	F	1	2	2
23	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34	W	F	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
45	F	F	F	F	F	F	2	2	2
56	W	F	F	F	F	F	1	2	2
67	F	F	F	F	F	W	2	2	1
78	W	F	F	F	F	F	1	2	2
89	F	F	W	F	F	F	2	2	2
123	F	F	F	F	F	F	2	2	2
234	W	F	F	F	F	F	1	2	2
345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
456	W	F	F	F	F	F	1	2	2
567	F	F	F	F	F	F	2	2	2
678	W	F	F	F	F	F	1	2	2
789	F	F	w	F	F	F	2	1	2

							falsche	Aussagen	von
x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	A	B	C
1234	W	F	F	W	F	W	1	1	1
2345	F	F	F	W	F	F	2	1	2
3456	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
4567	F	F	F	W	F	W	**2**	**1**	**1**
5678	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
6789	F	F	W	W	F	F	2	0	2
12345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34567	F	F	F	F	F	W	2	2	1
56789	F	F	W	F	F	F	2	1	2

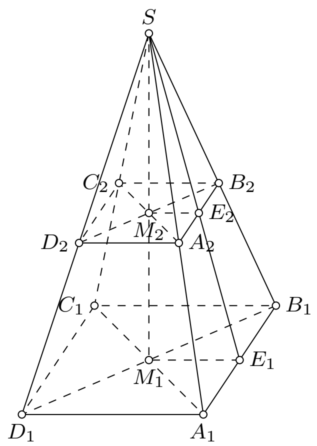
Daraus ist ersichtlich, dass unter allen Zahlen, die (2) erfüllen, genau die Zahlen 1, 9, 34, 3456, 4567, 5678 auch die Bedingung (1) erfüllen. Somit sind genau diese Zahlen die gesuchten.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 201213

Eine gerade Pyramide K_1 mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide K_2 und einen Pyramidenstumpf K_3 zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von K_1 und K_2 seien a_1 bzw. a_2, die Volumina von K_2 bzw. K_3 seien V_2 bzw. V_3.

Man ermittle $a_1 : a_2$ so, dass $V_2 : V_3 = 2 : 3$ gilt.



Die Ecken von K_1 und K_2 seien so mit A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, S bezeichnet wir die Abbildung angibt. Die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) von $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ seien M_1 bzw. M_2; die Mittelpunkte von A_1B_1 bzw. A_2B_2 seien E_1 bzw. E_2.

Dann sind $H_1 = SM_1$, $h_2 = SM_2$ die Höhenlängen von K_1 bzw. K_2M die Punkte S, M_2, M_1 liegen auf einer Geraden, ebenso S,E_2,E_1; es gilt $M_1E_1 \parallel M_2E_2$ sowie $M_1E_1 = \frac{1}{2}a_1$, $M_2E_2 = \frac{1}{2}a_2$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$h_1 : h_2 = M_1E_1 : M_2E_2 = a_1 : a_2$$

Definiert man $r = a_1 : a_2$, so gilt folglich $r = h_1 : h_2$, sowie $a_1 = ra_2, h_1 = r_2$. Ferner haben K_2, K_1 die Volumina

$$V_2 = \frac{1}{3}a_2^2h_2 \qquad \text{und} \qquad V_1 = \frac{1}{3}a_1^2h_1 = \frac{1}{3}r^3a_2^2h_2 = r^3V_2$$

Somit ist

$$V_3 = V_1 - V : 2 = (r^3 - 1)V_2 \qquad , \qquad V_2 : V_3 = 1 : (r^3 - 1)$$

Daher ist die Forderung $V_2 : V_3 = 2 : 3$ der Reihe nach gleichbedeutende mit

$$1 : (r^3 - 1) = 2 : 3 \qquad , \qquad 2r^3 - 2 = 3 \qquad , \qquad r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Somit ist die genannte Forderung genau für $a_1 : a_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 201214
In einem rechtwinkligen kartesischen x,y-Koordinatensystem seien gegeben:

Die Punkte $M(0;0)$, $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$, $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade g mit der Gleichung $x = -8$, der Kreis k_1 um M durch A, der Kreis k_2 um M durch B.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$* versteht man die Menge E_1 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2 \cdot \overline{MA}$ gilt.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkt F_2, Leitlinie g und Exzentrizität 1/2* versteht man die Menge E_2 aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt $\overline{F_2P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ}$.

Unter der *Ellipse durch A mit Hauptscheitelkreis k_1 und Nebenscheitelkreis k_2* versteht man die Menge E_3 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von M ausgehenden Strahl. Er schneidet k_1 bzw. k_2 in je einem Punkt R_1 bzw. R_2. Die Parallele durch R_1 zur y-Achse und die Parallele durch R_2 zur x-Achse schneiden sich in P.

Beweisen Sie, dass die drei Punktmengen E_1, E_2, E_3 einander gleich sind!

(I) Die Gültigkeit von $P \in E_1$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 8 \qquad (1)$$

Ist dies für einen Punkt $P(x;y)$ der Fall, so folgt

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 4 - 4x)(x^2 + y^2 + 4 + 4x)} = 64 \qquad (2)$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2} = 28 - (x^2 + y^2) \qquad (3)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 8(x^2 + y^2) + 16 - 16x^2 = 784 - 568x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \qquad (4)$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \qquad (5)$$

Umgekehrt folgt aus (5) wieder (4). Ferner folgt aus (5), dass

$$3x^2 + 3y^2 \leq 3x^2 + 4y^2 = 48 \qquad \text{also} \qquad x^2 + y^2 \leq 16 < 28$$

gilt. Hiernach und weil der Radikand in (3) das Produkt der beiden Radikanden in (1), also nichtnegativ ist, kann man von (4) weiter auf (3) schließen, und es folgt (2), woraus sich auch die Gleichung (1) ergibt, da ihre beiden Seiten nichtnegativ sind.
Also ist $P \in E_1$ mit (5) gleichbedeutend.

(II) Die Gültigkeit von $P \in E_2$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x+8|$$

dies mit

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 16x + 64)$$

und dies wieder mit (5).

(III) Der Kreis k_1 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 16$$

der Kreis k_2 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 12$$

Jeder von M ausgehende Strahl ist für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Menge aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten sich mit reellem $t \geq 0$ in der Form

$$(pt; qt) \qquad (8)$$

schreiben lassen, und umgekehrt liefert diese Beschreibung für jedes Paar $(p;q) \neq (0;0)$ einen von M ausgehenden Strahl. Hiernach ergeben sich (für den jeweils betrachteten Strahl) die Koordinaten von R_1

wegen (6) durch Einsetzen desjenigen Wertes $t \geq 0$ in (8), der $p^2t^2 + q^2t^2)16$ erfüllt. Das ist der Wert $t = \frac{4}{\sqrt{p^2+q^2}}$, damit ist

$$R_1\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{4q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

gefunden. Ebenso findet man aus (7)

$$R_2\left(\frac{2p\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

Daraus ergibt sich nach Konstruktionsvorschrift

$$P\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \tag{9}$$

Also ist die Gültigkeit von $P \in E_3$ gleichbedeutend damit, dass für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Koordinatenangabe (9) auf $P(x;y)$ zutrifft.

Ist dies der Fall, so folgt

$$3x^2 + 4y^2 = \frac{3 \cdot 16p^2}{p^2+q^2} + \frac{4 \cdot 12}{p^2+^2} = 48$$

also (5).
Gilt umgekehrt (5), so sind x und y nicht beide gleich 0. Definiert man daher beispielsweise $p = x; q = \frac{2}{\sqrt{3}}y$, so gilt $(p;q) \neq (0;0)$ und

$$p^2 + q^2 = x^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{1}{3}(3x^2 + 4y^2) = 16$$

$$\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}} = p = x \qquad , \qquad \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}q = y$$

womit sich $P \in E_3$ ergeben hat.

In (I), (II), (III) ist nunmehr gezeigt, dass jede der Beziehungen $P \in E_1$, $P \in E_2$, $P \in E_3$ mit (5) gleichbedeutend ist. Daraus ergibt sich $E_1 = E_2 = E_3$, w.z.b.w.

Übernommen von [5]

9.22.2 II. Runde 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201221
Für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$$I_1 = [1; 2], \quad I_2 = [0{,}53; 0{,}531], \quad I_3 = [0{,}509; 0.51], \quad I_4 = [0{,}4; 0{,}5]$$

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge $\{a_n\}$ liegen.
Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

Für jedes $n = 1{,}2{,}3{,}...$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1), \qquad \text{also} \qquad a_n = \frac{1}{2n^2})n^2 + n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Somit ist $a_n \in I_1$, $a_n \in I_2$, $a_n \in I_3$ bzw. $a_n \in I_4$ jeweils der Reihe gleichbedeutend mit den anschließend gegebenen Ungleichungen:

- $a_n \in I_1$
$$1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 2 \quad ; \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}$$
$$2 \geq 2n \geq \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3} \leq n \leq 1$$
- $a_n \in I_2$
$$0{,}53 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}531 \quad ; \quad \frac{3}{100} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{31}{1000}$$
$$\frac{100}{3} \geq 2n \geq \frac{1000}{31} \quad ; \quad \frac{500}{31} \leq n \leq \frac{50}{3}$$
- $a_n \in I_3$
$$0{,}509 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}51 \quad ; \quad \frac{9}{100ß} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{100}$$
$$\frac{1000}{9} \geq 2n \geq 100 \quad ; \quad 50 \leq n \leq \frac{500}{9}$$
- $a_n \in I_4$
$$0{,}4 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}5 \quad ; \quad -0{,}1 \leq \frac{1}{2n} \leq 0$$

Wegen $16 < \frac{500}{31}, \frac{50}{3} < 17$; $55 < \frac{500}{9} < 56$ sowie wegen $\frac{1}{2n} > 0$ für alle $n = 1{,}2{,}3{,}...$ ergibt sich damit: Es gilt
$a_n \in I_1$ genau für $n = 1$,
$a_n \in I_2$ für kein n,
$a_n \in I_3$ genau für $n = 50, 51, 52, 53, 54, 55$,
$a_n \in I_4$ für kein n.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 201222
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \qquad b = \frac{k+1}{2}, \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Für jedes positive reelle k gilt $(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4k \geq 4k$, also $\frac{k+1}{2} \geq \frac{2k}{k+1}$ und $\frac{k+1}{2} \geq \sqrt{k}$.
Wenn nun k eine positive reelle Zahl ist, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}; \qquad b = \frac{k+1}{2}; \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt:
Es gilt $b \geq a$ und $b \geq c$, also ist b die Maßzahl der Hypotenusenlänge und nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^2}{4} &= \frac{4k^2}{(k+1)^2} + k \\ (k+1)^4 &= 16k^2 + 4k(k+1)^2 \\ (k+1)^2\left((k+1)^2 - 4k\right) &= 16k^2 \\ (k+1)^2(k^2+2k+1-4k) &= 16k^2 \\ (k+1)^2(k-1)^2 - 16k^2 &= 0 \\ (k^2-4k-1)(k^2+4k-1) &= 0 \end{aligned}$$

Eine von beiden Klammern muss null sein, woraus sich folgende Lösungen ergeben:

$$k = \pm 2 \pm \sqrt{5}$$

Da $\sqrt{5} > 2$ ist, aber $k > 0$ sein soll, muss das Vorzeichen vor der $\sqrt{5}$ auf jeden Fall + sein, und damit folgt

$$k = \sqrt{5} \pm 2 \qquad (1)$$

Umgekehrt erfüllen diese beiden Werte die angegebene Gleichungen; daher haben sie nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die geforderte Eigenschaft.
Somit sind genau die beiden in (1) angegebenen Zahlen die gesuchten.

Lösung übernommen aus [5] *und verbessert durch MontyPythagoras*

2.Lösung:
Das Verhältnis der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck zueinander ist durch den Satz des Pythagoras definiert. Aus den im Aufgabentext gegebenen Formeln $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, ergeben sich für $a^2 = \frac{4k^2}{k^2+2k+1}$ für $b^2 = \frac{k^2+2k+1}{4}$ und für $c^2 = k$.
Nach Umformung folgt

$$\frac{1}{a^2} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2}$$

und mit dem Verhältnis

$$\frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{k^2}$$

die für k quadratische Gleichung

$$k^2 - ka^2 - a^4 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{2})^2 + a^4}$$

$$k_{1,2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} + a^4}$$

$$k_1 = \frac{a^2}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$k_2 = \frac{a^2}{2}(1-\sqrt{5})$$

Da $k_2 < 0$ ist, fällt diese Lösung heraus da sie die Bedingungen der Aufgabenstellung nicht erfüllt. Mit dem Einsetzen von $(k = k_1)$ folgt für

$$a^2 = \frac{2k}{1+\sqrt{5}} = \frac{4k^2}{k^2+2k+1}$$

und nach weiterer Berechnung

$$k^2 - 2k\sqrt{5} + 1 = 0$$
$$k_3 = \sqrt{5} + 2$$
$$k_4 = \sqrt{5} - 2$$

ergeben sich die beiden Zahlenwerte k_3, k_4, die, zur Überprüfung eingesetzt, auch die Lösungswerte der Aufgabenstellung sind.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 3 - 201223
An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal.
Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.
Nach Abschluss des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze $1, 2, ..., n$ der Abschlusstabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)
Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

Für jedes mögliche Turnier und je zwei Mannschaften, die in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarte Plätze k und $k+1$ $(1 \leq k \leq n-1)$ einnehmen, gilt:

Die Mannschaften, die auf den Plätzen $1, ..., k$ liegen, haben untereinander $\frac{k(k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k(k-1)$ Punkte erhalten. Außerdem haben diese Mannschaften gegen die Mannschaften, die auf den Plätzen $k+1, k+2, ..., n$ liegen, insgesamt $k \cdot (n-k)$ Spiele ausgetragen und dabei insgesamt höchstens $2k \cdot (n-k)$ Punkte erhalten.
Die Mannschaften der Plätze 1 bis k haben also insgesamt nicht mehr als

$$k(k-1 = +2k(n-k) = k(2n-k-1)$$

Punkte erhalten.
Hieraus folgt, dass die Mannschaft auf Platz k nicht mehr als $2n-k-1$ Punkte erhielt; denn wäre dies doch der Fall, so müsste jede der Mannschaften auf den Plätzen 1,...,k ebenfalls mehr als $2n-k-1$ Punkte erhalten haben, und es ergäben sich für diese Mannschaften insgesamt mehr als $k(2n-k-1)$ Punkte.
Die $n-k$ Mannschaften auf den Plätzen $k+1, ..., n$ haben untereinander insgesamt $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $(n-k)(n-k-1)$ Punkte erhalten.
Also muss die Mannschaften auf dem Platz $k-1$ mindestens $n-k-1$ Punkte errungen haben; denn wäre es weniger, so erst recht für jede der Mannschaften auf den Plätzen $k+1, ..., n$, wenn nur deren Spiele untereinander berücksichtigt werden, und es ergäben sich für diese Spiele insgesamt weniger als $(n-k)(n-k-1)$ Punkte.

Folglich kann in jedem möglichen Turnier die Punktdifferenz zweier beliebiger Mannschaften, die in der Abschlusstabelle die benachbarten Plätze k und $k+1$ einnehmen, nicht mehr als

$$(2n-k-1) - (n-k-1) = n$$

betragen.
Wenn nun noch ein Beispiel eines Turniers angegeben wird, worin zwei benachbarte Mannschaften mit der Punktdifferenz n auftreten, so ist n als die gesuchte Zahl nachgewiesen.
Ein solches Beispiel erhält man, wenn in einem Turnier die Mannschaft auf Platz 1 gegen alle übrigen Mannschaften gewonnen, dafür also $2n-2$ Punkte erhalten hat, und die übrigen Mannschaften untereinander unentschieden gespielt haben, so dass jede dieser Mannschaften für diese $n-2$ Spiele $n-2$ Punkte und damit insgesamt in der Abschlusstabelle $n-2$ Punkte erhielt.
Die Punktdifferenz zwischen den Mannschaften auf den Plätzen 1 und 2 beträgt dann nämlich $(2n-2) - (n-2) = n$ Punkte.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 201224
Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, das
a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;
b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.
Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.

Angenommen, es gibt ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und m ($m = 3$ oder $m = 4$) paarweise verschiedene ganze Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$, so dass

$$p(x_1) = p(x_2) = ... = p(x_m) = 1$$

und eine weitere ganze Zahl x_0, so dass $p(x_0) = 30$ ist.
Dann gilt, wenn man $f(x) = p(x) - 1$ setzt,

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_m) = 0$$

also ist das Polynom $f(x)$ durch die Polynome $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_m$ teilbar, und wenn man die Division ausführt, entsteht

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)g(x) \qquad (1)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Ferner gilt dann

$$p(x_0) = 30 \qquad \text{also} \qquad f(x_0) = p(x_0) - 1 = 29 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_m)g(x_0) = 29 \qquad (3)$$

Dabei sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$, $g(x)$ sämtlich ganzzahlig, sie können also, weil 29 eine Primzahl ist, nur gleich 1, -1, 29, -29 sein. Ferner sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$ paarweise verschieden, und es kann nur einer dieser Faktoren den Betrag 29 haben, weil sonst die linke Seite von (3) durch 29^2 teilbar wäre.

Daher können insgesamt höchstens drei solche Faktoren auftreten; d.h., es folgt $m \leq 3$ und somit zu b) das Ergebnis: Es gibt kein Polynom mit diesen Eigenschaften.
Umgekehrt kann man (3) für $m = 3$ z.B. dadurch erfüllen, dass man

$$x_0 - x_1 = 1, \qquad x_0 - x_2 = -1, \qquad x_0 - x_3 = -29$$

erreicht, für x_0 eine beliebige ganze Zahl, etwas $x_0 = 0$, setzt und für $g(x)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten wählt, das die Bedingung $g(x_0) = 1$ erfüllt, etwa das konstante Polynom $g(x) = 1$. Hiermit, d.h. mit $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 29$, wird das in (1) angegebene Polynom

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 29) = x^3 - 29x^2 - x + 29$$

also

$$p(x) = f(x) + 1 = x^3 - 29x^2 - x + 30 \qquad (4)$$

Für dieses Polynom gilt in der Tat

$$p(-1) = p(1) = p(29) = 1 \qquad ; \qquad p(0) = 30$$

Damit ist a) gezeigt: Es gibt ein Polynom mit den genannten Eigenschaften, z.B. das in (4) genannte Polynom.

Übernommen von [5]

9.22.3 III. Runde 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201231
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x^4 + x^2 - 2x \geq 0 \qquad (1)$$
$$2x^3 + x - 1 < 0 \qquad (2)$$
$$x^3 - x > 0 \qquad (3)$$

Wir führen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von x durch:

1. Fall: $x \geq 0$. Dann ist nach (3) $0 < x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$ also $x > 0$ und $0 < x^2 - 1$, d.h. $x^2 > 1$ und damit auch $x > 1$. Dann jedoch ist $2x^3 + x - 1 > 2x^3 > 0$ im Widerspruch zu (2), sodass es hier keine Lösung gibt.

2. Fall: $x < 0$. Dann ist $-2x > 0$ und wegen $x^4 > 0$ sowie $x^2 > 0$ (1) erfüllt. Offensichtlich ist auch $2x^3 < 0$ und $x - 1 < 0$, also auch (2) erfüllt. Wegen $0 < x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$ wird (3) genau dann erfüllt, wenn $x^2 - 1$ negativ ist, also $0 < x^2 < 1$ und damit $-1 < x < 0$ gilt.

Das Ungleichungssystem wird also genau für diejenigen reellen Zahlen x mit $-1 < x < 0$ erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 201232
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f
a) die Menge aller ganzen Zahlen,
b) die Menge aller reellen Zahlen ist.
Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

An der Darstellung

$$f(x) = \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{3}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\right)^4 + \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{3}{2}\right)^4$$

sehen wir, dass f achsensymmetrisch bezüglich $x = -\frac{3}{2}$ und höchstens ein quadratisches Polynom ist.
Insbesondere hat f ihr globales Minimum oder Maximum bei $x = -\frac{3}{2}$.
Aus $f(-1) = f(-2) = 16$ und $f(-\frac{3}{2}) = 10$ folgt, dass f eine nach oben geöffnete Parabel ist und somit bei $x = -\frac{3}{2}$ ihr reelles Minimum und bei $x = -1$, $x = -2$ ihr Minimum über den ganzen Zahlen annimmt.

Quelle anonym

Aufgabe 3A - 201233A
Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n}$$

Die Aufgabe ist äquivalent zu der Frage, ob $f_n(x) := x + \frac{1}{1+x^n}$ für $x > 0$ streng monoton steigend ist. Es gilt

$$f_n'(x) := 1 - \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}; \qquad f_n'(1) := \frac{4-n}{4}$$

Daher ist für $n > 4$ die Funktion bei $x = 1$ streng monoton fallend. Für $n = 4$ folgt aus $f_4''(1) > 0$, dass diese dort ein lokales Minimum hat.
Wir zeigen nun, dass f_n für $n \leq 3$ und $x > 0$ streng monoton steigend ist.

$$f_n'(x) = \frac{(1+x^n)^2 - nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{(1-x^n)^2 + x^{n-1}(4x-n)}{(1+x^n)^2}$$

Der erste Summand im Zähler und der Nenner sind stets nicht negativ. Der zweite Summand ist für $x \geq 1 > \frac{n}{4}$ positiv. Also ist f_n für $x \geq 1$ streng monoton steigend. Für $0 < x < 1$ können wir den Zähler der Ableitung wie folgt darstellen:

$$(1+x^n)^2 - nx^{n-1} = 1 + 2x^n + x^{2n} - nx^{n-1} \geq 1 + 2x^n + x^{2n} - 3x^{n-1} = (1 - x^{n-1}) + 2x^{n-1}(1-x) + x^{2n}$$

Die drei Summanden sind wegen $0 < x < 1$ positiv und somit ist für $n \leq 3$ die Ableitung für alle $x > 0$ positiv.

Quelle anonym

Aufgabe 3B - 201233B
Ist f eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:
(1) Für jedes reelle x mit $0 \leq x \leq 1$ gilt $f(x) \geq 0$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für jedes reelle x_1 mit $0 \leq x_1 \leq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0 \leq x_2 \leq 1$ und $x_1 + x_2 \leq 1$ gilt $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.
a) Man beweise:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) < 2x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.
b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x) \leq 1{,}99 \cdot x$ für jedes reelle x mit $0 < x \leq 1$.

a) Mit $x_1 := 1$ und $x_2 := 0$ folgt aus den Eigenschaften $1 = f(1) = f(1+0) \geq f(1) + f(0) = 1 + f(0)$, also $f(0) \leq 0$ und wegen (1) dann $f(0) = 0$.

Sei nun n eine beliebige positive ganze Zahl. Dann ist für jedes reelle x mit $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ mit $x_1 := (n-1)x$ und $x_2 := x$ die Ungleichung $f(nx) \geq f((n-1)x) + f(x)$ erfüllt, woraus induktiv $f(nx) \geq n \cdot f(x)$ folgt. Insbesondere ist mit $x = \frac{1}{n}$ dann $1 = f\left(\frac{n}{n}\right) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$, also $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Weiterhin ist die Funktion f monoton steigend, denn gilt $0 \leq x < y \leq 1$, so gilt mit $x_1 := x$ und $0 < x_2 := y - x$ die Ungleichung $f(y) = f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2) \geq f(x) + 0 = f(x)$.

Damit gilt also für jede positive ganze Zahl k und jedes reelle x mit $\frac{1}{2^k} < x \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ die Ungleichung $f(x) \leq \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \frac{1}{2^k} \leq 2 \cdot x$. Da jedes $0 < x \leq 1$ in einem dieser Intervalle liegt, ist diese Ungleichung damit für alle solchen x gezeigt, $\square$.

b) Wir zeigen zuerst, dass die Funktion $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{, wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{, wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ alle drei Bedingungen erfüllt: Offensichtlich ist für alle $0 \leq x \leq 1$ der Funktionswert $f(x) \geq 0$ und auch ist $f(1) = 1$, sodass (1) und (2) erfüllt sind. Weiterhin ist f auch monoton steigend. Seien nun $0 \leq x_1 \leq 1$ und $0 \leq x_2 \leq 1$ mit $x_1 + x_2 \leq 1$. Wäre $x_1 > \frac{1}{2}$ und auch $x_2 \frac{1}{2}$, so, im Widerspruch zur Voraussetzung $x_1 + x_2 > 1$. Also muss mindestens einer der beiden Werte kleiner als oder höchstens gleich $\frac{1}{2}$ sein. Sei o.B.d.A. $x_1 \leq \frac{1}{2}$, so ist $f(x_1 + x_2) \geq f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Also erfüllt diese Funktion f auch Bedingung (3).

Sei nun $x = \frac{1}{1{,}995} > \frac{1}{2}$. Dann ist $f(x) = 1 = 1{,}995 \cdot x > 1{,}99 \cdot x$, sodass die in der Aufgabenstellung formulierte Bedingung nicht für alle $0 < x \leq 1$ und alle Funktionen f, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, wahr ist.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 201234
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4}+\frac{k}{2(k-4)}+\frac{k+4}{x}=0$$

lösbar ist (d.h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

Es geht offensichtlich um die Nullstellen von

$$f_k(x)=\frac{2x^2+kx+2(k-4)(k+4)}{2(k-4)x}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{4\}, x\neq 0$$

Wir setzen daher den Zähler Null:

$$2x^2+kx+2(k-4)(k+4)=0$$
$$x^2+\frac{k}{2}x+k^2-16=0$$
$$x=-\frac{k}{4}\pm\sqrt{\frac{k^2}{16}-k^2+16}$$
$$x=-\frac{k}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-15k^2+256}$$

Wir erhalten damit für $k\in\{-4;-3;-2;0;2;3\}$ Lösungen, welche ganzzahlig sind.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 5 - 201235
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

Es reicht die Aussage für $n=1$ zu zeigen, da jedes regelmäßige $3n$-Eck ein gleichseitiges Dreieck enthält.

Angenommen ein gleichseitiges Dreieck ABC habe zwei rationale Koordinatenpunkte. Dann können wir dieses verschieben, so dass A im Ursprung liegt und B die Koordinaten (x,y) mit $x,y\in\mathbb{Q}$ hat. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist durch $\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Daher hat C die Koordinaten

$$\frac{1}{2}(x,y)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(-y,x)=(\frac{1}{2}x\mp\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{1}{2}y\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x)\ .$$

Mindestens eine der Koordinaten von B ist von null verschieden. Für $y\neq 0$ sei $z:=\frac{1}{2}x\mp\frac{\sqrt{3}}{2}y \iff \frac{2z-x}{y}=\mp\sqrt{3}$, was ein Widerspruch ist, falls $z\in\mathbb{Q}$. Für $x\neq 0$ ergibt die zweite Koordinate ebenfalls einen Widerspruch.

Quelle anonym

Aufgabe 6 - 201236
Man zeige, dass zu jeder natürlichen Zahl $n\geq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B>1$ eine natürliche Zahl $C\geq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern Null und Eins besteht und durch n teilbar ist.

Definiere $C_k:=\sum_{l=1}^{k}B^l$.
Für $1\leq k\leq n+1$ haben wir $n+1$ Reste bei Division durch n. Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Indizes $k_1<k_2\leq n+1$, so dass C_{k_1},C_{k_2} denselben Rest haben.
Damit hat $C:=C_{k_2}-C_{k_1}$ die gewünschte Darstellung und ist durch n teilbar.

Aufgabe gelöst von StrgAltEntf und einem weiteren Autor

9.22.4 IV. Runde 1980, Klasse 12

Aufgabe 1 - 201241
In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.
Man beweise:
Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke AFE, BDF, CED entsprechend mit I_2, I_3, I_4, so gilt, wenn jeweils A und D, B und E sowie C und F voneinander verschiedene Punkte auf derselben Winkelhalbierenden sind:

$$I_1 = I - I_2 - I_3 - I_4$$

Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten BC, CA AB entsprechend mit a, b, c und die Größe des Winkels $\angle ACB$ mit α, so gilt:

$$I = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \quad (2) \qquad \text{und} \qquad I_2 = \frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \sin\alpha \quad (3)$$

Da bekanntlich in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Dreiecksseite innen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten teilt, teilt der Punkt E die Seite AC im Verhältnis $c : a$. Also gilt:

$$AE = \frac{bc}{a+c} \qquad (4)$$

Entsprechend gilt:

$$AF = \frac{bc}{a+b} \qquad (5)$$

Wegen (3), (4), (5) gilt daher

$$I_2 = \frac{b^2c^2 \cdot \sin\alpha}{2(a+c)(a+b)} \qquad \left(= \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \right)$$

und hieraus ergibt sich wegen (2):

$$I_2 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \qquad (6)$$

Entsprechend gilt:

$$I_3 = I \cdot \frac{bc}{(a+b)(b+c)} \qquad ; \qquad I_4 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(b+c)} \qquad (7)$$

Aus (1), (6), (7) folgt:

$$I_1 = I \cdot \left(1 - \frac{bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)}{(b+c)(a+c)(a+b)} \right) = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}$$

Nun gilt auf Grund der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab} = abc \qquad \text{also} \qquad (b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$$

Daher gilt:

$$I_1 = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)} \leq \frac{I}{4}$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 2 - 201242
In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung.
Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen.
Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis:
Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern. Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist.
Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, ..., 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfen erfolgte.
Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die verschiedenen 57gliedrigen Folgen $F = (a_1, a_2, ..., a_{57})$, in denen jeweils a_i die Nummer des Behälters angibt, aus dem die i-te Entnahme erfolgt.
In jeder dieser Folgen kommt jede der drei Behälternummern höchstens 20 mal vor. Daher lassen sich alle zu berücksichtigenden Folgen nach der Anzahl von Folgegliedern aus den drei Behältern so in Klassen einteilen, wie die nachstehende Tabelle angibt (Zahlen sind Anzahl der Vorkommens von Elementen des Behälters in der Folge):

Behälter 1 u	Behälter 2 v	Behälter 3 w
20	20	17
20	19	18
20	18	19
20	17	20
19	20	18
19	19	19
19	18	20
18	20	19
18	19	20
17	20	20

Zu 57 verschiedenen Elementen gibt es genau 57! verschiedene Anordnungen dieser Elemente.
Da es im gegebenen Fall gleich ist, welches Element aus einem gewählten Behälter entnommen wird, sind folglich in jeder der oben angeführten zehn Klassen (u, v, w) von Folgen im Sinne der Aufgabe genau diejenigen gleich, die sich nur durch Permutationen der u herausgegriffenen Karpfen aus dem ersten Behälter oder der v Karpfen, aus dem zweiten Behälter oder der w Karpfen aus dem dritten Behälter unterscheiden.
Da alle diese Permutationen voneinander unabhängig sind, ergibt sich folglich die Anzahl $a(u,v,w)$ der verschiedenen Folgen einer Klasse (u,v,w) mit

$$a(u, v, w) = \frac{57!}{u! \cdot v! \cdot w!}$$

Nach der Tabelle gibt es genau drei Klassen, in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 17, 20, 20 sind, ferner genau sechs Klassen in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 18, 19, 29 sind und genau eine Klasse mit $u = v = w = 19$. Daher gilt:

$$A = \frac{3 \cdot 57!}{17! \cdot 20! \cdot 20!} + \frac{6 \cdot 57!}{18! \cdot 19! \cdot 20!} + \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Genau diejenigen Folgen, die der Klasse mit $u = v = w = 19$ angehören, entsprechen den Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem Behälter genau ein Karpfen ist. Daher gilt:

$$G = \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Hieraus ergibt sich

$$A = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{3}{20 \cdot 20} + \frac{6}{18 \cdot 20} + \frac{1}{18 \cdot 19}\right) = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{513 + 1140 + 200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$G = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{1}{18 \cdot 19} = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{200}{1853} = 0{,}1079...$$

also auf drei Stellen nach dem Komma gerundet $p = 0{,}108$.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 3 - 201243
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$.
Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}$$

Eine reelle Zahl x ist genau dann Lösung der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = A \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2} \qquad (1)$$

wenn $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ und

$$(x^4+1)(x^4+6x^2+1) = Ax^2(x^2-1)^2 \qquad \text{also}$$

$$x^8 + (6-A)x^6 + (2+2A)x^4 + (6-A)x^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

gelten. Diese Gleichung ist wegen $x \neq 0$ äquivalent mit

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (6-A)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 + 2A = 0 \qquad (3)$$

Setzt man $x^2 + \frac{1}{x^2} = t$, so ist $x^4 - tx^2 + 1 = 0$ (4) und $x^4 + \frac{1}{x^4} = t^2 - 2$.
x ist also genau dann Lösung von (1), wenn gilt:

$$t^2 + (6-A)t + 2A = 0 \qquad (5)$$

Nun ist aus der Gleichung (1) ersichtlich, dass $x = a$ und $x = -a$ (6) Lösungen sind. Setzt man ferner $x = \frac{1}{a}$ oder $x = -\frac{1}{a}$ auf der linken Seite von (1) ein, so erhält man einen Term, der gleich A ist. Daher sind auch

$$x = \frac{1}{a} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{1}{a} \qquad (7)$$

Lösungen von (1). Daraus folgt, dass die quadratische Gleichung (5) die Lösung $t_1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ hat. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist also ihre zweite Lösung gleich

$$t_2 = \frac{2A}{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}$$

Da die Gleichung (5) höchstens zwei Lösungen t_1 und t_2 hat und die Gleichung (4) für $t = t_1$ die vier Lösungen $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$ und daher als Gleichung vierten Grades keine weiteren hat (auf Grund der

Voraussetzungen sind die vier Lösungen paarweise voneinander verschieden), erhält man alle weiteren reellen Lösungen x der Gleichung (1) wegen (4) aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}x^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

Diese Gleichung hat die Diskriminante

$$D = \left(\frac{a^4+6a^2+1}{a^4-2a^2+1}\right)^2 - 1 = \frac{16a^2(a^2+1)^2}{(x^2-1)^4} > 0$$

Daher hat die Gleichung (8) genau diejenigen x als Lösung, für die eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^4+6a^2+1}{(a^2-1)^2} \pm \frac{4a(a^2+1)}{(a^2-1)^2} \qquad \text{d.h.} \qquad x^2 = \frac{(a+1)^4}{(a^2-1)^2} \quad ; \quad x^2 = \frac{(a-1)^4}{(a^2-1)^2}$$

gilt. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen positiv sind, sind das genau die Zahlen

$$x = \frac{a+1}{a-1}; \qquad x = -\frac{a+1}{a-1}; \qquad x = \frac{a-1}{a+1}; \qquad x = -\frac{a-1}{a+1} \qquad (9)$$

Wegen $|a| \neq 1$ gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 0$. Ferner ist $a+1 \neq a-1$ und wegen $a \neq 0$ auch $a+1 \neq -a+1$, also gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 1$ und $x \neq -1$.
Damit ist bewiesen, dass die gegebene Gleichung genau die in (6), (7) und (9) angegebenen Zahlen als Lösungen besitzt, nämlich die Zahlen:

$$a; \qquad -a; \qquad \frac{1}{a}; \qquad -\frac{1}{a}; \qquad \frac{a+1}{a-1}; \qquad -\frac{a+1}{a-1}; \qquad \frac{a-1}{a+1}; \qquad -\frac{a-1}{a+1}$$

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 201244
Es sei $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1} \quad (n = 1,2,3,...)$$

gilt. Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

Die ersten Werte der Folge sind $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 15; a_4 = 56; a_5 = 209$. Daher beweisen wir die Gleichung $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ für $n \geq 1$.
Daraus folgt dann, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind. Die Folge ist streng monoton steigend. Insbesondere gilt $2a_{n+1} > a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1} \\
\Rightarrow (a_{n+1} - 2a_n)^2 &= 3a_n^2 + 1 \\
\Rightarrow a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 1 \\
\Rightarrow (2a_{n+1} - a_n)^2 = 4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 3a_{n+1}^2 + 1 \\
\Rightarrow 2a_{n+1} - a_n &= \sqrt{3a_{n+1}^2+1}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wenden wir nun auf a_{n+2} an.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2+1} = 2a_{n+1} + 2a_{n+1} - a_n = 4a_{n+1} - a_n$$

q.e.d.

Quelle anonym

Aufgabe 5 - 201245
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d.h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, dass zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).
Hinweis:
Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.

Jeder der in (1) gegebenen Summanden wird mit dem passenden Faktor $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ erweitert, wodurch im Nenner die Zahl 1 entsteht. Durch teilweises Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke für die Summanden ergibt sich:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} (n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Die Summe lässt sich wie folgt zerlegen:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \qquad (2)$$

Nach den Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen wird die erste Summe in (2) umgeformt, und man erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m \left(\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \sqrt{k} - \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \sqrt{k} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m(m+1-m) = \sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{1}{2} n(n-1)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ergebnisse für beide Summen in (2) ergibt sich schließlich

$$f(n) = n^2 - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1)$$

also ein Ausdruck der gewünschten Art.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 201246A
Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch wiederholtes Halbieren in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:
(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, ..., P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.
(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als n-te Näherung Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, ..., P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, ..., 9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, ..., Q_9$ die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $AQ_1 = Q_1Q_2 = ... = Q_8Q_9 = Q_9B = 1$ m gilt.
Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl N so existiert, dass für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, ..., P_9^{(0)}$ auf AB gilt:
Bei der n-ten Näherung weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ $(j = 1, 2, ..., 9)$ um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d.h., es gilt $P_J^{(N)} Q_j < 1$ mm.

Die Lösung wird hier für de allgemeinen Fall einer Strecke AB der ganzzahligen Länge $M \geq 2$ (in Metern), die in M Teilstrecken zerlegt wird, formuliert. Im Falle $M = 10$ ergibt sich eine Lösung der gestellten Aufgabe.
Für die Maßzahlen $x_j^{(n)} = AP_j^{(n)}$ der Strecken erhält man aus der Aufgabenstellung:

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x_{j-1}^{(n+1)} + x_{j+1}^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (1)1$$

$$x_j^{(n+1)} = j \qquad (j = 0, M) \qquad (2)$$

Die Aufgabe ist nun äquivalent mit dem Nachweis, dass ein N ist

$$\left|x_j^{(N)} - j\right| < 0{,}001 \qquad (0 \leq j \leq M) \qquad (3)$$

existiert. Mit der Bezeichnung $e_j^{(n)} = x_j^{(n)} - j$ gehen die Formeln (1), (2) über in:

$$e_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(e_{j-1}^{(n+1)} + e_{j+1}^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (4)$$

$$e_j^{(n+1)} = 0 \qquad (j = 0, M) \qquad (5)$$

Für die "größten Abweichungen" $m^{(n)} = \max\limits_{0 \leq j \leq N} \left|e_j^{(n)}\right|$ erhält man aus (4), (5) über die Beziehungen

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|e_{j-1}^{(n=1)}\right| + m^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1)$$

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + ... + \frac{1}{2}\right) m^{(n)}$$

$$\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + ... + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^j} \leq 1 - \frac{1}{2^{M-1}} = q < 1$$

die Abschätzung

$$m^{(n+1)} \leq q m^{(n)} \leq q^{n+1} m^{(0)}$$

Nach Definition der Größen $x_j^{(0)}$ gilt (wegen $P_j^{(0)} \in AB$) $m^{(0)} \leq M - 1$, so dass für alle $n \geq 0$ die Abschätzung

$$\left|x_j^{(n)} - j\right| \leq (M-1)q^n \qquad (6)$$

bewiesen ist. Da für $0 < q < 1$ bekanntlich $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt, existiert sicherlich ein N mit

$$q^N < \frac{1}{M-1} 0{,}001 \qquad (7)$$

Für jedes solches N folgt dann (3) aus (6).

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 201246B
Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T.
Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben.
Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt.
Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s.
Die geforderten Eigenschaften sind:
(1) $\angle BDC = \angle CDA = \angle ADB = 90°$.
(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.
(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

Wir betrachten die Menge alle Tetraeder, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen. Setzen wir $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, so gilt nach (1) unter Beachtung des Satzes von Pythagoras für die zu untersuchende Summe s:

$$s = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \qquad (4)$$

Wegen (1) ist das Volumen $\frac{1}{6}xyz$, so dass nach (3) gilt: $xyz = 1$.
Für ein festes $z \geq \frac{1}{6}$ (siehe (2)) untersuchen wir nun die Summe s als Funktion des Quotienten $k = \frac{x}{y}$, wobei wir o.B.d.A. $k \geq 1$ annehmen können.

Aus $xy = \frac{1}{z}$ und $\frac{x}{y} = k$ folgt $x^2 = \frac{z}{k}$ und $y^2 = \frac{1}{k \cdot z}$, Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} s(k) &= \sqrt{\frac{k}{z}} + \sqrt{\frac{1}{k \cdot z}} + z + \sqrt{\frac{k}{z} + \frac{1}{kz}} + \sqrt{\frac{1}{kz} + z^2} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{\left(\sqrt{z^2 + \frac{1}{kz}} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}}\right)^2} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{2z^2 + \frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right) + 2\sqrt{z^4 + \frac{1}{z^2} + z\left(k + \frac{1}{k}\right)}} \end{aligned}$$

Nun sind die Funktionen $\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $f(t) = t + \frac{1}{t}$ für $t \geq 1$ monoton wachsend $[f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0]$, so dass $s(k)$ monoton wachsend ist.
Bei festem z wird aber wegen (2) das größte Verhältnis von $k = \frac{1}{y^2 z}$ für $y = \frac{1}{6}$ erreicht. $s(k9$ nimmt also für jedes beliebige fest z sein Maximum für $y = \frac{1}{6}$ und $x = \frac{6}{x}$ an. Zu untersuchen ist also nur noch, ob und, wenn ja, bei welchem z die Summe s maximal wird.

Halten wir $y = \frac{1}{6}$ fest und nehmen wir o.B.d.A. $x \geq z$ an, so folgt mit Hilfe derselben Schlussweise, dass es ein Tetraeder gibt, für das s ein Maximum annimmt, und zwar für $z = \frac{1}{6}$ und $x = 36$. Das maximale Wert von s wird also für $x = 36$, $y = z = \frac{1}{6}$ angenommen und ist

$$s = 36 + \frac{2 + \sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{36}{1}}$$

Übernommen aus [3]

9.23 XXI. Olympiade 1981

9.23.1 I. Runde 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211211
Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:

(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.

(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.

Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

I. Angenommen, eine Pyramide $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Ist F der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch A, B, C gelegte Ebene ϵ, so gilt wegen (1) nach dem Satz des Pythagoras

$$FA = FB = FC = \sqrt{s^2 - h^2}$$

Also ist F der Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC und somit in diesem Dreieck auch Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt. Die Höhenlänge im Dreieck ABC beträgt $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2, also ist $FA = FB = FC = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Daher gilt

$$s^2 - h^2 = FA^2 = \frac{1}{3}a^2 \tag{3}$$

Aus (2) folgt ferner

$$h = \frac{1}{2}(h + s) \tag{4}$$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^2 &= s^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}s^2 \\ 0 &= s^2 - \frac{2}{3}as - \frac{7}{9}a^2 \\ s_{1,2} &= \frac{a}{3}(1 \pm 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \qquad ; \qquad a + s = \frac{a}{3}(4 + 2\sqrt{2})$$

und daraus nach (4)

$$h = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

Daher kann eine Pyramide $ABCD$ nur dann die verlangten Eigenschaften haben, wenn D so auf der im Schwerpunkt F des Dreiecks ABC auf ϵ errichteten Senkrechten liegt, dass gilt:

$$FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

II. Für jede solche Pyramide $ABCD$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} AD = BD = CD = \sqrt{FA^2 + FD^2} &= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^2(2 + \sqrt{2})^2} \\ &= \frac{a}{3}\sqrt{3 + 4 + 4\sqrt{2} + 2} \\ &= \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

also ist (1)mit $s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2})$ erfüllt, und die Höhenlänge $FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$ ist auch gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a + s)$, also ist (2) erfüllt.

Damit ist gezeigt: Es gibt eine Pyramide $ABCD$ mit den Eigenschaften (1),(2); dabei sind h und s eindeutig bestimmt, und zwar ist $h = \frac{a}{3}(2+\sqrt{2})$, $s = \frac{a}{3}(1+2\sqrt{2})$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 211212
Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 3(x+y) &= 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

I. Wenn ein Paar $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Die Zahl

$$z = x + y \tag{3}$$

erfüllt nach (1) die Gleichung

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

Daraus ergibt sich

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $z = 1$ oder $z = -4$.

Aus (2) folgt ferner durch Multiplikation mit $6xy$, dass

$$6(x+y) = -xy \qquad \text{also} \qquad xy = -6z \tag{4}$$

gilt. Im Fall $z = 1$ besagen (3) und (4)

$$x + y = 1 \qquad ; \qquad xy = -6 \tag{5,6}$$

Im Fall $z = -4$ besagen (3) und (4)

$$x + y = -4 \qquad ; \qquad xy = 24 \tag{5',6'}$$

Setzt man y aus (5) bzw. (5') in (6) bzw. (6') ein, so folgt

$$x(1-x) = -6 \qquad \text{bzw.} \qquad x(-4-x) = 24 \tag{7,7'}$$

Aus (7) folgt

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad ; \qquad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $x = 3$ und dann nach (5) weiter $y = -2$ oder $x = -2$ und dann nach (5) weiter $y = 3$.

Aus (7') dagegen folgt $x^2+4x+24 = 0$, und diese Gleichung hat wegen $2^2-24 < 0$ keine reellen Lösungen x. Daher können nur die Paare $(3; -2)$ und $(-2; 3)$ das Gleichungssystem erfüllen.

II. Sie erfüllen dieses Gleichungssystem, wie sich - wegen des Kommutativgesetzes für beide Paare in gleicher Weise - mit einer einfachen Probe zeigt. Also sind genau die Paare $(3; -2)$ und $(-2; 3)$ die gesuchten.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 211213
Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

I. Ist 3 eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ergibt sich die Anzahl A_k auf folgende Weise:
Man denke sich jede der genannten Teilmengen dadurch gebildet, dass man der Reihe nach ein erstes, ein zweites, ... , ein k-tes Element aus M auswählt. Für das erste Element gibt es dabei genau 55 Möglichkeiten der Auswahl. Nach jeder solchen Auswahl gibt es für das zweite Element genau (55-1) Möglichkeiten usw.

Schließlich gibt es nach jeder Möglichkeit einer vorangehenden Auswahl von $k-1$ Elementen für das k-te Element noch genau $(55-(k-1))$ Möglichkeiten. Somit hat man insgesamt $55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)$ Möglichkeiten, in der beschriebenen Weise der Reihe nach k Elemente auszuwählen.

Von diesen Auswahlmöglichkeiten führen jeweils genau diejenigen auf dieselbe Teilmenge, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten k Elemente unterscheiden. Für die Wahl einer solchen, Reihenfolge wiederum gibt es genau $k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1$ Möglichkeiten (da jeweils in einer solchen Reihenfolge an die erste Stelle eines der k Elemente zu setzen ist, an die zweite Stelle jeweils eines von den restlichen $(k-1)$ Elementen usw., ..., bis für die k-te Stelle bei jeder schon festgelegten Reihenfolge der ersten $(k-1)$ Elemente genau 1 Element verbleibt). Daher ist

$$A_k = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

II. Ist k eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ist entsprechend

$$A_{k+1} = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k) \cdot (55-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)} \qquad \text{also gilt} \qquad A_{k+1} = \frac{55-k}{k+1} \cdot A_k$$

III. Für $k \leq 26$ ist der Bruch $\frac{55-k}{k+1}$ größer als 1, für $k = 27$ gleich 1 und für $28 \leq k \leq 55$ kleiner als 1, aber positiv. Daher gilt

$$A_0 < A_1 < ... < A_{26} < A_{27} = A_{28} \qquad ; \qquad A_{28} > A29 > ... > A_{54} > A_{55}$$

Somit wird A_k genau für $k = 27$ und $k = 28$ am größten.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 211214
Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

In welcher der beiden natürlichen Zahlen 1981! und $1000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?

Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Von den Faktoren $1, 2, ..., 1981$ der Zahl 1981! sind wegen $1981 = 283 \cdot 7$ genau die 283 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad ... \quad ; \quad 1981(= 283 \cdot 7)$$

durch 7 teilbar. Daher kann man 1981 durch 7^{283} dividieren, indem man anstelle dieser 283 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 283 schreibt (und die übrigen, nicht durch 7 teilbaren Faktoren in 1981! unverändert stehenlässt). Bei dieser Ersetzung entsteht aus 1981! ein Produkt P, in dem wegen $283 = 40 \cdot 7 + 3$ genau die 40 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad ... \quad ; \quad 280(= 40 \cdot 7)$$

nochmals durch 7 teilbar sind. Daher kann man P nochmals durch 7^{40} dividieren, indem man anstelle dieser 40 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 40 schreibt. Von den Faktoren des nun entstandenen Produktes Q sind genau die 5 Zahlen 7, 14, ... , 35 durch 7 teilbar. Daher kann man Q nochmals durch 7^5 dividieren, und in dem dann entstandenen Produkt enthält kein Faktor mehr die Primzahl 7.

Somit tritt 7 in 1981! insgesamt mit dem Exponenten $283 + 40 + 5 = 328$ auf.

In entsprechender Weise ergibt sich aus

$$1000 = 142 \cdot 7 + 6 \quad , \quad 142 = 20 \cdot 7 + 2 \quad , \quad 20 = 2 \cdot 7 + 6$$

dass 7 in 981! insgesamt mit dem Exponenten $140 + 20 + 2 = 162$ auftritt. Also tritt 7 in $1000! \cdot 981!$ insgesamt mit dem Exponenten 326 auf. Daher erhält die Primzahl 7 bei Darstellung der Zahl 1981! den größeren Exponenten.

Übernommen von [5]

9.23.2 II. Runde 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211221
Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, ...$ Ferner werde für $n = 1, 2, 3, ...$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad ; \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$$

a) Man ermittle a_1 und d so, dass $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Man beweise, dass für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right)$$

b) Es ist $z_1 = s_1 = a_1 = \frac{1\cdot 2}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{1-1}{3} \cdot d\right)$, sodass die Aussage für $n = 1$ wahr ist. Weiter folgt induktiv

$$z_{n+1} = z_n + s_{n+1} = z_n + (n+1)\cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d = \frac{n}{n+1}2\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right) + (n+1)\cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{3} + 1\right) d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{n}{3}d\right)$$

sodass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, $\Box$.

a) Mit b) folgt $15 = z_4 = 10 \cdot (a_1 + d)$ und $4 = s_4 = 4 \cdot a_1 + 6 \cdot d$, also $a_1 = \frac{5}{2}$ und $d = -1$. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 211222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{2x^2-1} < \frac{1}{x}$ gilt.

Da der linksstehende Wurzelausdruck jedenfalls nichtnegativ und $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist, können wir im Folgenden o.B.d.A. $x > 0$ voraussetzen. Des weiteren muss sogar

$$2x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gelten, damit der linksstehende Wurzelausdruck überhaupt definiert ist. Durch Quadrieren der gegebenen Ungleichung erhält man dann

$$2x^2 - 1 < \frac{1}{x^2}$$

und durch Multiplizieren mit x^2 nach einer einfachen Umformung

$$2x^4 - x^2 - 1 = (2x^2+1)(x^2-1) < 0$$

Hier dürfen wir gewissermaßen durch $2x^2 + 1 > 0$ "kürzen" und erhalten so $x^2 < 1$, wegen $x > 0$ also dann schließlich $x < 1$. Tatsächlich erfüllen alle

$$x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

auch wirklich die angegebene Ungleichung.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 211223
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F.
Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Falls das Viereck konkav ist, können wird durch Spiegelung der konkaven Ecke ein zweite Viereck konstruieren welche das erste enthält und dieselben Seitenlängen besitzt. Daher reicht es aus, die Gleichung für konvexe Vierecke zu zeigen.
Seien β,δ die Winkel in B,D. Der Flächeninhalt kann getrennt in den Dreiecken ABC und ACD bestimmt werden:

$$4F = 2ab\sin\beta + 2cd\sin\delta \leq 2ab + 2cd = a^2 + b^2 - (a-b)^2 + c^2 + d^2 - (c-d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Die Gleichheit gilt nur für 1) $\beta = \delta = 90°$ und 2) $a = b$,$c = d$. Analog erhalten wir mit

$$4F = 2ad\sin\alpha + 2bc\sin\gamma$$

aus der Gleichheit ebenfalls 1') $\alpha = \gamma = 90°$ und 2') $a = d$,$b = c$. Also gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist.

Quelle anonym

Aufgabe 4 - 211224
Man beweise:
Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

Für eine ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ gilt nämlich

$$(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = (n-1)! \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = n \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

Nun sind hier alle Summanden

$$\frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

der rechtsstehenden Summe ganze Zahlen, da die beiden Faktoren des Nenners ja auch im Zähler $(n-1)!$ an verschiedenen Stellen als Faktoren vorkommen, weshalb dann auch der gesamte Ausdruck ein ganzzahliges Vielfaches von n ist, wie behauptet.

Aufgabe gelöst von weird

9.23.3 III. Runde 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211231
Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise:
Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Nach Voraussetzung gilt: $P(x_0) = 0$, d.h.

$$a_3(b+\sqrt{c})^3 + a^2(b+\sqrt{c})^2 + a_1(b+\sqrt{c}) + a_0 = 0 \qquad \text{also}$$
$$a_3b^3 + 3a_3bc + a_2b^2 + a_2c + a_1b + a_0 + \sqrt{c}(3a_3b2 + a_3c + 2a_2b + a_1) = 0$$

Für die Zahlen

$$A_1 = a_3b^2 + 3a_3bc + a_2b^2a_2c + a_1b + a_0 \qquad (1)$$
$$A_2 = 3a_3b^2 + a_3c + 2a_2b + a_1 \qquad (2)$$

gilt also $A_1 + A_2\sqrt{c} = 0 \quad (3)$.
Wäre nun $A_2 \neq 0$, so folgte $\sqrt{c} = -\frac{A_1}{A_2}$ und daraus der Widerspruch, dass $\sqrt{c}$ rational wäre; denn nach Voraussetzung (1) und (2) sind A_1 und A_2 rational. Also ist $A_2 = 0 \quad (4)$. Aus (3) und (4) folgt $A_1 = 0 \quad (5)$.
Weiterhin errechnet man (unter Verwendung von (1) und (2)), dass

$$P(x_1) = P(b-\sqrt{c}) = a_3(b-\sqrt{c})^3 + a_2(b-\sqrt{c})^2 + a_1(b-\sqrt{c}) + a_0 = A_1 - A_2\sqrt{c} \qquad (6)$$

gilt. Aus (4), (5), (6) folgt $P(x_1) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 211232
a) Beweisen Sie, dass kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!
b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!
Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

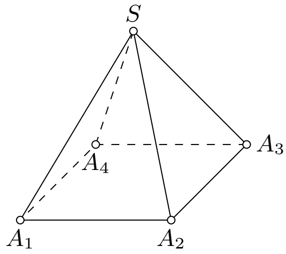
a) Angenommen, es gäbe ein Polyeder P mit genau sieben Kanten.
Aus dieser Annahme folgt,

(1) falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 hat:
Zu F gehören mindestens vier Kanten, da jedes n-Eck auch n Kanten besitzt. Von jeder der Ecken A_i geht noch mindestens eine Kante k_i aus, die nicht in der Ebene durch F verläuft.
Je zwei dieser Kanten k_i, k_j $(i \neq j)$ sind voneinander verschieden (denn da k_i jeweils A_i enthält, würde eine Kante, die $k_i = k_j$ wäre, A_i und A_j enthalten, also in der Ebene durch F verlaufen). Damit ergibt sich der Widerspruch, dass P mindestens acht Kanten besitzen müsste.

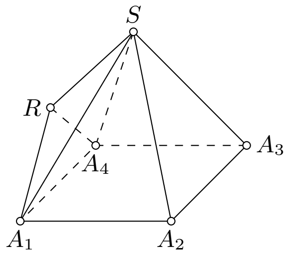
(2) falls P nur Dreiecke als Seitenflächen besitzt:
Die Anzahl dieser Dreiecke sei m. Zählt man für jedes dieser m Dreiecke seine drei Kanten auf, so hat man mit dieser Aufzählung von $3m$ Kanten jede Kante des Polyeders genau zweimal erfasst; denn an jede Kante des Polyeders grenzen genau zwei Seitenflächen an.
Also besitzt P genau $\frac{3m}{2}$ Kanten.
Damit ergibt sich der Widerspruch, dass die Anzahl m die Gleichung $\frac{3m}{2} = 7$, d.h. $3m = 14$ erfüllen müsste.

b) Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 7$.

(1) Ist n gerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 4$ mit $n = 2m$.
Dann hat z.B. jede m-seitige Pyramide genau n Kanten, nämlich, wenn $G = A_1A_2...A_m$ ihre Grundfläche und S ihre Spitze ist, die m Seitenkanten von G und die m hiervon und untereinander verschiedenen Kanten $A_1S, ..., A_mS$. (Abbildung für $m = 4$)



(2) Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 3$ mit $n = 2m + 3$.
Dann hat z.B. jedes folgendermaßen zu erhaltende Polyeder P genau n Kanten: Man wähle eine m-seitige Pyramide Q mit der Grundfläche $A_1A_2...A_m$ und der Spitze S.
Außerhalb von Q wähle man einen Punkt R, der auf keiner der Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte von Q liegt und so nahe an der Seitenfläche $F = A_1A_2S$ gelegen ist, dass das Tetraeder $T = A_1A_2SR$ mit Q nur F gemeinsam hat.
Dann wird aus Q und T ein Polyeder zusammengesetzt, das genau die $2m$ Kanten von Q sowie die hiervon und untereinander verschiedenen Strecken A_1R, A_2S, SR als Seitenkanten besitzt. (Abbildung für $m = 4$)



Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 211233
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen Zahlen $x \neq -c$ durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$.

I. Angenommen, ein Tripel (a,b,c) besitzt die verlangten Eigenschaften. Dann folgt:

Die durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f ist nicht konstant; denn im Falle $f(x) = d \neq -c$ für alle $x \neq -c$ wäre auch $f(f(fx))) = d$ für alle $x \neq -c$, also (2) nicht erfüllt, da $\frac{x-1}{x+1} = d$ für höchstens ein x gelten kann; im Falle $f(x) = -c$ für alle $x \neq -c$ aber gäbe es kein x, für das $f(x)$ und $f(f(x))$ definiert sind, im Widerspruch zu (1).

Für jedes d hat folglich die Gleichung $ax + b = xd + cd$ nicht alle $x \neq -c$ als Lösung. Somit hat sie als lineare Gleichung höchstens eine Lösung.
Daher gibt es höchstens jeweils ein x mit $f(x) = -c$ bzw. mit $f(f(x)) = -c$. Hiernach und wegen (2) gibt es unendlich viele Zahlen $x \neq 1$, für die $f(x)$ sowie

$$f(f(x)) = \frac{(a^2 + b)x + (a + c)b}{(a + c)x + (b + c^2)} \qquad \text{und}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{(a^3 + 2ab + bc)x + (a^2 + ac + b + c^2)b}{(a^2 + ac + b + c^2)x + (ab + 2bc + c^3)} \qquad (3)$$

existieren und für die

$$((a^3 + 2ab + bc)x + (a^2 + ac + b + c^2)b)(x + 1) = ((a^2 + ac + b + c^2)x + (ab + 2bc + c^3))(x - 1)$$

gilt. Aus dieser Gleichheit zweier Polynome für unendlich viele x folgen die Koeffizientengleichheiten

$$a^3 + 2ab + bc = a^2 + ac + b + c^2 \qquad (4)$$
$$a^3 + 2ab + bc + (a^2 + ac + b + c^2)b = -(a^2 + ac + b + c^2) + ab + 2bc + c^3 \qquad (5)$$
$$(a^2 + ac + b + c^2)b = -(ab + 2bc + c^3) \qquad (6)$$

Aus (4), (5), (6) folgt durch Addition, dass beide Seiten von (5) gleich 0 sind; hieraus und aus (4) erhält man

$$a^3 + 2ab + bc = ab + 2bc + c^3 \qquad \text{also} \qquad a(a^2 + b) = c(b + c^2)$$

und durch Addition von $ac(a + c)$

$$a(a^2 + ac + b + c^2) = c(a^2 + ac + b + c^2) \qquad (7)$$

Wäre $a^2 + ac + b + c^2 = 0$, so folgte aus (6), dass (3) für kein x definiert wäre. Also ist

$$a^2 + ac + b + c^2 \neq 0 \qquad (8)$$

und aus (7) ergibt sich $a = c$. Hiernach und nach (4), (2) ist

$$(a^2 + ac + b + c^2)b = -(a^2 + ac + b + c^2)$$

wegen (8) also $b = -1$. Damit geht (4) über in

$$a^3 - 3a^2 - 3a + 1 = 0$$

Da eine Lösung hiervon $a = -1$ lautet (bzw. nach der bekannten Abspaltung des Faktors $a+1$ von a^3+1 und von $3a^2 + 3a$) folgt $(a + 1)(a^2 - 4a + 1) = 0$ und daraus

$$a = -1 \qquad \text{oder} \qquad a = 2 \pm \sqrt{3}$$

Also können nur die Funktionen f mit

$$f(x) = \frac{-x - 1}{x - 1} \qquad \text{für alle } x \neq 1$$
$$f(x) = \frac{(2 \pm \sqrt{3})x - 1}{x + (2 \pm \sqrt{3}} \qquad \text{für alle } x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$$

(jeweils stets mit dem oberen oder stets mit dem unteren Vorzeichen) die die Bedingungen (1), (2) erfüllen, d.h., es können nur die Tripel

$$(-1, -1, -1) \quad ; \quad (2 + \sqrt{3}, -1, 2 + \sqrt{3}) \quad ; \quad (2 - \sqrt{3}, -1, 2 - \sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften haben.

II. Für das Tripel $(-1, -1, -1)$ existieren

$$f(f(x)) = \frac{-x - 1}{x - 1} = -\frac{1}{x}$$

für alle x mit $x \neq 1, x \neq 0$ und

$$f(f(f(x))) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

für alle x mit $x \neq 1, x \neq 0, x \neq -1$. Für die beiden anderen Tripel existieren

$$f(f(x)) = f\left(\frac{(2 \pm \sqrt{3})x - 1}{x + (2 \pm \sqrt{3}}\right) = \frac{(3 \pm 2\sqrt{3})x - (2 \pm \sqrt{3})}{(2 \pm \sqrt{3})x + (3 \pm 2\sqrt{3})}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$ und

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{(3 \pm 2\sqrt{3})x - (2 \pm \sqrt{3})}{(2 \pm \sqrt{3})x + (3 \pm 2\sqrt{3})}\right) = \frac{(5 \pm 3\sqrt{3})(x - 1)}{(5 \pm 3\sqrt{3})(x + 1)}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$, $x \neq -1$.
Daher und wegen $5 \pm 3\sqrt{3} \neq 0$ erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (1), (2). Folglich haben genau die Tripel

$$(-1, -1, -1) \quad ; \quad (2+\sqrt{3}, -1, 2+\sqrt{3}) \quad ; \quad (2-\sqrt{3}, -1, 2-\sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 211234
Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, dass in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

Nach Voraussetzung gibt es a_1,k,q, so dass

$$a_1 q^{k-1} = a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}) = \frac{1}{2}(a_1 q^{k-2} + a_1 q^{k-3})$$

Kürzen mit a_1,q^{k-3} ergibt $q^2 = \frac{1}{2}(q+1)$ und somit $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$.

Quelle anonym

Aufgabe 5 - 211235
37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, dass genau 9 Karten von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen.
Es sollen nun in Arbeitsgängen Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen Arbeitsgang genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen Arbeitsgängen erreichen kann, dass alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen. Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden Arbeitsgänge!

a) Wir identifizieren eine Karte, deren rote Seite oben liegt, mit 1 und eine Karte, deren blaue Seite oben liegt, mit -1. Dann ist in der Startsituation die Summe aller Karten gleich $s = 9 \cdot (-1) + (37-9) \cdot 1 = 19$. Würden alle Karten ihre rote Seite zeigen, ergäbe sich eine Summe von $r = 37 \cdot 1 = 37$.

Das Umdrehen einer Karte verändert die Summe der Karten um ± 2: Entweder wird aus einer roten Karte (+1) eine blaue (-1), sodass der Wert um 2 sinkt, oder umgekehrt, sodass der Wert um 2 steigt. Das gleichzeitige Umdrehen von zwei Karten ändert also den Wert der Summe der Karten um ± 4 oder 0, jedenfalls um eine durch 4 teilbare Zahl. Also gilt dies auch für das wiederholte Umdrehen einer geraden Anzahl an Karten, etwa für wiederholtes Umdrehen von je 20 Karten.
Da aber $r - s = 37 - 19 = 18$ nicht durch 4 teilbar ist, kann also nie aus der Startsituation erzeugt werden, dass alle Karten ihre rote Seite zeigen.

b) Die Karten mit zu Beginn sichtbarer blauer Seite seien die Karten Nr. 1 bis 9, während die Karten Nr. 10 bis 37 jeweils ihre rote Seite zeigen. Wir geben nun eine Folge von zwei Arbeitsgängen an, sodass am Ende alle Karten ihre blaue Seite zeigen:

1) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 23. Dann zeigen genau die Karten mit Nr. 4 bis 9 und die mit Nr. 24 bis 37 rot, alle anderen blau.
2) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 9 und alle Karten mit Nr. 24 bis 37. Dann zeigen alle Karten ihre blaue Seite.

Es gibt also eine Folge von zwei Arbeitsvorgängen, die die Startsituation in die Zielsituation mit ausschließlich sichtbaren blauen Kartenseiten überführt. Es bleibt noch zu zeigen, dass dies nicht auch mit weniger Arbeitsvorgängen erreicht werden kann. Da aber mit einem Arbeitsvorgang nicht alle 28 roten Karten der Startsituation umgedreht werden können, ist dies der Fall.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 211236A

1. Reihe	□
2. Reihe	□□
3. Reihe	□□□
...	...
m-te Reihe	□□□···□□

Unter einem Stapel von Gegenständen (wie z.B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in der Abbildung verstanden, bei der jeweils für $k = 1, 2, ..., m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen.
Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als Höhe des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)
Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, dass es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt!

Es sei m die Anzahl der Reihen der beiden kleinen Stapel und $n > m$ die des großen. Dann gilt $z = 2\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ bzw. nach Multiplikation mit 8 und Addition von 2: $2\cdot(4m^2+4m+1) = 4n^2+4n+1+1$ bzw. nach der Substitution $y := 2m+1$ und $x := 2n+1$ die Pellsche Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $(x_1,y_1) = (1,1)$, sodass mit

$$-1 = x_1^2 - 2y_1^2 = (x_1 + \sqrt{2}\cdot y_1)\cdot(x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1)$$

auch für jede ungerade natürliche Zahl n auch

$$-1 = (-1)^n = (x_1 + \sqrt{2}\cdot y_1)^n \cdot (x_1 - \sqrt{2}\cdot y_1)^n := (x_n + \sqrt{2}\cdot y_n)\cdot(x_n - \sqrt{2}\cdot y_n)$$

gilt. Dabei ergibt sich

$$x_{n+2}+\sqrt{2}\cdot y_{n+2} = (x_n+\sqrt{2}\cdot y_n)\cdot(x_1+\sqrt{2}\cdot y_1)^2 = (x_n+\sqrt{2}\cdot y_n)\cdot(1+2\sqrt{2}+2) = 3x_n+4y_n+\sqrt{2}\cdot(2x_n+3y_n)$$

also $x_{n+2} = 3x_n + 4y_n$ und $y_{n+2} = 2x_n + 3y_n$.
Wir erhalten also folgende Lösungen

n	x_n	y_n
1	1	1
3	7	5
5	41	29
7	239	169

Aus der letzten Lösung erhalten wir $m = \frac{y-1}{2} = 84$ und $n = \frac{x-1}{2} = 119$. Tatsächlich ist $2\cdot\frac{84\cdot 85}{2} = 7140 = z = \frac{119\cdot 120}{2}$, sodass es einen Stapel aus $z = 7140$ Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 211236B
Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$:
Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left|A_n - \frac{n^2}{12}\right| < \frac{1}{2}$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten lässt.

A_n ist gleich der Anzahl aller geordneter Tripel (a,b,c) mit $1 \leq a \leq b \leq c$ und $a+b+c = n$. Sei B_n die Anzahl geordneter Tripel $(1,b,c)$ mit $1+b+c = n$.

Durch Abzählen der Tripel $(1,b,c)$ beginnend bei $(1,1,n-2)$ und sukzessive Veränderung der zweiten und dritten Komponente erhalten wir $B_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Für ein beliebiges Tripel (a,b,c) ist entweder die erste Komponente 1 oder wir könne diese durch Inkrementierung aus $(a-1,b-1,c-1)$ erzeugen.
Daraus folgt $A_{n+3} = B_{n+3} + A_n$. Insbesondere gilt für $n < 6$: $A_3 = A_4 = 1$ und $A_5 = 2$.

Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu $n^2 - 6 < 12A_n < n^2 + 6$, welche für $n < 6$ erfüllt ist. Für $n \geq 3$ gilt induktiv:

$$12A_{n+3} = 12B_{n+3} + 12A_n < 12\left[\frac{(n+3)-1}{2}\right] + n^2 + 6 < 6(n+2) + n^2 = 3 + (n+3)^2 < (n+3)^2 + 6$$

Also ist die rechte Seite der Ungleichung erfüllt. Statt $n^2 - 6 < 12A_n$ zeigen wir die etwas stärkere Ungleichungen $(2k)^2 - 6 < 12A_{2k}$ und $(2k+1)^2 - 3 < 12A_{2k+1}$. Diese ist für A_3,A_4,A_5 erfüllt.

$$12A_{2k+3} = 12B_{2k+3} + 12A_{2k} > 6(2k+2) + (2k)^2 - 6 = (2k+3)^2 - 3$$

$$12A_{2k+4} = 12B_{2k+4} + 12A_{2k+1} > 6(2k+1) + (2k)^2 - 3 = (2k+3)^2 - 6$$

In den beiden Gleichungen haben wir $\left[\frac{(2k+3)-1}{2}\right] = k+1$ und $\left[\frac{(2k+4)-1}{2}\right] = k+1$ verwendet. q.e.d.

Quelle anonym

2. Lösung:
Man erhält genau die verschiedenen Zerlegungen, indem die drei Summanden $a \leq b \leq c$ der Größe nach geordnet werden. Man sieht daraus, dass $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gelten muss, und für jedes $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ bekommt man die möglichen b und c, indem man $n-3a$ in zwei Summanden zerlegt, wovon der erste kleiner gleich dem zweiten sein soll. Dafür gibt es $\left\lceil \frac{n-3a+1}{2} \right\rceil$ Möglichkeiten. Daraus folgt

$$A_n = \sum_{j=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil,$$

woraus sich durch Ausrechnen die Behauptung ergibt.

Rechnung:
Es gilt $\lfloor n/3 \rfloor = \frac{n-k}{3}$ mit einem $k \in \{0,1,2\}$. Des Weiteren alterniert $n-3j+1$ mit j zwischen geraden und ungeraden Zahlen, sodass $\left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil$ zwischen $\frac{n-3j+1}{2}$ und $\frac{n-3j+2}{2}$ alterniert.
Dementsprechend gilt, unter Benutzung der kleinen Gaußschen Summenformel,

$$A_n = \frac{n-k}{3}\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\frac{\frac{n-k}{3}\left(\frac{n-k}{3}+1\right)}{2} + z,$$

wobei $z = 1 + \frac{1}{2} + 1 + ... + 1$ ($\lfloor n/3 \rfloor$ Summanden) gilt, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sind, $z = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + ... + 1$, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ gerade, etc.
D.h. wir haben

$$\frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{also}$$

$$\frac{3}{4}\frac{n-k}{3} - \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + \frac{1}{4}$$

Demzufolge haben wir

$$A_n = \frac{n^2}{6} - \frac{nk}{6} - \frac{1}{12}(n^2 - 2nk + k^2) - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z = \frac{n^2}{12} - \frac{k^2}{12} - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z.$$

Für $k = 0$ oder $k = 1$ folgt mit der obigen Abschätzung für z direkt die Behauptung. Für $k = 2$ stellen wir fest, dass nicht n gerade und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sein können, sodass sogar $z \geq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3}$ und dann die Behauptung folgt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

9.23.4 IV. Runde 1981, Klasse 12

Aufgabe 1 - 211241
Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ ($k = 1, 2, ..., 1982$) genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Bezeichne $s := \sum_{i=1}^{1982} a_i$.
Da $a_i \equiv 1 \mod 2$ für alle i gilt, ist $s \equiv 1982 \cdot 1 \mod 2 \equiv 0 \mod 2$. Damit ist $s/2$ eine ganze Zahl.

Wir nehmen zunächst den Fall $s/2 > 0$ an und betrachten die Folge von Partialsummen: $a_1, a_1 + a_2$,..., s. Jedes Folgeglied unterscheidet sich von seinem Vorgänger um $+1$ oder -1. Wegen $s/2 > 0$ (und damit $s > s/2 > 0$) gibt es also eine Partialsumme, die genau $s/2$ beträgt, nicht mit s übereinstimmt und mindestens einen Summanden enthält. Die entsprechenden Summanden dieser Partialsumme erfüllen also alle Kriterien (1)-(3).

Für $s/2 < 0$ gilt eine analoge Argumentation. Es verbleibt $s = s/2 = 0$ zu betrachten. In diesem Fall muss eines der a_i gleich 1 und ein anderes gleich -1 sein. Wähle diese beiden Zahlen, diese erfüllen (1) bis (3).

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 211242
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 1 \qquad (1) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 1 \end{aligned}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.
Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B u.s.w., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) besitzt.
Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1). Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_2c_1 - a_1c_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y &= c_1 - c_2 \\ (a_3c_2 - a_2c_3)x + (b_3c_2 - b_2c_3)y &= c_2 - c_3 \\ (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y &= c_3 - c_1 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit b_3, b_2 bzw. $B - 1$ und Addition

$$D \cdot x = (c_1 - c_2)b_3 = (c_2 - c_3)b_1 + (c_3 - c_1)b_2 \qquad (2)$$

wobei

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \qquad (3)$$

ist. Ferner erhält man

$$D \cdot y = (a_1 - a_2)c_3 + (a_2 - a_3)c_1 + (a_3 - a_1)c_2 \quad \text{und} \qquad (4)$$

$$D \cdot z = (b_1 - b_2)a_3 + (b_2 - b_3)a_1 + (b_3 - b_1)a_2 \qquad (5)$$

Das Gleichungssystem (1) hat daher wegen (2), (4) und 85) im Falle $D \neq 0$ genau eine reelle Lösung, so dass A gewinnt; im Falle $D = 0$ keine oder unendlich viele reelle Lösungen, so dass B gewinnt.
Daher kann B mit der folgenden Strategie den Gewinn erzwingen, d.h. erreiche, dass $D = 0$ wird:

1. O.B.d.A. sei angenommen, dass A zuerst den Koeffizienten a_1 belegt hat (auf diese Möglichkeit lassen sich alle anderen durch Vertauschen von Gleichungen oder Vertauschen von Unbekannten zurückführen). Dann belegt B den Koeffizienten c_2 mit 0 und erreicht damit
$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$
worin nun der Koeffizient a_1 bereits festgelegt ist.

2. Belegt nun A den Koeffizienten c_3, so belegt B den Koeffizienten b_2 mit 0 und erreicht
$$D = a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3$$
Belegt dagegen A einen anderen Koeffizienten, so belegt B den Koeffizienten c_3 mit 0 und erreicht
$$D = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$
In beiden Fällen ist in der erhaltenen Darstellung von D höchstens ein Koeffizient festgelegt (im ersten Fall ist dies genau der Koeffizient c_3).

3. Belegt jetzt A einen weiteren Koeffizienten, so kommen höchstens in einem der beiden Produkte (aus der erreichten Darstellung von D) zwei bereits festgelegte Koeffizienten vor. B kann dann in einem Produkt mit maximaler Anzahl festgelegte Koeffizienten einen weiteren Koeffizienten mit 0 belegen und damit
$$D = a_2b_3c_1 \qquad \text{oder} \qquad D = -a_3b_2c_1$$
erreichen, worin jeweils höchstens ein Koeffizient festgelegt ist.

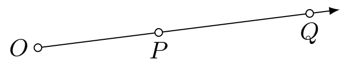
4. Gleichgültig welchen Koeffizienten A nun belegt, erreicht B durch Belegung des noch freien Koeffizienten mit 0, dass $D = 0$ wird.

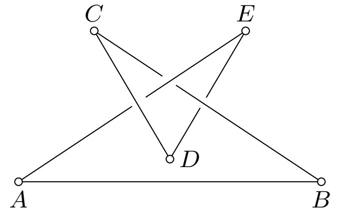
   Unabhängig davon, welche weitere Belegungen bis zum Ende des Spiels noch vorgenommen werden, hat damit B den Gewinn erzwungen, da im Falle $D = 0$ das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 3 - 211243
Man beweise, dass sich aus fünf geraden Stäben kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden lässt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:
(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt: Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen;
ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.
Hinweis:
Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d.h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

In der Abbildung ist das beim Sehen mit einem Auge O entstehende Bild eines räumlichen Streckenzuges unter Einarbeitung der bei Überdeckungen vorliegenden Sichtbarkeitsverhältnisse wiedergegeben.





Von dem als zentralperspektives Bild dargestellten hypothetischen Streckenzug $ABCDEA$ ist nachzuweisen, dass dieser im Raum nicht existieren kann.
Zunächst sei vorangestellt: Trifft ein von O ausgehender Sehstrahl s erst den Punkt P und dann den Punkt Q, so wollen wir sagen:

$$\text{"}P \text{ liegt vor } Q\text{"} \quad \text{oder} \quad \text{"}Q \text{ liegt hinter } P\text{"}$$

Gemäß der Abbildung treffen drei von O ausgehende Sehstrahlen je zwei windschief zueinander liegende Strecken des Streckenzuges $ABCDEA$ in je einem Punkt. Wir stellen fest:

1. Ein von O ausgehender Sehstrahl trifft AE in T_{AE1} und CD in $_{CD}$. T_{CD} liegt vor T_{AE1}.
2. Ein Sehstrahl trifft BC in T_{BC1} und DE in T_{DE}. T_{BC1} liegt vor T_{DE}.
3. Ein Sehstrahl trifft AE in T_{AE2} und BC in T_{BC2}. T_{AE2} liegt vor T_{BC2}.

Jetzt führen wir eine Hilfsebene γ ein, die von den drei (nichtkollinearen) Punkten ABC aufgespannt wird. Offenbar liegt jeder Punkt der Strecken AB und BC in γ.

Nach Feststellung 3. liegt T_{AE2} vor T_{BC2} und damit vor γ. Da A in γ und T_{AE2} vor γ liegen, muss auch der Punkt E vor γ liegen.
Nach Feststellung 1. liegt T_{CD} vor T_{AE1}. Da A in γ und E vor γ liegen, muss auch der dazwischenliegende Punkt T_{AE1} vor γ liegen. Daraus folgt, dass auch T_{CD} vor γ liegt. Da C in und T_{CD} vor γ liegen, muss auch D vor γ liegen.
Folglich liegt auch jeder innere Punkt der Strecke DE vor γ.
Nach Feststellung 2. wird T_{DE} von T_{BC1} verdeckt. T_{DE} liegt als innerer Punkt von DE hinter T_{BC1} und damit auch hinter γ.
Dies ist ein Widerspruch zu oben genannter Feststellung. Die Punkte D, E und T_{DE} können auf Grund der durch die Abbildung wiedergegebenen Lagebeziehungen nicht in einer Geraden liegen.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 4 - 211244
Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte.
Man setze
$$r = \frac{|a_0| + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$
und beweise:
a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.
b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Zunächst wird folgender Hilfssatz bewiesen:
c) Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt $|x_0| \leq r$.
Beweis von c):
Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_o mit $|x_0| > 1$ besitzt, dann folgt mittels Dreiecksungleichung (für beliebige reelle Zahlen s und t gilt $|s + t| \leq |s| + |tY)$

$$\begin{aligned} |a_n||x_0|^n &= |-a_0 - a_1x_0 - ... - a_{n-1}x_0^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1||x_0| + ... + |a_{n-1}||x_0|^{n-1} \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|)|x_0|^{n-1} \qquad \text{(wegen } |x_0| > 1) \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad |x_0| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|}{a_n} = r$$

da $|a_n| \neq 0$ und $|x_0| \neq 0$ ist. Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage a).

Beweis: Jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| \leq 1$ liegt wegen der Voraussetzung $r \geq 1$ im Intervall $-r \leq x_0 \leq r$. Gilt aber $|x_0| > 1$, so folgt mit c): $-r \leq x_0 \leq r$.

Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage b).
Beweis: Angenommen, es gibt eine Nullstelle x_0, die nicht im Intervall $-1 \leq x_0 \leq 1$ liegt, so folgt mit c) $r \leq |x_0| > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r \leq 1$.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 5 - 211245
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $PA^2 + PB^2 = PC^2$ gilt.

O.B.d.A. sei das gegebene Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$ so in einem räumlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem gelegen, dass die Eckpunkte A, B und C die Koordinaten $(b; 0; 0)$, $(0; a; 0)$ bzw. $(0; 0; 0)$ haben, wobei a und b beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen sind.
Ferner sei P ein beliebiger Punkt des Raumes; er habe die Koordinaten $(x; y; z)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} PA^2 &= (x-b)^2 + y^2 + z^2 \\ PB^2 &= x^2 + (y-a)^2 + z^2 \\ PC^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Daher hat ein Punkt P genau dann die Eigenschaft $PA^2 + PB^2 = PC^2$, wenn für ihn

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 0 \qquad (1)$$

Wegen $(x-b)^2 \geq 0$, $(y-a)^2 \geq 0$, $z^2 \geq 0$ trifft (1) genau dann zu, wenn $x - b = y - a = z = 0$ ist.
Daher ist die gesuchte Menge diejenige, die genau den Punkt mit den Koordinaten $(b; a; 0)$ enthält. (Dieser Punkt P ist derjenige Punkt, für den $ACBP$ ein Rechteck ist.)

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6A - 211246A
a) Man beweise: Wenn

$$a = BC, b = AC, c = AB, d = AD, e = BD, f = CD \qquad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_O dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen lässt:
Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so dass für den Oberflächeninhalt A_O jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_O \leq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (3)$$

gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Für den Flächeninhalt A des gleichseitigen Dreiecks mit dem Umfang u gilt:

$$A = \left(\frac{u}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Von allen Dreiecken gleichen Umfangs besitzt das gleichseitige Dreieck einen maximalen Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt $A_\triangle$ eines Dreiecks mit den Seitenlängen x, y, z gilt folglich

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

und wegen der Beziehungen zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \qquad (1)$$

Die Ungleichung (1) gilt für alle Seitenflächen jedes Tetraeders $ABCD$. Somit folgt für die Oberfläche A_O des Tetraeders $ABCD$

$$\begin{aligned} A_O &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+e^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2+d^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(c^2+d^2+e^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+2f^2) \qquad (2) \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2) \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{6}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{12}} < \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ gilt, ergibt sich aus (2) die Aussage a)

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

Aus (2) folgt weiterhin, dass mit $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ eine reelle Zahl $\lambda < \frac{1}{3}$ existiert, so dass für den Flächeninhalt A_O

$$A_O < \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

$\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ ist auch die kleinste reelle Zahl λ dieser Art; denn für ein reguläres Tetraeder folgt aus $a = b = c = d = e = f$

$$A_O = a^2\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

Folglich ist $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ die in b) gesuchte reelle Zahl.

Übernommen aus [3]

Aufgabe 6B - 211246B
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.
(2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.
(3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

(4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$$

I. Angenommen f und g seien Funktionen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Dann werden durch

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad v(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{für alle } x \geq 0$$

Funktionen u,v definiert, die nach (1) und (2) $u(x) \geq 1$, $u(x) \cdot v(x) = 1$ für alle $x \geq 0$ und nach (3) und (4)

$$u(\sqrt{s^2+t^2}) = [f(s)+g(s)] \cdot [f(t)+g(t)] = u(s) \cdot u(t)$$

für alle $s,t \geq 0$ und somit

$$u(\sqrt{x+y}) = u(\sqrt{x}) \cdot u(\sqrt{y})$$

für alle $x,y \geq 0$ erfüllen.
Somit wird durch $F(x) := \ln[u(\sqrt{x})]$ für alle $x \geq 0$ eine Funktion F definiert, die den Bedingungen $F(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $F(x-y) = F(x) + F(y)$ für alle $x,y \geq 0$ genügt.

Hieraus folgt: Es gibt eine reelle Zahl k mit $k \geq 0$, so dass $F(x) = kx$ für alle $x \geq 0$ gilt. Mit den eingeführten Funktionen u, v, F gilt somit für alle $x \geq 0$

$$u(x) = e^{kx^2} \quad ; \quad v(x) = e^{-kx^2};$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \qquad (1)$$

Daher gilt: Ein Funktionspaar (f,g) kann nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn sich f und g beide mit einem und demselben reellen $k \geq 0$ durch (1) für alle $x \geq 0$ darstellen lassen.

II. Nachweis dieser Eigenschaften
zu (1): Für alle $x \geq 0$ gilt: Wegen $kx^2 \geq 0$ ist $e^{kx^2} \geq 1 \geq e^{-kx^2} > 0$. Daraus ergibt sich einerseits

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \geq 0$$

und andererseits aus $\left(e^{kx^2} - 1\right)^2 \geq 0$ über $e^{kx^2} + 1 \geq 2e^{kx^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \geq 1$$

zu (2): Für alle $x \geq 0$ ist

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2kx^2} + 2 + e^{kx^2} - e^{2kx^2} + 2 - e^{-2kx^2}\right) = 1$$

zu (3): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = f(\sqrt{x^2+y+2})$$

zu (4): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} - e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{-k(x^2+y^2)}\right) = g(\sqrt{x^2+y+2})$$

Somit entsprechen die in (1) genannten Funktionen f und g genau den Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen aus [3]

9.24 XXII. Olympiade 1982

9.24.1 I. Runde 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221211
Man ermittle alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \qquad (1)$$
$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \qquad (2)$$

I. Wenn ein Zahlenpaar $(x;y)$ mit $x \neq 0, y \neq 0$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (2) gilt

$$y = \frac{5x+2}{2x} \qquad (3)$$

Wegen $y \neq 0$ ist $5x+2 \neq 0$, und aus (1) folgt durch Einsetzen von (3)

$$x + \frac{2x^2}{5x+2} = \frac{8}{3}$$
$$3x(5x+2) + 6x^2 = 8(5x+2)$$
$$x^2 - \frac{34}{21}x - \frac{16}{21} = 0$$

Wegen $\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21} = \frac{625}{21^2} = \left(\frac{25}{21}\right)^2 > 0$, also

$$x = \frac{17}{21} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21}} = \frac{17}{21} \pm \frac{25}{21}$$

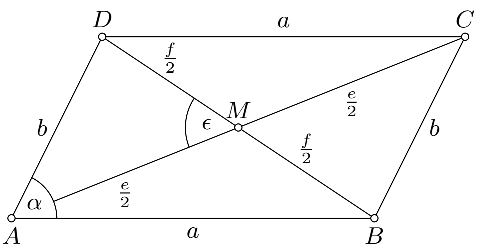
d.z. $x = 2$ oder $x = -\frac{8}{21}$ und damit nach (3) $y = 3$ bzw. $y = -\frac{1}{8}$.

Daher können nur die Paare $(2;3)$ und $\left(-\frac{8}{21}; -\frac{1}{8}\right)$ das Gleichungssystem erfüllen. Die Probe bestätigt dies.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 221212
Man beweise:

Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.



Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, mit $AB = CD = a$, $BC = DA = b$, $AC = e$, $BD = f$. Ferner sei M der Schnittpunkt von AC und BD, und es sei $\angle BMC = \epsilon$.

Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke BMC und AMB folgt

$$b^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\epsilon$$
$$a^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(180^\circ - \epsilon)$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos(180° - \epsilon) = -\cos\epsilon$ durch Subtraktion

$$a^2 - b^2 = ef\cos\epsilon$$

Wegen $\epsilon > 0°$ (und $\epsilon < 360°$, sogar $\epsilon < 180°$), also $\cos\epsilon < 1$, folgt hieraus die behauptete Ungleichung.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 221213

In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n, die größer als 7 ist, angegeben:

	Beispiel für $n = 326$
Man dividiere zunächst n durch 7	$(326 : 7 = 46$, Rest 4)
und schreibe als erste Zahl den ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf.	$\boxed{46}$
Dann multipliziere man 142857 mit dem Rest	$(142857 \cdot 4 = 571428)$
und schreibe das Produkt hinter die zuerst aufgeschriebene Zahl.	46571428
Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man die zuerst aufgeschriebene Zahl.	-46
Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.	$46571382 = 142857 \cdot 326$

Es zeigt sich jedoch, dass dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

a) Ist q der ganzzahlige Teil und r der Rest, der sich bei Division einer natürlichen Zahl $n > 7$ durch 7 ergibt, so gilt

$$n = 7q + r \qquad \text{und} \qquad 0 \leq r \leq 6 \tag{1,2}$$

Die Multiplikation von 142857 mit r ergibt ein Produkt $p = 142857 \cdot r$, das

- im Fall $r = 0$ den Wert $p = 0$ hat und

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ die Ungleichung $142857 \leq p \leq 142857 \cdot 6 = 857142$ erfüllt, also eine sechsstellige Zahl ist.

Daher führt das angegebene Verfahren

- im Fall $r = 0$ auf die Zahl $q \cdot 10 - q = 9q$,

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ auf die Zahl $q \cdot 10^5 + p - q = 999999q + 142857r$.

Andererseits ist das gesuchte Produkt in jedem Fall nach (1) die Zahl

$$142857n = 142857(7q + r) = 999999q + 1428574$$

Der Vergleich zeigt: Das Verfahren führt für genau diejenigen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis, für die der Fall $1 \leq r \leq 6$ vorliegt, das sind genau diejenigen $n > 7$, die nicht durch 7 teilbar sind.

b) Das einfachste Verfahren wäre, statt $n = 7q + r$ mit $r = 0$ den Ansatz $n = 7q + 7$ mit $r = 7$ zu verwenden und anschließend wie beschreiben fortzufahren.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 221214
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden Aussagen (A), bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl, oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form "Wenn p, so q" ist genau dann wahr, wenn die Aussage "(nicht p) oder q" wahr ist. Eine Aussage der Form "u oder v" ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

Wir starten mit (C) und (D).
Es können nicht beide falsch sein, da sonst alle anderen wahr sein müssten. Dies geht nicht, da aus (A) und (F) folgt, dass x eine natürliche Zahl ist, was (E) widerspricht.

Wenn beide wahr sind, ist $x = 2\sqrt{2}$ oder $x = -2\sqrt{2}$. Für $x = 2\sqrt{2}$ sind (A) und (B) falsch, (E) und (F) sind wahr. Für $x = -2\sqrt{2}$ sind (A), (B) und (E) falsch. Es genügt also $x = 2\sqrt{2}$ unseren Bedingungen.

Wenn (C) wahr ist, aber (D) nicht, so sind (A), (B) und (D) falsch.

Wenn (C) falsch und (D) wahr ist, kann x keine natürliche Zahl sein. Also ist eine der beiden Aussagen (A) oder (F) falsch. Da genau 2 Aussagen falsch sein sollen, müssen (B) und (E) wahr sein.
Wenn (A) wahr ist und (F) falsch ist, so folgt mit (B), dass x eine positive rationale Zahl der Form $1/g$ mit $g \in \mathbb{Z}$ ist, also insbesondere betragsmäßig kleiner/gleich Eins ist. Das ist aber mit (D) nicht möglich.

Es sind (B),(D),(E),(F) wahr und (A),(C) falsch, oder es muss $x = 2\sqrt{2}$ gelten.

Aus (B) folgt, dass x rational ist und mit (F) folgt, dass x natürlich ist. Das widerspricht (D).
Es ist also $x = 2\sqrt{2}$ die einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von ochen

2. Lösung:
Angenommen es gibt eine solche Zahl x.

Fall 1: Ist x eine ganze Zahl, so sind die Aussagen C, D und E falsch. Im Widerspruch dazu, dass nur zwei Aussagen falsch sind.

Fall 2: Ist x nicht ganzzahlig, aber rational, so sind C und F falsch. B und D müssten also wahr sein. Wegen B müsste x das Reziprok einer ganzen Zahl, betragsmäßig also kleiner als 1 sein. Wegen D müsste aber x betragsmäßig größer als 2 sein. Widerspruch.

Fall 3: Ist x irrational. A und B sind dann falsch und alle anderen Aussagen daher wahr. Wegen D und C folgt $x^2 = 8$. Wegen E ist x positiv, es kommt also nur $x = \sqrt{8}$ in Frage.

Andere Fälle sind nicht möglich. Die einzige mögliche Lösung ist also $x = \sqrt{8}$.

Dies ist tatsächlich eine Lösung, denn $x = \sqrt{8}$ ist positiv, aber nicht rational und es gilt $x^2 = 8$. Daher sind A und B falsch, während C, D, E und F richtig sind.
$x = \sqrt{8}$ ist also die einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

9.24.2 II. Runde 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221221
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x \cdot (y+z) = 5$$
$$y \cdot (x+z) = 8$$
$$z \cdot (x+y) = 9$$

erfüllen!

Setzt man

$$u := xy,\; v := xz,\; w := yz$$

so erhält man das lineare(!) Gleichungssystem

$$u + v = 5u + w = 8v + w = 9$$

in u,v,w mit den offensichtlichen Lösungen

$$u = xy = 2,\; v = xz = 3,\; w = yz = 6 \quad (*)$$

Insbesondere gilt also dann

$$(xyz)^2 = uvw = 36 \Rightarrow xyz = \pm 6$$

und damit

$$x = \frac{xyz}{yz} = \pm 1,\; y = \frac{xyz}{xz} = \pm 2,\; z = \frac{xyz}{xy} = \pm 3$$

Da wegen (*) alle Variablen jedenfalls das gleiche Vorzeichen haben müssen, gibt es also dann hier genau die 2 Lösungen

$$(x,y,z) \in \{(1,2,3),(-1,-2,-3)\}$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 221222
Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen $a \leq 1cm \leq b \leq 2cm \leq c \leq 3cm$ gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt.
Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

Gemäß der trigonometrischen Flächenformel

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

für ein Dreieck mit den Seitenlänge a und b, sowie dem eingeschlossenen Winkel γ nimmt A unter Berücksichtigung jetzt nur der Nebenbedingungen

$$a \in (0,1],\; b \in [1,2],\; \gamma \in (0,\pi)$$

sein Maximum offensichtlich für

$$a = 1,\; b = 2, \gamma = \frac{\pi}{2}$$

an. Allerdings haben wir hier noch eine weitere Nebenbedingung, nämlich $c \in [2,3]$ für die dritte Seite c, welche aber dann wegen

$$c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

ebenfalls erfüllt ist, sodass dieses rechtwinklige Dreieck mit Flächeninhalt $A = 1$ dann tatsächlich die Lösung der Aufgabe darstellt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 221223
Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt $a + b \leq d + v$. (1)
Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis: Ausgehend von der offensichtlich gültigen Ungleichung

$$(a - d)(b - d) \geq 0 \quad (*)$$

gelangt man unter Verwendung von $d > 0$ durch einfache Äquivalenzumformungen zu

$$a + b \leq d + \frac{ab}{d} \quad (**)$$

was wegen $v = \frac{ab}{d}$ genau die zu beweisende Ungleichung darstellt.
Da ferner für die ursprüngliche Ungleichung (*) das Gleichheitszeichen genau für $a = d$ oder $b = d$, also $a|b$ bzw. $b|a$ gilt, ist dies dann auch die entsprechende Bedingung für Gleichheit in (**).

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 221224
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ gegeben.
Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, dass folgende Forderungen erfüllt sind:
Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.
Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.
a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, ..., P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, dass damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfasst sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, ..., A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Punkte P_1,P_2,...,P_{2n} nacheinander in genau dieser Reihenfolge, sowie in einem einheitlichen Umlaufsinn auf der Kreislinie angeordnet sind, was nur die Sprechweise hier etwas vereinfacht, aber in Hinblick auf die Problemstellung keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.
Ferner bezeichnen wir im Folgenden eine Auswahl von n Sehnen als "zulässig", wenn sie alle gestellten Anforderungen der Aufgabe hier erfüllt. Allgemeiner wollen wir auch eine Auswahl von $k \leq n$ Sehnen als zulässig bezeichnen, wenn sie auf wenigstens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl von n Sehnen vervollständigt werden kann. Hierbei ist im Folgenden vor allem der Sonderfall $k = 1$ sehr wichtig.

a) Wir machen zunächst eine "Grobunterteilung" nach den Möglichkeiten, von dem festgehaltenen Punkt P_1 eine zulässige Sehne zu ziehen, die also dann nach Obigem auf mindestens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl vervollständigt werden kann.

• Verbindet man P_1 mit einem seiner beiden benachbarten Punkte P_2 oder P_6, so hat man für die restlichen 4 Punkte dann jeweils noch 2 Möglichkeiten der Vervollständigung zu einer zulässigen Sehnenauswahl.

• Verbindet man P_1 mit dem Punkt P_4, so sind die restlichen Sehnen für eine zulässige Auswahl dadurch wie folgt festgelegt: P_2 muss mit P_3 und P_5 mit P_6 verbunden werden, d.h., man hat hier nur genau eine Möglichkeit.

• Verbindet man P_1 mit einem der anderen Punkte P_3 oder P_5, so gibt es dann für P_2 bzw. P_6 keine zulässige "Paarung" zu einem noch freien Punkt mittels einer Sehne, diese Verbindungen sind also dann

Beispiele für nicht zulässige Sehnen.

Die Gesamtzahl A_3 der Möglichkeiten in a) für einen zulässige Sehnenauswahl beträgt somit 5.

b) Für den allgemeinen Fall müssen wir folgende Frage beantworten: Wann genau ist einen Sehne von P_1 zu einem anderen Punkt P_k, $k = 2,3,..,2n$ in obigem Sinne zulässig? Wenn wir voraussetzen, was sich auch induktiv als gültig erweist, dass alle $A_k > 0$ sind für $k = 0,1,..,n-1$ (wobei wir hier noch aus Gründen der Kompatibilität $A_0 := 1$ setzen), dann ist die Antwort überraschend einfach: Es genügt einfach zu fordern, dass zwischen P_1 und P_k, sowie auch zwischen P_k und P_1 im Sinne unserer zyklischen Orientierung, jeweils eine gerade Anzahl von Punkten liegen, da es dann für diese beiden Teilmengen von Punkten nach Voraussetzung jeweils für sich betrachtet eine zulässige Sehnenauswahl gibt.

Damit ist nun auch klar eine induktive Berechnungsmöglichkeit für A_n für $n > 0$ vorgegeben, nämlich:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-k-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Beispielsweise erhält man so:

- $A_1 = A_0 A_0 = 1 \cdot 1 = 1$.
- $A_2 = A_0 A_1 + A_1 A_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.
- $A_3 = A_0 A_2 + A_1 A_1 + A_2 A_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$.
- $A_4 = A_0 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_1 + A_3 A_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

womit sich nun auch der letzte noch ausstehende Punkt c) sehr einfach wie folgt beantworten lässt:

c) $A_5 = A_0 A_4 + A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1 + A_4 A_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$.

Aufgabe gelöst von weird

9.24.3 III. Runde 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221231
Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 &= 55 \\ 2x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 32x_4 + 42x_5 &= 60 \\ 3x_1 + 13x_2 + 23x_3 + 33x_4 + 43x_5 &= 65 \\ 4x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 34x_4 + 44x_5 &= 70 \\ 5x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 35x_4 + 45x_5 &= 75 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

Das obige Gleichungssystem ist offensichtlich äquivalent zu dem einfacheren

$$x_1 + 11x_2 + 21x_3 + 31x_4 + 41x_5 = 55 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \qquad (2)$$

da sich (2) durch einfache Differenzbildung aus den beiden ersten Gleichungen ergibt und sich auch umgekehrt durch Addition eines geeigneten Vielfachen von (2) zu (1) alle Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben. Subtrahiert man (2) von (1) und kürzt durch 10, erhält man so sofort die weitere Gleichung

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \qquad (3)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden einander ausschließenden 3 Fälle:
1.Fall: $x_5 = 1$.
Wegen (3) muss dann auch sofort

$$x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0$$

gelten, womit sich aus (2) dann auch $x_1 = 3$ ergibt, was tatsächlich eine Lösung unseres Gleichungssystems hier ist.

2.Fall: $x_5 = 0$, $x_4 = 1$
Hier ergeben sich aus (3) die beiden Unterfälle:
a) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 3$ aus (2)
b) $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
welche beide ebenfalls hier zusätzlich (1) lösen, also dann Lösungen sind.

3.Fall: $x_4 = x_5 = 0$
Hier ergeben sich wieder unter Verwendung von (3) dann sogar drei Unterfälle, nämlich
a) $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
b) $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 1$ aus (2)
c) $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 0$ aus (2)

welche ebenfalls alle auch (1) lösen und somit Lösungen sind.
Zusammenfassend haben sich somit die folgenden 6 Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \{(0,5,0,0,0),(1,3,1,0,0),(2,1,2,0,0),(2,2,0,1,0),(3,0,1,1,0),(3,1,0,0,1)\}$$

des gegebenen Gleichungssystems ergeben.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 221232
Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1, ..., 30)$, die

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$$

erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Da alle a_i natürlich durch d teilbar sind, gilt dies auch für deren Summe 1983 mit der Primfaktorzerlegung $1983 = 3 \cdot 661$, d.h., es muss

$$d \in \{1{,}3{,}661{,}1983\}$$

sein. Da $d = 1983$ und $d = 661$ bei 30 positiven Summanden natürlich sofort ausscheiden, kommt dann als nächstes in Hinblick auf ein Maximum $d = 3$ in Betracht und damit ist das Problem hier natürlich leicht lösbar, z.B. mit der Belegung

$$a_1 = a_2 = ... = a_{29} = 3,\ a_{30} = 1983 - 29 \cdot 3 = 1896$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3A - 221233A
a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks

$$F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks

$$F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

a) I. ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, F sein Flächeninhalt und $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $\beta = \angle ABC$, $\delta = \angle CDA$, so gilt

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\beta + \frac{cd}{2} \cdot \sin\delta$$

wegen $\sin\beta \leq 1$, $\sin\delta \leq 1$, $0 < ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $0 < cd \leq \frac{c^2+d^2}{2}$ also

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

II. Es gibt konvexe Vierecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

gilt; denn es gibt Vierecke mit $a = b = c = d$ und $\beta = \delta = 90°$, diese sind (Quadrate, also) konvex, und für sie gilt $F = a^2$, also (1).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl p mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $p = \frac{1}{4}$.

b) I. Ist ABC ein Dreieck, F sein Flächeninhalt und $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung

$$s - a \geq 0 \qquad ; \qquad s - b \geq 0 \qquad ; \qquad s - c \geq 0$$

Hieraus und aus der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nichtnegativer reeller Zahlen folgt

$$\begin{aligned} F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{s(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)^3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2 \\ &= \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) \\ &\leq \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

II. Es gibt Dreiecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

gilt; denn für gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a $(= b = c)$ gilt $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$, also (2).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl q mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $q = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

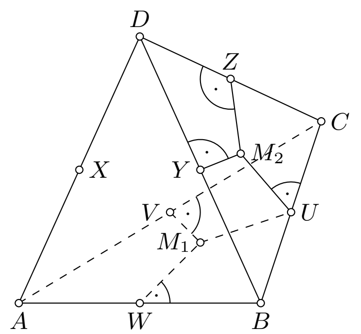
Übernommen aus [5]

Aufgabe 3B - 221233B
Man beweise:
a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \qquad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeder berührt.
Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

a) Wenn eine Kugel K die Kanten BC, CA, AB, AD, BD, CD eines Tetraeders $ABCD$ in U, V, W, X, Y, Z berührt, so folgt: (siehe Abbildung)



Die Ebene durch $A, B; C$ hat mit K die Punkte U, V, W gemeinsam, sie schneidet K also in einem Kreis. Dieser berührt die Geraden durch B, C bzw. durch $C; A$ in U bzw. V. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt daher $CV = CU$.
Entsprechend folgt

$$CZ = CV = CU \quad ; \quad AW = AV = AX \quad ; \quad BW = BY = BU \quad ; \quad DZ = DY = DX$$

und damit durch Addition (1).

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, so folgt:
Man bezeichne die Ebenen, in denen die Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD liegen, mit e_1, e_2, e_3, e_4, ferner die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecke mit M_1, M_2, M_3, M_4 sowie die Inkreisberührungspunkte (in der aus der Abbildung ersichtlichen Verteilung) mit U_1, V_1, W_1 bzw. Z_2, Y_2, U_2 bzw. X_3, Z_3, V_3 bzw. Y_4, X_4, W_4.
Dann ist $AV_1 = AW_1$, $BW_1 = BU_1$, $CU_1 = CV_1$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(BC + AC - AB) &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CV_1 - AW_1 - BW_1) \\ &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CU_1 - AV_1 - BU_1) = CU_1 \end{aligned}$$

Entsprechend ist $CU_2 = \frac{1}{2}(BC + CD - BD)$. Unter Anwendung von (1) folgt

$$CU_2 = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = CU_1$$

Damit ist $U_1 = U_2$ gezeigt.
Ebenso folgt $V_1 = V_3$, $W_1 = W_4$, $X_3 = X_4$, $Y_4 = Y_2$, $Z_2 = Z_3$. Für die genannten Punkte können demnach die Bezeichnungen U, V, W, X, Y, Z verwendet werden.

Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius stehen U_M1 und UM_2 senkrecht auf BC, also ist die Ebene U durch U, M_1, M_2 senkrecht auf BC und damit senkrecht auf e_1. Folglich enthält u auch die in M_1 auf e_1 errichtete Senkrechte g_1. Ebenso enthält u die in M_2 auf e_2 errichtete Senkrechte g_2.
Da e_1 und e_2 nicht zueinander parallel sind, ist $g_1 \nparallel g_2$. Somit schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt M.
Da nun MM_1U, MM_1V, MM_1W rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Kathete MM_1 und gleichlangen Katheten M_1U, M_1V, M_1W sind, folgt $MU = MV = MW$. Ebenso folgt $MU = MY = MZ$.

Damit ist bewiesen: Die Kugel K durch U,V, W, X geht auch durch Z. Analog folgt, dass K auch durch X geht.
Die Schnittkreise von K mit e_1, e_2, e_3, e_4 sind folglich die Kreise durch U, V, W bzw. durch Z, Y, U bzw. durch X, Z, V bzw. durch Y, X, W, also die Inkreise der Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD. Daher berührt K alle Kanten des Tetraeders.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 221234
Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichnet f die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \sin \frac{c}{x}$ definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.
a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, dass f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat.
Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

a) Für jedes positive reelle c gilt: Eine positive Zahl x ist genau dann Nullstelle von f, wenn eine ganze Zahl k mit

$$\frac{c}{x} = k\pi \qquad (1)$$

existiert. Nun ist (1) äquivalent mit

$$x = \frac{c}{k\pi} \qquad (2)$$

Daher führt eine ganze Zahl k genau dann auf eine Nullstelle x mit $10 \leq x \leq 20$, wenn sie $10 \leq \frac{c}{k\pi} \leq 20$ erfüllt. Dies ist äquivalent mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi}$$

Insbesondere führt eine ganze Zahl k_1 bzw. k_2 genau dann vermöge (2) auf 10 bzw. 20 als Nullstelle, wenn

$$k_1 = \frac{c}{10\pi} \qquad ; \qquad k_2 = \frac{c}{20\pi}$$

gilt. Sie für ein positives reelles c diese beiden Zahlen ganz, so befinden sich im Intervall $10 \leq xleq 20$ genau dann m Nullstellen, wenn es genau m ganze Zahlen k mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi} \qquad (3)$$

gibt. Das trifft genau dann zu, wenn erstens $\frac{c}{20\pi}$ eine ganze Zahl (4) ist, und zweitens

$$\frac{c}{10\pi} = \frac{c}{20\pi} + m - 1 \qquad (5)$$

gilt. Angenommen, für ein positives reelles c seien (4) und (5) erfüllt. Dann folgt $2c = c + 20(m-1)\pi$, also $c = 20(m-1)\pi$.
Umgekehrt ist für dieses c in der Tat $\frac{c}{20\pi} = m - 1$ eine ganze Zahl, also (4) erfüllt, und es gilt (5). Daher hat genau die Zahl $c = 20(m-1)\pi$ die in a) verlangte Eigenschaft.

b) Für sie gilt weiter: Eine ganze Zahl k führt genau dann vermöge (2) auf eine Nullstelle $x \geq 20$, wenn sie $\frac{c}{k\pi} \geq 20$ erfüllt. Das ist äquivalent mit

$$0 < k \leq \frac{c}{20\pi} = m - 1 \qquad (6)$$

Da es nur endlich viele solche ganzen Zahlen gibt, hat f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen, wie behauptet.

Für die jeweils zu zwei ganzen Zahlen $k, k' > 0$ gehörenden Nullstellen $x = \frac{c}{k\pi}$, $x' = \frac{c}{k'\pi}$ gilt genau dann $x < x'$, wenn $k > k'$ gilt. Also gehört die größte Nullstelle von f zum kleinsten Wert von k mit (6), d.h. zum Wert $k = 1$. Somit ist die in b) gesuchte größte Nullstelle

$$x = \frac{c}{\pi} = 20(m-1)$$

Übernommen aus [5]

Aufgabe 5 - 221235
a) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.
b) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$;
für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

Mit der Umformung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \quad (*)$$

sieht man sofort, dass unter den gegebenen Voraussetzungen jedenfalls

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$$

also a) gelten muss. Insbesondere genügt es für den ersten Punkt (x_1,y_1) in b) einfach nur $x_1 > 0$ ausreichend klein und $y_1 = 0$ zu wählen, womit dann tatsächlich

$$x_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_1^2 > 0$$

ist.
Für den zweiten Punkt (x_2,y_2) in b) benutzen wir (*) nochmals, aber nun in der Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}y^2 \quad (**)$$

ist. Indem wir nun einfach $y_2 > 0$ ausreichend klein wählen, sodass mit $x_2 = -\frac{b}{a}\,y_2$ dann (x_2,y_2) dem Ursprung beliebig nahe kommt, gilt dann außerdem

$$x_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 = -\frac{b^2 - ac}{a}\,y_2^2 < 0$$

wie verlangt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 221236
Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden.
Zu jedem Schloss soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloss passen soll.
Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloss.
Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:
Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloss auch ein passender Schlüssel; immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloss keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Ein vertrauenswürdiger Dealer wählt dazu eine "große" Primzahl p und ein Polynom $f(X) \in (\mathbb{Z}/p)[X]$ vom Grad 5, sowie verschiedene 11 "Stützstellen" $x_1,x_2,..,x_{11} \in \mathbb{Z}/p$.
Die Primzahl p, sowie auch die Stützstellen, dürfen dabei durchaus allen Teilnehmern bekannt sein. Der geheime Schlüssel ist hier einfach der Vertreter der Restklasse von $f(0)$ in $\{0,1,...,p-1\}$.

Jeder der 11 Personen P_i, i=1,2,...,11, bekommt dabei seinen "Teilschlüssel" in Form des Paares $(x_i,f(x_i))$. Wenn mindestens 6 der Teilnehmer ihren Teilschlüssel beisteuern, kann dann $f(X)$ und damit dann auch $f(0)$ mit einer der bekannten Interpolationsformeln eindeutig rekonstruiert werden, bei weniger bekannten Teilschlüsseln ist das aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten bei einem ausreichend großem p aber nicht möglich.

Aufgabe gelöst von weird

2. Lösung:
Wir bilden aus den 11 Personen alle 6-elementigen Teilmengen, bringen zu jeder Teilmenge ein Schloss an und geben diesen 6 Personen einen Schlüssel dazu. Dann ist die Tür mit 5 Personen nicht aufschließbar, da es zu den 6 abwesenden Personen ein Schloss gibt und somit die 5 Personen dazu keinen Schlüssel haben. Je zwei 6-elementige Teilmengen haben mindestens ein Element in der Schnittmenge. Daher haben 6 Personen zu allen Schlössern einen Schlüssel. Also haben wir eine Lösung mit $\binom{11}{6} = \binom{11}{5}$ Schlössern.

Falls die Tür weniger als $\binom{11}{5}$ Schlösser mit den geforderten Bedingungen hat, gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens ein Schloss, so dass zwei verschiedene Gruppen aus 5 Personen keinen Schlüssel zu diesem Schloss haben. Also haben mindestens 6 Personen zu diesem Schloss keinen Schlüssel. Also kann diese Gruppe aus 6 Personen die Tür nicht öffnen.

Quelle anonym

3. Lösung:
Minimalitätsbeweis
Sei S die Menge der angebrachten Schlösser. Angenommen Person i hat die Schlüssel zu allen Schlössern in der Teilmenge $S_i \subset S$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller fünfelementigen Teilmengen von $\{1,\dots,11\}$.
Für jedes $\{a,b,c,d,e\} \in \mathcal{F}$ wählen wir ein Element $f(\{a,b,c,d,e\}) \in S \setminus (S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e)$.
Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $f : \mathcal{F} \to S$.

Wir behaupten, dass f injektiv ist:
Angenommen $F_1,F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \neq F_2$. Dann gibt es $x \in F_2 \setminus F_1$. Sei $F_1 = \{a,b,c,d,e\}$. Da $S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_x = S$ gilt, muss $f(F_1) \in S_f$ gelten. Also kann nicht $f(F_2) = f(F_1)$ sein.
Damit folgt, dass $|S| \geq |\mathcal{F}| = \binom{11}{5} = \binom{11}{6}$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

9.24.4 IV. Runde 1982, Klasse 12

Aufgabe 1 - 221241
a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, dass die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!
b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, dass die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

Für den Aufgabenteil a) erhält man aus $f(0) = 1$ sofort den Wert $c = 1$ und die weiteren Gleichungen $f(2) = 16a + 4b + 1 = 1$ und $f'(1) = 4a + 2b = 0$ ergeben dann $a = b = 0$, im Widerspruch dazu, dass $a \neq 0$ vorausgesetzt war. Es gibt somit hier keine Lösung.

Auch für b) ergibt sich aus f(0)=1 sofort wieder $c = 1$. Die weiteren zwei Gleichungen für a und b sehen hier dann allgemeiner so aus:

$$f(x_2) = ax_2^4 + bx_2^2 + 1 = 1$$
$$f'(x_1) = 4ax_1^3 + 2bx_1 \;= 0$$

wofür wir wegen der Voraussetzung $0 < x_1 < x_2$ auch einfacher

$$ax_2^2 + b = 0$$
$$2ax_1^2 + b = 0$$

schreiben können. Insbesondere sieht man, dass wegen $a \neq 0$ sich für $x_2^2 \neq 2x_1^2$ ein Widerspruch ergibt, wie schon im Aufgabenteil a). Ist aber die Bedingung $x_2^2 = 2x_1^2$, also hier dann $x_2 = \sqrt{2}\, x_1 > 0$ erfüllt, so kann dann $a \neq 0$ sogar beliebig sein und für $b = -ax_2^2$ sind dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 221242
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = a \qquad (2)$$
$$x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 = a^2 \qquad (3)$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 = a^3 \qquad (4)$$

Zunächst geht es darum, das obige lineare Gleichungssystem in x_1,x_2,x_3,x_4 zu lösen. Dafür gibt es hier aufgrund seiner besonderen Form einen netten Trick, den ich am Beispiel der Berechnung von x_1 hier einmal explizit vorführe:

$$f_1(a) := (a-2)(a-3)(a-4) = a^3 - 9a^2 + 26a - 24 =$$
$$= (x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4) - 9(x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4) + 26(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) -$$
$$-24(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = f_1(1)x_1 + f_1(2)x_2 + f_1(3)x_3 + f_1(4)x_4 = f_1(1)x_1$$

und damit also

$$x_1 = \frac{1}{f_1(1)}(a-2)(a-3)(a-4) = -\frac{1}{6}(a-2)(a-3)(a-4)$$

In analoger Weise ergeben sich unter Verwendung der polynomialen Ausdrücke

$$f_2(a) := (a-1)(a-3)(a-4),\; f_3(a) := (a-1)(a-2)(a-4),\; f_4(a) := (a-1)(a-2)(a-3)$$

in a die Werte der anderen Variablen zu

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{f_2(2)}(a-1)(a-3)(a-4) = \frac{1}{2}(a-1)(a-3)(a-4) \\ x_3 &= \frac{1}{f_3(3)}(a-1)(a-2)(a-4) = -\frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-4) \\ x_4 &= \frac{1}{f_4(4)}(a-1)(a-2)(a-3) = \frac{1}{6}(a-1)(a-2)(a-3) \end{aligned}$$

Daraus kann man aber durch Einsetzen sofort ersehen, dass für $a \notin \{1,2,3,4\}$ mindestens eine der 4 Variablen negativ ist, während für $a \in \{1,2,3,4\}$ jeweils 3 der Variablen x_1,x_2,x_3,x_4 den Wert 0 annehmen, die vierte aber dann positiv ist, d.h., genau diese vier Werte von a stellen die Lösung der Aufgabe hier dar.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 221243
Man untersuche, ob es nichtnegative
a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4
mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so dass die Summe

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

a) Löst man die beiden Gleichungsnebenbedingungen nach x_2 und x_1 auf, so erhält man:

$$x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 \qquad (1)$$
$$x_1 = x_3 + 2x_4 \qquad (2)$$

Eingesetzt in die Gleichung $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} s &= (x_3 + 2x_4)^2 + (4 - 2x_3 - 3x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= x_3^2 + 4x_3x_4 + 4x_4^2 + 16 - 16x_3 - 24x_4 + 4x_3^2 + 12x_3x_4 + 9x_4^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= 6x_3^2 + 16x_3x_4 + 14x_4^2 - 16x_3 - 24x_4 + 16 \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (14 - 32/3)x_4^2 - (24 - 64/3)x_4 + (16 - 32/3) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4^2 - (4/5)x_4 + (8/5)) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + (10/3)(8/5 - 4/25)) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + 24/5 \geq 24/5 \end{aligned}$$

s ist also durch 24/5 nach unten beschränkt.

Für $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da (8+6+4+2)/5 = 20/5 = 4 und $(6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2)/5 = 20/5 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist

$$s = (8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2)/5^2 = 120/25 = 24/5$$

Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 24/5 an, wenn $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ ist.

b) Sind die Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 ganzzahlig, so ist auch $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ganzzahlig. Eine Zahl x_i und ihr Quadrat x_i^2 haben die gleiche Parität (d.h. den gleichen Rest bei Division durch 2). Daher hat s die gleiche Parität wie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$. s ist also in jedem Fall gerade.

Genauso wie in a) gilt die Ungleichung $s \geq 24/5 > 20/5 = 4$. Da s ganzzahlig und gerade ist, kann das verschärft werden zu $s \geq 6$.

Für $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da $1 + 2 + 1 + 0 = 4$ und $2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist $s = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 6$. Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 6 an, wenn $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ ist.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 221244
Man beweise, dass das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{630} \cdot x^9 - \frac{1}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{30} \cdot x^5 - \frac{82}{63} \cdot x^3 + \frac{32}{35} \cdot x$$

für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

Wir klammern zunächst aus und erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{630}\left(x^9 - 30x^7 + 273x^5 - 820x^3 + 576x\right)$$

Es bleibt also zu zeigen: $630 \mid n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n$.
Nun ist $630 = 63 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$. Wir zeigen nun also die Teilbarkeit:

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 + n^5 = n^5(n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 2$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^5 + 3n^5 + n = n(4n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 5$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^3 - 30n - n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 7$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 - 3n^7 + 3n^5 - n^3 = n^3(n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1) =$$
$$= n^3(n-1)^3(n+1)^3 \equiv 0 \pmod 9$$

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 5 - 221245
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Bei einem ungestörten technischen Prozess sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, ..., a_n$ abhängigen Größe. Bei einem gestörten technischen Prozess betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\epsilon_1} + \frac{a_2}{1+\epsilon_2} + ... + \frac{a_n}{1+\epsilon_n} \qquad (2)$$

Dabei seien $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, dass für alle $\mu = 1, 2, ..., n$ die Ungleichung $|\epsilon_\mu| \leq 10^{-m}$ (3) gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{10^m - 1}(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$$

folgt!

Es gilt für alle $\mu = 1,2,\dots,n$ die Ungleichung

$$\left|1 - \frac{1}{1+\epsilon_\mu}\right| = \left|\frac{1+\epsilon_\mu - 1}{1+\epsilon_\mu}\right| = \frac{|\epsilon_\mu|}{|1+\epsilon_\mu|} \leq \frac{|\epsilon_\mu|}{1-|\epsilon_\mu|} \leq \frac{10^{-m}}{1-10^{-m}} = \frac{1}{10^m - 1}$$

Also ist auch für alle $\mu = 1,2,\dots,n$

$$\left|\frac{a_\mu}{1+\epsilon_\mu} - a_\mu\right| = |a_\mu| \cdot \left|1 - \frac{1}{1+\epsilon_\mu}\right| \leq |a_\mu| \cdot \frac{1}{10^m - 1}$$

Die behauptete Ungleichung folgt nun durch Addition der gerade gezeigten für $\mu = 1,2,\dots,n$, $\square$.

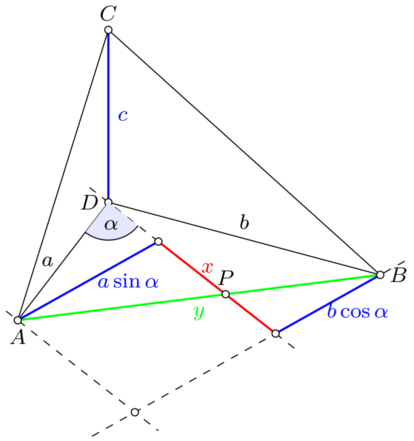
Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 221246A
Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinanderstehen.
Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b, bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.
a) Man beweise, dass dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets gilt:

$$s \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a,b,c), ob es einen Punkt P derart gibt, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a,b,c) alle diese Punkte P.

O.B.d.A. liege der Punkt P auf der Kante AB. Siehe folgende Skizze:



Dann ist s die Summe der "blauen" Strecken:

$$s = a\sin\alpha + b\cos\alpha + c$$

Außerdem ist zu Zwecken der Abkürzung:

$$y^2 = a^2 + b^2$$

und

$$x = b\sin\alpha - a\cos\alpha$$

Offensichtlich gilt:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{y^2 - x^2}$$

und somit:

$$s = \sqrt{y^2 - x^2} + c$$

Es soll gelten:

$$s^2 = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + c\right)^2 \leq 2(y^2 + c^2)$$

$$y^2 - x^2 + c^2 + 2c\sqrt{y^2 - x^2} \leq 2y^2 + 2c^2$$

$$0 \leq y^2 - x^2 + c^2 - 2c\sqrt{y^2 - x^2} + 2x^2$$

$$0 \leq \left(\sqrt{y^2 - x^2} - c\right)^2 + 2x^2$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich immer erfüllt, was die Ungleichung (1) beweist.

Für Aufgabenteil b) soll Gleichheit eintreten, was nur dann der Fall ist, wenn einerseits

$$x = 0$$

und andererseits (mit $x = 0$)

$$\sqrt{y^2} - c = 0$$

also

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist. x ist genau dann gleich null, wenn die Gerade g durch D und P die Strecke AB rechtwinklig kreuzt, P also den Lotfußpunkt von D auf AB darstellt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6B - 221246B
Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, dass sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$.
Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, ..., n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot p^k \qquad (1)$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = n \cdot p$$

aufzufassen.

Etwas vereinfachend kann man schreiben:

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{x!}{(x-k)!} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} p^k$$

Wir teilen auf beiden Seiten durch $k!$:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k$$

Da $\binom{a}{b} = 0$ für $a < b$ ist, kann man den Index x auch bei k beginnen lassen, denn die Summanden für $x < k$ wären alle null:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k \qquad (2)$$

Das bedeutet, dass ein lineares Gleichungssystem für die $f(x)$ vorliegt, welches eine Dreiecksform aufweist. Bei $k = n$ lautet die Gleichung nämlich nur

$$f(n) = p^n$$

Man kann dann rekursiv die Werte für $f(k)$ aus $f(k+1)...f(n)$ berechnen. Führt man das von Hand für ein kleines n aus, z.B. $n = 3$, erkennt man ein Muster. Es scheint zu gelten:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (3)$$

Wir versuchen, die Gültigkeit dieser Formel zu beweisen, indem wir sie in (2) einsetzen:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{x!}{k!(x-k)!} \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{n!}{k!(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Terme, in denen nicht x vorkommt, können vor die Summe gezogen werden:

$$\frac{n!}{k!} \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Wir teilen durch $\binom{n}{k}$:

$$(n-k)! \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{n-k}{x-k} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

Wir substituieren $x = k + m$ mit $m = 0...(n-k)$:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{k+m} (1-p)^{n-k-m} = p^k$$

Wir teilen noch einmal durch p^k:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = 1$$

Die linke Seite entspricht dem binomischen Lehrsatz, denn es ist

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = (p + (1-p))^{n-k} = 1^{n-k} = 1$$

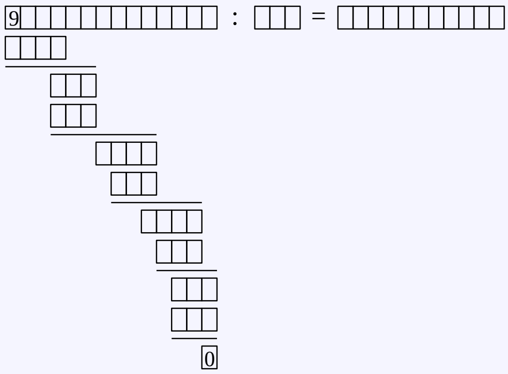
Daher ist die Gleichung (2) tatsächlich erfüllt, und die gesuchte Funktionsvorschrift entspricht der in (3) angegebenen Formel.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

9.25 XXIII. Olympiade 1983

9.25.1 I. Runde 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231211



In dem folgenden Schema (siehe Abbildung) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.

Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, und wenn man den Dividenden mit x, den Divisor mit y und den Quotienten mit z bezeichnet, so gilt:

$$x : y = z, \tag{1}$$
$$100 \leq y \leq 999 \tag{2}$$

Bezeichnet man ferner die aus den ersten vier Ziffern des Dividenden gebildete Zahl mit t, so gilt: $9000 \leq t \leq 9999$.

Bezeichnet man die in der zweiten Zeile des Schemas stehende Zahl, die ein Vielfaches von y ist, mit ny, wobei $1 \leq n \leq 9$ ist, so gilt:

$$t - ny \leq 9 \qquad , \qquad n \geq t - 9 \geq 9000 - 9 = 8991 \qquad \text{also} \tag{3}$$
$$y \geq \frac{8991}{n} \geq \frac{8991}{9} = 999 \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt daher $y = 999$. Aus (3) folgt weiter

$$n \geq \frac{8991}{y} = \frac{8991}{999} = 9$$

also $n = 9$. Daher steht in der zweiten Zeile des Schemas die Zahl $9y = 8991$, während in der 4., 6., 8. und 10. Zeile des Schemas die Zahl $y = 999$ steht, weil das einzige von Null verschiedene ganzzahlige dreistellige Vielfache von 999 die Zahl 999 selbst ist. Daraus folgt

$$z = 90100010011$$

und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 9 & : & 999 & = & 90100010011 \\
8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 9 & 8 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

handeln.
Diese stellt in der Tat eine richtig gelöste Divisionsaufgabe dar. Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 231212
Man ermittle alle Tripel $(x;y;z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} = -2 \tag{1}$$
$$y + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \tag{2}$$
$$\frac{1}{x} + z = 1. \tag{3}$$

Wenn $(x;y;z)$ ein Tripel mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt: Wegen (1) gilt

$$xb = -2 - \frac{1}{y} = -\frac{2y+1}{y}$$

Hieraus und aus $x \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{x} = -\frac{y}{2y+1} \tag{4}$$

Wegen (2) gilt $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - y = -\frac{2y+1}{2}$, also

$$z = -\frac{2}{2y+1} \tag{5}$$

Setzt man (4) und (5) in (3) ein, so folgt

$$-\frac{y}{2y+1} - \frac{2}{2y+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

und damit weiter

$$x = -1 \qquad ; \qquad z = 2$$

Also kann nur das Tripel $(x;y;z) = (-1;-1;2)$ die geforderten Eigenschaften haben. Es hat diese Eigenschaften, wie ein Probe zeigt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 231213
Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

(1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.

(2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.

(3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.

(4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90°.

I Wenn ein Viereck zu der gesuchten Menge gehört, so folgt:

Da (3) die Verneinung von (4) ist, ist genau eine der Aussagen (3), (4) wahr. Folglich ist auch genau eine der Aussagen (1), (2) wahr. Wäre (2) wahr, so wäre $ABCD$ ein Rhombus, im Widerspruch dazu, dass (1) falsch sein müsste. Also ist (2) falsch und (1) wahr.

Das besagt: $ABCD$ ist ein Trapez, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten.

II Wenn ein Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten, so folgt: (1) ist wahr, (2) ist falsch.

Ferner ist genau eine der Aussagen (3),(4) wahr, da (3) die Verneinung von (4) ist. Somit gehört $ABCD$ zu der gesuchten Menge.

Die gesuchte Menge ist folglich die Menge aller Trapeze, die kein Rhombus sind.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 231214
Bernd und Jürgen führen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; danach verfährt er nach folgenden Vorschriften:

(1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.

(2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.

(3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet. Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, dass nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so dass der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen. Jürgen macht den ersten Zug.

Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

Die Züge seien kurz durch Symbole beschrieben; z. B. bedeutet $r,g,g \to 5,2,0$, dass der Spieler einen roten Stein und zwei gelbe Steine nimmt und dass nach diesem Zug 5 rote, 2 blaue Steine und kein gelber Stein auf dem Tisch liegen.

Die folgende Tabelle gibt jeweils für Jürgen (J) eine Möglichkeit und für Bernd (B) alle danach jeweils vorhandenen Möglichkeiten eines Zuges an. Verfährt Jürgen nach dieser Strategie, so erreicht er, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, stets die Stellung 5,0,0, also den Sieg.

J	$g,g,g \to 5,4,0$					
B	$r,r,b \to 5,3,1$			$r,b,b \to 5,2,2$		$b,b,b \to 5,1,3$
J	$b,b,b \to 5,0,4$			$r,g,g \to 5,2,0$		$g,g,g \to 5,1,0$
B	$r,r,g \to 5,0,3$	$r,g,g \to 5,0,2$	$g,g,g \to 5,0,1$	$r,r,b \to 5,1,1$	$r,b,b \to 5,0,2$	$r,r,b \to 5,0,1$
J	$g,g,g \to 5,0,0$	$r,g,g \to 5,0,0$	$r,r,g \to 5,0,0$	$r,r,g \to 5,1,0$	$r,g,g \to 5,0,0$	$r,r,g \to 5,0,0$
B				$r,r,b \to 5,0,1$		
J				$r,r,g \to 5,0,0$		

Übernommen von [5]

9.25.2 II. Runde 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231221
Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, ..., a_5$.

a) Wenn (a_n) eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied a_1 und der konstanten Differenz d ist, so gilt

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Daher erfüllt die Folge genau dann $s_4 = 14$ und $s_8 = 255$, wenn

$$15 = 2(2a_1 + 3d) \qquad ; \qquad 255 = 4(2a_1 + 7d)$$

gilt. Dieses Gleichungssystem hat genau die Lösungen $a_1 = -\frac{555}{32}$ und $d = \frac{225}{16}$. Also hat genau die arithmetische Folge mit diesen a_1 die verlangten s_4 und s_8. Ihre ersten fünf Glieder sind

$$-\frac{555}{32}; \quad -\frac{105}{32}; \quad \frac{345}{32}; \quad \frac{795}{32}; \quad \frac{1245}{32}$$

b) (I) Es sei (a_n) eine geometrische Folge, die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ erfüllt. Für ihr Anfangsglied und ihren konstanten Quotienten q folgt dann:
Es gilt $q \neq 1$; denn aus $q = 1$ würde $s_8 = 8a_1 = s_4$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Für geometrische Folgen mit $q \neq 1$ ist $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$; daher ergibt sich

$$15 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} \qquad ; \qquad 255 = a_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1}$$

also $a_1 \neq 0$, $q^4 - 1 \neq 0$ und

$$17 = \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = q^4 + 1 \quad \rightarrow \quad q = 2 \quad \text{oder} \quad q = -2$$

und hierzu

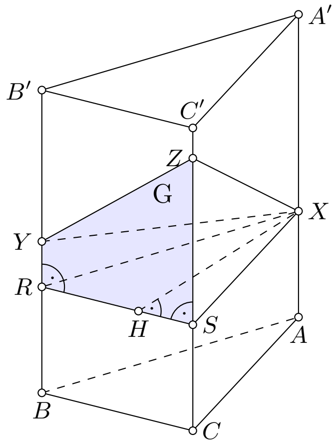
$$a_1 = 15 \frac{q - 1}{q^4 - 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad a_1 = -3$$

Daher könne nur die beiden geometrischen Folgen mit $a_1 = 1, q = 2$ bzw. mit $a_1 = -3, q = -2$ die verlangten s_4, s_8 haben. Sie haben diese Partialsummen, wie die Proben bestätigen. Ihre ersten fünf Glieder sind $1, 2, 4, 8, 16$ bzw. $-3, 6, -12, 24, -48$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 231222
Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'.
Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, dass der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen $V_K = \frac{1}{3}F(x+y+z)$ hat, wobei $x = AX$, $y = BY$, $z = CZ$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

O.B.d.A. sei $x \leq y \leq z$ angenommen. Durch X werde die zur Grundfläche ABC parallele Ebene gelegt. Sie schneidet BY in einem Punkt R, CZ in einem Punkt S und zerlegt den Körper K in das gerade Prisma $P_1 = ABCXRS$ und einen Teilkörper T (der im Fall $x = y = z$ nur noch im Sinne einer Entartung mit dem Volumen $V_T = 0$ zu betrachten ist).



In den Fällen $x < y \leq z$ und $x = y < z$ ist T eine Pyramide mit dem Trapez $YRSZ$ bzw. dem Dreieck RSZ als Grundfläche G und mit dem Punkt X als Spitze.
Die Höhenlänge dieser Pyramide ergibt sich als Länge des Lotes XH von X auf die Ebene, in der die Seitenfläche $BCSR$ des Prismas P_1 liegt. Da dieses ein gerades Prisma ist, verläuft XH in der Ebene der Deckfläche RSX von P_1, ist also zugleich die auf RS senkrechte Höhe dieses Dreiecks.
Aus $RS \perp CZ$ folgt ferner, dass die Fläche G den Inhalt

$$\frac{1}{2}(RY + SZ)RS$$

hat (beim Trapez $YRSZ$ wegen der Flächeninhaltsformel für Trapeze; beim Dreieck RSZ mit $RY = 0$ und RS als Höhe auf SZ). Daher hat T das Volumen

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(RY + SZ)RS \cdot XH$$

Darin ist $RY = y - x$, $SZ = z - x$; ferner hat das zu ABC kongruente Dreieck XRS den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} RS \cdot XH$$

Somit gilt

$$V_T = \frac{1}{3} F(y - x + z - x)$$

(Diese Formel erfasst auch den Fall $x = y = z$). Das Prisma P_1 hat das Volumen $V_{P_1} = F \cdot x$. Damit ergibt sich

$$V_K = V_{P_1} + V_T = \frac{1}{3} F(3x + y - x + z - x) = \frac{1}{3} F(x + y + z)$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 231223
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = F$$

Man beweise, dass dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a + c)(ac + b^2) \qquad (1)$$
$$ae^2 + cf^2 = (a + c)(ac + d^2) \qquad (2)$$

Ist β die Größe des Winkels $\angle ABC$, dann ist wegen $AB \parallel CD$ die Größe des Winkels $\angle BCD$ gleich $180° - \beta$.

Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke ABC und BCD, gilt dann

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad \text{und} \qquad (3)$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \beta) \qquad \text{also}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt durch Multiplizieren mit c bzw. a und anschließender Addition

$$af^2 + ce^2 = a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 \qquad \text{also}$$
$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2)$$

Ist α die Größe des Winkels $\angle DAB$, so ergibt sich analog

$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \qquad \text{und}$$
$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

woraus folgt

$$ae^2 + cf^2 = ac^2 + ad^2 + ca^2 + cd^2 \qquad \text{also}$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2)$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 231224
Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

Wenn $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist, so muss dann n jedenfalls gerade sein, da für ein ungerades n

$$2^n + 5 = 4^{\frac{n-1}{2}}\, 2 + 5 \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2 \equiv \pm 2 \mod 5$$

gelten würde, d.h., $2^n + 5$ wäre dann ein quadratischer Nichtrest mod 5, Widerspruch!
Für ein gerades n gilt aber $2^n = k^2$ mit $k = 2^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{N}$, d.h., 2^n ist selbst eine Quadratzahl. Wir müssen also nur noch die Gleichung

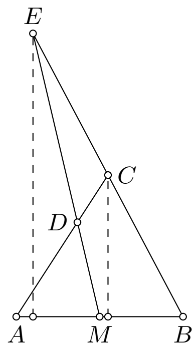
$$k^2 + 5 = \ell^2$$

in positiven ganzen Zahlen k,ℓ lösen. Aus $(\ell - k)(\ell + k) = 5$ folgt aber sofort $\ell - k = 1$, $\ell + k = 5$ und damit $k = 2$, $\ell = 3$. Wegen $2^n = k^2 = 2^2$ ist also $n = 2$ dann eine Lösung der Aufgabe und auch die einzige.

Aufgabe gelöst von weird

9.25.3 III. Runde 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231231
In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, dass sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und dass dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzung das Verhältnis $AD : DC$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!



Aus der Voraussetzung über die Flächeninhalte der Dreiecke AMD und CED folgt durch Addition des Flächeninhalts des Vierecks $MBCD$ zu diesen Dreiecksflächen, dass die Dreiecke ABC und MBE gleichen Flächeninhalt haben.
Wegen $AB = 2MB$ hat folglich C halb so großen Abstand von AB wie E. Nach dem Strahlensatz (angewandt auf die Geraden durch B und A bzw. durch B und E sowie die zueinander parallelen Lote von E, C auf AB) folgt $BC = \frac{1}{2}BE$.
Also sind AC und EM Seitenhalbierende im Dreieck ABE, und für ihren Schnittpunkt D folgt

$$AD : DC = 2 : 1$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 231232
Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c und die Länge seiner Raumdiagonale sei d. Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3} \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Da a, b, c und $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung (1) gezeigt, wenn man

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

bewiesen hat. Hierfür genügt es,

$$a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \qquad (3)$$

zu zeigen, und diese Ungleichung gilt, da sie sich aus der wahren Ungleichung

$$(a^2b^2 - a^2c^2)^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)^2 - (a^2b^2 - b^2c^2)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

ergibt.
Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) ist der Reihe nach äquivalent mit der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2), (3), (4), diese mit $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$, was wegen $a, b, c > 0$ genau für $a = b = c$ gilt.
Also gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn der Quader ein Würfel ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 231233A
Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

d.h. an ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

Eine Folge positiver rationaler Zahlen a_i erfüllt genau dann (1) und (2), wenn die Folge der Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ eine arithmetische Folge positiver rationaler Zahlen mit einer von 0 verschiedenen Differenz ist.
Nachweis:
Die Folge ist genau arithmetische Folge, wenn für jedes $n \geq 2$ die Differenz $b_n - b_{n-1}$ gleich der Differenz $b_{n-1} - b_n$ ist. Diese Gleichheit ist äquivalent mit

$$b_n = \frac{1}{2}(b_{b-1} + b_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{a_n}$$

Aus dieser Feststellung ergibt sich:
a) Da es arithmetische Folgen positiver rationaler Zahlen b_i mit einer von 0 verschiedenen Differenz gibt, z.B. $b_n = n$ $(n = 1,2,3,...)$, gibt es auch Folgen positiver rationaler Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und 82), z.B. $a_n = \frac{1}{n}$.

b) Gäbe es eine arithmetische Folge von Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ mit von 0 verschiedener Differenz d, für die alle a_i positive ganze Zahlen wären, so folgte $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ $(n = 1,2,3,...)$. Im Fall $d > 0$ ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 + \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{a_1} \right)$$

wäre $(n-1)d > 1 - \frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} > 1$, was für positive ganze Zahlen a_n nicht möglich ist.

Im Fall $d < 0$, ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 - \frac{1}{d \cdot a_1}$$

wäre $(n-1)d < -\frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} < 0$, was ebenfalls für positive (ganze) Zahlen a_n nicht möglich ist.
Also gibt es keine Folge positiver ganzer Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2).

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 231233B
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so dass die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne dass B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten Zug nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten).
Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück.
Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat.

B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie:
Er nimmt im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind, im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt, falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

a) Es sind genau die beiden folgenden Fälle möglich:

1. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2), (3{,}4), ..., (19{,}20)$ befindet sich das richtige Paar.
In diesem Fall hat B entweder nach höchstens 9 Zügen das Paar mit den richtigen Karten genommen, oder er kann aus den Antworten "Null" auf die ersten 9 Züge erkennen, dass (19,20) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 10. Zug und hat damit den Gewinn erzielt.

2. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2), (3{,}4), ..., (19{,}20)$ befinden sich genau zwei paare, in denen jeweils eine Karten richtig ist.
In diesem Fall weiß B spätestens nach dem 9. Zug, welche Paare dies sind.
Es seien die Paare $(a_1{,}a_2)$ und $(a_3{,}a_4)$ (etwa mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$). Dabei sind genau die in der folgenden Tabelle angegebenen vier Fälle möglich (die Angabe W unter a_i bedeutet, dass a_i eine der richtigen Karten ist; die Angabe F, dass a_i keine der richtigen Karten ist):

Fall	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1.	W	F	W	F
2.2.	W	F	F	W
2.3.	F	W	W	F
2.4.	F	W	F	W

Jetzt nimmt B im 10. Zug die Karten (a_1, a_3).
Im Fall 2.1. hat er damit die richtigen Karten genommen und das Spiel gewonnen.
Im Fall 2.4. erfährt er mit der Antwort "Null" auf den 10. Zug, dass (a_2, a_4) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 11. Zug und gewinnt damit.
In den Fällen 2.2. und 2.3., die durch die Antwort "Eins" auf den 10. Zug charakterisiert ist, nimmt B im 11. Zug die Karten (a_1, a_4). Lag der Fall 2.2. vor, so hat B damit gewonnen. Lag aber der Fall 2.3. vor, so erfährt B dies in der Antwort "Null" auf den 11. Zug. Er nimmt im 12. Zug (a_2, a_3) und gewinnt damit.
Durch die angegebene Strategie erzwingt B also den Gewinn.

b) Für jedes Paar (z_1, z_2) aus zwei verschiedenen der Zahlen $1, ..., 20$ gilt:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl z_1 eine der beiden richtigen Zahlen ist, beträgt $P_1 = \frac{2}{20}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann z_2 die andere richtige Zahl ist, beträgt $P_2 = \frac{1}{19}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (z_1, z_2) das richtige Paar ist, $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{190}$.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den Paaren $(1{,}2), ..., (19{,}20)$ das richtige befindet (1. Fall): $10 \cdot \frac{1}{190} = \frac{1}{19}$.

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fall 2 eintritt $1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$. Die vier Fälle 2.1. bis 2.4. haben einander gleiche Wahrscheinlichkeit. B hat genau dann nach 11 Zügen den Gewinn noch nicht erreicht, wenn der Fall 2.3. vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt folglich $\frac{1}{4} \cdot \frac{18}{19} = \frac{9}{38}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass B den Gewinn spätestens nach 11 Zügen erreicht hat $1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38} \approx 0.763$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 231234
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen mit $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

Aus (2) folgt: $\sin^2 y = \cos^2 x$ bzw.

$$\sin y = \pm \cos x \qquad (3)$$

aber auch

$$\cos y = \pm \sin x \qquad (4)$$

wobei die beiden $\pm$-Symbole nicht notwendigerweise miteinander korrespondieren. Das in (1) eingesetzt:

$$\pm 3 \sin x \sin x = \pm \cos x \cos x$$

Die beiden $\pm$-Symbole können gleich oder entgegengesetzt sein, so dass allgemein gelten muss:

$$\pm 3 \sin^2 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$(1 \pm 3) \sin^2 x = 1$$

Hier kommt allerdings nur das + in Frage, weil sonst $\sin x$ imaginär würde. Daher gilt:

$$4 \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

Aus (4) folgt außerdem

$$\cos y = \pm \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge für x lautet $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$, die für y lautet $\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$. Teilt man Gleichung (1) durch die Kosinus-Terme, so gilt

$$3 \tan x = \tan y$$

Der Tangens von x und der Tangens von y müssen also das gleiche Vorzeichen haben, so dass nicht jedes Element der Lösungsmenge von x mit jedem aus der Menge für y kombinierbar ist. Die Lösungspaare lauten daher: $(\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{1}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 231235
Man ermittle alle Paare $(a;b)$ von Primzahlen a und b für die gilt:

$$3a^2 + a = b^2 + b$$

Wir halten zunächst fest, dass gilt

$$2a^2 = b^2 + b - a^2 - a = (b-a)(b+a+1) \quad (*)$$

und hier nicht $b - a = 1$ sein kann, da daraus wegen der Primzahleigenschaft von a und b sofort $a = 2$ und $b = 3$ folgen würde, was aber keine Lösung unserer Gleichung hier ist. Es kann aber auch nicht $a|b-a$ gelten, da aus $b = ka$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$ sofort $b = (k+1)a$ folgen würde, wieder im Widerspruch zur Primalität von b. Es muss daher $b - a = 2$, d.h., $b = a + 2$ sein. Einsetzen in (*) führt dann zunächst auf

$$2a^2 = 2(2a+3)$$

und nach einer einfachen Umformung weiter auf

$$(a-1)^2 = 4$$

Wegen $a > 1$ muss also dann $a = 3$ und damit $b = a + 2 = 5$ gelten, was dann tatsächlich als einziges Paar von Primzahlen die Aufgabe hier löst.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 231236
Es sei $\angle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$.
Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedes mal, wenn er auf einen der Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen.
Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, ...$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren).
Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).
Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen,

- ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, ...$ gibt,
- ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, ...$ einen Punkt P_k derart gibt, dass $SP_k \leq SP_i$ für alle $i = 1, 2, 3, ...$ gilt und
- durch wie viele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, dass der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $SP_{m-1} = SP_m$ durchläuft, so dass also das Wegstück $P_0...P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m...P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle P_0SQ$.

Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfasst:
I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α
(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$ erreicht.
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, ..., m-1$ die Ungleichung $SP_k < SP_{k-1}$ erfüllen, dass dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $SP_m \geq SP_{m-1}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, ..., n$ sogar $SP_k > SP_{k-1}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es
(C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n
Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, dass für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $SP_m = SP_{m-1}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

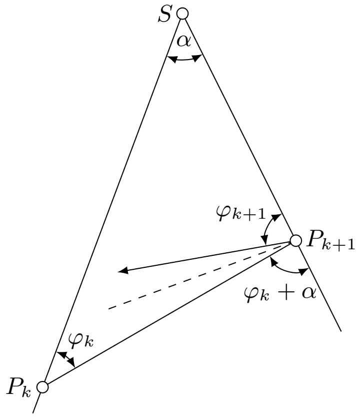
I. Die Größe des Winkels, den der von P_k ausgehende Lichtstrahl mit der von $P - k$ nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_k genannt.
Dieser von P_k ausgehende Lichtstrahl erreicht genau dann den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$, wenn $\varphi_k < 180° - \alpha$ gilt. Ist dies der Fall, so hat derjenige Strahl, den die von P_{k+1} nach P_k führende Halbgerade mit der Verlängerung von SP_{k+1} über P_{k+1} hinaus bildet, nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\varphi_k + \alpha$. (Abbildung)

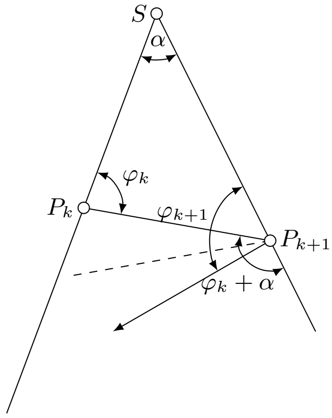
Nach dem Reflexionsgesetz ist also auch $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \alpha$.
Für alle diejenigen k, für die P_k existiert, folgt somit durch vollständige Induktion $\varphi_k = \varphi_0 + k\alpha$.

Wenn daher zu gegebenem (α und) φ_0 eine Zahl k die Eigenschaft $\varphi_0 + k \cdot \alpha < 180°$ hat, dann gilt (entweder $k = 0$ oder, falls $k \geq 1$ ist)

$$\varphi_{k-1} = \varphi_0 + (k-1) \cdot \alpha < 180° - \alpha$$

d.h., dann existiert ein Punkt P_k. Wenn aber $\varphi_0 + k \cdot \alpha \geq 180°$ ist, dann gilt ($k \geq 1$ und) $\varphi_{k-1} \geq 180° - \alpha$; d.h., dann existiert kein Punkt P_k mit diesem k.
Für jedes φ_0 gibt es nun genau eine natürliche Zahl n so, dass $\varphi_0 + n \cdot \alpha < 180°$, aber $\varphi_0 + (n+1) \cdot \alpha \geq 180°$ gilt. Genau diese Zahl hat folglich die in (A) behauptete Eigenschaft.





Für jedes φ_0 und jede natürliche Zahl $k \geq 1$, für die P_k existiert, sowie für jede der drei Relationen in

$$SP_k \gtreqqless SP_{k-1}$$

gilt weiter, dass die betreffende Relation infolge des Satzes über Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel äquivalent ist mit der entsprechenden Relation in

$$\varphi_{k-1} \gtreqqless 180° - (\varphi_{k-1} + \alpha \qquad ; \qquad \varphi_{k-1} \gtreqqless 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\varphi_0 + (k+1) \cdot \alpha \gtreqqless 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad \varphi_0 + k \cdot \alpha \gtreqqless 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Zu jedem φ_0 gibt es sodann genau eine ganze Zahl g so, dass

$$\varphi_0 + (g-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} \qquad \text{aber} \qquad \varphi_0 + g \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2}$$

gilt. Genau die Zahl $m \max(1; g)$ hat dann die in (B) behauptete Eigenschaft (insbesondere folgt für $m > 1$ die Existenz von $P_0, ..., P_{m-1}$ wegen $\alpha < 180°$ aus $\varphi_0 + (m-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} < 180°$ und (A)).

II. Eine Winkelgröße φ_0 mit $0° < \varphi 0 < 180°$ hat genau dann die in II. zu untersuchende Eigenschaft, wenn diejenige; durch α und φ_0 eindeutig bestimmte, Zahl m, die die Gleichung

$$\varphi_0 + m \cdot \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt, eine natürliche Zahl $m \geq 1$ ist. Zu gegebenem α existieren daher genau so viele derartige Winkelgrößen φ_0, wir es natürliche Zahlen $m \geq 1$ mit

$$0° < 90° + \frac{\alpha}{2} - m \cdot \alpha < 180°$$

gibt. Diese Bedingung für m ist äquivalent mit

$$\frac{\alpha}{2} - 90° < m \cdot \alpha < \frac{\alpha}{2} + 90°$$

also, da die linke Ungleichung wegen $\alpha < 180°$ für alle natürlichen Zahlen gilt, mit

$$m < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha}$$

Wegen $\alpha < 180°$ ist stets $\frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} > 1$, also gibt es stets mindestens eine natürlichen Zahl $m \geq 1$, die diese Bedingung erfüllt.

(C) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $\frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq 2$ gilt. Das trifft genau für alle $\alpha \geq 60°$ zu.

(D) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und $m = 2$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $2 < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq 3$ gilt. Das trifft genau für alle α mit $36° \leq \alpha < 60°$ zu.

(E) Die Bedingung wird genau dann von den N Zahlen $m = 1, m = 2, ..., m = N$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $N < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq N + 1$ gilt.
Das trifft genau für alle α mit

$$\frac{180°}{2N+1} \leq \alpha < \frac{180°}{2N-1}$$

zu.

Übernommen aus [5]

9.25.4 IV. Runde 1983, Klasse 12

Aufgabe 1 - 231241
Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und gilt:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Sei g die positive Lösung der Gleichung $x^2+x-1 = 0$, also $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (Das ist das Reziprok des goldenen Schnittes $g = 1/\phi = \phi - 1$).

Wir werden zeigen, dass die Folge (x_n) monoton fallend und durch g nach unten beschränkt, also konvergent ist. Danach werden wir zeigen, dass g der Grenzwert dieser Folge ist.

Lemma 1. Für $x > g$ gilt $x^2 + x - 1 > 0$.

Beweis: g ist positiv, die zweite Nullstelle der Gleichung ist dagegen negativ ($\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$), daher ist g die größere der beiden Nullstellen und rechts der größeren Nullstelle nimmt eine quadratische Funktion mit positivem Vorfaktor vor x^2 nur positive Werte an.

Lemma 2. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} > g$.

Beweis: Sei $d := x - g > 0$. Dann gilt $3gd + 4d^2 > 0$ äquivalente Umformungen ergeben

$$4g^2 + 8gd + 4d^2 + 1 > 4g^2 + 5gd + 1 = 4g^2 + 5gd + (g^2 + g)$$

(nach Def. von g) und weiter

$$4(g + d)^2 + 1 > 5g^2 + 5gd + g = g(5g + 5d + 1)$$

bzw. $4x^2 + 1 > g(5x + 1)$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Lemma 3. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} < x$.

Beweis: Nach Lemma 1 gilt $x^2 + x > 1$. Addition von $4x^2$ ergibt $5x^2 + x = x(5x + 1) > 4x^2 + 1$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Mit Lemma 2 und 3 können wir nun induktiv beweisen, dass $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$ für alle natürlichen $n \geq 1$ gilt.

Induktionsanfang: $x_1 = 1 = \frac{3-1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = g$.

Induktionsschritt: Es gelte $x_n > g$. Nach Lemma 2 und 3 gilt nun $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$.

Damit ist gezeigt, dass (x_n) streng monoton fällt und durch $g > 0$ nach unten beschränkt ist. (x_n) ist daher konvergent. Sei $x > 0$ der Grenzwert von (x_n), dann muss für x die Gleichung $x = \frac{4x^2+1}{5x+1}$ gelten(*). Multiplikation mit $5x + 1$ ergibt nach Zusammenfassung: $x^2 + x - 1 = 0$. x ist also die positive Nullstelle von $x^2 + x - 1$ und das ist gerade g.

(*) Wenn $x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1}$ für alle n gilt und (x_n) gegen x konvergiert, dann gilt auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 4x_n^2 + 1}{\lim_{n\to\infty} 5x_n + 1} = \frac{4(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + 1}{5 \lim_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{4x^2 + 1}{5x + 1}$$

Aufgabe gelöst von Kitaktus

2. Lösung:
Wir benutzen hier ganz wesentlich die einfache Umformung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + x_n - 1}{5x_n + 1}$$

aus der man zunächst sieht, dass wenn die Folge (x_n) konvergiert, ihr Grenzwert dann nur die positive Nullstelle $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ von $x^2 + x - 1 =$ sein kann. Von daher liegt es nahe, das Verhalten der Differenzfolge

$$d_n = x_n - g \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

zu betrachten, für welche dann die Rekursion

$$d_1 = 1 - g \approx 0.38, \quad d_{n+1} = d_n - \frac{(x_n^2 - g^2) + (x_n - g)}{5(x_n - g) + 5g + 1} = d_n \left(1 - \frac{d_n + 2g + 1}{5d_n + 5g + 1}\right)$$

gelten muss. Daraus kann man aber induktiv sofort ersehen, dass die Folge (d_n) nur positive Glieder enthält und sie daher mithilfe der Grobabschätzung

$$0 < \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{4d_n + 3g}{5d_n + 5g + 1} < \frac{4d_n + 4g}{5d_n + 5g} = \frac{4}{5}$$

eine Nullfolge sein muss, womit also dann auch die ursprüngliche Folge (x_n) tatsächlich gegen g konvergiert.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 231242
a) Man beweise, dass es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:
(1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.
(2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.
(3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.
(4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M.
b) Man ermittle eine Menge M, die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat.
Dass die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

a) Wähle $M = \{1,2,4,8,16,32,64,96,100\}$.
b) Das in a) angegebene M hat bereits die kleinstmögliche Anzahl an Elementen. Beweis: Betrachte eine Menge M, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, und bezeichne ihre Elemente der Größe nach aufsteigend mit a_1, a_2,....

a_6 ist maximal 32, also gilt $a_7 < 100$, folglich muss M mindestens 8 Elemente haben. Ein M mit 9 Elementen haben wir bereits in der a) angegeben, also bleibt zu klären, ob M genau 8 Elemente haben kann. Dafür müsste folgendes gelten:

$$a_7 \geq 50 \geq a_6 \geq 25 \geq a_5 \geq 13 \geq a_4 \geq 7 \geq a_3 \geq 4$$

Daraus und mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ folgt $a_3 = 4$, $a_4 = 8$,...,$a_7 = 64$, woraus sich aber die 100 noch nicht erzeugen lässt, also benötigt man noch ein a_8, bevor man $a_9 = 100$ erreichen kann. Die kleinstmögliche Anzahl der Elemente ist also neun.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 3 - 231243
Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:
T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$.
Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, dass die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.
Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:
P: "Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln."
S: "Das wusste ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben."
P: "Jetzt kann ich das Tripel ermitteln."
D: "Ich auch."
S: "Ich jetzt auch."
Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist!
Ist dies der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

Aufgrund der Bedingungen $x + y + z \leq 10$ und $1 \leq x \leq y \leq z$ existiert für $z_{max} = 8$ nur das Tripel $(z = 8 : x = 1, y = 1)$. Mit abnehmenden z addieren die in der Tabelle gezeigten Kombinationen hinzu.

Datentabelle

z	y	x	y-x	z+y+x	zyx
8	1	1	0	10	8
7	1	1	0	9	7
7	2	1	1	10	14
6	1	1	0	8	6
6	2	1	1	9	12
6	2	2	0	10	24
6	3	1	2	10	18
5	1	1	0	7	5
5	2	1	1	8	10
5	2	2	0	9	20
5	3	1	2	9	15
5	3	2	1	10	30
5	4	1	3	10	20
4	1	1	0	6	4
4	2	1	1	7	8
4	2	2	0	8	16
4	3	1	2	8	12
4	3	2	1	9	24
4	3	3	0	10	36
4	4	1	3	9	16
4	4	2	2	10	32
3	1	1	0	5	3
3	2	1	1	6	6
3	2	2	0	7	12
3	3	1	2	7	9
3	3	2	1	8	18
3	3	3	0	9	27
2	1	1	0	4	2
2	2	1	1	5	4
2	2	2	0	6	8
1	1	1	0	3	1

Der Mathematiker D kann von Mathematiker T für $d = y - x$ eine der Differenzen {0,1,2,3} genannt bekommen,
Mathematiker S mit $s = x + y + z$ eine der Summen {3,4,5,6,7,8,9,10}
und Mathematiker P mit $p = xyz$ eins der Produkte {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,24,27,30,32,36}.

Wenn P das Tripel nicht eindeutig ermitteln kann, muss der Zahlenwert von $p(xyz)$ mehrfach vorkommen und das gilt für die Produkte {4,6,8,12,18,20,24}. Wenn S das schon vor der 1. Aussage von P weiß, muss S dieses an $s(xyz)$ erkannt haben können. Da $s = 5$ die einzige Zahl ist, die unter denen, die mehrfach vorhandene Produkte $p(xyz)$ haben, nur einmal vorkommt und mit $s = 6$ gemeinsam ein $p = 4$ hat, hat S von T die Zahl $s = 6$ erhalten.

So weiß S bereits vor der 1. Aussage von P, dass P von T ein mehrmals vorhandenes Produkt $p =$ 4, 6, *oder* 8 genannt bekommen hat und damit das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig bestimmen kann.

Nach der 1. Aussage von S weiß P mit dem von T erhaltenen $p = 4$ dass S von T $s = 6$ erhalten haben muss da S mit $s = 5$ die Aussage nicht hätte treffen können (für $s = 5$ wäre auch ein für P eindeutiges $p = 3$ möglich gewesen). So ist das Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ damit für P ermittelbar.

Für Mathematiker D ergibt sich daraus, von T ein $d = 0$ erhalten zu haben. Nun weiß D bedingt durch die drei Aussagen von P und S dass die Häufigkeit n der gesuchten Summe $2 \leq n(s) \leq 3$ sein muss, denn unter abweichenden Bedingungen wären die drei Aussagen so nicht richtig gewesen.

Es bleiben damit für D nur die Summen $s = 5$, $s = 6$ und mit $d = 0$ ist $s = 6$ bestimmt. Mit $s = 6$ sind jedoch zwei Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ mit $p = 4$ und $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ mit $p = 8$ möglich. Da die Häufigkeit von $p = 8$ größer zwei ist und somit das Tripel für P nicht ermittelbar wäre kann D das ausschließen und das Tripel ermitteln.

Auch Mathematiker S kann von seinen drei Möglichkeiten $p = 4, 6, 8$, das Produkt $p = 8$ mit der gleichen Überlegung ausschließen. Und D muss ein $d = 0$ erhalten haben, denn mit einem $d = 1$ kann D unter Erfüllung der o.g. Bedingungen / Erläuterungen kein Tripel bestimmen. Damit kann nun auch S das Tripel ermitteln.

Aufgabe gelöst von OlgaBarati

Aufgabe 4 - 231244
Seien $P_1, P_2, ..., P_n$ verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{ij} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{ij} P_iP_J \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

Seien $R := \max_{ij} P_iP_j$ und $r := \min_{ij} P_iP_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ der größte bzw. der kleinste Abstand der unter den n Punkten vorkommt.

Wir zeigen zunächst, dass es einen Punkt M in der Ebene gibt, so dass die Punkte P_1,$P_2, \ldots, P_n$ alle im Inneren oder auf dem Rand des Kreises um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ liegen.

Dazu betrachten wir irgendeinen Kreis k, der P_1,$P_2, \ldots, P_n$ enthält und finden dann schrittweise Kreise mit kleinerem Radius, die ebenfalls alle n Punkte enthalten.

1. Wenn keiner der n Punkte auf dem Rand von k liegt, so können wir den Radius von k weiter verkleinern, indem wir k am Mittelpunkt von k zentrisch stauchen bis einer der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ auf dem Rand des gestauchten Kreises liegt.

2. Wenn genau einer der n Punkte auf dem Rand von k liegt, dann erhalten wir durch eine geeignete Drehung von k um diesen Punkt einen neuen Kreis mit gleichem Radius, der mindestens zwei der n Punkte auf dem Rand und alle anderen im Inneren enthält.

3. Angenommen P_i und P_j sind zwei verschiedene Punkte, die auf dem Rand von k liegen und alle anderen Punkte liegen im Inneren von k. Falls P_iP_j ein Durchmesser von k ist, dann ist der Radius von k höchstens $\frac{1}{2}P_iP_j \leq \frac{1}{2}R < \frac{1}{\sqrt{3}}R$ und wir sind fertig.

Wenn P_iP_j kürzer ist als der Durchmesser von k, dann können wir den Mittelpunkt O von k so lange in Richtung des Mittelpunkts von P_iP_j verschieben, bis der Kreis k' um den verschobenen Mittelpunkt O' mit Radius $O'P_i = O'P_j$ einen weiteren der n Punkte auf dem Rand enthält oder aber P_iP_j ein Durchmesser von k' ist. In letzterem Fall sind wir bereits fertig.

4. Angenommen mindestens drei Punkte liegen auf dem Rand von k und die restlichen Punkte im Inneren von k.

Falls k einen Durchmesser hat, so dass alle Punkte, die auf dem Rand von k liegen, sich auf der gleichen Seite dieses Durchmessers befinden, dann können wir durch eine kleine Verschiebung von k einen Kreis erhalten, der alle Punkte $P_1, \dots, P_n$ im Inneren enthält. Diesen können wir gemäß 1. weiter verkleinern.

Falls k keinen solchen Durchmesser hat, dann gibt es drei Punkte auf dem Rand von k, die ein spitzwinkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck bilden. O.B.d.A. seien P_1,P_2,P_3 diese drei Punkte. Seien $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ die Innenwinkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Es gilt dann $60° \leq \alpha \leq 90°$. Sei o.B.d.A. P_1P_2 die Seite von $P_1P_2P_3$, die dem Winkel α gegenüberliegt. Der Radius von k ist gleich dem Umkreisradius ρ von $P_1P_2P_3$ und für diesen gilt nach dem erweiterten Sinussatz

$$\rho = \frac{P_1P_2}{2\sin\alpha} \leq \frac{R}{2\sin 60°} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Wir können diese vier Schritte nur endlich oft iterieren, denn bei jedem Durchlauf von Schritt 3 bzw. Schritt 4, bei dem wir noch nicht unseren gesuchten Kreis mit Radius $\leq \frac{1}{\sqrt{3}}R$ gefunden haben, wird der Radius von k im Anschluss an Schritt 4 echt kleiner als der Umkreisradius von einem Dreieck $P_kP_lP_m$ $(1 \leq k \leq l \leq m \leq n)$ und es gibt nur endlich viele solcher Dreiecke.

Sei jetzt also M ein Punkt in der Ebene, so dass $P_1, \dots, P_n$ alle im Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ um M liegen. Wir zeichnen um jeden Punkt P_i einen kleinen Kreis mit Radius $\frac{r}{2}$. Per Definition von r können sich je zwei dieser n Kreise nicht im Inneren schneiden. Die Gesamtfläche, die diese Kreise einnehmen ist daher genau $\frac{1}{4}n\pi r^2$.
Der Kreis um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}$ enthält jeden dieser n kleinen Kreise. Daher gilt für dessen Flächeninhalt

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n\pi r^2$$

(Da $n \geq 2$ gilt, muss dies eine strikte Ungleichung sein, sonst könnte man nämlich den großen Kreis vollständig in n kleinere Kreise zerlegen.) Aus obiger Ungleichung folgt, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n,$$

also

$$\frac{R}{r} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1),$$

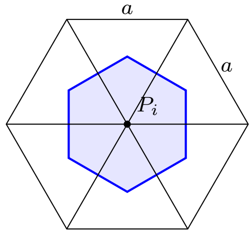
was offenbar äquivalent ist zur Behauptung.

Aufgabe gelöst von Nuramon

2. Lösung:
Man kann die Ungleichung wie folgt umformen:

$$\frac{\max_{ij} P_iP_j}{\min_{ij} P_iP_j} \geq c_n$$

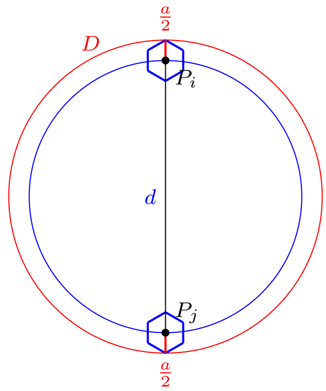
wobei c_n ein von n abhängiger Schwellenwert ist. Es ist also das kleinstmögliche Verhältnis zwischen maximalem und minimalem Abstand zu finden. Nach oben ist das Verhältnis natürlich offen, da der minimale Abstand beliebig klein oder der maximale Abstand bei (mindestens) einem sehr weit entfernten Punkt beliebig groß werden kann. Gibt man also den minimalen Abstand vor, so besteht die Aufgabe quasi darin, alle Punkte möglichst dicht zu scharen, ohne den vorgegebenen Mindestabstand zu unterschreiten. Zwei Schlussfolgerungen drängen sich auf: 1. Soll ein gewisser vorgegebener Mindestabstand eingehalten werden, so entsteht zwangsläufig ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken. Dichter als das geht nicht. 2. Wenn die Punkte in einem Kreis angeordnet werden, ergibt sich mit dem Durchmesser des Kreises der geringstmögliche Maximalabstand zwischen zwei Punkten. Ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken in eine Kreisform zu pressen klingt nach Quadratur des Kreises, doch es reicht für eine sinnvolle Abschätzung.



Der Minimalabstand zweier Punkte sei a, der maximale Abstand zwischen zwei Punkten sei d_{max}. Wenn man nun Punkte mit dieser sechseckigen Mindestabstandszone (blau dargestellt in obigem Bild) so eng wie möglich schart, kommt ein Wabenmuster heraus. Die Fläche eines solchen Sechsecks ist

$$A_S = 6 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} a \tfrac{\sqrt{3}}{2} a = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Bei sehr vielen Sechsecken könnte man sie recht gut in einem Kreis unterbringen, aber es werden am Rand immer Lücken bleiben. Wir versuchen daher nur eine Abschätzung:



In dieser Grafik ist der äußere Kreis nicht der tatsächliche Kreis, der alle Punkte inklusive der blauen Sechsecke umrundet, sondern ein Kreis, der flächengleich ist zu der Anzahl n an kleinen blauen Sechsecken, also

$$A_K = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 n$$

Sein Durchmesser sei D, so dass

$$D = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} n}$$

ist. Ein Kreis, der alle Punkte tatsächlich umschließt, muss größer sein als dieser, denn selbst wenn die Sechsecke im Inneren spaltfrei liegen, müssen sich an den Rändern zum Kreis hin Lücken ergeben, wie schon gesagt. Das Maximale, um das sich der Mittelpunkt eines solchen kleinen Sechsecks vom äußeren Kreis mit dem Durchmesser D entfernt liegen könnte, ist $\frac{1}{2}a$, denn wenn er weiter entfernt wäre, gäbe es andere Punkte, die direkt am Kreis anliegen müssten. Wenn es rundum einen Abstand gäbe, wäre der Kreis nicht minimal und schon gar nicht flächengleich. Damit ist der Durchmesser des kleineren Kreises d gleich dem Abstand zwischen zwei sich gegenüber liegenden Sechsecken, die im abgebildeten Fall den Kreis wie dargestellt von innen mit einer Spitze berühren, und es ist $d \geq D - a$ (sie könnten ja auch flach anliegen). Diese Kreise sind nur hypothetisch, es wird eine doppelte Abschätzung durch bewusst unerreichbar klein gewählte Annahmen vorgenommen. Da außerdem $d_{max} \geq d$ gelten muss, folgt

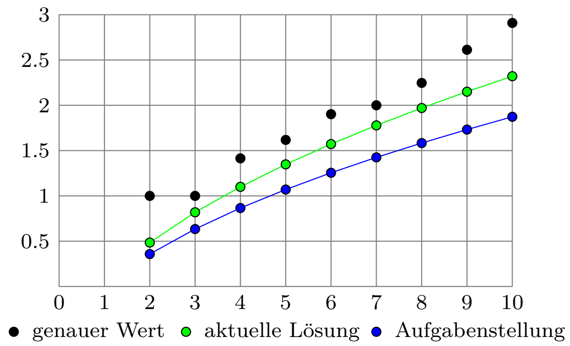
$$d_{max} \geq d \geq D - a = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} n} - a$$

$$d_{max} \geq a\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} n} - 1\right)$$

Daher gilt

$$\max_{ij} P_iP_j \geq \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\, n}{\pi}} - 1\right) \min_{ij} P_iP_j$$

Dies ist eine schärfere Ungleichung als in der Aufgabenstellung gefordert. Hier ein Vergleich für die ersten n:



Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 231245
Man ermittle alle Funktionen f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x_1+x_2}) = f(\frac{1}{x_1}) + f(\frac{1}{x_2})$.
(2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(3) Es gilt $f(1) = 1$.

Es sei $r \neq 0$ eine beliebige von Null verschiedene reelle Zahl. Setzen wir $x_1 = x_2 = \frac{1}{r}$, so sind x_1 und x_2 wohldefiniert und (sowie auch $x_1 + x_2$ von Null verschieden, sodass wir aus (1) die Beziehung

$$f\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) = 2f(r)$$

erhalten. Setzen wir dagegen $x_1 = x_2 = \frac{r}{2}$, so sind wieder die Voraussetzungen für (2) erfüllt, womit wir

$$r \cdot f(r) = \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) \cdot f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot f\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} \cdot (2f(r))^2 = (r \cdot f(r))^2$$

erhalten, woraus $r \cdot f(r) \in \{0; 1\}$ folgt, da dies die einzigen reellen Zahlen sind, die gleich ihrem Quadrat sind.

Wäre für ein $r \neq 0$ das Produkt $r \cdot f(r)$ gleich 0, so also auch $f(r)$. Dann kann aber r wegen (3) einerseits nicht 1 sein, sodass wir $x_1 = r$ und $x_2 = 1 - r$ wählen und dies in (2) einsetzen können. Wegen $f(x_1) = f(r) = 0$ folgt damit dann aber auch

$$f(1) = f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$$

was ein Widerspruch zu (3) ist.

Also muss für alle $r \neq 0$ die Gleichung $r \cdot f(r) = 1$ bzw. $f(r) = \frac{1}{r}$ gelten. Tatsächlich erfüllt diese Funktion auch alle drei geforderten Eigenschaften, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 231246A
Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, dass jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecken hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.
Man beweise aus dieser Voraussetzung, dass es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Inneren oder auf seinem Rand enthält.
Anmerkung:
In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfahre man ebenso.

Für $0 \leq n \leq 3$ ist die Aussage trivial, da dann alle Punkte in einer Ebene und somit in einer Dreiecksfläche liegen (entarteter Tetraeder mit Volumen 0). Sei nun $n \geq 4$. Nach Voraussetzung gibt es einen nicht-entarteten Tetraeder mit Eckpunkten aus der gegebenen Punktmenge.

Betrachten wir nun von allen solchen Tetraedern einen mit dem größten Volumen (so ein maximaler Tetraeder existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Tetraeder).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Tetraeders mit P_1, P_2, P_3, P_4. Da dessen Volumen maximal ist, müssen alle anderen Punkte P_i $(i > 4)$ so liegen, dass die Volumina der Tetraeder mit den Eckpunkten P_a,P_b,P_c und P_i (für alle a,b,$c \in \{1,2,3,4\}$ paarweise verschieden und alle $i > 4$) nicht größer sind als das Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$.

Da das Volumen eines Tetraeders gleich "Grundfläche mal Höhe durch 3" ist, liegen also alle Punkte in einem Gebiet T (oder auf dessen Rand), welches begrenzt wird durch die Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ liegen und den der jeweiligen Seitenfläche gegenüberliegenden Eckpunkt enthalten.
Beachte, dass man die Ebenen durch den Spiegelpunkt dieses Eckpunktes an der jeweiligen Fläche nicht zu betrachten braucht, da das soeben beschriebene Gebiet T bereits geschlossen ist. T stellt nämlich einen nicht-entarteten Tetraeder dar. Dessen Seitenflächen sind parallel zu denen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$, und überdies ähnlich zu ihnen mit drei mal so großen Seitenlängen, was wir im Folgenden zeigen wollen.

Betrachten wir als Beispiel (die anderen Seiten sind dann analog) die Schnittlinie g, die durch den Schnitt der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 mit der Ebene parallel zu $P_1P_2P_4$ durch P_3 entsteht. Die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ schneiden g in den Punkten A bzw. B.
Nun kann man sehen, dass das Parallelverschieben der Strecke P_1P_4 entlang der Strecke P_1P_3 einen dieser Schnittpunkte A oder B auf g ergibt; der andere Schnittpunkt dann entsprechend durch Parallelverschieben der Strecke P_2P_4 entlang der Strecke P_2P_3. Die Strecken P_1P_4 und P_2P_4 schneiden sich im Punkt P_4 und nach dem Verschieben im Punkt P_3. Da A und B in der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 liegen und P_1, P_2 in der Ebene $P_1P_2P_3$, folgt, dass der Abstand zwischen A und B genau der Abstand zwischen P_1 und P_2 ist.

Nun müssen die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ noch zusätzlich zum Punkt P_2 bzw. P_1 parallelverschoben werden, was in der Ebene $P_1P_2P_3$ (und allen dazu parallelen Ebenen, insbesondere der durch P_4) einer Verschiebung um jeweils $|P_1P_2|$ entspricht. Die entsprechenden Schnittpunkte A', B' auf g haben dann also den Abstand $3\,|P_1P_2|$ voneinander.

Dies zeigt das oben behauptete, sodass das Volumen des Tetraeders T gleich $3^3 = 27$ mal dem Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ entspricht. Letzterer hat maximal das Volumen 1, womit dann die Behauptung der Aufgabenstellung folgt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6B - 231246B
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche $a_1, a_2, ..., a_k$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so dass

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1984 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k$ an.

Hier macht es Sinn, eine Aufteilung in 2er Potenzen vorzunehmen, da deren Quotienten wiederum einfach zu addieren sind.
Mit der fortwährenden Teilung von 1984 : 2 ergibt sich das Produkt von $2^6 \cdot 31 = 64 \cdot 31$. Die Multiplikation $32 + 64 \cdot 30 = 1952$ ergibt eine Summe der Quotienten $\frac{1}{32} + \sum_1^{30} \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$. Die Differenz von $1984 - 1952 = 32$ bildet mit der Aufteilung in $4 \cdot 8 = 32$ die Summe der Quotienten $\sum_1^4 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ und somit ist $k = 30+1+4 = 35$

$$\sum_1^{30} 64 + \sum_1^{1} 32 + \sum_1^{4} 8 = 1984$$

und

$$\sum_1^{30} \frac{1}{64} + \sum_1^{1} \frac{1}{32} + \sum_1^{4} \frac{1}{8} = 1$$

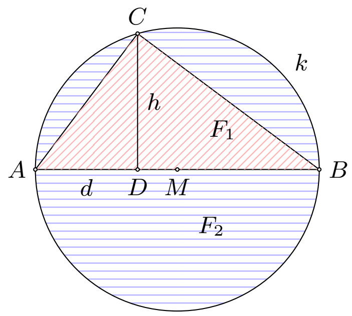
Aufgabe gelöst von OlgaBarati

9.26 XXIV. Olympiade 1984

9.26.1 I. Runde 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241211
Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1.

Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert!



Nach dem Satz des Thales ist die Hypotenuse des Dreiecks ABC ein Durchmesser von k. Ihre Länge sei d, die Länge der zugehörigen Dreieckshöhe sein h, der Flächeninhalt von k sei F_0. Dann gilt

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_0 - F_1}{F_1} = \frac{F_0}{F_1} - 1 = \frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\frac{dh}{2}} - 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{h} - 1$$

Ferner nimmt h alle positiven Werte $h \leq \frac{d}{2}$ an. Also nimmt $\frac{d}{h}$ alle Werte $\frac{d}{h} \geq 2$ an. Somit nimmt $\frac{F_2}{F_1}$ alle Werte $\frac{F_2}{F_1} \geq \frac{\pi}{2} \cdot 2 - 1 = \pi - 1$ an.

Der kleinste ganzzahlige Wert, den $F : 2 : F1$ annehmen kann, ist (wegen $2 < \pi - 1 < 3$) folglich der Wert 3.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 241212
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2y - \frac{6}{xy} &= 13 \\ xy + x^2y &= 6 \quad \text{erfüllen.} \end{aligned}$$

Es seien x und y reelle Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das geforderte Gleichungssystem erfüllen. Dann folgt:

Die Zahlen $a = xy$ und $b = x^2y$ erfüllen das Gleichungssystem

$$b - \frac{6}{a} = 13 \qquad (1)$$

$$a + b = 6 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (1) von (2), so folgt $a + \frac{6}{a} = -7$, also

$$a^2 + 7a + 6 = 0$$

Diese Gleichung hat nur $a_1 = -1$ und $a_2 = -6$ als Lösungen. Nach (2) gehören hierzu die Werte $b_1 = 7$ bzw. $b_2 = 12$. Aus $a = xy$ und $b = x^2y$ folgt $b = ax$, also, da man durch x ($\neq 0$) und durch a ($= xy \neq 0$) dividieren kann

$$x = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad y = \frac{a}{x}$$

Damit kommen als Lösungen des geforderten Gleichungssystems nur $x_1 = -7$, $y_1 = \frac{1}{7}$ sowie $x_2 = -2$, $y_2 = 3$ in Betracht, was die Probe bestätigt. Die angegebenen x_1, y_1 und x_2, y_2 sind die Lösungen des Gleichungssystems.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 241213
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $2x-3$, $5x-14$ und $\frac{2x-3}{5x-14}$ ganze Zahlen sind.

Wenn für eine reelle Zahl x die Zahlen

$$g = 2x-3 \quad ; \quad h = 5x-14 \quad \text{und} \quad k = \frac{2x-3}{5x-14} = \frac{g}{h} \tag{1,2,3}$$

ganze Zahlen sind, so folgt aus (1), (2)

$$5g = 10x-15 \quad ; \quad 2h = 10x-28$$

und daher

$$5h - 2h = 13$$

Berücksichtigt man hierin die aus (3) folgende Gleichung $g = hk$, so folgt

$$(5k-2)h = 13 \tag{4}$$

Somit ist $5k-2$ ein Teiler von 13, also eine der Zahlen 1, -1, 13, -13. Von diesen hat aber nur 13 die Form $5k-2$ mit ganzzahligem k, und damit folgt aus (4) weiter $h = 1$, nach (2) also $5x = h + 14 = 15$, $x = 3$.

Also kann nur $x = 3$ die geforderte Eigenschaft haben. In der Tat sind $2 \cdot 3 - 3 = 3$, $5 \cdot 3 - 14 = 1$ und $\frac{2\cdot 3-3}{5\cdot 3-14} = 3$ ganze Zahlen. Somit hat genau $x = 3$ die geforderte Eigenschaft.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 241214
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B u.s.w. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

Es gibt eine Strategie der gesuchten Art, z.B. die folgende:
B wählt als die ersten acht von ihm gespielten Karten alle diejenigen, auf denen nicht die Zahl 8 steht. (Die Reihenfolge dieser Karten wählt er beliebig.)

Ein Beweis, dass er durch diese Strategie den Gewinn erzwingt, ergibt sich folgendermaßen: Die Summe aller Zahlen im Spiel beträgt $2 \cdot (2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 108$. Beim Ausspielen der vorletzten Karte von B wird somit die Summe $108 - 8 - n = 100 - n$ erreicht, wobei n die Zahl auf der noch nicht ausgespielten Karte von A ist.

Wegen $n \geq 2$ ist diese Summe $100 - n \leq 98$. Daraus folgt einerseits, dass überhaupt das Spiel bis dahin noch nicht beendet ist; andererseits folgt, dass A als letzte Karte die mit der Zahl n ausspielen, die Summe 100 erreichen und damit verlieren muss. w.z.b.w

Übernommen von [5]

9.26.2 II. Runde 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241221
Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{a_n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt.
a) Berechnen Sie a_2 und a_3, und beweisen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt!
b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

a) Es gilt

$$a_2 = \frac{a_1^2+1}{a_1+1} = \frac{5}{3} \qquad ; \qquad a_3 = \frac{a_2^2+1}{a_2+1} = \frac{17}{12}$$

Ferner gilt:
(I) Es ist $a_1 = 2 > 1$.
(II) Wenn für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung $a : n > 1$ gilt, so folgt

$$a_n^2 > a_n \qquad ; \qquad a_n^2 + 1 > a_n + 1$$

und daraus, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ gilt

$$\frac{a_n^2+1}{a_n+1} > 1 \qquad \text{d.h.} \qquad a_{n+1} > 1$$

Mit (I) und (II) ist durch vollständige Induktion bewiesen, dass $a_n >$ für alle $n =$ 1,2,3,... gilt.

b) Für jedes $n =$ 1,2,3... gilt nach a) $1 < a_n$, also $a_n^2 + 1 < a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1)$. Hieraus folgt, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ ist

$$\frac{a_n^2+1}{a_n+1} < a_n \qquad \text{d.h.} \qquad a_{n+1} < a_n \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 241222
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy \qquad (1)$$
$$(x + y)^2 = 36 \qquad (2)$$

Wir substituieren $x + y = a$ und $xy = b$:

$$b^2 + a^2 - 2b - 6 = 9b$$

und

$$a^2 = 36$$

Die zweite in die erste Gleichung eingesetzt:

$$b^2 - 11b + 30 = 0$$

Mithilfe des Satzes von Vieta erraten wir $b_1 = 5$ und $b_2 = 6$, sowie von oben $a_1 = 6$ und $a_2 = -6$. Allgemein folgt für x und y:

$$y = \frac{b}{x}$$

$$x + \frac{b}{x} = a$$
$$x^2 - ax + b = 0$$
$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Wir müssen nun jedes a_i mit jedem b_i kombinieren, um alle Lösungen zu finden. a_1 und b_1:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

Lösungspaare: (5,1) und (1,5). a_1 und b_2:

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ und $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. a_2 und b_1:

$$x_{5,6} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2$$

Lösungspaare: $(-5,-1)$ und $(-1,-5)$. a_2 und b_2:

$$x_{7,8} = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3})$ und $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$. Es gibt somit 8 Lösungspaare.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 241223
Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, so dass für

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt.

Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ so, dass für $p(x)$ sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gelten würde. Dann müsste

$$p(7) - p(3) = a_n(7^n - 3^n) + a_{n-1}(7^{n-1} - 3^{n-1}) + ... + a_1(7-3)$$

gelten. Da für beliebige reelle Zahlen a und b und beliebiger natürlicher Zahlen k die Beziehung

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

gilt, müsste $p(7) - p(3)$ durch $7 - 3 = 4$ teilbar sein.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass andererseits $p(7) - p(3) = 1$ ist und 1 nicht durch 4 teilbar ist. Es gibt also keine natürliche Zahl n und keine ganzen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ mit der verlangten Eigenschaft.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 4 - 241224
a) Beweisen Sie, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \qquad (1)$$

gilt!
b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!
Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

a) Hat die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge c und wird sie durch die zugehörige Höhe in Abschnitte der Längen p und q zerlegt, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad , \qquad h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

Ferner gilt $h_a = b$ und $h_b = a$. Damit gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 4h_a^2 - 4h_b^2 - 4h_c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3a^2 + 3b^2 - 4b^2 - 4a^2 - 2a^2 + 2p^2 - 2b^2 + 2q^2$$

$$= 2p^2 + 2q^2 > 0$$

Ungleichung (1) ist hiermit für alle rechtwinkligen Dreiecke bewiesen. Zugleich ist gezeigt, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, für das in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

b) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c liegen dann auf den Seiten BC, CA bzw. AB, und für die Längen $BH_a = a_1$, $H_aC = a_2$, $CH_b = b_1$, $H_bA = b_2$, $AH_c = c_1$, $H_cB = c_2$ gilt

$$a_1 + a_2 = a, \qquad b_1 + b_2 = b, \qquad c_1 + c_2 = c \qquad (2)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner

$$c^2 = h_a^2 + a_1^2, \qquad b^2 = h_a^2 + a_2^2, \qquad a^2 = h_b^2 + b_1^2$$
$$c^2 = h_b^2 + b_2^2, \qquad b^2 = h_c^2 + c_1^2, \qquad a^2 = h_c^2 + c_2^2$$

Addiert man diese sechs Gleichungen, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2

$$4(a^2 + b^2 + c^2) = 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) + 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) + 2(c_1^2 + c_2^2) \qquad (3)$$

Nun gilt wegen $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ die Ungleichung $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a - 2$, also

$$2(a_1^2 + a_2^2) \geq (a_1 + a_2)^2 = a^2 \qquad (4)$$

und analog

$$2(b_1^2 + b_2^2) \geq b^2 \quad (5) \qquad ; \qquad 2(c_1^2 + c_2^2) \geq c^2 \quad (6)$$

Daraus folgt aus (3)

$$48a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

d.h., (1) gilt auch für jedes spitzwinklige Dreieck.
Es gibt spitzwinklige Dreiecke, für die das Gleichheitszeichen in (1) gilt. Im gleichseitigen Dreieck gilt nämlich $a = b = c$ und $h_a = h_b = h_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, woraus (1) mit dem Gleichheitszeichen folgt.

Übernommen aus [5]

9.26.3 III. Runde 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241231
Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, ..., a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:
(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

Nach (3) gibt es eine reelle Zahl d mit $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ und $a_4 = a_1 + 3d = 3d - \frac{5}{2}$. Insbesondere ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot (-\frac{5}{2}) + 6d = 6d - 10$$

Nach (4) gibt es eine reelle Zahl q mit $a_5 = a_4 \cdot q$ und $a_6 = a_5 \cdot q$. Wegen (2) ist $a_5 = 3$, also $a_6 = 3q$ und $a_4 = 3d - \frac{5}{2} = \frac{3}{q}$. (Dabei ist wegen $0 \neq 3 = a_5 = q \cdot a_4$ auch $q \neq 0$.)
Daraus folgt $d = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{q} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{q} + \frac{5}{6}$.
Weiterhin ist $a_5 + a_6 = 3 + 3q$, also nach (6)

$$\frac{13}{2} = a_1 + \cdots + a_6 = 6d - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} + 5 - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} - 2 + 3q$$

bzw. $3q^2 - \left(2 + \frac{13}{2}\right) q + 6 = 0$, also $q^2 - \frac{17}{6} q + 2 = 0$, was auf $q_{1/2} = \frac{17}{12} \pm \sqrt{\frac{289}{144} - \frac{288}{144}} = \frac{17 \pm 1}{12}$, also $q_1 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ und $q_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ führt.

Im Fall $q = q_1 = \frac{4}{3}$ ist $a_6 = 3q = 4$, $a_5 = 3$, $a_4 = \frac{3}{q} = \frac{9}{4}$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{19}{12}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = d - \frac{5}{2} = \frac{19-30}{12} = -\frac{11}{12}$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{19-11}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
(Tatsächlich ist dann

$$a_3 + d = \frac{8+19}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = a_4 \qquad \text{und} \qquad a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-30 - 11 + 8 + 27 + 36 + 48}{12} = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}.)$$

Und im Fall $q = q_2 = \frac{3}{2}$ ist $a_6 = 3q = \frac{9}{2}$, $a_5 = 3$, $a_4 = 2$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = a_1 + d = -1$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist dann $a_3 + d = 2 = a_4$ und

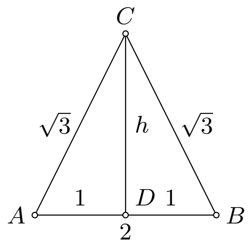
$$a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-5 - 2 + 1 + 4 + 6 + 9}{2} = \frac{13}{2}$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 241232
Man beweise:
Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Variante 1:

Der größte der Innenwinkel liegt gegenüber der längsten Dreiecksseite, und die kürzeste Höhe gehört ebenfalls zur längsten Seite (letzterer Zusammenhang ergibt sich ganz einfach daraus, dass Dreiecksseite mal dazugehörige Höhe ja der doppelten Fläche des Dreiecks entspricht, also konstant ist). Wir setzen daher einfach zwei Seiten zu $\sqrt{3}$ (der kleinstmögliche Wert) und die längste Seite zu 2 (der größtmögliche Wert):



Die Höhe dieses Dreiecks ist laut Satz des Pythagoras

$$h^2 = \sqrt{3}^2 - 1 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

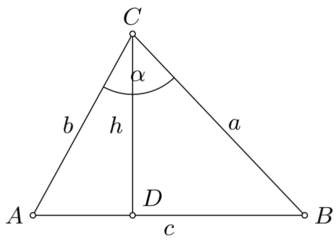
Es sei immer $\overline{AB} > \overline{AC}$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$. Wenn man nun die Seiten AC oder BC verlängert oder AB verkürzt, wird h größer, so dass tatsächlich $h \geq \sqrt{2}$ gilt, was Aufgabenteil b) beweist.

Der Winkel in C wäre nur dann ein stumpfer Winkel, wenn der Winkel $\angle ACD > 45°$ wäre. Es ist jedoch

$$\angle ACD = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

womit auch Aufgabenteil a) bewiesen wäre.

Variante 2 (allgemeiner):



O.B.d.A. sei $c > a,b$. Laut Kosinussatz gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2ab + (a-b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

α wird möglichst groß, wenn $\cos\alpha$ möglichst klein wird. Das ist der Fall, wenn c möglichst groß, a und b möglichst klein und am besten $a = b$ wird. Wie in Variante 1 ist der Winkel also möglichst groß, wenn $a = b = \sqrt{3}$ und $c = 2$ ist. Dann ist

$$\cos\alpha = \frac{3+3-4}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2}$$

Damit wäre Aufgabenteil a) bewiesen. Für die Dreiecksfläche gilt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ch$$

Und daher:

$$h = \frac{ab}{c}\sin\alpha$$

Bei gegebenem Flächeninhalt wird h umso kleiner, je größer c wird. Wir setzen also maximal $c = 2$. Bei gegebenem c wird der Flächeninhalt und damit auch h umso kleiner, je kleiner a und b werden. Deshalb setzen wir $a = b = \sqrt{3}$ und können daher das Ergebnis für α direkt verwenden. Es ist

$$h_{min} = \frac{\sqrt{3}^2}{2}\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{8}}{3} = \sqrt{2}$$

und daher

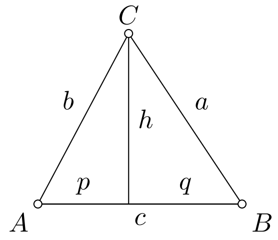
$$h \geq \sqrt{2}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
a) Seien a,b,c die Seitenlängen des Dreiecks, wobei o.B.d.A. $a \leq b \leq c$ sei. Nach Kosinussatz ist das Dreieck spitzwinklig, genau dann wenn $a^2 + b^2 > c^2$ gilt. Diese Bedingung ist erfüllt, denn

$$a^2 + b^2 \geq 3 + 3 > 4 \geq c^2.$$

b) Wegen a) verlaufen die Höhen innerhalb des Dreiecks. Seien wieder a,b,c die Seitenlängen, wobei diesmal nicht zwingend $a \leq b \leq c$ gelten soll. Wir betrachten o.B.d.A. die Höhe h von C auf AB.



Seien p,q die Längen der Abschnitte, in die c durch h zerlegt wird. Wegen $p + q = c \leq 2$ muss $p \leq 1$ oder $q \leq 1$ gelten. O.B.d.A. sei $p \leq 1$. Dann folgt

$$h^2 = b^2 - p^2 \geq 3 - 1 = 2,$$

also $h \geq \sqrt{2}$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3A - 241233A
Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:
(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$.

Es ist $f(0) = f(0 + 0) = 2 \cdot f(0) + 0$, also $f(0) = 0$ und für alle rationale Zahlen x damit

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + x \cdot (-x) \cdot (x - x) = f(x) + f(-x)$$

und damit $f(-x) = -f(x)$.
Weiterhin gilt für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) + n \cdot 1 \cdot (n + 1) = f(n) + n^2 + n + 1$$

sodass sich für alle natürlichen Zahlen n direkt

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k + 1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6} + n =$$

$$= n \cdot \left(\frac{(n-1)(n+1)}{3} + 1 \right) = \frac{n^3 + 2n}{3}$$

Damit gilt sogar für alle ganzen Zahlen p die Gleichung $f(p) = \frac{p^3+2p}{3}$.

Darüber hinaus ist für alle rationalen Zahlen x und alle natürlichen Zahlen n

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) + n \cdot (n + 1) \cdot x^3$$

sodass induktiv

$$\frac{f(nx) - nf(x)}{x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n-1+3}{6} \cdot n \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n^3-n}{3}$$

also $f(nx) = nf(x) + \frac{n^3-n}{3} \cdot x^3$.

Damit gilt für jede rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligem p und natürlichem $q > 0$:

$$\frac{p^3+2p}{3} = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{q^3-q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3}$$

bzw.

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3+2p}{3} - \frac{q^3-q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3}\right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3+2p}{3} - \frac{p^3}{3} + \frac{p^3}{3q^2}\right) = \frac{2pq^2+p^3}{3q^3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3} = \frac{2x+x^3}{3}$$

Damit kann höchstens die für alle rationalen Zahlen x definierte Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ alle genannten Bedingungen erfüllen. Tatsächlich ist auch $f(1) = \frac{2+1}{3} = 1$ und für beliebige rationale Zahlen x und y dann

$$f(x) + f(y) + xy(x+y) = \frac{2x+x^3+2y+y^3+3xy(x+y)}{3} = \frac{2(x+y)+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{3} =$$

$$= \frac{2(x+y)+(x+y)^3}{3} = f(x+y)$$

sodass die Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ die einzige ist, die die Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3B - 241233B
Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot ... \cdot (x+n-1) = (x+n) \cdot (x+n+1) \cdot (x+n+2) \cdot ... \cdot (x+2n-1)$$

Mit der Substitution $y := x + n - \frac{1}{2} = x + \frac{2n-1}{2}$ geht die zu betrachtende Gleichung äquivalent über in

$$\left(y-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(y-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(y-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y-\frac{2n-1}{2}\right) = \left(y+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(y+\frac{3}{2}\right) \cdot \left(y+\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y+\frac{2n-1}{2}\right)$$

Multipliziert man die Produkte auf beiden Seiten aus, erhält man positive rationale Zahlen a_0 bis a_n mit

$$\left(y-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(y-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(y-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y-\frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n - a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} \pm \cdots + (-1)^n \cdot a_0 \cdot y^0$$

und

$$\left(y+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(y+\frac{3}{2}\right) \cdot \left(y+\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y+\frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot y^0$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen kommen daher, dass in allen Faktoren auf der linken Seite der Gleichung jeweils Differenzen stehen, d.h., für Potenzen der Form y^{n-k} mit geradem k jeweils genau k solche negativen Faktoren ausgewählt und miteinander multipliziert (und deren Ergebnisse addiert) werden, was ein positives Vorzeichen im entstehenden Koeffizienten erzeugt, während bei ungeradem k nun ungeradzahlig viele negative Zahlen multipliziert (und dann die Produkte addiert) werden, sodass dies negative Vorzeichen erzeugt. Die a_i sind als Summe der Produkte von positiven Brüchen selbst offensichtlich positiv.

Setzt man diese beiden Terme gleich, so finden sich auf beiden Seiten der Gleichung für gerade k die gleichen Werte; für ungerade k jedoch verschiedene Vorzeichen. Durch Subtraktion der linken Seite erhält man die äquivalente Gleichung

$$0 = (-2) \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-3} \cdot y^{n-3} + \cdots + a_1 \cdot y^1)$$

wobei $n-1$ ungerade ist, da n nach Aufgabenstellung gerade ist (sodass a_1 der letzte hier auftretende Koeffizient ist). Dies ist äquivalent zu

$$0 = y \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \cdots + a_1)$$

Diese Gleichung hat die eine offensichtliche Lösung $y = 0$ bzw. $x = \frac{2n-1}{2}$. Andernfalls ist aber auch wegen n gerade auch $n-2k$ gerade und also $y^{n-2k} > 0$ für alle $0 < k \leq \frac{n}{2}$, sodass aufgrund der Positivität aller a_i auch $a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \cdots + a_1 > 0$ folgt, es also keine weitere Lösung gibt.
Damit hat die Gleichung der Aufgabenstellung nur genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{2n-1}{2}$, was die Probe auch schnell bestätigt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 241234
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

Sei x die Abszisse eines Schnittpunkts der beiden Kurven. Dann gilt $2x^2 = \frac{1}{3}x + z$ bzw. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}z = 0$, also

$$x = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{z}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+72z}}{12}$$

Fall 1: Es ist $x = \frac{1+\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 < \frac{1+\sqrt{1+72z}}{12} \leq \frac{1+\sqrt{72 \cdot 5}}{12} = \frac{1+\sqrt{361}}{12} = \frac{1+19}{12} < \frac{24}{12} = 2$$

also $x = 1$ und $y = 2x^2 = 2$, woraus schließlich $z = y - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ folgt.

Fall 2: Es ist $x = \frac{1-\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 = \frac{1-1}{12} > \frac{1-\sqrt{1+72 \cdot 1}}{12} \geq x = \frac{1-\sqrt{1+72z}}{12} \geq \frac{1-\sqrt{1+72 \cdot 5}}{12} = \frac{1-19}{12} > \frac{-24}{12} = -2$$

also $x = -1$. Dann ist $y = 2x^2 = 2$ und damit $z = y - \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}$.

Es gibt also genau in den beiden Fällen $z = \frac{5}{3}$ und $z = \frac{7}{3}$ im zu betrachtenden Intervall für z Schnittpunkte mit ganzzahligen Abszissen, nämlich im ersten Fall den Punkt $(1|2)$ und im zweiten den Punkt $(-1|2)$. (Die jeweils anderen Schnittpunkte, sofern sie existieren, haben dagegen keine ganzzahligen Abszissen, da sie sonst als Lösungen in den entsprechenden Fällen hätten erscheinen müssen.)

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 241235
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

Wir beginnen mit zwei einfachen Hilfssätzen.

Lemma 1:

$$\forall a \geq 2 \ \forall b \geq 4 : \quad a^b \geq a^2 b$$

Beweis: Offenbar genügt es dafür

$$\forall b \geq 4 : \quad 2^{b-2} \geq b$$

einfach zu zeigen. Dies ist aber für $b = 4$ trivialerweise erfüllt und falls es für ein $b \geq 4$ gilt, dann wegen

$$2^{(b+1)-2} = 2 * 2^{b-2} \geq 2b > b + 1$$

auch für $b + 1$, q.e.d.

Lemma 2:

$$\forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad b^c > bc^2$$

Beweis: Auch das lässt sich sofort wieder auf die einfachere Behauptung

$$\forall c \geq 3: \quad 4^{c-1} > c^2$$

zurückführen, welche wir wieder mit Induktion beweisen. Dabei kann die Gültigkeit der Behauptung für $c = 3$ sofort direkt nachgerechnet werden kann und aus der Gültigkeit für ein $c \geq 3$ folgt sofort auch ihr Gültigkeit für $c + 1$:

$$4^c = 4 \cdot 4^{c-1} > (2c)^2 > (c+1)^2$$

q.e.d.

Damit folgt nun aus der bekannten Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel sofort, dass es unter den Voraussetzungen der beiden obigen Hilfssätze keine Lösung der Gleichung in der Aufgabe geben kann:

$$\forall a \geq 2\ \forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad a^b + b^c > 2\sqrt{(a^2b)(bc^2)} = 2abc > abc \quad (*)$$

Wir müssen also nur die durch (*) noch nicht abgedeckten Tripel (a,b,c) überprüfen, was dann schließlich auf die folgenden fünf Lösungen der Aufgabe hier führt:

$$(a,b,c) \in \{(1,1,2),(2,2,2),(2,2,3),(4,2,3),(4,2,4)\}$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 241236

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

Indem wir beide Seiten der Ungleichung (1) durch 100^n dividieren, lässt sie sich auch schreiben in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n > \frac{51}{25} = 2.04 \quad (*)$$

Nun gilt

$$\forall n \geq 21: \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 100^{-2k} > 2\left(1 + \binom{21}{2}\frac{1}{100^2}\right) = 2.042 > 2.04$$

d.h., (1) ist jedenfalls für alle $n \geq 21$ gültig, während für $n = 20$ diese einfache Abschätzung noch nicht ausreicht.
Dass sie andererseits für $n \leq 19$ falsch ist, ist ebenfalls klar und folgt unmittelbar aus

$$\forall n \leq 19: \quad \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n < 2\cosh\left(\frac{n}{100}\right) \leq 2\cosh\left(\frac{19}{100}\right) \approx 2.0362$$

während der Fall $n = 20$ wegen $2\cosh(0.2) \approx 2.0401$ auch hier unentschieden ist. Um zu sehen, dass (1) für $n = 20$ nicht gilt, bleibt also nur die direkte Auswertung von (*) für diesen Wert von n, was dann

$$0.99^{20} + 1.01^{20} \approx 2.038$$

ergibt, d.h., es bleibt dabei, dass (1) genau für $n \geq 21$ gilt.

Aufgabe gelöst von weird

9.26.4 IV. Runde 1984, Klasse 12

Aufgabe 1 - 241241
a) Man beweise, dass durch

$$f(x)=\frac{(x^2-x)\cdot(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)\cdot(x^2-x+6)+9}$$

eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

Es ist:

$$\frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9}=\frac{x^4-x^3+5x^2-x^3+x^2-5x+6}{x^4-x^3+6x^2-x^3+x^2-6x+9}=$$

$$=\frac{x^4-2x^3+6x^2-5x+6}{x^4-2x^3+7x^2-6x+9}=1-\frac{x^2-x+3}{x^4-2x^3+7x^2-6x+9}$$

Der Zähler hat offensichtlich keine (reelle) Nullstelle - lässt sich also nicht weiter faktorisieren. Wir könnten also nur noch prüfen, ob er als Faktor selbst im Nenner steckt. Wir prüfen also:

$$(x^2-x+3)(x^2+ax+3)\overset{?}{=}x^4-2x^3+7x^2-6x+9$$

$$x^4+(a-1)x^3+(6-a)x^2+(-3+3a)x+9=x^4-2x^3+7x^2-6x+9$$

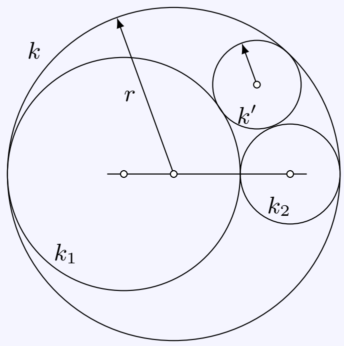
Das gilt offensichtlich für $a=-1$. Wir erhalten somit:

$$f(x)=\frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9}=1-\frac{1}{x^2-x+3}$$

Der Rest ist dann einfache Analysis.

Gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 2 - 241242



Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt:
Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.
Man beweise:
Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r'\leq\frac{r}{3}$.

Die Radien von k_1, k_2 seien r_1 bzw. r_2; o.B.d.A. gelte $r_1\geq r_2$ (1).
Die Mittelpunkte von k, k_1, k_2, k' seien M, M_1, M_2 bzw. M'. Auf der Geraden g, die nach Voraussetzung durch M_1, M_2 und M geht, liegen auch die Berührungspunkte, die je zwei der Kreise k, k_1, k_2 miteinander haben. Hieraus und aus den Voraussetzungen, welche Kreise sich von außen bzw. von innen berühren, folgt

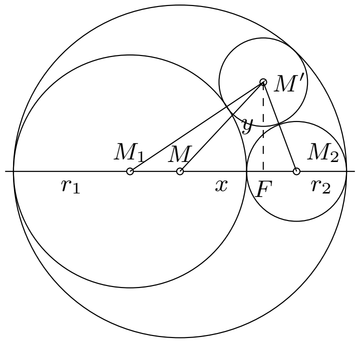
$$2r_1+2r_2=2r$$

und weiter

$$M_1M_2 = r_1 + r_2 + r; \qquad M_1M = r - r_1 = r_2; \qquad MM_2 = r - r_2 = r_1$$

sowie ferner

$$M_1M' = r_1 + r'; \qquad M_2M' = r_2 + r'; \qquad MM' = r - r'$$



Ist F der Fußpunkt des Lotes von M' auf g und $MF = x$, $FM' = y$, so liegt F wegen $M_1M' \geq M_2M'$ und $M_1M \leq M_2M$ zwischen M und M_2 oder in M; damit folgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die Dreiecke MFM', M_1FM' und M_2FM'

$$x^2 + y^2 = (r - r')^2 \tag{2}$$

$$(r_2 + x)^2 + y^2 = (r_1 + r')^2 \tag{3}$$

$$(r_1 - x)^2 + y^2 = (r_2 + r')^2 \tag{4}$$

Subtrahiert man von der mit 2 multiplizierten Gleichung (2) die Summe der Gleichungen (3) und (4), so ergibt sich

$$2(r_1 - r_2)x = 2r^2 - 4rr' - 2(r - 1 + r_2)r'$$

wegen $r_1 + r_2 = r$ also

$$(r_1 - r_2)x = r(r - 3r')$$

Hieraus sowie aus (1) (und $x \geq 0$, $r > 0$) folgt $r - 3r' \geq 0$, also $r' \leq \frac{r}{3}$, w.z.b.w.

Übernommen aus [5]

Aufgabe 3 - 241243
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = x \cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 1 + f(\frac{1}{x+y})$.
(3) Es gilt $f(1) = 2$.

I. Wenn eine für alle $x \neq 0$ definierte Funktion f den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so folgt: Für alle $x \neq 0$ gilt nach (2)

$$2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2x}\right) \tag{4}$$

Setzt man hierin $\frac{1}{2x} = u$, so folgt: Für alle $u \neq 0$ gilt

$$2 \cdot f(2u) = 1 + f(u) \tag{5}$$

Aus (5), (1), (4) folgt für alle $x \neq 0$

$$x(1 + f(x)) = 2xf(2x) = f\left(\frac{1}{2x}\right) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 2xf(x) - 1$$

also $1 + f(x) = 2f(x) - \frac{1}{x}$. Daher kann nur die für alle $x \neq 0$ durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \tag{6}$$

definierte Funktion f die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie hat diese Eigenschaften; denn es gilt für alle x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x = x\left(1 + \frac{1}{x}\right) = xf(x)$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + x + 1 + y = 1 + (1 + x + y) = 1 + f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$
$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Daher hat genau die in (6) angegebene Funktion die verlangten Eigenschaften.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 241244
Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Man beweise, dass das Gleichungssystem

$$\sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \qquad (1)$$
$$\sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \qquad (2)$$
$$\sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1 \qquad (3)$$

genau eine Lösung (x, y, z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

Man wähle in einer Ebene einen Punkt P sowie Punkte K, L, M derart, dass $PK = \sqrt{a}$, $PL = \sqrt{b}$ und $PM = \sqrt{c}$ gilt und dass benachbarte Strecken einen Winkel von 120° bilden.
Legt man durch die Punkte K, L, M Geraden senkrecht zu PK, PL bzw. PM, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Es sei mit ABC bezeichnet, wobei $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$ gelte. Sein Flächeninhalt $J(ABC)$ ist

$$J(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB^2 \cdot 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot AB^2$$

Andererseits ist der Flächeninhalt

$$J(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot BC + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot AC + \frac{1}{2}\sqrt{c} \cdot AB$$
$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot AB$$

Also ist $AB = 1$. Jetzt erkennt man sofort durch Anwendung des Satzes des Pythagoras, dass $x = PA^2$, $y = PB^2$ und $z = PC^2$ dem Gleichungssystem genügen.

Also gibt es mindestens eine Lösung (x,y,z). Sei (x',y',z') ein andere Lösung.
Sei etwa $x' \neq x$ und dabei $x' > x$. Nach Gleichung (2) ist dann $z' < z$ und nach Gleichung (3) $y' < y$. Dann ist jedoch

$$\sqrt{y'-a} + \sqrt{z'-a} < \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1$$

und (x',y',z') erfüllt nicht das Gleichungssystem.

Übernommen von [5]

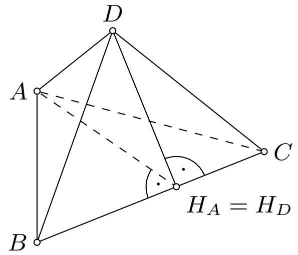
Aufgabe 5 - 241245
Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Zunächst gilt allgemein:
Die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen jedes Tetraeders liegen zwischen 0° und 180°. In einem Tetraeder $ABCD$ sei nun für die Kantenlängen

$$\sqrt{3} \leq AB, BC, AC, AD, BD, CD \leq 2$$

vorausgesetzt. Es genügt, o.B.d.A., zu zeigen, dass der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD nicht größer als 90° ist.
Es seien H_A bzw. H_D die Fußpunkte der von A bzw. D auf die Gerade durch B und C gefällten Lote. Nach Aufgabe 241232 sind die Dreiecke ABC und BCD spitzwinklig. H_A und H_D liegen zwischen B und C und es gilt $AH_A, DH_D \geq \sqrt{2}$.

1. Fall: $H_A = H_D$

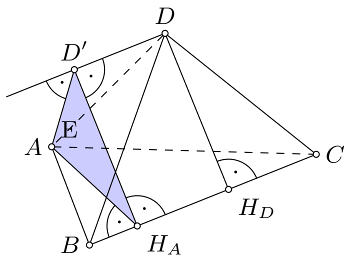


In diesem Fall steht die Ebene durch A, H_A und D senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, in denen die Seitenflächen ABC und BCD liegen. Folglich ist der Innenwinkel $\angle AH_AD$ im Dreieck AH_AD zugleich auch der Innenwinkel zwischen diesen Seitenflächen des Tetraeders. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos\angle AH_AD = \frac{AH_A^2 + DH_A^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_A} \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_A} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD < 180°$ als $\angle AH_AD = 90°$. w.z.b.w.

2. Fall: $H_A \neq H_D$



In diesem Fall sei E die durch H_A gehende Ebene senkrecht zur Geraden durch B und C. Der Fußpunktes des Lotes von D auf E sei D'.
Dann liegt die Höhe AH_A in E, und die Strecke $D'H_A$, die folglich ebenfalls in E liegt, steht somit auch auf BC senkrecht. Der Innenwinkel $\angle AH_AD'$ im Dreieck AH_AD' ist daher zugleich auch der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD im Tetraeder.

Die Höhe DH_D ist zu E parallel. Wegen $DD' \perp E$, $H_AH_D \perp E$ gilt $DD' \parallel H_AH_D$ und wegen $DH_D \perp BC$ auch $DH_D \parallel D'H_A$. Folglich ist $DD'H_AH_D$ ein ebenes Rechteck, und es gilt $D'H_A = DH_D$.
Das Dreieck $AD'D$ ist rechtwinklig, also ist seine Hypotenuse AD länger als AD'. Damit folgt nach dem Kosinussatz

$$\cos\angle AH_AD' = \frac{AH_A^2 + D'H_A^2 - AD'^2}{2AH_A \cdot D'H_A} > \frac{AH_A^2 + DH_D^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_D} \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_D} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD' < 180°$ als $\angle AH_AD' < 90°$. w.z.b.w.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6A - 241246A
Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtliche kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

Betrachte $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Für jede natürliche Zahl $a > 0$ und alle $k \in \{0, \pm 2, \pm 3, ..., \pm 22\}$ ist $a \cdot n \pm k$ keine Primzahl: Jede der ersten Primzahlen bis 19 kommt in $a \cdot n$ als Primfaktor vor, sodass jedes k aus der angegebenen Menge einen Primfaktor besitzt, der in $a \cdot n$ enthalten ist, sodass man diesen ausklammern kann. Des Weiteren ist stets $a \cdot n - 22 > 0$.

Nun gilt es nur noch, ein a zu finden, sodass $a \cdot n \pm 1$ keine Primzahlen sind. Man findet schnell mit Modulo-Rechnung und geeignetem Zusammenfassen der Faktoren in n, dass $n \equiv -8 \mod 23$ und $n \equiv 2 \mod 29$ gilt.
Wenn wir nun ein a finden könnten mit $a \equiv 3 \mod 23$ und $a \equiv 15 \mod 29$, so wäre $a \cdot n \equiv -1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv 1 \mod 29$, und wir wären fertig. Mit dem chinesischen Restsatz findet man, dass das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft $a = 624$ ist. Leider gilt dann aber $a \cdot n > 10^9$, sodass wir etwas anderes probieren müssen.

Ein a mit $a \equiv -3 \mod 23$ und $a \equiv -15 \mod 29$ ergibt $a \cdot n \equiv 1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv -1 \mod 29$. Das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft ist $a = 43$, und tatsächlich kann man abschätzen bzw. ausrechnen, dass $a \cdot n + 22 < 10^9$ gilt. (Anmerkung: $a = 43$ ergibt sich auch aus obigem Fehlversuch vermittels $23 \cdot 29 - 624 = 43$.)

Demzufolge gibt es 45 (und insbesondere 40) aufeinanderfolgende Zahlen kleiner als 10^9, die keine Primzahlen sind, nämlich $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43 + k$ mit $k \in \{0, \pm 1, ..., \pm 22\}$

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6B - 241246B
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist.
Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

Für $k = 1$ ist $x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n \geq x_n^2 + 1 \geq n + 1$, wie man leicht induktiv beweist. Insbesondere divergiert also die Folge (x_n^2) bestimmt gegen $+\infty$ und damit auch die Folge (x_n).
Für größere Werte von k vergrößern sich aufgrund der Monotonie der Rekursionsbedingung zur Berechnung von x_{n+1} aus k und x_n nur die Folgenglieder weiter, was sich wieder simpel per Induktion zeigen lässt, sodass auch dann die Folgen gegen $+\infty$ divergieren.
Für $0 < k < 1$ ist $0 < g := \frac{k}{1-k}$ und

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{\sqrt{k(x_n^2 + x_n)} + g}$$

Weiterhin ist

$$g^2 \cdot (k-1) + kg = -g^2 \cdot (1-k) + kg = \frac{-k^2}{(1-k)^2} \cdot (1-k) + k \cdot \frac{k}{1-k} = \frac{-k^2}{1-k} + \frac{k^2}{1-k} = 0$$

Damit ist $g^2 = k(g^2 + g)$, also

$$k(x_n^2 + x_n) - g^2 = k(x_n^2 - g^2 + x_n - g) = k(x_n - g)(x_n + g + 1)$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{x_{n+1} + g} = (x_n - g) \cdot k \cdot \frac{x_n + 1 + g}{x_{n+1} + g}$$

Ist also $g = x_1 = 1$, was im Fall $k = \frac{1}{2}$ eintritt, so ist die Folge x_n damit konstant gleich g, da aus $x_n - g = 0$ sofort auch $x_{n+1} - g = 0$ folgt. Ist dagegen $g < x_1$, was für $0 < k < \frac{1}{2}$ eintritt, dann gilt auch für alle weiteren Folgenglieder $g < x_n$, da $x_{n+1} - g$ und $x_n - g$ das gleiche Vorzeichen besitzen müssen, da alle weiteren Faktoren positiv sind. Analog ist in den verbleibenden Fällen mit $\frac{1}{2} < k < 1$ schließlich $x_1 < g$ und damit für alle Folgenglieder $x_n < g$.

Analog erhält man

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - x_n = \frac{k(x_n^2 + x_n) - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1} + x_n} \cdot ((k-1)x_n + k)$$

sodass die Differenz $x_{n+1} - x_n$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie $(k-1)x_n + k$.
Da $(k-1) \cdot g + k = -(1-k) \cdot \frac{k}{1-k} + k = -k + k = 0$ ist, lässt sich die zuvor erhaltene Summe auch schreiben als $(k-1)x_n + k = (k-1) \cdot (x_n - g) = (1-k) \cdot (g - x_n)$, sodass wegen $k < 1$ also $x_{n+1} - x_n$ genau das gleiche Vorzeichen besitzt wie $x_n - g$.

Damit ergibt sich, dass im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ der Wert g eine untere Schranke an die Folgenglieder ist, während die Folge wegen $g - x_n < 0$ und damit $x_{n+1} - x_n < 0$ monoton fallend ist. Also muss die Folge konvergieren. Analog ist im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ der Wert g eine obere Schranke an die Folgenglieder, während die Folge wegen $g - x_n \geq 0$ und damit $x_{n+1} - x_n \geq 0$ monoton steigend ist, also auch in diesem Fall konvergiert.

Ein möglicher Grenzwert x muss aber die Rekursionsbedingung erfüllen, sodass $x = \sqrt{k(x^2 + x)}$ bzw. $x^2 = k(x^2 + x)$, also $x^2 \cdot (1-k) = x$ und wegen $1 - k \neq 0$ auch $x^2 = x \cdot \frac{1}{1-k}$ sowie schließlich $x = 0$ oder $x = g$ folgt. Es kann aber nie $x = 0$ der Grenzwert sein, da im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ die Folge nach unten durch $g > 0$ beschränkt ist und im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ aufgrund des monotonen Wachstums nach unten durch $x_1 = 1 > 0$ beschränkt ist. Also muss g der gesuchte Grenzwert sein.

Zusammenfassend ergibt sich, dass die Folge für $k \geq 1$ (gegen $+\infty$) divergiert und für $0 < k < 1$ gegen $g = \frac{k}{1-k}$ konvergiert.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.27 XXV. Olympiade 1985

9.27.1 I. Runde 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251211
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1, \tag{1}$$
$$x + y^2 = 1. \tag{2}$$

Wenn ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) gilt

$$y = 1 - x^2 \tag{3}$$

Setzt man dies in (2) ein, so folgt

$$x + (1 - x^2) = 1$$
$$x(x^3 - 2x + 1) = 0 \tag{4,5}$$

Da die Gleichung $x^3 - 2x + 1 = 0$ offenbar die Zahl 1 als eine Lösung hat, führt die Division

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1$$

auf die Zerlegung $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, wonach (4) in $x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ oder $x^2 + x - 1 = 0$. Da diese quadratische Gleichung die Lösungen

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

hat, ist somit x einer der Zahlen

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Nach (3) und wegen

$$\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(1 \mp 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$$

gehören hierzu für y die Werte

$$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Also können nur die Paare

$$(0; 1) \quad ; \quad (1; 0) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})\right) \tag{6}$$

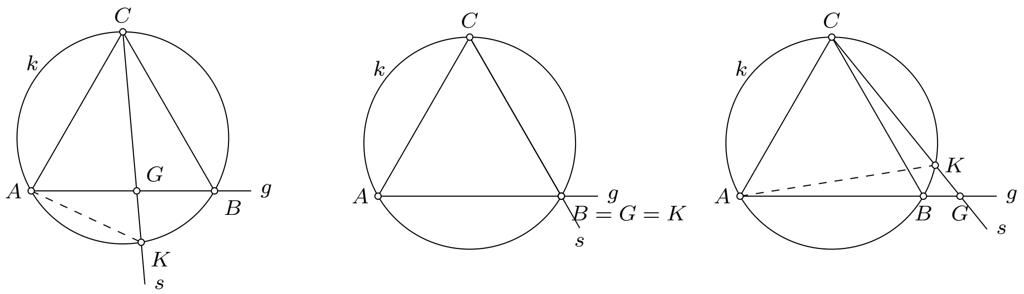
das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen, wie die Probe zeigt. Daher wird (1), (2) genau von den Paaren (6) erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 251212
Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.

Man beweise, dass bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat, und berechne diesen Wert.

Für jede Gerade s kann unter den genannten Voraussetzungen durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass der Punkt K auf demjenigen Bogen $\overset{\frown}{AC}$ des Kreises k liegt, auf dem auch B liegt (siehe Abbildungen)



Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle AKC = \angle ABC = 60°$. Ferner liegt dann G auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, also ist

$$\angle GAC = \angle BAC = 60° = \angle AKC \tag{1}$$

Da K auf den von C ausgehenden Strahl durch G liegt, ist $\angle AG = \angle KCA$. Aus (1) und (2) folgt $\triangle ACG \sim \triangle KCA$ und daraus $CA : CG = CK : CA$. Somit hat in der Tat

$$CG \cdot CK = CA^2$$

einen einheitlichen Wert, wie behauptet.
Zwischen der Seitenlänge $a = CA$ des k einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABC und dem Radius r von k besteht die Beziehung $a = r\sqrt{3}$.
Daher ist $CG \cdot CK = 3r^2 = 3 \cdot 1985^2$ mm^2 = 11820675 mm^2.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 251213
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

(1) n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1,

(2) n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1,

(3) es gilt: $100 < n < 200$.

Wenn $n = 11k + r$ mit einer natürlichen Zahl k und $r = 0, 1, 2, ..., 10$ ist, so ist

$$n^2 = 11(11k^2 + 2kr) +^2 = 11m + s$$

mit einer natürlichen Zahl m und $s = 0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$. Also wird (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 11k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 11k + 10 \tag{4}$$

erfüllt.
Die Bedingungen (3) und (2) werden somit genau von den 18 Zahlen 111, 122, ..., 199 und 109, 120, ..., 197 erfüllt. Für diese Zahlen ist (1) zu überprüfen.

Eine Zahl der Form (4) erfüllt genau dann (1), wenn mit einer natürlichen Zahl p auch $n = 3p + 1$, also

$$11k + 1 = 3p + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 11k + 10 = 3p + 1$$

oder, gleichwertig hiermit,

$$11k = 3p \qquad \text{bzw.} \qquad 11k = 3(p - 3)$$

gilt. Hierfür ist $3 \mid k$, also $k = 3q$ mit einer natürlichen Zahl q, notwendig und hinreichend; daher und nach (4) werden (1) und (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 33q + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 33q + 10$$

erfüllt, (1), (2), (3) somit genau von den Zahlen 133, 166, 199 und 109, 142, 175.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 251214
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Zu Beginn geben sie sich (z.B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Darauf multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozess abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.

a) Wie muss Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?

b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muss er anwenden, wenn $K = 1000000$ vorgegeben ist?

c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muss dieser Spieler vorgehen?

a) Es fällt auf, dass alle Elemente von M Potenzen der Zahl 2 sind:

$$M = \{2^1; 2^2; 2^3; 2^4\}$$

Also haben laut Spielregel sowohl die von A genannten Zahlen a_i als auch die von B genannten Zahlen b_i stets die Form 2^k.

Wir überlegen nun, welche Zahlen der Form 2^k man dem Gegner nicht nennen darf, weil dieser dann gewinnen könnte. Wegen $2^6 < 100 < 2^7$ sind dies die "Verlustzahlen" $2^6, 2^5, 2^4$ und 2^3, weil in diesen Fällen der Gegner durch Multiplikation mit $2^1, 2^2, 2^3$ bzw. 2^4 die Zahl 100 überschreiten könnte.

Folglich ist 2^2 eine "Gewinnzahl", weil von ihr ausgehend der Gegner laut Spielregel nur eine der "Verlustzahlen" nennen kann.

Wählt daher der Spieler A aus der Menge M die Zahl 2^2 aus, dann kann er auf die angegebene Weise mit Sicherheit gewinnen.

b) Wegen $2^{19} < 1000000 < 2^{20}$ erhält man analog.

"Verlustzahlen"	19,18,17,16		14,13,12,11		9,8,7,6		4,3,2,1
"Gewinnzahlen"		15		10		5	

A muss verlieren, weil B als Nachziehender stets die "Gewinnzahlen" $2^5, 2^{10}, 2^{15}$ erreichen kann.

c) Zu jedem $K \in N$ gibt es genau ein $k \in N$, so dass $2^{k-1} \leq K < 2^k$ gilt. Zu jedem k gibt es genau ein $i \in N$ und ein $r \in \{0,1,2,3,4\}$, so dass $k = 5i + r$ gilt (d.h., k lässt bei Division durch 5 den Rest r).

Ist $r \neq 0$, dann kann Spieler A gewinnen, indem er mit der "Gewinnzahl" $2^r \in M$ beginnt und dann der Reihe nach die Zahlen

$$2^{r+5}, 2^{r+2\cdot 5}, ..., 2^{r+5i}$$

nennt, was laut Spielregel stets möglich ist. Wegen $2^{r+5i} = 2^k > K$ hat er dann gewonnen.

Gilt dagegen $r = 0$, dann kann B gewinnen, indem er analog vorgeht.

Übernommen von [5]

9.27.2 II. Runde 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251221
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2 \qquad (2)$$

Addiert man das Doppelte von Gleichung (2) zu Gleichung (1) erhält man

$$9 = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x + y)^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt einerseits $x \neq 0$, da man sonst den Widerspruch $0 = 2$ erhalten würde, und andererseits damit dann $x + y = \frac{2}{x}$. Setzt man dies in die eben erhaltene Gleichung ein und multipliziert mit x^2, erhält man

$$9x^2 = 2x^4 + 4 \qquad \text{bzw.} \qquad 2z^2 - 9z + 4 = 0$$

mit $z := x^2$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung in z lauten $\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$, also $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$.

Damit ergeben sich für $z_1 = \frac{1}{2}$ die Werte $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ und damit nach Gleichung (2) $y_{1/2} = \pm\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$, wobei jeweils das gleiche Vorzeichen zu wählen ist. Dass diese Lösungen auch die erste Gleichung erfüllen, rechnet man leicht nach.
Andererseits ergäbe sich aus $x^2 = z_2 = 2$ mit der zweiten Gleichung $y = 0$, was jedoch im Widerspruch zur ersten Gleichung steht.
Es ergeben sich also genau zwei Lösungen, nämlich $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right); \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \right\}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 251222
Beweisen Sie, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung gilt:

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, also $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle MAC$ ist

$$s_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

$$= b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b^2 - a^2 + 2c^2}{4}$$

also

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \square$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 251223
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch $a_n = 3n - 2, b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, dass dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

Wir beweisen die Aussage aus Aufgabenteil b), womit direkt auch der Spezialfall in Aufgabenteil a) gezeigt ist.

Sei dazu die Folge (a_n) definiert durch $a_n = c \cdot n + d$ mit reellen Zahlen c und d und

$$b_n := a_n^2 = c^2 \cdot n^2 + 2cd \cdot n + d^2$$

Dann ist

$$\Delta_n := b_{n+1} - b_n = c^2 \cdot ((n+1)^2 - n^2) + 2cd \cdot ((n+1) - n) + d^2 - d^2 = 2c^2 \cdot n + (c^2 + 2cd) = p \cdot n + q$$

mit $p := 2c^2$ und $q := c^2 + 2cd$.
Damit ist (Δ_n) eine arithmetische Folge, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 251224
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben:
Im abgeschlossenen Intervall $[2^n, 2^{n+1}]$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

Wegen $2^3 = 8 < 16 = 2^4$, $2^4 = 16 < 27 = 3^3$, $2^5 = 32 < 64 = 4^3$, $2^6 = 64 < 125 = 5^3$, $2^7 = 128 < 216 = 6^3$ und $2^8 = 256 < 343 = 7^3$ ist $n = 1$ (was offensichtlich eine Lösung ist) oder $n \geq 8$.

Wir zeigen im Folgenden, dass für $n \geq 8$ die Ungleichung $n^3 \leq 2^{n+1}$ gilt:
Es ist $8^3 = 2^9 = 2^{8+1}$, sodass die Ungleichung für $n = 8$ erfüllt ist. Und gilt für eine natürliche Zahl $n \geq 8$ die Ungleichung, so gilt sie wegen $2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 \geq n^3 + 8n^2 = n^3 + 3n^2 + 5n^2 \geq n^3 + 3n^2 + 40n \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ auch für deren Nachfolger $n + 1$ und damit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$.

Es folgt, dass für alle $n \geq 8$ der Wert n^3 direkt im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegt, und damit die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, oder aber $n^3 < 2^n$ gilt. In diesem Fall ist aber von je n^3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch n^3 teilbar, also insbesondere eine der Zahlen $2^n + 1$, $2^n + 2$, ..., $2^n + n^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, die alle im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegen.

Damit gilt, dass genau diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die $n = 1$ oder $n \geq 8$ erfüllen, Lösungen der Aufgabe sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.27.3 III. Runde 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251231
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m+n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

Nach Aufgabenstellung existieren Ziffern $c,d \in \{1; 2; \ldots; 9\}$ mit $m + n = 10c + d$ und $m \cdot n = 10d + c$. Dabei darf keine Ziffer 0 sein, da sonst die Zahl mit entsprechender Zehnerstelle nicht zweistellig wäre. Insbesondere ist

$$(m-1) \cdot (n-1) = (m \cdot n) - (m+n) + 1 = 10d + c - (10c + d) + 1 = 9(d-c) + 1$$

lässt bei Division durch 9 den Rest 1. Damit kann man aus der Restklasse von n eindeutig die von m modulo 9 bestimmen:
Ist $n \equiv 0,2,3,5,6,8 \pmod 9$, so muss $m \equiv 0,1,6,8,3,5 \pmod 9$ sein, während es jeweils keine Lösung gibt, falls $n \equiv 1,4,7 \pmod 9$ ist, da dann $n-1$ und damit auch $(n-1)(m-1)$ durch 3 teilbar ist, was ein Widerspruch zur Kongruenz zu 1 modulo 9 darstellt.

Analog erhält man

$$(m+1)(n+1) = (m \cdot n) + (m+n) + 1 = (10d + c) + (10c + d) + 1 = 11(c+d) + 1$$

was den Rest 1 bei der Division durch 11 lässt, sodass man wieder aus der Kongruenz von n modulo 11 auf die von m schließen kann:
Ist $n \equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \pmod{11}$, so muss $m \equiv 0,5,3,2,8,1,7,6,4,9 \pmod{11}$ gelten, wobei es für $n \equiv 10 \pmod{11}$ keine Lösung gibt, da dann $(n+1)$ und damit $(n+1)(m+1)$ durch 11 teilbar ist, was der Kongruenzbedingung widerspricht.

Es sei o.B.d.A. $m \geq n$. Dann ist $n \neq 0$, da sonst $m \cdot n = 0$ nicht zweistellig wäre. Weiterhin ist $n \neq 1,4,7$, da es dafür aufgrund der Kongruenzbedingung keine Lösung gibt. Wegen $100 > m \cdot n \geq n^2$ ist $n < 10$, sodass noch die Fälle $n \in \{2,3,5,6,8,9\}$ verbleiben. In jedem dieser Fälle folgt für m eine Kongruenz modulo 9 und eine modulo 11, was sich nach dem Chinesischen Restsatz zu einer modulo 99 zusammenfassen lässt. Da $0 < m \leq m \cdot n \leq 99$ gilt, ist damit dann m auch schon eindeutig festgelegt.

1. Fall: $n = 2$. Dann muss $m \equiv 1 \pmod 9$ und $m \equiv 3 \pmod{11}$, also $m = 91$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.

2. Fall: $n = 3$. Dann muss $m \equiv 6 \pmod 9$ und $m \equiv 2 \pmod{11}$, also $m = 24$ gelten, was wegen $mn = 72$ und $m + n = 27$ eine Lösung ist.

3. Fall: $n = 5$. Dann muss $m \equiv 8 \pmod 9$ und $m \equiv 1 \pmod{11}$, also $m = 89$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.

4. Fall: $n = 6$. Dann muss $m \equiv 3 \pmod 9$ und $m \equiv 7 \pmod{11}$, also $m = 84$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.

5. Fall: $n = 8$. Dann muss $m \equiv 5 \pmod 9$ und $m \equiv 4 \pmod{11}$, also $m = 59$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.

6. Fall: $n = 9$. Dann muss $m \equiv 0 \pmod 9$ und $m \equiv 9 \pmod{11}$, also $m = 9$ gelten, was wegen $mn = 81$ und $m + n = 18$ eine Lösung ist.

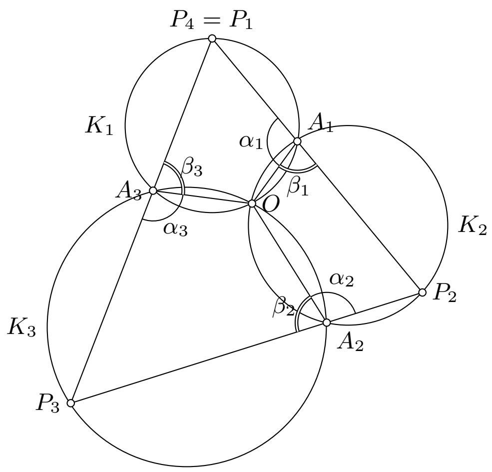
Damit gibt es insgesamt genau drei Paare, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, nämlich $(m,n) \in \{(3,24), (24,3), (9,9)\}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 251232
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise $K_1, ..., K_n$, so in einer Ebene gelegen, dass sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen $K_1, ..., K_n$ liegt. Für $i = 1, ..., n$ gilt:
K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.
Die Punkte $A_1, ..., A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, A_1$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, ..., P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: Für $i = 1, ..., n$ gilt: P_i liegt auf Kreis K_i und ist von O und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von O aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, ..., P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Nach den Voraussetzungen über $O, A_3, P_1, A_1, P_2, A_2, P_3$ sind $OA_3P_1A_1$, $OA_1P_2A_2$ und $OA_2P_3A_3$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\alpha_2 = \angle P_2A_2O$, $\alpha_3 = \angle P_3A_3O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, $\beta_2 = \angle P_3A_2O$, $\beta_3 = \angle P_1A_3O$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_2 = 180° \tag{1}$$



Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2 und die Verlängerung von P_2A_2 über A_2 hinaus durch P_4, also gilt

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° = \alpha_2 + \beta_2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha_3 + \beta_3 = 180°$. Also geht die Verlängerung von P_3A_3 über A_3 hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_3 verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_3 und A_3. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_4; somit ist $P_4 = P_1$ bewiesen.

b) Nach den Voraussetzungen über $O, A_n, P_1, A_1, ..., A_{n-1}, P_n$ sind $OA_nP_1A_1$, $OA_1P_2A_2$, ..., $OA_{n-1}P_nA_n$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, ..., $\alpha_{n-1} = \angle P_{n-1}A_{n-1}O$, $\beta_{n-1} = \angle P_nA_{n-1}O$, $\alpha_n = \angle P_nA_nO$, $\beta_n = \angle P_1A_nO$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_n = \alpha_2 + \beta_1 = ... = \alpha_n + \beta_{n-1} = 180° \tag{3}$$

Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2, ... die Verlängerung von $P_{n-1}A_{n-1}$ über A_{n-1} hinaus durch P_n, also gilt

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° = ... = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\alpha_n + \beta_n = 180°$. Also geht die Verlängerung von P_nA_n über A_n hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_n verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_n und A_n. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_{n+1}; somit folgt für jedes $n \geq 3$ aus den Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 251233A
Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13} \qquad (1)$$

Wir definieren $p := 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Dann ist einerseits p durch 3, 5 , 7 und 11 teilbar, also $\frac{p}{3}, \frac{p}{5}, \frac{p}{7}, \frac{p}{11} \in \mathbb{N}$ und andererseits $p \equiv 2 \cdot 7 \cdot (-2) \equiv 2 \cdot (-14) \equiv 2 \cdot (-1) \equiv -2 \pmod{13}$, also $\frac{p+2}{13} \in \mathbb{N}$.
Für jede positive ganze Zahl k ist mit $x_1 := 2^{\frac{p+13kp}{3}}$, $x_2 := 2^{\frac{p+13kp}{5}}$, $x_3 := 2^{\frac{p+13kp}{7}}$, $x_4 := 2^{\frac{p+13kp}{11}}$ und $x_5 := 2^{\frac{p+2}{13}+kp}$

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} = 2^{2+p+13kp} = \left(2^{\frac{p+2}{13}+kp}\right)^{13} = x_5^{13}$$

Damit gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3B - 251233B
Beweisen Sie, dass es unter allen Zerlegungen $100 = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ der Zahl 100 in reelle Faktoren $z_i \geq 2$ $(i = 1, 2, ..., n;$ n positiv ganzzahlig) eine Zerlegung gibt, für die die Summe $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

Für fixiertes n gilt aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der z_i die Ungleichung

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \geq \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n}$$

also $s \geq n \cdot \sqrt[n]{100}$, wobei Gleichheit genau für $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \sqrt[n]{100}$ angenommen wird. Wir bezeichnen die minimal mögliche Summe für dieses n mit s_n, also $s_n := n \cdot \sqrt[n]{100}$.

Da alle $z_i \geq 2$ sind und $2^7 = 128 > 100$ ist, muss $n \leq 6$ gelten. Es ist $s_1 = 100$, $s_2 = 20$, $s_3 = 3 \cdot \sqrt[3]{100}$, $s_4 = 4 \cdot \sqrt{10}$, $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und $s_6 \cdot \sqrt[6]{100} = 6 \cdot \sqrt[3]{10}$.
Es ist $s_3 < 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 15 < s_2$ und $s_4 < s_3 \Leftrightarrow s_4^2 < s_3^2$, also äquivalent zu $160 < 9 \cdot \sqrt[3]{100^2} = 90 \cdot \sqrt[3]{10}$, was wegen $90 \cdot \sqrt[3]{10} > 90 \cdot \sqrt[3]{8} = 180$ wahr ist.

Wegen $s_4 > s_5 \Leftrightarrow s_4^2 > s_5^2 \Leftrightarrow 160 > 25 \cdot \sqrt[5]{100^2} \Leftrightarrow \frac{64}{10} > \sqrt[5]{10^4} \Leftrightarrow \frac{2^{6 \cdot 5}}{10^5} > 10^4 \Leftrightarrow 2^{30} > 10^9 \Leftrightarrow 2^{10} > 1000$, was wegen $2^{10} = 1024$ wahr ist.
Schließlich ist $s_5 < s_6 \Leftrightarrow s_5^3 < s_6^3 \Leftrightarrow 1250 \cdot \sqrt[5]{10} < 2160 \Leftrightarrow \sqrt[5]{10} < \frac{216}{125} = \frac{1696}{1000}$. Dies ist wegen $\frac{1696}{1000} > \frac{1667}{1000} > \frac{5}{3}$ einerseits und $\left(\frac{5}{3}\right)^5 = \frac{5^5}{3^5} = \frac{3125}{243} > 10$, also $\sqrt[5]{\frac{5}{3}} > \sqrt[5]{10}$, andererseits eine wahre Aussage.

Damit ist s_5 der kleinste der Werte, die gesuchte minimale Summe ist $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und die zugehörigen Werte, die diese liefern, lauten $z_1 = \cdots = z_5 = \sqrt[5]{10}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 251234
Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, ..., A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränke S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht.
In dem Schrank S_1 befinden sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7;
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

I. Wenn für eine Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind, so folgt:
Angenommen, es wäre A_1 in S_1. Dann erhielte man die in der Tabelle dargestellten Schlussfolgerungen

		Folgerung aus (1)	(3)	(8)	(7)	(2)
A_1	S_1					
A_2					S_2	
A_3		S_1				
A_4			S_2			
A_5		S_1				
A_6						S_2
A_7				S_2		
A_8			S_2			

Die dabei erhaltene Aussage "A_6 in S_2" hätte nach (6) zur Folge, dass A_4 in demselben Schrank wie A_5 wäre, somit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_1 in S_2 (9).
Angenommen weiter, es wäre A_3 in S_1. Dann erhielt man aus (3), dass entweder A_4 oder A_8 in S_2 wären. Die erhaltene Aussage "A_4 in S_2" hätte nach (4) zur Folge, dass A_1 und A_8 nicht beide in S_2 wären, womit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_3 in S_2. (10)
Aus (10) und (2) folgt A_2 in S_2 (11).
Aus (9), (11) und (7) folgt A_7 in S_1. (12).

Angenommen schließlich, es wäre A_8 in S_1. Dann wäre nach (8) A_5 in S_1, nach (6) A_4 in S_1 und nach (5) A_6 in S_2. Die dabei erhaltene Aussage A_4 in S_1 hätte nach (4) zur Folge, dass A_8 in S_2 wäre, womit nochmals ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_8 in S_2. (13)
Aus (9), (13) und (4) folgt A_4 in S_1. (14)
Aus (13), (8) und (12) folgt A_5 in S_2. (15)
Aus (14), (15) und (6) folgt A_6 in S_1. (16)
Also können nur für die in (9) bis (16) angegebene Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sein.

II. Für die Verteilung (9) bis (16) gilt:
A_1 ist nicht in S_1; A_3 und A_5 nicht in S_1; also ist (1) wahr.
A_2 ist nicht in S_1; A_3 nicht in S_1; also ist (2) wahr.
A_3 ist nicht in S_1; A_4 nicht in S_2; also ist (3) wahr.
A_4 ist in S_1; A_1 und A_8 sind beide in S_2; also ist (4) wahr.
A_5 ist nicht in S_1; A_6 ist in demselben Schrank S_1 wie A_7; also ist (5) wahr.
A_6 ist in S_1; A_4 ist nicht in dem Schrank S_2, in dem A_5 ist; also ist (6) wahr.
A_7 ist in S_1; A_1 ist in demselben Schrank S_2 wie A_2; also ist (7) wahr.
A_8 ist nicht in S_1; A_5 ist nicht in dem Schrank S_1, in dem A_7 ist, also ist (8) wahr.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau bei der in (9) bis (16) angegebenen Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 251235
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} = 6 \cdot \sqrt{x} \qquad (1)$$

Es ist $6 \cdot \sqrt{x} = \frac{(x+2)^2+8x}{x+2}$ bzw. $(x+2)^2+8x = 6\sqrt{x} \cdot (x+2)$. Nach Quadrieren und der Substitution $y := (x+2)^2$ erhält man $y^2+16xy+64x^2 = 36xy$, also $y^2-20xy+64x^2 = 0$ und damit $(y-10x)^2 = 36x^2$, mithin $y = (10 \pm 6)x$, d.h. $y_1 = 4x$ und $y_2 = 16x$.

Setzt man dies ein, erhält man einerseits $4x = (x+2)^2 = x^2+4x+4$, also $x^2 = -4$, was auf keine reellen Lösungen führt, bzw. andererseits $16x = x^2+4x+4$, also $x^2-12x+4 = 0$ bzw. $x = 6 \pm \sqrt{36-4} = 6 \pm 4\sqrt{2}$.

Da beide Werte wegen $6 > 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} > 2$ positiv sind, waren sowohl das Multiplizieren mit $x+2 > 2 > 0$ als auch das Quadrieren Äquivalenzumformungen, sodass dies auch beides Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 251236
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1, ..., P_{2n}$ im Raum so gelegen, dass es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen.
Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge $M = \{P_1, ..., P_{2n}\}$ angehören.
Für jede Ebene ϵ, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ϵ die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ϵ ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ϵ annehmen kann!

Für jeweils $2n$ Punkte in der angegebenen Lage und für jede Ebene ϵ, die keinen Punkt von M enthält, gilt:
Die Ebene ϵ zerlegt den Raum in zwei Halbräume, und mit einer natürlichen Zahl $k \leq n$ gilt: In einem dieser beiden Halbräume liegt eine Menge M_1 von k Punkten aus M, in dem anderen liegt die aus den übrigen $2n-k$ Punkten bestehende Menge M_2.
Ferner gilt für jedes Tetraeder aus T: Mit einer natürlichen Zahl $h \leq 2$ liegen in einem dieser Halbräume h Eckpunkte des Tetraeders, in dem anderen $4-h$ Eckpunkte des Tetraeders.
Ist $h = 0$, so schneidet ϵ das Tetraeder nicht; ist $h = 1$, so schneidet ϵ das Tetraeder in einem Dreieck; ist $h = 2$, so schneidet ϵ das Tetraeder in einem Viereck.

Somit erhält man genau dann ein Tetraeder aus T, das von ϵ in einem Viereck geschnitten wird, wenn man als Eckpunktmenge die Vereinigungsmenge aus einer beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_1 von $M1$ und einer unabhängig hiervon beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_2 von M_2 nimmt. Dabei führen zwei Auswahlmöglichkeiten für Z_1 und Z_2 genau dann zu demselben Tetraeder, wenn sie sowohl in Z_1 als auch in Z_2 übereinstimmen.

Die Anzahl aller dieser Auswahlmöglichkeiten ist somit die in der Aufgabe erklärte Zahl t_ϵ. Sie ergibt sich, indem man die Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_1 mit der Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_2 multipliziert, d.h., es gilt

$$\begin{aligned} t_\epsilon &= \binom{k}{2} \cdot \binom{2n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{4}(n-(n-k))(n-1-(n-k))(n+(n-k))(n-1+(n-k)) \\ &= \frac{1}{4}(n^2-(n-k)^2)((n-1)^2-(n-k)^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Für alle natürlichen Zahlen $k \leq n$ gilt nun $0 \leq n-k \leq n$, also

$$0 \leq n^2-(n-k)^2 \leq n^2$$
$$(n-1)^2-(n-k)^2 \leq (n-1)^2 \quad \text{sowie} \quad (n-1)^2 \geq 0$$

Daraus folgt

$$t_\epsilon \leq \frac{1}{4}n^2 \cdot (n-1)^2 \tag{2}$$

Für $k = n$ ergibt sich aus (1) in (2) das Gleichheitszeichen. Somit ist $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ der gesuchte größtmögliche Wert von t_ϵ.

Übernommen von [5]

9.27.4 IV. Runde 1985, Klasse 12

Aufgabe 1 - 251241
Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, dass unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.
Man beweise, dass der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, dass an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

Die Gäste seien mit A bis E bezeichnet. Wir zeigen zuerst, dass jeder Gast genau zwei der anderen Gäste wechselseitig kennt:

Wir betrachten o.B.d.A. Gast A. Würde A keinen der weiteren Gäste kennen, so müssten sich alle anderen Gäste paarweise wechselseitig kennen, damit unter den drei Personen A und zwei beliebigen weiteren Gästen ein solches sich kennendes Paar vorkommt. Dann jedoch kennen sich B, C und D wechselseitig, sodass unter diesen dreien keine zwei existieren, die sich nicht gegenseitig kennen, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung darstellt.
Also muss A mindestens einen weiteren Gast, o.B.d.A. B, kennen. Würde A nun keinen weiteren Gast kennen, erhielte man den analogen Widerspruch, dass sich B, C und D jeweils paarweise kennen müssten, es also unter diesen dreien wieder keine zwei gäbe, die sich nicht kennen würden. Also muss A noch mindestens einen weiteren Gast, o.B.d.A. E, kennen.

Mit völlig analogem Vorgehen unter Vertauschung von "kennen" und "nicht kennen", zeigt man auch, dass A mindestens zwei der Gäste nicht kennt, was dann C und D sein müssen.
Da A hierbei beliebig gewählt wurde, gilt für jeden Gast, dass er genau zwei der anderen Gäste kennt. Insbesondere gilt dies auch für B und E, die also neben A noch jeweils genau einen weiteren Gast kennen. Würden sie sich gegenseitig kennen, hieße das, dass sie beide sowohl C als auch D nicht kennen, sodass C und D nur maximal einen Gast (nämlich den jeweils anderen) kennen könnten, was ein Widerspruch zur gerade gemachten Aussage, dass jeder Gast genau 2 andere kennt, wäre. Also können sich B und E nicht kennen.

Der zweite B bekannte Gast neben A sei o.B.d.A. C. Damit kennt D weder A noch B, muss also sowohl C als auch E kennen, sodass sich die Anordnung $A - B - C - D - E - A$ ergibt, die der Aufgabenstellung genügt, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 251242
Es seien $q_1, q_2, ..., q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen. Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot ... \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25}$$

Seien im Folgenden die reellen Funktion f und g definiert durch

$$f(x) := \frac{2}{(2x+1)^3 - (2x+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{2x+2}$$

und

$$g(x) := \frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + \frac{2}{x^3-1}$$

Unter Benutzung von

$$\forall x > 1 : \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x^3-1} < \exp\left(\frac{2}{x^3-1}\right) < \exp\left(\frac{2}{x^3-x}\right)$$

gilt dann zunächst

$$\prod_{k=1}^{n} g(q_k) < \prod_{p\in\mathbb{P}} g(p) < g(2)g(3)\prod_{k=2}^{\infty} g(2k+1) < g(2)g(3)\exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} f(k)\right)$$

und unter Verwendung der Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) < f(2) + \int_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln(\frac{25}{24})$$

erhalten wir schließlich als obere Schranke für unser Produkt

$$\frac{18}{13}\exp\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{25}{24}\right)\right) \approx 1.4369$$

was also dann tatsächlich noch knapp unter der "angepeilten" Marke von

$$\frac{36}{25} \approx 1.44$$

hier liegt.

Aufgabe gelöst von weird

2. Lösung:
Lemma: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für $n = 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{6^3+1}{6^3-1} = \frac{217}{215} = \frac{31}{30}\frac{6(6+1)}{6^2+6+1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die obige Aussage für eine natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt, folgt auch die Aussage für $n+1$, denn wir erhalten

$$\prod_{k=5}^{n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{(n+1)^2+(n+1)+1}$$

$$= \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{n+2}{n}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} = \frac{31}{30}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2+(n+1)+1}.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Seien nun die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) gegeben durch

$$a_n = \prod_{k=6}^{2n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1},\ b_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1} \quad \text{und} \quad c_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1}.$$

Aus

$$\frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} = 1 + \frac{2}{(2k+1)^3-1} < 1 + \frac{2}{(2k)^3+1} = \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1}.$$

folgt $c_n < b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$. Weiter erhalten wir mit obigem Lemma

$$c_n^2 < b_n \cdot c_n = a_n < \frac{31}{30}.$$

Für m paarweise verschiedene Primzahlen $q_1, \dots, q_m$, gibt es eine natürlich Zahl n, sodass gilt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{q_k^3+1}{q_k^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1}\frac{3^3+1}{3^3-1}\frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1}\frac{3^3+1}{3^3-1}\frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \sqrt{\frac{31}{30}} < \frac{36}{25}.$$

Aufgabe gelöst von ochen

Anmerkung:

Das unendliche Produkt (erstmal ohne Einschränkung auf Primzahlen) ist ein Teleskopprodukt ist, welches eine Lösung über Induktion motiviert. Wir haben nämlich

$$\frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)} = \frac{k+1}{k-1}\frac{k(k-1)+1}{k(k+1)+1}$$

und wenn man das Produkt aufeinanderfolgender Faktoren (beginnend mit irgendeinem $k \geq 2$) hinschreibt,

$$\frac{k+1}{\boldsymbol{k-1}}\frac{\boldsymbol{k(k-1)+1}}{k(k+1)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+2}}{\boldsymbol{k}}\frac{(k+1)k+1}{(k+1)(k+2)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+3}}{k+1}\frac{(k+2)(k+1)+1}{\boldsymbol{(k+2)(k+3)+1}},$$

so sieht man, dass nach Wegkürzen "links" nur der blau markierte Teil übrig bleibt und "rechts" nur der orange Teil. Das Produkt von einem Index $k \geq 2$ zu einem $n > k$ ist also gleich

$$\left(\boldsymbol{1+\frac{1}{k(k-1)}}\right)\left(\boldsymbol{1-\frac{1}{n(n+1)+1}}\right)$$

und da der rechte Faktor für $n \to \infty$ gegen 1 geht, ist der Wert des unendlichen Produktes gleich $1+\frac{1}{k(k-1)}$.
Und tatsächlich lässt sich nun die Aufgabe schnell lösen, indem man ausrechnet, dass

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1}\cdots\frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{5^3+1}{5^3-1}\cdot\frac{7^3+1}{7^3-1}\cdot\left(\boldsymbol{1+\frac{1}{11\cdot 10}}\right) < \frac{36}{25}$$

gilt (beachte, dass das Produkt durch Hinzunehmen von Faktoren größer wird, da jeder Faktor größer als 1 ist).

Anmerkung von Kornkreis

Aufgabe 3 - 251243
Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?
(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Die Funktion $f(x) := 1 - \frac{2}{1+3^x}$ erfüllt alle Eigenschaften. Wegen $3^x > 0$ für alle reellen Zahlen x ist die Funktion für alle solchen auch definiert und nimmt reelle Funktionswerte an. Genauer ist sogar $f(1) = 1 - \frac{2}{1+3} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, also Eigenschaft (2) erfüllt. Zum Nachweis von Eigenschaft (1) seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt einerseits

$$f(x+y) = 1 - \frac{2}{1+3^{x+y}}$$

und andererseits

$$1+f(x)f(y) = 1 + \left(1-\frac{2}{1+3^x}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{1+3^y}\right) = 2 - \frac{2}{1+3^x} - \frac{2}{1+3^y} + \frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}$$

sowie

$$f(x)+f(y) = 2 - \frac{2}{1+3^x} - \frac{2}{1+3^y}$$

also

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = 1 - \frac{\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}}{2-\frac{2}{1+3^x}-\frac{2}{1+3^y}+\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}} = 1 - \frac{2}{(1+3^x)(1+3^y)-(1+3^y)-(1+3^x)+2}$$

sodass es nun noch genügt zu zeigen, dass

$$1+3^{x+y} = (1+3^x)(1+3^y) - (1+3^y) - (1+3^x) + 2$$

ist, was man aber leicht durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nachrechnet.

Aufgabe gelöst von cyrix

2. Lösung:
Wegen (1) gilt

$$1 + f(x+y) = 1 + \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

$$1 + f(x+y) = \frac{(1+f(x))(1+f(y))}{1+f(x)f(y)} \qquad (3)$$

In der gleichen Art und Weise erhält man:

$$1 - f(x+y) = \frac{(1-f(x))(1-f(y))}{1+f(x)f(y)} \qquad (4)$$

Teilt man (3) durch (4), folgt:

$$\frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \cdot \frac{1+f(y)}{1-f(y)}$$

Das erinnert stark an das Potenzgesetz $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, so dass wir setzen können:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = a^x$$

Mithilfe von Gleichung (2) haben wir

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 = a^1$$

also $a = 3$, so dass gilt:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = 3^x$$

Nun noch nach $f(x)$ auflösen:

$$f(x)(3^x+1) = (3^x-1)$$

$$f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1}$$

Damit wäre die Lösung prinzipiell gefunden. Man kann noch Zähler und Nenner durch $3^{\frac{x}{2}}$ teilen:

$$f(x) = \frac{3^{\frac{x}{2}} - 3^{-\frac{x}{2}}}{3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}}$$

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\ln 3\right)$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 251244
Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$, $A_2A_3 = d$, $A_2A_4 = e$, $A_3A_4 = f$.
Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so dass die Summe s der Quadrate des Abstandes des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt.
Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

Der Ausdruck

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} |P - A_i|^2 &= \sum_{i=1}^{4} \left(|P|^2 - 2\langle P,A_i\rangle + |A_i|^2\right)\\
&= 4|P|^2 - 2\left\langle P, \sum_{i=1}^{4} A_i\right\rangle + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2\\
&= |2P|^2 - 2\left\langle 2P, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2\\
&= \left|2P - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2\end{aligned}$$

wird offenbar genau dann minimal, wenn $P = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 A_i$ der Schwerpunkt des Tetraeders ist. Der gesuchte minimale Wert s ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
s &= -\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= -\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 4}\langle A_i, A_j\rangle\right) + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 4}\langle A_i, A_j\rangle\\
&= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 4}\frac{1}{2}\left(|A_i|^2 + |A_j|^2 - |A_i - A_j|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le 4}|A_i - A_j|^2\\
&= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).
\end{aligned}$$

Aufgabe gelöst von Nuramon und ochen

Aufgabe 5 - 251245
Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d.h., es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ...
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

Wir zeigen im Folgenden, dass es ein solches N gibt, indem wir die dazu äquivalente Behauptung beweisen, dass es ein S gibt, sodass für jedes $s > S$ weniger als $\frac{s}{4}$ Primzahlen $p \le s$ gibt. Ist dem nämlich so, dann gilt insbesondere für jede Primzahl $p_n > S$ mit $s := p_n$, dass $n < \frac{s}{4} = \frac{p_n}{4}$, also $p_n > 4n$ gilt.

Für eine Primzahl $p > 7$ gilt, dass sie weder durch 2, 3, 5 noch 7 teilbar ist. Also kann sie nur in einer von zwei Restklassen modulo 2, in nur zwei von drei Restklassen modulo 3, in nur 4 von 5 Restklassen modulo 5 und in nur 6 der 7 Restklassen modulo 7 liegen. Nach dem chinesischen Restsatz lässt sich wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 2, 3, 5 und 7 jede Kombination der Restklassen modulo 2, 3, 5 und 7 zu einer modulo $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$ zusammenfassen, sodass p nur in $1\cdot 2\cdot 4\cdot 6 = 48$ der 210 Restklassen modulo liegen kann.

Da 210 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen alle Restklassen modulo 210 durchlaufen, können sich unter diesen nur höchstens 48 Primzahlen, die größer als 7 sind, befinden. Insbesondere gibt es also für jedes positive ganze k höchstens $48\cdot k + 4$ Primzahlen, die kleiner oder gleich $210\cdot k$ sind.

Es sei $S := 12\cdot 210$, $s > S$ und k die größte ganze Zahl mit $210k \le s$. Dann ist einerseits $k \ge 12$ und andererseits $s < (k+1)\cdot 210$. Also gibt es höchstens so viele Primzahlen $p \le s$, wie es Primzahlen $p \le (k+1)\cdot 210$ gibt. Nach dem Vorabsatz sind dies aber höchstens

$$48\cdot(k+1) + 4 = 48k + 52 = \frac{210}{4}\cdot k - \frac{18}{4}\cdot k + 52 \le \frac{s}{4} - \frac{9}{2}\cdot 12 + 52 = \frac{s}{4} - 54 + 52 < \frac{s}{4}, \square$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 251246A
Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei Spiegelzahl genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d.h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358853, 27672, 44444 Spiegelzahlen.
Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

Wir zeigen im Folgenden, dass für jede solche Zahl a eine durch a teilbare Spiegelzahl existiert:

Es sei b die Zahl, die aus a entsteht, wenn man aus ihrer Primfaktorzerlegung alle Faktoren 2 und 5 (sofern enthalten) streicht. Damit ist $ggT(b,10) = 1$ und nach dem Satz von Euler-Fermat gilt $10^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$, wobei $\phi(b)$ die zu b teilerfremden Restklassen modulo b angibt (also die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq b$ mit $ggT(b,n) = 1$). Offensichtlich ist $\phi(b) \geq 1$ für alle natürlichen Zahlen $b \geq 1$. Auch gilt offenbar für jede natürliche Zahl k, dass $10^{k\cdot\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$ gilt.

Da a nicht durch 10 teilbar ist, ist $\frac{a}{b}$ eine reine Zweier- oder Fünferpotenz (oder 1). Wegen $a < 100$ und $2^7 = 128 > 100$ sowie $5^7 > 5^3 = 125 > 100$ ist eine natürliche Zahl genau dann durch a teilbar, wenn sie sowohl durch b teilbar ist als auch die aus ihren letzten 6 Ziffern gebildete Zahl durch $\frac{a}{b}$. (Dies nutzt die Teilerfremdheit von b und $\frac{a}{b}$ aus.)

Es sei c das kleinste Vielfache von $\phi(b)$, welches größer oder gleich 6 ist. Weiter definieren wir s die (ggf. um führende Nullen ergänzte) c-stellige Zahl mit Wert $\frac{a}{b}$ und t die c-stellige Zahl, die durch Spiegelung aus s entsteht. Dann besitzt t keine führende Null, da dies die Einerziffer von s ist. Wäre diese aber 0, so s und damit a durch 10 teilbar.
Weiterhin sei m die kleinste positive ganze Zahl, die $s + 10t + m \equiv 0 \pmod b$ erfüllt. Abschließend sei die natürliche Zahl n wie folgt definiert:

$$n = s + \sum_{k=1}^{m} 10^{k\cdot c} + t \cdot 10^{m\cdot c+1}$$

Dann ist n eine Spiegelzahl: Bei der Definition der Zahl n als die angegebene Summe treten keine Summen von Ziffern an der gleichen Stelle auf: Da s nur c-stellig ist, aber alle weiteren Summanden der Summe mindestens den Faktor 10^c beinhalten, gibt es hier keine Überlappung.

Auch die einzelnen weiteren Summanden besitzen offenbar jeweils unterschiedliche Zehnerpotenzen und abschließend wird t mit der größten in der Definition vorkommenden Zehnerpotenz multipliziert. Also können wir die Ziffern einzeln vergleichen und es gilt nach Konstruktion, dass die erste Ziffer von n gleich der von t und damit der letzten von s und damit von n ist. Dies gilt auch für die entsprechenden zweiten, dritten, ..., und c-ten Ziffern.

Darüber hinaus sind alle weiteren Ziffern von n gleich Null, es sei denn, die entsprechende Stelle wurde mit einem Summanden der Form $10^{k\cdot c}$ auf Eins gesetzt. Diese liegen aber symmetrisch zur Stelle mit Exponenten $\frac{m+1}{2} \cdot c$. Da t eine c-stellige Zahl ist, besitzt n genau $(m+1)\cdot c$ Stellen, sodass die Symmetrie genau "in der Mitte" der Zahl liegt, es sich bei n also um eine Spiegelzahl handelt.

Weiterhin ist n durch $\frac{a}{b}$ teilbar, da s dadurch teilbar ist sowie jede Zehnerpotenz mit Exponenten von mindestens 6. Nach Definition ist aber $c \geq 6$, sodass diese Teilbarkeitsaussage für jeden Summanden in der Definition von n und damit auch für n selbst gilt.

Schließlich ist nach Konstruktion auch $n \equiv s + \sum_{k=1}^{m} 1 + 10 \cdot t \equiv 0 \pmod b$ und somit n durch b, also insgesamt auch durch a teilbar, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6B - 251246B
Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ϵ die Größe des kleinsten Winkels des Dreiecks ABC.
a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so dass für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \sin \epsilon} \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Wir bezeichnen alle Längen und Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ mit ihren kanonischen Bezeichnungen und setzen o.B.d.A. $c = |AB| \geq |AC| = b \geq |BC| = a$ voraus, woraus direkt $\gamma = \angle ACB \geq \beta = \angle CBA \geq \alpha = \angle BAC$ und mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung $c = g$ sowie $\alpha = \epsilon$ folgt. Schließlich sei A der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Dann gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} = d$$

Die zu zeigende Ungleichung ist damit äquivalent zu

$$\frac{2A\cdot\sin\alpha}{ab} < K$$

Setzt man hierin noch $2A = ab\sin\gamma$ ein, erhält man die äquivalente Ungleichung

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma < K$$

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ mit stumpfem Winkel γ nimmt für ein Dreieck mit gleichem (oder größerem) kleinsten Innenwinkel α und rechtem Innenwinkel γ das Produkt $\sin\alpha\cdot\sin\gamma$ einen größeren Wert an, sodass wir o.B.d.A. $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 90°$ fordern können.
Für festes γ wird das Produkt $\sin\alpha\cdot\sin\gamma$ maximal, wenn α als kleinster Innenwinkel maximal wird, also $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\cdot(180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ gilt. Dann ist

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma = \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}\cdot\sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

genau dann maximal, wenn es $(1+x)\cdot(1-x^2)$ mit $x := \cos\gamma$ und $60° \leq \gamma$ (wegen $90° - \frac{\gamma}{2} = \alpha \leq \gamma$), also $\frac{1}{2} \geq x \geq 0$, auch ist.

Es ist für die Funktion

$$f(x) := (1+x)\cdot(1-x^2) = -x^3 - x^2 + x + 1$$

die Ableitungsfunktion

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = (x+1)(-3x+1)$$

welche im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ genau die eine Nullstelle $\frac{1}{3}$ besitzt. Für kleinere Werte im Intervall ist f' positiv, für größere negativ, sodass f an dieser Stelle im Intervall sein globales Maximum von $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9} = \frac{32}{27}$ annimmt.
Es ergibt sich für $\gamma = \arccos\frac{1}{3}$ und $\alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$, dass das Produkt $\sin\alpha\cdot\sin\gamma$ den Wert

$$\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9}\cdot\sqrt{3} =: K'$$

annimmt; und für alle anderen Innenwinkel-Belegungen einen kleineren.
Damit erfüllt jede reelle Zahl $K > K'$ die Ungleichung der Aufgabenstellung, während es kein kleinstes solches K gibt, da im Fall $K = K'$ bei den angegebenen Winkeln der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.28 XXVI. Olympiade 1986

9.28.1 I. Runde 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261211
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):

(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

I. Wenn $(x; y; z)$ ein Tripel mit den Eigenschaften (1) und (2) ist, dann ist nach (1)

$$x = n - 1 \qquad , \qquad y = n \qquad , \qquad z = n + 1 \tag{3}$$

mit einer ganzen Zahl n, also $x + y + z = 3n$, und aus (2) folgt

$$(n - 1) \cdot 3 \cdot n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$$
$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = 0$$

Da ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn ein Faktor 0 ist, folgt: $n = 0$ oder $n = 1$ oder $n = 2$. Wegen (3) können also nur die Tripel $(-1; 0; 1), (0; 1; 2), (1; 2; 3)$ die geforderten Eigenschaften.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie sind Tripel von in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgenden ganzen Zahl x,y,z und sie erfüllen die Probe in der Gleichung (2).

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 261212
Man beweise:

a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

a) Sind a, b und c beliebige positive reelle Zahlen, für die $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, dann gilt:

$$c > a \qquad ; \qquad c > b \qquad ; \qquad a + b > c \tag{1,2,3}$$

denn es gilt

$$(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 > a^4 + b^4 = c^4$$

also $(a + b)^4 > c^4$, und wegen $a + b > 0$ folglich $a + b > c$. Aus (1), (2), (3) folgt:

Ist $(a$,b,$c)$ ein Tripel positiver reeller Zahlen mit $c^4 = a^4 + b^4$, so erfüllen a,b,c die Bedingungen der Dreiecksungleichung (dass jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden anderen), also gibt es dann stets ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a,b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, dann ist c der Zahlenwert der größten Seitenlänge der Dreiecks.

Angenommen, dieses Dreieck wäre nicht spitzwinklig, dann läge der genannten Seite ein rechter oder stumpfer Winkel gegenüber, und es würde nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ oder nach dem Kosinussatz $c^2 > a^2 + b^2$, folglich in beiden Fällen $c^2 \geq a^2 + b^2$ gelten, also

$$c^4 \geq (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 > a^4 + b^4$$

mithin also $c^4 > a^4 + b^4$, im Widerspruch zu $c^4 = a^4 + b^4$.

Die Annahme ist also falsch. Das Dreieck ist daher spitzwinklig.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 261213
An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der ČSSR, der VR Polen und der DDR teil. Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:

(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprechen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)

(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.

(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.

(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.

a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.

b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

Die Länder seien durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen mit U, T, P, D bezeichnet, die Sprachen entsprechend mit u, t, p, d.
In der folgenden Tabelle wird die Tatsache, dass ein Teilnehmer eine bestimmte Sprache beherrscht, durch "+" gekennzeichnet, Nichtbeherrschung wird durch "-" markiert. Aus (1), (3) und (4) folgt bei geeigneter Wahl der Reihenfolge der beiden polnischen Teilnehmer

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+			+	+		
t			+	+	+	-		
p					+	+		
d					-	-	+	+

Aus (3) erhält man weiter, dass die Teilnehmer, welche deutsch sprechen, nicht polnisch sprechen, insbesondere beherrschen die Vertreter der DDR nicht polnisch. Weil polnisch nach (2) von Vertretern dreier Länder gesprochen wird, muss jeweils mindestens ein Teilnehmer aus der Ungarischen VR und der ČSSR polnisch sprechen, dies sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit der erste Vertreter dieser Länder.

Wegen (3) sprechen diese nicht deutsch, aber ungarisch. Dasselbe Argument zeigt für die deutsche Sprache, dass die zweiten Vertreter Ungarns und der ČSSR deutsch sprechen, woraus nach (3) folgt, dass diese nicht polnisch sprechen.

Das bisherige Ergebnis wird durch die nachstehende Tabelle veranschaulicht:

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+	+		+	+		
t			+	+	+	-		
p	+	-	+	-	+	+	-	-
d	-	+	-	+	-	-	+	+

Damit folgt als Ergebnis zu a): Genau vier der Teilnehmer sprechen deutsch: zwei Vertreter der DDR und jeweils einer aus der Ungarischen VR und der ČSSR.

Weiter folgt zu b): Wegen (2) wird ungarisch von Vertretern aus genau drei Ländern gesprochen, also beherrschen die Teilnehmer der DDR kein Ungarisch. Aus (1) folgt, dass sie tschechisch sprechen (denn sie sprechen auch nicht polnisch). Wegen (2) ist es deshalb unmöglich, dass ein Teilnehmer aus Ungarn tschechisch spricht. Der erste Teilnehmer aus der Ungarischen VR spricht deshalb genau ungarisch und polnisch, der zweite genau ungarisch und deutsch.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 261214
Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n+b}{2n-1} \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

definiert ist.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \tag{2}$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.

I. Für jede reelle Zahl b gilt: Ein Glied a_n der durch (1) definierten Zahlenfolge erfüllt genau dann (2), wenn sowohl

$$1{,}45 < \frac{3n+b}{2n-1} \qquad (3) \qquad \text{als auch} \qquad \frac{3n+b}{2n-1} < 1{,}47 \qquad (4)$$

gilt. Da n nur Werte mit $n \geq 1$, also $2n-1 > 0$ durchläuft, ist (3) äquivalent mit $2{,}9n - 1{,}45 < 3n + b$ und dies mit

$$n > -14{,}5 - 10b \tag{5}$$

ferner ist (4) äquivalent mit $3n + b < 2{,}94n - 1{,}47$ und dies mit

$$n < -24{,}5 - \frac{50}{3}b \tag{6}$$

II. Wenn nun eine Zahl b die Eigenschaft hat, dass die Folge (a_n) genau drei Glieder besitzt, die (2) und folglich sowohl (5) als auch (6) erfüllen, so ist die Zahl $z_1 = (-14{,}5 - 10b)$ kleiner als die Zahl $z_2 = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b)$, und zwischen diesen beiden Zahlen liegen genau drei natürliche Zahlen n. Daraus folgt:

Die Differenz

$$d = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b) - (-14{,}5 - 10b)$$

zwischen diesen beiden Zahlen erfüllt die Ungleichung $2 < d < 4$, also gilt dann

$$2 < -24{,}5 - \frac{50}{3}b + 14{,}5 + 10b < 4$$
$$12 < -\frac{20}{3}b < 14$$
$$-\frac{9}{5} > b > -\frac{42}{20}$$

Die einzige ganze Zahl b, die diese Ungleichung erfüllt, ist $b = -2$. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen der Aufgabe genügen.

III. Umgekehrt gilt für diese Zahl $b = -2$ nach I., dass genau diejenigen Glieder a_n (der durch (1) definierten Zahlenfolge) die Ungleichungen (2) erfüllen, deren Index n sowohl (5) als auch (6), d.h.

$$-14{,}5 + 20 < n < -24{,}5 + \frac{100}{3} \quad \to \quad 5\frac{1}{2} < n < 8\frac{5}{6}$$

erfüllt, d.h. genau die drei Glieder a_n mit $n = 6{,}7{,}8$. (7)

Aus II., III. folgt, dass genau eine ganze Zahl $b = -2$ den Bedingungen genügt und dass die zugehörigen drei Glieder a_n die (2) erfüllen, sich aus (1) mit (7) ergeben:

$$a_6 = \frac{16}{11} \quad ; \quad a_7 = \frac{19}{13} \quad ; \quad a_8 = \frac{22}{15}$$

Übernommen von [5]

9.28.2 II. Runde 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261221
Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x;y;z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \qquad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (3)$$

I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ist, so folgt:
Nach (1) ist $y \neq 0$, also folgt aus (1) $x = \frac{2}{y}$. Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$, also

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad (4)$$

Somit erfüllt die Zahl $u = x^2$ (5) die Gleichung $u^2 - 5u + 4 = 0$ (6).
Aus (6) folgt: u ist eine der Zahlen

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25-16}) \quad \Rightarrow u_1 = 4, \quad u_2 = 1$$

Somit ist x nach (5) eine der Zahlen

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1 \qquad (7)$$

Nach (1) gehört hierzu als Wert für y jeweils die Zahl

$$y_1 = 1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 2; \quad y_4 = -2 \qquad (8)$$

und nach (2) als Wert für z jeweils

$$z_1 = \frac{3}{2}; \quad z_2 = -\frac{3}{2}; \quad z_3 = 3; \quad z_4 = -3 \qquad (9)$$

Daher können nur die Tripel

$$\left(2; 1; \frac{3}{2}\right); \quad \left(-2; -1; -\frac{3}{2}\right); \quad (1; 2; 3); \quad (-1; -2; -3)$$

das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen es wie es aus der Probe ersichtlich wird.

Übernommen von [5]

2. Lösung:
Betrachtet man die Gleichung "$(3) + 2 \cdot (1)$", so erhält man $9 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, also $x + y = \pm 3$.
Analog erhält man aus "$(3) + 2 \cdot (1)$" die Gleichung $1 = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$, also $x - y = \pm 1$.

Wir führen eine vollständige Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von $x + y$ und $x - y$ durch:

Fall 1: Es ist $x + y = 3$.
Fall 1.1: Es ist $x - y = 1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(2,1,\frac{3}{2}\right)$.
Fall 1.2: Es ist $x - y = -1$. Es folgt $(x,y,z) = (1,2,3)$.

Fall 2: Es ist $x + y = -3$.
Fall 2.1: Es ist $x - y = 1$. Es folgt $(x,y,z) = (-1,-2,-3)$.
Fall 2.2: Es ist $x - y = -1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(-2,-1,-\frac{3}{2}\right)$.

Damit lösen genau die vier genannten Tripel das Gleichungssystem, was die Probe bestätigt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 261222
Man ermittle alle diejenigen Tripel (p, q, r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

I. Wenn p, q, r ein Tripel ist, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt (p, q, r) ist nicht das Tripel $(2, 3, 5)$; denn dieses erfüllt wegen $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ nicht die Bedingung (2).
Ferner folgt:
(p, q, r) ist kein Tripel mit $p > 3$ (also auch $q > 3$, $r > 3$); denn jede Primzahl, die größer als 3 ist, lässt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2, ihr Quadrat lässt also in beiden Fällen den Rest 1.
Für jedes Tripel (p, q, r) von Primzahlen $p, q, r > 3$ ist somit $p^2 + q^2 + r^2$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.
Nach (1) verbleibt daher nur die Möglichkeit, dass p, q, r das Tripel $(3, 5, 7)$ ist.

II. Dieses Tripel erfüllt als Tripel dreier aufeinanderfolgender Primzahlen die Bedingung (1), und wegen $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ auch die Bedingung (2).
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das Tripel $(3, 5, 7)$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 261223
In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen.
Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, dass im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:
(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.
Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.
Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

Jede Mannschaft hat gegen genau neun andere Mannschaften je genau zwei Spiele auszutragen, insgesamt also genau 18 Spiele.
Wenn es möglich wäre, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen, folgt aus (1), dass jede Mannschaft an jedem Spieltag genau zwei Spiele zu bestreiten hätte. Hiernach folgte aus (3), dass jede Mannschaft an den ersten vier Tagen acht ihrer Hinspiele, an den letzten vier Tagen acht ihrer Rückspiel und am mittleren, fünften Spieltag genau ein Hinspiel und ein Rückspiel auszutragen hätte.

Da jede Mannschaft an jedem Spieltag zu ihren beiden Spielen anwesend sein müsste, so müssten in jeder der beiden Schwimmhallen wegen (2) stets 5 Mannschaften zu ihren beiden Spielen anwesende sein; nach Voraussetzung bliebe an jedem Tag die Verteilung der Mannschaften auf die beiden Hallen unverändert. Das würde auch für den fünften Spieltag gelten.

Von den fünf Mannschaften in einer Halle hätte an diesem Tag also jede genau ein Hinspiel (und genau ein Rückspiel) auszutragen. Da in jedem Spiel je zwei Mannschaften gegeneinander antreten, hätte man folglich die fünf Mannschaften für die Hinspiele so in Paare aufzuteilen, dass jede Mannschaft in genau einem dieser Paare vorkommt. Das ist wegen der ungeraden Anzahl 5 der Mannschaften nicht möglich.

Die Annahme, dass das Turnier in 9 Tagen durchführbar wäre, führt somit auf einen Widerspruch; das Turnier kann unter Einhaltung der genannten Bedingungen nicht in 9 Tagen durchgeführt werden.

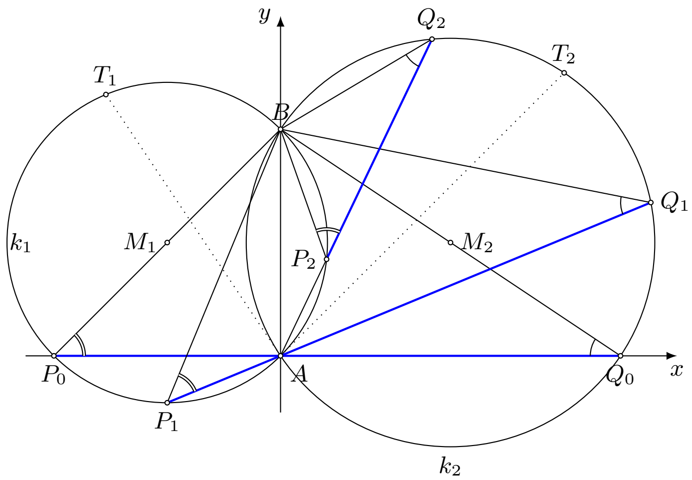
Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 261224
Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, dass sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und dass die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt.
Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.
Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

Bei der vorausgesetzten Lage von k_1 und k_2 (siehe Abbildung) schneidet die in A an k_2 gelegte Tangente den Kreis k_1 außer in A in einem Punkt T_1, und ebenso schneidet die in A an k_1 gelegte Tangente den Kreis k_2 außer in A in einem Punkt T_2, Die sämtlichen zu betrachtenden Längen der Strecke PQ sind dann folgendermaßen zu erhalten:

(1) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_1A}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_1, A). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AT_2}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, T_2). Die Abbildung zeigt zwei Beispiele P_0Q_0 und P_1Q_1.

(2) P durchläuft den innerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, B). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_2B}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_2, B). Die Abbildung zeigt ein Beispiel P_2Q_2.



(3) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BT_1}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, T_1). Dabei durchläuft Q den innerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BA}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, A).

Unter den zu betrachtenden Geraden durch A befindet sich diejenige, die senkrecht zu AB verläuft (oder, als gleichwertige Charakterisierung, parallel zu M_1M_2). Die von ihr erhaltene Strecke PQ hat die in der Abbildung gezeigt Lage P_0Q_0, die zu Fall (1) gehört.

Behauptung: Genau für diese Gerade ist die Strecke PQ möglichst lang.
Beweis:
Es sei PQ irgendeine der zu betrachtenden Strecken, die verschieden von P_0Q_0 ist. Ist sie eine zu Fall (1) gehörende Strecke P_1Q_1, so folgt:
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BP_1A = \angle BP_0A$ und $\angle BQ_1A = \angle BQ_0A$, nach dem Hauptähnlichkeitssatz also $\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BP_0Q_0$.
Ist PQ eine zu Fall (2) gehörende Strecke P_2Q_2, so folgt:
Nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt $\angle BP_2A = 180° - \angle BP_0A$ und $\angle BP_2Q_2 = \angle BP_0A$, nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BQ_2A = \angle BQ_0A$, so dass ebenfalls $\triangle BP_2Q_2 \sim \triangle BP_0Q_0$ folgt.

Da Fall (3) durch Vertauschung von k_1, k_2 in Fall (2) übergeht, gilt in jedem Fall

$$\triangle BPQ \sim \triangle BP_0Q_0 \qquad (*)$$

Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel folgt ferner aus $\angle BAP_0 = 90°$, dass $\angle BM_1P_0 = 180°$ gilt, d.h., dass die Sehne BP_0 ein Durchmesser von k_1 ist. Ebenso ist BQ_0 ein Durchmesser von k_2.

Da aber jede von dem Durchmesser BP_0 verschiedene Sehne BP kürzer als der Durchmesser ist, d.h. $BP < BP_0$ gilt, folgt wegen (*) schließlich $PQ < P_0Q_0$, w.z.b.w.

Übernommen von [5]

9.28.3 III. Runde 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261231
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x;y;z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x+y-z=1 \qquad (1)$$
$$x^2-y^2+z^2=1 \qquad (2)$$
$$-x^3+y^3+z^3=-1 \qquad (3)$$

Indem man $z=x+y-1$ aus Gleichung (1) in (2) einsetzt, erhält man

$$x^2-y^2+z^2-1=x^2-y^2+(x+y)^2-2(x+y)=2(x+y)(x-1)=0$$

Es bietet sich daher folgende Fallunterscheidung an:
1. Fall: $x+y=0$ bzw. $y=-x$.
Wegen (1) folgt daraus sofort $z=-1$ und aus (3) dann $2x^3=0$, also dann weiter $x=y=0$.

2. Fall: $x=1$.
Einsetzen in (1) führt dann auf $y=z$ und aus (3) folgt dann wieder $2y^3=0$, also dann $y=z=0$.
Insgesamt muss also

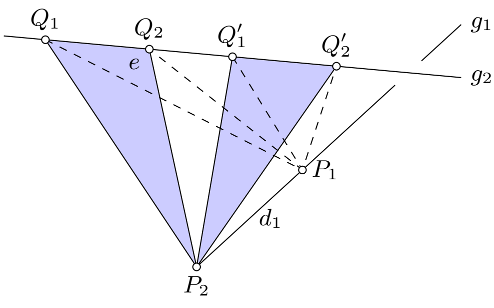
$$(x,y,z)\in\{(0,0,-1),(1,0,0)\}$$

gelten, und das sind auch tatsächlich Lösungen, wie man sofort nachrechnet.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 261232
Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1,P_2 mit $P_1P_2=d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1,Q_2 mit $Q_1Q_2=d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1,P_2,Q_1,Q_2 ein und derselbe Wert.

Es seien auf g_1 sowohl P_1,P_2 mit $P_1P_2=d$ als auch P_1',P_2' mit $P_1'P_2'=d$ sowie auf g_2 sowohl Q_1,Q_2 mit $Q_1Q_2=d$ als auch Q_1',Q_2' mit $Q_1'Q_2'=d$ gelegen, Zu beweisen ist, dass unter diesen Voraussetzungen stets die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und $P_1'P_2'Q_1'Q_2'$ einander volumengleich sind. Dieses Beweis kann folgendermaßen geführt werden:



Es sei e die durch P_2,g_2 verlaufende Ebene. Die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und ${}'_1P_2Q_1'Q_2'$ (1) (siehe Abbildung) haben jeweils eine in der Ebene liegende Seitenfläche, nämlich $P_2Q_1Q_2$ bzw. $P_2Q_1'Q_2'$ (2). Diese beiden Dreiecke sind einander flächengleich, da $Q_1Q_2=Q_1'Q_2'$ gilt und die zu diesen Seiten gehörenden Dreieckshöhen miteinander übereinstimmen, nämlich das Lot von P_2 auf g_2 sind.

Ferner stimmen in den Tetraedern (1) die zu den Seitenflächen (2) gehörenden Tetraederhöhen miteinander überein; sie sind nämlich das Lot von P_1 auf die Ebene e.

Also sind die beiden Tetraeder (1) zueinander volumengleich. Ebenso beweist man, dass die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1'Q_2'$ und $P_1'P_2Q_1'Q_2'$ zueinander volumengleich sind.
Aus beiden Volumengleichheiten folgt die zu beweisende Aussage.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 261233A
Man untersuche ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Jede der vier Zahlen lässt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, dass sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

Es gibt vier solche Zahlen. Zum Beweis genügt es ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen 242, 243, 244, 245:
$242 = 22 + 220$ ist wegen $242 \cdot 20 = 22 \cdot 220$ ein Teiler von $22 \cdot 220$
$243 = 81 + 162$ ist wegen $243 \cdot 54 = 81 \cdot 162$ ein Teiler von $81 \cdot 162$
$244 = 122 + 122$ ist wegen $244 \cdot 61 = 122 \cdot 122$ ein Teiler von $122 \cdot 122$
$245 = 35 + 210$ ist wegen $245 \cdot 30 = 35 \cdot 210$ ein Teiler von $35 \cdot 210$

Heuristische Lösung:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ($n \geq 2$ gilt und) n ein Teiler von einem der Produkte $k \cdot (n-k)$ ($k = 1,...,n-1$) ist. Wegen $k \cdot (n-k) = kn - k^2$ ist das gleichbedeutend damit, dass n ein Teiler von einer der Quadratzahlen k^2 ($k = 1,...,n-1$) ist.
Hierfür ist hinreichend, dass die Zahl n ihrerseits durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar ist; denn wenn dies zutrifft, so existiert eine natürliche Zahl a mit $n = q^2 \cdot a$, und damit ist n wegen $n \cdot a = q^2a^2$ ein Teiler des Quadrates der natürlichen Zahl $k = qa$, die wegen $k = \frac{n}{q}$ und $q > 1$ kleiner als n ist.
Nun kann man z.B. versuchen, vier Zahlen der geforderten Art etwa als

$$n = 2^2 \cdot a \tag{1}$$
$$n + 1 = 3^2 \cdot b \tag{2}$$
$$n + 2 = 5^2 \cdot c \tag{3}$$
$$n + 3 = 7^2 \cdot d \tag{4}$$

zu finden. Hiervon werden (1) und (2), also $4a + 1 = 9b$ etwa gelöst durch $b = 1 + 4t$, $a = 2 + 9t$

$$n = 8 + 36t \tag{5}$$

sodann werden (5) und (3), also $10 + 36t = 25c$ etwa gelöst durch $t = -10 + 25u$, $c = -14 + 36u$

$$n = -352 + 900u \tag{6}$$

schließlich werden (6) und (4), also $-349+900u = 49d$ etwa gelöst durch $u = -16+49v$, $d = -301+900v$,

$$n = -14572 + 44100v$$

für $v = 1$ also $n = 29348$.

Hat man die Lösungsfindung wie hier als Nachweis hinreichender Bedingungen formuliert, so ist eine Probe nicht erforderlich.
Andernfalls ist es für die Korrektheit der Lösung (wie oben bemerkt, sogar allein) erforderlich, die verlangte Eigenschaft zu bestätigen:

$29348 = 4 \cdot 7337 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 2 \cdot 7337$, $y = 2 \cdot 7337$,
$29349 = 9 \cdot 3261 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 3 \cdot 3261$, $y = 6 \cdot 3261$,
$29350 = 25 \cdot 1174 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 5 \cdot 1174$, $y = 20 \cdot 1174$,
$29351 = 49 \cdot 599 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 7 \cdot 599$, $y = 42 \cdot 599$.

Übernommen von [5]

2. Lösung:

Wir betrachten zuerst folgenden Hilfssatz, wobei für die Aufgabe nur die erste Implikation von Bedeutung ist:

Eine natürliche Zahl n lässt sich genau dann als Summe zweier positiver ganzer Zahlen x und y mit $n|x\cdot y$ darstellen, wenn es eine Primzahl p gibt, sodass p^2 ein Teiler von n ist.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass n durch p^2 teilbar ist und wählen $x := \frac{n}{p}$ sowie $y := n - x$. Dann ist $0 < x < n$ eine positive ganze Zahl und damit auch $0 < y < n$ eine solche. Weiterhin ist x durch p teilbar, also auch $y = n - x$, sodass es eine ganze Zahl t mit $y = t \cdot p$ gibt. Dann ist n ein Teiler von $n \cdot t = \frac{n}{p} \cdot (t \cdot p) = x \cdot y$.

Seien nun x und y positive ganze Zahlen mit $x+y = n$ und $n|x\cdot y$. Weiterhin sei p ein beliebiger Primteiler von n, sodass auch $p|x \cdot y$, also $p|x \vee p|y$ und damit wegen $x + y = n$ auch $p|x \wedge p|y$ gilt. Insbesondere sind also sowohl x als auch y durch jeden Primteiler p von n teilbar.
Wäre n quadratfrei, also für keine Primzahl p durch p^2 teilbar, so wäre es das Produkt paarweiser verschiedener Primzahlen, die aber auch alle Teiler von x und von y sein müssten, sodass wegen $x,y > 0$ und $n|x$, $n|y$, also $n \leq x,y$, ein Widerspruch zu $x + y = n$ entstehen würde. Also gibt es mindestens eine Primzahl p mit $p^2|n$, $\square$.

Nun zur Aufgabe:
Da $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ paarweise teilerfremd sind, gibt es nach dem Chinesischen Restsatz eine (und damit unendlich viele) natürliche Zahl m, sodass m bei der Teilung durch 49 den Rest 0, bei der Teilung der 25 den Rest 1, bei der Teilung durch 9 den Rest 2 und bei der Teilung durch 4 den Rest 3 lässt. (Dann ist, wie man leicht nachprüft, $m > 3$, sodass auch $m - 3$ eine natürliche Zahl ist.)

Sei m eine solche natürliche Zahl. Dann ist $m - 3$ durch 2^2, $m - 2$ durch 3^3, $m - 1$ durch 5^2 und m durch 7^2 teilbar, sodass nach dem vorhergehenden Hilfssatz sich jede dieser vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt als Summe $x + y$ positiver ganzer Zahlen und gleichzeitig Teiler vom Produkt $x \cdot y$ dieser beiden Summanden ist. Also gibt es solche Zahlen.

Bemerkung: Das Konstruktionsverfahren lässt sich in analoger Weise auf beliebig viele aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft erweitern.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3B - 261233B
Man beweise, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlänge $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\angle CAB; \angle ABC; \angle BCA$ sowie für den Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt F die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{27\rho}{8F} \qquad (1)$$

Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Nach der Formel $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ und dem Kosinussatz gilt

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1+\cos\alpha) = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4abc}$$

Entsprechend ist

$$\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2+a^2-b^2+2ac}{4abc} \qquad ; \qquad \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4abc}$$

Bezeichnet T die linke Seite der Ungleichung (1), so gilt

$$T = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{4abc}$$

Mit der Abkürzung $s = \frac{1}{2}(a + b + c+)$ also

$$T = \frac{s^2}{abc}$$

Ferner ist $F = \rho \cdot s$ (nach Heron) also

$$T = \frac{s^3}{abc}\frac{\rho}{F} \tag{2}$$

Nun gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc} \tag{3}$$

und darin das Gleichheitszeichen genau im Fall $a = b = c$.
Äquivalent zu (3) ist

$$s^3 \geq \frac{27}{8} abc \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen in (3) ist äquivalent zu dem in (4). Damit folgt aus (2), (4)

$$T \geq \frac{27}{8} \cdot \frac{\rho}{F}$$

d.h. die zu beweisende Ungleichung (1), und es folgt, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau im Fall $a = b = c$, d.h. genau für alle gleichseitigen Dreiecke gilt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 261234
Beweisen Sie:
Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \tag{1}$$

Mit $\alpha = \angle BAD$ ist nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck $\angle BCD = 180° - \alpha$. Nach dem Kosinussatz und wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ gilt daher

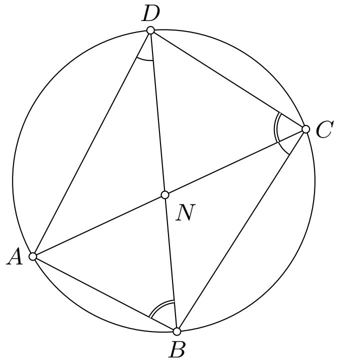
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos\alpha \qquad ; \qquad BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cos\alpha$$

also

$$2BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 2(AB \cdot AD - BC \cdot CD)\cos\alpha \tag{2}$$

Wegen $\angle ANB = \angle DNC$, $\angle BNC = \angle AND$ (Scheitelwinkel) und $\angle ABN = \angle DCN$, $\angle BCN = \angle ADN$ (Peripheriewinkel über dem Boden $\overset{\frown}{AD}$ bzw. $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises, dem das Sehnenviereck einbeschrieben ist) gilt

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \qquad \text{und} \qquad \triangle BCN \sim \triangle ADN \tag{3}$$



Aus (3) folgt $AB : DC = AN : DN$, wegen der Voraussetzung $AN = CN$ also
$AB : CD = CN : DN$ (5). Aus (4) folgt $BC : AD = CN : DN$ (6). Wegen (5) und (6) ist

$$AB : CD = BC : AD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot AD = BC \cdot CD$$

Damit ergibt sich aus (2) die Behauptung (1).

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 261235
Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:
Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n-1$ wird vereinbart. Dann verläuft das Spiel so, dads die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zuge sind:
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, dass Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Wir bezeichnen die Lampen der Reihe nach mit 1,...,n und eine Konfiguration von Ein-/Auszuständen der Lampen als symmetrisch, wenn die beiden Lampen in jedem der Lampenpaare (1,n); $(2, n-1)$; ...; $\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil\right)$ jeweils denselben Ein-/Auszustand haben (wenn n ungerade ist, ist im letzten Lampenpaar nur eine Lampe, sodass für dieses die Gleichheit der Zustände trivialerweise vorliegt).

Lemma: Spieler A hat eine Strategie, sodass er mit jedem seiner Züge immer eine symmetrische Konfiguration erzielt und Spieler B mit jedem seiner Züge zwangsläufig eine nicht-symmetrische Konfiguration hervorruft.
Beweis: Im ersten Zug schalte Spieler A die Lampe(n) der Nummer $\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ an, was eine symmetrische Konfiguration ergibt. Das geht für jedes $1 < k < n - 1$ und jedes $n > 3$.
Sei nun irgendwann im Spielverlauf eine symmetrische Konfiguration gegeben, die nach einem Spielzug von A entstand, und es seien noch ausgeschaltete Lampen vorhanden.

Da nur nebeneinanderliegende ausgeschaltete Lampen angeschaltet werden können, kann Spieler B nun entweder Lampen mit kleinerer Nummer als $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ oder mit größerer Nummer als $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ anschalten. Dies seien die Lampen i,...,j. Aufgrund der Symmetrie vor B's Zug sind die Lampen $n - i + 1$,...,$n - j + 1$ sowohl vor als auch nach B's Zug ausgeschaltet. Demnach ist die Konfiguration nach B's Zug nicht mehr symmetrisch. Spieler A hingegen kann nach B's Zug durch Anschalten der Lampen $n - i + 1$,...,$n - j + 1$ wieder eine symmetrische Konfiguration erreichen. Damit ist das Lemma bewiesen.

Da die Anzahl der ausgeschalteten Lampen durch die Spielzüge von A und B streng monoton abnimmt, und eine endliche Anzahl von Lampen am Anfang vorlag, muss das Spiel irgendwann enden. Wenn A nach obiger Strategie spielt, macht also zwangsläufig A den letzten Zug, weil die Konfiguration, bei der alle Lampen angeschaltet sind, symmetrisch ist, was B nicht erreichen kann. Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6 - 261236
Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Aus (1) und (2) folgt durch vollständige Induktion $x_n > 0$ für alle n = 1,2,3,... und dann

$$\begin{aligned} &9x_n^2 < x_{n+1}^2 < 9x_n^2 + 12x_n + 4 = (3x_n + 2)^3 \\ &3x_n < x_{n+1} < 3x_n + 2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Das ergibt zunächst (durch vollständige Induktion) $x_n > \frac{3^n}{2}$ für alle $n = 1,2,3,...$ und dann

$$3 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 3 + \frac{2}{x_n} < 3 + \frac{4}{3^n}$$

Nach (3) folgt damit

$$\frac{3}{|a|} < \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \tag{5}$$

1. Ist nun $|a| < 3$ (und $a \neq 0$), so gilt für die Zahl $q = \frac{3}{|a|}$ einerseits $q > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; andererseits folgt aus (5) durch vollständige Induktion ($n = 1,2,3,...$)

$$|y_{n+1}| > q \cdot |y_n| \qquad ; \qquad |y_{n+1}| > q^n \cdot |y_1|$$

und wegen $|y_1| > 0$ damit $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty$. Also ist die Folge (y_n) in diesem Fall divergent.

2. Ist $|a| > 3$, so existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \right) = \frac{3}{|a|} < 1 \tag{6}$$

eine Zahl q mit $\frac{3}{|a|} < q < 1$. Für diese Zahl gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; andererseits gibt es wegen (6) eine Zahl N so, dass für alle $n \geq N$

$$\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} < q$$

nach (5) also (durch vollständige Induktion)

$$|y_{n+1}| < q \cdot |y_n| \qquad , \qquad |y_{N+k}| < q^k \cdot |y_N|$$

($k = 1,2,3,...$) ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, also ist die Folge (y_n) in diesem Fall konvergent.

3. Ist $a = 3$, so folgt aus (4) nach Division durch 3^{n+1}

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{2}{3^{n+1}} \tag{7}$$

Daraus folgt einerseits: Die Folge (y_n) ist monoton steigend. (8)
Andererseits ergibt sich durch vollständige Induktion für alle $n = 2,3,4...$

$$y_n < y_{n-1} + \frac{2}{3^n} < y_{n-2} + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} < ...$$
$$< y_1 + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$$

wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ...$ gilt somit: Die Folge (y_n) ist nach oben beschränkt. (9)
Aus (8) und (9) ergibt sich: Die Folge (y_n) ist konvergent.

4. Ist $a = -3$, so gilt: Ist n gerade, so hat y_n denselben Wert wie für $a = 3$. Ist n ungerade, so hat y_n entgegengesetzt gleichen Wert wie für $a = 3$.
Bezeichnet g den Grenzwert der für $a = 3$ gebildeten Folge (y_n), so hat also für $a = -3$ die Teilfolge mit geradem n den Grenzwert g und die Teilfolge der y_n mit ungeradem n den Grenzwert $-g$.
Nach (7) gilt $g \geq y_1$, also $g > 0$ und damit $g \neq -g$. Also ist die gesamte Folge (y_n) im Fall $a = -3$ divergent.

Damit ist gezeigt: Die Folge (y_n) ist genau für alle diejenigen a konvergent, für die $a < -3$ oder $a \geq 3$ gilt.

Übernommen von [5]

9.28.4 IV. Runde 1986, Klasse 12

Aufgabe 1 - 261241
500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind.
Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, dass deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

Für jede positive ganze Zahl $n \neq 2$ sei ein Paket, das genau n Bonbons enthält und (1), (2) erfüllt, sei "n-Paket" genannt.
Zu jedem Bonbon eines n-Pakets gibt es eine Umhüllung, die genau dieses Bonbon enthält (denn andernfalls gäbe es, im Widerspruch zu (2), eine Umhüllung, die dieses nicht nochmals umhüllte Bonbon und daneben weitere Teile enthielte).
Die außer diesen n Umhüllungen der einzelnen n Bonbons sonst noch in dem n-Paket vorkommenden Umhüllungen seien "Zusatzhüllen" genannt.

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets ist die größte ganze Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist.

1. Jedes 1-Paket besteht aus genau einem Bonbon mit seiner Umhüllung, hat also keine Zusatzhüllen. Jedes 3-Paket besteht aus genau drei Bonbons mit ihren Umhüllungen und genau einer Zusatzhülle. Für $n = 1$ und $n = 3$ trifft demnach die Behauptung zu.

2. Es sei $k \geq 4$, und es werde als Induktionsannahme vorausgesetzt, dass für alle positiven ganzen $n < k$ mit $n \neq 2$ jeweils die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n}{2}$ sei. Dann folgt:

Es gibt k-Pakete mit maximaler Zahl von Zusatzhüllen (da es überhaupt nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ein k-Paket zu bilden).
Für jedes solche Paket gilt: Öffnet man seine nach (1) vorliegende äußere Umhüllung H, so besteht ihr Inhalt nach (2) und wegen $k > 1$ aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen. Wären es fünf oder mehr, so könnte man diesen Inhalt ohne Verletzung von (2) dadurch ändern, dass man um genau drei der Teilpakete eine neue Umhüllung hinzufügt.

Das widerspricht der vorausgesetzten Maximalität der Zusatzhüllenzahl des k-Pakets. Also besteht der Inhalt von H entweder aus genau drei oder aus genau vier Teilpaketen. Jedes von ihnen erfüllt nach (2) selbst wieder (1) und (2), ist also ein n_i-Paket ($i = 1,2,3$ oder $i = 1,2,3,4$); dabei ist nach (2) jedes n_i eine positive ganze Zahl mit $n_i \neq 2$. Ferner gilt

$$n_1 + n_2 + n_3 = k \qquad \text{bzw.} \qquad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k \tag{3}$$

Also sind alle $n_i < k$. Jedes dieser n_i-Pakete muss seinerseits eine maximale Zahl z_i von Zusatzhüllen aufweisen (sonst könnte man es durch ein n_i-Paket mit größerer Zusatzhüllenzahl ersetzen, was der Maximalität des k-Pakets widerspricht).
Nach Induktionsannahme ist somit jeweils z_i die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n_i}{2}$.

In jedem der Fälle $k = 2m$, $k = 2m + 1$ gibt es für die n_i hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit als $n_i = 2m_i$ oder $n_i = 2m_i + 1$ (m, m_i ganzzahlig) bis auf die Reihenfolge genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle.
Anschließend sind dort die z_i und unter Anwendung von (3) ihre Summe s angegeben.

k	n_1	n_2	n_3	n_4	z_1	z_2	z_3	z_4	s
$2m$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$		m_1-1	m_2-1	m_3-1		$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2	m_3		$m-2$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4-1	$m-4$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3	m_4	$m-3$
	$2m_1+1$	$2m_2+2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1	m_2	m_3	m_4	$m-2$
$2m+1$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2-1	m_3		$m-2$
	$2m_1+1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1	m_2	m_3		$m-1$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4	$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2	m_3	m_4	$m-2$

Die sämtlichen Zusatzhüllen des k-Pakets sind nun: die s Zusatzhüllen der einzelnen n_i-Pakete und dazu noch die Umhüllung H.
Wegen der Maximalität scheiden für s alle Möglichkeiten außer den hervorgehobenen aus, und man erhält:
Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines k-Pakets ist im Fall $k = 2m$ die Zahl $m - 1$, im Fall $k = 2m + 1$ die Zahl m.
Das ist die Behauptung für $n = k$.

Mit 1. und 2. ist somit die Behauptung für alle positiven ganzen $n \neq 2$ bewiesen. Sie ergibt für $n = 500$: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen ist 249. Die gesuchte größtmögliche Zahl aller Umhüllungen beträgt somit 749.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 261242
Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, ...$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

I. Wenn eine Zahlenfolge (a_n) die Bedingungen erfüllt, so folgt durch vollständige Induktion, dass

$$a_n = \frac{2}{3}(2^n - 2^{-n})$$

for n = 1,2,3,... gilt:
(a) Es gilt $a_1 = 1 = \frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{5}{2} = \frac{2}{3}(4 - \frac{1}{4}$ also die Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$.

(b) Wenn $k \geq 2$ ist und die Behauptung für $n = k$ und $n = k - 1$ gilt, d.h. wenn

$$a_k = \frac{2}{3}(2^k - 2^{-k}) \qquad , \qquad a_{k-1} = \frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})$$

ist, so folgt: Wegen $k \geq 2$ ist $a_{k-1} \neq 0$, also ergibt sich aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k^2 - a_1^2}{a_{k-1}} = \frac{\frac{4}{9}((2^k - 2^{-k})^2 - \frac{9}{4})}{\frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{2k} - 4 - (\frac{1}{4} - 2^{-2k})}{2^{k-1} - 2^{-k+1}} = \frac{2}{3}(2^{k+1} - 2^{-k-1}) \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung für $n = k + 1$. Daher kann nur die durch (3) gegebene Folge die Bedingungen (1), (2) erfüllen.

II. Sie erfüllte sich auch, denn (2) und in I(a) bestätigt, und für alle ganzen $n > m > 0$ folgt auch (3)

$$\begin{aligned} a_{n+m} \cdot a_{n-m} &= \frac{2}{3}(2^{n+m} - 2^{-n-m}) \cdot \frac{2}{3}(2^{n-m} - 2^{-n+m}) \\ &= \frac{4}{9}(2^{2n} + 2^{-2n} - 2 + 2 - 2^{2m} - 2^{-2m}) = a_n^2 - a_m^2 \end{aligned}$$

Somit erfüllt genau die Folge (3) die Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 261243
Es seien $k_1, ..., k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, daß sie einander durchdringen oder berühren.
Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, dass je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und dass die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27}V$ hat.

Die Kugel k_i habe den Mittelpunkt $M-i$, den Radius r_i und das Volumen V_i ($i = 1,...,n$). Man definiere z.B. folgendermaßen eine Auswahl aus den k_i:
Unter den Kugeln k_i gibt es eine mit maximalem Radius. In einem ersten Auswahlschritt sei eine solche Kugel gewählt: o.B.d.A. sei sie k_1. Man bilde die Kugel K_1 um M_1 mit dem Radius $3r_1$. Sind alle k_i in K_1 enthalten, so sei die Auswahl beendet.

Andernfalls gibt es unter allen denjenigen Kugeln k_j, die nicht in K_1 enthalten sind, eine mit maximalem Radius. In zweiten Auswahlschritt sei eine solche gewählt: o.B.d.A. sei sie k_2. Man bilde die Kugel K_2 um M_2 mit dem Radius $3r_2$. Sind alle k_i in der Vereinigungsmenge $K_1 \cup K_2$ enthalten, so sei die Auswahl beendet.

In dieser Weise wird fortgesetzt: Im m-ten Auswahlschritt wird unter allen denjenigen Kugeln k_i, die nicht in der zuvor gebildeten Menge $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ enthalten sind, eine mit maximalem Radius gewählt; o.B.d.A. sei sie k_m. Man bilde die Kugel K_m um M_m mit dem Radius $3r_m$. Sind alle k_i in $K_1 \cup ... \cup K_{m-1} \cup K_m$ enthalten, so sei die Auswahl beendet. Dieses Ende des Auswahlverfahrens muss einmal eintreten (o.B.d.A. mit dem m-ten Auswahlschritt), denn wegen

$$k_i \subset K_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

ist nach jedem Auswahlschritt mindestens eine Kugel mehr als beim vorangehenden Auswahlschritt in der betreffenden Menge K_1 bzw. ... bzw. $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ bzw. $K_1 \cup ... \cup K_m$ enthalten, steht also nicht mehr für einen nächsten Auswahlschritt zur Verfügung.

Dass eine so definierte Auswahl die geforderten Bedingungen erfüllt, kann folgendermaßen bewiesen werden:
Für alle i mit $1 \leq i, i+1 \leq m$ gilt wegen der Maximalität von r_i, die bei der Auswahl von k_i zu beachten war, $r_i \geq r_{i+1}$. Folglich ist $r_i \geq r_j \quad (2)$ für alle $1 \leq i < j \leq m$.
Ferner ist für $1 \leq i < j \leq m$ stets k_1 nicht in $K_1 \cup ... \cup K_{j-1}$, also erst recht nicht in K_i enthalten. Somit gibt es einen Punkt P in k_j mit $M_iP > 3r_1$.
Nach der Dreiecksungleichung folgt hieraus und aus (2), dass

$$M_iM_j \geq M_iP - M_jP > 3r_i - r_j \geq r_i + r_j$$

gilt. Damit ist gezeigt, dass k_i und k_j keinen gemeinsamen Punkt haben; denn wäre X ein solcher, so folge wieder aus der Dreiecksungleichung

$$M_iM_j \leq M_iX + M_jX \leq r_i + r_j$$

Für das Volumen U von $k_1 \cup ... \cup k_m$ gilt somit

$$V_1 + ... + V_m = U \tag{3}$$

Für das Volumen Q_i von K_i gilt wegen des Radius $3r_i$ von K_i einerseits $Q_i = 27V_i$, also

$$V_i = \frac{1}{27}Q_i \tag{4}$$

($i = 1,...,m$), andererseits wegen (1) und nach Definition der Auswahlbedingung bei k_m

$$K_1 \cup ... \cup K_m \geq k_1 \cup ... \cup k_m \tag{5}$$

Ist nun Q das Volumen von $K_1 \cup ... \cup K_m$, so gilt einerseits

$$Q_1 + ... + Q_m \geq Q \tag{6}$$

andererseits wegen (5) $Q \geq V \quad (7)$. Aus (3), (4), (6), (7) erhält man die nachzuweisende Ungleichung $U \geq \frac{1}{27}V$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 261244
Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar ist.

Für jede positive ganze Zahl a ist

$$(a+1)^5 - a^5 - 1 = 5a(a^3 + 2a^2 + 2a + 1) = 5a(a+1)(a^2 + a + 1)$$

genau dann durch $18305 = 5 \cdot 7 \cdot 523$ teilbar, wenn

$$a(a+1)(a^2 + a + 1) \quad \text{durch } 7 \cdot 523 \tag{1}$$

teilbar ist. Darin ist 523 Primzahl (2); denn 523 ist durch keine der Zahlen 2,3,5,7,11,13,17,19 teilbar, und es gilt $23^2 > 523$.
Man kann zunächst a so zu ermitteln versuchen dass $a^2 + a +^1$ durch 523 teilbar ist (3), d.h. dass eine positive ganze Zahl k mit

$$a^2 + a + 1 = 523k \tag{4}$$

existiert. Ist diese Gleichung lösbar, so gilt wegen $a > 0$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{523 \cdot 4k - 3} \tag{5}$$

dann ist also $523 \cdot 4k - 3$ eine ungerade Quadratzahl. Daraus folgt der Reihe nach

1. $2092k - 3$ hat eine der Einerziffern 1, 5, 9;
2. $2092k$ hat eine der Einerziffern 4, 8, 2;
3. k hat eine der Einerziffern 2, 7, 4, 9, 1, 6.

Außerdem ist nach (4) und weil $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ eine ungerade Zahl ist, auch k ungerade und hat somit einer der Einerziffern 1, 7, 9. Betrachtet man solche Zahlen k der Reihe nach, so zeigt sich:

Für $k = 1$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 2089$ wegen $45^2 < 2089 < 46^2$ keine Quadratzahl.
Für $k = 7$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 14641 = 121^2$, nach (5) also $a = 60$.
Damit ist gezeigt: Für $a = 60$ gilt

$$a^2 + a + 1 = 523 \cdot 7$$

und zwar ist $k = 7$ in (4) die kleinste positive ganze Zahl, also auch $a = 60$ die kleinste positive ganze Zahl, für die (3) gilt. (7)

Wegen (6) erfüllt $a = 60$ sogar (1). Für alle positiven ganzen $a < 60$ folgt dagegen aus $0 < a, a+1 < 523$ sowie aus (7) und (2), dass diese a nicht (1) erfüllen.
Die kleinste Zahl mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften ist somit $a = 60$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 261245
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, 2, ..., n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

I. Für jede Dreiecksfläche $F = A_1A_2A_3$ und jede konvexe Vierecksfläche $F = A_1A_2A_3A_4$ gilt die genannte Überdeckungsaussage; dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Wäre die Aussage falsch, so gäbe es einen Punkt P in F, der außerhalb jeder der drei bzw. vier genannten

Kreise läge. Da diese Kreise den Rand von F überdecken, läge P im Innern von F. Da F konvex ist, ergäben sich Winkel $\angle A_iPA_{i+1}$ ($i = 1,...,n$; $A_{n+1} = A_1$, mit $n = 3$ bzw. $n = 4$) für die

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} = 360° \tag{1}$$

gelten müsste. Andererseits wäre, da P außerhalb des Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1} läge, $\angle A_iPA_{i+1} < 90°$ ($i = 1,...,n$), also

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} < n \cdot 90°$$

was (1) wegen $n \leq 4$ widerspricht.

II. Für jedes $n > 4$ gibt es eine konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$, die von den genannten Kreisen nicht überdeckt wird; dies zeigt folgendes Beispiel:

Ist $A_1A_2...A_n$ ein regelmäßiges n-Eck und P sein Mittelpunkt, so gilt (1) (jetzt mit $n > 4$) und daher $\angle A_iPA_{i+1} = \frac{1}{n} \cdot 360° < 90°$ für alle $i = 1,...,n$; $A_{n+1} = A_1$.
Also liegt P außerhalb aller Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1}.
Mit I. und II: ist bewiesen, dass die in der Aufgabe genannte Aussage genau für $n = 3$ und $n = 4$ gilt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6A - 261246A
Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, ..., P_n$ nummeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, ...$) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt Wappen oben, so scheidet P_1 aus, bei Zahl P_2.
Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen.
Bei Wappen scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei Zahl der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit W_1, W_2, W_3 dafür, dass P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabende bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, dass die Auswahlmethode ungerecht ist, d.h. dass die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, ..., P_n$ gleich ist.
Bemerkung:
Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{M}{N}$.

Zur Abkürzung wird W für einen Münzwurf mit dem Ergebnis "Wappen" und Z für einen Wurf mit dem Ergebnis "Zahl" geschrieben.

a) da für $n > 3$ der Diensthabende durch zweimaliges Werfen der Münze eindeutig bestimmt ist, entspricht jede mögliche Auswahl genau einer der Folgen (W,W), (W,Z), (Z,W), (Z,T), wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Folgen untereinander gleich sind, d.h., jeweils gleich $\frac{1}{4}$.
Offenbar werden durch die oben angegebenen Folgen als Diensthabende, entsprechend obiger Reihenfolge, P_3, P_2, P_1, P_3 ausgewählt, Folglich ergibt sich für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$W_1 = \frac{1}{4}; \qquad W_2 = \frac{1}{4}; \qquad W_3 = \frac{1}{2}$$

b) Jeder möglichen Auswahl entspricht genau eine $(n-1)$-elementige Folge aus Würfen W und Z, wobei wiederum das Auftreten sämtlicher derartiger Folgen gleichwahrscheinlich ist. Ihre Gesamtzahl ist gleich der Anzahl der Variationen von 2 Elemente in Gruppen zu $(n-1)$ Elementen und damit gleich 2^{n-1}.

Diese $(n-1)$-elementigen Folgen seien in zwei Klassen A und B eingeteilt. Zu A gehören genau die Folgen, die mit W beginnen, zu B genau die Folgen, die mit Z beginnen. Weiterhin werde mit k_i^A $(i = ,1,2,...,n)$ die Anzahl derjenigen Folgen aus A bezeichnet, bei denen P_i als Diensthabender ausgewählt wird; analog werde k_i^B definiert.

Ist f eine Folge aus A und bildet man eine Folge $\overline{f}$ dadurch, dass das erste Element von f durch Z ersetzt wird, so ist $\overline{f}$ eine Folge aus B.
Bei f werde P_i als Diensthabender bestimmt.
Da die Ergebnisse der Münzwürfe bei f und $\overline{f}$ ab 2. Wurf übereinstimmen, der 2. Wurf bei f zwischen P_2 und P_3, bei $\overline{f}$ aber zwischen P_3 und P_4 entscheidet, wird folglich bei $\overline{f}$ der Schüler P_{i+1} als Diensthabender bestimmt.

Analog gilt umgekehrt: Ist $\overline{f}$ eine Folge aus B, die P_{i+1} aks Diensthabenden bestimmt, und entsteht f aus $\overline{f}$, indem das erste Element durch W ersetzt wird, so ist f eine Folge aus A und bestimmt P_i als Diensthabenden. Somit gilt

$$k_i^A = k_{i+1}^B \qquad (i = 1,2,...,n; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{1}$$

Angenommen, die Auswahlmethode wäre gerecht, dann müsste wegen der Gleichwahrscheinlichkeit der Auswahl für jede Schüler gelten:

$$k_i^A + k_i^B = \frac{2^{n-1}}{n} = k \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergäbe sich

$$k_i^A + k_{i-1}^B = k \qquad (i = 2,3,...,n+1; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{3}$$

Offenbar gilt $k_1^A = 0$, weil P_1 sofort ausscheidet, wenn beim ersten Wurf W fällt. Setzt man das in (3) für $i = 2$ ein, so erhält man $k_2^A = k$ und hieraus nach (3) für $i = 3$ weiter $k_3^A = 0$.
Andererseits gehört die Folge (W,W,Z,W,...,W) zur Klasse A und führt zur Bestimmung von P_3 als Diensthabenden; d.h., es gilt $k_3^A \geq 1$. Mit diesem Widerspruch ist die Annahme, die Auswahlmethode wäre gerecht, für alle $n \geq 3$ widerlegt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6B - 261246B
Es seien $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, dass die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

a) Eine solche Auswahl ist nicht stets möglich, z.B. nicht für

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad x_2 = ... = x_{999} = \frac{1}{10}, \quad x_{1000} = ... = x_{1987} = 0$$

Für die Zahlen ist nämlich

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = \frac{1}{50} + \frac{998}{100} = 10 \qquad \text{und}$$

$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{998}{1000} > \frac{1}{50 \cdot 10} + \frac{499}{500} = 1$$

Die Voraussetzungen sind also erfüllt, aber für jede Auswahl von neun dieser Zahlen ist (wegen $0 < \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{50}}$) deren Summe

$$s \leq \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{8}{10} < \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

b) Eine solche Auswahl ist unter den genannten Voraussetzungen stets möglich. Zum Beweis sei für nichtnegative $x_1, ..., x_{1987}$

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = 10 \tag{1}$$
$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 > 1 \tag{2}$$

und o.B.d.A.

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{1987} \tag{3}$$

vorausgesetzt.
Wählt man dann die zehn Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{10}$ aus, so gilt:
Falls $x_1 > 1$, ist erst recht $x_1 + ... + x_{10} > 1$.
Falls aber $1 \geq x_1$ ist, folgt hieraus und aus (3)

$$1 \geq x_i^2 \quad (i = 1,...,10)$$

Nochmals wegen (3), also $x_i - x_{10} \geq 0$ $(i = 1,...,10)$, folgt hieraus

$$x_i - x_{10} \geq x_i^3 - x_{10} \cdot x_i^2 \qquad (i = 1,...,10)$$

Summiert man dies und wendet (1), (3) und (2) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{10} \geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \sum_{i=11}^{1987} x_i^2$$
$$\geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + \sum_{i=11}^{1987} x_i^3 > 1$$

Übernommen von [5]

9.29 XXVII. Olympiade 1987

9.29.1 I. Runde 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271211
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + xy + y = -1 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 5! \qquad (2)$$

Angenommen, ein Paar (x,y) sei Lösung von (1) und (2). Dann folgt aus (1)

$$(x + 1)(y + 1) = 0$$

d.h., wenigstens eine der Zahlen x oder y muss gleich -1 sein.

Für $x = -1$ erhält man aus (2) $y = \pm 2$, und für $y = -1$ folgt aus (2) $x = \pm 2$. Somit können nur die Paare $(-1, -2)$, $(-1,2)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$ Lösungen des Systems (1), (2) sein. Tatsächlich erfüllen diese vier Paare, wie eine Probe zeigt, die Gleichungen (1), (2).

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 271212
Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

I. Wenn eine zweistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt:

Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b, für die $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $ab = 2(a + b)$, also

$$(b - 2)a = 2b \qquad (1)$$

gilt. Für $b =$ 1,2,5,7,8,9 lautet diese Gleichung $(-1)a = 2$, $0 \cdot a = 4$, $3a = 10$, $5a = 14$, $6a = 16$ bzw. $7a = 18$. In keinem dieser Fälle hat sie eine natürliche Lösung. Daher kann b nur einer der zahlen 3, 4, 6 sein; in diesen Fällen ergibt sich aus (1) $1a = 6$, $2a = 8$ bzw. $4a = 12$, und daraus $a = 6$, $a = 4$ bzw. $a = 3$. Damit folgt, dass z einer der Zahlen 63, 44, 36 ist.

II. Wenn z eine dieser Zahlen ist, so hat z wegen die verlangte Eigenschaft, wie die Probe zeigt.

III. Wenn eine dreistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b,c, für die

$$0 < a \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq b \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq c \leq 9 \quad \text{und} \qquad (2)$$

$$abc = 2(a + b + c) \quad (3) \qquad \text{also} \qquad (bc - 2)a = 2(b + c) \quad (4)$$

gilt. Aus (2) folgt $a + b + c+ > 0$; hiernach und wegen (3) müssen auch $b > 0$ und $c > 0$ sein, so dass über (2) hinaus sogar

$$0 < a,b,c \leq 9 \qquad (2')$$

gilt. Wegen (3) muss mindestens eine der Zahlen a,b,c gerade sein. Da (3) und (2') bei beliebiger Umordnung von a,b,c erhalten bleiben, genügt es, etwa den Fall zu betrachten, dass c gerade ist, also wegen (2') eine der Zahlen 2,4,6,8.

Die folgende Tabelle enthält für diese Werte und alle $b =$ 1,2,...,9 jedes Mal die durch 2 dividierte Gleichung (4) und Angaben über ihre Lösung a:

b	$c = 2$		$c = 4$		$c = 6$		$c = 8$	
1	$0a = 3$	–	$1a = 5$	$a = 5$	$2a = 7$	–	$3a = 9$	$a = 3$
2	$1a = 4$	$a = 4$	$3a = 6$	$a = 2$	$5a = 9$	–	$7a = 10$	–
3	$2a = 5$	–	$5a = 7$	–	$8a = 9$	–	$11a = 11$	$a = 1$
4	$3a = 6$	$a = 2$	$7a = 8$	–	$11a = 10$	–	$15a = 12$	–
5	$4a = 7$	–	$9a = 9$	$a = 1$	$14a = 11$	–	$19a = 13$	–
6	$5a = 8$	–	$11a = 10$	–	$17a = 12$	–	$23a = 14$	–
7	$6a = 9$	–	$13a = 11$	–	$20a = 13$	–	$27a = 15$	–
8	$7a = 10$	–	$15a = 12$	–	$23a = 14$	–	$31a = 16$	–
9	$8a = 11$	–	$17a = 13$	–	$26a = 15$	–	$35a = 17$	–

Daraus folgt, dass z einer der folgenden Zahlen oder ein daraus durch Ziffernumordnung entstehende Zahl ist: 422, 242, 514, 224, 154, 318, 138.

IV. Wenn z eine derartige Zahl ist, so hat z wegen $2 \cdot 2 + 4 = 16 = 2(2 + 2 + 24)$ bzw. analog für die anderen Zahlen die verlangte Eigenschaft.

Mit I., II., III., IV. ist bewiesen, dass genau die Zahlen 36, 44, 63, 138, 145, 154, 183, 224, 242, 318, 381, 422, 514, 541, 813, 831 die verlangte Eigenschaft haben.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 271213
Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.

Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$ gilt!

Nach dem Kosinussatz gilt für jedes Dreieck (mit den üblichen Bezeichnungen α, β, γ für die Winkelgrößen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

Daraus erhält man durch Addition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c2) - 2(ab \cos\gamma + ac \cos\beta + bc \cos\alpha)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab \cos\gamma + ac \cos\beta + bc \cos\alpha) \tag{1}$$

Wegen $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$, also $\cos\gamma < 1$, $\cos\beta < 1$, $\cos\alpha < 1$ (und $ab > 0$) folgt aus (1)

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

Die genannte Ungleichung gilt also für jedes Dreieck.

Hinweis: Statt des Kosinussatzes genügt es, aus der Dreiecksungleichung der Beziehungen $a^2 > (b - c)^2$, $b^2 > (c - a)^2$, $c^2 > (a - b)^2$ herzuleiten und zu addieren.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 271214
Man ermittle den Rest, den die Summe $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 lässt!

Für jede natürliche Zahl a gibt es natürliche Zahlen m und r mit $0 \leq r \leq 4$, so dass $n = 5m + r$ ist. Es gilt:

$$(5m + r)^5 = 5^5 \cdot m^5 + 5 \cdot 5^4 \cdot m^4 \cdot r + 10 \cdot 5^3 \cdot m^3 \cdot r^2 + 10 \cdot 5^2 \cdot m^3 \cdot r^3 + 5 \cdot 5 \cdot m \cdot r^4 + r^5$$

Folglich lässt $(5m + r)^5$ bei Division durch 25 $(= 5^2)$ denselben Rest wie r^5.

Fallunterscheidung:

Es sei r gleich	0, 1, 2, 3, 4,
dann ist r^5 gleich	0, 1, 32, 243, 1024
und der Rest von r^5 bei Division durch 25 gleich	0, 1, 7, 18, 24

Unter den Zahlen $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ sind (wegen $1987 = 5 \cdot 397 + 2$) jeweils genau 397 Zahlen von der Form $(5k)^5$ bzw. $(5k+3)^5$ bzw. $(5k+4)^5$ und jeweils genau 398 Zahlen von der Form $(5k+1)^5$ bzw. $(5k+2)^5$, d.h. jeweils 397 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 0 bzw. 18 bzw. 24 lassen, jeweils 398 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 1 bzw. 7 lassen.

Die Summe der Reste bei der Division von $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ durch 25 ist also

$$397 \cdot 18 + 397 \cdot 24 + 398 \cdot 1 + 398 \cdot 7 = 397 \cdot (18+7) + 7 + 397 \cdot (24+1) + 1 = 397 \cdot 25 + 397 \cdot 25 + 8$$

Also lässt $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 den Rest 8.

Übernommen von [5]

9.29.2 II. Runde 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271221
Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6 \qquad (1)$$
$$y \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3 \qquad (2)$$

Der Term $x + y$ berechnet sich aus (1) und (2) zu

$$x + y = \frac{6y}{x} \quad \text{bzw.} \quad x + y = \frac{3x}{y}$$

woraus sich durch Gleichsetzung dann sofort die Gleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad x = \pm\sqrt{2}\,y \quad (*)$$

ergibt. Durch Einsetzen von (*) etwa in (1) erhält man daraus zunächst x zu

$$x = \frac{6}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{6}{1 \pm \sqrt{2}} = 6(\pm\sqrt{2} - 1)$$

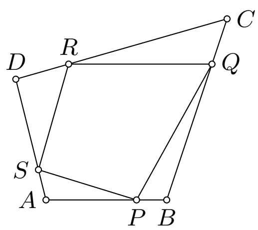
und damit dann auch y zu

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}} = 3(2 \mp \sqrt{2})$$

d.h., jede der beiden Vorzeichenwahlen in (*) liefert eine Lösung.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 271222
Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl.
Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k : 1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.



Ist $XY...Z$ ein Polygon, so bezeichne $I(XY...Z)$ seinen Flächeninhalt. Aus der Voraussetzung $AP : BP = k : 1$ folgt

$$AP = \frac{k}{k+1} \cdot AB \qquad , \qquad PB = \frac{1}{k+1} \cdot AB$$

Da die Dreiecke PBQ und ABQ die gleiche zur Seite PB bzw. AB senkrechte Höhe haben, folgt

$$I(ABQ) = \frac{k}{k+1} \cdot I(ABC) \qquad \text{und damit} \qquad I(PBQ) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(ABC)$$

Entsprechend folgt

$$I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(CDA) \qquad \text{und damit}$$

$$I(PBQ) + I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$
$$I(SAP) + I(QCR) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$

und damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} I(PQRS) &= I(ABCD) - I(SAP) - I(PBQ) - I(QCR) - I(RDS) \\ &= I(ABCD) \cdot \left(1 - \frac{2k}{(k+1)^2}\right) \\ \frac{I(PQRS)}{I(ABCD)} &= \frac{k^2+1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 271223
a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2) \cdot x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert. Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

(a) Es gilt genau dann $f(-1) = -f(1)$, wenn $f(1) + f(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist nun

$$f(1) = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + (n-2)$$
$$f(-1) = (-2) - (-1) + 0 - 1 + 2 - +... + (-1)^{n-2}(n-2)$$

Daraus folgt: Ist n gerade, etwa $n = 2m$ mit natürlichem m, so gilt

$$f(1) + f(-1) = 2((-2) + 0 + 2 + ... + (2m-2)) \qquad (1)$$

ist n ungerade, etwa $n = 2m+1$ mit natürlichem m, so gilt (für dieses m) ebenfalls die Gleichung (1). Für $m = 0{,}1{,}2$ nimmt die rechte Seite von (1) die Werte $2(-2)$, $2(-2)$, $2 \cdot 0$ an. Für größere m kommen nur noch positive Summanden hinzu. Also gilt $f(1) + f(-1) = 0$ genau für $m = 2$; damit ist gezeigt: $f(-1) = -f(1)$ gilt genau für $n = 4$ und $n = 5$.

(b) Es gilt genau dann $g(-1) = -g(1)$, wenn $g(1) + g(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist

$$g(1) = \frac{1}{-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{3n-2}$$
$$g(-1) = \frac{1}{-2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + -... + (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

Daraus folgt: Ist mit natürlichem m entweder $n = 2m$ oder $n = 2m+1$ so ist

$$g(1) + g(-1) = 2\left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{6m-2}\right) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{3m-1}$$

Für $m \leq 5$ ist nun

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{3m-1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} < \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{21} + \frac{1}{14} = 1$$

also $g(1) + g(-1) < 0$.
Für $m \geq 6$ ist nun

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{3m-1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} > \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} = 1$$

also $g(1) + g(-1) > 0$.
Daher gibt es keine natürliche Zahl m mit $g(1) + g(-1) = 0$ und folglich auch keine natürliche Zahl n mit $g(-1) = -g(1)$.

Übernommen von [5]

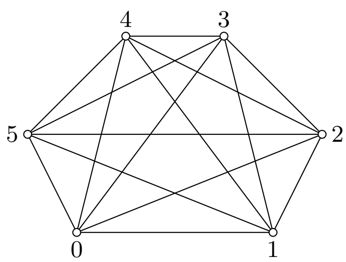
Aufgabe 4 - 271224
a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, dass jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen:
Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, dass eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

(a) Nach Voraussetzung lassen sich die Personen aus M folgendermaßen mit $P_0, P_1, ..., P_{1986}$ bezeichnen:

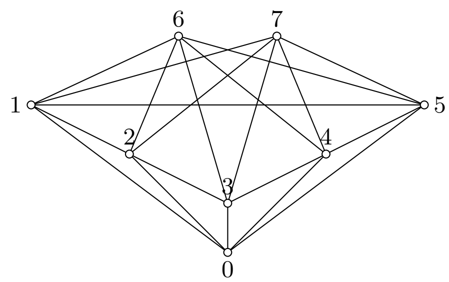
P_0 sei eine beliebige Person aus M. Da sie mit höchstens 5 anderen bekannt ist, kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass gilt:
P_0 ist mit keiner der Personen $P_6, P_7, ..., P_{1986}$ bekannt. (0)
P_6 ist mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt, also erst recht mit höchstens 5 der Personen $P_7, ..., P_{1986}$. Man kann daher deren Bezeichnung, ohne dass (0) beeinträchtigt wird, so wählen, dass zusätzlich gilt:
P_6 ist mit keiner der Personen $P_{12}, P_{13}, ..., P_{1986}$ bekannt. (1) In dieser Weise kann man fortsetzen (und außer für $n = 0$, $n = 1$) für weitere $n = 2,3,...$ erhalten:
P_{6n} ist mit keiner der Personen $P_{6n+6}, P_{6n+7}, ..., P_{1986}$ bekannt. (n)
Als letzte dieser Aussagen erhält man für $n = 330$:
P_{1980} ist nicht mit P_{1986} bekannt. (330)

Die Menge $U = \{P_0, P_6, ..., P_{1980}, P_{1986}\}$, die aus 332 Personen besteht, hat hiernach die besagte Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

(b) Ein Beispiel der geforderten Art kann folgendermaßen gegeben werden:



P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$



P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$

Es sei $M = \{P_0, P_1, ..., P_{1987}\}$. Für jedes $n = 0,1,2,...,329$ sei definiert: In der Menge A_n der 6 Personen P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$ ist jede mit jeder anderen bekannt. (linke Abbildung)

In der Menge B der 8 Personen P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$ seien die Bekanntschaften wie in der rechten Abbildung definiert. Darüber hinaus seien in M keine Bekanntschaften vorhanden.

Nach dieser Definition ist einerseits, wie gefordert, jede Person aus M mit genau 5 anderen Personen aus M bekannt.

Wenn andererseits U irgendeine Untermenge von M ist, die mehr als 333 Personen enthält, so kann folgendermaßen bewiesen werden, dass mindestens einer Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist:

Da U mindestens 334 enthält, muss U entweder mit mindestens einer der 330 Mengen $A_0, A_1, ..., A_{329}$ mehr als eine Person gemeinsam haben oder andernfalls mit der Menge B mindestens 4 Personen gemeinsam haben.
Im ersten Fall sind die beiden Personen, die U mindestens mit der betreffenden Menge A_n gemeinsam hat, miteinander bekannt.
Im zweiten Fall gilt: Gehören etwa mindestens die 4 Personen X_0, X_1, X_2, X_3 aus B zu U, so gibt es außer ihnen nur 4 weitere Personen in B, also muss X_0, da mit 5 anderen Personen aus B bekannt, mit einer der Personen X_1, X_2, X_3 bekannt sein.

Übernommen von [5]

9.29.3 III. Runde 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271231
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0 \qquad (2)$$

Mit Einführung der reellen Polynomfunktionen f und g definiert durch

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2 - 2)(x^2 - 4) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$$

bzw.

$$g(x) = 2x^2 - 3x = x(2x - 3)$$

können wir die Lösungen der beiden Ungleichungen - also zunächst jede für sich - leicht durch den Vorzeichenwechsel von f bzw. g an deren einfachen Nullstellen beschreiben, und zwar jeweils für wachsendes x. Beide Funktionen starten dabei aufgrund des positiven Leitkoeffizienten im positiven Bereich.
Dieser Vorzeichenwechsel erfolgt für f bei
- $x = -2$ von + zu -,
- $x = -\sqrt{2}$ von - zu +,
- $x = \sqrt{2}$ von + zu -,
- $x = 2$ von - zu +

und für g bei
- $x = 0$ von + zu -,
- $x = \frac{3}{2}$ von - zu +.

Insgesamt gilt also (1) genau für $x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ und (2) genau für $x < 0$ und $x > \frac{3}{2}$.
Beide Ungleichungen (1) und (2) zusammen sind somit genau dann erfüllt, wenn

$$x \in [-2, \sqrt{2}] \cup (\frac{3}{2}, 2]$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 271232
Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind.
Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, dass es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, dass der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholten Anfahren u.s.w. sollen nicht berücksichtigt werden.)

1. Im Fall $n = 1$ kann der einzige Kanister offenbar als Startpunkt gewählt werden.

2. Als Induktionsannahme weder vorausgesetzt, dass die Behauptung für $n = k$ Kanister zutrifft ($k \geq 1$). Dann folgt für jede Aufstellung A von $k + 1$ Kanistern:
Unter den Kanistern der Aufstellung A befindet sich wenigstens ein Kanister C, von dem aus der nächste Kanister C' mit dem Inhalt von C erreicht werden kann; denn andernfalls wäre die Summe der Inhalte aller Kanister kleiner als eine für den Rundkurs ausreichende Gesamtmenge.

Wird nun der Inhalt von C' in C umgefüllt und C' weggelassen, so entsteht eine Aufstellung A' von k Kanistern, zu der nach Induktionsannahme ein Standort existiert, von dem aus der Rundkurs durchfahren werden kann.
Dieser Standort kann an keiner Stelle sein, die zwischen C und dem in der Aufstellung A übernächsten Kanister C'' liegt; denn er muss bei einem Kanister C_0 sein (sonst könnte das Auto dort nicht starten),

und zwischen C und C'' steht bei der Aufstellung A' kein Kanister.

Also enthält für die Aufstellung A' der mit C_0 beginnende Rundkurs auf der Strecke von C_0 nach C (die auch mit $C_0 = C$ entartet sein kann) dieselben Standorte wir für A. Dann folgt die Strecke von C bis zu C'', und danach folgt auf der Strecke von C'' nach C_0 (die auch mit $C_0 = C''$ entartet sein kann) wieder dieselbe Standortverteilung für A' wie für A.

Damit ergibt sich für die Aufstellung A:
Nach einem Start in C_0 kann wie bei A' bis C gefahren werden. Anschließend würde (nach Voraussetzung über A') das im Auto und in C und in C' zusammen vorhandene Benzin reichen; daraus (und weil schon der Inhalt von C bis C' reicht) folgt:
Das im Auto und in C vorhandene Benzin reicht bis C', und von dort kommt man durch Hinzufügen des Benzins aus C' bis C''. Von dort schließlich gelangt man wie bei A' bis C_0.

Also hat sich ergeben, dass bei der Aufstellung A der Rundkurs von C_0 aus durchfahren werden kann; d.h., die Behauptung gilt auch für $n = k + 1$ Kanister.
Mit I. und II. ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 271233A
Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

Der Quader liege mit seinen drei Kanten auf den Koordinatenachsen, wobei a längs der x-Achse, b längs der y-Achse und c längs der z-Achse liege. Die Projektionsebene werde durch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 1$ definiert. Der Inhalt einer Fläche A_i, die auf die schräg liegende Ebene projiziert wird, ist proportional zu dem Kosinus des Winkels zwischen $\vec{n}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_i$ auf der Originalfläche A_i. Es ist $\overrightarrow{n_{ab}} = \vec{e}_z$, $\overrightarrow{n_{bc}} = \vec{e}_x$ und $\overrightarrow{n_{ac}} = \vec{e}_y$. Das ergibt:

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{n}_{ab}) + bc(\vec{n}\vec{n}_{bc}) + ac(\vec{n}\vec{n}_{ac})$$

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{e}_z) + bc(\vec{n}\vec{e}_x) + ac(\vec{n}\vec{e}_y)$$

$$A_{proj} = abn_3 + bcn_1 + acn_2 = \vec{n} \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$$

$$A_{proj} = abc \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren von gegebener Länge wird genau dann maximal, wenn die beiden Vektoren parallel sind. Der Normalenvektor muss daher ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ sein. Da seine Länge außerdem gleich 1 sein muss, können wir schlussfolgern:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Für die maximale projizierte Fläche erhalten wir:

$$A_{proj} = \frac{abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$A_{proj} = abc\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 271233B
Es sei f diejenige für alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen x,y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x,y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0,y)=y+1 \qquad (1)$$
$$f(x+1,0)=f(x,1) \qquad (2)$$
$$f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y)) \qquad (3)$$

Man ermittle a) den Funktionswert $f(3,3)$, b) den Funktionswert $f(4,2)$.
Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

1. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt
$$f(1,y) = y+2 \qquad (4)$$
Beweis durch vollständige Induktion:
I. Nach (2) und (1) gilt $f(1,0) = f(0,1) = 2$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (4), sowie aus (1)
$$f(1,y+1) = f(0,f(1,y)) = f(0,y+2) = y+3 = (y+1)+2$$
also (4) mit $y+1$ statt y.

2. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt
$$f(2,y) = 2y+3 \qquad (5)$$
Beweis:
I. Nach (2) und (4) gilt $f(2,0) = f(1,1) = 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (5), sowie aus (4)
$$f(2,y+1) = f(1,f(2,y)) = f(1,2y+3) = 2y+5 = 2(y+1)+3$$

3. Behauptung: Für alle $y = 0,1,2,...$ gilt
$$f(3,y) = 2^{y+3} - 3 \qquad (6)$$
Beweis:
I. Nach (2) und (5) gilt $f(3,0) = f(2,1) = 5 = 2^3 - 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsvoraussetzung, für ein y gelte (6), sowie aus (5)
$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = f(2,2^{y+3}-3) = 2(2^{y+3}-3)+3 = 2^{(y+1)+3} - 3$$
a) Aus (6) ergibt sich $f(3,3) = 2^6 - 3 = 61$.
b) Aus (2), (3) und (6) ergibt sich
$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13$$
$$f(4,1) = f(3,f(4,0)) = f(3,13) = 2^{16} - 3 = 65533$$
$$f(4,2) = f(3,f(4,1)) = f(3,65533) = 2^{65533} - 3$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 271234
Man beweise für jedes Dreieck ABC:
Bezeichnen wie üblich b,c,h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\angle BAC$, so gilt
$$h_a \leq \sqrt{bc}\cdot \cos\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$
Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist somit gleich $\frac{1}{2}ah_a$ (mit $a = BC$) als auch gleich $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Hiernach und nach der Formel $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ gilt

$$h_a = \frac{bc\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{a} \tag{2}$$

Nach dem Kosinussatz sowie nach der Formel $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ gilt ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \geq 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich wegen

$$a, b, c, \sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2} > 0 \tag{4}$$

die Behauptung

$$h_a \leq \frac{2bc\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{bc}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Wegen (4) gilt darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (3) gilt, d.h. genau für alle diejenigen Dreiecke ABC, in denen $b = c$ ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 271235
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$1243\cdot(1+yz) = 65\cdot(xyz + x + z) \qquad (1)$$

I. Wenn x,y,z ganze Zahlen sind, die (1) erfüllen, so folgt:
Da 1243 zu 65 teilerfremd istm mit $1 + yz$ durch 65 teilbar sein, d.h., eine ganze Zahl k mit

$$1 + yz = 65\cdot k \tag{2}$$

muss existieren, Aus (1) folgt damit

$$65\cdot(xyz + x + z) = 1243\cdot 65\cdot k \qquad \text{also} \qquad (1+yz)\cdot x + z = 1243\cdot k$$

Mit (2) ergibt das $65kx + z = 1243k$ also

$$z = (1243 - 65\cdot x)\cdot k \tag{3}$$

Setzt man dies in die aus (2) folgende Gleichung $65k - yz = 1$, so folgt

$$(65 - y(1243 - 65\cdot x))\cdot k = 1$$

Dies kann wegen der Ganzzahligkeit der Faktoren nur mit

$$65 - y(1243 - 65\cdot x) = k = \pm 1 \tag{4}$$

erfüllt werden. Somit gilt

$$y(1243 + 65\cdot x) = 64 \qquad \text{oder} \qquad y(1243 + 65\cdot x) = 66 \tag{5}$$

d.h., es ist $1243 - 65x$ Teiler von 64 oder 66. (6)
Daraus folgt insbesondere

$$-66 \leq 1243 - 65\cdot x \leq 66 \quad\Rightarrow\quad 1177 \leq 65\cdot x \Rightarrow 66 \quad\Rightarrow x = 19 \quad \text{oder} \quad x = 20$$

$$1243 - 65\cdot x = 8 \qquad \text{oder} \qquad 1243 - 65\cdot x = -57 \tag{7}$$

Die Bedingungen (6) und (7) werden nur von $1243 - 65\cdot x = 8$, also $x = 19$ erfüllt, wegen (5) zusammen mit $y = 8$, wonach (4) auf $k = 1$ und daher (3) auf $z = 8$ führt.

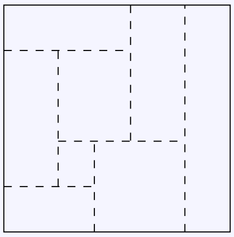
Also kann unter allen Tripeln ganzer Zahlen nur

$$(x,y,z) = (19,8,8) \tag{8}$$

die Gleichung (1) erfüllen.
II. Wie aus $1243(1 + 8 \cdot 8) = 1243 \cdot 65 = 65 \cdot (19 \cdot 8 \cdot 8 + 19 + 8)$ ersichtlich ist, erfüllt es diese Gleichung.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das in (8) genannte Tripel die Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 271236



Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben.
Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, ..., F_n$ zerlegt werden.
Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.
Ferner werde gefordert, dass jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.
b) Man beweise, dass es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

Für jede Zerlegung Z in Felder $F_1, F_2, ..., F_n$, die die genannte Forderung erfüllt, seien die Längenmaßzahlen der Seiten von F_i jeweils so mit a_i, b_i bezeichnet, dass $a_i \leq b_i$ gilt.
Aus der Forderung folgt dann $a_i \leq 0{,}2$ $(i = 1{,}2{,}...{,}n)$. Da der Flächeninhalt des Feldes Q gleich der Summe der Flächeninhalte der F_i ist, folgt hieraus

$$100 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} 0{,}2 \cdot b_i = 0{,}2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{also} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 500 \tag{1}$$

Addiert man die Umfänge der Felder F_i, so erhält man die Summe aus der Länge u und der doppelten Länge von g, d.h., es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) = 40 + 2L$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) - 40 \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - 20 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 480 \tag{2}$$

a) Da alle $a_i \geq 0$ sind, folgt aus (2), wie behauptet, $L \geq 480$.

b) Eine der beiden Richtungen von Gräben werde "horizontal", die andere "vertikal" genannt. Ein Feld F_i heiße horizontal bzw. vertikal je nachdem, ob b_i die Längenmaßzahl seiner horizontalen oder seiner vertikalen Seiten ist.
Nun tritt stets einer der beiden folgenden Fälle I., II. ein:
I. Wenn es eine horizontale Strecke gibt, die das Feld Q durchquert und dabei nur mit vertikalen Feldern der Zerlegung Z nichtleere Durchschnitte hat, so ist die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Durchschnitte gleich 10; also gilt erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 10$$

II. Wenn aber jede horizontale Strecke, die das Feld Q durchquert, mit mindestens einem horizontalen Feld der Zerlegung Z nichtleeren Durchschnitt hat, so folgt, indem man alle diese horizontalen Felder auf eine vertikale Gerade projiziert:
Diese Projektionen überdecken eine gesamte vertikale Strecke der Länge 10 km; d.h., die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Projektionen ist größer oder gleich 10, also ergibt sich ebenfalls (3).

Somit gilt (3) für jede Zerlegung Z der geforderten Art; hiernach folgt aus (2) für jede solche Zerlegung

$$L \geq 490 \tag{4}$$

Ferner gilt: es gibt eine Zerlegung der geforderten Art mit $L = 490$, z.B. die Zerlegung in 50 vertikale Felder mit $a_i = 0{,}2$ und $b_i = 10$, die genau 49 Gräben g aufweist, deren jeder die Länge 10 km hat.
Damit ist, wie gefordert, die Existenz eines kleinsten Werte für L bewiesen; er beträgt 490.

Übernommen von [5]

9.29.4 IV. Runde 1987, Klasse 12

Aufgabe 1 - 271241
In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind.
Ferner sei F die Menge von 1988 verschiedenen Farben.
Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F enthält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

Betrachte die Punktmenge P_k bestehend aus den Punkten $(k{,}0),(k{,}1),...,(k{,}1988)$, wobei k eine ganze Zahl ist. Für jedes k sind dies 1989 Punkte, sodass es unter diesen immer zwei verschiedene Punkte gibt, die die gleiche Farbe haben (Schubfachprinzip).

Betrachte nun die Punktmengen $P_0, P_1, ..., P_n$ mit $n = 1988 \cdot (1989 \cdot \frac{1988}{2})$. Nach obiger Feststellung gibt es für jedes dieser P_k ($k \in \{0,...,n\}$) eine Farbe, sodass zwei Punkte aus P_k diese Farbe haben. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also eine Farbe F, sodass in $1 + (1989 \cdot \frac{1988}{2})$ verschiedenen dieser Mengen P_k jeweils zwei Punkte mit dieser Farbe F vorkommen.

Es gibt aber maximal $1989 \cdot \frac{1988}{2}$ Möglichkeiten dafür, dass sich die y-Koordinaten solcher zwei Punkte mit Farbe F aus einem der P_k von denen aus einem anderen der P_k unterscheiden. Demzufolge gibt es (nach dem Schubfachprinzip) vier Punkte mit der gleichen Farbe F, die die Eckpunkte eines Rechtecks bilden, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 271242
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$1 \cdot x^3 + 9 \cdot y^2 + 8 \cdot y + 8 = 1988 \qquad (1)$$
$$1 \cdot y^3 + 9 \cdot z^2 + 8 \cdot z + 8 = 1988 \qquad (2)$$
$$1 \cdot z^3 + 9 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8 = 1988 \qquad (3)$$

Es ist offensichtlich, dass die drei Gleichungen durch zyklische Vertauschung von x, y und z ineinander übergehen. Daher wäre ein Tripel mit $x = y = z$ automatisch eine Lösung, wenn x die Gleichung

$$x^3 + 9x^2 + 8x = 1980 \qquad (4)$$

erfüllt. Eine ebenso offensichtliche Lösung ist $x = 10$, so dass schon einmal das Tripel $(x{,}y{,}z) = (10{,}10{,}10)$ eine Lösung darstellt. Wir werden nun zeigen, dass es weitere Lösungen in $\mathbb{R}$ nicht geben kann. Wir führen eine Polynomdivision von Gleichung (4) durch $x - 10$ durch, und erhalten

$$x^2 + 19x + 198 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösungen. Weitere Lösungstripel erfordern somit, dass die drei Variablen paarweise verschieden sind. Wir betrachten nun die zwei Funktionen

$$f(x) = x^3 \qquad (5)$$

und

$$g(y) = 9y^2 + 8y + 8 \qquad (6)$$

Letztere ist eine nach oben offene Parabel, das Minimum liegt bei $y = -\frac{4}{9}$. (Jede Schlussfolgerung bezüglich der Eigenschaft einer Variablen gilt aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit immer für alle drei Variablen gleichermaßen.) Sowohl (6) für $y \geq -\frac{4}{9}$ als auch (5) generell sind monoton steigend.

Wir nehmen nun zunächst an, dass alle drei Variablen $x{,}y{,}z \geq -\frac{4}{9}$ sind. In Gleichung (1) bedeutet das wegen der Monotonie ausgehend vom Tripel (10,10,10), wenn man x größer als 10 ansetzt, dass y kleiner als 10 sein muss. Wenn y aber kleiner als 10 ist, dann hat das in Gleichung (2) zur Folge, dass z größer als

10 werden muss. Damit sind sowohl x als auch z jeweils größer als 10, was Gleichung (3) unerfüllbar macht und somit zu einem Widerspruch führt. Gleiches gilt für die entgegengesetzte Richtung. Wir untersuchen daher als letztes, ob eine Lösung möglich ist, wenn (mindestens) eine der Variablen kleiner als $-\frac{4}{9}$ wäre. Es ist durch Nullsetzen der ersten Ableitung von (6) und Einsetzen sehr einfach, zu zeigen, dass

$$9y^2 + 8y + 8 \geq \frac{56}{9}$$

ist. Verwendet man das in Gleichung (1), so folgt:

$$9y^2 + 8y + 8 = 1988 - x^3 \geq \frac{56}{9}$$

$$x \leq \sqrt[3]{1988 - \frac{56}{9}} = a$$

Es gibt also eine obere Schranke

$$(7) \qquad x,y,z \leq a$$

mit $a = \sqrt[3]{1981\frac{7}{9}} \approx 12{,}56$. Nehmen wir nun an, dass $x \leq -\frac{4}{9}$ sei. Aus Gleichung (1) folgt:

$$(8) \qquad 9y^2 + 8y = 1980 - x^3 \geq 1980 + \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

Da $y = a$ diese Ungleichung nicht erfüllt, müsste entweder im Widerspruch zu (7) $y > a$ gelten, oder es muss kleiner sein als die andere, negative Lösung der quadratischen Gleichung. Das heißt:

$$y \leq -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Wir behaupten, dass

$$(9) \qquad -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}} < x \quad \forall \quad x \leq -\frac{4}{9}$$

gilt. Mit dieser Behauptung können wir folgern, dass

$$y < x$$

ist, woraus aber wegen Gleichung (2) $z < y$ folgt, und das wiederum führt wegen Gleichung (3) zu $x < z$, was einen widersprüchlichen Zirkelschluss $x < x$ darstellt. Es genügt daher, zu zeigen, dass (9) gilt, um zu beweisen, dass es keine weitere Lösungen geben kann:

$$-\left(x + \frac{4}{9}\right) < \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Beide Seiten sind größer als null, daher dürfen wir quadrieren:

$$\left(x + \frac{4}{9}\right)^2 < \frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}$$

$$x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{x^3}{9} < \frac{1980}{9}$$

$$x^3 + 9x^2 + 8x - 1980 < 0$$

$$(x - 10)(x^2 + 19x + 198) < 0$$

Da $(x - 10) < 0$, bleibt zu zeigen, dass

$$x^2 + 19x + 198 > 0$$

was tatsächlich der Fall ist für alle x, wie schon oben gezeigt. q.e.d. Das einzige Lösungstripel ist somit $(x,y,z) = (10,10,10)$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 271243
Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i = 1,...,n$ derart bilden, dass

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1,...,n-1$ gilt?

Es sei $A_{i,n}$ die Anzahl der Wörter, aus n Buchstaben, die mit a_i enden. Die gesuchte Anzahl ist dann $A_n := A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} + A_{5,n}$.
Offenbar gilt die Rekursion

$$A_{i,n+1} = \begin{cases} A_{2,n} & \text{falls } i = 1 \\ A_{i-1,n} + A_{i+1,n} & \text{falls } 2 \le i \le 4 \\ A_{4,n} & \text{falls } i = 5 \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A_{2,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) + (A_{4,n}) \\ &= A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= A_{n+1} + A_{2,n+1} + A_{3,n+1} + A_{4,n+1} \\ &= (A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) \\ &= 3A_n - A_{1,n} + A_{3,n} - A_{5,n} \end{aligned}$$

Schließlich ist dann

$$\begin{aligned} A_{n+3} &= 3A_{n+1} - A_{1,n+1} + A_{3,n+1} - A_{5,n+1} \\ &= 3A_{n+1} - A_{2,n} + (A_{2,n} + A_{4,n}) - A_{4,n} \\ &= 3A_{n+1} \end{aligned}$$

Durch explizites Nachrechnen finden wir außerdem, dass $A_1 = 5, A_2 = 8, A_3 = 14$. Insgesamt folgt dann

$$A_n = \begin{cases} 5 & \text{falls } n = 1 \\ 8 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m \\ 14 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m+1, n \neq 1 \end{cases}$$

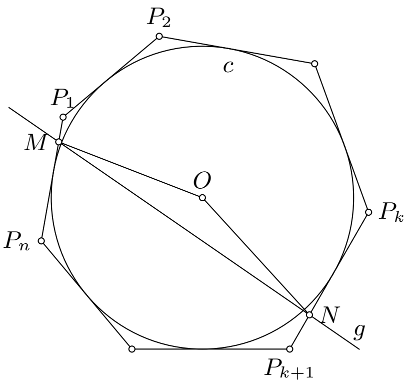
Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 271244
Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2...P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \le k < n)$ in einem Punkt N schneidet.
Die Gerade g sei so gelegt, dass sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d.h., dass die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

Mit O sei der Mittelpunkt und mit r der Radius des Inkreises bezeichnet. Da alle Seiten des n-Ecks Tangenten an den Inkreis sind und folglich in jedem Dreieck $P_iP_{i+1}O$ $(1 \le i < n)$ der Berührungsradius Höhe auf P_iP_{i+1} ist, ergibt sich der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit

$$\frac{r}{2} \cdot P_iP_{i+1}$$

Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Dreiecke MP_1O, P_kNO, $NP_{k+1}O$ bzw. P_nMO zu $\frac{r}{2}MP_1$, $\frac{r}{2}P_kN$, $\frac{r}{2}NP_{k+1}$ bzw. $\frac{r}{2}P_nM$.



Aus Voraussetzung (1) der Aufgabe folgt

$$\frac{r}{2}(MP_1 + P_1P_2 + ... + P_kN) = \frac{r}{2}(NP_{k+1} + P_{k+1}P_{k+2} + ... + P_nM) \quad \text{also}$$

$$\frac{r}{2}MP_1 + \frac{r}{2}P_1P_2 + ... + \frac{r}{2}P_kN = \frac{r}{2}NP_{k+1} + \frac{r}{2}P_{k+1}P_{k+2} + ... + \frac{r}{2}P_nM$$

d.h., die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kNO$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ sind einander gleich.
Ginge die Gerade g nicht durch O, so läge O im Innern von einem der beiden in (2) genannten Vielecke, o.B.d.A. etwa von $MP_1P_2...P_kN$ (siehe Abbildung).
Dessen Flächeninhalt wäre somit die Summe der Flächeninhalte des Vielecks $MP_1P_2...P_kNO$ und Dreiecks MNO, das nicht zur Strecke MN entartet wäre. Zugleich wäre der Flächeninhalt von $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ die Differenz der Flächeninhalte des Vielecks $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ und des Dreiecks MNO.

Damit ergäbe sich zwischen den in (2) genannten Flächeninhalten eine Differenz, die gleich dem doppelten Flächeninhalt von MNO, also nicht Null wäre.
Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme, g ginge nicht durch O widerlegt, d.h. der verlangte Beweis geführt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 5 - 271245
Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$$

$(n = 2, 3, 4, ...)$ definierte Zahlenfolge.
Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls dies zutrifft, ihren Grenzwert.

Wenn die Folge gegen einen Grenzwert a konvergiert, muss

$$a = \frac{a+1}{a+4}$$

und damit $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ gelten (die negative Lösung für a kann ausgeschlossen werden, da alle Folgeglieder positiv sind).

Nun ist die Konvergenz der Folge nicht ganz einfach nachzuweisen, da sie nicht monoton ist, sondern um a oszilliert.
Man könnte den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden und nachweisen, dass die der Bildungsvorschrift der Zahlenfolge entsprechende zweidimensionale Funktion eine Kontraktion ist, was aber aufwändig ist und eben einen recht starken Satz voraussetzen würde.

Stattdessen wollen wir für hinreichend große n die plausible Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit geeigneten Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda < 1$ zeigen (dass eine Abschätzung dieser Form existiert, folgt aus dem Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes).
Wir wählen $c = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $n \geq 2$.

Beweis mit vollständiger Induktion: Wegen $\frac{1}{4} < a$ sind für $n = 2$ und $n = 3$ die Ungleichungen

$$|x_2 - a| = 1 - a < c \cdot \lambda^2 = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad |x_3 - a| = \frac{2}{5} - a < c \cdot \lambda^3 = \frac{3}{8}$$

erfüllt. Sei nun ein $n \geq 4$ gegeben und die Behauptung für $a_2,...,a_{n-1}$ bewiesen. Dann haben wir im Falle $x_n > a$

$$|x_n - a| = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2} + 4} - a < \frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a,$$

und falls $x_n \leq a$

$$|x_n - a| = a - \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-2} + 4} < a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4}\,.$$

Betrachten wir zunächst den Fall $x_n > a$. Wir gehen von der zu zeigenden Ungleichung

$$\frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a \overset{?}{<} c\lambda^n$$

aus und formen äquivalent um (beachte $a - c\lambda^{n-2} + 4 > 0$) zu

$$0 < c\lambda^n(a + 4) - c^2\lambda^{2n-2} + a(a + 4) - ca\lambda^{n-2} - (a + c\lambda^{n-1} + 1)$$

Wegen $a(a + 4) - (a + 1) = 0$ (siehe die Bestimmungsgleichung für a) ist dies äquivalent zu

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a + 4) - c\lambda^n - a - \lambda)$$

und tatsächlich ist wegen $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{8}$ und mit Einsetzen der Werte von c und λ

$$\lambda^2(a + 4) - c\lambda^n - a - \lambda > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 4\right) - \frac{3}{2^n} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} > \frac{1}{16} + 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.
Für $x_n \leq a$ analog:

$$a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4} \overset{?}{<} c\lambda^n$$

äquivalent zu

$$0 < c\lambda^n(a + 4) + c^2\lambda^{2n-2} - a(a + 4) - ca\lambda^{n-2} + (a - c\lambda^{n-1} + 1)$$

bzw.

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a + 4) + c\lambda^n - a - \lambda)$$

und es ist

$$\lambda^2(a + 4) + c\lambda^n - a - \lambda > 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.

Insgesamt haben wir also für jedes $n \geq 2$ die Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$ und $c = 3$, was wegen $c\lambda^n \to 0$ $(n \to \infty)$ die Konvergenz zeigt. Damit ist bewiesen, dass x_n gegen $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ konvergiert.

Bemerkung: Interessanterweise kann man nicht ohne Weiteres $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ per Induktion zeigen, obwohl dies schwächer ist als die in diesem Beweis gezeigte Fehlerabschätzung (schwächer, da Polynome langsamer fallen als Exponentialfunktionen). Das ist ein bekanntes Phänomen, das sich damit erklären lässt, dass man zwar etwas Schwächeres zeigen will, aber daher in der Induktionsvoraussetzung auch nur etwas Schwächeres voraussetzen kann.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6A - 271246A
Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z.B. Werfen einer Münze festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält.
Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende sondern während des gesamten Vorganges niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür dass ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
(a) Man ermittle $w(4)$.
(b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geq 2$.

Jeder Verteilungsvorgang ist durch eine n-gliedrige Folge darstellbar, in der jedes Glied A oder B lautet. Ein solche Folge sei "j-Folge" genannt, wenn sie genau j Glieder A enthält. Eine Folge heiße genau dann "günstig", wenn sie einen für Alfred günstigen Verteilungsvorgang darstellt.

Für die größte ganze Zahl $m \leq \frac{n}{2} \quad (*)$ gelten nun folgende Aussagen:
(1) Jede j-Folge mit $j < m$ ist ungünstig.
(2) Die einzige n-Folge $(AA...A)$ ist günstig.
(3) Für jedes j mit $m \leq j < n$ ist die Anzahl aller ungünstigen j-Folgen gleich der Anzahl aller $(j+1)$-Folgen.

Dies kann wie folgt bewiesen werden:
Zu jeder ungünstigen j-Folge F gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied B lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Glieder ebenso viele Glieder A wir B befinden.
Man ordne die Folge F diejenige Folge F' zu, de aus F dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall A durch B und B durch A ersetzt wird. Für diese Zuordnung gilt:

I. Die Folge F' ist jeweils eine $(j+1)$-Folge.
II. Sind zwei ungünstige j-Folgen F_1, F_2 voneinander verschieden, so auch ihre zugeordneten Folgen F_1', F_2'.
III. Jede $(j+1)$-Folge G ist die zugeordnete Folge $G = F'$ einer ungünstigen j-Folge F.
Wegen $j \geq m$, also $j+1 \geq \frac{n}{2}$, enthält G nämlich mehr Glieder A als B; also gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied A lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Gliedern ebenso viele Glieder B wie A befinden.
Daher hat diejenige Folge die verlangten Eigenschaften (ungünstige j-Folge mit $F' = G$ zu sein), die aus G dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall B durch A und A durch B ersetzt wird.
Mit I., II., III. ist die behauptete Anzahlgleichheit bewiesen.

Bezeichnet man die Anzahl aller j-Folgen mit a_j und die Anzahl aller günstigen j-Folgen mit g_j, so ergibt sich nach (1), (2), (3): Die Anzahl aller günstigen Folgen ist

$$g_0 + ... + g_n = g_m + ... + g_{n-1} + g_n = (a_m - a_{m+1}) + ...(a_{n-1} - a_n) + a_n = a_m \qquad (**)$$

Die Anzahl a_m aller m-Folgen ist bekanntlich $a_m = \binom{n}{m}$, die Anzahl aller zu berücksichtigen n-gliedrigen Folgen überhaupt ist 2^n. Damit ergibt sich

$$\text{a)} \quad w(4) = \binom{4}{2} : 2^4 = 6 : 16 = \frac{3}{8} \qquad \text{b)} \quad w(n) = \binom{n}{m} : 2^n \qquad \text{mit m aus (*)}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 6B - 271246B
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und für je n im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$, für die gilt:

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} &= 1 - f_1(1) - f_2(1) - ... - f_{n-1}(1) - f_n(1)\\
A_n &= -f_1(0) - f_2(0) - ... - f_{n-1}(0) - f_n(0)\\
A_{n+1} &= f_1(0) + f_2(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1)\\
A_{n+2} &= f_1(1) + f_2(0) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1)\\
...\\
A_{2n} &= f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(0)
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$A_1 + A_2 + ... + A_{2n} = n - 1 \qquad \text{also} \qquad |A_1| + |A_2| + ... + |A_{2n}| \geq n - 1$$

Daher muss für mindestens einen der $2n$ Summanden

$$|A_i| \geq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

gelten; d.h.: Es gibt unter den Systemen

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n) &= (1,1,1,...,1,1),\\
&= (0,0,0,...,0,0),\\
&= (0,1,1,...,1,1),\\
&= (1,0,1,...,1,1), ...\\
&= (1,1,1,...,1,0)
\end{aligned}$$

mindestens eines, für das

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt. Die Existenz solcher a_i war zu beweisen.

Übernommen von [5]

2. Lösung:
Wir definieren eine Funktion $e : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ durch

$$e(a_1,a_2,\dots,a_n) := a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{k=1}^{n} f_k(a_k)$$

Außerdem sei

$$E := \max_{a \in \{0,1\}^n} |e(a)|.$$

Die zu zeigende Behauptung folgt aus $E \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.
Wir betrachten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
(n-1)E \geq (n-1)e(1,1,1\dots,1,1) &= n - 1 - (n-1)\sum_{k=1}^{n} f_k(1)\\
E \geq e(0,0,0,\dots,0,0) &= -\sum_{k=1}^{n} f_k(0)\\
E \geq -e(0,1,1,\dots,1,1) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_1(1) + f_1(0)\\
E \geq -e(1,0,1,\dots,1,1) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_2(1) + f_2(0)\vdots\\
E \geq -e(1,1,1,\dots,0,1) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_{n-1}(1) + f_{n-1}(0)\\
E \geq -e(1,1,1,\dots,1,0) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_n(1) + f_n(0)
\end{aligned}$$

Durch Aufsummieren dieser Ungleichungen erhalten wir $2nE \geq n - 1$, also die Behauptung.
Aufgabe gelöst von Nuramon

9.30 XXVIII. Olympiade 1988

9.30.1 I. Runde 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281211
Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto *5 aus 35* beteiligen. Die Kollegen A, B, C werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen.

So verlangt A, dass jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist. B fordert, dass jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist. C erwartet, dass jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.

Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

I. Wenn ein Tip die Forderungen aller drei Kollegen erfüllt, so folgt:

a) Nach den Forderungen von A und C enthält der Tip genau drei Primzahlen und genau zwei Zahlen, die keine Primzahlen sind. Weil außer 2 alle Primzahlen ungerade sind, folgt aus der Forderung von A, dass der Tip die Zahl 2 enthält.

b) Von den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ergeben nur die Paare (17, 23) und (11, 29) die Summe 40. Damit enthält der Tip eines der Zahlentripel $(2;17;23)$ (1) oder $(2;11;29)$ (2).

c) Bezeichnet man die Zahlen der Forderung von B mit x,y und z, so gilt $33(x+y+z)=xyz$.

Folglich ist einer dieser Zahlen durch 11 teilbar. O.B.d.A. sei dies x. Wegen $1 \leq x \leq 35$ kann x nur einen der Werte 11, 22, 33 annehmen.

1. Fall: Es sei $x=11$.

Dann gilt $3(11+y+z)=yz$, also $(y-3)(z-3=42$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-2 \leq y-3 \leq 32$ und $-2 \leq z-3 \leq 32$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten

$$(y-3;z-3)=(2;21),(3;14),(6;7)$$

also nur

$$(x;y;z)=(11;5;24) \quad (3), \qquad (11;6;17) \quad (4), \qquad (11;9;10) \qquad (5)$$

Nun muss sich unter den fünf Zahlen des Tips eines der Tripel (1), (2) und zugleich eines der Tripel (3), (4), (5) befinden. Das ist nur möglich mit den Zusammenstellungen

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ mit } (4) & (2;17;23;11;6) \qquad (6)\\ (2) \text{ mit } (3) & (2;11;29;5;24) \qquad (7)\\ (2) \text{ mit } (4) & (2;11;29;6;17) \qquad (8)\\ (2) \text{ mit } (5) & (2;11;29;9;10) \qquad (9) \end{array}$$

Davon scheiden (6), (7), (8) aus, da sie die Forderung von C nicht erfüllen.

2. Fall: Es sei $x=22$.

Dann gilt $3(22+z+y)=2yz$, also $(2y-3)(2z-3)=141$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-1 \leq 2y-3 \leq 67$ und $-1 \leq 2z-3 \leq 67$ verbleibt hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeit $(2y-3;2z-3)=(3;47)$, also nur $(x;y;z)=(22;3;25)$.

Diese lässt sich aber weder mit (1) noch mit (2) zu fünf Zahlen eines geforderten Tips zusammenstellen; daher scheidet der 2. Fall aus.

3. Fall: Es sei $x=33$.

Dann gilt $33+z+y=yz$, also $(y-1)(z-1)=34$. Wegen $0 \leq y-1 \leq 34$ und $0 \leq z-1 \leq 34$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten $(y-1;z-1)=(1;34),(2;17)$, also nur $(x;y;z)=(33;2;35)$ (10), $(33;3;18)$ (11).

Diese lässt sich mit (1) oder (2) nur (10) zusammenstellen:

$$\begin{aligned} &(1) \text{ mit } (10) \qquad (2;17;23;33;35) \qquad (12)\\ &(2) \text{ mit } (10) \qquad (2;11;29;33;35) \qquad (13) \end{aligned}$$

d) Somit können nur (in anderer Reihenfolge) die Tips

$$(2;9;10;11;29),(2;11;29;33;35),(2;17;23;33;35) \qquad (14)$$

den Forderungen aller drei Kollegen genügen.

II. Diese Tips erfüllen die Forderungen von A und C, denn sie enthalten die Primzahlen 2, 11, 29 bzw, 2, 17, 23 mit der Summe 42 und die Nichtprimzahlen 9, 10 bzw. 33, 35.

Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (14) angegebenen Tips die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 281212

Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel bei C gibt, in denen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge

a) eine geometrische Folge,

b) eine arithmetische Folge

bilden.

Falle es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von a alle diejenigen Seitenlängen b, c für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

a) Die Seitenlängen a,b,c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine geometrische Folge, wenn es eine reelle Zahl q mit $b = aq$, $c = aq^2$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$a^2 + a^2q^2 = a^2q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 - q^2 - 1 = 0$$

gilt, d.h., wenn die Zahl $t = q^2$ die Gleichung $t^2 - t - 1 = 0$ erfüllt.

Diese hat genau die Lösungen $t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, von denen genau $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ nicht negativ und damit das Quadrat von einer reellen Zahl q ist, und zwar von genau einer positiven Zahl, nämlich

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$$

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreiecke der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

$$a \quad ; \quad b = a\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} \quad ; \quad c = a \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

betragen.

b) Die Seitenlängen a,b,c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge, wenn es ein d mit $b = a + d$, $c = a + 2d$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $c > a$, also $d > 0$ und $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$\begin{gathered} a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad + 4d^2 \\ d^2 + \frac{2}{3}ad - \frac{1}{3}a^2 = 0 \end{gathered}$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $d = \frac{a}{3}(-1 \pm 2)$, von denen genau $d = \frac{a}{3}$ positiv ist.

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreieck der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

$$a \qquad ; \qquad b = \frac{4}{3}a \qquad ; \qquad c = \frac{5}{3}a$$

betragen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 281213

a) Man gebe zwei Quadrupel $(x,\, y,\, z,\, u)$ reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.

b) Man ermittle ein Quadrupel $(x,\, y,\, z,\, u)$ ganzer Zahlen so, dass eine der Variablen x, y, z, u den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

$$1x + 9y + 8z + 8u = 1 \tag{1}$$
$$9x + 9y + 24z + 24u = 9 \tag{2}$$
$$8x - 13y + 8z + 7u = 8 \tag{3}$$
$$8x - 21y - 10z + 8u = 8 \tag{4}$$

a) Angenommen, es gibt ein Quadrupel (x,y,z,u) reeller Zahlen, das das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt. Dann ist nach (1)

$$x = 1 - 9y - 8z - 8u$$

Wird dies in (2) bis (4) eingesetzt, so folgt

$$3y + 2z + 2u = 0 \tag{5}$$
$$85y + 56z + 57u = 0 \tag{6}$$
$$93y + 74z + 56u = 0 \tag{7}$$

Nach (5) ist $z = -\frac{3}{2}y - u$. Wird dies in (6) und (7) eingesetzt, so ergibt sich $y + u = 0 \qquad (8)$ in beiden Fällen.

Nun sei $y = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Nach (8), (5) und (1) ergibt sich $u = -t$, $z = -\frac{1}{2}t$ und $x = 1 + 3t$. Die Probe bestätigt, dass für beliebiges t das Quadrupel

$$\left(1 + 3t,\ t,\ -\frac{1}{2}t,\ -t\right) \tag{9}$$

Lösung ist. Damit ist die Lösung des Gleichungssystems (1) bis (4) durch (9) gegeben, wobei der Parameter t die Menge aller reellen Zahlen durchläuft.

b) Nachfolgend wird eine Auswahl von Quadrupeln angegeben.

t	x	y	z	u
0	1	0	0	0
1988	5965	1988	-994	-1988
-1988	-5963	-1988	994	1988

$x = 1998$ liefert wegen $t = \frac{x-1}{3}$ für y keine ganze Zahl.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 281214
Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, dass die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.

(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.
Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht. Dabei sei angenommen, dass sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.

a) Fünf LKW reichen für jede solche Sendung aus; wegen $5 \cdot 2 = 10$ z.B., indem jeder LKW mit so vielen Stücken beladen wird, bis seine Ladung erstmals 2 t erreicht oder überschreitet (sofern noch Stückgut vorhanden ist, das nicht schon von den zuvor beladenen LKW abtransportiert wurde).

Ein derartiges Beladen ist möglich; denn solange die Ladung noch nicht 2 t erreicht oder überschritten hat, kann ein weiteres Stück hinzugefügt werden, da dieses nicht mehr als 1 t Masse hat. mit ihm also die Ladefähigkeit von 3 t nicht überschritten wird.

b) Vier LKW genügen dagegen nicht für jede Sendung, z.B. nicht für eine Sendung; die genau 13 Stücke mit einer Masse von je genau $\frac{10}{13}$ t enthält. Von einer solchen Sendung könnten nämlich auf jedem LKW wegen $4 \cdot \frac{10}{13} > 3$ höchstens 3 Stücke, auf alle vier LKW also höchstens 12 Stücke geladen werden.

c) Drei LKW reichen nicht für jede solche Sendung aus (sie reichen sogar für keine solche Sendung aus), weil mit ihnen höchstens 9 t auf einmal transportiert werden können.

Übernommen von [5]

9.30.2 II. Runde 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281221
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z \qquad (1)$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -x \qquad (2)$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = y \qquad (3)$$

Angenommen es gibt ein Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen, für das (1), (2) und (3) gilt. Aus (1), (2), (3) folgt dann

$$x + y = xyz \qquad (1')$$
$$y + z = -xyz \qquad (2')$$
$$x + z = xyz \qquad (3')$$

Aus (1') und (3') folgt $y = z$ (4). Damit folgt aus (1') und (2') durch Addition $x + 3z = 0$, also $x = -3z$ (5). Mit (4) und (5) ergibt (2'): $2z = 3z^3$.
Wegen $z \neq 0$ folgt hieraus $z = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$.
Hiernach ergibt sich aus (4) und (5) $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$ und $x = \mp\sqrt{6}$.
Als Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) kommen also nur die Tripel

$$\left(-\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$$

in Frage. Tatsächlich erfüllen die Tripel die Probe mit (1), (2) und (3).

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 281222
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$f_1(x) = (x-1)^2$$
$$f_2(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2$$
$$\text{allgemein} \quad f_n(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + ... + (nx-1)^2$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, dass die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

Nach der Definition von f_n ist mit bekannten Summenformeln

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^2(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 2x(1 + 2 + ... + n) + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)x^2 - n(n+1)x + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 - \frac{3}{2}n(n+1)\frac{1}{2n+1} + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Scheitel S_n dieser Parabel die Koordinaten

$$x_n = \frac{3}{2n+1} \qquad ; \qquad y_n = \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

hat.
a) Insbesondere sind die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3

$$x_1 = 1, y_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{1}{5}; \qquad x_3 = \frac{3}{7}, y_3 = \frac{3}{7}$$

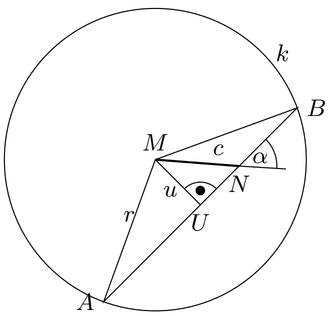
b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist $2n+1 < 2n+3$. Wegen $2n+1 > 0$ folgt daraus $\frac{3}{2n+3} < \frac{3}{2n+1}$, d.h. $x_{n+1} < x_n$. Also ist die Folge (x_n) streng monoton fallend.
Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist

$$2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + n - 3$$
$$(n+1)(2n+1) > (n-1)(2n+3)$$
$$\frac{(n+1)n}{2(2n+3)} > \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

d.h., $y_{n+1} > y_n$. Also ist die Folge (y_n) streng monoton steigend.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 281223
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.
Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.



Der Radius von k betrage r, ferner sei $C = MN$. Ist AB eine Sehne durch N, so bezeichne U den Fußpunkt des Lotes von M auf AB. Mit $u = MU$ gilt dann (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen A, B)

$$NA = AU + UN = \sqrt{r^2 - u^2} + \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$NB = BU - UN = \sqrt{r^2 - u^2} - \sqrt{c^2 - u^2}$$

Daher ist

$$NA^2 + NB^2 = 2(r^2 - u^2) + 2(c^2 - u^2)$$

genau dann möglichst klein, wenn u möglichst groß ist, und genau dann möglichst groß, wenn u möglichst klein ist. Damit folgt:

a) Für $u = \sqrt{x^2 - UN^2}$ gibt es einen größtmöglichen Wert, nämlich $u = c$. Er wird angenommen, wenn der Lotfußpunkt U mit N zusammenfällt, d.h., wenn AB die auf MN senkrecht (durch N) verlaufende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst klein.

b) Für u gibt es einen kleinstmöglichen Wert, nämlich $u = 0$. Er wird angenommen, wenn U mit M zusammenfällt, d.h. wenn AB die durch (N und) M gehende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst groß.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 281224
Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
festgelegt. Man untersuche, ob a) alle Zahlen x_n, b) alle Zahlen y_n positiv sind.

a) Durch Rechnung ergibt sich

$$x_2 = 2x_1 - 1 = 2(x_1 - 1) + 1$$
$$x_3 = 2x_2 - 1 = 2(2x_1 - 1) - 1 = 2^2(x_1 - 1) + 1$$
$$x_4 = 2x_3 - 1 = 2(2^2(x_1 - 1) + 1) - 1 = 2^3(x_1 - 1) + 1$$

Hierdurch wird die Vermutung nahegelegt, dass

$$x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1) + 1 \qquad , \qquad (n = 1,2,3,...) \tag{3}$$

gilt. Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Für alle n gilt folglich $x_n > 0$.

b) Durch vollständige Induktion beweist man

$$y_n = (995 - n) \cdot 2^n \tag{4}$$

Für $n = 1$ gilt $y_1 = 1988 = (995 - 1) \cdot 2$.
Wenn (4) für $n = k$ richtig ist, folgt für $n = k + 1$:

$$y_{k+1} = 2y_k - 2^{k+1} = 2(995 - k)2^k - 2^{k+1} = (995 - (k + 1)) \cdot 2^{k+1}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (4) somit für alle $n = 1,2,3,...$. Folglich ist y_n für alle $n \geq 996$ negativ.

Übernommen von [5]

9.30.3 III. Runde 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281231
Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{r}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

Wenn die Folgen arithmetisch sein sollen, muss gelten $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ bzw. $2a_2 = a_1 + a_3$. Das ergibt als erste Bedingung:

$$\frac{4}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$
$$4pr = qr + pq \qquad (1)$$

Ebenso gilt $2b_2 = b_1 + b_3$, beziehungsweise

$$pq = p + \frac{1}{2}qr$$
$$(q-1)p = \frac{1}{2}qr$$
$$r = 2\frac{q-1}{q}p \qquad (2)$$

Das setzen wir in (1) ein:

$$8\frac{q-1}{q}p^2 = 2(q-1)p + qp$$

Eine Lösung dieser Gleichung wäre $p = 0$, die aber in der Folge a_i zur Division durch null führen würde. Daher ist die Lösung nur:

$$8\frac{q-1}{q}p = 3q - 2$$
$$p = \frac{q(3q-2)}{8(q-1)}$$

und

$$r = \frac{3q-2}{4}$$

Mit $q = 5$ ergibt sich $p = \frac{65}{32}$ und $r = \frac{13}{4}$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 281232
Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene ϵ sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge alle derjenigen Punkte C in ϵ, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB = a$ und $AC : AB = BD : AD$ ist.

Es liege A im Ursprung und der Punkt B auf der x-Achse bei $(a,0)$. Der Punkt C habe die Koordinaten (x,y) und der Punkt D liege bei $(x-a,y)$. Es soll gelten:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{\sqrt{(a-(x-a))^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

Wir quadrieren und multiplizieren mit den Nennern:

$$(x^2+y^2)\left((x-a)^2+y^2\right) = a^2\left((x-2a)^2+y^2\right)$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2)=a^2(x^2+y^2-4ax+4a^2)$$

Wir substituieren $r^2=x^2+y^2$:

$$r^2(r^2-2ax+a^2)=a^2(r^2-4ax+4a^2)$$
$$r^4-(2ax-a^2)r^2-a^2r^2+(4ax-4a^2)a^2=0$$
$$r^4-2axr^2+(4ax-4a^2)a^2=0$$
$$r^2=ax\pm\sqrt{a^2x^2-4a^3x+4a^4}$$
$$r^2=ax\pm a\sqrt{x^2-4ax+4a^2}$$
$$r^2=ax\pm a(x-2a)$$

Es gibt daher 2 mögliche Lösungen.
1. Die "Minus"-Lösung:

$$r^2=ax-ax+2a^2=2a^2$$

Das ist ein Kreis um A mit dem Radius $\sqrt{2}\,a$.
2. Die "Plus"-Lösung:

$$r^2=x^2+y^2=2ax-2a^2$$
$$(x-a)^2-a^2+y^2=-2a^2$$
$$(x-a)^2+y^2=-a^2$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar. Als einzige Lösung bleibt für die Ortskurve des Punktes C nur der Kreis um A mit dem Radius $r=\sqrt{2}\,a$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 281233A
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n\geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i=1,2,...,n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1\leq i\leq n$ gilt $0\leq a_i\leq \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen a_j-a_i, die man für alle i,j mit $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$ und $i\neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

I. Für $n=3$ werden die Bedingungen z.B. durch $a_1=0, a_2=1, a_3=3$ mit den Differenzen $\{-1,-3,-1,-2,3,2\}$ erfüllt.

II. Für $n=4$ werden die Bedingungen z.B. durch $a_1=0, a_2=1, a_3=4, a_4=6$ mit den Differenzen $\{-1,-4,-6,1,-3,-5,4,3,-2,6,5,2\}$ erfüllt.

III. Angenommen nun, für ein $n\geq 5$ seien (1), (2) erfüllt durch natürliche Zahlen $a_1,...,a_n$. Dann folgt:
(3) Keine zwei der Zahlen $a_1,...,a_n$ sind einander gleich.
Beweis:
Wäre $a_j=a_k$ $(j\neq k)$, so folgte mit einem von j und k verschiedenen i, dass $a_j-a_i=a_k-a_i$ wäre, was (2) widerspricht.

O.B.d.A. kann daher wegen (1) angenommen werden:
(4) Es gilt $0\leq a_1<a_2<...<a_{n-1}<a_n\leq\frac{1}{2}(n-1)n$.

Weiter gilt:
(5) Die Differenzen a_j-a_i, die für alle i,j mit $1\leq i<j\leq n$ gebildet werden, sind die Zahlen $1,2,...,\frac{1}{2}(n-1)n$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.
Beweis:
Nach (4) gilt $0<a_j-a_i\leq\frac{1}{2}(n-1)n$ für jede dieser Differenzen. nach (2) sind sie paarweise verschieden, also ist ihre Anzahl gleich der Anzahl der Paare (i,j) mit $1\leq i<j\leq n$. Diese Anzahl ist aber gleich $\frac{1}{2}(n-1)n$, daher muss (5) gelten.

Insbesondere gilt:
(6) Die Differenzen $d_i=a_{i+1}-a_i$, die für alle $i=1$,...,$n-1$ gebildet werden, sind die Zahlen 1,2,...,$n-1$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.

Beweis:
Nach (4) ist die Summe dieser Differenzen

$$d_1 + ... + d_{n-1} = a_n - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1)n$$

nach (2) sind sie paarweise verschiedene natürliche Zahlen, nach (4) positiv.
Da aber bereits die Summe der Zahlen $1, 2, ..., n-1$ bekanntlich $\frac{1}{2}(n-1)n$ beträgt, verbleibt nur die Möglichkeit (6).
Nun erhält man: Nach (6) gibt es unter den Indizes $1, ..., n-1$ genau einen Index p mit $d_p = 1$. Ist ein Index r $(1 \leq r \leq n-1)$ oberer oder unterer Nachbar von p, so muss $d_r = n-1$ sein; denn wäre für zwei benachbarte Indizes $i, i+1$ die einer der beiden Zahlen d_i, d_{i+1} gleich 1, die andere kleiner als $n-1$, so folgte

$$a_{i+2} - a_i = d_{i+1} + d_i < n$$

womit wegen (6) ein Widerspruch gegen (2) vorläge.
Also muss p einer der beiden Indizes $1, n-1$ mit nur einem Nachbar sein, und für diesen Nachbarindex r mit $d_r = n-1$ gelten; d.h., es muss einer der beiden folgenden Fälle A, B vorliegen:
A: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1$ B: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1$.

Ebenso erhält man: Es gibt genau einen Index q mit $d_q = 2$. Ist ein Index s oberer oder unterer Nachbar von q, so muss d_s einer der Zahlen $n-2, n-1$ sein. Wegen $n \geq 5$ sind diese beiden Zahlen von 1 und 2 verschieden.
Also muss, falls q zwei Nachbarn hat, der einen von ihnen der bereits in den Fällen A, B festgelegte Index r sein, und für den anderen Nachbar s muss $d_s = n-2$ gelten.
Hat q aber nur einen Nachbar s (d.h. gilt $q = n-1$ im Fall A bzw. $q = 1$ im Fall B), so ist wegen $n \geq 5$ dieser Nachbar nicht der in den Fällen A, B festgelegte Index r; also kann dann nur $d_s = n-2$ sein.
Das heißt, es liegt jeweils für A bzw. B einer der folgenden Unterfälle A1, A2 bzw. B1, B2 vor:

A1: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_3 = 2, d_4 = n-2$
A2: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_{n-1} = 2, d_{n-2} = n-2$
B1: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_{n-3} = 2, d_{n-4} = n-2$.
B2: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_1 = 2, d_2 = n-2$.

Damit finden sich in jedem Fall vier Indizes der Form $u, u+1, v, v+1$ mit $u \neq v$, für die $d_u + d_{u+1} = n, d_v + d_{v+1} = n$ also $a_{u+2} - a_u = a_{v+2} - a_V$ gilt. Das widerspricht (6).
Die Annahme, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllbar, hat somit in jedem Fall auf einen Widerspruch geführt.
Mit I., II., III. ist bewiesen: Die Bedingungen der Aufgabe werden genau von den beiden Zahlen $n = 3$ und $n = 4$ erfüllt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3B - 281233B
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet:
Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, dass die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.
(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.
(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, dass dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.
a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
b) Beweisen Sie, dass es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

a) Angabe einer Verteilung: In jedem der 3 Behälter gebe man genau 2 der Gegenstände.

Nachweis der Bedingungen:

Wegen $2 \geq 1$ und $2 \leq 3$ sind (1) und (2) erfüllt. Ferner ist bei jeder Möglichkeit, die 3 Behälter in den zwei Räumen unterzubringen, in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Behältern als in dem anderen Raum, da die Anzahl 3 aller Behälter eine ungerade Zahl ist.
Somit gilt bei jeder dieser Möglichkeiten auch, dass in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Gegenständen als in dem anderen Raum ist. Damit ist (3) erfüllt.

b) Durch die gleiche Beweisführung, angewandt auf beliebiges ungerades n statt 3, erhält man:
Für jedes ungerade $n \geq 3$ kann die Forderung (mindestens) durch diejenige Verteilung erfüllt werden, bei der in jeden der n Behälter genau 2 Gegenstände gegeben werden.

Nun wird die folgende Hilfsaussage gezeigt:
Wenn die betrachtete Forderung für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ dadurch erfüllt ist, dass jeweils für $i = 1,...,n$ in den i-ten Behälter genau a_i Gegenstände gegeben werde, dann folgt, dass alle $a_i = 2$ sein müssen.

Beweis: Die Behälter lassen sich so bezeichnen, dass

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq n \tag{4}$$

gilt, wobei die erste und letzte Ungleichung aus (1) und (2) folgt.
Wegen (4) und der Anzahl $2n > n$ der Gegenstände gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 2$ mit

$$a_1 + ... + a_{k-1} \leq n \tag{5}$$
$$a_1 + ... + a_{k-1} + a_k > n \tag{6}$$

Würde in (5) das Gleichheitszeichen gelten, so erhielte man im Widerspruch zu (3) die Möglichkeit, in den einen Raum vermittels der Behälter $1,...,k-1$ genau n Gegenstände und folglich in den anderen Raum die übrigen n Gegenstände zu bringen. Also gilt sogar

$$a_1 + ... + a_{k-1} < n \tag{7}$$

wegen $a_i + ... + a_{n-1} = 2n - a_n \geq n$ ist dabei $k < n$ (8). Es werde nun

$$\begin{array}{lllll} s_1 = a_1 & ; & s_2 = a_1 + a_2 & ; \quad ... \quad ; & s_{k-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} \\ t_1 = n - a_n & ; & t_2 = n - a_n - a_{n-1} & ; \quad ... \quad ; & s_{n-k} = n - a_n - a_{n-1} - ... - a_{k+1} \end{array}$$

gesetzt. Wegen (1) sind alle s_i paarweise verschieden und alle t_j paarweise verschieden. Es ist aber auch jedes s_i von jedem t_j verschieden; denn aus $s_i = t_j$ würde

$$a_1 + ... + a_i + a_n + ... + a_{n-j+1} = n$$

und damit ein Widerspruch gegen (3) folgen.
Wegen (4), (6), (7) und der Gesamtzahl $2n$ der Gegenstände gilt für alle i bzw. j:

$$1 \leq s_i \leq n-1 \qquad\qquad 1 \leq t_j \leq n-1 \tag{9}$$

Aus (9) für die $n-1$ paarweise verschiedenen Zahlen s_i, t_j folgt:
Die Zahlen $s_1, ..., s_{k-1}, t_1, ..., t_{n-k}$ sind die Zahlen $1, ..., n-1$ in geeigneter Reihenfolge (10)

Wäre nun $a_1 = 1$, so könnten wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nicht alle $a_2, ..., a - n \leq 2$ sein, also müsste wegen (4) mindestens $a_n \geq 3$ sein. Daher wäre $t_1 \leq n-3$ und somit erst recht $t_j \leq n-3$ für alle j. Die beiden Zahlen $n-2$ und $n-1$ müssten wegen (10) also unter den s_i auftreten, was wegen $s_1 < ... < s_{k-1}$ nur mit $s_{k-2} = n-2$ und $s_{k-1} = n-1$ möglich wäre.
Das hätte aber $a_{k-1} = 1$, wegen (4) also $a_1 = ... = a_{k-1} = 1$ zur Folge. Aus $s_{k-1} = n-1$ erhielte man somit $k-1 = n-1$ im Widerspruch zu (8).
Also muss $a_1 = 2$ gelten; nach (4) müssen alle $a_i \geq 2$ sein, und dies ist wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nur mit $a_1 = ... = a_n = 2$ möglich. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Unter Verwendung der Hilfsaussage ergibt sich folgender Beweis dafür, dass die in der Aufgabe betrachtete Forderung für gerades n nicht erfüllt werden kann:
Wäre es doch möglich, (1), (2), (3) zu erfüllen, so müsste nach der Hilfsaussage $a_1 = ... = a_n = 2$ gelten. Dann aber könnte man, da n gerade ist, in jeden der beiden Räume $\frac{n}{2}$ Behälter und damit n Gegenstände bringen, was (3) widerspricht.

c) Aus der Hilfsaussage folgt ferner, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ die in b) zu Anfang nachgewiesene Möglichkeit, (1) bis (3) durch $a_1 = ...a_N = 2$ zu erfüllen, die einzige ist.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 281234
Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge
$a_1, a_2, ..., a_{21} \quad (*)$
dieser Zahlen so gibt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
(2) Die Summe aller 21 Zahlen ergibt 1989.

Wir bilden dazu die Folge a_1,a_2,...,a_{21}, welche rekursiv folgendermaßen definiert ist durch

$$a_1 = 1994,\ a_2 = -5989,\ a_3 = 1995,\ a_4 = 1996$$

sowie für $k = 5$,6,..,21 durch

$$a_k = \begin{cases} a_{k-4} + 3, & \text{falls } k \not\equiv 2 \mod 4 \\ a_{k-4} - 9, & \text{falls } k \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

Betrachtet man die ganze Folge, nämlich

$$1994, -5989, 1995, 1996, 1997, -5998, 1998, 1999, 2000, -6007, 2001, 2002, 2003, -6016, 2004,$$

$$2005, 2006, -6025, 2007, 2008, 2009$$

und dazu ihre Summe

$$1994 + \underbrace{(-5989) + 1995 + 1996 + 1997}_{=-1} + \underbrace{(-5998) + 1998 + 1999 + 2000}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6007) + 2001 + 2002 + 2003}_{=-1} + \underbrace{(-6016) + 2004 + 2005 + 2006}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6025) + 2007 + 2008 + 2009}_{=-1} = 1994 - 5 = 1989$$

so sollte das einfache Konstruktionsprinzip der Folge damit klar sein:
Indem wir sicherstellen, dass die unterklammerten Teilsummen alle negativ sind, sind dann nach der Bauart der Folge automatisch auch alle anderen Teilsummen aus jeweils 4 aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge negativ!
Damit erfüllt diese Folge also dann tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 281235
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ... + \frac{x_n}{n} \leq 3$$

Es gilt für alle $n \geq 1$, dass

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq 0$$

ist. Es sei

$$S_n = \frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} = \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

wobei $S_n \leq 1$ gilt. Es reicht, zu beweisen, dass

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} \leq 3$$

gilt, denn da alle Summanden positiv sind, gilt

$$\sum_{k=1}^{k<n^2} \frac{x_k}{k} < T_n \leq 3$$

dann erst recht. Den Beweis für $T_n \leq 3$ können wir führen, indem wir die fragliche Summe nach oben abgrenzen:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{x_l}{l} \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Da sowohl $x_l \leq x_{m^2}$ als auch $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{m^2}$ für $l \geq m^2$, gilt:

$$\frac{x_l}{l} \leq \frac{x_{m^2}}{m^2}$$

und daher

$$T_n \leq \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} \sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} 1 \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Als letzten Schritt zeigen wir, dass $T_n \leq 3S_n$ ist:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} \leq 3 \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn sie für jeden Summanden einzeln gilt. Für den letzten Summanden ist das offenkundig der Fall, da $\frac{1}{n^2} < \frac{3}{n}$ ist. Für alle anderen Summanden muss gelten, dass

$$\frac{2m+1}{m^2} \leq \frac{3}{m}$$

ist. Wir multiplizieren mit m^2:

$$2m + 1 \leq 3m$$

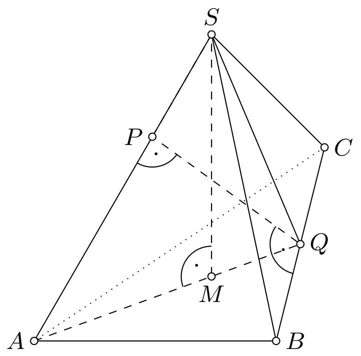
was für alle $m \geq 1$ erfüllt ist. Damit ist erwiesen, dass

$$T_n < 3S_n$$

ist, und damit nach Voraussetzung auch $T_n \leq 3$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6 - 281236
Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.
Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt!
Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!
Hinweis:
Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet.
Diese Erklärung gilt auch für den Fall, dass derartige Punkte G, H sogar den Stecken UV bzw. XY angehören.



Für jede Pyramide aus M sei $AB = BC = CA = x$ gesetzt. Das gleichseitige Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \tag{1}$$

Es sei AQ die auf BC senkrechte Höhe in diesem Dreieck, zugleich die Seitenhalbierende von BC. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein M; er teilt AQ im Verhältnis

$$AM : MQ = 2 : 1 \tag{2}$$

und ist zugleich der Umkreismittelpunkt von ABC.
Nach Voraussetzung steht SM senkrecht auf BM und CM; daraus und asu $BM = CM, SM = SM$ folgt $\triangle BMS \cong \triangle CMS$ nach dem Kongruenzsatz sws.

Also ist das Dreieck BCS gleichschenklig mit $BS = CS$, und seine Seitenhalbierende SQ ist zugleich Höhe. Somit sind AQ und SQ senkrecht auf BC, also ist BC senkrecht auf der Ebene durch A, Q, S und daher senkrecht auf allen Geraden dieser Ebene.
Fällt man das Lot QP von Q auf AS, so gibt folglich PQ den Abstand zwischen AS und BC an, das ABC und AQS spitzwinklige Dreiecke sind, also Q und P den Strecken CB bzw. AS angehören. Das heißt, es gilt

$$PQ = d \tag{3}$$

Man erhält dann

$$AQ = \frac{x}{2}\sqrt{3} \qquad \text{(Höhe im Dreieck } ABC\text{)}$$

$$AP = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2} \qquad \text{(Satz des Pythagoras für } \triangle APQ\text{)} \tag{4}$$

$$AM = \frac{2}{3}AQ = \frac{x}{3}\sqrt{3} \qquad \text{(nach (2))} \tag{5}$$

Wegen $\triangle AMS \sim \triangle APQ$ (Übereinstimmung in der rechten Winkeln und im Winkel bei A) gilt

$$MS : AM = PQ : AP \tag{6}$$

Aus (6) und (3), (4), (5) folgt

$$MS = \frac{AM \cdot PQ}{AP} = \frac{\frac{x}{3}\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2}} = \frac{2d \cdot x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2 - 4d^2}}$$

Hiernach und nach (1) hat die Pyramide das Volumen, als Funktion von x:

$$f(x) = V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot MS = \frac{d \cdot x^3}{6\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \tag{7}$$

Als Intervall für die Variable x ist $x > \frac{2d}{\sqrt{3}}$ zugrunde zu legen (wie sich wegen der Bedingung $3x^2 - 4d^2 > 0$ für den Radikanden im Nenner und geometrisch aus $AQ > PQ$ im rechtwinkligen Dreieck APQ ergibt). In diesem Intervall gilt

$$f'(x) = \frac{d}{6} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3x^2 - 4d^2} - x^3 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x^2-4d^2}} \cdot 6x}{3x^2 - 4d^2} = \frac{d \cdot x^2 \cdot (x^2 - 2d^2)}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}^3}$$

Daraus folgt: Im Intervall $\frac{2d}{\sqrt{3}} < x < d\sqrt{2}$ ist $f'(x) < 0$, für $x = d\sqrt{2}$ ist $f'(x) = 0$, im Intervall $x > d\sqrt{2}$ ist $f'(x) > 0$.
Also ist V kleinstmöglich (genau) für $x = d\sqrt{2}$; dieses kleinstmögliche Volumen beträgt

$$f(d\sqrt{2}) = \frac{1}{3}d^3$$

Übernommen von [5]

9.30.4 IV. Runde 1988, Klasse 12

Aufgabe 1 - 281241
Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14}$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist

$$x + 2y + 3z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{14},$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn beide Vektoren parallel sind. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tritt in der Tat Gleichheit ein, sodass ein $a > 0$ existiert mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt $a + 4a + 9a = \sqrt{14}$, insgesamt muss also $x = a$, $y = 2a$, $z = 3a$ mit $a = \sqrt{14}/14$ gelten. Eine Probe (Einsetzen ins Gleichungssystem) ergibt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 281242
Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.
(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{sowie} \quad f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, ..., n$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x)$$

Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 1$ machen wir den Ansatz $f(x) = ax$ mit einer Konstanten a. Nach (3) ist dann $f_k(x) = a^k x$ für $k = 1,2,...,n+1$ und es soll gelten $ax + a^2x + ... + a^n x = a^{n+1}x$.
Wegen (2) ist $a \neq 0$ und es folgt

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + ... + \frac{1}{a} = 1 \qquad (4)$$

Zum Nachweis, dass es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, die die Gleichung (4) erfüllt, betrachten wir die für $t > 0$ stetige Funktion

$$g(t) = \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} + ... + \frac{1}{t}$$

Wegen $\lim\limits_{t \to 0} = \infty$ und $g(1) = \frac{1}{n}$ folgt unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Existenz einer Zahl a mit $0 < a \leq 1$ und $g(a) = 1$. Die Funktion $f(x) = ax$ mit dieser Zahl a erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2), (3).

Übernommen aus [1]

Aufgabe 3 - 281243
Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

X sei innerer Punkt des konvexen n-Ecks $P_1P_2...P_n$. Dann gilt für den Flächeninhalt F_i des Teildreiecks P_iXP_{i+1} ($i = 1,2,...,n$; $P_{n+1} = P_1$)

$$2F_i = P_iX \cdot P_{i+1}X \cdot \sin\angle P_iXP_{i+1} \leq P_X \cdot P_{i+1}X \qquad (1)$$

Für beliebige reelle Zahlen a,b gilt wegen $(a-b)^2 \geq 0$: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Damit folgt aus (1)

$$2F_i \leq P_iX \cdot P_{i+1}X \leq \frac{1}{2}(P_iX^2 + P_{i+1}X^2) \qquad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn $\sin\angle P_iXP_{i+1} = 1$ ist, wegen der Lage von X also genau dann, wenn $\angle P_iXP_{i+1} = 90°$ gilt. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $P_iX = P_{i+1}X$ gilt. Aus (1) und (2) folgt für den Flächeninhalt F von $P_1P_2...P_n$

$$2F = \sum_{i=1}^{n} 2F_i \leq P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2 \qquad (3)$$

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt genau dann, wenn für jedes i ($i = 1,2,...,n$) das Gleichheitszeichen in (1) und in (2) gilt, d.h. genau dann, wenn jedes Teildreieck P_iXP_{i+1} rechtwinklig und gleichschenklig ist. Gibt es in $P_1P_2...P_n$ einen inneren Punkt X, für den in (3) das Gleichheitszeichen steht, so folgt wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \angle P_iXP_{i+1} = 360° \qquad \text{und} \qquad \angle P_iXP_{i+1} = 90°$$

für $i = 1,2,...,b$ notwendig $n = 4$. Es sind alle Teildreiecke P_iXP_{i+1} kongruent (sws), und es folgt

$$P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1$$

und die Gleichheit der Innenwinkel im Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Das Viereck muss aber ein Quadrat sein. Jedes Quadrat erfüllt auch die gestellten Bedingungen, denn für den Mittelpunkt X eines Quadrates mit der Kantenlänge a gilt $P_iX = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und folglich

$$P_1X^2 + P_2X^2 + P_3X^2 + P_4X^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot = 2a^2 = 2F$$

Übernommen aus [1]

Aufgabe 4 - 281244
Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für die jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind.
Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.
Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d.h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muss.

Für eine Kombination $k = (k_1, k_2, k_3)$ werde genau dann gesagt, sie "überdecke" (a_1, a_2, a_3), wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die acht möglichen Werte der a_i seien o.B.d.A. die Zahlen 0, 1, ...,7.

I. Es seien S, T, U die Mengen

$$S = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$$
$$T = \{(0,0,2), (0,2,0), (2,0,0), (2,2,2)\}$$
$$U = \{(0,0,0), (4,4,4)\}$$

Die 32 Kombinationen $k = s + t + u$ ($s \in S, t \in T, u \in U$) bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Um dies zu beweise, sei eine beliebige dieser Kombinationen (a_1, a_2, a_3) betrachtet. Man setze zunächst

$$u = \begin{cases} (0{,}0{,}0) & \text{falls mindestens zwei } a_m, a_n \leq 3 \text{ sind } (m \neq n) \quad (1) \\ (4{,}4{,}4) & \text{sonst} \end{cases}$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m < n$ so, dass für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl $b_i = a_i - u_i$ (2) erfüllt $0 \leq b_i \leq 3$; also existieren

$$s_i \in \{0;1\}, \quad t_i \in \{0;2\} \qquad (3)$$

mit $b_i = s_i + t_i$ (4).
Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m;n) = (1;2), (1;3), (2;3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der s_i, t_i findet man nach Definition vn S und T ein $s = (s_1, s_2, s_3) \in S$ und ein $t = (t_1, t_2, t_3) \in T$, in denen s_m, s_n bzw. $_m, t_n$ gerade die Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1, k_2, k_3) = s+t+u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen

$$k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i \qquad (i = ,m,n)$$

w.z.b.w.

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Aus dieser Annahme lässt sich z.B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten:
Zunächst folgt, dass für mindestens einen der acht Werte $p = 0{,}1{,}...{,}7$ die Menge P aller (p, y, z) ($y{,}z \in \{0{,}1{,}...{,}7\}$) höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c, d, e so, dass aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c{,}d{,}e\}$ folgt, und es gibt (nicht notwendig verschiedene) Zahlen f, g, h so, dass aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f{,}g{,}h\}$ folgt.
Es sei $Y = \{0{,}...{,}7\} \setminus \{c{,}d{,}e\}$ und $Z = \{0{,}...{,}7\} \setminus \{f{,}g{,}h\}$.
Die Menge aller (p, y, z) ($y \in Y, z \in Z$) (5) enthält mindestens $(8-3) \cdot (8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1, k_2, k_3) \in K$ überdeckt.
Nach Wahl der $c, ..., f$ ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich nur mit $k_2 \in Y$ und $k_3 \in Z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, dass es mindestens 25 Kombinationen $(k_1, k_2, k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c{,}d{,}e\}$ geben muss und folglich höchstens $31 - 25 = 6$ mit $k_2 \in \{c{,}d{,}e\}$ geben kann.

Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c, d, e folgt nun, dass für mindestens einen der drei Werte $a = c{,}d{,}e$ die Menge Q aller (x, q, z) ($x{,}z \in \{0{,}...{,}7\}$) höchstens zwei Kombinationen aus K enthält.
Analog wie bei P ergibt sich hieraus $(8-2) \cdot (8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch.
Mit I. und II. ist als gesuchte kleinste Zahl $N032$ nachgewiesen.

Übernommen aus [1]

Aufgabe 5 - 281245
Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, das der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt.
Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'.
Der Radius der Umkugel sei r.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{3} r$$

Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder $ABCD$, $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ mit V, V_1, V_2, V_3 bzw. V_4, so gilt

$$V_i > 0 \quad (i = 1{,}2{,}3{,}4) \qquad \text{und} \qquad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V \qquad (1)$$

Sind h_1, h_2, h_3 bzw. h_4 die Längen der Höhen des Tetraeders $ABCD$ bezüglich der Grundflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC und h_1', h_2', h_3' bzw. h_4' die Längen der Höhen der Tetraeder $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h_1'}{h_i} \quad (i = 1{,}2{,}3{,}4) \qquad (2)$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B, C, D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A, M, A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{h_1'}{h_1}, \quad ..., \quad \frac{MD'}{DD'} = \frac{h_4'}{h_4} \qquad (3)$$

die übrigen ergeben sich analog für B, C bzw. D statt A. Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$$

wegen $MA = MB = MC = MD = r$ also

$$\frac{AA' - r}{AA'} + \frac{BB' - r}{BB'} + \frac{CC' - r}{CC'} + \frac{DD' - r}{DD'} = 1$$

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'} = \frac{3}{r} \qquad (4)$$

Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $AA', ..., DD'$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} \leq \frac{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}}{4}$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} = \frac{16}{3} r$$

Übernommen aus [1]

Aufgabe 6A - 281246A
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n + 2$ reelle Zahlen p, q, a_1, a_2, ..., a_n, die

$$0 < p \leq ai \leq q \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4} \right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2 \qquad (2)$$

Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g + 1$.
Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)
a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,
b) zwischen der zweiten und dritten Zahl
das Gleichheitszeichen gilt.

Bezeichnen wir für $0 < x \leq y$ mit $f(x{,}y)$ die Funktion

$$f(x{,}y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right) = n + \sum_{1 \leq i < k \leq n} f(a_i, a_k) \qquad (3)$$

Für jedes positive z gilt bekanntlich $z + \frac{1}{z} \geq 2$ mit Gleichheit genau für $z = 1$. Damit gilt stets $f(x,y) \geq 2$, da die rechte Summe in (3) aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden besteht, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$$

Damit ist die linke Ungleichung von (2) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Wir betrachten nun den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{aligned} 1 + f(a_1,a_2) + f(a_1, a3) \\ +... + f(a_1,a_{n-1}) + f(a_1,a_n) \\ +1 + f(a_2,a_3) \\ +... + f(a_2,a_{n-1}) + f(a_2,a_n) \\ +........ \\ +1 + f(a_{n-1},a_n) \\ +1 \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zwei Hilfsungleichungen (hier ohne Beweis):
1. Für $0 < w \leq x \leq y \leq z$ gilt $f(w,z) \leq f(x,y)$. Gleichheit gilt genau für den Fall $w = x$, $y = z$.
2. Für $0 < x \leq y \leq z$ gilt $f(x,y) + f8y,z) \leq 2 + f(x,z)$. Gleichheit gilt genau für die zwei Fälle $y = x$ und $y = z$.

Betrachten wir nun zwei Zahlen i,k mit $1 \leq i < k \leq n$ und $i + k \leq n + 1$ in unserem Schema die Summanden in der k-ten Spalte der i-ten Zeile und er $(n + 1 - i)$-ten Spalte der k-ten Zeile, so gilt für deren Summen nach der zweiten Hilfsungleichung

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(a_1, a_{n+1-i})$$

Nach der ersten Hilfsungleichung folgt daraus wegen (1)

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(p,q)$$

Damit können wir unsere Summe verkleinern, wenn wir für alle möglichen Werte von i und k die Summanden $f(a_i,a_k)$ und $f(a_k, a_{n+1-i})$ jeweils durch $\left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)$ ersetzen.
Die einzigen Summanden in unserem Schema, die noch nicht ersetzt sind, sind die Summanden auf der Diagonalen (a_1,a_n), $f(a_2, a_{n-1})$, ... Nach der ersten Hilfsungleichung können wir jeden durch $f(p,q)$ ersetzen. Unser Schema hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} 1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) \\ +... + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + f(p,q) \\ +1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) \\ +... + f(p,q) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) \\ +........ \\ +1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) \\ +1 \end{aligned}$$

Durch Abzählen der Summanden erhält man: ist n ungerade, so hat das neue Schema die Summe

$$\frac{n^2+1}{2} + f(p,q)\frac{n^2-1}{4}$$

ist n gerade

$$\frac{n^2}{2} + f(p,q)\frac{n^2}{4}$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$f(p,q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 + 2$$

so folgt daraus die Behauptung der Aufgabe.
Gleichheit gilt, falls in unseren Hilfsungleichungen stets Gleichheit galt, d.h. für $p = x_1 = ... = x_m$, $x_{m+1} = ... = x_n = q$ mit $m = \frac{n}{2}$ für n gerade und $m = \frac{n-1}{2}$ und $m = \frac{n+1}{2}$ für n ungerade.

Übernommen aus [1]

Aufgabe 6B - 281246B
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1.
Sei $ABCD$ das gegebene Quadrat der Seitenlänge 1,99. Offenbar kann man ein Quadrat der Seitenlänge 1 in $ABCD$ legen. Mit zwei Quadraten ist das jedoch nicht mehr möglich, weil sich zwei beliebige, in $ABCD$ liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen.
Um das zu zeigen, wird bewiesen, dass ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge 1, das in $ABCD$ liegt, den Mittelpunkt M von $ABCD$ in seinem Innern enthält.

Angenommen, für ein solches Quadrat $PQRS$ ist das nicht der Fall.
Wir bezeichnen die Geraden durch P,Q bzw. Q,R bzw. R,S bzw. S,P mit p,q,r bzw. s. Dann liegt M auf dem Rand oder außerhalb von mindestens einem der beiden Streifen zwischen p und r bzw. zwischen q und s. Also hat M von mindestens einer der Geraden p,q,r oder s einen Abstand ≥ 1, o.B.d.A. von p. Also liegt p ganz außerhalb des Inkreises k von $ABCD$, da dieser den Radius $\frac{1}{2} \cdot 1{,}99 < 1$ hat. Andererseits enthält der Durchschnitt von p mit der Quadratfläche $ABCD$ mindestens die Strecke PQ und ist daher selbst eine Strecke XY.
Wir bezeichnen nun mit E,F,G,H die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA sowie mit AEH die Differenz zwischen $\triangle AEH$ und dem in $\triangle AEH$ liegenden, durch E und H bestimmten Segment von k, wobei AEH ohne den Bogen $\overset{\frown}{EH}$, aber mit allen übrigen Randpunkten verstanden sein. Analog seien die Flächenstücke BFE, CGF und DHG definiert.
Da nun $ABCD$ mit dem Außengebiet von k nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke AEH, BFE, CGF und DHG gemeinsam hat, muss die Strecke XY ganz in einem dieser Stücke liegen, o.B.d.A. in AEH. Ihre Endpunkte X,Y sind Randpunkte von $ABCD$, wegen

$$XY \geq PQ = 1 > 0{,}5 \cdot 1{,}99 = AE = AH$$

also o.B.d.A. mit X auf AH und Y auf AE.
Unter allen Geraden, die parallel zu p sind und durch einen Punkt der Strecke XH gehen, muss es genau eine geben, die k berührt, den p selbst liegt außerhalb k, und die Parallele durch H zu p schneidet den Kreis k in zwei Punkten, da sie nicht auf dem Radius MH senkrecht steht. Diese k berührende Gerade u schneidet die Strecke XH also in einem inneren Punkt U und somit die Strecke YE in einem inneren Punkt V, ihr Berührungspunkt mit k sei W. Wegen $AX < AU$ ist nach dem Strahlensatz auch $XY < UV$.
Nach Dreiecksungleichungen und dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte folgt schließlich

$$1 = PQ \leq XY < UV < \frac{1}{2}(AU + AV + UW + VW) = \frac{1}{2}(AU + AV + UH + VE) = AE = \frac{1}{2} \cdot 1{,}99$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war und beendet den Beweis.

Übernommen aus [1]

9.31 XXIX. Olympiade 1989

9.31.1 I. Runde 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291211
Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.

(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.

(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von z durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z+z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

Die Ziffern von z seien a, b, c, d, e. Zu ermitteln ist die Anzahl der Lösungen einer Aufgabe, die nach Art eines Kryptogramms

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ + & e & d & c & b & a \\ \hline & f & f & f & f & f \end{array} \quad (*) \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & a & b & c & d & e \\ + & & e & d & c & b & a \\ \hline & f & f & f & f & f & f \end{array} \quad (**)$$

lautet. Für jede solche Lösung folgt:

Da in der Einerstelle $a+e=f$ oder $a+e=10+f$ (4) gefordert wird, kann aus der Tausenderstelle kein Übertrag in die Zehntausenderstelle auftreten, d.h., es gilt $b+d<10$ (5)

In (**) folgt $f=1$ und $a+e>10$, nach (4) also $a+e=11$. Wegen des somit in der Einerstelle auftretenden Übertrags und $f=1$ müsste $b+d=0$ oder $b+d=10$, wegen (5) also $b+d=0$ sein. Das hätte den Widerspruch $b=d=0$ gegen (1) zur Folge. Der Fall (**) scheidet als aus.

In (*) folgt $a+e<10$ (6) und damit weiter, dass (*) genau dann erfüllt wird, wenn, an allen Stellen ohne Übertrag,

$$0<f=a+e=b+d=2c<10 \qquad (7)$$

gilt. Für die Darstellung der geraden Zahlen f zwischen 0 und 10 als Summe zweier voneinander und von 0 verschiedener natürlicher Zahlen a, e gibt es genau die Möglichkeiten der Tabelle

f	Darstellung	c
2	-	
4	1+3	2
6	1+5, 2+4	3
8	1+7, 2+6, 3+5	4

Für die Darstellung als Summe zweier voneinander verschiedener natürlicher Zahlen b, d, unter denen sich auch die 0 befinden kann, kommt jedes Mal noch die Möglichkeit $f=0+f$ hinzu. Die jeweils noch zu f gehörende Zahl c ist auch stets von den für a, e und b, d angegebenen Möglichkeiten verschieden.

Im Fall $f=4$ wird somit (*) genau mit den Mengen (ungeordneten Paaren) $\{a,e\}=\{1,3\}$ und $\{b,d\}=\{0,4\}$ erfüllt. In jeder dieser Mengen gibt es genau 2 Möglichkeiten der Reihenfolge; somit hat (*) für $f=4$ genau 4 Lösungen.

Im Fall $f=6$ ist für $\{a,e\}$ eine den Mengen $\{1,5\}, \{2,4\}$ (4 Möglichkeiten) und dazu für b, d entweder die andere dieser Mengen oder 0, 6 (4 Möglichkeiten) zu nehmen; somit hat (*) für $f=6$ genau 16 Lösungen.

Im Fall $f=8$ folgt ebenso, dass es für $\{a,e\}$ und für $\{b,d\}$ je 6 Möglichkeiten, für (*) also genau 36 Lösungen gibt.

Die gesuchte Anzahl aller Lösungen beträgt folglich 56.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 291212
Man ermittle alle Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^3 + y^3 = 7 \tag{1}$$
$$x + xy + y = -1 \tag{2}$$

Es seien x,y reelle Zahlen, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Dann gilt nach Umformung der Gleichung (2)

$$(x+1)(y+1) = 0 \tag{3}$$

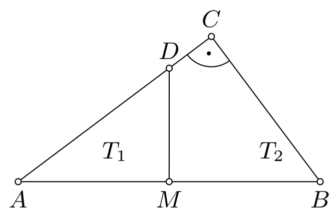
Diese Gleichung gilt genau dann, wenn $x = -1$ oder $y = -1$ gilt.

Es sei $x = -1$. Aus (1) folgt dann $y^3 = 8$, also $y = 2$.
Es sei $y = -1$. Dann folgt aus (1) analog $y = 2$.
Mithin können höchstens die Paare $(-1{,}2), (2,-1)$ die Gleichungen (1), (2) erfüllen. Wie die Probe zeigt, sind diese beiden Paare tatsächlich Lösungen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 291213
In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, dass A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.

Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.



In jedem Dreieck ABC mit $\angle ACB = 90°$ bezeichne M den Mittelpunkt von AB und D den von M verschiedenen Schnittpunkt des Dreiecksrandes mit der Mittelsenkrechten. Wegen $\triangle AMD \cong \triangle BMD$ und da die Bedingung der Ganzzahligkeit von k nur mit $k \geq 1$, also $F_2 \geq F_1$ erfüllbar ist, kann C nicht auf der Verlängerung von BD über D hinaus liegen, also muss D auf AC liegen (siehe Abbildung).

Nun gilt mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seitenlängen

$$F_1 = \frac{c}{4} \cdot MD \qquad ; \qquad F_2 = \frac{ab}{2} - F_1$$

Da wegen das Hauptähnlichkeitssatzes $\triangle AMD \sim \triangle ACB$ ist, gilt

$$\frac{c}{2} : MD = b : a \qquad ; \qquad MD = \frac{ac}{2b} \qquad \text{also}$$

$$F_1 = \frac{ac^2}{8b} \qquad ; \qquad F_2 = \frac{ab}{2} - \frac{ac^2}{8} = \frac{a}{8b}(4b^2 - c^2)$$

Somit wird

$$k = F_2 : F_1 = \frac{4b^2 - c^2}{c^2}$$

genau dann mit ganzzahligem k erfüllt, wenn dies für

$$(k+1) \cdot c^2 = 4b^2 \qquad ; \qquad \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{k+1} \tag{1}$$

zutrifft. Da die Kathetenlänge b kleiner als die Hypotenusenlänge c ist, folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad k < 3$$

Hiernach und wegen $0 < F_2 : F_1 = k$ ist (1) genau mit $k = 1$ und $k = 2$ zu erfüllen.

Die so charakterisierten Dreiecke lassen sich auch unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen für die Innenwinkelgrößen folgendermaßen beschreiben:

Im Fall k_1 gilt (1), d.h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = \beta = 45°$.

Im Fall $k = 2$ gilt (1), d.h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Somit sind genau diese Dreiecke alle gesuchten.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 291214
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2 - 2x}{x} + \frac{3^2 - 3x}{x} + ... + \frac{n^2 - nx}{x}$$

definiert ist.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!

b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!

c) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

a) Genau dann gilt $f_1(x) = 0$, wenn $1 - x = 0$ gilt. Also hat f_1 genau die Nullstelle $x = 1$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_2(x) = \frac{1}{x}(5 - 3x)$. Also hat f_2 genau die Nullstelle $x = \frac{5}{3}$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_3(x) = \frac{1}{x}(14 - 6x)$. Also hat f_3 genau die Nullstelle $x = \frac{7}{3}$.

Für alle $x \neq 0$ ist $f_4(x) = \frac{1}{x}(30 - 10x)$. Also hat f_4 genau die Nullstelle $x = 3$.

b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jedes reelle $x \neq 0$ ist

$$f_n(x) = \frac{1}{x}(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - (1 + 2 + 3 + ... + n)$$

Nach den Formeln für die hier auftretenden Summen folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{6x} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6x} \cdot (2n - 1 - 3x) \end{aligned}$$

Also hat f_n genau die Nullstelle $x = \frac{2n+1}{3}$.

c) Es gilt genau dann $\frac{2n+1}{3} > 100$ wenn $2n + 1 > 100$, d.h. $n > 149{,}5$ gilt.

Natürliche Zahlen, für die das gilt, gibt es: die kleinste von ihnen ist $n = 150$.

Übernommen von [5]

9.31.2 II. Runde 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291221
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21 \qquad (1)$$
$$y + xy + x^2y = 14 \qquad (2)$$
$$x + y = -1 \qquad (3)$$

Addition von (1) und (2) führt auf die neue Gleichung

$$(x + y) + 2xy + xy(x + y) = -7$$

aus der man mittels (3) sofort $xy = -6$ erhält.
Indem man dies etwa in (1) einsetzt, erhält man daraus die weitere lineare Gleichung

$$x - 6y = -15$$

welche in Verbindung mit (3) schließlich auf die eindeutige Lösung $x = -3$, $y = 2$ hier führt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 291222
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, daß für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m + 2)x + 8m + 1 > 0 \qquad (1)$$

Per quadratischer Ergänzung kann man die Ungleichung wie folgt darstellen:

$$\left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 + 8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen x immer erfüllt, wenn

$$8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

$$32m + 4 - m^2 - 4m - 4 > 0$$
$$m^2 - 28m < 0$$

Die Ungleichung ist erfüllt für $0 < m < 28$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 291223
Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, dass je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muss.

Aus dem Kosinussatz und der Tatsache, dass in einem Dreieck der größte Winkel der größten Seite gegenüberliegt, folgt, dass ein Dreieck mit Seitenlängen $x \leq y \leq z$ genau dann spitzwinklig ist, wenn $x^2 + y^2 > z^2$ gilt.
Sei O.B.d.A. $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Angenommen die Dreiecke c,d,e bzw. a,b,c bzw. a,b,d wären nicht spitzwinklig, dann wäre nach obiger Bemerkung

$$e \geq \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Aus der Dreiecksungleichung im Dreieck a,b,e und der Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel folgt andererseits

$$e < a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Somit erhalten wir widersprüchlicherweise, dass sowohl $e \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ als auch $e < \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ gelten muss. Also muss eines der genannten Dreiecke spitzwinklig sein.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 291224
Man löse die folgende Aufgabe
a) für $n = 8$ und $k = 5$,
b) für $n = 9$ und $k = 6$.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen $1, 2, ..., n^2$ in ein schachbrettartiges $n \times n$-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!
Hinweise:
1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, dass jedes Feld genau eine Zahl erhält und dass jede Zahl genau einmal verwendet wird.
2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

Es muss in beiden Fällen zwei solche benachbarte Felder geben.
Angenommen nicht. Dann gäbe es eine Eintragung, bei der je zwei benachbarte Felder Zahlen enthalten, deren Differenz höchstens $k - 1$ ist.
Für je zwei Felder F, F' gibt es eine Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$ von Feldern, so dass $F_1 = F, F_m = F'$ und aufeinander folgende Folgenglieder benachbart sind und $m \leq 2n - 1$ gilt. Daher gilt, dass die Differenz der Zahlen, die in F bzw. F' stehen nicht größer als $(2n - 2)(k - 1)$ ist.

Im Fall a) erhält man damit durch Betrachtung der Felder, die die Zahlen 1 bzw. 64 enthalten, den Widerspruch $63 \leq (2n - 2)(k - 1) = (2 \cdot 8 - 2)(5 - 1) = 56$.

Im Fall b) folgt, wegen $81 - 1 = 80 = (2 \cdot 9 - 2)(6 - 1)$, dass die Zahlen 1 und 81 in sich diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern des Schachbrettes eingetragen sein müssen. Dann ist das Feld, auf dem die Zahl 80 eingetragen ist, aber höchstens $(2 \cdot 9 - 2) - 1 = 15$ Felder weit entfernt von dem Feld mit der Zahl 1. Das führt zum Widerspruch $79 = 80 - 1 \leq 15 \cdot (6 - 1) = 75$.

Aufgabe gelöst von Nuramon

9.31.3 III. Runde 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291231
Man beweise:
Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, ..., a_n$ Zahlen sind, die

$$a_1^2 = ... = a_n^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

Aus $a_i^2 = 1$ folgt $a_i = \pm 1$. Ändert man im Ausdruck $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ das Vorzeichen von a_i, dann ändert sich der Ausdruck um

$$a_{i-1}a_i + a_ia_{i+1} - (a_{i-1}(-a_i) + (-a_i)a_{i+1}) = 2a_i(a_{i-1} + a_{i+1})$$

Da $a_{i-1} + a_{i+1}$ gerade ist, ändert sich bei so einer Vorzeichenänderung der Wert von $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ um ein Vielfaches von 4.
Zu Beginn hat der Term den Wert 0 und ist somit durch 4 teilbar. Ändert man schrittweise das Vorzeichen aller negativen a_i, dann ergibt sich letztendlich, dass $1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 = n$ ebenfalls durch 4 teilbar sein muss.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 2 - 291232
Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichnet R den Radius seiner Umkugel (d.h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d.h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, dass es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Nach Voraussetzung kann man zu jedem in Betracht zu ziehenden Tetraeder $ABCD$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem so wählen, dass A der Nullpunkt ist und B, C, D auf der positiven $x-, y-$ bzw. $z-$Achse liegen, also mit positiven Zahlen b, c, d die Koordinaten $(b,0,0)$, $(0,c,0)$ bzw. $(0,0,d)$ haben.
Für den Radius R und den Mittelpunkt (x,y,z) der Umkugel gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x-b)^2 + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + (y-c)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$x = \frac{b}{2}; \qquad y = \frac{c}{2}; \qquad z = \frac{d}{2}; \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \qquad (1)$$

Für den Radius r und den Mittelpunkt der Inkugel gilt, dass dieser Mittelpunkt die Koordinaten (r,r,r) hat und dass er von der durch B, C, D gehenden Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene liegt wie der Punkt A. Eine Gleichung dieser Ebene ist

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{d} = 1$$

diejenige Hessesche Normalform, bei der der Nullpunkt positiven Abstand von der Ebene hat, ist folglich

$$\frac{-cdx - dby - bcz - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = 0$$

Daher ist die Bedingung, dass der Punkt (r,r,r) von dieser Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene wie A liegt, äquivalent mit

$$\frac{-cdr - dbr - bcr - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = r$$

Daraus folgt

$$r = \frac{bcd}{cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) ist

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2bcd}(cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}) \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$cd + db + bc \geq 3 \cdot \sqrt[3]{cd \cdot db \cdot bc} \qquad (3)$$

$$c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{c^2d^2 \cdot d^2b^2 \cdot b^2c^2} \qquad (4)$$

$$b^2 + c^2 + d^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \qquad (5)$$

also

$$\frac{R}{r} \geq \frac{1}{2bcd}(3\sqrt[3]{b^2c^2d^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{b^4c^4d^4}) \cdot \sqrt{3}\sqrt[6]{b^2c^2d^2}$$
$$= \frac{1}{2bcd}(3+\sqrt{3})\sqrt[3]{b^2c^2d^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{bcd}$$
$$= \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) \qquad (6)$$

Im Fall $b = c = d$ gilt in (3), (4), (5) und folglich in (6) das Gleichheitszeichen.
Damit ist bewiesen, dass $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; er beträgt $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3A - 291233A
Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 $\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\frac{m}{s}$.
Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B, P_3 in C.
Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufsinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.
Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefasst werde).

Die Strecke, die ein Punkt P_i zum Zeitpunkt t insgesamt zurückgelegt hat, ist $v_i \cdot t$, wobei v_i die jeweilige Geschwindigkeit ist. Man bestimmt die Position eines Punktes, indem die gesamte zurückgelegte Strecke um das Dreieck "herumgewickelt" wird. Da der Umfang des Dreiecks $U = 3$ ist, kann man Vielfache von 3 abziehen. Die Zählung beginne jeweils beim Eckpunkt A: ein Wert von 7,3 bedeute zum Beispiel, dass der Punkt P sich auf der Strecke BC befindet, und zwar 0,3 m vom Punkt B entfernt.
In dieser Weise gilt für die drei Punkte P_i:

$$(1) \qquad x_1 = t$$

$$(2) \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2}t$$

$$(3) \qquad x_3 = 2 + \sqrt{3}t$$

Der Summand "1" in Gleichung (2) ist dem Startpunkt B geschuldet, ebenso der Summand "2" in Gleichung (3) aufgrund des Startpunktes C.
Wir untersuchen zunächst, ob es möglich ist, dass sich alle drei Punkte gleichzeitig in Eckpunkten des Dreiecks befinden. Der Punkt 1 befindet sich genau dann in einem Eckpunkt, wenn x_1 eine ganze Zahl ist. Dann muss, da $x_1 = t$ gilt, auch t ganzzahlig sein. Aber schon der Punkt 2 wird sich nie zur gleichen Zeit in einem Eckpunkt befinden können, weil er sich von seinem Startpunkt aus um $\sqrt{2}t$ weiterbewegt haben wird. Da bekanntermaßen $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, ist $\sqrt{2} \cdot t$ niemals eine ganze Zahl. Die Punkte P_1 und P_2 befinden sich also niemals gleichzeitig in Eckpunkten, weder im gleichen noch in verschiedenen.

Sinngemäß das gleiche gilt auch für den Punkt P_3.

Wir untersuchen nun, ob die drei Punkte zumindest irgendwann ein gleichseitiges Dreieck bilden können, während sie sich jeweils auf den Strecken zwischen zwei Eckpunkten befinden. Wäre der Punkt P_1 zum Beispiel (modulo 3) beim Wert 0,7, dann müssten die Punkte P_2 bei 1,7 und der Punkt P_3 bei 2,7 liegen, wobei allerdings P_2 und P_3 auch die Plätze tauschen dürften. Die Punkte 1 bis 3 könnten also im mathematisch positiven oder negativen Sinne angeordnet sein. Ein gleichseitiges Dreieck läge daher vor, wenn entweder

$$(x_2 - x_1) \mod 3 = 1 \quad \wedge \quad (x_3 - x_1) \mod 3 = 2$$

oder

$$(x_3 - x_1) \mod 3 = 1 \quad \wedge \quad (x_2 - x_1) \mod 3 = 2$$

gälte. Wir untersuchen zunächst die erste Möglichkeit. Die beiden Bedingungen lassen sich auch wie folgt formulieren:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 1$$

und

$$x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 2$$

mit $k,n \in \mathbb{N}$. Wir eliminieren t, indem wir diese Gleichungen vereinfachen und zusammenführen. Es folgt als Bedingung

$$\frac{3k}{\sqrt{2}-1} = \frac{3n}{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{n}{k} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$\frac{n}{k}$ ist als Quotient aus zwei natürlichen Zahlen eine rationale Zahl. Die Bedingung wäre daher nur erfüllbar, wenn $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$ eine rationale Zahl wäre. Für die zweite Konstellation ergibt sich analog:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 2 \qquad \text{und} \qquad x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 1$$

Daraus folgt:

$$\frac{3k+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{3n-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{3n-1}{3k+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

Auch $\frac{3n-1}{3k+1}$ ist eine rationale Zahl. Daher kann man zusammenfassend festhalten, dass die Punkte P_1 bis P_3 nur dann zu einem bestimmten Zeitpunkt $t > 0$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

eine rationale Zahl wäre.
r ist irrational, was bedeutet, dass die Punkte eben nie wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Nachweis: Es ist

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{2}r - (r-1) = \sqrt{3}$$

Quadrieren:

$$2r^2 + (r-1)^2 - 2(r-1)\sqrt{2} = 3$$

$$3r^2 - 2r - 2 = 2(r-1)\sqrt{2}$$

$$\frac{3r^2 - 2r - 2}{2(r-1)} = \sqrt{2}$$

Wenn r rational wäre, dann wäre es auch $\sqrt{2}$, was nicht der Fall ist. So folgt aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$ unmittelbar die Irrationalität von r.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 291233B
Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geq \frac{1}{n^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert
b) einen größten Wert
annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

a) Behauptung: s ist genau dann minimal, wenn für alle $i = 1...n$ gilt:

$$x_i = \frac{1}{n}$$

Beweis: Die Bedingungen $x \geq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ sind erfüllt. Die minimale Summe nennen wir s_0. Für eine beliebige andere Summe substituieren wir

$$x_i = \frac{1}{n}(1 + z_i)$$

Um die erste Nebenbedingungen einzuhalten, muss gelten:

$$(1) \qquad 1 + z_i \geq \frac{1}{n} > 0$$

Außerdem gilt wegen der zweiten Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}(1 + z_i) = \frac{n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} z_i = 1$$

so dass

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} z_i = 0$$

gelten muss. Die beliebige Summe der Kehrwerte ist demnach

$$(3) \qquad s = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{n}(1 + z_i)} = n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1 + z_i}$$

Wir verwenden nun die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + z_i} \geq 1 - z_i$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung kann man mithilfe von (1) leicht zeigen, indem man mit $1 + z_i$ multipliziert. Diese Ungleichung eingesetzt in (3) ergibt:

$$s \geq n \sum_{i=0}^{n} (1 - z_i) = n^2 - n \sum_{i=0}^{n} z_i = n^2 = s_0$$

so dass also auf jeden Fall $s \geq s_0$ gilt. q.e.d.

b) Behauptung: Die Summe s der Kehrwerte von x_i ist genau dann maximal, wenn von den n Summanden genau $(n - 1)$ den minimal zulässigen Wert $x_i = \frac{1}{n^2}$ annehmen. Beweis: Es gelte für $i = 1...(n - 1)$:

$$(4) \qquad x_i = \frac{1}{n^2}$$

Da dies der minimal zulässige Wert ist, ergibt sein Kehrwert natürlich den größtmöglichen Summanden. Nur der letzte Summand muss wegen der zweiten Nebenbedingung einen anderen Wert haben, denn es muss gelten:

$$1=\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^2}+x_n=\frac{n-1}{n^2}+x_n$$

$$(5)\qquad x_n=1-\frac{n-1}{n^2}=\frac{n^2-n+1}{n^2}$$

Die Summe der Kehrwerte ist dann

$$s_1=\sum_{i=1}^{n-1} n^2+\frac{1}{x_n}=(n-1)n^2+\frac{n^2}{n^2-n+1}=n^2\left(n-1+\frac{1}{n^2-n+1}\right)=n^2\left(n-1+\frac{n+1}{n^3+1}\right)$$

$$s_1=n^2\cdot\frac{n^4-n^3+2n}{n^3+1}=\frac{n^3(n^3-n^2+2)}{n^3+1}$$

Da wie oben schon festgestellt die ersten $n-1$ Summanden schon maximal sind, könnte eine Vergrößerung des letzten Summanden x_n nur zu Lasten mindestens eines anderen Summanden erfolgen. Das heißt, wenn $\frac{1}{x_n}$ größer werden soll, muss ich ein $\epsilon>0$ von x_n abziehen, aber dieses gleichzeitig zu einem der anderen x_i, z.B. x_1, hinzuaddieren, damit die zweite Nebenbedingung gültig bleibt. Für die neue Summe gilt dann:

$$s=\sum_{i=1}^{n-2} n^2+\frac{1}{x_1+\epsilon}+\frac{1}{x_n-\epsilon}$$

$$s-s_1=\frac{1}{x_1+\epsilon}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_n-\epsilon}-\frac{1}{x_n}$$

$$s-s_1=\frac{x_1-x_1-\epsilon}{x_1(x_1+\epsilon)}+\frac{x_n-x_n+\epsilon}{x_n(x_n-\epsilon)}=\frac{-\epsilon}{x_1(x_1+\epsilon)}+\frac{\epsilon}{x_n(x_n-\epsilon)}$$

$$s-s_1=\epsilon\left(\frac{-1}{x_1(x_1+\epsilon)}+\frac{1}{x_n(x_n-\epsilon)}\right)=\epsilon\,\frac{x_1^2+x_1\epsilon-x_n^2+x_n\epsilon}{x_1x_n(x_1+\epsilon)(x_n-\epsilon)}$$

$$s-s_1=\epsilon\,\frac{(x_1+x_n)(x_1-x_n+\epsilon)}{x_1x_n(x_1+\epsilon)(x_n-\epsilon)}$$

Das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks wird bestimmt durch die zweite Klammer im Zähler, denn alle anderen Terme sind auf Anhieb als größer null zu erkennen. Wegen (4) und (5) gilt:

$$x_n-x_1=\frac{n^2-n+1}{n^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{n-1}{n}\gg 0$$

Für ein kleines ϵ gilt daher auch, dass $(x_1-x_n+\epsilon)<0$ ist, woraus $s-s_1<0$ bzw. $s<s_1$ folgt. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
a) Das arithmetische Mittel der x_i beträgt offenbar $A:=\frac{1}{n}$, ihr harmonisches

$$H:=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=\frac{n}{s}$$

Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel gilt (wegen $x_i>0$ für alle $1\le i\le n$) $A\ge H$, also $\frac{n}{s}\le\frac{1}{n}$ bzw. $s\ge n^2$, wobei Gleichheit genau für

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=A=\frac{1}{n}$$

eintritt.

b) Lemma: Für beliebige reelle Zahlen a,b,c mit $a\ge b>c>0$ gilt

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b-c},$$

denn nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ist diese Ungleichung äquivalent zu $(a+c)(b-c)(b+a) \leq ab(b-c+a+c)$ bzw. $ab - c(c+a-b) \leq ab$, was offensichtlich wahr ist.

Wir zeigen im Folgenden nun, dass für jedes n-Tupel der Term s höchstens einen kleineren Wert annimmt, wenn es nicht (in irgendeiner Reihenfolge) die Form $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}\right)$ besitzt:

Sei also ein beliebiges n-Tupel $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ gegeben, was nicht diese Form besitzt, wobei o.B.d.A. $x_n \geq x_i$ für alle i gelte. (Dies dürfen wir annehmen, da die zu beweisende Aussage symmetrisch in den x_i ist.) Es sei nun i der kleinste Index mit $x_i > \frac{1}{n^2}$. Es muss dann $i < n$ gelten, denn sonst hätte es die genannte Form. Wenden wir nun das Lemma mit $a := x_n$, $b := x_i \leq a$ und $0 < c := x_i - \frac{1}{n^2} < b$, an, so erhalten wir

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{x_n + x_i - \frac{1}{n^2}}$$

Das neue Tupel, in welchem wir $x_i' := \frac{1}{n^2}$ und $x_n' := x_n + x_i - \frac{1}{n^2} > x_n$ setzen erfüllt weiterhin wegen $x_i' + x_n' = x_n + x_i$ die Bedingung, dass die Summe aller Komponenten gleich 1 und jede Komponente $\geq \frac{1}{n^2}$ ist, ist also wieder ein zulässiges n-Tupel, welches aber zumindest keinen kleineren Wert für s liefert als das Ausgangstupel.
Jedoch besitzt es nun eine Komponente mehr als dieses, welche den Wert $\frac{1}{n^2}$ besitzt.
Führt man diesen Prozess wiederholt durch, so lässt sich die Anzahl der von $\frac{1}{n^2}$ verschiedenen Komponenten bis auf den Minimalwert 1 reduzieren, ohne den Wert für s zu senken. Also wird der Maximalwert für s von einem Tupel angenommen, bei welchem $n-1$ Komponenten (o.B.d.A. x_1 bis x_{n-1}) den Wert $\frac{1}{n^2}$ und die übrige den Wert $1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$ annimmt. Für dieses hat s dann den Wert

$$s = (n-1)\cdot n^2 + \frac{n^2}{n^2-n+1} = n^3 - n^2 + 1 + \frac{n-1}{n^2-n+1}$$

was also den größtmöglichen Wert für s darstellt.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 291234
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

Wir zeigen zunächst per vollständiger Induktion, dass $x_{n+1} > x_n$ für alle $n > 1$ gilt:
Induktionsanfang: es ist $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$.
Induktionsschritt: damit $x_{n+1} > x_n$ ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} > x_n$$

Da beide Seiten positiv sind, kann man quadrieren:

$$a + x_n > x_n^2$$

bzw.

$$x_n^2 - x_n - a < 0$$

Das ist der Fall für

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a} < x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass immer $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ erfüllt ist:

Induktionsanfang: es ist $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

Induktionsschritt: Damit $x_{n+1} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ gültig ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Quadrieren:

$$a + x_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + a + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

$$x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

q.e.d. x_n ist somit streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, so dass ein Grenzwert

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

existiert für alle $a > -\frac{1}{4}$. Da per Aufgabenstellung sowieso $a > 0$ vorgegeben ist, besteht keine weitere Einschränkung hinsichtlich a. Den Grenzwert erhält man durch lösen der Gleichung $x = \sqrt{x+a}$, und es ist dann die einzige positive Lösung

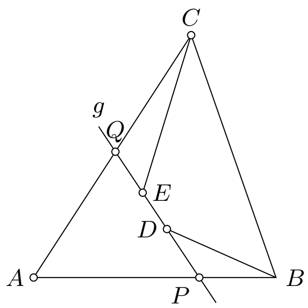
$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \quad \forall \quad a > 0$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 291235
Man beweise:
In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.
Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

Für je fünf Punkte der vorausgesetzten Lage gilt:
Man kann unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei der fünf Punkte sind, eines mit möglichst großem Flächeninhalt auswählen. Dann muss nach Voraussetzung einer der folgenden Fälle vorliegen:

1. Fall:
Die beiden anderen der fünf Punkte liegen im Innern des ausgewählten Dreiecks.
Ihre Verbindungsstrecke geht nach Voraussetzung durch keine Ecke des Dreiecks, sie muss daher zwei verschiedenen Seiten des Dreiecks in je einem inneren Punkt schneiden. Das Dreieck sei etwa ABC, die Punkte im Innern D, E; die Gerade g durch D, E schneide etwa AB in P und AC in Q.
Dabei seien die Punkte P, D, E, Q auf g in dieser Reihenfolge angeordnet (siehe Abbildung).



Dann ist die Vierecksfläche $BDEC$ konvex.

2. Fall:
Mindestens eine anderer der fünf Punkte liegt außerhalb des ausgewählten Dreiecks.
Das Dreieck sei ABC, der außerhalb liegende Punkt sei D. Die Geraden, die die Dreiecksseiten enthalten, zerlegen die Ebene in die Dreiecksfläche und in weitere Flächen, die entweder von zwei Strahlen oder von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzt werden.
Nach Voraussetzung kann D auf keiner Randlinie eines dieser Gebiete liegen. Länge D im Innern eines von zwei Strahlen, etwa von den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus, begrenzten Gebietes, so ergäbe der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, vermehrt um die Flächeninhalte der Dreiecke ACD und BCD, den Flächeninhalt von ABC. Das widerspricht der Auswahl der drei Punkte A, B, C.

Also muss D im Innern eines von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzten Gebiets liegen, etwa in dem Gebiet, das von der Seite VC und den Verlängerungen der Seiten AB bzw. AC über B bzw. C hinaus, begrenzt wird. Dass ist die Vierecksfläche $ABDC$ konvex. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Übernommen von [5]

Aufgabe 6 - 291236
Man beweise:
Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

Stellt man eine beliebige natürliche Zahl a im Zahlensystem mit der Basis 1000 dar, also

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_k \, 1000^k \quad (0 \leq a_k < 1000, \, m \in \mathbb{N})$$

so gilt bez. der Teilbarkeit durch 37 wegen $1000 \equiv 1 \mod 37$ die einfache Regel, dass a genau dann durch 37 teilbar ist, wenn dies für ihre "Ziffernsumme" $\sum_{k=0}^{m} a_k$ gilt.
Im gegenständlichen Fall sind die Ziffern einfach alle natürlichen Zahlen von 111 bis 999, wobei in Hinblick auf die Ziffernsumme die Reihenfolge natürlich keine Rolle spielt. Und ja, diese Ziffernsumme, nämlich

$$\frac{111 + 999}{2} \, (999 - 111 + 1)$$

ist wegen $111 = 3 \cdot 37$ tatsächlich durch 37 teilbar.

Aufgabe gelöst von weird

9.31.4 IV. Runde 1989, Klasse 12

Aufgabe 1 - 291241
Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

a) Zurückführen von (1) auf eine einfachere Gleichung:
I. Wenn (1) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x \qquad (2)$$

Beweis: Wäre $a + \sqrt{x} > x$, so folgte

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > ... > a + \sqrt{x} > x$$

im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1). Im wesentlichen läuft der Beweis analog für $a + \sqrt{x} < x$.

II. Wenn (2) für ein reelles a (einschließlich Probe und Rückschluss):
Für $a < -0{,}25$ hat (2) und damit (1) keine reelle Lösung x.
Für $a = -0{,}25$ ist $x = 0{,}25$ einzige Lösung von (2) und damit (1).
Für $-0{,}25 < a \leq 0$ sind genau die zwei Zahlen

$$x_{1,2} = 0{,}5 \cdot (2a + \pm\sqrt{4a+1})$$

Für $a > 0$ genau die Zahl

$$x = 0{,}5 \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a+1})$$

Lösung von (2), also von (1).

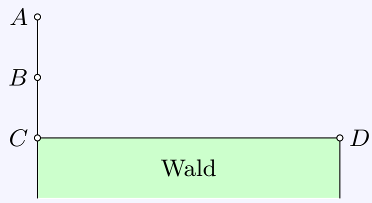
Übernommen aus [1]

Hinweis: In der Originalaufgabenstellung war die Gleichung

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \qquad (1*)$$

angegeben, d.h. das $a+$ fehlte. Dadurch war die Gleichung (1*) für die Teilnehmer praktisch nicht lösbar. In der empfohlenen Lösung wurde von der korrekten Gleichung (1) ausgegangen.

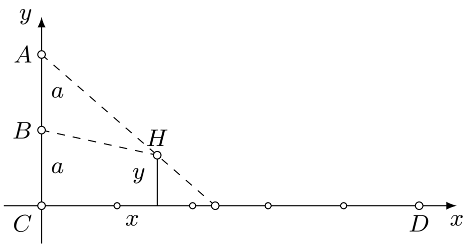
Aufgabe 2 - 291242



Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abbildung).
In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befindet sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C.
Dabei sei $AB = BC = a$ und $CD = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase.

Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefasst, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, dass er nicht unterwegs vom Wolf gefasst wird.

Man lege ein Koordinatensystem so, dass C, B, A, D die Koordinaten $0;0)$, $(0;a)$, $(0;2a)$ bzw. $(5a;0)$ haben.
Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten $(x;y)$ und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also $2v$ die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{AH}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{BH}{v}$.

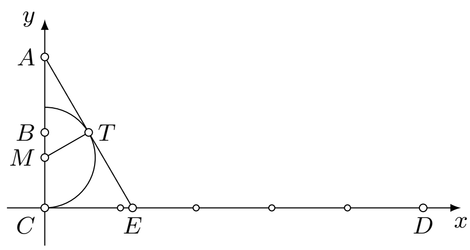


Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit $AH < 2 \cdot BH$:

$$\sqrt{x^2 + (y-2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \qquad ; \qquad 3x^2 + 3y^2 + 4ay > 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \qquad (1)$$

Damit ist gezeigt, dass der Hase durch Wahl seines Zielpunktes x genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefasst zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen.
Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (nachfolgende Abbildung)



Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x-Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt $TM = \frac{2}{3}a$, $MA = \frac{4}{3}a$ und $\angle MTA = 90°$, also $\triangle CEA \sim \triangle TMA$,

$$CE : EA = TM : MA = 1 : 2 \qquad ; \qquad EA = 2 \cdot CE \qquad ; \qquad CA = CE\sqrt{3}$$

$$CE = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

Insbesondere liegt daher wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt auf der Strecke CD und es ist bewiesen:
Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD, d.h. genau die Punkte X auf CD mit $CX > \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Übernommen aus [1]

Aufgabe 3 - 291243
Man beweise:
Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

Als ein möglicher Versuch, aus dem in den beiden Gleichungen zwischen den Zahlen a, b, c und d gespeicherten Wissen, Hinweise über das gesuchte pythagoreische Zahlentripel zu erhalten, kann das Quadrieren der Gleichung $a + b = c - d$ dienen. Man erhält:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

woraus unter Nutzung der Identitäten $c = a + b + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$ die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bd + d^2 \qquad \text{also}$$

$$(a + b)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2$$

folgt, d.h. mit den Maßzahlen $u = a + d$, $v = b + d$ und $w = a + b$ sind (positiv-ganzzahlige) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden. Für den Flächeninhalt A dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2}u \cdot v = \frac{1}{2}(a + d)(b + d) = \frac{1}{2}(ab + d(a + b + d)) = \frac{1}{2}(ab + cd)$$

d.h. $A = a \cdot b$, also ist mit dem Zahlentripel $a + d$, $b + d$ und $a + b$ die Aufgabe gelöst

Aufgabe gelöst von Monika Noack, Übernommen aus [1]

Aufgabe 4 - 291244
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17 \qquad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9 \qquad (2)$$

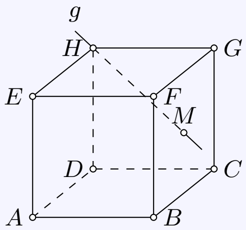
I. Wenn für ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen das System (1), (2) gilt, so folgt

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61$$
$$16(3x + 1)^2 + 3(8y - 9)^2 = 3187 \qquad (3)$$
$$0 < (3x + 1)^2 \leq 199, \quad 0 < x \leq 4$$

Bei $x = 1; 2; 4$ ergibt sich für y keine natürliche Zahl. Für $x = 3$ folgt (aus (3)) $y = 4$ und (aus (2)) $z = 6$.
Somit kann nur das Tripel $(3, 4, 6)$ aus natürlichen Zahlen bestehen und (1), (2) erfüllen.
Die Probe zeigt, dass dieses Tripel (1), (2) erfüllt.

Übernommen aus [1]

Aufgabe 5 - 291245



Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in der Abbildung mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet.
Die Ebene, in der A, B, C, D liegen sei ϵ_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen sei ϵ_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.
Man beweise, dass es unter allen Strecken, die einen Punkt von ϵ_1 mit einem Punkt von ϵ_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt.
Man ermittle diese kleinste Länge.

Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $B(0{,}0{,}0)$, $C(a{,}0{,}0{,})$, $A(0{,}a{,}0)$, $F(0{,}0{,}a)$.
Dann haben M, H die Koordinaten $(\frac{a}{2}{,}0{,}\frac{a}{2})$ bzw. $(a{,}a{,}a)$ und g ist die Menge aller Punkte

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{at}{2}; at; \frac{a}{2} + \frac{at}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Mit $s = \frac{1+t}{2}$ besteht g aus der Menge aller Punkte $(as, a(2s-1), as)$, $s \in \mathbb{R}$. Jeder Punkt aus ϵ_1 kann durch $(x{,}y{,}0)$ und jeder Punkt aus ϵ_2 durch $(v{,}0{,}w)$ beschrieben werden. Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten

$$\left(\frac{x+v}{2}; \frac{y}{2}; \frac{w}{2}\right)$$

und liegt genau dann auf g, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{x+v}{2} = as; \qquad \frac{y}{2} = a(2s-1); \qquad \frac{w}{2} = as$$

Dies gilt genau dann, wenn $x + v = w$, $y = 2w - 2a$ ist. Das Quadrat q der zu betrachtenden Streckenlänge ist

$$q = (x-v)^2 + y^2 + w^2 = (w-2v)^2 + (2w - wa)^2 + w^2 = (w-2v)^2 + \frac{(5w-4a)^2 \cdot 4a^2}{5}$$

Es nimmt seinen kleinsten Wert genau dann an, wenn $w - 2v = 0$ und $5w - 4a = 0$ ist, also wenn gilt

$$w = \frac{4a}{5}; \qquad v = x = \frac{2a}{5}; \qquad y = \frac{-2a}{5}; \qquad s = \frac{2}{5}$$

Der kleinste Wert von q ist damit gleich $\frac{4a^2}{5}$, die gesuchte kleinste Länge beträgt mithin $2a\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Übernommen aus [1]

Aufgabe 6A - 291246A
In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln.
Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot.
Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden.
Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 2 rot ist.
Hinweis:
Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, dass für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist.
Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als günstig und $M-G$ als ungünstig angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus Urne A in Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten; bei einem Zug, wo eine Kugel von B nach A gelegt wird, sind es genau $n+1$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $m^2(n+1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Wir bestimmen nun die Anzahl der Möglichkeiten im ersten bis vierten Zug, eine rote bzw. eine blaue Kugel herauszugreifen:
Für den Fall, dass im 1. Zug eine rote Kugel gegriffen wird, gibt es genau m Möglichkeiten (dass eine blau gegriffen wird, 0 Möglichkeiten).
Im 2. Zug gibt es für jeden der m (durch den 1. Zug möglichen) Fälle genau n Möglichkeiten, eine blaue Kugel und genau eine Möglichkeit, eine rote Kugel zu greifen.
Im 3. Zug gibt es für jeden der $n \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine blaue Kugel gegriffen wurde) $(m-1)$ Möglichkeiten, eine rote und 1 Möglichkeit, eine blaue Kugel herauszugreifen. Für jeden der $1 \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine rote Kugel gegriffen wurde) gibt es m Möglichkeiten, eine rote und 0 Möglichkeiten, eine blaue Kugel herauszugreifen.
Schließlich gibt es beim 4. Zug für jeden der $(m-1) \cdot n \cdot m$ Fälle (2. Zug blau, 3. Zug rot) 2 Möglichkeiten, eine rote (und $n-1$ Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jede der $1 \cdot n \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug blau) genau 1 Möglichkeit, eine (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $m \cdot 1 \cdot m$ (2. und 3. Zug rot) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel herauszugreifen.

So ergibt sich als Anzahl S der günstigen Fälle (d.h. im 4. Zug wird eine rote Kugel gegriffen):

$$S = 2 \cdot (m-1) \cdot n \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot n \cdot m + 1 \cdot m \cdot 1 \cdot m$$

Also ist die Menge aller ganzzahligen Paare $(m;n)$ zu finden, für die

$$\frac{m \cdot n + 2(m-1)n \cdot m + m^2}{m^2(n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Wegen $m \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$m - 2n + 2mn - mn^2 = 0 \qquad (*)$$

ist, woraus folgt, dass einerseits m ein teiler von $2n$ ist, andererseits aber m von n geteilt wird.
Somit gilt $m = t \cdot n$ mit $t = 1$ oder $t = 2$. Für $t = 1$ wird (*) zu

$$-n + 2n^2 - n^3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad n \cdot (n-1)^2 = 0$$

Diese Gleichung hat wegen $n = m$ und $n + m > 2$ keine Lösung. Der Fall $t = 2$ hingegen führt zu $4n^2 - 2n^3 = 0$, woraus unmittelbar $n = 2$, $m = 4$ folgt.
Diese Zahlen erfüllen in der Tat die Ausgangsgleichung. Also hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Aufgabe gelöst von Monika Noack, Übernommen aus [1]

Aufgabe 6B - 291246B
Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen.
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu $c = f(x_0) - g(x_0)$. Dann folgt aus (3), mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right)\right)$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natürliche

$$k \geq 1 : \qquad n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right)$$

Wegen (2) existieren mit $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = [f(0)] \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = [g(0)]$$

also existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} (n^k \cdot c)$. das ist aber nur für $c = 0$ möglich.

Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x. Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
II. Die oben definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg).

Übernommen aus [1]

9.32 XXX. Olympiade 1990

9.32.1 I. Runde 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301211
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \tag{1}$$
$$a + b + c + d < 11111. \tag{2}$$

Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

Es genügt, in einem Beispiel natürliche Zahlen a,b,c,d anzugeben und (1), (2) für die angegebenen Zahlen zu bestätigen. Ein solches Beispiel sind etwa

$$a = 37, \quad b = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429, \quad c = 7 \cdot 101 = 707, \quad d = 9901$$

wie man durch Berechnung von $a + b + c + d = 11074$ und

$$3 \cdot 37 = 111, \quad 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001, \quad 101 \cdot 9901 = 1000001$$

also

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111 \cdot 1001 = 111111$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 = 111111 \cdot 1000001 = 111111111111$$

bestätigen kann.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 301212
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$3x^2 + ax - 2 = 0 \tag{1}$$

zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung

$$6x_1 + x_2 = 0 \tag{2}$$

genügen.

Für jede reelle Zahl a gilt $\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3} > 0$. Deshalb hat (1) für jede reelle Zahl a zwei reelle Lösungen, nämlich die beiden Zahlen

$$-\frac{a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{6}(-a \pm \sqrt{a^2 + 24})$$

I. Wenn diese beiden Zahlen der Bedingung (2) genügen, so gilt entweder

$$(-a + \sqrt{a^2 + 24}) + \frac{1}{6}(-a - \sqrt{a^2 + 24}) = 0 \qquad \text{oder} \tag{3}$$

$$(-a - \sqrt{a^2 + 24}) + \frac{1}{6}(-a + \sqrt{a^2 + 24}) = 0 \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$-6a + 6\sqrt{a^2 + 24} - a - \sqrt{a^2 + 24} = 0$$
$$5\sqrt{a^2 + 24} = 7a$$
$$25a^2 + 600 = 49a^2 \tag{5}$$

aus (4) folgt ebenfalls (5). Daher folgt in beiden Fällen $24a^2 = 600$, $a = 5$ oder $a = -5$.

II. Für $a = 5$ lautet (1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(-5 \pm 7)$, d.h. die Zahlen $\frac{1}{3}$ und -2. Beide erfüllen auch (2).

Für $a = -5$ lautet (1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(5 \pm 7)$, d.h. die Zahlen $-\frac{1}{3}$ und 2. Beide erfüllen ebenfalls auch (2).

Somit sind die beiden Zahlen $a = 5$ und $a = -t5$ die gesuchten.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 301213
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:

$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \tag{1}$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \tag{2}$$

(1) und (2) sind äquivalent mit

$$(x + 1)(3x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$
$$(x - 1)(3x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

Da stets $x^2 + 1 > 0$ gilt und für kein reelles x beide Gleichungen $x ß 1 = 0$ und $x - 1 = 0$ gelten, werden (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn $3x^2 - 1 = 0$ ist.

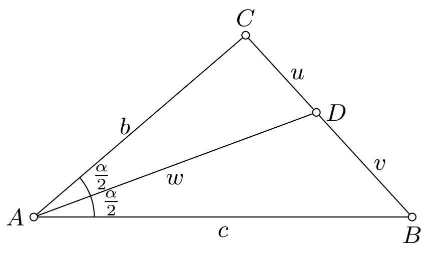
Dies ist genau für $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ der Fall.

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 301214
In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\angle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.

Man beweise, dass in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:

$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b + c}\sqrt{(b + c)^2 - a^2}.$$



Bekanntlich teilt in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende die jeweils gegenüberliegende Seite in Verhältnis der anliegenden Seiten. Für $u = CD$, $V)BD$ gilt somit

$$u : v = b : c \qquad ; \qquad u + v = a$$

Daraus folgt

$$u = \frac{ab}{b + c} \qquad ; \qquad v = \frac{ac}{b + c}$$

Nach den Kosinussatz für die Dreiecke ACD bzw. ABD folgt mit $\alpha = \angle BAC$ somit

$$b^2 + w^2 - 2bw \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2b^2}{(b + c)^2} \tag{1}$$

$$c^2 + w^2 - 2cw\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit c, (2) mit b und subtrahiert, so folgt

$$bc(b-c) + w^2(c-b) = \frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2} \tag{3}$$

1. Fall: Ist $b \neq c$, so folgt aus (3)

$$w^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2)$$

wegen $w > 0$ und $b > 0$, $c > 0$ (woraus auch $(b+c)^2 - a^2 > 0$ folgt) ergibt sich damit die behauptete Formel.

2. Fall: Ist $b = c$, so ist diese Herleitung über (3) nicht möglich. In diesen Fall ist AD auch Seitenhalbierende und Höhe; daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$w = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

Die behauptete Formel lautet im Fall $b = c$ aber

$$w = \frac{\sqrt{b^2}}{2b} + \sqrt{(2b)^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

und ist diesem damit ebenfalls bewiesen.

Übernommen von [5]

9.32.2 II. Runde 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301221
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$ (1) gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \qquad (2)$$

Der Beweis ergibt sich einfach aus folgenden Äquivalenzumformungen (man beachte, dass $a,b,c > 0$ vorausgesetzt war!), welche (2) schrittweise in (1) überführen, sodass diese Schlusskette dann auch umkehrbar ist:

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$
$$\frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)}$$
$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$
$$b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (c-b)(b+c) = c^2 - b^2$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 301222
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \qquad (1)$$
$$4x + 2y > 5 \qquad (2)$$

Mittels quadratischer Ergänzung kann man (1) auch in der Form

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 < \frac{3}{2}$$

schreiben, woraus sofort

$$(x,y) \in \{(3,-6),(2,-5),(3,-5),(4,-5),(3,-4)$$

für die ganzzahligen Lösungen (x,y) folgt. Von diesen Paaren erfüllt aber dann nur $(x,y) = (4,-5)$ auch die zweite Bedingung, welches somit auch die einzige Lösung hier ist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3 - 301223
Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \qquad (1)$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leq i \leq q$ gilt.

Wir betrachten dazu die zwei Folgen

$$a_n := \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

wobei die zu beweisende Behauptung äquivalent ist zu

$$\forall n \geq 2: \quad a_n > b_n$$

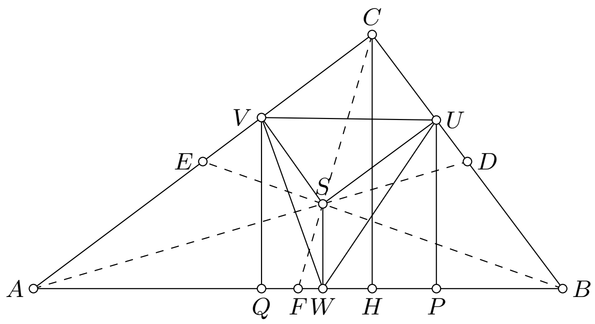
Nun gilt aber für $n \geq 1$, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} > 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

d.h., es gilt zwar noch $a_0 = b_0 = 1$ und $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, aber die Folge (a_n) wächst danach durchwegs stärker als die Folge (b_n), was obige Behauptung somit beweist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 301224
Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, dass das Verhältnis $r = J(UVW) : J(ABC)$ in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.



Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, o.B.d.A. mit dem rechten Winkel bei C. Wie üblich sei $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Ferner seien CH, UP, VQ die Lote von C, U, V auf AB, und es sei $h = CH$, $p = HB$, $q = HA$. Für jedes Dreieck XYZ bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

Für den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden AD, BE und CF gilt bekanntlich

$$SD = \frac{1}{3}AD; \qquad SE = \frac{1}{3}BE; \qquad SF = \frac{1}{3}CF$$

Da nach Voraussetzung $SU \parallel AC$, $SV \parallel BC$, $SW \parallel CH$ ist, folgt aus dem Strahlensatz

$$SU = \frac{b}{3}; \qquad SV = \frac{a}{3}; \qquad SH = \frac{h}{3}$$

Nach Voraussetzung ist ferner $CVSU$ ein Rechteck, also ist auch

$$CV = \frac{b}{3}; \qquad CU = \frac{a}{3}$$

wegen $UP \parallel CH$ und $VQ \parallel CH$ folgt somit nach dem Strahlensatz

$$HP = \frac{p}{3}; \qquad HQ = \frac{q}{3}$$

Damit erhält man

$$J(SUV) = \frac{1}{2}SU \cdot SV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}ab = \frac{1}{9}J(ABC)$$
$$J(SWU) = \frac{1}{2}SW \cdot WP$$
$$J(SWV) = \frac{1}{2}SW \cdot WQ$$

$$\begin{aligned} J(SWU) + J(SWV) &= \frac{1}{2} SW \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3}(HP + HQ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{p+q}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} hc \\ &= \frac{1}{9} J(ABC) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt schließlich

$$J(UVW) = J(SUV) + J(SWU) + J(SWV) = \frac{2}{9} J(ABC)$$

Damit ist bewiesen, dass sich für alle rechtwinkligen Dreiecke der Wert $r = 2 : 9$ ergibt.

Übernommen von [5]

9.32.3 III. Runde 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301231
a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.
b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$ gilt.

Die Behauptung in a) ist korrekt, wie man dies ausgehend von

$$0 \leq (ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + (bc)^2$$

durch folgende offensichtlichen und wegen a,b,c,$d > 0$ auch erlaubten Umformungen

$$4abcd \leq (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = (ad + bc)^2$$
$$2\sqrt{abcd} \leq ad + bc$$
$$(\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2 = ac + bd + 2\sqrt{abcd} \leq ac + bd + ad + bc = (a + b)(c + d)$$
$$\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$$

sofort sehen kann.
Dagegen ist b) i.A. falsch, z.B. führt etwa

$$a = b = 1,\ c = d = 4$$

durch Einsetzen auf den Widerspruch

$$1 + 4 \leq \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 301232
Im Raum seien n Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, dass sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.
Man beweise, dass es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muss, so dass jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.
Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Es seien P_1,P_2 zwei der n Punkte, die voneinander maximalen Abstand haben. Ist dann P_3 ein weiterer Punkt, so können die Strecken P_1P_3 und P_2P_3 höchstens so lang sein wie die Strecke P_1P_2.
Andererseits ist nach Voraussetzung die kürzeste der Strecken P_1P_2, P_2P_3,P_1P_3 kürzer als 1. Damit ist gezeigt, dass P_3 in der Kugel mit Radius 1 um P_1 oder in der Kugel mit Radius 1 um P_2 enthalten ist. Da P_3 beliebig war, folgt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 3A - 301233A
Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, ..., x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{17}$.
(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + ... + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.
Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, ..., x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einerziffer, x_{16} die Zehnerziffer u.s.w.

Wir versuchen zunächst die gestellten Bedingungen für die Ziffern x_1,x_2,...,x_{17} noch etwas enger zu fassen:

1. Wegen $x_1 > 0$ ist auch $s > 0$ und wegen $p = s$ kann daher keine der 17 Ziffern 0 sein. Insbesondere muss daher $x_1 \geq x_2 \geq 2$ gelten, da sonst $s \geq 17$, aber $p \leq 9$ gelten würde, wieder im Widerspruch zu $p = s$.

2. Es können höchstens $x_1,x_2 \in \{6,7,8,9\}$ sein, denn andernfalls wäre $p \geq 6^3 = 216$, aber $s \leq 17 \cdot 9 = 153$, Widerspruch!

3. Wegen 2. gilt schon mal
$$s \leq 2 \cdot 9 + 15 \cdot 1 = 33$$
da für alle 17-Tupel $(x_1,x_2,...,x_{17})$, für welche $x_1x_2\dots x_{17}$ einen vorgegeben Wert p (hier $p = 153$) nicht überschreitet immer jenes den größten Summenwert $s = x_1+x_2+...+x_{17}$ aufweist, für welches die x_i, $i = 1,2,...,17$ in dieser Reihenfolge größtmöglich in Hinblick auf $x_1x_2...x_i \leq p$ gewählt sind, was hier eben auf $x_1 = x_2 = 9$, $x_3 = \dots = x_{17} = 1$ und damit zu obiger Abschätzung führt. Damit haben aber dann höchstens die Ziffern $x_1,x_2,...,x_5$ einen Wert größer als 1, da sonst
$$p \geq 2^6 = 64 > s$$
gelten würde.

4. Es kann aber auch nicht $x_5 > 1$ sein, denn die einzige nach 3. noch bestehende Möglichkeit $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (2,2,2,2,2)$ führt nicht auf eine Lösung, da für sie offensichtlich
$$s = x_2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 12 = 24 < 32 = x_1x_2x_3x_4x_5 = p$$
gilt. Wir dürfen daher im Folgenden auch $x_5 = 1$ voraussetzen.

Zusammenfassend müssen wir also nur die bereits erheblich einfachere Ausgabe lösen, 4 positive ganze Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 so zu finden, dass für sie die folgenden Bedingungen
$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 > 0 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4x_5 - 13 \leq 20 \tag{2}$$
erfüllt sind, wobei nach 1. außerdem $x_1 \geq x_2 > 1$ gelten muss.
Wir führen daher die folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $x_1 = 9$.
Von den 2 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)) \in \{(9,2,1,1),(9,3,1,1)\}$$
welche kompatibel mit obigen Bedingungen sind, führt dann tatsächlich $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (9,3,1,1)$ auf eine Lösung mit den weiteren Festlegungen $x_5 = x_6 = ... = x_{17} = 1$.

2.Fall: $x_1 = 8$.
Die 4 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2) \in \{(8,2,1,1),(8,2,2,1),(8,3,1,1),(8,4,1,1)\}$$
ergeben hier alle durch Einsetzen einen Widerspruch mit (2).

3.Fall: $x_1 = 7$
Auch hier ergeben die 4 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(7,2,1,1),(7,2,2,1),(7,3,1,1),(7,4,1,1)\}$$
keine weitere Lösung.

4.Fall: $x_1 = 6$
Hier haben wir die 5 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(6,2,1,1),(6,2,2,1),(6,3,1,1),(6,4,1,1),(6,5,1,1)\}$$
von denen dann
$$x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = ... = x_{17} = 1$$
tatsächlich eine Lösung ist.

5.Fall: $x_1 = 5$
Hier gibt es die 6 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(5,2,1,1),(5,2,2,1),(5,3,1,1),(5,3,2,1),(5,4,1,1),(5,5,1,1)\}$$

von denen dann

$$x_1 = x_2 = 5,\ x_3 = ... = x_{17} = 1$$

tatsächlich eine Lösung ist.

Da wir nun für ev. weitere Lösungen ausschließen können, dass in ihnen die Ziffern 9,8,7,6,5 vorkommen, lohnt es sich, unsere Schranke für s nachzujustieren. Für sie gilt mittlerweile

$$s \leq 4 + 4 + 2 + 14 \cdot 1 = 24$$

Andererseits gilt auch die triviale untere Schranke $s \geq 17$, welche wir wegen $x_1 \geq x_2 > 1$ auch noch zu $s \geq 19$ verschärfen können. Tatsächlich ist es damit einfacher, sich einfach alle "Kandidaten" für $s = p \in \{19,20,21,22,23,24\}$, anzusehen, von denen ja nur die mehr in Frage kommen, welche keinen Primfaktor größer als 3 aufweisen. Es bleibt somit nur $s = p = 24$, was auf die beiden Möglichkeiten

$$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 3, x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

führt, welche aber beide keine weitere Lösung hier liefern, da sie (2) nicht erfüllen.
Zusammenfassend sind also alle Lösungen der Aufgabe gegeben durch die drei 17-stelligen Zahlen

$$93111111111111111, \quad 62211111111111111, \quad 55111111111111111$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3B - 301233B
Es seien $D_1, ..., D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, ..., d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad ..., \quad d_n = n + 1$$

gelte. Weiter seien $G_1, ..., G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, ..., g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad ..., \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, dass jeweils gilt:
Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, passt G_i in D_j.
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.
Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Zuerst stellt man fest, dass für $n \geq 2$ der Gegenstand G_n in eine der beiden Dosen D_{n-1} oder D_n gelegt werden müssen. In beiden Fällen passen alle anderen Gegenstände in die noch freie der beiden gerade genannten Dosen.

Man erhält also für $n \geq 2$ jede Verteilung mit den Gegenständen G_1 bis G_n auf die Dosen D_1 bis D_n, indem man eine Verteilung der Gegenstände G_1 bis G_{n-1} auf die Dosen D_1 bis D_{n-1} auf eine der beiden folgenden Varianten abändert:

a) Man füge einfach den Gegenstand G_n in der noch leeren Dose D_n hinzu.
b) Man hole den Gegenstand, der momentan in Dose D_{n-1} enthalten ist, aus dieser heraus, lege ihn in die bisher noch leere Dose D_n und lege in die nun wieder leere Dose D_{n-1} den Gegenstand G_n.

Offensichtlich führen beide Varianten zu verschiedenen Verteilungen und je zwei Ausgangsverteilungen der ersten $n - 1$ Gegenstände auf die ersten $n - 1$ Dosen auch zu verschiedenen Verteilungen, da jeweils mindestens zwei Dosen anders befüllt werden.

Also gilt für jedes $n \geq 1$ die Rekursion $A(n + 1) = 2A(n)$. Zusammen mit $A(1) = 1$ folgt $A(n) = 2^{n-1}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 4 - 301234
Man beweise:
In jedem n-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $a \leq b < 2a$ gilt.

Nehmen wir an, es gäbe ein n-Eck, welches ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage wäre und bezeichnen die in ihm auftretenden Seitenlängen der Größe nach aufsteigend mit s_1 bis s_n, sodass dann insbesondere $s_{i+1} > 2s_i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ist.
Dann jedoch ist

$$s_n > 2s_{n-1} = s_{n-1} + s_{n-1} > s_{n-1} + 2s_{n-2} > \cdots > s_{n-1} + s_{n-2} + \cdots + s_2 + 2s_1 > s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$$

sodass die direkte Verbindung der beiden Endpunkte der Strecke mit Länge s_n länger ist als der "Umweg" über die übrigen Eckpunkte des n-Ecks, welcher die Länge $s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$ besitzt.
Dies ist ein Widerspruch (zur wiederholt angewandten Dreiecksungleichung), sodass es ein solches n-Eck nicht gibt, $\Box$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 301235
Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Zunächst werden die Rechnungen hier alle etwas einfacher, wenn wir auch noch das Folgenglied $x_0 = 0$ dazunehmen, was mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist. Da x_0 und mit jedem x_n ($n \in \mathbb{N}$) dann auch x_{n+1} rational ist, können wir hier auch mit dem Ansatz

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

arbeiten, wobei (a_n) und (b_n) hier zwei Folgen natürlicher Zahlen mit $\text{ggT}(a_n, b_n) = 1$ sind und die folgenden Gleichungen gelten

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n} + 1} = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

aus denen wir sofort die einfache Rekursionsbeziehung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = b_{n+1} = b_n + a_n = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{*}$$

herleiten können. Die Folge (b_n) ist dann wegen

$$b_n = a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{**}$$

der Folge (a_n) sehr ähnlich und gegenüber ihr einfach nur um eine Position nach hinten verschoben.
Als nächstes bestimmen wir aus der Rekursion (*) eine explizite Formel für die Folge (a_n) mit dem üblichen Ansatz

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

wobei q_1 und q_2 die zwei Lösungen der Gleichung $q^2 - q - 1 = 0$, also dann

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

sind und sich die Werte von c_1 und c_2 aus

$$c_1 q_1^0 + c_2 q_2^0 = a_0 = 0, \quad c_1 q_1 + c_2 q_2 = a_1 = 1$$

zu

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ergeben, womit also dann letztendlich

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n), \quad b_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) \Rightarrow x_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Insbesondere folgt daraus wegen $q_2 \approx -0.61$, dass (q_2^n) eine Nullfolge ist und somit die Folge (x_n) konvergiert und zwar mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

was also dann alle Fragen hier beantwortet.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6 - 301236
Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

Sieht man sich einmal den ersten Teilsummanden 2^n für $(n \in \mathbb{N})$ an, so ist klar, dass er für $n \geq 2$ stets durch 4 teilbar ist und er mod 25 wegen ggt(2,25) = 1 die Periode $20(= \varphi(25))$ oder einen Teiler davon hat, was dann also für $n \geq 2$ auch mod 100 gilt. Für den zweiten Teilausdruck n^2 gilt dagegen

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad (n+50k)^2 = n^2 + 100nk + 2500k^2 \equiv n^2 \pmod{100}$$

sodass also für den Gesamtausdruck $2^n + n^2$ für $n \geq 2$ dann jedenfalls gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad 2^{n+100k} + (n+100k)^2 \equiv 2^n + n^2 \pmod{100} \qquad (*)$$

Es genügt somit eine einzige(!) Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu finden, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist, denn wegen (*) hat man damit automatisch dann auch unendlich viele solcher Zahlen. Und ja, $n = 6$ ist z.B. eine solche, wie man wohl am einfachsten durch Probieren - es kommen ja offensichtlich nur gerade n in Frage! - sehr schnell herausfindet.

Aufgabe gelöst von weird

9.32.4 IV. Runde 1990, Klasse 12

Aufgabe 1 - 301241
Man ermittle zu jedem Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen a, b, c alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & x^2 - (y-z)^2 = a \\ (2) \qquad & y^2 - (z-x)^2 = b \\ (3) \qquad & z^2 - (x-y)^2 = c \end{aligned}$$

Aus

$$(x+y-z)^2(x-y+z)^2(-x+y+z)^2 = = ((x+y-z)(x-y+z))((y+z-x)(y-z+x))((z+x-y)(z-x+y)) = abc$$

erhält man zunächst

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = \pm\sqrt{abc}$$

und indem man darin

$$a = (x+y-z)(x-y+z),\ b = (y+z-x)(y-z+x),\ c = (z+x-y)(z-x+y)$$

jeweils substituiert das neue Gleichungssystem

$$(4) \qquad -x+y+z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

$$(5) \quad x-y+z = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$$

$$(6) \quad x+y-z = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Unter der Prämisse, dass auf der rechten Seite von (4),(5),(6) jeweils das gleiche Vorzeichen gewählt wird, was wir nun voraussetzen wollen, kann man daraus das ursprüngliche Gleichungssystem ersichtlich sofort wieder zurückgewinnen, d.h., es ist zu diesem äquivalent.

Das Gleichungssystem (4),(5),(6) ist aber nun linear und damit problemlos lösbar, z.B. indem man hier je zwei der drei Gleichungen addiert. Damit erhält man dann die 2 Lösungen

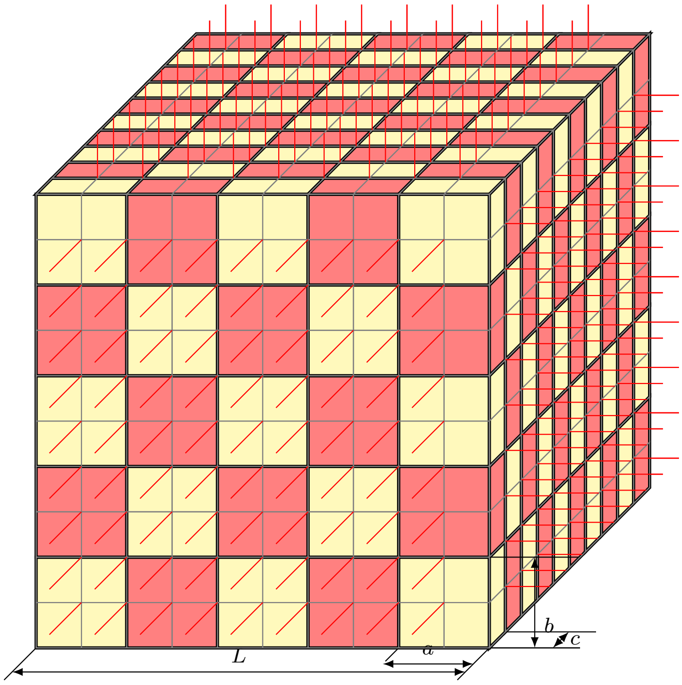
$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{bc}}\,\frac{b+c}{2},\ y = \pm\sqrt{\frac{b}{ac}}\,\frac{a+c}{2},\ x = \pm\sqrt{\frac{c}{ab}}\,\frac{a+b}{2}$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 301242
Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als markiert bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige (in cm gemessene) Abstände haben.
Man beweise:
Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm $\times$ 2 cm $\times$ 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.
Dabei gilt ein Baustein genau dann als durchstochen, wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

Wir zerlegen den Würfel in Elementarwürfel der Größe 1 cm x 1 cm x 1 cm. Ist der Kasten lückenlos mit Bausteinen gefüllt, so entspricht jeder Baustein vier im Quadrat liegenden Elementarwürfeln.
Wir stellen fest, dass jeder Baustein nur von einer einzigen markierten Geraden durchstochen wird, nämlich von der, die durch die Mittelpunkte der beiden 2 cm x 2 cm - Seitenflächen verläuft. (1)

Wir betrachten nun eine beliebige markierte g Gerade, die o.B.d.A. senkrecht zur Grundfläche steht.



Wir führen zwei Schritte aus, die jeweils parallel zu den beiden Paaren von Seitenflächen verlaufen und g vollständig enthalten. Dabei zerfällt der Kasten in vier Teile.

Jedes Teil enthält eine gerade Anzahl an Einheitswürfeln, da es eine ganzzahlige Länge und Breite sowie die Höhe 10 cm hat. (2)
Durch die beiden Schnitte werden auch einige Bausteine zerteilt. Die Einheitswürfel, aus denen die Bauteile bestehen bleiben dabei aber stets erhalten.

Ein Baustein, der nicht von g durchstochen wird, liegt entweder komplett in einem der vier Kastenteile, oder er wird durch einen Schnitt halbiert. Ein Baustein hingegen, der von g durchstochen wird (und nur solche), wird durch die Schnitte in seine vier Einheitswürfel zerlegt.

Angenommen, die Gerade g durchstößt genau einen Baustein B. Dann befänden sich in jedem Kastenteil einige ganze Bausteine, einige halbe Bausteine, sowie genau ein Einheitswürfel von B. Das kann aber nicht sein, weil das zusammen eine ungerade Anzahl von Einheitswürfeln ergibt, im Widerspruch zu (2).

Jede markierte Gerade durchstößt also keinen Baustein, oder mindestens zwei. (3) Insgesamt gibt es 3 x 9 x 9 = 243 markierte Geraden – drei Richtungen und jeweils neun ganzzahlige Abstände von den beiden Kanten (1 cm, ..., 9 cm).

Da es nur 250 Bausteine sind und wegen (1) jeder Baustein nur von einer Geraden durchstochen wird, kann es wegen (3) nicht mehr als 125 Geraden geben, die überhaupt einen Baustein durchstechen. Es gibt demnach mindestens $243 - 125 = 118 > 100$ Geraden, die keinen Baustein durchstechen. q.e.d.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 3 - 301243
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.
(2) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) - 4f(x^2) = x - 16x^4$.

Wir versuchen zunächst mit dem Ansatz

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R})$$

eine Polynomfunktion f mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Einsetzen in (2) führt dann auf

$$-4a_2x^4 + (a_2 - 4a_1)x^2 + a_1x - 3a_0 = x - 16x^4$$

und ein einfacher Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_2 = 4,\ a_1 = 1,\ a_0 = 0$$

d.h.,

$$f(x) = 4x^2 + x$$

erfüllt tatsächlich unsere Bedingungen hier und ist somit eine Lösung. Wir zeigen im Folgenden, dass sie auch die einzige ist. Setzt man nämlich

$$g(x) := f(x) - 4x^2 - x$$

so ist natürlich auch g für alle reellen Zahlen definiert und stetig, erfüllt aber nun die wesentlich einfachere Funktionalgleichung

$$g(x) = 4g(x^2)$$

Aus ihr folgt durch Einsetzen sofort

$$g(0) = g(1) = 0$$

sowie

$$g(-x) = g(x)$$

d.h., g ist jedenfalls eine gerade Funktion. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass sie unter diesen Bedingungen nur identisch 0 sein kann, d.h., $f(x) = 4x^2 + x$ ist tatsächlich die einzige Lösung hier.
Angenommen nämlich, es gäbe ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0 \neq 0$, wobei wir o.B.d.A. $x_0 > 0$ voraussetzen dürfen, so gibt es dann wegen der Stetigkeit von g für $x = 1$ ein $\delta > 0$, sodass $|g(x)| < |y_0|$ für alle x mit $|x - 1| < \delta$. Nun gilt aber auch

$$g(x_0) = \frac{1}{4}\, g(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{4^2}\, g(\sqrt[4]{x_0}) = \ldots = \frac{1}{4^k}\, g(\sqrt[2^k]{x_0}) = \ldots \quad (k \in \mathbb{N})$$

und indem wir hier nur k genügend groß wählen, dann weiter

$$|\sqrt[2^k]{x_0} - 1| < \delta \Rightarrow \left|g(\sqrt[2^k]{x_0})\right| < |y_0| \Rightarrow |g(x_0)| < |y_0|$$

ein klarer Widerspruch, der somit die Behauptung beweist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 301244
Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann m-schmal genannt, wenn für alle $a = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_a - x_{a-1} \leq m$ gelten.
Eine Menge A von Zahlen werde genau dann m-dicht genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.
Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende) Aussage:
Zu jeder Zerlegung der Menge N aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \geq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive Zahl m, so dass (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

1)Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der Aufgabe nicht ausreichen.

In der folgenden Lösung sei $\mathbb{N} := \{1,2,3, \ldots\}$. Die Aussage stimmt auch für die alternative Definition mit 0 als natürlicher Zahl und lässt sich vollkommen analog formulieren und beweisen.

Wir gehen induktiv vor und betrachten zunächst den Fall $r = 2$. Sei also die Menge der natürlichen Zahlen in die zwei disjunkten Mengen T_1 und T_2 zerlegt. Enthält T_1 für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so ist T_1 1-dicht und die Behauptung erfüllt.

Andernfalls existiert eine natürliche Zahl m, sodass unter je m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer mindestens eine nicht in T_1, also dann in T_2, enthalten ist. Zwei aufeinanderfolgende Elemente von T_2 haben damit immer den Abstand von höchstens $2m$, sodass T_2 nun $2m$-dicht ist, die Behauptung also für jede Zerlegung von $\mathbb{N}$ in $r = 2$ Teilmengen erfüllt ist.

Sei nun $r > 2$ und die Aussage schon für $r-1$ bewiesen. Sei weiterhin $T_1, \ldots, T_{r-1}, T_r$ eine Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen. Dann ist auch $T_1, \ldots, T_{r-1} \cup T_r$ eine solche Zerlegung in $r-1$ Mengen. Also existiert ein m, sodass mindestens eine dieser Mengen m-dicht ist. Ist eine der Mengen T_1 bis T_{r-2} m-dicht, so gilt die Aussage auch für die Zerlegung in die r Teilmengen.

Andernfalls ist $T_{r-1} \cup T_r$ m-dicht. Die Elemente von $T_{r-1} \cup T_r$ seien, der Größe nach geordnet, mit $a_1 < a_2 < \ldots$ bezeichnet. (Es müssen unendlich viele sein, da sonst die Menge nicht m-dicht wäre.) Dann gilt für jede natürliche Zahl $i > 0$ die Ungleichung $a_{i+1} - a_i \leq m$. Weiterhin sei A_1 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_{r-1}$ gilt und analog A_2 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_r$ gilt. Dann bilden (da T_{r-1} und T_r nichtleer und disjunkt sind) A_1 und A_2 eine Zerlegung der natürlichen Zahlen in zwei nichtleere und disjunkte Teilmengen.

Also gibt es nach dem schon bewiesenen Fall für $r = 2$ eine natürliche Zahl m', sodass mindestens eine der beiden Mengen – o.B.d.A. sei dies A_2 – m'-dicht ist. Dann jedoch ist T_r $m \cdot m'$-dicht, da eine m'-schmale Folge von Zahlen in A_2 sich in eine $m \cdot m'$-schmale Teilfolge von Zahlen in T_r übersetzt, wenn man die entsprechenden Indizes aus der Folge in A_2 wählt.

Also gibt es in jedem Fall für jede Zerlegung der natürlichen Zahlen in $r \geq 2$ paarweise disjunkte Teilmengen eine natürliche Zahl m, sodass mindestens eine dieser Teilmengen m-dicht ist, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 5 - 301245
Man ermittle ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \qquad (a_0, a_1, ..., a_n reell; a_n \neq 0) \qquad (1)$$

das die Bedingungen

$$f(-4) = 0, f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1, f(4) = 0(2)$$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Wegen $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = f(4) = 0$ ist $f(x)$ durch

$$g(x) := (x+4)(x+2)x(x-2)(x-4) = (x^2-16)(x^2-4)x = x^5 - 20x^3 + 64x$$

teilbar, sodass ein Polynom $h(x)$ mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ existiert. Es ist $g(-3) = 105$, $g(-1) = -45$, $g(1) = 45$ und $g(3) = -105$, sodass nun ein Polynom $h(x)$ möglichst geringen Grades mit $h(\pm 3) = \frac{1}{105}$ und $h(\pm 1) = \frac{1}{45}$ gesucht wird.

Betrachten wir das Polynom $h_2(x) := 315 \cdot h(x) - 3$, welches den gleichen Grad wie h besitzt. Dann gilt $h_2(\pm 3) = 3 - 3 = 0$ und $h_2(\pm 1) = 7 - 3 = 4$.
Offensichtlich kann h_2 nicht vom Grad 0 oder 1 sein, da es sonst wegen $h_2(\pm 3) = 0$ konstant Null sein müsste, was der zweiten Bedingung an h_2 widerspricht. Jedoch erfüllt offenbar

$$h_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 9) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

alle Bedingungen, kann also als Polynom kleinsten Grades gewählt werden. Damit ist

$$h(x) = \frac{h_2(x) + 3}{315} = -\frac{1}{630}x^2 + \frac{1}{42}$$

und

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = -\frac{1}{630}x^7 + \left(\frac{2}{63} + \frac{1}{42}\right)x^5 - \left(\frac{32}{315} + \frac{10}{21}\right)x^3 + \frac{32}{21} = -\frac{1}{630}x^7 + \frac{1}{18}x^5 - \frac{26}{45}x^3 + \frac{32}{21}x$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6A - 301246A
Man beweise:
In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$$xyz \geq (v+w)(w+u)(u+v)$$

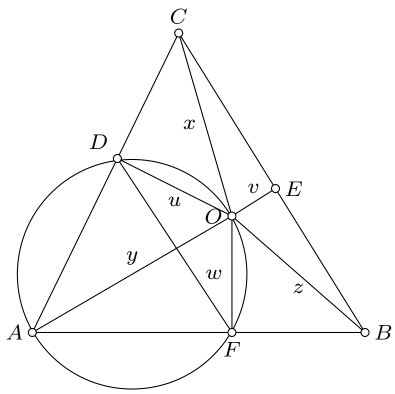
Sei ABC ein Dreieck und O ein Punkt innerhalb des Dreiecks. Sei u das Lot von O auf die Seite AC und w das Lot von O auf die Seite AB. Die Lotfußpunkte seien D und F.

Das Viereck $AFOD$ ist dann offensichtlich ein Sehnenviereck und besitzt einen Umkreis. Die Strecke $y := OA$ ist offensichtlich Durchmesser, da die beiden Halbkreise Thaleskreise über der Strecke sind. Der Umkreis ist zudem Umkreis vom Dreieck AFD. Für den Radius des Umkreises gilt somit:

$$\frac{DF}{\sin A} = 2y \iff y \sin A = \frac{DF}{2}$$

Quadrieren liefert:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{DF^2}{4} \quad (*)$$



Im Dreieck FOD gilt nach Kosinussatz nun:

$$DF^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\pi - A) = u^2 + w^2 + 2uw\cos A$$

Setzen wir in $*$ ein:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{u^2 + w^2 + 2uw\cos A}{4}$$
$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw\cos A$$

Nun ist $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ womit $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ folgt. Damit:

$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw\left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right) = (u+w)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (u-w)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \geq (u+w)^2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

Ziehen wir die Wurzel folgt somit:

$$2y \sin A \geq (u+w)\cos \frac{A}{2}$$

Mit $\frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}} = \sin \frac{x}{2}$ folgt dann:

$$2y \sin \frac{A}{2} \geq (u+w)$$

Analoges Vorgehen für die anderen beiden Sehnenvierecke liefert mit Multiplikation der drei Ungleichungen:

$$8xyz \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq (u+w)(v+w)(u+v)$$

mit Gleichheit für $u = v = w$.
Es ist sehr bekannt und einfach zu beweisen, dass $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, mit Gleichheit für $A = B = C$, womit dann die Behauptung folgt. Dieses kann man z.B. so zeigen:

Wir setzen $l = \frac{A}{2}$ und $m = \sin\frac{B}{2}$, dann folgt:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin l \sin m \cos(l + m)$$

mit $0 \leq l,m \leq \frac{\pi}{2}$

Damit folgt:

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin l(\sin(l + m) - \sin l) \leq \frac{1}{4}$$

da das Maximum für $l + m = \frac{\pi}{2}$, $\sin l = \frac{1}{2}$ angenommen wird.

Übersetzt und ergänzt von einem Mitglied des Matheplaneten aus L. J. Mordell: On Geometric Problems of Erdös and Oppenheim, The Mathematical Gazette Vol. 46, No. 357 (Oct., 1962), pp. 213-215.

Aufgabe 6B - 301246B
Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine Menge N von n Personen genau dann als k-familiär bezeichnet, wenn sich in jeder Menge K von k Personen aus N eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus K bekannt ist.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, dass jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muss!
Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.
Ferner werde vorausgesetzt, dass jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine Menge von Personen realisiert werden kann.

Zunächst stellen wir fest, dass eine k-familiäre Menge von Personen k-familiär bleibt, wenn weitere Bekanntschaften unter den Personen hinzugefügt werden. Wir nennen nun eine Menge von n Personen "maximal verbunden", wenn die Menge nicht n-familiär ist (d.h. es gibt keine Person, die alle anderen kennt), aber nach Hinzufügen einer beliebigen (noch nicht vorhandenen) Bekanntschaft stets n-familiär wird.

Wenn für ein $2 \leq k < n$ gilt, dass keine k-familiäre maximal verbundene Menge aus n Personen existiert, so existiert überhaupt keine Menge aus n-Personen, die nicht n-familiär aber k-familiär ist:

Denn so eine beliebige, nicht-n-familiäre Menge ergibt sich durch Entfernen von Bekanntschaften aus einer maximal verbundenen Menge, und wir haben oben schon festgestellt, dass das Hinzufügen von Bekanntschaften eine vorhandene k-Familiarität erhalten muss (umgekehrt muss das Entfernen von Bekanntschaften die Nicht-k-Familiarität erhalten).

Wir betrachten also maximal verbundene Mengen aus n Personen und wollen alle k finden, sodass keine dieser Mengen k-familiär ist. Diese k's sind dann gleichzeitig die Lösung der Aufgabe.

Wir bezeichnen mit der Tupel-Schreibweise $(a_1,a_2,...,a_j)$ für $2 \leq j \leq n$, dass Person a_1 genau die Personen $a_2,...,a_j$ nicht kennt, und Personen $a_2,...,a_j$ jeweils genau Person a_1 nicht kennen.
Die Bekanntschaftsverhältnisse einer maximal verbundenen Menge lassen sich nun immer als Aufzählung solcher Tupel darstellen, wobei jede Person in genau einem Tupel vorkommt und jedes Tupel mindestens zwei Personen enthält.
Beweis:
Jede Person kennt mindestens eine andere Person nicht, da die Menge sonst n-familiär wäre. Wenn eine Person a_1 mehrere Personen $a_2, \dots ,a_j$ mit $j > 2$ nicht kennt, so gilt für die Personen $a_2,...,a_j$, dass sie jeweils genau eine Person (nämlich a_1) nicht kennen.
Würde nämlich eine dieser Personen a_i $(1 < i \leq j)$, noch eine weitere Person außer a_1 nicht kennen, so könnte man die Bekanntschaft zwischen a_i und a_1 hinzufügen, ohne dass die Menge n-familiär werden würde, Widerspruch zur Eigenschaft maximal verbundener Mengen. Man sieht nun leicht, dass daraus die oben erklärte Darstellbarkeit der Bekanntschaften in Tupel-Form folgt.

Sei nun n beliebig und k gerade. Die Anzahl der Tupel mit einer ungeraden Anzahl an Personen (kurz:

ungerade Tupel) sei mit $a \geq 0$ bezeichnet. Wähle nun k Personen so aus, dass aus einem ungeraden Tupel die ersten beiden, die ersten vier, ... ausgewählt werden, bis nur noch die letzte Person des Tupels übrig bleibt. Verfahre so mit allen ungeraden Tupeln.

Wähle dann aus einem geraden Tupel (also Tupel mit einer geraden Anzahl an Personen) ebenfalls die ersten beiden, die ersten vier, ... aus und verfahre so mit allen geraden Tupeln. Man sieht, dass man somit immer k Personen auswählen kann, sodass keine dieser Personen alle anderen $k-1$ Personen kennt, solange $2 \leq k \leq n-a$ gilt. Indem nun immer auch die jeweils letzte Person von zwei ungeraden Tupeln ausgewählt wird, kann man k bis auf n bzw. $n-1$ vergrößern, wenn a gerade bzw. ungerade ist. Folglich gilt für alle n, dass es keine k-familiäre und nicht-n-familiäre Menge gibt, wenn k gerade ist.

Sei nun k ungerade. Für n gerade kann man die Konfiguration der Form (1,2), (3,4), ..., (n-1,n) betrachten, für die bei einer Auswahl einer ungeraden Anzahl an Personen immer eine Person existiert, die mit allen anderen bekannt ist (nämlich die Person, die als einzige aus ihrem Tupel gewählt wurde), was k-Familiarität bedeutet.

Ist n ungerade, muss wieder eine ungerade Anzahl a ungerader Tupel vorliegen. Für ungerade k, wähle die ersten drei Elemente eines ungeraden Tupels aus, und danach weitere zwei Elemente dieses Tupels, etc., bis alle Elemente des ungeraden Tupels gewählt wurden.
Falls noch weitere ungerade Tupel vorliegen (es ist $a-1$ eine gerade Anzahl), wähle von einem die ersten beiden Elemente, etc., bis nur noch eines übrig bleibt, und verfahre genau so mit einem anderen ungeraden Tupel. Wähle dann die letzten beiden Elemente dieser beiden ungeraden Tupel. Verfahre genau so mit weiteren ungeraden Tupeln.
Für vorliegende gerade Tupel, wähle eines aus, und darin die ersten zwei Personen, etc., bis aus alle geraden Tupeln gezogen wurde. Damit haben wir für beliebige Bekannschaftskonfigurationen gezeigt, dass für alle ungeraden k eine Auswahl von k Personen existiert, sodass keine davon alle anderen kennt, d.h. es liegt keine k-Familiarität vor.

Insgesamt haben wir:
Für genau $k \in \{2, 4, \ldots, n\}$ für n gerade, und alle $2 \leq k \leq n$ für n ungerade, gibt es keine k-familiäre Menge, die nicht auch n-familiär ist.

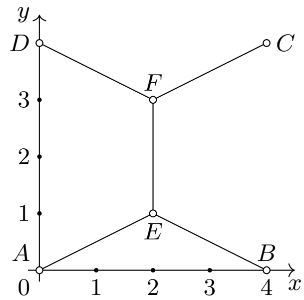
Aufgabe gelöst von Kornkreis

9.33 XXXI. Olympiade 1991

9.33.1 I. Runde 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311211
Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.



Ein solches Straßennetz ist möglich; man wähle z.B. in demjenigen Koordinatensystem, in dem die vier Dörfer A, B, C, D die Koordinaten $(0;0)$, $(4;0)$, $(4;4)$, $(0;4)$ haben, die Punkte E, F mit den Koordinaten $(2;1)$, $(2;3)$ und dann das Straßennetz aus den Strecken AE, BE, EF, EC, FD (siehe Abbildung).

Seine Gesamtlänge, gemessen in km, beträgt nämlich $2+4\sqrt{5}$, ist also wegen $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ kleiner als 11 km.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 311212
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:

(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.

(2) Es gilt $97ab = (a+n)(b+n)$.

I. Wenn a,b,n positive ganze Zahlen sind, die (1),(2) erfüllen, so folgt:

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung und weil $a+n > 1$, $b+n > 1$ gelten, muss eine der Zahlen $a+n$, $b+n$ gleich einer der Primzahlen 97, a, b sein, die andere gleich dem Produkt der beiden übrigen Primzahlen. Hierfür gibt es nur die Fälle

1. $a+n = 97a$, $b+n = b$,
2. $a+n = 97b$, $b+n = a$,
3. $a+n = ab$, $b+n = 97$

sowie die drei durch Vertauschung von a,b entstehenden Fälle.

Fall 1. führt auf den Widerspruch $n = 0$ und scheidet daher aus.

Fall 2. führt auf $(b+n)+n = 97b$, $2n = 96b$, $n = 48b$, $a = b+n = 49b$ und damit auf einen Widerspruch zur Primzahleigenschaft von a. Also scheidet auch dieser Fall aus.

Fall 3. führt auf $a+n = a(97-n)$, $n(a+l) = 96a \quad (3)$

Da a teilerfremd zu $a+1$ ist, muss n durch a teilbar sein, etwa $n = k \cdot a \quad (4)$ mit einer positiven ganzen Zahl k. Aus (3) folgt damit $k(a+1) = 96. \quad (5)$

Nun hat 96 genau die positiv-ganzzahligen Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Von ihnen haben nur

$$3, \quad 4 \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 24, \quad 32, \quad 48$$

die Form $a + 1$ mit einer Primzahl a, nämlich jeweils mit

$$a = 2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 23, \quad 31, \quad 47$$

Hiermit führen (5),(4) und die Bedingung $b + n = 97$ jeweils auf

$$\begin{aligned} k &= 32, \quad 24, \quad 16, \quad 12, \quad 8, \quad 4, \quad 3, \quad 2 \\ n &= 64, \quad 72, \quad 80, \quad 84, \quad 88, \quad 92, \quad 93, \quad 94 \\ b &= 33, \quad 25, \quad \mathbf{17}, \quad \mathbf{13}, \quad 9, \quad \mathbf{5}, \quad ,4, \quad \mathbf{3} \end{aligned}$$

Nur für die hervorgehobenen Werte ist b Primzahl. Also können nur die Tripel

$$(5{,}17{,}80), (7{,}13{,}84), (23{,}5{,}92), (47{,}3{,}94) \tag{6}$$

sowie die durch Vertauschung von a,b entstehenden Tripel

$$(17{,}5{,}80), (13{,}7{,}84), (5{,}23{,}92), (3{,}47{,}94) \tag{7}$$

die Bedingungen (1),(2) erfüllen

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, da 3, 5, 7, 13, 17, 23, 47 Primzahlen sind und die Gleichung (2) für jedes Tripel erfüllt ist.

Nach I. und II. sind genau die Tripel in (6) und (7) alle diejenigen Tripel positiver ganzer Zahlen, die (1) und (2) erfüllen.

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 311213
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, dass DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen

a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ auf AC liegt,

b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates $DPQR$

c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,

d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

a) Fällt man das Lot PM von P auf DQ und verlängert es bis zum Schnitt R' mit AC, so wird $\angle PMA = \angle R'MA = 90°$ sowie (für $\alpha = \angle BAC$), $\angle PAM = \angle R'AM = \frac{\alpha}{2}$; und mit $AM = AM$ folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) $\triangle AMP = \triangle AMR'$, also $MP = MR'$.

Für den vierten Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ gilt aber ebenfalls, dass er auf der Verlängerung des Lotes PM im Abstand $MR = MP$ von M liegt (da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren).

Also ist $R = R'$; damit (und weil R' nach seiner Definition auf AC liegt) ist bewiesen, dass R auf AC liegt.

b) Wegen der Winkelsumme in den Dreiecken APM und ADC erhält man $\angle APM = \angle ADC$ $(= 90° - \frac{\alpha}{2})$; hieraus und aus $\angle DPM = \angle PDM$ $(= 45°)$, folgt $\angle DPB = \angle PDB'$ $(= 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) - 45°)$, also nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $BD = BP$.

d) Somit ist $BPMD$ ein Drachenviereck, die Winkelhalbierende BE von $\angle ABC$ geht durch M und ist senkrecht auf PD, also parallel zu DR; daher gilt

$$\triangle DRC \sim \triangle BEC \tag{1}$$

Nach dem Satz, dass die Winkelhalbierenden die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt

$$DC = \frac{ab}{b+c} \qquad ; \qquad DB = \frac{ac}{b+c} \qquad \text{und} \tag{2}$$

$$EC = \frac{ab}{b+c} \qquad ; \qquad EA = \frac{bc}{b+c} \tag{3}$$

Aus (3) folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}} = \frac{a}{a+c}\sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2} = \frac{a}{a+c}\sqrt{2ac+2c^2} = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt $DR : DC = BE : BC = \sqrt{\frac{2c}{a+c}}$, hiernach und nach (2) ist

$$DR = \frac{ab}{b+c}\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{5}$$

Für $a = 49$ mm $= 7 \cdot 7$ mm, $b = 168$ mm $= 7 \cdot 24$ mm erhält man $c = 7 \cdot \sqrt{z^2 + 24^2}$ mm $= 7 \cdot 25$ mm und damit

$$DR = \frac{7 \cdot 7 \cdot 24}{24 + 25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{7+25}} \text{ mm } = 24 \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \text{ mm } = 30 \text{ mm}$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 311214
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,\ y,\ z)$ reeller Zahlen mit $x \leq y \leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x + y + z = 5, \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 15, \tag{2}$$
$$xyz = -3. \tag{3}$$

I. Wenn reelle Zahlen x,y,z mit $x \leq y \leq z$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, so folgt: Nach (1),(2) ist

$$x + y = 5 - z \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 = 15 - z \tag{5}$$

aus (3) folgt $z \neq 0$ und dann

$$xy = -\frac{3}{2} \tag{6}$$

Nun gilt $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$; nach (4),(5),(6) besagt dies:

$$(5-z)^2 = 15 - z^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{z}\right)$$
$$z(25 - 10z + z^2) = 15z - z^3 - 6$$
$$2(z^3 - 5z^2 + 5z + 3) = 0$$
$$(z-3)(x^2 - 2z - 1) = 0$$

und daher $z = 3$ oder $z = 1 + \sqrt{2}$ oder $z = 1 - \sqrt{2}$.

Ist $z = 3$, so folgt aus (4) und (6) das Gleichungssystem

$$x + y = 2 \qquad ; \qquad xy = -1$$

Es führt vermittels $x(2-x) = -1$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ auf $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 1 - \sqrt{2}$ oder $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$.

Ist $z = 1 + \sqrt{2}$, so folgt entsprechend

$$\begin{aligned} x + y &= 4 - \sqrt{2} \\ xy &= -\frac{3}{1+\sqrt{2}} = 3 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x^2 - (4 - \sqrt{2})x + 3 - 3\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 3 + 3\sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3$$

und $y = 1 - \sqrt{2}$ oder $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 3$.

Ist $z = 1 - \sqrt{2}$, so folgt ebenso mit $-\sqrt{2}$ statt $\sqrt{2}$: $x = 3$, $y = 1 + \sqrt{2}$ oder $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 3$.

Da $1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} < 3$ gilt, kann nur das Tripel

$$(x,y,z) = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 3)$$

sowohl die Bedingungen (1),(2),(3) als auch $x \leq y \leq z$ erfüllen. Die Probe bestätigt das Ergebnis. Damit erfüllt genau dieses Tripel die Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen von [5]

9.33.2 II. Runde 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311221
Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x+y=1 \quad (1)$$
$$x^2+y^2=c \quad (2)$$

gebildet.
a) Man ermittle für $c=2$ alle Paare $(x;y)$, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.
Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das Gleichungssystem (1), (2)
b) keine Lösung $(x;y)$ aus reellen Zahlen x,y hat,
c) genau eine Lösung $(x;y)$ hat,
d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=c \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2c-1}}{2}$$

mit den zwei Paaren (x,y):

$$\left(\frac{1-\sqrt{2c-1}}{2};\frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}\right) \quad ; \quad \left(\frac{1+\sqrt{2c-1}}{2};\frac{1-\sqrt{2c-1}}{2}\right) \quad (3)$$

Für $c=2$ wird damit $(x;y)\in\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.
Über die Anzahl verschiedener Lösung entscheidet der Radikand von $\sqrt{2c-1}$.
Keine Lösung existiert für $2c-1<0\Rightarrow c<\frac{1}{2}$, genau eine Lösung für $c=\frac{1}{2}$ und stets zwei Lösungen der Form (3) für $c>\frac{1}{2}$.

Aufgabe gelöst von Steffen Polster

Aufgabe 2 - 311222
Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

Ein solches Dreieck gibt es nicht, da der Flächeninhalt sonst nach dem Satz von Pick rational wäre.

Erklärung:
Wenn die Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, dann liegen sie im Koordinatensystem auf der Gitterlinie. Ich kann den Flächeninhalt des Dreiecks dann per Ergänzungsverfahren bestimmen. Das Rechteck hat sicherlich rationalen Flächeninhalt, da seine Linien auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Vom Rechteck muss ich dann 3 (oder nach Lage auch 2) rechtwinklige Dreiecke abziehen, wobei die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen wieder auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Die Dreiecke haben also auch rationalen Flächeninhalt. Damit folgt dann, dass das Dreieck auch rationalen Flächeninhalt hat.
Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks beträgt jedoch $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Nun ist $\frac{a^2}{4}\in\mathbb{Q}$, sodass das Problem sich also auf die Frage, ob $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ reduziert. Dass dies nicht der Fall ist, ist bekannt. Damit ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, ein gleichseitiges Dreieck hätte ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Zusätzliche Anmerkung:
Satz von Pick: Sei A der Flächeninhalt eines konvexen Polygons, I die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Polygons und R die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons, dann gilt: $A=I+\frac{R}{2}-1$.

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ im Raster, d.h. alle Eckpunktkoordinaten sind ganzzahlig.
Nach dem Satz von Pick hat dann das Dreieck einen Flächeninhalt A, der entweder natürliche Zahl oder eine gebrochene Zahl mit dem Nenner 2 ist.

Die Frage ist, ob ein Rasterdreieck gleichseitig sein kann?

Zwei Rasterpunkte A und B sollen zu einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ ergänzt werden.
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat ganzzahlige Komponenten

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist der um 120° gedrehte Vektor $\overrightarrow{AB}$, d.h.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ -\sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-p-\sqrt{3}q) \\ \frac{1}{2}(-p+\sqrt{3}q) \end{pmatrix}$$

Auf Grund der Irrationalität von $\sqrt{3}$ können nicht beide Koordinaten ganzzahlig sein. Der Punkt C ist kein Rasterpunkt.
Es existiert kein gleichseitiges Rasterdreieck.

Aufgabe 3 - 311223
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.
(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.
(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Die Funktion kann mittels quadratischer Ergänzung auch wie folgt dargestellt werden:

$$f(x) = \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}}{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + b - \frac{c^2}{4}}$$

Wegen (1) darf der Nenner keine Nullstelle haben, was genau dann der Fall ist, wenn

$$b > \frac{c^2}{4} > 0 \qquad (I)$$

Der Nenner ist somit immer positiv. Wegen (3) muss außerdem gelten:

$$b < \frac{a^2}{4} \qquad (II)$$

Aus (2) folgen drei Ungleichungen:

$$1 < \frac{4+2a+b}{4+2c+b} \qquad (III)$$

$$\frac{4+2a+b}{4+2c+b} < \frac{1+a+b}{1+c+b} \qquad (IV)$$

$$\frac{1+a+b}{1+c+b} < 2 \qquad (V)$$

Aus (III):

$$4+2a+b > 4+2c+b$$

Also:

$$a > c$$

Mithilfe von (IV) erhält man:

$$(4+2a+b)(1+c+b) < (4+2c+b)(1+a+b)$$

$$4+4c+4b+2a+2ac+2ab+b+bc+b^2 < 4+4a+4b+2c+2ac+2bc+b+ab+b^2$$

$$2c + ab < 2a + bc$$
$$0 < (2 - b)(a - c)$$

Da $(a - c) > 0$ ist, muss auch

$$b < 2$$

sein. Deswegen und wegen (I) muss schon einmal $b = 1$ sein. Wegen (I) muss aber auch

$$0 < c^2 < 4$$

sein. Daraus folgt $c = 1$. Aus Gleichung (II) folgt

$$a > 2$$

und aus (V) erhält man:

$$\frac{2 + a}{3} < 2$$
$$2 + a < 6$$
$$a < 4$$

Daher muss $a = 3$ sein. Das Lösungstripel lautet deshalb $(a; b; c) = (3; 1; 1)$, alle Ungleichungen sind erfüllt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 311224
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0$$

gilt.

Beweis: Indem man

$$f(x) := x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1$$

setzt, rechnet man leicht nach, dass gilt

$$f(1) = f'(1) = 0$$

d.h., $x = 1$ ist (mindestens) eine doppelte Nullstelle von $f(x)$. Es reicht somit

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x-1)^2} = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

zu zeigen. Wegen $g(0) = 1 > 0$ genügt dafür der Nachweis, dass $g(x)$ keine reellen Nullstellen hat. Dies folgt jedoch sofort aus

$$\frac{g(x)}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = \left(x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0$$

Aufgabe gelöst von weird

9.33.3 III. Runde 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311231
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt:
Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen a, b gelten für jedes reelle x die Gleichungen $f(a-x) = f(a+x)$ und $f(b-x) = f(b+x)$.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch.
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl p existiert, mit der für jedes reelle x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

O.B.d.A. sei $a < b$. Dann ist $p := 2(b-a) > 0$ und es gilt für jedes reelle x die Gleichung

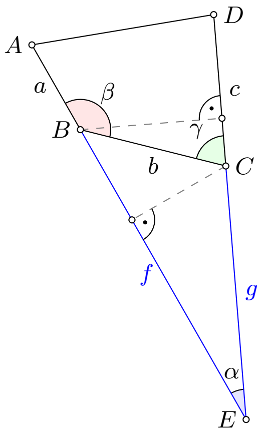
$$f(x+p) = f(x+2b-2a) = f(b+(x+b-2a)) = f(b-(x+b-2a)) = f(2a-x) = f(a-(x-a)) =$$

$$= f(a+(x-a)) = f(x), \square$$

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 2 - 311232
Man beweise, dass jedes konvexe Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ betragen und die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ die Größen β bzw. γ haben, den Flächeninhalt hat:

$$F = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta+\gamma))$$



Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist gleich der Fläche des Dreiecks AED minus die Fläche des Dreiecks BEC:

$$F = \tfrac{1}{2}(f+a)(g+c)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}fg\sin\alpha$$

$$F = \tfrac{1}{2}ag\sin\alpha + \tfrac{1}{2}cf\sin\alpha + \tfrac{1}{2}ac\sin\alpha \tag{1}$$

Aufgrund der Innenwinkelsumme des Dreiecks BEC gilt:

$$\alpha = \pi - (\pi-\beta) - (\pi-\gamma) = \beta + \gamma - \pi$$

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma-\pi) = -\sin(\beta+\gamma) \tag{2}$$

Außerdem ist, wenn man die gestrichelten Linien betrachtet, die senkrecht auf die Strecken AE bzw. DE stehen:

$$g\sin\alpha = b\sin(\pi-\beta) = b\sin\beta \tag{3}$$

und

$$f\sin\alpha = b\sin\gamma \tag{4}$$

Wir setzen nun die Gleichungen (2) bis (4) in (1) ein, und erhalten direkt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}bc\sin\gamma - \tfrac{1}{2}ac\sin(\beta+\gamma)$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 311233A
Man beweise, dass es unter allen Werten, die der Term

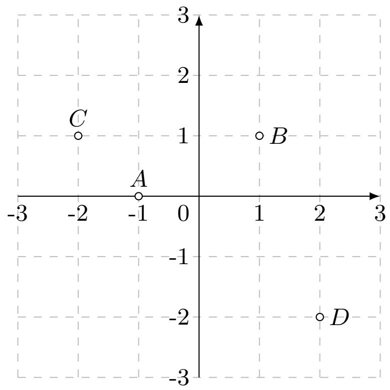
$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen x, y annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

Nennen wir die Summe s. Dann ist:

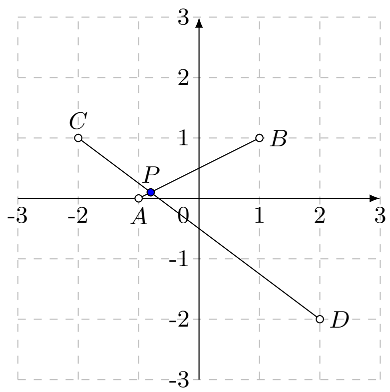
$$s=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$$

Das bedeutet, man kann s als die Summe der Abstände eines gesuchten Punktes $(x; y)$ zu vier gegebenen Punkten auffassen. Die vier Punkte lauten $(-1; 0)$, $(1; 1)$, $(-2; 1)$ und $(2; -2)$. Hier graphisch dargestellt:



Es ist offensichtlich, dass es einen Punkt P geben muss, der in Summe einen minimalen Abstand zu den vier gegebenen Punkten haben muss, denn die Summe der Abstände ist "nach oben offen", aber nach unten beschränkt (es gibt keinen Punkt mit negativen Abständen). Folglich muss es auch ein Minimum geben.

Betrachtet man nun die Punkte A und B isoliert, dann hat ein Punkt genau dann die minimale Abstandssumme zu A und B, wenn er sich auf der Strecke AB befindet. Die Abstandssumme ist auf der ganzen Strecke AB konstant, nämlich gleich der Länge der Strecke AB. Jeder Punkt außerhalb dieser Strecke hat zwangsläufig eine größere Abstandssumme.
Das gleiche gilt sinngemäß auch für die Punkte C und D. Der Punkt mit der gesuchten minimalen Abstandssumme zu allen vier Punkten muss daher der Schnittpunkt der Strecken AB und CD sein:



s ist dann die Summe der Längen von AB und CD:

$$s=\sqrt{2^2+1^2}+\sqrt{3^2+4^2}=5+\sqrt{5}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3B - 311233B
Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer A, B seien die folgenden beiden Aussagen wahr:
(1) Ist A mit B bekannt, so gibt es keinen von A und B verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit A als auch mit B bekannt wäre.
(2) Ist A nicht mit B bekannt, so gibt es genau zwei von A und B verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit A als auch mit B bekannt sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.
Hinweis: Für je zwei Teilnehmer A, B gelte:
Ist A mit B bekannt, so auch B mit A. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

Es liegt nahe, die Fragestellung in ein Problem der Graphentheorie zu übertragen. Ich versuche hier die Begriffe der Aufgabenstellung zu verwenden, damit die Lösung auch für diejenigen verständlich bleibt, die nicht mit der Graphentheorie vertraut sind.

(a) Wir betrachten die Anzahl der Bekannten zweier miteinander bekannter Teilnehmer u und v.
Sei U die Menge der von v verschiedenen Teilnehmer, die mit u bekannt sind und V die Menge der von u verschiedenen Teilnehmer, die mit v bekannt sind.
Für miteinander bekannte Teilnehmer u und v gibt es nach (1) keinen Teilnehmer w, der sowohl mit u, als auch mit v bekannt ist. U und V sind also disjunkt. Sei w ein beliebiger Teilnehmer aus U. Da w nicht mit v bekannt ist, gibt es nach (2) genau zwei Teilnehmer, die sowohl mit w als auch mit v bekannt sind. Einer dieser beiden Teilnehmer ist u, da u sowohl mit w als auch mit v bekannt ist.

Der andere Teilnehmer muss in V liegen, da er ein Bekannter von v und von u verschieden ist. Wir bezeichnen diesen Teilnehmer mit f(w).
Umgekehrt kann w auch keinen weiteren Bekannten f'(w) in V haben, weil es dann mehr als zwei Teilnehmer gäbe, die mit w und v bekannt sind, nämlich u, f(w) und f'(w).

Für jeden Teilnehmer w aus U gibt es also genau einen Bekannten f(w) in V. Das Argument gilt symmetrisch auch genau andersherum, für jeden Teilnehmer w aus V gibt es also genau einen Bekannten g(w) in U.
Zwischen U und V besteht also eine Bijektion mittels der Abbildungen f ¡-¿ g. U und V sind daher gleichmächtig, u und v haben also gleichviele Bekannte.

(b) Seien nun u und v beliebige Teilnehmer. Entweder sind sie miteinander bekannt und haben nach (a) gleichviele Bekannte.
Oder sie sind nicht miteinander bekannt, dann gibt es nach (2) einen Teilnehmer w, der mit u und v bekannt ist.
Nach (a) haben u und w gleichviele Bekannte, aber auch v und w und somit auch u und v. Insgesamt haben also beliebige Teilnehmer u und v jeweils gleichviele Bekannte. q.e.d.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

Aufgabe 4 - 311234
Für jede natürliche Zahl $a > 0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > a$$

erfüllen.

Es gilt allgemein

$$\int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < \frac{1}{k} < \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

wie man sich aufgrund der Tatsache, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist, leicht klar macht. Sei

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k}$$

Dann gilt mit obiger Relation:

$$\sum_{k=n+1}^{3n+1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s_n < \sum_{k=n+1}^{3n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Da sich die Integrale in den Summen "nahtlos" aneinander reihen, folgt:

$$\int_{n+1}^{3n+2} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s_n < \int_{n}^{3n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\ln \frac{3n+2}{n+1} < s_n < \ln \frac{3n+1}{n}$$

$$\ln \left(3 - \frac{1}{n+1}\right) < s_n < \ln \left(3 + \frac{1}{n}\right)$$

Für kleine n lässt sich s_n noch recht mühelos direkt berechnen, es ist $s_1 = 1\frac{1}{12}$ und $s_2 = 1\frac{13}{140}$. Für $n \geq 3$ folgt mit obiger Eingrenzung, dass $s_n > \ln(2{,}75) > 1$ ist, aber es wird auch nie größer als 2, da es durch $s_n < \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ auf Werte zwischen 1 und 2 eingeschränkt wird. Man kann also weiter eingrenzen, dass $1 < s_n < 2$ ist. Daher erfüllen alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung für $a = 1$, für $a > 1$ ist die Ungleichung mit keinem n erfüllbar.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 311235
Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, dass ihre Summe 2525 beträgt und dass keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen von einschließlich 14 bis 28, 30, von einschließlich 33 bis 50, von einschließlich 69 bis 70, 72 und von einschließlich 88 bis 100.

Dann hat M genau $15 + 1 + 18 + 2 + 1 + 13 = 50$ verschiedene Elemente, von denen keine zwei sich zu 101 ergänzen, da aus jedem Paar $(n{,}101 - n)$ zweier natürlicher Zahlen zwischen einschließlich 1 und 100 jeweils genau eine Zahl in M enthalten ist. Summiert man alle Elemente von M, dann erhält man als Summe s den Wert

$$s = 15 \cdot \frac{14+28}{2} + 30 + 18 \cdot \frac{33+50}{2} + 69 + 70 + 72 + 13 \cdot \frac{88+100}{2} = 2525$$

sodass es offenbar eine entsprechende Auswahl, die der Aufgabenstellung genügt, getroffen werden kann.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 6 - 311236
Es seien alle diejenigen Pyramiden $ABCS$ betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Grundfläche ABC der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.
(2) Es gilt $AB = AC = SB = SC$.
(3) Es gilt $BC = SA$.
Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\angle BAC$.

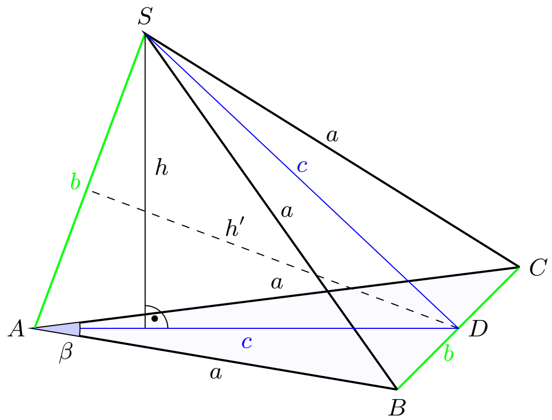
Da die Fläche F des Dreiecks ABC konstant gleich eins sein soll, gilt

$$V = \tfrac{1}{3}Fh = \tfrac{1}{3}h$$

Das Volumen ist somit maximal, wenn die Höhe h maximal ist. D sei der Mittelpunkt der Strecke BC. Dann gilt:

$$F = \tfrac{1}{2}bc = 1$$

$$c = \frac{2}{b}$$



Betrachten wir nun das gleichschenklige Dreieck ADS. Seine Fläche ist

$$\tfrac{1}{2}bh' = \tfrac{1}{2}ch$$

wobei

$$h' = \sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

ist. Damit erhält man:

$$h = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

Setzt man noch c ein, folgt:

$$h = \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{4}{b^2} - \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{16}b^6}$$

Soll h und damit V maximal werden, muss der Term unter der Wurzel maximal werden. Wir setzen daher die erste Ableitung gleich null:

$$2b - \tfrac{3}{8}b^5 = 0$$

$b = 0$ stellt offenkundig kein Maximum dar, so dass die Lösung lautet:

$$b^4 = \tfrac{16}{3}$$

$$b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

Für den Winkel β gilt dann:

$$\beta = 2\arctan\frac{b}{2c} = 2\arctan\frac{b^2}{4} = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 2 \cdot 30° = 60°$$

Dann ist $b = a$. Das Volumen ist also maximal, wenn die Pyramide ein regelmäßiges Tetraeder ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

9.33.4 IV. Runde 1991, Klasse 12

Aufgabe 1 - 311241
Es sei

$$x = e^{0,000009} - e^{0,000007} + e^{0,000002} - e^{0,000001}; \qquad y = e^{0,000008} - e^{0,000005}$$

Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

Wir setzen

$$z = e^{0,000001} \approx 1,000001 > 1$$

Dann ist

$$x - y = z^9 - z^8 - z^7 + z^5 + z^2 - z$$
$$x - y = z(z^8 - z^7 - z^6 + z^4 + z - 1)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^4(z+1) + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^5 - z^4 + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)(z^2-1)\left(z^5 - z^2 - 1\right)$$

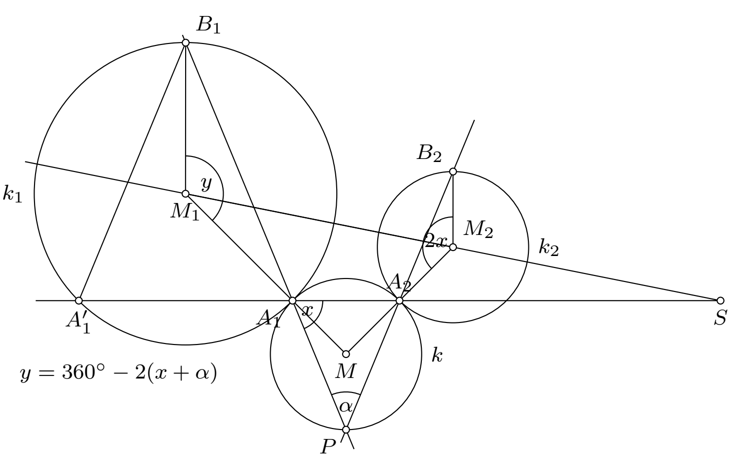
Da $z > 1$ ist, sind die Faktoren z, $(z-1)$ und (z^2-1) jeweils größer als null. Da $(z^5 - z^2 - 1) \approx -1 < 0$ ist, ist auch $x - y < 0$ bzw. $x < y$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 311242
Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k.
Für $i = 1; 2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

M sei der Mittelpunkt von k. Mit XY sei im Folgenden die Strecke durch die Punkte X, Y bezeichnet und mit Gerade XY die Gerade durch X, Y. Alle Winkel hier sind orientierte Winkel.
Wir setzen voraus, dass M und P unterhalb von A_1A_2 liegen; der Beweis geht analog, wenn diese Einschränkung fallen gelassen wird.

Bezeichne den Peripheriewinkel $\measuredangle A_2PA_1$ mit α. Wegen $\measuredangle A_2MA_1 = 2\alpha$ (Zentriwinkel) und $|MA_1| = |MA_2|$, gilt $\measuredangle A_1A_2M = \measuredangle MA_1A_2 = 90° - \alpha$. Wir bezeichnen $\measuredangle PA_1A_2 = x$ und haben $\measuredangle PA_1M = x - (90° - \alpha)$ sowie $\measuredangle MA_2P = (180° - x - \alpha) - (90° - \alpha) = 90° - x$. Weiterhin ist $\measuredangle B_1A_1M_1 = \measuredangle PA_1M$ und $\measuredangle M_2A_2B_2 = \measuredangle MA_2P$. Da nun M_1B_1 und M_1A_1 sowie M_2B_2 und M_2A_2 jeweils gleich lang sind, gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - 2\measuredangle PA_1M = 360° - 2(x + \alpha)$ und $\measuredangle B_2M_2A_2 = 180° - 2\measuredangle MA_2P = 2x$.



Für $x = 90° - \alpha/2$, d.h. wenn die Gerade MP senkrecht auf A_1A_2 steht (P ist dann sozusagen unterer Scheitelpunkt von k), so gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - \alpha = \measuredangle B_2M_2A_2$, d.h. die Drehwinkel von B_1 und B_2 bezüglich der Strecken M_1A_1 bzw. M_2A_2 sind gleich; B_1 und B_2 sind hier obere Scheitelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2, siehe Skizze.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Kreise k_1 und k_2 denselben Radius haben. Für $x = 90° - \alpha/2$ folgt direkt, dass B_1B_2 parallel zu A_1A_2 ist.
Wenn sich x um Δx ändert, indem P seine Position ändert, so ändert sich der Drehwinkel von B_1 um $-2\Delta x$ und der Drehwinkel von B_2 um $+2\Delta x$, insbesondere bleibt B_1B_2 parallel zu A_1A_2.

Wenn die Radien von k_1 und k_2 gleich sind, ist aber auch A_1A_2 parallel zu M_1M_2, da MM_1 und MM_2 dieselbe Länge haben und parallel zu MA_1 bzw. MA_2 liegen, die ebenfalls gleichlang sind. Daraus folgt die Parallelität der Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2.

Seien nun die Kreise k_1 und k_2 von verschiedenem Radius r_1 bzw. r_2. Offensichtlich sind die Geraden M_1M_2 und A_1A_2 dann nicht mehr parallel und schneiden sich in einem Punkt S. Der zweite Schnittpunkt der Gerade A_1A_2 mit k_1 sei mit A_1' bezeichnet. Es gilt $\measuredangle A_1A_1'M_1 = \measuredangle SA_2M_2$, da beide Winkel gleich $\measuredangle MA_1A_2$ sind. Folglich sind die Strecken $A_1'M_1$ und A_2M_2 zueinander parallel. Des Weiteren haben wir $\measuredangle A_1A_1'B_1 = 360° - (2 \cdot (90° - \alpha) + 2 \cdot (x + \alpha)) = 180° - \alpha = \measuredangle SA_2B_2$, d.h. $A_1'B_1$ und A_2B_2 sind parallel zueinander.

Nach dem Strahlensatz haben wir nun $\frac{|SA_2|}{r_2} = \frac{|SA_1'|}{r_1}$. Man sieht leicht, dass die Gerade B_1B_2 nie parallel zur Gerade A_1A_2 ist, bezeichne den Schnittpunkt mit S'. Nach dem Strahlensatz ist $\frac{|S'A_2|}{\lambda r_2} = \frac{|S'A_1'|}{\lambda r_1}$, wobei $\lambda r_1 = |A_1'B_1|$, $\lambda r_2 = |A_2B_2|$ und $\lambda \neq 0$ eine Konstante ist, die vom Winkel $\measuredangle A_1A_1'B_1$ abhängt.

Kombination beider Strahlensatzgleichungen ergibt $\frac{|SA_2|}{|SA_1'|} = \frac{|S'A_2|}{|S'A_1'|} = \frac{|SA_2|+d}{|SA_1'|+d}$, wobei d den (vorzeichenrichtigen) Abstand von S und S' bezeichnet. Man sieht leicht, dass diese Gleichung nur gelten kann, wenn $d = 0$ oder $|SA_2| = |SA_1'|$ gilt. Letzteres ist nicht der Fall, weshalb $d = 0$ und damit $S = S'$ folgt, d.h. alle drei Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 schneiden sich im selben Punkt S.

Insgesamt haben wir bewiesen, dass A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 sich entweder im selben Punkt S schneiden oder zueinander parallel liegen.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 3 - 311243
Man beweise:
Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$n = a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + a_1 p + a_0$$
$$k = b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + ... + b_1 p + b_0$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0, 1, ..., t$), so lässt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie

$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}$$

Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

definiert, für ganze Zahlen $n \geq 0$ ferner $\binom{n}{0} = 1$.

Wir arbeiten im Polynomring $\mathbb{F}_p[X]$.
Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt für alle $f,g \in \mathbb{F}_p[X]$ die Gleichung $(f+g)^p = f^p + g^p$.
Daher gilt für das Polynom $(X+1)^n \in \mathbb{F}_p[X]$:

$$(X+1)^n = \left(X^{p^t} + 1\right)^{a_t} \left(X^{p^{t-1}} + 1\right)^{a_{t-1}} \cdot ... \cdot \left(X^{p^1} + 1\right)^{a_1} (X+1)^{a_0}.$$

Mit dem binomischem Lehrsatz folgt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i = \prod_{i=0}^{t} \left(\sum_{j=0}^{a_i} \binom{a_i}{j} X^{jp^i} \right).$$

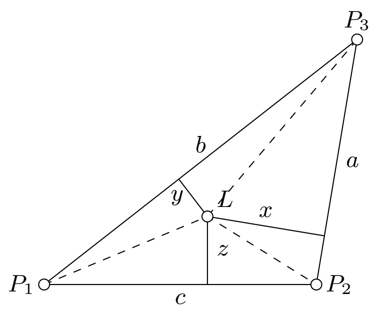
Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung natürlicher Zahlen im Ziffernsystem zur Basis p folgt die Behauptung durch Vergleich der Koeffizienten von X^k auf beiden Seiten.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 311244
Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sei Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.
a) Man beweise, dass eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1, P_2, P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.
b) Man beweise, dass dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt

$$F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

beträgt.



In dieser Skizze blicken wir senkrecht auf die Grundfläche der Pyramide, und L sei der beliebige Lotfußpunkt der Pyramidenspitze auf die Dreiecksebene. x, y und z seien die Abstände des Lotfußpunktes zu den Seitenflächen des Dreiecks. Die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist dann

$$F = \tfrac{1}{2}(ax + by + cz) \tag{1}$$

Die Mantelfläche M der Pyramide setzt sich aus drei Dreiecksflächen zusammen. Die Grundseiten dieser drei Flächen sind die Seiten a, b und c, die Höhe dieser Dreiecke ergibt sich per Satz des Pythagoras aus den Abständen x, y und z mit der Höhe der Pyramide h:

$$M = \tfrac{1}{2}\left(a\sqrt{x^2+h^2} + b\sqrt{y^2+h^2} + c\sqrt{z^2+h^2}\right) \tag{2}$$

x, y und z hängen über die Gleichung (1) zusammen, so dass man eine Größe als Funktion der anderen beiden Größen betrachten kann:

$$z(x,y) = \frac{1}{c}(2F - ax - by) \tag{3}$$

Da M maximal sein soll, muss die partielle Ableitung von M nach x und y jeweils null sein:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Aus Gleichung (3) erhalten wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c}$$

Dies eingesetzt ergibt

$$a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\left(-\frac{a}{c}\right) = 0$$

Daraus folgt einfach:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \qquad (4)$$

$$x^2(z^2+h^2) = z^2(x^2+h^2)$$

$$x^2h^2 = z^2h^2$$

$$x = z$$

(Theoretisch wäre hier auch $x = -z$ möglich, wodurch aber Gleichung (4) verletzt würde). In gleicher Art und Weise erhält man mit der Ableitung nach y auch $y = z$, so dass letztlich $x = y = z$ gelten muss. Das ist genau am Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Fall, was dem Inkreismittelpunkt entspricht und Aufgabenteil a) beweist. Mit $x = y = z = r$ haben wir

$$F = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$

Das Volumen der Pyramide ist

$$V = \tfrac{1}{3}Fh$$

Die Mantelfläche der Pyramide ist

$$M = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\sqrt{r^2+h^2} = \frac{F}{r}\sqrt{r^2+\left(\frac{3V}{F}\right)^2}$$

$$M = \sqrt{F^2+\left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

Die gesamte Oberfläche der Pyramide ist somit

$$O = F + M = F + \sqrt{F^2+\left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

Damit wäre auch Aufgabenteil b) gezeigt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 311245
Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen.
(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y mit x, y mit $x \geq y$ gilt:

$$f(x)\cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

(3) Es gilt $f(1) = a$.
Bemerkung: f soll als elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck angegeben werden, d.h.:
Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte $f(x)$ soll dadurch erfolgen, dass auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.

Setzt man $y = 0$ ein, erhält man:

$$f(x)\cdot f(0) = 2f(x)$$

so dass $f(0) = 2$ ist. Setzt man nun $y = 1$ ein, erhält man eine rekursive Definition:

$$af(x) = f(x+1) + f(x-1)$$

$$f(x+1) = af(x) - f(x-1)$$

mit $f(0) = 2$ und $f(1) = a$. Dies ist eine lineare Rekursion, so dass $f(x)$ als Summe aller Funktionen $f(x) = c^x$ dargestellt werden kann, die die Rekursion erfüllen:

$$c^{x+1} = ac^x - c^{x-1}$$

$$c \cdot c^x = ac^x - \frac{1}{c}c^x$$

$$c = a - \frac{1}{c}$$

$$c^2 - ac + 1 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$$

Die Funktion lautet also

$$f(x) = k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Für $x = 0$ muss gelten:

$$k_1 + k_2 = 2$$

und für $x = 1$ gilt:

$$k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) = a$$

$$(k_1 + k_2)\frac{a}{2} + (k_1 - k_2)\sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} = a$$

Setzt man $k_1 + k_2 = 2$ in diese letzte Gleichung ein, kann man direkt schlussfolgern, dass $k_1 = k_2 = 1$ sein muss. Daher lautet die Funktion:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Anmerkung: Da in der quadratischen Gleichung, wegen des Satzes von Vieta, $c_1 = \frac{1}{c_2}$ gilt, kann man die Funktion auch schreiben als:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^{-x}$$

Dies lässt sich durch die Hyperbelcosinus-Funktion darstellen:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Im vorliegenden Fall folgt daraus:

$$f(x) = 2\cosh\left(x \cdot \operatorname{arcosh}\frac{a}{2}\right)$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6A - 311246A

Man untersuche, ob es eine Anzahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ derart gibt, dass die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

Wir setzen zunächst

$$a_n = (1+\sqrt{n-1})c + \epsilon_n$$

mit $\epsilon_n > 0$, und

$$a_i = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c + \epsilon_i$$

Dann ist die Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \epsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c + \epsilon_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \epsilon_n + (n-1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \left(n-1-\sqrt{n-1}\right) c + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = nc + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

Damit die Vorgabe der Summe erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i = 0 \tag{1}$$

Für die Summe der Quadrate gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left((1+\sqrt{n-1})c + \epsilon_n\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c + \epsilon_i\right]^2 =$$

$$= (1+\sqrt{n-1})^2 c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\epsilon_n + \epsilon_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2 c^2 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c\epsilon_i + \epsilon_i^2\right] =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\epsilon_n + \epsilon_n^2 + (n-1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2 c^2 + 2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i^2 =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\epsilon_n + \left(n-1-2\sqrt{n-1}+1\right) c^2 + 2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\epsilon_n + 2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

Wegen (1) gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i = -\epsilon_n$$

und daher:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\epsilon_n + 2c\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)(-\epsilon_n) + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2 + 2\left(\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) c\epsilon_n + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 > 2nc^2$$

Daher ist es nicht möglich, alle Vorgaben zu erfüllen, bei Vorgabe der Summen gilt stattdessen $a_i \leq (1+\sqrt{n-1})c$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6B - 311246B
In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede.
An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.
Man beweise:
Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.
Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.

Für jedes positive ganze Zahl n gilt, wenn k eine ganze Zahl größer als $\frac{n}{2}$ ist:
Der Zeitraum von beliebige gewählten $9k$ aufeinanderfolgenden Jahren besteht aus einer Anzahl A von Tagen, für die

$$A \geq 365 \cdot 8k + k \tag{1}$$

gilt. Wird für $i = 1,2,...,A$ jeweils die Anzahl der Blätter, die der Autor in den ersten i Tagen dieses Zeitraums insgesamt gefüllt hat, mit x_i bezeichnet, so gilt nach Voraussetzung ferner

$$0 < x_1 < x_2 < ... < x_A \leq 730 \cdot 8k \tag{2}$$

Jede der positiven ganzen Zahlen

$$x_1, x_2, ..., x_A, x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n \tag{3}$$

ist folglich nicht größer als $730 \cdot 8k + n$. Für ihre Anzahl $2A$ gilt wegen (1) und $k > \frac{n}{2}$ aber $2A \geq 730 \cdot 8k + 2k > 730 \cdot 8k + n$.
Also müssen sich nach dem Schubfachschluss unter den Zahlen (3) mindestens zwei einander gleiche befinden. Nach (2) sind jedoch keine zwei der Zahlen $x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n$.
Daraus folgt die Existenz von i und j mit $1 \leq i,j \leq A$ und

$$x_i = x_j + n \tag{4}$$

Wegen $n > 0$ ist hierfür $i > j$, und (4) besagt: In dem Zentrum vom $(j + 1)$-ten Tag bis zum i-ten Tag wurden genau n Blätter gefüllt.

Übernommen von [5]

9.34 XXXII. Olympiade 1992

9.34.1 I. Runde 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321211
Man ermittle alle diejenigen Paare $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b, für die das Quadrat ihren Produkts doppelt so groß wie die Summe ihrer Quadrate ist.

I. Wenn ein Paar $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b die genannte Bedingung $(ab)^2 = 2(a^2 + b^2)$ erfüllt, so folgt

$$a^2(b^2 - 2) = 2b^2$$

und daraus wegen der Ganzzahligkeit von b, also $b^2 - 2 \neq 0$,

$$a^2 = \frac{2b^2}{b^2 - 2} = 2 + \frac{4}{b^2 - 2} \tag{1}$$

Da a^2 eine ganze Zahl ist, muss $b^2 - 2$ ein Teiler von 4, d.h. eine der Zahlen $1, -1, 2, -2, 4, -4$, sein. Die Werte $1, 4, -4$ scheiden aus, da sie auf $b^2 = 3, b^2 = 6$ bzw. $b^2 = -2$ führen würden, was für kein ganzzahliges b zutrifft. Auch $b^2 - 2 = -1$ scheidet aus, da nach (1) hiermit $a^2 = -2$ folgte, was für kein a gilt.

Also kann nur $b^2 - 2 = 2$ oder $b^2 - 2 = -2$ sein, was zusammen mit (1) wegen $a \geq 0$, $b \geq 0$ auf $(a; b) = (2; 2)$ oder $(a; b) = (0; 0)$ (2) führt.

II. Die in (2) genannten Paare erfüllen die Bedingungen. Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (2) genannten Paare den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 2 - 321212
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a \geq 3$ die Ungleichung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a+1}$ gilt.

Für alle reellen Zahlen a gilt

$$\begin{aligned} a^4 - (a+1)^3 &= a^4 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1 \\ &= a^3(a-3) + 2a^2(a-3) + 3a(a-3) + 6(a-3) + 17 \end{aligned}$$

Ist $a \geq 3$, so folgt hieraus $a^4 > (a+1)^3$ und damit wegen $a > 0$ die Behauptung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a+1}$.

Aufgabe 3 - 321213
Dora und Karla berechnen für verschiedene Flächen jeweils den Quotienten aus Flächeninhalt und Umfang. Sie vermuten: Wählt Dora ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck D und Karla den einbeschriebenen Kreis K dieses Dreiecks D, so müssen sich stets einander gleichgroße Quotientenwerte ergeben.

Trifft diese Vermutung zu?

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei $BC = AC = a$, $AB = c$; mit dem Fußpunkt F der auf AB senkrechten Höhe sei $CF = h$.

Diese Höhe ist zugleich Seitenhalbierende und Winkelhalbierende; auf ihr liegt somit der Mittelpunkt M des einbeschriebenen Kreises k. Das Lot von M auf BC habe den Fußpunkt G; der Radius von k ist damit $r = MF = MG$.

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ch$ und den Umfang $2a + c$; der Quotient aus diesen Größen ist

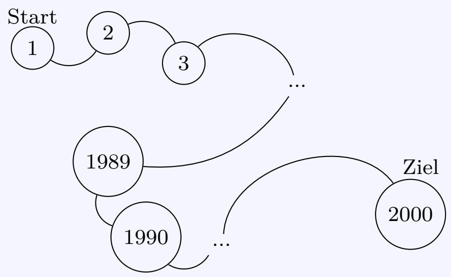
$$\frac{ch}{2 \cdot (2a + c)} \tag{1}$$

Wegen $\angle BCF = \angle MCG$ und $\angle BFC = \angle MGC = 90°$ ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BFC \sim \triangle MGC$; daher gilt

$$\frac{c}{2} : a = r : (h - r) \Rightarrow r = \frac{ch}{2a + c} \tag{2}$$

Der Quotient aus Flächeninhalt πr^2 und Umfang $2\pi r$ von k beträgt $\frac{r}{2}$; nach (2) hat er somit ebenfalls den Wert (1). Damit ist die Vermutung als zutreffend nachgewiesen.

Aufgabe 4 - 321214



Bei einem Würfelspiel "Reise durch Deutschland" sind 2000 Felder längs der Reiseroute angeordnet (siehe Abbildung). Beim Startfeld 1 beginnend, wird der Spielstein nach jedem Mal Würfeln in Richtung Ziel um die gewürfelte Augenzahl weiterbewegt, Steht der Stein dann genau auf dem Feld 1990, so erhält der Spieler einen Bonus.

Für jedes Feld n mit $1 \leq n \leq 1989$ bezeichne $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein auf dem Feld n stehender Stein im weiteren Verlauf des Spieles diesen Bonus einbringt.

Man ermittle diejenige Zahl n $(1 \leq n \leq 1989)$, für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Hinweis: Informieren Sie sich gegebenenfalls über den Begriff Wahrscheinlichkeit!

Über die Wahrscheinlichkeiten $P(n)$ kann man schrittweise für $n = 1989, 1988, ..., 2, 1$ folgende Aussagen erhalten: Es gilt

$$\begin{aligned}
P(1989) &= \frac{1}{6} \\
P(1988) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1989) \\
P(1987) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989) \\
&... \\
P(1984) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1986) + \frac{1}{6} \cdot P(1987) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989) \\
P(1983) &= \frac{1}{6} \cdot P(1984) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + ... + \frac{1}{6} \cdot P(1989) \\
P(1982) &= \frac{1}{6} \cdot P(1983) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + ... + \frac{1}{6} \cdot P(1988) \\
&... \\
P(1) &= \frac{1}{6} \cdot P(2) + \frac{1}{6} \cdot P(3) + ... + \frac{1}{6} \cdot P(7)
\end{aligned}$$

Die hier behaupteten Werte für $P(n)$ mit $n = 1990 - k$ $(k = 1,...,6)$ kann man folgendermaßen mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit) erhalten:

Genau einer der möglichen Würfe (Augenzahl k) führt sofort auf das Feld 1990; jeder der $k-1$ Würfe mit kleinerer Augenzahl (sofern es diese gibt) führt auf eines der Felder ν zwischen n und 1990, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt; jeder Wurf mit größerer Augenzahl als k führt im weiteren Spielverlauf mit Sicherheit nicht mehr auf den Bonus.

Die Werte für $P(n)$ mit $n \leq 1983$ ergeben sich ebenfalls mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Jeder der möglichen Würfe (Augenzahl $k = 1,...,6$) führt auf eines der Felder $\nu = n + k$, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt. Aus den somit erhaltenen Gleichungen folgt der Reihe nach

$$P(1988) = P(1989) + \frac{1}{6} \cdot P(1989) > P(1989) \quad , \quad P(1987) = P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) > P(1988) \quad ...$$

$$P(1984) = P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) > P(1985) \quad , \quad P(1983) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

$$P(1982) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984) \quad ... \quad P(1) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

Damit ist $n = 1984$ als diejenige Zahl ermittelt, für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Lösungen der I. Runde 1991 übernommen von [5]

9.34.2 II. Runde 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321221
Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllen:

$$x^2 + k \cdot y^2 = 4 \qquad (1)$$
$$k \cdot x^2 - y^2 = 2 \qquad (2)$$

Multipliziert man (1) mit k und subtrahiert (2), dann erhält man

$$(k^2+1)y^2 = 4k-2$$
$$y^2 = \frac{4k-2}{k^2+1}$$

Es muss $k \geq 1$ sein, weil sonst y nicht reell wäre. Außerdem kann y nicht gleich null sein. Daher muss gelten:

$$y^2 = \frac{4k-2}{k^2+1} \geq 1$$
$$4k-2 \geq k^2+1$$
$$k^2-4k+3 \leq 0$$

Daraus folgt $1 \leq k \leq 3$. Die in Frage kommenden Lösungen kann man daher schnell durchprobieren und man findet heraus, dass nur für $k=3$ ganzzahlige Lösungen herauskommen, und zwar $x^2 = y^2 = 1$. Die Lösungspaare sind also $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$ und $(-1;-1)$.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 321222
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung gilt:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Mit

$$x := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \cdot 2n}$$

und $(k-1)(k+1) = k^2 - 1 < k^2$ für alle natürlichen Zahlen k ist

$$x^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots \cdot (2n)^2} < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \ldots \cdot ((2n-1) \cdot (2n+1))} = \frac{1}{2n+1}$$

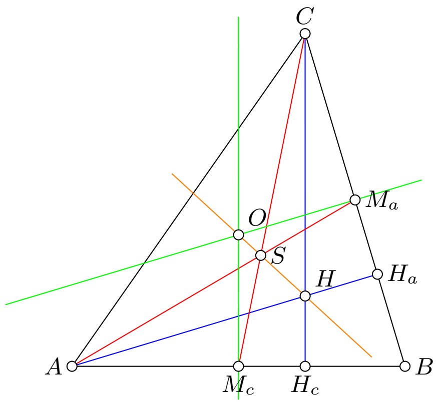
also $x^2 < \frac{1}{2n+1}$ bzw. $x < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\square$.

Aufgabe gelöst von cyrix

Aufgabe 3 - 321223
Man beweise:
In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

Wenn man als bekannt voraussetzen darf, dass der Umkreismittelpunkt O, der Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S auf einer Gerade (der Eulerschen Gerade) liegen, dann folgt die Aussage aus dem Strahlensatz:

Sei D der Mittelpunkt der Seite BC. Für die Ecke A sind dann die Mittelsenkrechte von BC und die Höhe von A auf BC parallel. S teilt die Seitenhalbierende DA von BC im Verhältnis $2:1$, also gilt nach Strahlensatz auch $AH : OD = 2 : 1$.



Hier ein kurzer Beweis dafür, dass der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen:

Man erhält das Dreieck $M_aM_bM_c$ der Seitenmitten durch zentrische Streckung von ABC am Schwerpunkt S (der Streckfaktor ist $\frac{1}{2}$).
Daher liegen der Höhenschnittpunkt H von ABC, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H' von $M_aM_bM_c$ auf einer Geraden. Es ist aber offenbar H' auch gleich der Umkreismittelpunkt von ABC. Daraus folgt die Behauptung und es folgt sogar die Aussage, dass der Schwerpunkt die Verbindungslinie vom Höhenschnittpunkt zum Umkreismittelpunkt im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 321224
Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando rechts um! drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.
Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.
Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muss, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.

Angenommen, es gäbe eine Anfangssituation (mit endlich vielen Schülern), für die der beschriebene Umdrehprozess nie endet. Dann muss es insbesondere einen Schüler S_i geben, der sich im Laufe dieses Prozesses unendlich oft dreht.
Dieser Schüler kann nicht am Rand stehen, da er dann nach höchstens einer 180°-Drehung keinen Schüler mehr anschauen und sich folglich nicht mehr drehen würde. Der Schüler S_i hat also einen linken Nachbarn S_{i-1}, dem er unendlich oft ins Gesicht schaut, da sich S_i unendlich oft dreht.
Wenn sich S_i und S_{i-1} ins Gesicht schauen, dreht sich aber auch S_{i-1} um 180° weg. Da sich S_i und S_{i-1} unendlich oft ins Gesicht schauen, muss sich also auch S_{i-1} unendlich oft drehen. Iterativ folgt, dass sich der Schüler, der ganz links am Rand steht, unendlich oft drehen muss. Wie wir bereits festgestellt haben, ist dies aber nicht möglich.

Folglich gibt es für jede (der Aufgabenstellung entsprechende) Konfiguration endlich vieler Schüler einen Zeitpunkt, ab dem sich kein Schüler mehr dreht.
Aufgabe gelöst von Kornkreis

2. Lösung:
Stehen zwei benachbarte Schüler so, dass sie sich gegenseitig anschauen, so können sie auch, anstatt sich beide um 180° zu drehen, aneinander vorbeigehen: Bei beiden Bewegungen ist die entstehende Folge von nach rechts bzw. links schauenden Schülern gleich.

Offensichtlich kann aber jeder Schüler an jedem anderen höchstens einmal vorbeilaufen. Da es nur endlich viele Schüler sind, endet der Prozess also zwangsläufig.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.34.3 III. Runde 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321231
Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.
Hinweis:
Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

Es ist also $n \in \mathbb{N}$.
Wenn $q := \sqrt{n} + \sqrt{n+4} \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $q^2 \in \mathbb{Q}$. Nun ist $q^2 = n + n + 4 + 2\sqrt{n^2 + 4n}$, also ist auch $\sqrt{n^2 + 4n} \in \mathbb{Q}$. Somit ist $n^2 + 4n$ eine Quadratzahl.
Das kleinstmögliche Quadrat wäre $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Es ist aber $2n + 1 < 4n \, \forall n \in \mathbb{N}$.
Das nächstgrößere Quadrat wäre $(n+2)^2 = n^2+4n+4 > n^2+4n$. Somit ist $\sqrt{n}+\sqrt{n+4} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten

Aufgabe 2 - 321232
Man beweise:
Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$, die durch

$$a_1 = c, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + c \qquad (k = 1, 2, 3, ...)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.
Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle $k = 1, 2, 3, ...$ die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine Periodenlänge der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$.

Wir ergänzen zunächst die Folge durch das Folgenglied $a_0 = 0$, da dies mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist und einige der folgenden Überlegungen etwas einfacher macht. Rechnet man nun für ein fest vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die ersten paar Folgenglieder a_n für $n > 0$ als Funktionen von c einmal konkret aus, nämlich

$$a_1(c) = c$$
$$a_2(c) = c^2 + c$$
$$a_3(c) = c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$a_4(c) = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$...$$

so führt dies als unmittelbare Konsequenz aus der obigen Rekursionsvorschrift dann auf eine Folge von Polynomfunktionen in c vom jeweiligen Grad 2^{n-1}, wobei der konstante Term stets fehlt. Damit eine Folge die Periodenlänge $p \in \mathbb{N}^*$ hat, reicht es offenbar

$$a_p(c) = 0$$

zu fordern, weil damit dann auch

$$a_p = a_0,\; a_{p+1} = a_1,\; a_{p+2} = a_2,...$$

gilt.

Soll p sogar die minimale, also dann kleinstmögliche Periodenlänge sein, wie dies in der Aufgabe gefordert wird, so darf c dann jedenfalls nicht auch Nullstelle der Polynomfunktionen $a_k(c)$ sein, wobei k ein "echter" (also von n verschiedener) Teiler von n ist. Ist daher p sogar eine Primzahl, wie dies hier in der Aufgabe noch vorausgesetzt wird, so müssen wir also dann nur den einzigen Fall ausschließen, dass c auch Nullstelle von $a_1(c) = c$ ist, was somit auf die Bedingung $c \neq 0$ hinausläuft.

Und ja, so eine reelle und von Null verschieden Nullstelle von $a_p(c)$ muss es hier immer geben, da nach Abspaltung des Linearfaktors c aus $a_p(c)$ ja eine Polynomfunktion von ungeradem Grad mit konstantem Term $\neq 0$ verbleibt, für welche das bekanntermaßen sicher zutrifft, womit auch diese letzte Frage dann hier noch geklärt ist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3A - 321233A
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2-x-1 \neq 0$ und $x^2+x-1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

Gelten die Voraussetzungen der Aufgabe für ein $x \in \mathbb{R}$, dann offensichtlich auch für $-x$ und durch Einsetzen in

$$2f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

erhält man

$$2f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = -5\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

also insgesamt ein lineares Gleichungssystem in $f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)$ und $f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right)$, aus dem sich insbesondere

$$f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = x - \frac{1}{x} \quad (3)$$

ergibt. Nun kann man (3) unter Zuhilfenahme der Abbildungen

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \quad (4)$$

bzw.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - \frac{1}{x} \quad (5)$$

auch in der Form

$$f(\tilde{f}(g(x))) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (6)$$

schreiben, wie man leicht nachrechnet. Da aber $g(x)$ für $x \neq 0$ alle reellen Zahlen durchläuft, muss also für alle reelle Zahlen $x \neq 1$ auch $f(\tilde{f}(x)) = x$ gelten. Andererseits gilt aber auch $\tilde{f}(\tilde{f}(x)) = x$ für alle $x \neq 1$, wie man sofort nachrechnet, womit sich wegen $f(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(\tilde{f}(x))$ ähnlich wie vorher schlussendlich

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad (7)$$

ergibt. Durch Einsetzen in (1) kann man sich schließlich noch davon überzeugen, dass dies auch tatsächlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung hier ist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3B - 321233B
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{gathered} x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (x_1 + x_2) \\ x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot (x_2 + x_3) \\ ... \\ x_{n-1} \cdot x_n = 3 \cdot (x_{n-1} + x_n) \\ x_n \cdot x_1 = 3 \cdot (x_n + x_1) \end{gathered}$$

Obiges Gleichungssystem lässt sich auch einfach umschreiben zu

$$(x_1-3)(x_2-3)=9 \qquad (x_2-3)(x_3-3)=9$$
$$...$$
$$(x_{n-1}-3)(x_n-3)=9 \qquad (x_n-3)(x_1-3)=9$$

Sehen wir uns also etwa die Lösung der ersten Gleichung

$$(x_1-3)(x_2-3)=9$$

an, so ist sofort klar, dass hier nur die Lösungspaare

$$(x_1,x_2) \in \{(4,12),(6,6),(12,4)\}$$

bestehend aus positiven ganzen Zahlen in Frage kommen. Gleiches gilt für die andere Gleichungen, wobei die Lösungen aber in der folgenden Weise "gekoppelt" sind:

Wählt man für (x_1,x_2) ein Paar (a,b) wie oben, so muss dann für die 2. Gleichung das Lösungspaar $(x_2,x_3)=(b,a)$, für die dritte Gleichung wieder $(x_3,x_4)=(a,b)$ usw. genommen werden. Speziell für ungerades n muss dann aber $a=b=6$ sein, da sich sonst für x_1 verschiedene Lösungen aus der ersten und der letzte Gleichung ergeben würden.

Zusammenfassend gilt somit, dass es für jedes $n \geq 2$ auf jeden Fall die Lösung

$$(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=(6,6,6,...,6)$$

gibt, für ein gerades $n \geq 2$ aber dann noch jeweils die zwei weiteren Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,...,x_n) \in \{(4,12,4,12,...,4,12),(12,4,12,4,...,12,4)\}$$

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 321234
Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1,a_2,...,a_n$ werde vorausgesetzt, dass jede der Zahlen $1,2,...,n$ genau einmal unter den $a_1,a_2,...,a_n$ vorkommt.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot ... \cdot(a_n-n)$$

stets eine gerade Zahl sein muss.

Das Produkt kann nur dann ungerade sein, wenn jeder einzelne der Faktoren ungerade ist. Die Faktoren (a_i-i) sind nur dann alle ungerade, wenn a_i und i verschiedene Parität haben, also z.B. a_i ungerade ist, wenn i gerade ist, oder anders herum.
Da $n=2m-1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist, gibt es in der Menge $\{1,2,3,...,n\}$ eine ungerade Zahl mehr als es gerade gibt, also $m-1$ gerade Zahlen und m ungerade Zahlen. Jedem ungeraden $i \in \{1,2,3,...,n\}$, von denen es m gibt, muss ein gerades a_i zugeordnet werden. Von denen gibt es aber nur $m-1$, also eines zu wenig, so dass auf jeden Fall immer ein Faktor dabei ist, wo zwei ungerade Zahlen voneinander abgezogen werden.
Dieser Faktor ist dann gerade, und somit ist auch das Produkt gerade.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 321235
Man beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so dass für alle reellen Zahlen $a>0$ die Ungleichung

$$a+a^2+a^3+...+a^{2n} \leq c\cdot\left(1+a^{2n+1}\right)$$

gilt.
Man beweise auch, dass es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 2n$. Wenn $a \geq 1$ ist, dann gilt $a^k \leq a^{2n+1}$ und $1 \geq a^{-k}$. Wenn $a \leq 1$ ist, dann gilt $a^k \geq a^{2n+1}$ und $1 \leq a^{-k}$.

In jedem Fall sind die Folgen a^k, a^{2n+1} bzw. $1, a^{-k}$ also unterschiedlich geordnet. Demnach gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} a^k + a^{2n+1-k} &= a^k \cdot 1 + a^{2n+1} \cdot a^{-k} \\ &\leq a^k \cdot a^{-k} + a^{2n+1} \cdot 1 \\ &= 1 + a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a + a^2 + \ldots + a^{2n} &= (a + a^{2n}) + (a^2 + a^{2n-1}) + \ldots + (a^n + a^{n+1}) \\ &\leq n \cdot (1 + a^{2n+1}). \end{aligned}$$

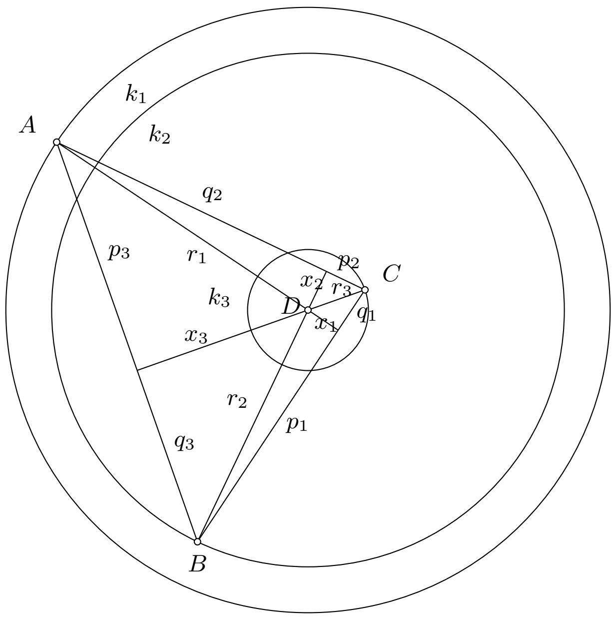
Wir können also $c = n$ wählen. Für $a = 1$ gilt sogar Gleichheit. Daher ist $c = n$ auch das gesuchte Minimum.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6 - 321236
Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$.
Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, dass A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.
Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt existiert.

Der Punkt D sei der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Es ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Das heißt, dass wenn man Geraden durch den Mittelpunkt D und die Eckpunkte legt, diese Geraden die Dreiecksseiten unter einem rechten Winkel schneiden. Warum das so sein muss, kann man sich relativ leicht klar machen:

Betrachtet man zwei Punkte als fix, z.B. A und B, dann ist die Fläche des Dreiecks gleich die Grundseite AB mal den halben Abstand des Punktes C von der Seite AB. Wenn der Punkt C nur um D im Abstand r_3 rotieren kann, ist der Abstand des Punktes C von AB genau dann maximal (und damit auch die Fläche), wenn die Verbindungslinie CD senkrecht steht auf AB. Das gleiche gilt sinngemäß auch für die anderen Punkte.



Sei nun x_3 die Verlängerung der Strecke CD bis zur Strecke AB. Dann gilt:

$$x_3^2 + p_3^2 = r_1^2 \qquad (1)$$

$$x_3^2 + q_3^2 = r_2^2 \tag{2}$$

Die zu maximierende Fläche des Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2}(x_3 + r_3)(p_3 + q_3) \tag{3}$$

Löst man (1) und (2) nach p_3 und q_3 auf und setzt in (3) ein, dann folgt:

$$A(x) = \frac{1}{2}(x_3 + r_3)\left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) \tag{4}$$

Nach x_3 ableiten und null setzen, um das Maximum zu bestimmen (den Faktor $\frac{1}{2}$ können wir gleich eliminieren durch das Nullsetzen):

$$0 = \left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) + (x_3 + r_3)\left(\frac{-x_3}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2}} + \frac{-x_3}{\sqrt{r_2^2 - x_3^2}}\right)$$

$$0 = \left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) - x_3(x_3 + r_3)\frac{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}$$

$$0 = 1 - \frac{x_3(x_3 + r_3)}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}$$

$$x_3(x_3 + r_3) = \sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}$$

$$x_3^4 + 2r_3x_3^3 + r_3^2x_3^2 = (r_1^2 - x_3^2)(r_2^2 - x_3^2)$$

$$x_3^4 + 2r_3x_3^3 + r_3^2x_3^2 = x_3^4 - (r_1^2 + r_2^2)x_3^2 + r_1^2r_2^2$$

$$2r_3x_3^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)x_3^2 - r_1^2r_2^2 = 0$$

Damit wären wir bei einer kubischen Gleichung für x_3. Wir setzen an dieser Stelle die Zahlenwerte ein, und erhalten:

$$2x_3^3 + 44x_3^2 - 450 = 0$$

$$x_3^3 + 22x_3^2 - 225 = 0$$

Man kann und muss die Lösung $x_3 = 3$ erraten und kann die Gleichung dann faktorisieren:

$$(x_3 - 3)(x_3^2 + 25x_3 + 75) = 0$$

Die weiteren Lösungen des quadratischen Terms kommen nicht in Frage, weil sie beide negativ sind. Mit $x_3 = 3$ erhalten wir außerdem

$$p_3 = \sqrt{25 - 9} = 4$$

und

$$q_3 = \sqrt{18 - 9} = 3$$

Damit erhalten wir als maximale Dreiecksfläche

$$A_{max} = \frac{1}{2}(3 + 1)(3 + 4) = 14$$

Zusatz zur allgemeinen Lösung: Multipliziert man obige allgemeine kubische Gleichung mit r_3^2, erhält man:

$$2r_3^3x_3^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)r_3^2x_3^2 - r_1^2r_2^2r_3^2 = 0$$

Setzt man nun $x_3r_3 = c$, dann folgt:

$$2c^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)c^2 - r_1^2r_2^2r_3^2 = 0$$

Wie man erkennt, ist diese Gleichung symmetrisch bezüglich r_1, r_2 und r_3. Daher ist c eine Invariante, und es gilt

$$x_1r_1 = x_2r_2 = x_3r_3 = c$$

Die Lösung der kubischen Gleichung führt auf den Casus irreducibilis, so dass man c nicht als Summe von Wurzeln und dritten Wurzeln darstellen kann, sondern nur mit dem Kosinus von Winkeldritteln. Aufgrund der bekannten Tatsache, dass die Dreiteilung eines Winkels nicht mit elementaren Konstruktionsmitteln durchführbar ist, ist auch das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt nicht elementar konstruierbar. Setzt man

$$r_q = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}$$

$$r_m = (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{3}}$$

als quadratischen und geometrischen Mittelwert der Radien, dann lautet die kubischen Gleichung für die Invariante c:

$$2c^3 + 3r_q^2 c^2 - r_m^6 = 0$$

Die Lösung der kubischen Gleichung lautet dann (vollständiger Rechenweg wird hier nicht gezeigt):

$$c = r_q^2 \left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\arccos\left(2\left(\frac{r_m}{r_q}\right)^6 - 1\right)\right) - \tfrac{1}{2}\right]$$

Um eine symmetrische Formel für die Dreiecksfläche zu finden, benutzen wir folgenden Zusammenhang:

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}(A_{BDCA} + A_{CDAB} + A_{ADBC})$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(r_1(p_1 + q_1) + r_2(p_2 + q_2) + r_3(p_3 + q_3)\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(r_1\sqrt{r_2^2 - x_1^2} + r_1\sqrt{r_3^2 - x_1^2} + r_2\sqrt{r_1^2 - x_2^2} + r_2\sqrt{r_3^2 - x_2^2} + r_3\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + r_3\sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{r_1^2 r_2^2 - c^2} + \sqrt{r_1^2 r_3^2 - c^2} + \sqrt{r_1^2 r_2^2 - c^2} + \sqrt{r_2^2 r_3^2 - c^2} + \sqrt{r_1^2 r_3^2 - c^2} + \sqrt{r_2^2 r_3^2 - c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1^2 r_2^2 - c^2} + \sqrt{r_1^2 r_3^2 - c^2} + \sqrt{r_2^2 r_3^2 - c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\left(\frac{r_m^3}{r_i}\right)^2 - c^2}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
Der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise k_1, k_2, k_3 sei M für jedes Dreieck ABC mit A auf k_1, B auf k_2, C auf k_3 (*) seien AD, BE, CF die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen.

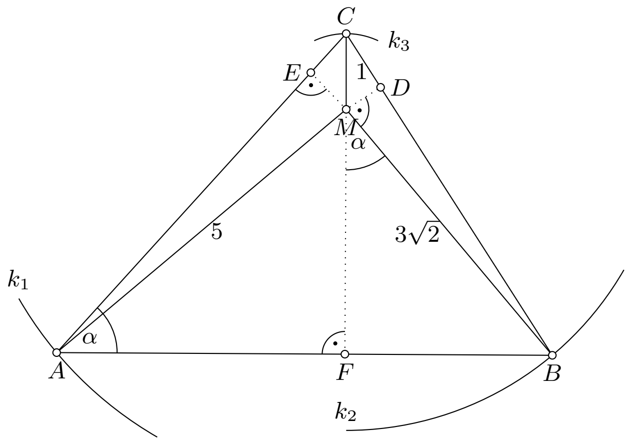
I. Liegt M nicht auf der Strecke CF, so gibt es auf k_3 einen Punkt C', für den ABC' größeren Flächeninhalt als ABC hat.

Beweis:
Die Parallele durch M zur Geraden g durch A, B schneide die Gerade h durch C, F in Q; die Parallele m durch M zu h schneide g in P. Unter den Schnittpunkten von m mit k_3 kann man C' so wählen, dass M der Strecke $C'P$ angehört; damit wird

$$C'P = C'M + MP = r_3 + MP = CM + QF$$

Falls nun M nicht auf h liegt, ist CQM ein (eventuell mit $C = Q$ entartetes) bei Q rechtwinkliges Dreieck, und es folgt $CM > CQ$, also $C'P > CQ + QF \geq CF$.
Liegt aber M auf h, d.h., ist $M = Q$, so folgt wegen der Lage von M außerhalb CF, dass $CM + MF > CF$ und damit ebenfalls $C'P > CF$ gilt. Also hat ABC' größere auf AB senkrechte Höhe und folglich größeren Flächeninhalt als ABC.

Entsprechend kann man schließen, wenn M nicht auf AC oder nicht auf BE liegt. Also gilt:
Wenn nicht alle drei Höhen AD, BE, CF durch M gehen, d.h., wenn M nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt und zugleich sein Höhenschnittpunkt ist, so gibt es ein Dreieck, dessen Ecken die zu (*) entsprechende Bedingung erfüllen und das größeren Flächeninhalt als ABC hat.



II. Nach dem im Hinweis genannten Sachverhalt existiert unter allen Dreiecken mit (*) eines mit größtmöglichen Flächeninhalt. Wegen I. folgt daher:
Wenn der Flächeninhalt eines Dreiecks mit (*), in dessen Innerem der Punkt M zugleich der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist, durch dies Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, so ist er der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt.

Wenn nun ein Dreieck ABC diese Voraussetzungen erfüllt (Abbildung), so folgt:
Die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen AD, BE bzw. CF schneiden sich in M, und es gilt $MA = 5$, $MB = 3\sqrt{2}$, $MC = 1$. Mit $MF = x$ gilt nach dem Satz des Pythagoras $AF = \sqrt{25 - x^2}$ und $BF = \sqrt{18 - x^2}$.
Mit $\triangle BAS = \alpha$ gilt ferner $\triangle FMB = \triangle CME = 90° - \angle ACF = \alpha$; damit ergibt sich $triangle AFC \sim \triangle MFB$, also

$$\begin{aligned} (1+x) : \sqrt{25-x^2} &= \sqrt{18-x^2} : x \\ x^2(1+x)^2 &= (25-x^2)(18-x^2) \\ x^4 + 2x^3 + x^2 &= 450 - 43x^2 + x^4 \\ x^3 + 22x^2 - 225 &= 0 \\ (x-3)(x^2+25x+75) &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $x > 0$, also $x^2 + 25x + 75 > 0$ folgt $x = 3$ und damit weiter $AB = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{18 - x^2} = 7$, $CF = 1 + x = 4$.
Also ist durch die genannten Voraussetzungen eindeutig der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bestimmt und somit der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt; er beträgt $\frac{1}{2} AB \cdot CF = 14$.

Übernommen von [5]

9.34.4 IV. Runde 1992, Klasse 12

Aufgabe 1 - 321241
Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt. Beweisen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

Drehungen werden im Folgenden als verschieden bezeichnet, wenn die zugehörigen Drehwinkel sich nicht um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Für jeden der gelben Punkte gibt es genau 16 verschiedene Drehungen, die den gelben Punkt in einen gelben Punkt überführen.
Eine dieser Drehungen ist dabei immer die Identität.
Folglich gibt es maximal $16 \cdot 16 - 15 = 241$ verschiedene Drehungen, sodass es einen gelben Punkt gibt, der durch eine dieser Drehungen auf einen gelben Punkt abgebildet wird. Da es aber 250 verschiedene Drehungen gibt, die das 250-Eck in sich selbst überführen, müssen neun dieser 250 Drehungen jeden gelben Punkt in einen nicht-gelben, d.h. blauen Punkt überführen. Insbesondere ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 321242
Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Lemma 1: Wenn n eine positive Kubikzahl ist, kann man den Würfel immer in n Würfel zerlegen. (offensichtlich, man nehme dazu gleich große Würfel und ordne sie schichtweise quadratisch an, mit den Seitenflächen parallel zu denen des großen Würfels)

Bemerkung 1: Überdies kann man in so einer schichtweisen quadratischen Zerlegung in n gleichgroße Würfel eine Anzahl $k < n$ von Würfeln zusammenfassen, wenn k eine positive Kubikzahl ist (offensichtlich). Damit ergibt sich dann eine Zerlegung in $n - k + 1$ Würfel. Dies werden wir später noch benutzen.

Lemma 2: Wenn man eine Zerlegung in n Würfel hat, so kann man immer eine Zerlegung in $n+7$ Würfel erzielen. Beweis: Zerlege einen der Teilwürfel in 8 Würfel (was nach Lemma 1 geht), damit ist die Anzahl der Teilwürfel um 7 gestiegen.

Bemerkung 2: Daraus folgt, dass die Behauptung der Aufgabenstellung gezeigt ist, wenn man für jedes $r \in \{0,...,6\}$ eine Zerlegung in $n \leq 100$ Würfel hat, mit $n \equiv r \mod 7$. Wende dazu iterativ Lemma 2 ein.

Die folgenden 7er-Reste von n für Zerlegungen in $n \leq 100$ Würfel können einfach erzielt werden (links steht der 7er-Rest, daneben n, zusammen mit der Rechenvorschrift, die der Zerlegung entspricht):

Rest 1: $1 = 1^3$; Rest 6: $27 = 3^3$

Um die anderen 7er-Reste zu erhalten, zerlegen wir den Würfel in 6^3 gleichgroße Teilwürfel und fasse einige dieser jeweils zu einem größeren Würfel zusammen (siehe Bemerkung 1).
Wir betrachten fünf verschiedene Möglichkeiten, bei denen wir jeweils 2, 3,..., 6 27er-Würfel zusammenfassen. Damit erhalten wir Zerlegungen in

$$6^3 - 2 \cdot 27 + 2, \quad 6^3 - 3 \cdot 27 + 3, \quad ..., \quad 6^3 - 6 \cdot 27 + 6$$

Würfel. Da sowohl 27 als auch 6^3 den 7er-Rest -1 haben, erhalten wir damit die 7er-Reste 3, 5, 0, 2, 4. Wir müssen nur noch die Anzahl der Würfel weiter verkleinern, um unter 100 zu kommen, ohne den 7er-Rest zu ändern.
Dies geht, indem wir weiter einige 8er-Würfel zusammenfassen, wodurch sich die Gesamtzahl der Würfel immer jeweils um 7 verringert. Konkret erhalten wir die folgenden Zerlegungen (kodiert mithilfe der Rechenvorschrift; man überzeugt sich leicht, dass die angegebenen Zusammenfassungen tatsächlich möglich sind):

Rest 3: $59 = 6^3 - 2 \cdot 27 + 2 - 15 \cdot 8 + 15$,
Rest 5: $61 = 6^3 - 3 \cdot 27 + 3 - 11 \cdot 8 + 11$,
Rest 0: $49 = 6^3 - 4 \cdot 27 + 4 - 9 \cdot 8 + 9$,

Rest 2: $51 = 6^3 - 5 \cdot 27 + 5 - 5 \cdot 8 + 5$, Rest 4: $39 = 6^3 - 6 \cdot 27 + 6 - 3 \cdot 8 + 3$.

Da die größten dieser Zahlen, 59 und 61, 7er-Rest 3 bzw. 5 haben, und alle anderen n kleiner als 55 (mit 7er-Rest 6) sind, können wir (nach Bemerkung 2) für jedes $n \geq 55$ eine Zerlegung des Würfels in n Teilwürfel finden. Insbesondere folgt die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 3 - 321243
Von 1993 Punkten $P_1, ..., P_{1993}$ werde vorausgesetzt, dass keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, dass jeder der 1993 Punkte P_i mit mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Stecken verbunden ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Wir zeigen eine allgemeinere Aussage:
Es seien k,m positive natürliche Zahlen. Gegeben seien $n := km + 1$ Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Von jedem dieser Punkte seien die Verbindungsstrecken zu mindestens $d := (k - 1)m + 1$ anderen dieser Punkte eingezeichnet. Dann gibt es $k + 1$ Punkte, von denen jeder mit allen anderen der $k + 1$ Punkte verbunden ist.

Beweis durch Induktion nach k:

Induktionsanfang:
Für $k = 1$ ist die Aussage wahr, denn es ist dann $d = (k - 1)m + 1 = 1$, also gibt es mindestens $2 = k + 1$ Punkte, die miteinander verbunden sind.

Induktionsschluss:
Sei nun $k \geq 2$ und sei A irgendeiner der $n = km + 1$ Punkte. Es sei N_A die Menge aller Punkte, mit denen A verbunden ist. Nach Voraussetzung gilt $|N_A| \geq d$. Es gibt daher eine Teilmenge $N \subseteq N_A$ mit genau $d = (k - 1)m + 1$ Elementen.
Es gibt genau $n - d = m$ Punkte, die nicht in N enthalten sind. Daher muss jeder Punkt aus N mit mindestens $d - m = (k - 2)m + 1$ anderen Punkten aus N verbunden sein.
Nach Induktionsannahme gibt es somit k Punkte aus N, die alle paarweise miteinander verbunden sind.
Da jeder dieser Punkte auch mit A verbunden ist, folgt die Behauptung.

Lösung der Aufgabe:
Wegen $1993 = 6 \cdot 332 + 1$ und $1661 = 5 \cdot 332 + 1$ können wir mit $k = 6$ und $m = 332$ die Behauptung folgern.

Bemerkung:
Wir haben sogar stärker gezeigt, dass es zu jedem der 1993 Punkte sechs andere Punkte gibt, so dass jeder dieser 7 Punkte mit jedem anderen der 7 Punkte verbunden ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 4 - 321244
Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$a + b + c = 2 \qquad ; \qquad ab + ac + bc = 1$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq b \leq \frac{4}{3}; \qquad 0 \leq c \leq \frac{4}{3}$$

Aufgrund der Symmetrie zwischen a, b und c reicht es, die Extremwerte nur für eine der drei Variablen zu berechnen. Sie gelten dann für die anderen beiden Variablen in gleicher Weise. Es ist

$$c = 2 - (a + b)$$

Also:

$$ab + (a+b)(2-(a+b)) = 1$$

$$ab + 2a + 2b - a^2 - 2ab - b^2 = 1$$

$$(1) \qquad 2a + 2b - a^2 - ab - b^2 = 1$$

(Dies ist eine Kegelschnittgleichung, konkret eine Ellipse, wenn man a und b als zwei voneinander abhängige Größen betrachtet und in einem Koordinatensystem darstellt). Die Extremwerte für a erhält man, indem man die Gleichung (1) implizit nach b ableitet und gleich null setzt:

$$2 - a - 2b = 0$$

$$b = 1 - \tfrac{1}{2}a$$

Dies wieder in (1) eingesetzt:

$$2a + 2 - a - a^2 - a(1 - \tfrac{1}{2}a) - 1 + a - \tfrac{1}{4}a^2 = 1$$

$$a - \tfrac{3}{4}a^2 = 0$$

Daraus folgt offenkundig, dass die beiden Extremwerte $a = 0$ und $a = \frac{4}{3}$ sind, so dass gilt:

$$0 \leq a,b,c \leq \tfrac{4}{3}$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
Nach Voraussetzung ist

$$b + c = 2 - a$$

und

$$bc = 1 - a(b+c) = 1 - a(2-a) = 1 - 2a + a^2 = (a-1)^2.$$

Nach Vieta hat das quadratische Polynom $x^2 - (b+c)x + bc$ die Nullstellen $b,c \in \mathbb{R}$. Daher ist die Diskriminante dieses Polynom nichtnegativ, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (b+c)^2 - 4bc \\ &= (2-a)^2 - 4(a-1)^2 \\ &= (2-a-2(a-1))(2-a+2(a-1)) \\ &= a(4-3a) \\ &= -\frac{1}{3}a\left(a - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Also folgt, dass $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. Die Abschätzungen für b und c folgen analog.

Aufgabe gelöst von Nuramon

3. Lösung:
Zunächst folgt aus den gegebenen Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 4 - 2 = 2$$

sowie

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = (2-c)^2 - (2-c^2) = 2(c^2 - 2c + 1) = 2(c-1)^2$$

insgesamt also

$$ab = (c-1)^2 \quad \text{und analog} \quad ac = (b-1)^2,\ bc = (a-1)^2$$

Da damit a,b,c nicht ein unterschiedliches Vorzeichen haben können und andererseits auch $a+b+c = 2 > 0$ gilt, folgt daraus zunächst einmal die Abschätzung

$$a,b,c \geq 0$$

von a,b,c nach unten. Die entsprechende Abschätzung nach oben ergibt sich schließlich aus

$$0 \leq (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (2-c)^2 - 4(c-1)^2 = -3c^2 + 4c = c(4-3c)$$

Da wir nun schon wissen, dass $c \geq 0$ ist, gilt damit auch $4 - 3c \geq 0$, also $c \leq \frac{4}{3}$, und somit insgesamt und zusammen mit den anlogen Beziehungen für a und b tatsächlich

$$a,b,c \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$$

wie behauptet.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 321245
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Die drei Seitenlängen seien a, b und c mit $0 < a \leq b \leq c$. Die längste Seite sei c. Aufgrund der Dreiecksungleichung $a + b > c$ gilt $c_{max} = \left\lfloor \frac{1993}{2} \right\rfloor = 996$. Aufgrund der Sortierung nach der Größe gilt aber auch $c_{min} = \left\lceil \frac{1993}{3} \right\rceil = 665$, denn dann ist $a = b = 664$. Daher gilt:

$$665 \leq c \leq 996$$

Es gilt weiter:

$$a + b = 1993 - c$$

Um die Anzahl der Dreiecke für ein gegebenes c zu bestimmen, müssen wir jeweils das minimale und maximale a herausfinden. a ist minimal, wenn b maximal ist, und das maximale b ist gleich c. Daher ist

$$a_{min} = 1993 - 2c$$

a ist maximal, wenn es gleich b ist, oder um 1 kleiner als b, wenn $a + b$ ungerade ist. Also gilt:

$$a_{max} = \left\lfloor \frac{1993 - c}{2} \right\rfloor$$

Wir unterscheiden daher die 2 Fälle, ob c gerade oder ungerade ist. Die Anzahl der jeweiligen Dreiecke sei A_c.
1. $c = 2m$ mit $m = 333...498$. Dann ist

$$a_{min} = 1993 - 4m$$

$$a_{max} = 996 - m$$

$$A_{2m} = 996 - m - (1993 - 4m) + 1 = 3m - 996$$

2. $c = 2m + 1$ mit $m = 332...497$. Dann ist

$$a_{min} = 1991 - 4m$$

$$a_{max} = 996 - m$$

$$A_{2m+1} = 996 - m - (1991 - 4m) + 1 = 3m - 994$$

Die Gesamtanzahl an nicht kongruenten Dreiecken ist dann

$$A = \sum_{m=333}^{498} (3m - 996) + \sum_{m=332}^{497} (3m - 994)$$

$$A = \sum_{m=1}^{166} (3m) + \sum_{m=1}^{166} (3m - 1)$$

$$A = 2 \cdot 3 \sum_{m=1}^{166} m - 166$$

$$A = 3 \cdot 166 \cdot 167 - 166 = 166 \cdot (3 \cdot 167 - 1) = 166 \cdot 500$$

$$A = 83000$$

Es gibt daher exakt 83000 nicht kongruente Dreiecke.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2.Lösung:
Bekanntlich sind drei positive reelle Zahlen a,b,c genau dann die Seiten eines Dreiecks, wenn es positive reelle Zahlen x,y,z gibt mit $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ (x,y,z sind die Längen der Abschnitte, in die der Inkreis die Dreiecksseiten zerlegt).
Ist $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = x + y + z$ der halbe Umfang des Dreiecks, so gilt $x = s - b, y = s - c, z = s - a$. Daran sieht man, dass a,b,c ganzzahlig sind, genau dann, wenn entweder x,y,z ganzzahlig sind oder $x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}$ ganzzahlig sind.

In der Aufgabe sind Dreiecke gesucht mit $a+b+c = 1993$, also $x+y+z = \frac{1993}{2}$. Da a,b,c ganzzahlig sein sollen, müssen nach obiger Bemerkung die Zahlen $x' := x - \frac{1}{2}, y' := x - \frac{1}{2}, z' := z - \frac{1}{2}$ natürliche Zahlen sein.

Damit entspricht die Anzahl aller Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Umfang 1993 der Anzahl der Lösungstripel $(x',y',z') \in \mathbb{N}^3$ mit $x' + y' + z' = \frac{1993}{2} - \frac{3}{2} = 995$.
Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass diese Anzahl gleich $\binom{995+2}{2}$ ist.

Dabei sind kongruente Dreiecke aber noch mehrfach gezählt. Zwei Tripel $(x'_1,y'_1,z'_1), (x'_2,y'_2,z'_2)$ entsprechen kongruenten Dreiecken, genau dann, wenn $\{x'_1,y'_1,z'_1\} = \{x'_2,y'_2,z'_2\}$ gilt.
Da 995 nicht durch 3 teilbar ist, gibt es kein Tripel (x',y',z') mit $x' = y' = z'$.

Die Anzahl der Tripel (x',y',z'), bei denen zwei der drei Variablen gleich sind (das entspricht den gleichschenkligen Dreiecken), bestimmen wir, indem wir o.B.d.A. annehmen, dass $y' = z'$ und dann die Anzahl der Lösungspaare $(x',y') \in \mathbb{N}^2$ von $x' + 2y' = 995$ bestimmen.
y' kann in dieser Gleichung nur die Werte $0,1,2,\dots,\frac{994}{2} = 497$ annehmen und zu jedem solchen Wert gibt es genau ein passendes x'. Also gibt es genau 498 gleichschenklige Dreiecke mit den gesuchten Eigenschaften.

Diese gleichschenkligen Dreiecke wurden in der oben bestimmten Anzahl $\binom{995+2}{2}$ jeweils dreifach gezählt (je einmal als $(x',y',y'), (y',x',y')$ und (y',y',x')). Jedes Dreieck mit drei paarweise verschiedenen Seitenlängen wurde sechsfach gezählt.
Insgesamt finden wir damit, dass die in der Aufgabenstellung gesuchte maximale Anzahl nichtkongruenter Dreiecke gleich

$$\frac{1}{6}\left(\binom{995+2}{2} - 3 \cdot 498\right) + 498 = 83000$$

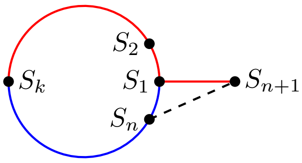
ist.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6A - 321246A
Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt.
Von n Städten $S_1, ..., S_n$ werde vorausgesetzt, dass zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen benutzbare) Verbindung besteht und dass diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, dass es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muss, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n. Für $n = 3$ ist die Aussage klar.

Betrachten wir also $n+1$ Städte $S_1, \dots, S_{n+1}$, so dass zwischen je zwei dieser Städte jeweils entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung besteht.
Per Induktionsannahme gibt es eine Bus-Bahn-Rundreise durch die Städte $S_1, \dots, S_n$, bei der man höchstens einmal das Verkehrsmittel wechseln muss.
O.B.d.A. sei diese dadurch gegeben, dass man bei S_1 startet und die Städte $S_2, S_3, \dots, S_k$ in dieser Reihenfolge mit dem Bus (rot) besucht und anschließend von S_k mit der Bahn (blau) über $S_{k+1}, S_{k+2}, \dots, S_n$ zurück nach S_1 fährt.
Wir nehmen außerdem o.B.d.A. an, dass zwischen S_1 und S_{n+1} eine Busverbindung besteht. (Falls zwischen S_1 und S_{n+1} eine Bahnverbindung besteht, so vertausche man im Beweis die Rollen von S_n und S_2.)



Falls zwischen S_n und S_{n+1} ein Bus fährt, so ist $S_n \to S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \dots \to S_k \to \dots \to S_n$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Falls zwischen S_n und S_{n+1} die Bahn fährt, so ist $S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \dots \to S_k \to \dots \to S_n \to S_{n+1}$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6B - 321246B
Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen:
f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.
Man beweise:
Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.

Wenn x,y reelle Zahlen sind mit $f(x) = f(y)$, dann folgt $x = f(f(f(x))) = f(f(f(y))) = y$. Also ist f injektiv.
Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die injektiv ist, muss nach Zwischenwertsatz notwendig streng monoton sein.

Angenommen f wäre streng monoton fallend. Aus $0 < 1$ folgte dann $f(0) > f(1)$ und somit $f(f(0)) < f(f(1))$ und schließlich $0 = f(f(f(0))) > f(f(f(1))) = 1$, was offenbar falsch ist.

Daher muss f streng monoton wachsend sein. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wäre $x < f(x)$, so wäre auch $f(x) < f(f(x))$ und damit $f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$. Das führt zum Widerspruch $x < f(x) < f(f(x)) < x$. Analog kann auch nicht $x > f(x)$ gelten.
Damit folgt $f(x) = x$, also die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Nuramon

9.35 XXXIII. Olympiade 1993

9.35.1 I. Runde 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331211
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Zahl n ist zehnstellig. Für die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung, von links nach rechts mit a_0, a_1, ..., a_9 bezeichnet, gilt: a_0 stimmt mit der Anzahl der Nullen, a_1 mit der Anzahl der Einsen, ..., a_9 mit der Anzahl der Neunen in der Dezimaldarstellung von n überein.

Wenn für eine natürliche Zahl n mit Ziffern $a_0, ..., a_9$ die Bedingungen erfüllt sind, so folgt:

Addiert man die einzelnen Anzahlen $a_0, ..., a_9$, so ergibt sich die Anzahl 10 aller Ziffern von n; d.h., es gilt

$$a_0 + ... + a_9 = 10 \qquad (1)$$

Da n zehnstellig ist, ist die Anfangsziffer, die auch mit k bezeichnet sei, nicht 0:

$$a_0 = k \geq 1 \qquad (2)$$

Die k Ziffern, die 0 lauten, befinden sich also unter den Ziffern $a_1, ..., a_9$; im einzelnen gilt:
Genau k der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind gleich 0,
genau $9 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind positiv. (3)

Aus (1) und (2) folgt: Die Summe der Ziffern $a_1, ..., a_9$ ist $10 - k$ (4)

Wenn, wie hier in (3),(4) gefunden, die Summe positiver ganzer Zahlen genau um 1 größer ist als ihre Anzahl, so folgt für sie:
Genau $8 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lauten 1,
genau eine der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lautet 2. (5)

Wäre $a_0 = 1$ oder $a_0 = 2$, so gäbe es hiernach unter allen a_ν entweder eine Null, $9 - k = 8$ Einsen und eine Zwei oder zwei Nullen, $8 - k = 6$ Einsen und zwei Zweien. (6)

In beiden Fällen wären mehr als die drei Ziffern a_0, a_1, a_2 Einsen, also auch eine weitere Ziffer a_p mit $p \geq 3$. Das aber würde besagen: Es käme auch die Ziffer p mit der Anzahl 1 vor. Da jedoch nach (6) alle 10 Ziffern von n bereits Null, Eins oder Zwei lauten, ist das ein Widerspruch.

Daher und wegen (2) muss $a_0 \geq 3$ sein, und die in (5) genannten Anzahlen $8 - k$ bzw. 1 von Ziffern 1 bzw. 2 unter den $a_1, ..., a_9$ sind bereits diese Anzahlen unter allen a_ν. Zusammen mit der Anzahl k der Ziffern 0 ergibt das die Anzahl 9 für Ziffern 0, 1 und 2. Also kommt noch genau eine Ziffer größer als 2 unter den a_ν vor; das muss folglich eben die Ziffer $a_0 = k$ sein. Diese Angabe wiederum besagt: Es gilt $a_k = 1$.

Da, wie eben zu (5) bemerkt, genau eine der Ziffern 2 lautet, also $a_2 = 1$ gilt, ist die Anzahl a_1 der Einsen positiv. Damit sind bereits vier positive a_ν nachgewiesen; ihre Summe ist $a_0 + a_1 + a_2 + ak = k + (8 - k) + 1 + 1 = 10$.

Wegen (1) müssen die übrigen sechs $a_\nu = 0$ sein; damit ist als Anzahl der Nullen $a_0 = 6$ ermittelt, und insgesamt hat sich ergeben: n muss die Zahl 6210001000 sein.

In der Tat hat die Dezimaldarstellung dieser Zahl jeweils genau 6 Nullen, 2 Einsen, eine Zwei, eine Sechs und keine der Ziffern Drei, Vier, Fünf, Sieben, Acht, Neun. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

Übernommen von [5]

Aufgabe 2 - 331212
Zeigen Sie, dass sich jede positive ganze Zahl z in der Form

$$z = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_n \cdot n^2$$

darstellen lässt, wobei n eine positive ganze Zahl ist und jeder Koeffizient a_1, a_2, ..., a_n eine der Zahlen 0, 1, -1 ist!

Es gibt z.B. die Darstellungen

$$1 = 1 \cdot 1^2, \quad 2 = (-1) \cdot 1^2 + (-1) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2$$

für ungerade $z = 2k + 1$ ($k = 1$ ganzzahlig) wegen $z = (k + 1)^2 - k^2$ die Darstellung mit

$$a_k = -1, \quad a_{k+1} = 1 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq k,k + 1)$$

sowie für gerade $z = 2k$ ($k \geq 2$ ganzzahlig) wegen $z = (k + 1)^2 - k^2 - 1$ die Darstellung mit

$$a_1 = -1, \quad a_k = -1, \quad a_{k+1} = 0 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq 1,k,k + 1)$$

Übernommen von [5]

Aufgabe 3 - 331213
In einem Schönheitswettbewerb für Pudel stellen sich Asta, Benno, Cäsar und Dolly einer Jury aus vier Mitgliedern. Jedes Jurymitglied stimmt für einen der Hunde durch Heben eines Kärtchens mit dem Anfangsbuchstaben des Hundenamens. Als Regel zur Auswertung dieses Abstimmungsergebnisses wurde festgelegt: Kommen eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vor, so gelten sie als qualifiziert. Tritt aber der Fall ein, dass in dem Abstimmungsergebnis nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, so wird eine Zusatzregelung getroffen (z.B. eine erneute Abstimmung angesetzt).

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Abstimmungsergebnisse, die zu diesem letztgenannten Fall führen! Dabei gelten Abstimmungsergebnisse genau dann als einander gleich, wenn sie nicht nur in den Stimmenzahlen der Hunde, sondern auch darin übereinstimmen, welche Jurymitglieder für die betreffenden Hunde gestimmt haben. Beispielsweise gelten die Abstimmungsergebnisse $AABC$ und $CABA$ als voneinander verschieden.

Für jedes Abstimmungsergebnis gilt genau eine der folgenden fünf Aussagen:

(1) Ein Hund erhält alle vier Stimmen.
(2) Ein Hund erhält drei Stimmen, ein zweiter Hund eine Stimme.
(3) Zwei Hunde erhalten je zwei Stimmen.
(4) Ein Hund erhält zwei Stimmen, zwei weitere Hunde erhalten je eine Stimme.
(5) Jeder Hund erhält eine Stimme.

Der Fall, dass nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, tritt genau dann ein, wenn eine der Aussagen (l), (4), (5) gilt.

Gilt (1), so ist das Abstimmungsergebnis durch Angabe des Hundes, der vier Stimmen erhielt, eindeutig festgelegt. Daher gibt es genau 4 Abstimmungsergebnisse mit (1).

Gilt (4), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig festgelegt durch

(a) Angabe der beiden Hunde mit je genau einer Stimme (hierfür gibt es genau $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten),
(b) Angabe der Jurymitglieder, die diese Hunde wählten (je genau $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten),
(c) Angabe desjenigen der beiden anderen Hunde, der zwei Stimmen erhielt (je genau 2 Möglichkeiten).

Also gibt es genau $6 \cdot 12 \cdot 2 = 144$ Abstimmungsergebnisse mit (4).

Gilt (5), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig durch Angabe der Zuordnung zwischen den Jurymitgliedern und den von ihnen gewählten Hunden festgelegt (genau $4! = 24$ Möglichkeiten). Der Fall, dass eine Zusatzregelung erforderlich wird, tritt daher bei genau $4 + 144 + 24 = 172$ Abstimmungsergebnissen ein.

Anmerkung: Dieser hohe Prozentsatz (ca. 67,2 % von $4^4 = 256$ möglichen Abstimmungsergebnissen) zeigt, dass die Auswertungsregel wenig effektiv ist.

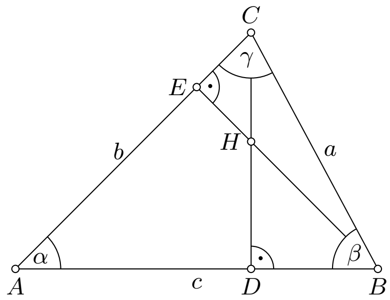
Anregung: Ermitteln Sie die gesuchte Anzahl auch mit einem Computerprogramm, das alle Abstimmungsergebnisse "durchprobiert"!

Übernommen von [5]

Aufgabe 4 - 331214
Man beweise, dass für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:

Sind a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkelgrößen, ist F der Flächeninhalt, ist D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe und ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so gilt für die Streckenlängen $\overline{CH}$ und $\overline{HD}$ die Gleichung

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$



Der Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe sei E. Da das Dreieck spitzwinklig ist, liegen D, E, H im Innern der Strecken AB, AC bzw. CD (siehe Abbildung). Es gilt

$$EC = a \cdot \cos\gamma \tag{1}$$
$$AD = b \cdot \cos\alpha \tag{2}$$
$$BD = a \cdot \cos\beta \tag{3}$$
$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

Da der Winkel $\angle DHE$ die Größe $180° - \alpha$ und mithin der Winkel $\angle CHE$ die Größe α hat, sowie wegen (1) und (4) folgt

$$CH = \frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma}{2F} \tag{5}$$

Die Dreiecke HDB und ADC sind einander ähnlich, da sie in den Winkelgrößen α und $90°$ übereinstimmen. Daher gilt $HD : BD = AC : CD$, also

$$HD = \frac{AD \cdot BD}{CD}$$

Wegen $F = \frac{1}{2} c \cdot CD$, also $CD = \frac{2F}{c}$, folgt hieraus und aus (2),(3)

$$HD = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{2F} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt, wie behauptet,

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

Übernommen von [5]

9.35.2 II. Runde 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331221
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$2-x+y=\sqrt{18+x-y} \qquad (1)$$
$$\sqrt{1+x+y}+\sqrt{2+x-y}=5 \qquad (2)$$

Durch Quadrieren von (1) erhält man zunächst

$$(x-y)^2-4(x-y)+4=18+x-y$$

und durch eine einfache Umformung daraus weiter

$$(x-y)^2-5(x-y)-14=(x-y+2)(x-y-7)=0$$

Von den beiden Möglichkeiten

$$x-y=-2 \quad \text{bzw.} \quad x-y=7$$

ist aber nur

$$x-y=-2 \quad (3)$$

auch wirklich eine Lösung von (1), wie man durch Einsetzen sofort feststellt, die zweite ist dagegen eine durch das Quadrieren entstandene Scheinlösung, denn sie würde auf den Widerspruch $-5=\sqrt{25}$ führen. Durch Einsetzen von $x-y=-2$ vereinfacht sich (2) nun sofort zu

$$\sqrt{1+x+y}=5 \quad \text{bzw.} \quad x+y=24 \quad (4)$$

woraus man in Verbindung mit (3) dann unmittelbar

$$x=11,\ y=13$$

erhält, was auch tatsächlich das Gleichungssystem (1) und (2) hier löst.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 331222
a) Beweisen, Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2-9}{4^2-4}\cdot\frac{5^2-9}{5^2-4}\cdot ... \cdot\frac{n^2-9}{n^2-4}>\frac{1}{6}$$

gilt!
b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne dass damit aus der in a) zu beweisenden Aussage eine falsche Aussage entsteht?

Aufgabenteil a)

$$\frac{(4-3)(5-3)(6-3)...(n-3)}{(4-2)(5-2)(6-2)...(n-2)}\cdot\frac{(4+3)(5+3)(6+3)...(n+3)}{(4+2)(5+2)(6+2)...(n+2)}=$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3...(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4...(n-2)}\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9...(n+3)}{6\cdot 7\cdot 8...(n+2)}=\frac{n+3}{6(n-2)}>\frac{1}{6}$$

Aufgabenteil b)

$$\frac{n+3}{6(n-2)}>0{,}1667$$
$$n+3>1{,}0002(n-2)$$
$$0{,}9996>0{,}0002\cdot n$$

$$n < 4998$$

Für die Zahl 0,1667 anstatt $\frac{1}{6}$ ist die Ungleichung nur erfüllt für $n < 4998$, weshalb die Ungleichung dann nicht mehr für alle n erfüllt ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 331223
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen m,n, für die $1994^m - 1993^n$ eine Quadratzahl ist.

Sei

$$1994^m - 1993^n = k^2 \quad (m,n \in \mathbb{N}^*,\, k \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Indem wir diese Gleichung mod 4 betrachten, wird daraus die Kongruenz

$$2^m - 1 \equiv k^2 \mod 4$$

Hier liegt für $m > 1$ die linke Seite der Kongruenz in der Restklasse 3 mod 4, die rechte aber in der Restklasse von 0 oder 1 mod 4, was also dann nur den Schluss zulässt, dass $m = 1$ sein muss. In diesem Fall ist aber die linke Seite von (*) für $n > 1$ negativ und daher sicher keine Quadratzahl. Für die verbleibende Möglichkeit $n = 1$ erhält man dagegen

$$1994 - 1993 = 1$$

also dann trivialerweise eine Quadratzahl und damit ist $(m,n) = (1,1)$ dann auch das einzige Paar von positiven ganzen Zahlen, für welches dies gilt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 331224
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, C' sei der Bildpunkt von C bei der Spiegelung an AB.
Für jeden Punkt P, der auf AB zwischen A und B liegt, seien Q auf BC und R auf CA so gelegen, dass $PQCR$ ein Parallelogramm ist.
Dann sei X der von P verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke APR und BPQ.
Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X stimmt überein mit dem im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Bogen den Umkreises des Dreiecks ABC'.

Die Dreiecke APR und BPQ sind nach Konstruktion wieder gleichseitig. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt $60° = \angle ARP = AXP = 60° = \angle PQB = PXB$ und somit $\angle AXB = 120°$. Aus $\angle AXB + \angle BC'A = 180°$ folgt dann, dass $AXBC'$ ein Sehnenviereck ist und X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC' liegt.

Für einen gegeben Punkt X auf dem Bogen erhalten wir P als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle AXB$ mit AB. Wegen $\angle AXB = 120°$ erhalten wir wieder mit dem Peripheriewinkelsatz, dass X der Schnittpunkt der beiden Umkreise ist.

Quelle anonym

9.35.3 III. Runde 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331231
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}} \qquad (1)$$

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d} \le \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d) \le (a+b)(a+c)(b+d)(c+d)$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(a+b+c+d) \le \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{d}{b}\right)\left(1+\frac{c}{d}\right)$$

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}+1 \le \left(1+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{d}{b}+\frac{c}{d}+\frac{c}{b}\right)$$

$$4+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d} \le 1+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{b}+\frac{d}{a}+\frac{ad}{bc}+\frac{d}{c}+\frac{c}{d}+\frac{bc}{ad}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1$$

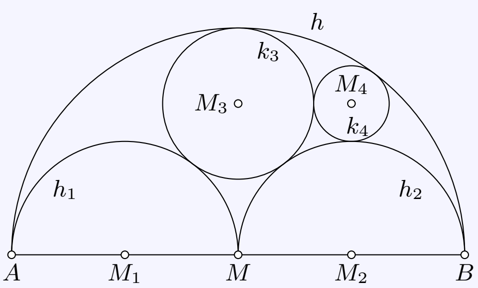
$$2 \le \frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}$$

$$0 \le a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$

$$0 \le (ad-bc)^2$$

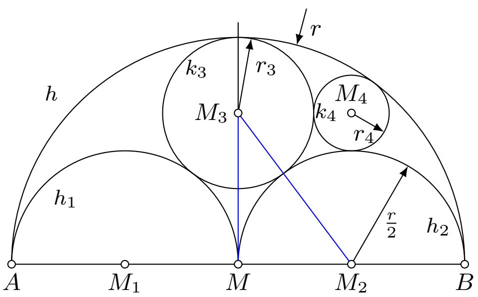
q.e.d.
Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 331232



Über einer Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert.
Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.
Man beweise, dass M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Der Punkt M liege im Ursprung eines 2D-Koordinatensystems:



Wir bestimmen zunächst r_3 mithilfe des rechtwinkligen blauen Dreiecks MM_2M_3:

$$(r-r_3)^2 + \left(\tfrac{1}{2}r\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}r + r_3\right)^2$$

$$r^2 - 2rr_3 + r_3^2 + \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + rr_3 + r_3^2$$

$$r^2 = 3rr_3$$

$$r_3 = \tfrac{1}{3}r$$

Der Punkt M_3 liegt somit bei $(0,\frac{2}{3}r)$, M_2 bei $(\frac{1}{2}r,0)$. Der Punkt M_4 habe die Koordinaten (x,y) und den unbekannten Radius r_4. Das sind drei Unbekannte, die wir aus den drei Bedingungen bestimmen, die sich daraus ergeben, dass der Punkt M_4 von drei Kreisen (h, h_2 und k_3) gleichweit entfernt liegen soll. Das führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$(1) \qquad (x - \tfrac{1}{2}r)^2 + y^2 = (\tfrac{1}{2}r + r_4)^2$$

$$(2) \qquad x^2 + (y - \tfrac{2}{3}r)^2 = (\tfrac{1}{3}r + r_4)^2$$

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = (r - r_4)^2$$

Multipliziert man die Gleichungen aus und zieht dann Gleichung (1) von (3) ab, erhält man:

$$rx - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2 - 3rr_4$$

$$(4) \qquad x = r - 3r_4$$

Und wenn man Gleichung (2) von (3) abzieht:

$$\tfrac{4}{3}ry - \tfrac{4}{9}r^2 = \tfrac{8}{9}r^2 - \tfrac{8}{3}rr_4$$

$$(5) \qquad y = r - 2r_4$$

Wir setzen (4) und (5) wieder in (3) ein:

$$(r - 3r_4)^2 + (r - 2r_4)^2 = (r - r_4)^2$$

$$2r^2 - 10rr_4 + 13r_4^2 = r^2 - 2rr_4 + r_4^2$$

$$r^2 - 8rr_4 + 12r_4^2 = 0$$

$$(r - 6r_4)(r - 2r_4) = 0$$

Die einzig plausible Lösung ist $r = 6r_4$ bzw. $r_4 = \frac{1}{6}r$. Setzt man das in (4) und (5) ein, erhält man für M_4 die Koordinaten $(x,y) = (\frac{1}{2}r,\frac{2}{3}r)$. Somit hat der Punkt M_4 dieselbe x-Koordinate wie M_2 und dieselbe y-Koordinate wie M_3, so dass das Viereck $MM_2M_4M_3$ tatsächlich ein Rechteck darstellt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 331233A
Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\{0,1,2,...\}}$ durch die Festsetzung definiert, dass $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m lässt.
Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl m mit $m \geq 2$ eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

Es gibt nur m^2 verschiedene Werte für Paare (x_n, x_{n+1}) aufeinanderfolgender Folgenglieder, aber unendlich viele Folgenglieder.
Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip ein n und ein k mit $k > 0$, so dass $x_n = x_{n+k}$ und $x_{n+1} = x_{n+k+1}$ gilt. (Es gibt sogar ein n für das es unendlich viele solcher k gibt.)
Für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder x_j, x_{j+1} lässt sich das Vorgängerglied eindeutig bestimmen mit $x_{j-1} = (x_{j+1} - x_j) \pmod m$, also gilt auch $x_{n-1} = x_{n+k-1}$, $x_{n-2} = x_{n+k-2}$ usw. bis zu $x_0 = x_k$.

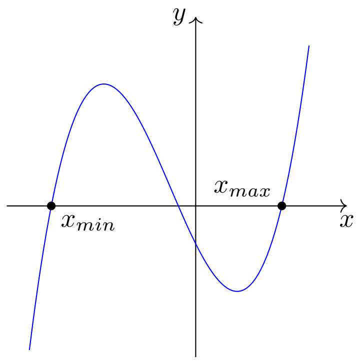
Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 3B - 331233B
Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3) \cdot x^2 + 2n \cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen n mit $n \geq 0$, für die gilt:
Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

Die Funktion $f(x)$ verläuft prinzipiell so:



Das heißt, bei den "äußeren" Nullstellen x_{min} als auch bei x_{max} ist die Steigung positiv. Für $n = 0$ sieht man sofort, dass die Nullstellen $x_{min} = -3$ und $x_{max} = 0$ sind (in diesem Fall ist $x = 0$ doppelte Nullstelle). Das Intervall zwischen kleinster und größter Nullstelle (mit "klein" und "groß" ist natürlich der x-Wert gemeint) hat hier also genau eine Länge von 3.
Betrachtet man sehr große n, wird die Funktion näherungsweise zu

$$g(x) = x^3 + (n+3)x^2 + 2nx$$

Eine Lösung ist wieder $x = 0$. Die anderen lauten:

$$x^2 + (n+3)x + 2n = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}(n+3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n+3)^2 - 8n} = -\frac{1}{2}(n+3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - 2n + 9}$$

Wiederum für große n kann man überschlägig berechnen:

$$x_1 \approx -\frac{1}{2}(n+3) - \frac{1}{2}(n-1) = -n-1$$

$$x_2 \approx -\frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{2}(n-1) = -2$$

Es ist klar, dass die approximative Lösung $x \approx -2$ zwischen den beiden anderen Nullstellen liegt, denn die größte Nullstelle muss auf jeden Fall $x_{max} > 0$ sein, weil $f(0) = -\frac{n}{n+1} < 0$ ist. Setzen wir $x = -n-1$ ein, so erhalten wir

$$f(-n-1) = -(n+1)^3 + (n+1+2)(n+1)^2 - 2n(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$f(-n-1) = 2(n+1)^2 - 2n(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1} = 2(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1} = 2n + 1 + \frac{1}{n+1} > 0$$

Daraus kann man schließen, dass auf jeden Fall

$$x_{min} < -n-1$$

ist. Da außerdem $x_{max} > 0$, ist die Intervallbreite d auf jeden Fall

$$d = x_{max} - x_{min} > n+1$$

Damit ist für $n \geq 2$ die zulässige Intervallbreite überschritten. Bleibt noch zu untersuchen, ob für $n = 1$ die Intervallbreite eingehalten wird. Das tun wir, indem wir einfach $n = 1$ und $x = -3$ einsetzen. Es zeigt sich, dass $f_1(-3) = \frac{5}{2} > 0$ ist. Daraus folgt, dass für $n = 1$ die kleinste Nullstelle $x_{min} < -3$ ist, so dass auch für $n = 1$ die Intervallbreite von 3 nicht eingehalten wird. Daher ist $n = 0$ die einzige Lösung.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 331234
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$ gilt.

Da $x,y \geq 0$, gilt gleichzeitig auch $x,y \leq 1993^2$. Für x und y kommen jeweils ausschließlich die Quadratzahlen 0,1,4,9,16,...,1993^2 in Frage.

Beweis:
Wenn x keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x}$ irrational. Dann gilt, wenn man die Gleichung der Aufgabenstellung nach y auflöst:

$$y = (1993 - \sqrt{x})^2$$

$$y = 1993^2 + x - 2 \cdot 1993\sqrt{x}$$

Damit wäre y irrational, soll aber ganzzahlig sein, was einen Widerspruch darstellt. Ist also $x = n^2$ eine Quadratzahl mit $0 \leq n \leq 1993$, dann ist $y = (1993 - n)^2$. Somit gibt es 1994 Zahlenpaare, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 331235
Zwei kongruente regelmäßige $2n$-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt.
Von einem der beiden $2n$-Ecke werde vorausgesetzt, dass es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$-Ecke so aufeinanderzulegen, dass in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

Das eine $2n$-Eck besitze b blaue und $2n - b$ rote Dreiecke und das andere $2n$-Eck jeweils n blaue und rote Dreiecke.
Bei allen $2n$ Drehungen gibt es zusammengenommen $n \cdot b$ Übereinstimmungen blauer Dreiecke und $n \cdot (2n - b)$ Übereinstimmungen roter Dreiecke. Das sind zusammen $2n^2$ Übereinstimmungen.
Bei $2n$ möglichen Drehungen bedeutet dies nach dem Schubfachprinzip, dass es bei wenigstens einer Drehung mindestens n Übereinstimmungen gibt.

Aufgabe gelöst von Henning Thielemann

Aufgabe 6 - 331236
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4 + \sqrt{18})^n\right]$ ist.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Wir halten zunächst fest, dass der nachstehende Ausdruck

$$A_n := (4 + \sqrt{18})^n + (4 - \sqrt{18})^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} 2^{2n-3k+1} 3^{2k} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

stets ganz ist, und zwar wegen

$$4 - \sqrt{18} \approx -0.24$$

genauer jene ganze Zahl g, welche aus $(4+\sqrt{18})^n$ durch Runden hervorgeht, wobei für gerades n stets aufgerundet, für ungerades n aber stets abgerundet wird. Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$B_n := [(4+\sqrt{18})^n] \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt somit folgender Zusammenhang

$$B_n := \begin{cases} A_n - 1, & \text{falls n gerade} \\ A_n, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Da aber die A_n aufgrund ihrer Bauart für gerades n stets gerade sind, sind die B_n dann automatisch ungerade, d.h., die größte Zweierpotenz, welche B_n für ein gerades n teilt ist somit nur 1.

Setzt man also nun im Folgenden n als ungerade voraus, so ist die Beobachtung von besonderer Bedeutung, dass wir in Formel (*) nur jeweils den letzten Summanden für $k = [\frac{n}{2}] = \frac{n-1}{2}$ betrachten müssen, da die anderen Summanden ersichtlich durch eine höhere Zweierpotenz teilbar sind. Die höchste Zweierpotenz, durch welche dieser letzte Summand aber teilbar ist, ist jedoch

$$2^{\frac{n+5}{2}}$$

wie man durch Einsetzen von $k = \frac{n-1}{2}$ sofort sieht, was obige Frage somit auch für ungerade n beantwortet.

Aufgabe gelöst von weird

2. Lösung:
Es sei $s_n := (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n$. Dann erfüllt die Folge (s_n) die Rekursion $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$, wie man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} 8s_{n+1} + 2s_n &= 8\cdot(4+\sqrt{18})\cdot(4+\sqrt{18})^n + 8\cdot(4-\sqrt{18})\cdot(4-\sqrt{18})^n + 2\cdot(4+\sqrt{18})^n + 2\cdot(4-\sqrt{18})^n = \\ &= (32+8\sqrt{18}+2)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (32-8\sqrt{18}+2)\cdot(4-\sqrt{18})^n = \\ &= (16+2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (16-2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4-\sqrt{18})^n = \\ &= (4+\sqrt{18})^{n+2} + (4-\sqrt{18})^{n+2} = s_{n+2} \end{aligned}$$

Zusammen mit $s_0 = 2$ und $s_1 = 8$ folgt für gerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1}$, und für ungerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar ist:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies offenbar der Fall. Sei nun $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$. Ist n gerade, dann ist also s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2}{2}+1} = 2^{\frac{n}{2}}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1+5}{2}} = 2^{\frac{n}{2}+2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, sodass $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n}{2}+1}$ und keine größere Zweierpotenz teilbar ist. Ist dagegen n ungerade, dann ist s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2+5}{2}} = 2^{\frac{n+5}{2}-1}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1}{2}+1} = 2^{\frac{n+5}{2}-2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, also ist $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar.

Damit haben wir für jedes n bestimmt, durch welche höchste Zweierpotenz s_n teilbar ist.
Es ist $4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$, also $-1 < 4-\sqrt{18} < 0$ und damit gilt für $n = 0$ die Gleichung $(4-\sqrt{18})^n = 1$, für ungerade n die Ungleichung $-1 < (4-\sqrt{18})^n < 0$ und für gerade $n \geq 2$ die Ungleichung $0 < (4-\sqrt{18})^n < 1$. Also ist

- für $n = 0$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [1] = 1$ genau durch 2^0,
- für ungerades n der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n$ genau durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ und
- für gerades $n \geq 2$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n - 1$ genau durch 2^0,

aber keine größere Zweierpotenz teilbar. Im letzten Fall gilt dies, da dann s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1} \geq 2^2$ teilbar, also $s_n - 1$ ungerade ist.

Bemerkung: Auf die Rekursionsbedingung gelangt man, indem man die beiden Basen $4 \pm \sqrt{18}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer rekursiv definierten Folge auffasst. Das Polynom mit diesen Nullstellen hat die Form $x^2 - 8x - 2$, sodass sich die Rekursionsbedingung $s_{n+2} - 8s_{n+1} - 2s_n = 0$ bzw. eben $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$ ergibt.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.35.4 IV. Runde 1993, Klasse 12

Aufgabe 1 - 331241
Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:
a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.
b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.
Hinweis: In dieser Aufgabe sei als Differenz zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x-y|$ verstanden.
Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x-y|$ und als $|y-x|$).

Dies ist wieder einfach nur eine Anwendung des Schubfachprinzips in der folgenden verschärften Form: Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei $n,k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Konkret ist hier $n = \frac{32*31}{2} = 496$, also die Gesamtanzahl der Differenzen, welche bei 32 positiven ganzen Zahlen gebildet werden können und $k = 110$, also die Gesamtanzahl an möglichen Differenzen, welche zwischen zwei verschiedenen Zahlen in der Menge $\{1,2,,...,111\}$ überhaupt auftreten können. Und tatsächlich ist

$$\left\lceil \frac{496}{110} \right\rceil = 5$$

d.h., die Aussage a) ist richtig. Dagegen ist b) falsch, denn es ist natürlich möglich, dass jede der 110 Differenzen weniger als sechsmal vorkommt, z.B. etwa bei der folgenden - zwar extrem unwahrscheinlichen, aber immerhin möglichen - Aufteilung

$$54 \cdot 4 + 56 \cdot 5 = 496$$

der 496 Differenzen, bei der sich in einer Gruppeneinteilung nach verschiedenen Differenzen, mit dann also jeweils gleicher Differenz innerhalb einer Gruppe, 54 mal Vierergruppen und 56 mal Fünfergruppen gebildet hatten.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 2 - 331242
Für $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \frac{1}{1 \cdot s_1^2} + \frac{1}{2 \cdot s_2^2} + ... + \frac{1}{n \cdot s_n^2}$$

Man beweise für alle $n = 1, 2, 3, ...$ die Ungleichung $t_n < 2$.

Es ist

$$\frac{1}{k} = s_k - s_{k-1}$$

Daher kann man die Summe t_n auch wie folgt darstellen:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k^2}$$

Da $s_n > s_{n-1}$ für alle n ist, s_n also streng monoton steigend ist, gilt:

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k \cdot s_{k-1}}$$

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$t_n < 1 + \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_n}$$

Mit $s_1 = 1$ erhält man:

$$t_n < 2 - \frac{1}{s_n} < 2$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 331243
Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Ferner seien A', B', C', D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.
Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Die Punkte A', B', C', D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

Die Größe der Pyramide ist für diese Aufgabe belanglos. Wir können die vier Kanten der Pyramide auch durch 4 Geraden darstellen, die durch den Ursprung gehen, wenn man die Spitze der Pyramide in selbigen legt. Denkt man sich die Grundfläche der Pyramide als senkrecht zur z-Achse, dann lauten die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D':

$$\vec{a} = \frac{a}{\sqrt{2q^2 + h^2}} \begin{pmatrix} q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{b}{\sqrt{2q^2 + h^2}} \begin{pmatrix} q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \frac{c}{\sqrt{2q^2 + h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \frac{d}{\sqrt{2q^2 + h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

q und h sind Größen der gedachten Pyramide (h die Höhe und q eine halbe Grundflächenseite), aber sie sind für die Berechnung ohne Belang. Die Punkte liegen in einer Ebene, wenn das Spatprodukt dreier Differenzen dieser Vektoren null ergibt, also z.B.:

$$(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} q(b-a) & -q(c+a) & -q(d+a) \\ -q(b+a) & -q(c+a) & q(d-a) \\ h(b-a) & h(c-a) & h(d-a) \end{vmatrix} = 0$$

Nun folgt eine reine Fleißaufgabe:

$$\begin{aligned} -(b-a)(c+a)(d-a) - (c+a)(d-a)(b-a) + (d+a)(b+a)(c-a) - (d+a)(c+a)(b-a) \\ -(b-a)(d-a)(c-a) - (c+a)(b+a)(d-a) = 0 \end{aligned}$$

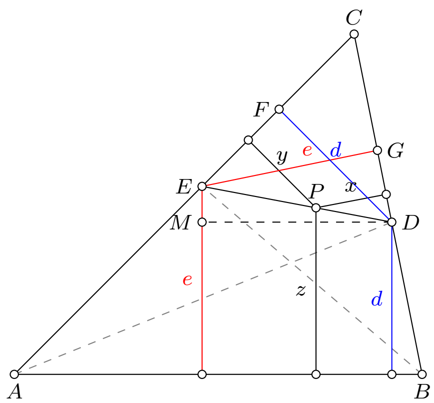
$$\begin{aligned} (b-a)(-cd + ac - ad + a^2 - cd - ad + ac + a^2) + (d+a)(ac + bc - ab - a^2 - bc - ab + ac + a^2) \\ +(d-a)(-bc + ac + ab - a^2 - bc - ab - ac - a^2) = 0 \end{aligned}$$

$$(b-a)(-2cd+2ac-2ad+2a^2)+(d+a)(2ac-2ab)+(d-a)(-2bc-2a^2)=0$$
$$-bcd+abc-abd+a^2b+acd-a^2c+a^2d-a^3+acd-abd+a^2c-a^2b-bcd-a^2d+abc+a^3=0$$
$$-2bcd+2abc-2abd+2acd=0$$
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=0$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 331244
Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.
Man beweise:
Unter dieser Voraussetzung ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B,C bzw. durch A,C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A,B.



Gemäß Aufgabenstellung muss gelten:
$$z=x+y$$

Da es sich bei D und E um die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten handelt, sind die blau dargestellten Strecken d gleichlang, und ebenso die rot dargestellten Strecken mit der Bezeichnung e. Sei nun q das Verhältnis der Strecke EP zur Strecke ED, also

$$q=\frac{\overline{EP}}{\overline{ED}}$$

Offensichtlich gilt $0\leq q\leq 1$. Wir betrachten zunächst das Dreieck EMD. Laut Strahlensatz gilt:

$$\frac{z-d}{e-d}=1-q$$
$$z=d+(e-d)(1-q)=dq+e(1-q) \tag{1}$$

Im Dreieck EDF gilt auch wegen des Strahlensatzes:

$$\frac{y}{d}=q$$
$$y=dq \tag{2}$$

Und letztlich im Dreieck EDG:

$$\frac{x}{e}=1-q$$
$$x=e(1-q) \tag{3}$$

Addiert man nun (2) und (3), dann folgt:

$$x + y = dq + e(1 - q) = z$$

q.e.d.
Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 331245
Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag.
Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen.
Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muss, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Die Lösung erfolgt wie bei der Aufgabe 161233, wenn man folgende Dinge feststellt:
Eine Freundschaft (die ja immer gegenseitig sein soll) kann durch eine Linie zwischen zwei Punkten symbolisiert werden, wobei jeder Zwerg durch einen Punkt in der gegenwärtigen Farbe seines Hauses dargestellt wird.
Da jeder Zwerg eine ungerade Anzahl an Freundschaften mit anderen Zwergen hat, ist jeder Zwerg, dessen Haus umgestrichen werden kann, "außergewöhnlich" (im Sinne der Definition in der 161233, dass mehr als die Hälfte der Verbindungen des entsprechenden Punktes von Punkten der anderen Farbe ausgehen), und tatsächlich wird immer das Haus eines außergewöhnlichen Zwerges umgestrichen werden, nämlich dann, wenn der nächste Geburtstag eines der außergewöhnlichen Zwerge ansteht.
In der Lösung der Aufgabe 161233 wurde festgestellt, dass, unabhängig von der Reihenfolge des Umfärbens außergewöhnlicher Punkte, nach einer endlichen Anzahl von Umfärbungen kein außergewöhnlicher Punkt mehr existiert.
Damit kann kein Umfärben mehr stattfinden, was die Behauptung der Aufgabe zeigt.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 6A - 331246A
Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die
a) $f(n) = 1$, b) $f(n) = 0$
gilt.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Wir nennen

$$a_n = 2\sqrt{n} \qquad b_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$$

Wir zeigen zunächst, dass $a_n > b_n$ gilt, und dass die Differenz sehr schnell fallend ist:

$$a_n - b_n = 2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})$$

$$a_n - b_n = \frac{\left(2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)\left(2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)}{2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}$$

$$a_n - b_n = \frac{4n - \left(n - 1 + n + 1 + 2\sqrt{(n-1)(n+1)}\right)}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2n - 2\sqrt{n^2 - 1}}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}$$
$$a_n - b_n = \frac{2\left(n^2-(n^2-1)\right)}{\left(2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}$$
$$a_n - b_n = \frac{2}{\left(2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}$$

Da im Nenner nur positive Terme stehen, ist damit einerseits der Nachweis erbracht, dass $a_n - b_n > 0$ ist, aber andererseits ist auch

$$a_n - b_n < \frac{2}{4\sqrt{n-1}\cdot 2\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{4\sqrt{n-1}\sqrt{n^2-1}}$$

Wie man sieht, fällt die Differenz mit wachsendem n schnell. Schon bei $n = 2$ ist die Differenz kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Es wird also überwiegend der Fall sein, dass a_n und b_n auf die gleiche ganze Zahl abgerundet werden, und daher $f(n) = 0$ ist. In seltenen Fällen könnte es aber passieren, dass a_n schon die nächste ganze Zahl erreicht hat, während b_n noch darunter liegt, also dass $[a_n] = [b_n] + 1$ und daher $f(n) = 1$ ist. Ein solcher Sprung passiert ganz sicher, wenn $n = k^2$ ist, denn dann ist $a_n = 2\sqrt{n} = 2k$ ganzzahlig. Da $b_n < a_n$ ist, aber auch $b_n > a_n - 1$, ist $[b_n] = 2k - 1$ und somit $f(k^2) = 1$. Wir zeigen nun, dass für alle anderen Fälle $f(n) = 0$ ist:

1. Für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$ gilt
$$[a_n] = 2k$$

Beweis: Selbst für das größte Element in der Menge, nämlich $k^2 + k$, gilt:

$$2k < 2\sqrt{k^2+k} < 2k+1$$

Die linke Ungleichung ist offensichtlich. Für die zweite muss gelten:

$$4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1$$

Diese Ungleichung ist ebenfalls erfüllt. Wenn es aber für das größte Element der Menge gilt, gilt es für die kleineren Elemente erst recht. Es gilt aber auch

$$[b_n] = 2k$$

Hier führen wir den Beweis für das kleinste Element der Menge:

$$\sqrt{k^2+1-1} + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$
$$k + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$
$$\sqrt{k^2+1+1} > k$$

Wenn schon für das kleinste n aus der Menge die Behauptung gilt, dann auch für die größeren. Daher gilt für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k$ ist, und daher $f(n) = 0$.

2. Für $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$ gilt

$$[a_n] = 2k+1$$

Beweis: (kleinstes Element)
$$2k+1 < 2\sqrt{k^2+k+1}$$
$$4k^2+4k+1 < 4k^2+4k+4$$

(größtes Element)
$$2\sqrt{k^2+2k} < 2k+2$$
$$4k^2+8k < 4k^2+8k+4$$

Daher gilt $[a_n] = 2k+1$. Es gilt aber auch für alle $[b_n] = 2k+1$. Beweis für das kleinste Element ist ausreichend:
$$\sqrt{k^2+k+1-1} + \sqrt{k^2+k+1+1} > 2k+1$$

$$\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2+k+2} > 2k+1$$
$$k^2+k+k^2+k+2+2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 4k^2+4k+1$$
$$2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 2k^2+2k-1$$
$$4(k^2+k)^2+8(k^2+k) > 4(k^2+k)^2-4(k^2+k)+1$$
$$12(k^2+k) > 1$$

Aufgrund dessen gilt für diese Menge $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k+1$, und daher ebenfalls $f(n) = 0$. Das nächstgrößere n wäre nun $k^2+2k+1 = (k+1)^2$, was wieder eine Quadratzahl ist. Zusammenfassend kann man also festhalten, dass nur dann $f(n) = 1$ ist, wenn n eine Quadratzahl ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
Es ist $f(1) = 1$. Von nun an sei $n \geq 2$.
Es gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} \rfloor$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$k \leq 2\sqrt{n} < k+1 \quad \text{und} \quad k \leq \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < k+1.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n < (k+1)^2 \quad \text{und} \quad k^2 \leq 2n+2\sqrt{n^2-1} < (k+1)^2.$$

Da $2n+2\sqrt{n^2-1} < 2n+2n = 4n$ ist, ist somit $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n+2\sqrt{n^2-1} \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n+\lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

Da wir $n \geq 2$ annehmen, gilt

$$2n-1 = \sqrt{4n^2-4n+1} \leq \sqrt{4n^2-4} = 2\sqrt{n^2-1} < 2n$$

und somit

$$\lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor = 2n-1.$$

Also ist $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n-1 \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

d.h. genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 < 4n < (k+1)^2.$$

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $4n$ keine Quadratzahl ist. Also gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn n keine Quadratzahl ist.
Ist umgekehrt $n = m^2$ eine Quadratzahl, so gilt wegen

$$\begin{aligned} 2m-1 &= \sqrt{(m-1)^2}+\sqrt{m^2} \\ &\leq \sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2+1} = \sqrt{2m^2+2\sqrt{m^4-1}} \\ &< \sqrt{2m^2+2m^2} = 2m, \end{aligned}$$

dass

$$f(n) = f(m^2) = 2m - \lfloor \sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2+1} \rfloor = 2m-(2m-1) = 1.$$

Zusammenfassend gilt also für alle $n > 0$, dass

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ Quadratzahl ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe gelöst von Nuramon

Aufgabe 6B - 331246B
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ ganzer, nicht negativer Zahlen m,n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.

Bei einem festgehaltenem Wert von $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $2^m - 5^n = 7$ genau eine reelle Lösung $m \in \mathbb{R}$, nämlich

$$m = \log_2(5^n + 7)$$

und genau dann, wenn dieser Wert von m sogar ganzzahlig ist, ist (m,n) dann auch eine Lösung unserer Aufgabe. In dieser Weise kann man zu den Werten $n = 0,1,2$ die Lösungen, soweit solche existieren, leicht bestimmen und erhält so einmal die 2 Lösungen

$$(m,n) \in \{(3,0),(5,2)\}$$

Unser Ziel ist es im Folgenden zu zeigen, dass diese auch schon die einzigen Lösungen hier sind, d.h., dass sich für die Annahme $n > 2$ (und damit auch $m > 5$), welche wir ab nun voraussetzen, ein Widerspruch zur Lösbarkeit der Gleichung ergibt.

Dazu formen wir die Ausgangsgleichung zunächst um zu

$$2^5(2^{m-5} - 1) = 5^2(5^{n-2} - 1) \quad (*)$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, dass

$$25 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 2^{m-5} \equiv 1 \mod 25$$

gilt. Da nun, wie man leicht nachrechnet, die Folge der Zweierpotenzen mod 25 die Periode 20 hat, muss also schon mal die einschränkende Beziehung

$$m \equiv 5 \mod 20$$

gelten. Darüber hinaus muss aber auch

$$m \not\equiv 5 \mod 100 \quad (**)$$

gelten, da sonst die linke Seite von (*) sogar durch 125 teilbar wäre, die rechte aber nicht. Mit einer ähnlichen Schlussweise sieht man, dass aus

$$32 \mid 5^{n-2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 5^{n-2} \equiv 1 \mod 32$$

und der Tatsache, die Folge der Potenzen 5^k mod 32, $k = 0,1,2,...$ die Periode 8 hat, folgt, dass

$$n \equiv 2 \mod 8$$

gelten muss. Wegen

$$2^{20} - 1 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{und} \quad 2^{20} \equiv 1 \mod 31$$

besitzt der Ausdruck $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) jedenfalls ebenfalls den Primfaktor 31 und indem wir ähnlich wie oben wieder die Folge $5^k \mod 31$, $k = 0,1,2,...$ betrachten, welche die Periode 3 hat, können wir insgesamt sogar schließen, dass $n - 2$ sogar durch 24 $(= 3 \cdot 8)$ teilbar sein muss. Nun gilt aber

$$5^{24} \equiv 1 \mod 601$$

für die Primzahl 601, sodass dann auch der Faktor $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) und damit auch der Faktor $2^{m-5} - 1$ auf dessen linker Seite diesen Primfaktor haben müssen. Die Folge $2^k \mod 601$, $k = 0,1,2,...$ hat aber nun die Periode 25, d.h., es muss

$$m \equiv 5 \mod 25$$

gelten, woraus in Verbindung mit der schon bewiesenen Beziehung $m \equiv 5 \mod 20$ nun endgültig

$$m \equiv 5 \mod 100$$

folgt, im klaren Widerspruch zu (**), q.e.d.

Aufgabe gelöst von weird

9.36 XXXIV. Olympiade 1994

9.36.1 I. Runde 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341211
Von einer natürlichen Zahl n sei bekannt, dass ihre Dezimaldarstellung nur die Ziffern Drei und Null enthält, wobei die Drei genau 1994 mal und die Null genau 1995 mal auftritt.

Man untersuche, ob eine solche Zahl Quadratzahl sein kann.

Eine solche Zahl kann nicht Quadratzahl sein.

Beweis: Ihre Quersumme $1994 \cdot 3$ ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9, da 1994 nicht durch 3 teilbar ist. Also ist auch die genannte Zahl durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Jede durch die Primzahl $p = 3$ teilbare Quadratzahl ist aber auch durch $p^2 = 9$ teilbar.
Also kann die genannte Zahl keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 2 - 341212
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen n, welche die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen:

(1) Die Zahl n ist durch 5 teilbar.

(2) Die Zahl n und ihre Quersumme enthalten beide in ihrer Dezimaldarstellung keine Ziffer Null.

(3) Die Quersumme der Quersumme von n beträgt 2.

I. Wenn eine natürliche Zahl n die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, so folgt:
Nach (2) und (3) beträgt die Quersumme von n entweder 2 oder 11. Nach (1) und (2) hat n die Einerziffer 5. Also verbleibt für die Quersumme von n nur die Möglichkeit 11; die Summe der übrigen Ziffern beträgt folglich 6.

II. Wenn eine natürliche Zahl die Einerziffer 5 hat und die übrigen Ziffern sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben, so erfüllt die Zahl die Bedingungen (1), (2) und (3).

Daher ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl aller verschiedenen geordneten Zusammenstellungen von Ziffern, die sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben.
Dies sind genau die folgenden Zusammenstellungen:

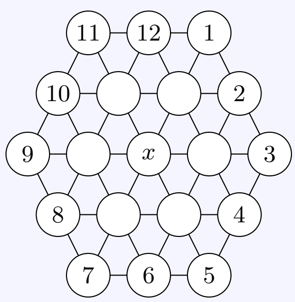
Alle Permutationen von ...	Anzahl	Alle Permutationen von ...	Anzahl
1,1,1,1,1,1	1	1,1,1,2	5
1,1,1,3	4	1,1,2,2	6
1,1,4	3	1,2,3	6
1,5	2	2,2,2	1
2,4	2	3,3	1
6	1		

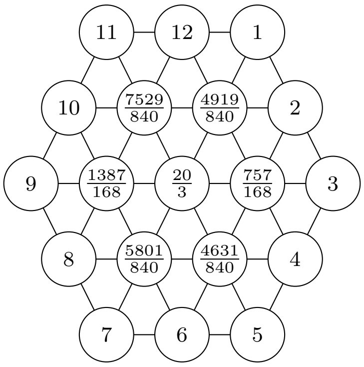
Als Summe ergibt sich die gesuchte Anzahl 32.

Aufgabe 3 - 341213

In die Kreise der Abbildung lassen sich reelle Zahlen so eintragen, dass an die Randkreise die angegebenen Zahlen kommen und dass in jedem der sieben inneren Kreise jeweils das arithmetische Mittel der sechs benachbarten Kreise steht.

Man untersuche, welche Zahl x dabei im mittleren Kreis steht.





Für x und die benachbarten Zahlen a, b, c, d, e, f (bezeichnet in gleichem Umlaufssinn wie die Zahlen 1, 2, ..., 12 , beginnend mit der Zahl zwischen x und 1) folgt:

$$\frac{1}{6}(15+b+f+x)=a \qquad (1)$$

$$\frac{1}{6}(9+c+a+x)=b \qquad (2)$$

$$\frac{1}{6}(15+d+b+x)=c \qquad (3)$$

$$\frac{1}{6}(21+e+c+x)=d \qquad (4)$$

$$\frac{1}{6}(27+f+d+x)=e \qquad (5)$$

$$\frac{1}{6}(33+a+e+x)=f \qquad (6)$$

$$\frac{1}{6}(a+b+c+d+e+f)=x \qquad (7)$$

Addition von (1) bis (6) ergibt

$$20+\frac{1}{3}(a+b+c+d+e+f)+x=a+b+c+d+e+f$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$20+2x+x=6x \quad \Rightarrow \quad x=\frac{20}{3}$$

2. Eine Probe ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer Belegung der beschriebenen Art aus dem Aufgabentext hervorgeht.

Aufgabe 4 - 341214
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}<\frac{1}{x-1} \quad \text{erfüllen.}$$

I. Für $x \leq 1$ ist (mindestens) der Term $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ nicht definiert, x also nicht Lösung.

II. Für $x > 1$ gilt: Die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad (1)$$

ist äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}} \qquad (2)$$

Wegen $x+1 > x-1 > 0$ gilt $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, also ist $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ positiv. Auch $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist positiv. Daher ist (2) äquivalent zu

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x+1}$$

dies zu

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$$

und dies wegen $x > 0$ und $x^2 - 1 > 0$ zu

$$2x \cdot \sqrt{x^2-1} < x^2+1 \tag{3}$$

Da auch hier beide Seiten der Ungleichung positiv sind, ist (3) der Reihe nach äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4x^2(x^2-1) &< (x^2+1)^2 \\ 3(x^3-2x^2-\frac{1}{3}) &< 0 \\ (x^2-1)^2-\frac{4}{3} &< 0 \\ (x^2-1-\frac{2}{\sqrt{3}})(x^2-1+\frac{2}{\sqrt{3}}) &< 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Mit $x > 1$ ist auch $x^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ und daher (4) äquivalent zu

$$x^2-1-\frac{2}{\sqrt{3}} < 0$$

wegen $x > 0$ und $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x < \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Ungleichung (1) gilt genau für alle x mit $1 < x < \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Lösungen der I. Runde 1994 übernommen von [5]

9.36.2 II. Runde 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341221
Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen gelten:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

Zunächst die linke Ungleichung:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2}$$
$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$
$$x^2+2xy+y^2 \leq 2x^2+2y^2$$
$$0 \leq x^2-2xy+y^2$$
$$0 \leq (x-y)^2$$

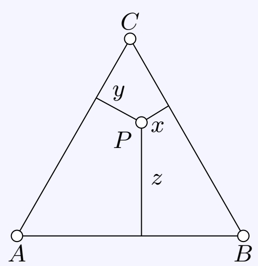
Das ist immer erfüllt. Rechte Ungleichung: es ist

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x,y)$$
$$\frac{x^2+y^2}{2} \leq (\max(x,y))^2 = \max(x^2,y^2)$$

Auch das ist immer erfüllt, da $x^2 \leq \max(x^2,y^2)$ und $y^2 \leq \max(x^2,y^2)$ ist. q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 2 - 341222



Man beweise für jeden Punkt P, der im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F=1$ liegt:
Die Längen x,y,z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abbildung) erfüllen die Gleichung

$$x+y+z=\sqrt[4]{3}$$

Nach dem Satz von Viviani gilt $x+y+z=h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Mit $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=1 \iff a^2=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ folgt

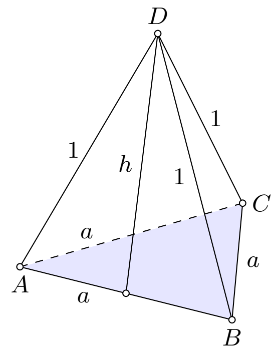
$$x+y+z=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{3}}}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$$

qed.

Zum Satz von Viviani:
Die Strecken AP, BP und CP zerlegen das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ in drei Teildreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ und $\triangle ACP$, deren Flächeninhalte sich jeweils aus dem halben Produkt der Grundseite $|AB| = |BC| = |AC|$ mit der entsprechenden Höhe x, y bzw. z ergibt. Da diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ zerlegen, addieren sich ihre Flächeninhalte zu dem des Dreiecks $\triangle ABC$, also zu $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$, sodass sich $x + y + z = h$ ergibt.

Aufgabe gelöst von einem Mitglied des Matheplaneten und cyrix

Aufgabe 3 - 341223
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen $AD = BD = CD = 1$ und $AB = BC = CA$ erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.



Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge a. Die Höhe eines Manteldreiecks sei h. Dann ist

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}$$

und die Oberfläche des Tetraeders ist:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung gelte:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{3}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} < 3$$

$$3a^2(1 - \frac{1}{4}a^2) < (3 - \frac{1}{2}a^2)^2$$

$$3a^2 - \frac{3}{4}a^4 < 9 - 3a^2 + \frac{1}{4}a^4$$

$$0 < a^4 - 6a^2 + 9$$

$$0 < (a^2 - 3)^2$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $a > \sqrt{3}$ ist. Es tritt jedoch Gleichheit ein, wenn $a = \sqrt{3}$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn der Tetraeder auf eine Höhe von null zusammenschrumpft, so dass die Oberfläche dann genau zweimal dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{3}$ entspricht.
Strenggenommen gilt die Ungleichung laut Aufgabenstellung also nur, wenn der Punkt D über dem Dreieck ABC liegt, und nicht in der gleichen Ebene.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 341224
Ist z eine 1995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1994$, so bezeichne $z[n]$ diejenige Zahl, deren Ziffierndarstellung entsteht, indem man aus der Ziffierndarstellung von z die ersten n Ziffern weglässt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Ziffierndarstellung anfügt.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1994$:
Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

Wir schreiben z in der Form $z = a \cdot 10^{1995-n} + b$ mit $a,b \in \mathbb{N}, b < 10^{1995-n}$. Dann ist $z[n] = b \cdot 10^n + a$.
Die Zahl $10^{1995} - 1$ ist durch 27 teilbar, denn $(10^{1995} - 1) \cdot \frac{1}{9} = 11 \dots 11$ hat die Quersumme 1995 und ist somit durch 3 teilbar.
Wenn z durch 27 teilbar ist, dann gilt $-b \equiv a \cdot 10^{1995-n} \pmod{27}$. Multiplikation mit 10^n liefert dann zusammen mit obiger Bemerkung:

$$-10^n b \equiv a \cdot 10^{1995} \equiv a \pmod{27}.$$

Also ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

Aufgabe gelöst von Nuramon

9.36.3 III. Runde 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341231
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}} \leq 1$$

Bezeichnen wir die Nenner jeweils mit A, B, C und multiplizieren die Ungleichung mit ABC, so erhalten wir äquivalent (beachte, dass ABC positiv ist) zur zu zeigenden Ungleichung

$$ABC \geq AB + BC + CA$$

$$\iff (A-1)(B-1)(C-1) \geq A+B+C-1$$

$$\iff \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) \geq x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+2$$

$$\iff xyz+x+y+z+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+2$$

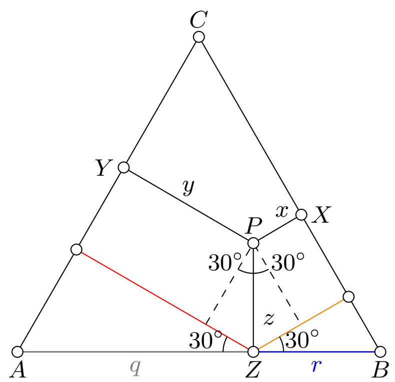
$$\iff xyz+\frac{1}{xyz} \geq 2$$

$$\iff \left(\sqrt{xyz}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\right)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr (beachte, dass die Wurzeln wegen $xyz > 0$ wohldefiniert sind). Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 341232
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.



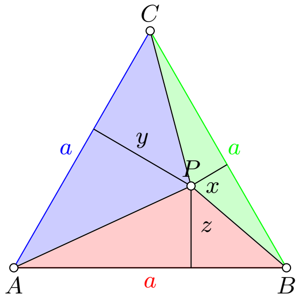
Zu bestimmen ist die Summe $x + y + z$. Es ist

$$y = q\cos 30° - z\sin 30°$$

und
$$x = r\cos 30° - z\sin 30°$$
Bekanntermaßen ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Das ergibt:
$$x + y + z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}r - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{\sqrt{3}}{2}q - \tfrac{1}{2}z + z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(q + r) = h$$
wobei h die Höhe des Dreiecks sei. q.e.d.

Man kann es sich auch durch einfache geometrische Überlegungen klarmachen, wenn man sieht, dass $x + y + z$ gleich der Summe der roten und orangefarbenen Strecke entspricht. Spiegelt man das ganze Dreieck an der Strecke AB, wird auch klar, dass die Summe der roten und orangefarbenen Strecke gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist.

2. Lösung:



Offensichtlich ist die Summe der Flächen der drei Teildreiecke gleich dem Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ABC. Also gilt:
$$\tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}ay + \tfrac{1}{2}az = \tfrac{1}{2}ah$$
$$x + y + z = h$$
q.e.d.

Beide Lösungen von MontyPythagoras

Aufgabe 3A - 341233A
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:
$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 \qquad (1)$$
$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1 \qquad (2)$$

Wir substituieren:
$$y^2 + x^2 = a \qquad y^2 - x^2 = b$$
bzw.
$$x^2 = \frac{1}{2}(a - b) \qquad y^2 = \frac{1}{2}(a + b)$$
Dann folgt aus (1):
$$\sin^4 x = \frac{1}{2}(a + b)(a - 4) + 4 \qquad (3)$$
und aus (2):
$$\cos^4 x = \frac{1}{2}(a - b)(a - 4) + 1 \qquad (4)$$
Die beiden Gleichungen (3) und (4) ziehen wir voneinander ab und nutzen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:
$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$
$$\sin^2 x - \cos^2 x = b(a - 4) + 3$$
$$2\sin^2 x = b(a - 4) + 4 \qquad (5a)$$

$$2\cos^2 x = -b(a-4) - 2 \tag{5b}$$

Wir setzen (5a) in (3) ein:

$$4\left(\frac{1}{2}(a+b)(a-4)+4\right) = (b(a-4)+4)^2$$

$$2(a+b)(a-4)+16 = b^2(a-4)^2+8b(a-4)+16$$

$$2(a+b) = b^2(a-4)+8b \tag{6}$$

In gleicher Art und Weise erhalten wir, wenn wir (5b) in (4) einsetzen:

$$4\left(\frac{1}{2}(a-b)(a-4)+1\right) = (b(a-4)+2)^2$$

$$2(a-b) = b^2(a-4)+4b \tag{7}$$

Wir addieren (6) und (7):

$$4a = 2b^2(a-4)+12b$$

$$2a = b^2a - 4b^2 + 6b$$

$$(2-b^2)a = b(6-4b)$$

$$a = \frac{b(6-4b)}{2-b^2} \tag{8}$$

(8) in (6) eingesetzt:

$$2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2}+b\right) = b^2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2}-4\right)+8b$$

Durch $2b$ teilen:

$$\frac{6-4b}{2-b^2}+1 = b\left(\frac{b(3-2b)}{2-b^2}-2\right)+4$$

$$6-4b+2-b^2 = b^2(3-2b)+(4-2b)(3-2b)$$

$$8-4b-b^2 = 3b^2-2b^3+12-6b-8b+4b^2$$

$$0 = b^3-4b^2+5b-2$$

Eine Lösung, die man leicht errät, ist $b=1$. Polynomdivision durch $(b-1)$ liefert

$$b^2-3b+2=0$$

mit den Lösungen $b=1$ (doppelte Nullstelle) und $b=2$, so dass wir insgesamt unter Nutzung von (8) die folgenden Lösungen haben:

$$b_1 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad b_2 = 2 \qquad a_2 = 2$$

Lösung a): Setzt man in die Substitution ein, folgt

$$y^2 = \frac{3}{2} \qquad x^2 = \frac{1}{2}$$

Laut (5a) muss aber auch gelten

$$2\sin^2 x = 2$$

was mit

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

unvereinbar ist. Dies ist also nur eine Scheinlösung.

Lösung b): Aus der Substitution erhält man

$$x^2 = 0 \qquad y^2 = 2$$

$x=0$ ist auch mit (5a) und (5b) vereinbar.
Wir haben daher als einzige Lösungen $(x;y) \in \{(0;\sqrt{2}),(0;-\sqrt{2})\}$.
Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2. Lösung:
Aus

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) + 5 = (x^2 + y^2 - 2)^2 + 1$$

folgt zunächst

$$2(x^2 + y^2 - 2)^2 = -\sin^2(2x)$$

und da für eine reelle Lösung jedenfalls beide Seiten dieser Gleichung 0 sein müssen und wegen $x^2+y^2 = 2$ auch noch die Beschränkung $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ gilt, bleibt hier dann wirklich nur die einzige Möglichkeit

$$x = 0,\ y = \pm\sqrt{2}$$

über, welche aber dann auch tatsächlich das Gleichungssystem löst, wie man durch Einsetzen sofort feststellt.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 3B - 341233B
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 \qquad (1)$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \qquad (2)$$
$$f(1) = 2 \qquad (3)$$

Mit $x = y = 0$ folgt wegen (2):

$$f(0) = 2f(0) - 1 \qquad ; \qquad f(0) = 1$$

Mit $x = 1$ und $y = -1$ erhält man wegen (2):

$$f(0) = f(1) + f(-1) - 3 \qquad ; \qquad f(-1) = 1 - 2 + 3$$
$$f(-1) = 2 \qquad ; \qquad y = -1$$

liefert in (1):

$$f(-x) = f(x) \cdot f(-1) - f(x) - f(-1) + 2$$
$$f(-x) = 2f(x) - f(x) - 2 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade. Setzen wir nun $y = -x$ in (2):

$$f(0) = f(x) + f(x) + 2x(-x) - 1$$
$$1 = 2f(x) - 2x^2 - 1$$

Dann folgt letztlich

$$f(x) = x^2 + 1$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 4 - 341234
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):
(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Für $n = 4$ (und daher natürlich auch für $n = 2,3$) kann man eine solche n-elementige Teilmenge M von $\mathbb{N}$ noch leicht finden, z.B. $M = \{0,1,2,3\}$. Sind dann nämlich $x,y \in M$ und ist $x \neq y$, so gilt für sie $0 < |x \pm y| < 7$, was somit $x \pm y \equiv 0 \mod 7$ definitiv ausschließt.

Um zu zeigen, dass dies für $n > 4$ nicht mehr möglich ist, betrachten wir nun die Partition $P = \{\{0\},\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$ von $\{0,1,...,6\}$ und dazu irgendeine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ mit mindestens 5 Elementen.
Denken wir uns nun zu jedem Element in M jenes Element in $\{0,1,...,6\}$ zugeordnet, zu der es mod 7 kongruent ist, so muss es dann nach dem Schubfachprinzip wegen $|M| \geq 5$ eine 2-elementige Klasse von P geben, deren zwei Elemente alle bei dieser Zuordnung "getroffen" werden. Die Summe der ihnen entsprechenden Elemente von M ist aber dann nach Konstruktion von P durch 7 teilbar, q.e.d.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 5 - 341235
Man beweise:
Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem sei O der Ursprung und die drei Punkte A,B,C liegen jeweils auf den Koordinatenachsen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor der durch die Punkte A,B,C aufgespannten Ebene berechnet man am einfachsten durch das Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Die normierte Ebenengleichung lautet dann

$$\vec{n}^0 \vec{x} - \vec{n}^0 \vec{a} = 0$$

Die Höhe h auf das Dreieck ABC ist der Abstand des Ursprungs von dieser Ebene, so dass

$$h = |\vec{n}^0 \vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Laut Aufgabenstellung muss gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Quadrieren und mit 3 multiplizieren:

$$\frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \leq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Links steht des harmonische Mittel der drei Werte a^2,b^2,c^2, rechts das arithmetische. Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel, die als bekannt vorausgesetzt wird, ist diese Ungleichung erfüllt.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 6 - 341236
Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right]$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leq z < g+1$ gilt.

Wir erweitern zunächst jeden Bruch wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})} = \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

Dann sei die eingeklammerte Summe

$$s = -\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-+...-\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}\right) \tag{1}$$

Wir nutzen nun folgende Ungleichung:

$$\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) \tag{2}$$

Beweis:

$$2\sqrt{k}-2\sqrt{k-\frac{1}{2}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1} < 2\sqrt{k-\frac{1}{2}}$$

$$k+k-1+2\sqrt{k(k-1)} < 4k-2$$

$$2\sqrt{k^2-k} < 2k-1$$

$$4k^2-k < 4k^2-4k+1$$

Das ist offensichtlich immer erfüllt. Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(n^2-1)}$$

$$s < \frac{1}{2}\sqrt{n^2-1} < \frac{1}{2}n$$

$$s < \frac{1}{2}n \tag{3}$$

Wir stellen nun die Summe anders dar, indem wir die Summanden anders gruppieren:

$$s = -1-(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{5}-\sqrt{4})-...-(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2-3})+\sqrt{n^2-1}$$

$$s = \sqrt{n^2-1}-1-\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}\right) \tag{4}$$

Wir modifizieren (2), indem wir dort k durch $k+\frac{1}{2}$ ersetzen:

$$\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}<\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right) \tag{2a}$$

Wir setzen in (4) ein und erhalten:

$$s>\sqrt{n^2-1}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)}\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)$$

Auch das ist wieder eine Teleskopsumme, und daher:

$$s>\sqrt{n^2-1}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}(n^2-3)+\frac{1}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$s>\sqrt{n^2-1}-1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2-2}-1\right)$$

$$s>\sqrt{n^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{n^2-2}-\frac{1}{2} \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\sqrt{n^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{n^2-2}>\frac{1}{2}n$$

$$2\sqrt{n^2-1}>n+\sqrt{n^2-2}$$

$$4n^2-4>n^2+n^2-2+2n\sqrt{n^2-2}$$

$$n^2-1>n\sqrt{n^2-2}$$

$$n^4-2n^2+1>n^4-2n^2$$

Auch das ist immer erfüllt, so dass wir in (5) setzen können:

$$s>\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n-1)$$

Dies zusammen mit Gleichung (3) ergibt

$$\frac{1}{2}(n-1)<s<\frac{1}{2}n$$

Da n eine ungerade Zahl sein soll, gilt offensichtlich

$$g=\frac{n-1}{2}$$

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

2.Lösung:
Sei

$$s:=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}<2s<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}.$$

Mit der für alle $k\geq 0$ gültigen Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

folgt

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}=$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\pm\cdots+\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2-1}=-\sqrt{1}+\sqrt{n^2}=n-1$$

und analog

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}\pm\cdots+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2}=\sqrt{n^2-1}-\sqrt{0}=\sqrt{n^2-1}.$$

Damit gilt $n-1<2s<\sqrt{n^2-1}<\sqrt{n^2}=n$, also $\frac{n-1}{2}<s<\frac{n}{2}$ und damit, da n ungerade ist, $[s]=\frac{n-1}{2}$.

Aufgabe gelöst von cyrix

9.36.4 IV. Runde 1994, Klasse 12

Aufgabe 1 - 341241
Man beweise:
Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl x die Zahl $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses x und jede positive ganze Zahl n auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

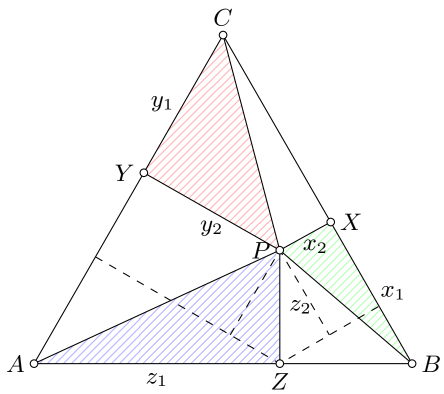
Beweis mit Induktion:
Für $n = 1$ gilt die Aussage nach Voraussetzung. Sei $n \geq 1$ und die Aussage für alle Exponenten 1,...,n bewiesen. Wir haben

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}},$$

sodass $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sich als Summe von Produkten ganzer Zahlen zusammensetzt. Induktiv folgt die Behauptung.

Aufgabe gelöst von Kornkreis

Aufgabe 2 - 341242
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BXP, CYP, AZP nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.



Die Summe der drei Flächeninhalte ist

$$F = \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}y_1y_2 + \tfrac{1}{2}z_1z_2$$

Bekanntermaßen sind $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mithilfe der gestrichelten Hilfslinien erkennt man folgende Zusammenhänge:

$$a - y_1 = \tfrac{1}{2}z_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$y_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}z_2$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(a - z_1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$x_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \tfrac{1}{2}z_2$$

Das setzen wir alles in die Flächenformel ein:

$$2F = \left(\tfrac{1}{2}(a - z_1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \tfrac{1}{2}z_2\right) + \left(a - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}z_2\right) + z_1z_2$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}(a-z_1)^2 + \frac{1}{2}(a-z_1)z_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}az_1 - \frac{1}{2}az_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}z_1^2 - \frac{1}{2}z_1z_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + z_1z_2$$

$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) z_1 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\right) z_2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) z_1z_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_2^2$$

$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$F = \frac{1}{2}F_{ABC}$$

Die Summe der drei Teildreiecke ist also immer die Hälfte des Flächeninhalts des Gesamtdreiecks ABC.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 3 - 341243
Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \binom{2n+1}{k}$$

gilt.
Hinweis: Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ definiert man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, wobei für ganze Zahlen m mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$ [ausführlicher: $0! = 1$ sowie $m! = (m-1)! \cdot m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$].

Beweis: Indem man

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \left(\frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n-k+2)!} + \frac{(2n+1)!}{(k+1)!(2n-k+1)!}\right) \frac{k!(2n-k+1)!}{(2n+1)!}$$

durch Kürzen noch vereinfacht, erhält man schließlich

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \frac{k}{2n-k+2} + \frac{2n-k+1}{k+1} = \frac{2\left((k-n)(k-(n+1)) + (n+1)^2\right)}{(k+1)(2n-k+2)}$$

Wir somit somit nur noch die Frage klären, für welche $k \in \{1,2,...,2n\}$ der rechtsstehende Bruch den kleinsten Wert annimmt. Was seinen Zähler betrifft, ist dies klarerweise für $k = n$ und $k = n+1$ der Fall, für welche Werte er sein Minimum $2(n+1)^2$ annimmt. Für diese beiden Werte von k nimmt aber auch gleichzeitig sein Nenner, den wir auch in der Form

$$(k+1)(2n-k+2) = \frac{1}{4}\left((2n+3)^2 - (2n-2k+1)^2\right)$$

schreiben können, sein Maximum, nämlich $(n+1)(n+2)$ an. Insgesamt wird dieser Bruch also für $k = n$ bzw. $k = n+1$ kleinstmöglich und hat dann den Wert

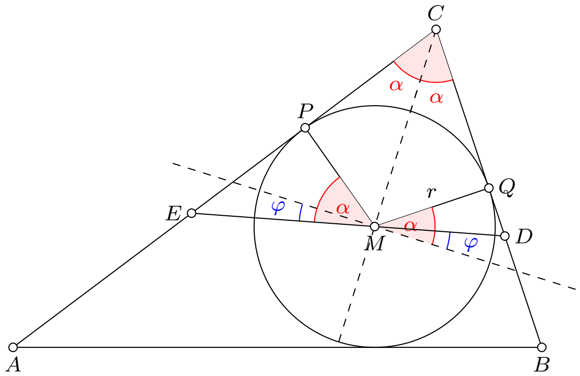
$$\frac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = 2\,\frac{n+1}{n+2}$$

für alle anderen Werte von $k \in \{1,2,...,2n\}$ ist er dagegen größer, was dann die Behauptung hier beweist.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 4 - 341244
Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E werde vorausgesetzt:
D liegt auf der Strecke BC und ist von C verschieden, E liegt auf der Strecke AC und ist von C verschieden.
Die Strecke DE geht durch den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC. Der Inkreisradius des Dreiecks ABC sei r, der Flächeninhalt des Dreiecks CDE sei F.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

Die Fläche des Dreiecks CDE setzt sich zusammen aus den vier rechtwinkligen Teildreiecken MDQ, MQC, MCP und MPE. Der Inkreisradius r ist eine Kathete jedes dieser vier Teildreiecke. Der Flächeninhalt des erst- und letztgenannten Dreiecks sind abhängig von dem Winkel φ, der die Lage der Strecke DE festlegt und der der Winkel zwischen dieser Strecke und der Senkrechten auf die Winkelhalbierende MC ist.



Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte des Produktes aus den beiden Katheten. Als Gesamtfläche ergibt sich:

$$F(\varphi) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}r \cdot \frac{r}{\tan\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}r \cdot r\tan(\alpha-\varphi) + \tfrac{1}{2}r \cdot r\tan(\alpha+\varphi)$$

$$F(\varphi) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + \tfrac{1}{2}r^2\tan(\alpha-\varphi) + \tfrac{1}{2}r^2\tan(\alpha+\varphi)$$

Man erkennt, dass $F(\varphi)$ eine gerade Funktion ist, da $F(-\varphi) = F(\varphi)$ ist. Gerade, stetige und differenzierbare Funktionen haben immer ein lokales Extremum bei null. In diesem Fall ist es klarerweise ein Minimum, wie man sich schon aus anschaulichen geometrischen Gründen leicht klar machen kann. Die minimale Fläche ist daher

$$F_{min} = F(0) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + r^2\tan\alpha = r^2\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right)$$

$$F_{min} = r^2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$F_{min} = \frac{2r^2}{\sin 2\alpha} \geq 2r^2 \quad \forall \quad 0 < 2\alpha < \pi$$

q.e.d.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

Aufgabe 5 - 341245
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen x,y, für die gilt:

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$$

Wegen

$$8x^2 - 6x + 8 = 8\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{55}{8}$$

gilt zunächst

$$y^3 \geq x^3 + \frac{55}{8}$$

woraus in Verbindung mit $x,y \in \mathbb{N}$ und der Tatsache, dass wegen

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) = 8x^2 - 6x + 8$$

x und y die gleiche Parität haben müssen, dann auch sofort

$$y \geq x + 2$$

folgt. Hier gilt aber dann sogar das Gleichheitszeichen, denn wäre $y = x + k$ für ein $k \geq 3$, so könnte wegen

$$\forall x \in \mathbb{N}: \; y^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2 + k^3 > x^3 + 8x^2 - 6x + 8$$

eine Gleichheit dann nicht mehr auftreten, wie man durch einen Größenvergleich der Koeffizienten der beiden Polynomfunktionen in x sofort sieht.

Der Rest ist einfach, da nun mithilfe der Substitution $y = x + 2$ die Ausgangsgleichung eine einfache Gleichung in x allein wird, nämlich

$$(x + 2)^3 - x^3 - 8x^2 + 6x - 8 = 2x(9 - x) = 0$$

aus der wir die einzigen beiden Lösungen

$$(x,y) \in \{(0,2),(9,11)\}$$

der Aufgabe dann unmittelbar ablesen können.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6A - 341246A
Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen a und b sei $(x_n)_{n=0,1,2,...}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

definiert ist.
Man beweise: Für jede Wahl von a und b enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

Beweis: Sei p ein beliebiger Primteiler von $x_1 = a + b$. Gilt dann auch $p \mid a$, so würde daraus auch sofort $p \mid b = (a + b) - a$, d.h., mit Ausnahme von $x_0 = 1$ wären dann alle Folgenglieder durch p teilbar und da die Folge streng monoton wächst, würde nicht nur $p \mid x_n$, sondern auch gleichzeitig $x_n > x_1 \geq p$ für $n > 1$ gelten, woraus die Behauptung in trivialer Weise folgt.
Sei also im Folgenden $p \nmid a$ vorausgesetzt und (y_n) die aus (x_n) durch die Definition

$$y_n = x_n \mod n \quad (n \in \mathbb{N})$$

abgeleitete Folge. Diese muss dann, da es ja nur endlich viele Restklassen mod p gibt, notwendigerweise periodisch werden. Ist nun $m > 1$ minimal so gewählt, dass $y_m = y_k$ für ein $k \in \{0,1,...,m - 1\}$ gilt, so muss dann $k = 0$ sein, denn andernfalls könnte man aus

$$y_{m-1} + b = y_m = y_k = ay_{k-1} + b \mod p$$

indem man hier $-b$ beidseitig addiert und anschließend die Gleichung mit dem wegen $p \not| a$ existierenden Inversen $a^{-1} \mod p$ multipliziert, sofort schließen, dass auch $y_{m-1} = y_{k-1}$ gelten müsste, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von m. Es gilt somit auch $y_{m+1} = y_1 = 0$ bzw. allgemeiner

$$y_{km+1} = y_1 = 0$$

und auf die ursprüngliche Folge bezogen (x_n) bezogen bedeutet dies

$$p \mid x_{km+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Wieder mit der ev. Ausnahme von x_1, für welches ja auch $x_1 = p$ gelten könnte, wären dann mit einer ähnlichen Schlussweise wie oben wieder alle Folgenglieder $x_{km+1}, k = 0,1,2,...$, also dann jedenfalls unendlich viele, zusammengesetzt, q.e.d.

Aufgabe gelöst von weird

Aufgabe 6B - 341246B
Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel:
In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl.
Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.
Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.

Wenn die Funktion
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
drei reelle Lösungen haben soll, dann hat die Ableitung zwei reelle Nullstellen, also:
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
Die Lösungen für $f'(x) = 0$ lauten:
$$x_{1,2} = -\frac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$
Sollte P als erstes den Koeffizienten a vorgeben, gewinnt Q auf jeden Fall, wenn er $b > \frac{1}{3}a^2$ wählt, da dann der Term unter der Wurzel negativ wird, die Funktion damit keine Extremata aufweist und folglich auch keine drei reellen Nullstellen. P's Strategie muss somit zunächst sein, entweder sicherzustellen, dass es auf jeden Fall zwei Extremata gibt, indem er ein $b < 0$ vorgibt, oder er beginnt mit der Vorgabe von c. Dann kann Q im nächsten Schritt zumindest nicht die Negativität des Wurzelterms erzwingen, da P als letzten Zug $a^2 > 3b$ wählen könnte.
Wir kürzen wie folgt ab:
$$w = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$
Setzt man die Nullstellen ein, so liegen die Extremata bei
$$y_{1,2} = \left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right) + c$$
$$y_{1,2} = -\frac{1}{27}a^3 \pm \frac{1}{3}a^2 w - aw^2 \pm w^3 + \frac{1}{9}a^3 \mp \frac{2}{3}a^2 w + aw^2 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$
$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 \mp \frac{1}{3}a^2 w \pm w^3 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$
$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(-\frac{1}{3}a^2 + w^2 + b\right)$$
$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(w^2 - 3w^2\right)$$
$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \mp 2w^3$$
Wenn es drei Lösungen geben soll, dann müssen die beiden Funktionswerte $y_{1,2}$ unterschiedliche Vorzeichen haben, was genau dann der Fall ist, wenn
$$\left|\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right| < 2w^3$$
Angenommen, P gibt wie oben gesagt ein $b < 0$ vor, wodurch natürlich auch $w > 0$ gilt, dann kann er im letzten Zug auf jeden Fall den Sieg erzwingen:

1. Wenn Q ein a wählt, kann P einfach $c = \frac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3$ wählen. Dadurch ist die linke Seite der Ungleichung gleich null, sie ist damit erfüllt und P gewinnt.

2. Wenn Q ein c vorgibt, so kann P ein passendes a wählen, so dass die linke Seite der Ungleichung ebenso null wird, da die Funktion $g(x) = \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{3}bx + c$ auf jeden Fall eine reelle Nullstelle hat.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass P auf jeden Fall gewinnt, wenn sein erster Zug in der Vorgabe eines $b < 0$ besteht und er in seinem zweiten Schritt bei der Festlegung des dritten Koeffizienten dafür sorgt, dass $\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$ ist.

Aufgabe gelöst von MontyPythagoras

ABC-Mathematik-Olympiade

920 Aufgaben und Lösungen
der I. und II. Runde
der ABC-Mathematik-Olympiaden

Ab 1963 werden zur Ergänzung der Mathematik-Olympiaden der Klassen 5 bis 12 auch Mathematik-Olympiaden für die Unterstufe, die Klassenstufen 1 bis 4, durchgeführt.

Bis 1990 war die Kinderzeitschrift "ABC-Zeitung" maßgeblich an der Durchführung beteiligt. Deshalb wurde die Olympiade auch ABC-Mathematik-Olympiade genannt.
Die 1. Runde war ein Hausaufgabenrunde. Die erfolgreichsten Schüler konnten an der 2. Runde teilnehmen, eine Klausur im Rahmen der Schule, in zentralen Veranstaltungen der Pionierhäuser, Stationen der Jungen Naturforscher oder Klubhäusern.
Die erneut erfolgreichen Schüler erhielten eine Urkunde für erfolgreiche Teilnahme.

Der Wettbewerb ermöglichte es, besonders leistungsstarke Schüler zu erkennen und weiter zu fördern, und stellte eine gute Vorbereitung auf die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (für Klassen 5 bis 11/12) dar.

Der nachfolgende Text enthält 200 Aufgaben der ABC-Mathematik-Olympiade der Klassenstufe 1, 227 Aufgaben der Klasse 2, 250 Aufgaben der Klasse 3 und 243 Aufgaben der Klasse 4 der I. bis II. Runden der Jahre 1963 bis 1990. Für jede Aufgabe wird eine Lösung angegeben.
1990 wurde die Mathematik-Olympiade für die Unterstufe eingestellt und erst ab 2005 wieder für die Klassenstufen 3 und 4 reaktiviert.

Der nachfolgende Text ist eine nahezu identische Abschrift der Originaltexte.
Es wurden nur wenige Veränderungen vorgenommen. Die Rechtschreibung und Grammatik wurde der heutigen Form angepasst. Außerdem wurde die mathematische Symbolik an die heutige Form angepasst. Die Abbildungen weichen vom Original in der Form, jedoch nicht in der inhaltlichen Aussage ab.

10 Klassenstufe 1

10.1 3. Olympiade 1965

Die 1. und 2. Olympiade wurden nicht in der Klassenstufe 1 durchgeführt.

10.1.1 1. Runde 1965, Klasse 1

Aufgabe 1
Vor dem Zirkuszelt stehen Schüler einer ersten Klasse.
Die Kinder haben sich zu zweien aufgestellt. Die Lehrerin gibt immer 2 Eintrittskarten aus. An die Mädchen verteilt sie viermal 2 Karten und an die Jungen fünfmal 2 Karten.
Fragen:
a) Wieviel Mädchen wollen in den Zirkus?
b) Wieviel Jungen stehen vor dem Zirkus?
c) Wieviel Kinder erhalten von der Lehrerin eine Eintrittskarte?

a) 8 Mädchen ; b) 10 Jungen ; c) 18 Kinder.

Aufgabe 2
Im Zirkuszelt werden in der Pause Getränke verkauft. Der Kellner trägt auf seinem Tablett 5 Gläser Brause und 8 Gläser Malzbier.
Fragen:
a) Von welchem Getränk hat der Kellner mehr Gläser auf dem Tablett?
b) Von welchem Getränk hat der Kellner weniger Gläser auf dem Tablett? Stelle den Unterschied fest!

a) 3 Gläser Malzbier mehr ; b) 3 Gläser Brause weniger.

Aufgabe 3
Am nächsten Tage unterhalten sich die Kinder über die Vorführungen der Tiere. Klaus und Inge streiten sich.
Klaus sagt: "Es waren 2 Löwen und doppelt so viele Pferde, außerdem 4 Katzen und halb so viele Hunde."
Inge dagegen sagt: "Ich habe 4 Pferde und halb so viele Löwen, 2 Hunde und doppelt so viele Katzen gesehen."
Frage: Wer von den beiden Kindern hat nun recht? Gib die Zahl der Tiere an!

Es sind 12 Tiere, beide Kinder haben recht.

10.1.2 2. Runde 1965, Klasse 1

Aufgabe 1
Ich denke mir eine Zahl a und addiere 12. Das Ergebnis ist um 1 kleiner als 16.
Frage: Welche Zahl musst du für a einsetzen?

$a = 3$.

Aufgabe 2
Ich subtrahiere von 39 die Zahl m, und das Ergebnis ist größer als 32.
Frage: Wie groß kann m sein?

$m < 7$ oder $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oder m kann bis 6 sein.

10.2 4. Olympiade 1966

10.2.1 1. Runde 1966, Klasse 1

Aufgabe 1
Auf der Festwiese steht ein Karussell. Es hat 6 Sitze.
Frau Müller kommt mit 11 Kindern aus dem Hort. Alle Kinder dürfen nur einmal mit dem Karussell fahren.
Wieviel Kinder können erst bei der zweiten Runde mitfahren?

$11 - 6 = 5$; 5 Kinder können erst bei der 2. Runde Karussell fahren.

Aufgabe 2
Auch eine Lehrerin kommt mit ihren Schülern zum Festplatz.
Jeder Schüler darf nur einmal mit dem Karussell fahren. Das Karussell ist schon drei Runden gefahren.
Wieviel Schüler konnten mitfahren?

$3 \cdot 6 = 18$; 18 Kinder sind schon mit dem Karussell gefahren.

Aufgabe 3
Jetzt kommt Hans mit seinen beiden Geschwistern. Alle 3 wollen einmal Karussell fahren. Eine Fahrt kostet 10 Pfennig.
Er hat 50 Pfennig in der Tasche.
Wieviel Geld behält er übrig?

$3 \cdot 10 = 30$; $50 - 30 = 20$; Hans behält 30 Pfennig übrig.

10.2.2 2. Runde 1966, Klasse 1

Aufgabe 1

a	b	$a+b$	$12-a$
8	6		
5	7		
3	8		

a	b	$a+b$	$12-a$
8	6	14	4
5	7	12	7
3	8	11	9

Aufgabe 2

$$8+a<12$$
$$8+a=15$$
$$8-a>4$$

$8+a<12$	$0,1,2,3$	oder	$a<4$
$8+a=15$			$a<7$
$8-a>4$	$0,1,2,3$	oder	$a<4$

10.3 5. Olympiade 1967

10.3.1 1. Runde 1967, Klasse 1

Aufgabe 1
Rätsel: Ich bin Jünger als 13 und älter als 9 Jahre, wie alt kann ich sein?

Ich kann 10, 11 oder 12 Jahre alt sein.

Aufgabe 2
Im Tafelkasten liegt weiße und blaue Kreide. Zusammen sind es 6 Stück.
Es sind doppelt soviel Stück weiße Kreide wie blaue Kreide.
Nimm 6 Stäbchen und probiere, wie viel Stück von Jeder Sorte im Kasten liegen?

Im Tafelkasten liegen 4 Stück weiße Kreide und 2 Stück blaue Kreide.

Aufgabe 3

Suche immer zwei Zahlen, deren Summe gleich 11 ist!
Schreibe die Zahlen in die leeren Kästchen!
Schreibe jede Zahl nur einmal!

$$\square+\square=11$$
$$\square+\square=11$$
$$\square+\square=11$$
$$\square+\square=11$$

$$9+2=11; \qquad 8+3=11; \qquad 7+4=11; \qquad 6+5=11$$

oder kommutative Lösungen.

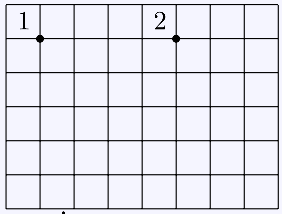
10.3.2 2. Runde 1967, Klasse 1

Aufgabe 1

$$\begin{array}{lll} 8+9=a & 6+a=13 & a+6=14 \\ 15-9=a & 12-a=3 & a-5=8 \end{array}$$

$a=17$; $a=7$; $a=8$; $a=6$; $a=9$; $a=13$.

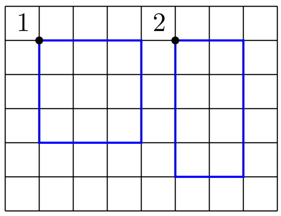
Aufgabe 2
Geometrisches Diktat:
"Beginne am Punkt mit der Zahl 1!
Zeichne einen Strich drei Kästchen weit nach rechts - dann drei Kästchen weit nach unten. Jetzt zeichne drei Kästchen weit nach links - und nun drei Kästchen weit nach oben!
Beginne jetzt am Punkt mit der Zahl 2!



Zeichne zwei Kästchen weit nach rechts - dann vier Kästchen weit nach unten!
Jetzt zeichne zwei Kästchen weit nach links - und nun vier Kästchen weit nach oben!

Erkennst du die beiden Figuren (oder Flächen) wieder?"

1) Quadrat ; 2) Rechteck



10.4 6. Olympiade 1968

10.4.1 1. Runde 1968, Klasse 1

Aufgabe 1
Der Schulgarten erhält einen neuen Drahtzaun. Von einem Pfahl zum anderen ist immer 1 Meter Abstand. 8 Meter sind bereits fertig.
Wieviel Pfähle wurden bisher gebraucht?

Es wurden 9 Pfähle gebraucht.

Aufgabe 2
Wer kann es?
Von den folgenden 5 Zahlen sollen 2 Zahlen gestrichen werden. Die Summe der restlichen Zahlen soll 10 sein. Die Zahlen heißen: 1, 2, 2, 5, 7.
Probiere und rechne!

$1+2+7=10$

Aufgabe 3
Addiere a zur Zahl 7! Die Summe soll kleiner als 10 sein. Wie groß kann a sein?

$a=0,1,2$

10.4.2 2. Runde 1968, Klasse 1

Aufgabe 1
Wie heißt die Zahl?
Wenn ich von 12 eine Zahl subtrahiere, erhalte ich 7. Rechne!

Die Zahl heißt 5.

Aufgabe 2
Zeichne eine Strecke von 8 cm Länge!

(Es dürfen Abweichungen bis zu 2 mm auftreten.)

10.5 7. Olympiade 1969

10.5.1 1. Runde 1969, Klasse 1

Aufgabe 1
Horst klebt 4 Wimpel. Regina und Ute kleben jeder ebenso viele Wimpel.
Wieviel Wimpel kleben die drei Kinder insgesamt?

$4 + 4 + 4 = 12$

Aufgabe 2
Zwei Vögel sitzen auf einer Stange 8 m voneinander entfernt.
Jetzt hüpft der eine Vogel 1 Meter auf den anderen zu. Der andere Vogel hüpft dann 2 Meter auf den ersten zu.
Wie weit sind die beiden Vögel jetzt voneinander entfernt?

Die Vögel sind jetzt 5 Meter voneinander entfernt.

Aufgabe 3
Nenne mindestens drei geometrische Figuren, die du kennst!

Rechteck, Kreis, Quadrat, Dreieck

10.5.2 2. Runde 1969, Klasse 1

Aufgabe 1
Welche Zahlen kannst du zu 9 addieren, so dass die Summe kleiner als 15 ist?

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5

Aufgabe 2
Zum Streichen des Gartenzaunes kaufte Vater 2 Dosen mit weißer Farbe. Er kaufte 2 Farbdosen mit grüner Farbe mehr.
Wieviel Dosen Farbe kaufte Vater zusammen?

$2 + 4 = 6$

10.6 8. Olympiade 1970

10.6.1 1. Runde 1970, Klasse 1

Aufgabe 1
Die Pioniere der 1. Klasse treiben Sport. Es kommen 15 Mädchen und 9 Jungen.
Wieviel Mädchen mehr als Jungen kamen zum Sport?

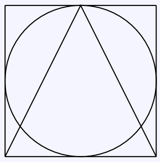
$15 - 9 = 6$

Aufgabe 2
Junge Pioniere möchten einer Patenbrigade eine Freude bereiten. 8 Pioniere fertigen ein Album an, und 9 Pioniere bekleben es mit schönen Bildern.
Wieviel Pioniere sind an dem Geschenk beteiligt?

$8 + 9 = 17$

Aufgabe 3

Zeichne ein Quadrat, ein Dreieck und einen Kreis! Schneide diese aus, und klebe sie aufeinander so dass ungefähr diese Figur entsteht!



(Beim Quadrat gelten Abweichungen der Maße von 2 mm noch als richtig. Dreieck und Kreis können beliebig groß sein, sollten aber dem angegebenen Verhältnis entsprechen).

10.6.2 2. Runde 1970, Klasse 1

Aufgabe 1

Rechne:	$12 + 7 = x$	$8 + x = 13$	$15 - 8 = x$
	$13 - x = 6$	$8 + a < 12$	$11 - c > 7$

$x = 19$; $x = 5$; $x = 7$; $x = 7$; $a = 0, 1, 2, 3$; $c = 0, 1, 2, 3$

Aufgabe 2
14 Pioniere waren im Puppentheater und fahren mit dem Bus nach Hause. Zuerst steigen 5 Pioniere aus und dann noch 4.
Wieviel Pioniere sind noch im Bus?

$14 - 5 - 4 = 5$

10.7 9. Olympiade 1971

10.7.1 1. Runde 1971, Klasse 1

Aufgabe 1
Peter und Uwe bauen gemeinsam ein Haus. Peter hat noch 9 Steine, Uwe hat noch 7 Steine.
Mit wie viel Bausteinen können Peter und Uwe weiterbauen?

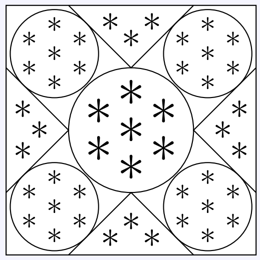
$9 + 7 = 16$

Aufgabe 2
Inge hilft Peter und Uwe mit einem Kran beim Bauen. 14 Steine liegen auf einem Haufen. Davon hebt der Kran 8 an das Haus.
Wieviel Steine bleiben übrig?

$14 - 8 = 6$

Aufgabe 3

Vor Barbaras Haus haben die Mieter schöne Blumen gepflanzt. Als Barbara von oben aus dem Fenster sieht, kann sie ein buntes Muster erkennen. Sie sieht kreisförmige und dreieckige Beete.
a) Wieviel dreieckige Beete sieht Barbara?
b) Wieviel kreisförmige Beete sieht Barbara?



a) 4 dreieckige Beete ; b) 5 kreisförmige Beete

10.7.2 2. Runde 1971, Klasse 1

Aufgabe 1
Ute denkt sich eine Zahl. Diese Zahl ist dreimal so groß wie 6.
Welche Zahl denkt sich Ute?

$6 + 6 + 6 = 18$

Aufgabe 2
Von x subtrahiere 7. Das Ergebnis ist 8.
Schreibe die Gleichung! Wie heißt die Zahl x?

$x - 7 = 8$; $x = 15$

10.8 10. Olympiade 1972

10.8.1 1. Runde 1972, Klasse 1

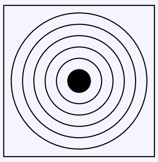
Aufgabe 1
Beim Langlauf hatten 8 Läufer ein weißes Sporthemd an. 4 Läufer hatten ein blaues Sporthemd an.
Wieviel Läufer waren zum Langlauf gestartet?

$8 + 4 = 12$, 12 Läufer waren gestartet.

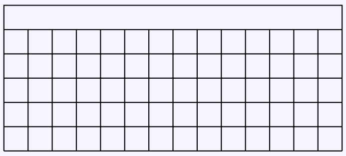
Aufgabe 2
Gabi Seyfert war bei den letzten Olympischen Spielen 19 Jahre alt. Die jüngste Eiskunstläuferin war 11 Jahre alt.
Wieviel Jahre war Gabi älter als die jüngste Läuferin?

$11 + x = 19$; $x = 8$. Gabi war 8 Jahre älter.

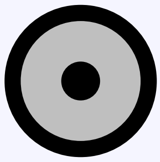
Aufgabe 3



Schießscheibe



Volleyballnetz



Diskus

Diese Dinge werden beim Sport gebraucht. Welche Formen erkennst du an ihnen?

Kreis, Quadrate oder Rechtecke und Kreise, Rechteck

10.8.2 2. Runde 1972, Klasse 1

Aufgabe 1
Zu jeder Mannschaft im Turnen gehören 6 Mann. Von den 3 besten Mannschaften erhält jeder Turner eine Medaille.
Wieviel Turner erhalten eine Medaille?

6 + 6 + 6 = 18; 18 Turner erhielten eine Medaille.

Aufgabe 2
Beim Kugelstoßen schafft der erste 19 Meter. Der zweite erreicht 2 Meter weniger.
Wieviel Meter erreicht der zweite?

19 - 2 = 17; Der zweite erreicht 17 Meter.

10.9 11. Olympiade 1973

10.9.1 1. Runde 1973, Klasse 1

Aufgabe 1
Drei Pioniere der 1. Klasse kleben für das Festival eine Wimpelkette. Peter bringt 6 Wimpel mit, Ute 7 Wimpel, Sabine 5 Wimpel.
Wieviel Wimpel kleben die Pioniere an die Wimpelkette?

6 + 7 + 5 = 18; Insgesamt sind es 18 Wimpel.

Aufgabe 2

$$9 + a < 13 \qquad a = ...$$
$$11 - x > 8 \qquad x = ...$$

$a = 0, 1, 2, 3$; $x = 0, 1, 2$

Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke von 4 cm Länge!
Dann zeichne eine Strecke, die 9 cm lang ist!
Um wieviel Zentimeter ist die erste Strecke kürzer als die zweite? Schreibe die Gleichung!

9 - 4 = 5 oder 4 + 5 = 9 oder $4 + x = 9$; $x = 5$

10.9.2 2. Runde 1973, Klasse 1

Aufgabe 1
Die Pioniere der ersten Klasse basteln für die Festivalgäste 15 Geschenke. 8 Geschenke sind schon fertig.
Wieviel Geschenke müssen noch gebastelt werden?

15 - 8 = 7 oder 8 + 7 = 15; oder $8 + x = 15$; $x = 7$

Aufgabe 2
Von 19 subtrahiere 7!
a) Schreibe die Gleichung auf!
b) Begründe deine Lösung mit der Grundaufgabe!

a) 19 - 7 = 12 ; b) 9 - 7 = 2

10.10 12. Olympiade 1974

10.10.1 1. Runde 1974, Klasse 1

Aufgabe 1
Holger leistet in zwei Familien Timurhilfe. Familie Müller wohnt in Nummer 9. Familie Arends wohnt 7 Häuser weiter.
Welche Hausnummer ist das?

Die richtige Hausnummer wird durch folgende Gleichung errechnet: 9 + 7 = 16

Aufgabe 2
Zum 25. Geburtstag unserer Republik erhalten noch viele Familien eine neue Wohnung. Ina steht vor einem Hausaufgang mit 10 Wohnungen. 7 Familien sind bereits eingezogen.
Wieviel Familien müssen noch einziehen?

10 - 7 = 3 oder 7 + 3 = 10 oder $7 + x = 10$; $x = 3$

Aufgabe 3

$$13 - 7 \qquad 11 + 6 + 2$$
$$8 + 5 \qquad 18 - 5 - 3$$

13 - 7 = 6; 11 + 6 + 2 = 19; 8 + 5 = 13; 18 - 5 - 3 = 10

10.10.2 2. Runde 1974, Klasse 1

Aufgabe 1
Alle Pioniere wetteifern um gute Taten zum Tag der Republik. Die Klasse 1a hat für 12 Mark Altstoffe gesammelt.
Die Klasse 1b hat 5 Mark weniger erreicht.
Wieviel Mark spendete die Klasse 1b?

12 - 5 = 7. Die Klasse 1b spendete 7 Mark.

Aufgabe 2
Zeichne ein Dreieck mit der Schablone!
a) Benenne die Eckpunkte A, B, C!
b) Wie heißen die entstandenen Strecken? (Bezeichne sie nach ihren Randpunkten!)

Strecken: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ oder $\overline{CA}$.

10.11 13. Olympiade 1975

10.11.1 1. Runde 1975, Klasse 1

Aufgabe 1

$$3+5 \qquad 8+7$$
$$9-5 \qquad 13-6$$

3 + 5 = 8; 8 + 7 = 15; 9 - 5 = 4; 13 - 6 = 7

Aufgabe 2

$$4+a<8 \qquad a=...$$
$$7-b>3 \qquad b=...$$

$a=0,1,2,3$; $b=0,1,2,3$

Aufgabe 3
Petra, Holger und Ines wollen sowjetischen Soldaten eine Wimpelkette schenken. Petra und Holger kleben zusammen 9 Wimpel. Ines bringt 4 Wimpel mit.
Wieviel Wimpel können sie an die Wimpelkette kleben?

9 + 4 = 13; Sie können 13 Wimpel an die Kette kleben.

10.11.2 2. Runde 1975, Klasse 1

Aufgabe 1

$$4+5+3 \qquad 7+8+2$$
$$13-6-3 \qquad 16-9-1$$

4 + 5 + 3 = 12; 7 + 8 + 2 = 17; 13 - 6 - 3 = 4; 16 - 9 - 1 = 6

Aufgabe 2
Zeichne zwei Strecken:
die 1. Strecke $\overline{AB}=8$ cm, die 2. Strecke $\overline{CD}$ soll 2 cm kürzer sein als die Strecke $\overline{AB}$!

Strecke $\overline{CD}=6$ cm

10.12 14. Olympiade 1976

10.12.1 1. Runde 1976, Klasse 1

Aufgabe 1

$$3+2+4 \qquad 7-3-2 \qquad 9-4-3$$

3 + 2 + 4 = 9; 7 - 3 - 2 = 2; 9 - 4 - 3 = 2

Aufgabe 2
Zeichne eine Strecke von 7 cm Länge, eine zweite Strecke von 4 cm Länge und eine dritte Strecke von 5 cm Länge!
Benenne die Randpunkte der Strecken!

Aufgabe 3
In Klasse 1a erhalten 6 Jungpioniere für gutes Lernen ein Buch. In der Klasse 1b erhalten ebenso viele Jungpioniere für gutes Lernen ein Buch.
Wieviel Jungpioniere erhalten ein Buch?

6 + 6 = 12; 12 Jungpioniere erhalten ein Buch.

10.12.2 2. Runde 1976, Klasse 1

Aufgabe 1

$$4 + a < 7 \qquad a = ...$$
$$16 - e > 12 \qquad e = ...$$

$a = 0, 1, 2$; $e = 0, 1, 2, 3$

Aufgabe 2
Subtrahiere von 9 die Zahl 5! Schreibe dazu eine Gleichung auf!

9 - 5 = 4

10.13 15. Olympiade 1977

10.13.1 1. Runde 1977, Klasse 1

Aufgabe 1
Rechne:

$$5 + 3 - 7 \qquad 3 + 5 - 1$$
$$4 + 2 + 0 \qquad 2 + 4 + 4$$

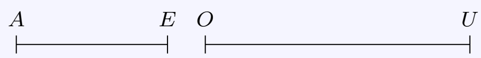
5 + 3 - 7 = 1 ; 3 + 5 - 1 = 7 ; 4 + 2 + 0 = 6 ; 2 + 4 + 4 = 10

Aufgabe 2

$$7 - 2 - 5 \qquad 7 - 5 - 1$$
$$9 + a = 10 \qquad a = ...$$
$$10 - e = 9 \qquad e = ...$$

7 - 2 - 5 = 0 ; 7 - 5 - 1 = 1 ; $9 + a = 10$; $a = 1$; $10 - e = 9$; $e = 1$

Aufgabe 3
Miss die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{OU}$, und gib die Länge in cm an!



Aufgabe 4
Peter hat drei Schwestern. Sein Vater gibt jedem Kind der Familie zwei Bücher.
Wieviel Bücher gibt der Vater seinen Kindern?

2 + 2 + 2 + 2 = 8. Der Vater gibt 8 Bücher seinen Kindern.

10.13.2 2. Runde 1977, Klasse 1

Aufgabe 1

$$13 + a = 15 \qquad a = ...$$
$$13 - e = 10 \qquad e = ...$$
$$13 + e < 15 \qquad e = ...$$

$13 + a = 15$, $a = 2$; $13 - e = 10$, $e = 3$; $13 + e < 15$, $e = 0, 1$

Aufgabe 2
Zeichne eine Strecke $\overline{AE}$ mit der Länge $\overline{AE} = 5$ cm.

10.14 16. Olympiade 1978

10.14.1 1. Runde 1978, Klasse 1

Aufgabe 1
Rechne:

$$5 + 2 + 3 \qquad 10 - 7 + 2$$
$$6 - 3 - 3 \qquad 15 + 4 + 0$$
$$18 - 4 - 2 \qquad 13 + 4 - 1$$

5 + 2 + 3 = 10; 10 - 7 + 2 = 5; 6 - 3 - 3 = 0; 15 + 4 + 0 = 19; 18 - 4 - 2 = 12; 13 + 4 - 1 = 16

Aufgabe 2

$$7 < 9, \quad \text{denn} \quad 7 + 2 = 9 \qquad 1 < 6, \quad \text{denn} \quad ...$$

1 < 6, denn 1 + 5 = 6

Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke $\overline{AE}$ von 3 cm Länge!
Zeichne eine zweite Strecke $\overline{LM}$, die 2 cm länger ist als $\overline{AE}$!
Bezeichne die Randpunkte der beiden Strecken!

Aufgabe 4
Aus der Klasse 1a erhalten 3 Pioniere für gute Leistungen Urkunden. Ebenso viele Pioniere der Klasse 1b bekommen Urkunden.
Wieviel Pioniere werden ausgezeichnet?

3 + 3 = 6. Es wurden 6 Pioniere ausgezeichnet.

10.14.2 2. Runde 1978, Klasse 1

Aufgabe 1

a	$10 + a$
3	
2	

a	$10 + a$
3	13
2	12

Aufgabe 2
$b - 6 = 4$. Bestimme b.

$b = 10$

Aufgabe 3
$8 - a = 6$. Bestimme a.

$a = 2$

Aufgabe 4
Subtrahiere von 10 eine Zahl so, dass du 8 erhältst!
Schreibe eine Gleichung!

$10 - 2 = 8$

Aufgabe 5
Welche Zahlen liegen zwischen 11 und 15?

Zwischen 11 und 15 liegen die Zahlen 12, 13 und 14.

10.15 17. Olympiade 1979

10.15.1 1. Runde 1979, Klasse 1

Aufgabe 1

$3 + 2 - 1$ $\qquad$ $13 + 2 - 1$

$6 + 0 + 4$ $\qquad$ $16 + 0 + 4$

3 + 2 - 1 = 4; 13 + 2 - 1 = 14; 6 + 0 + 4 = 10; 16 + 0 + 4 = 20

Aufgabe 2

$12 + 5 - 4$ $\qquad$ $13 - 3 + 2$

$17 + 2 + 0$ $\qquad$ $17 - 5 - 1$

12 + 5 - 4 = 13; 13 - 3 + 2 = 12; 17 + 2 + 0 = 19; 17 - 5 - 1 = 11

Aufgabe 3
Bilde zu je 3 Zahlen eine Gleichung!

7	6	13
8	0	8
10	10	0
12	6	6

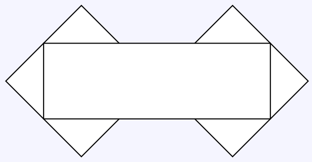
z.B. 7 + 6 = 13; 8 + 0 = 8; 10 = 10 + 0; 12 - 6 = 6

Aufgabe 4
Am Geburtstag unserer Republik wird ein neues Pionierhaus eingeweiht. Aus unserer Schule nehmen 7 Jungen und 8 Mädchen an der Feier teil.
Wie viel Schüler unserer Schule nehmen an der Feier teil?

7 + 8 = 15. Es nehmen 15 Schüler an der Feier teil.

Aufgabe 5

Wie viel Dreiecke und wie viel Rechtecke findest du?



1 Rechteck, 6 Dreiecke

10.15.2 2. Runde 1979, Klasse 1

Aufgabe 1
Ordne die Zahlen der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

15 2 11 0 6 14

0 2 6 11 14 15

Aufgabe 2

a	$10-a$
2	
5	
10	
0	

a	$10-a$
2	8
5	5
10	0
0	10

Aufgabe 3
Errechne die Summe der Zahlen 18 und 2!

18 + 2 = 20

Aufgabe 4
Bestimme die Zahlen x.
a) $8+x=12$, b) $16-x=16$, c) $8+x<11$

a) $x=4$; b) $x=0$; c) $x=0,1,2$

10.16 18. Olympiade 1980

10.16.1 1. Runde 1980, Klasse 1

Aufgabe 1

$3+3+3$ $\qquad$ $4-4+4$

$7+0-7$ $\qquad$ $8-1-6$

3 + 3 + 3 = 9; 4 - 4 + 4 = 4; 7 + 0 - 7 = 0; 8 - 1 - 6 = 1

Aufgabe 2

$13+2-5$ $\quad$ $10-5-5$

$18-3+5$ $\quad$ $14+0+4$

13 + 2 - 5 = 10; 10 - 5 - 5 = 0; 18 - 3 + 5 = 20; 14 + 0 + 4 = 18

Aufgabe 3

$9+b=12$ $\quad$ $b=...$

$11-a=5$ $\quad$ $a=...$

$b=3$; $a=6$

Aufgabe 4
Aus der Klasse 1a der Ernst-Thälmann-Oberschule beteiligen sich an einem Pioniersportfest 6 Schüler, aus der Klasse 1b 7 Schüler und aus der Klasse 1c 5 Schüler.
Wieviel Schüler beteiligen sich aus allen 3 ersten Klassen an dem Pioniersportfest?

6 + 7 + 5 = 18; 18 Schüler beteiligen sich an dem Sportfest.

Aufgabe 5
Zeichne eine Strecke $\overline{AE}$ die 2 cm lang ist!
Zeichen eine Strecke $\overline{IU}$, die um 3 cm länger als die Strecke $\overline{AE}$ ist.

(Genauigkeit der Strecken ±1 mm), Strecke $\overline{IU}=5$ cm

Aufgabe 6
Bestimme die Zahl, die um 7 kleiner ist als 14! Schreibe eine Gleichung!

14 - 7 = 7. Die Zahl ist 7.

10.16.2 2. Runde 1980, Klasse 1

Aufgabe 1

i	e	$i-e$
13	4	
10	5	
17	9	
11	0	

i	e	$i-e$
13	4	9
10	5	5
17	9	8
11	0	11

Aufgabe 2

a	b	$a+b$
9	9	
7	6	
8	4	
4	7	

a	b	$a+b$
9	9	18
7	6	13
8	4	12
4	7	11

Aufgabe 3
Schreibe auf
a) den Nachfolger von 19
b) den Vorgänger von 1
c) alle Zahlen, die zwischen 8 und 12 liegen!

a) Nachfolger 20; b) Vorgänger 0; c) Zwischen 8 und 12 liegen 9, 10 und 11.

Aufgabe 4
Vergleiche und setze das richtige Zeichen!

8	12
10	10
0	1
9	6

$8 < 12$; $10 = 10$; $0 < 1$; $9 > 6$

10.17 19. Olympiade 1981

10.17.1 1. Runde 1981, Klasse 1

Aufgabe 1
Aus der Klasse 1a nehmen 10 Jungpioniere an der Messe der Meister von Morgen teil. Aus der Klasse 1b sind es genau so viele Jungpioniere.
Wieviel Jungpioniere beteiligen sich aus beiden Klassen an der Messe der Meister von Morgen?

10 + 10 = 20. 20 Jungpioniere beteiligen sich an der Messe der Meister von Morgen.

Aufgabe 2

$$7-5-2 \qquad 9+0-4$$
$$10-3+3 \qquad 2+2+2$$

7 - 5 - 2 = 0; 9 + 0 - 4 = 5; 10 - 3 + 3 = 10; 2 + 2 + 2 = 6

Aufgabe 3

$$11+4-5 \qquad 13-3+0$$
$$20-5-5 \qquad 12+4+4$$

11 + 4 - 5 = 10; 13 - 3 + 0 = 10; 20 - 5 - 5 = 10; 12 + 4 + 4 = 20

Aufgabe 4
Bilde zu je 3 Zahlen eine Gleichung!

7 2 5 — 6 0 6

8 4 4 — 1 9 10

7 -2 = 5 oder 7 = 2 + 5; 8 - 4 = 4 oder 8 = 4 + 4; 6 + 0 = 6, 6 - 0 = 6 oder 6 = 0 + 6; 1 + 9 = 10

Aufgabe 5
Schreibe alle Zahlen auf, die kleiner als 3 sind!

0, 1, 2

Aufgabe 6
Zeichne drei Strecken! Zwei sollen gleich lang sein, die dritte soll kürzer als die anderen sein.

(3 Strecken sind gezeichnet; 2 Strecken sind gleich lang, die dritte Strecke ist kürzer)

10.17.2 2. Runde 1981, Klasse 1

Aufgabe 1
Schreibe zu folgenden Zahlen den Vorgänger und den Nachfolger auf: 2; 9; 1.

1, 3 ; 8, 10 ; 0, 2

Aufgabe 2

b	$9-b$
4	
9	
5	
0	

b	$9-b$
4	5
9	0
5	4
0	9

Aufgabe 3

a	$14+a$
6	
5	
4	
1	

a	$14+a$
6	20
5	19
4	18
1	15

Aufgabe 4
Errechne die Differenz der Zahlen 10 und 2.

10 - 2 = 8. Die Differenz ist 8.

10.18 20. Olympiade 1982

10.18.1 1. Runde 1982, Klasse 1

Aufgabe 1

$10 - 6 - 4$ $\quad$ $12 + 8 - 3$

$11 + 5 + 0$ $\quad$ $18 - 6 + 6$

10 - 6 - 4 = 0; 12 + 8 - 3 = 17; 11 + 5 + 0 = 16; 18 - 6 + 6 = 18

Aufgabe 2

$17 - 6$ $\quad$ $20 - 1$

$12 + 7$ $\quad$ $20 + 0$

17 - 6 = 11; 20 - 1 = 19; 12 + 7 = 19; 20 + 0 = 20

Aufgabe 3

3. Bestimme die Zahlen x:

$x + 4 = 5$ $\quad$ $20 - 8 = x$

$x - 7 = 1$ $\quad$ $9 + x < 11$

$x = 1$; $x = 12$; $x = 8$; $x = 0, 1$

Aufgabe 4

Welche Zahlen liegen zwischen 16 und 20?

17, 18, 19

Aufgabe 5

Alle 20 Jungpioniere der Klasse 1a, die sich an der ABC-Aktion "Schnüffelnase" beteiligen, treffen sich am Nachmittag an der Schule.

16 Jungpioniere sind schon da, wieviel fehlen noch?

16 + 4 = 20 oder $16 + x = 20$ oder $20 - x = 16$: $x = 4$. Es fehlen noch 4 Jungpioniere.

Aufgabe 6

Zeichne eine Schmuckkante!

Verwende 3 Dreiecke, 2 Kreise, 4 Vierecke!

(Bedingung ist die Anzahl der Figuren und die Sauberkeit der Zeichnung. Die Größe, den Abstand und die Reihenfolge der geometrischen Figuren können die Schüler frei wählen.)

10.18.2 2. Runde 1982, Klasse 1

Aufgabe 1

Ordne die Zahlen der Größe nach. $\quad$ 7 $\quad$ 11 $\quad$ 20 $\quad$ 0 $\quad$ 19 $\quad$ 3

0 $\quad$ 3 $\quad$ 7 $\quad$ 11 $\quad$ 19 $\quad$ 20

Aufgabe 2
Berechne die Summe der Zahlen 11 und 9!

11 + 9 = 20. Die Summe ist 20.

Aufgabe 3

x	$10-x$
1	
2	
7	
0	

x	$10-x$
1	9
2	8
7	3
0	10

Aufgabe 4

a	$12+a$
7	
3	
1	
4	

a	$12+a$
7	19
3	15
1	13
4	16

10.19 21. Olympiade 1983

10.19.1 1. Runde 1983, Klasse 1

Aufgabe 1
In einer Hortgruppe sind 17 Schüler. Davon lesen 10 Jungen und 7 Mädchen die ABC-Zeitung. Wie viel Kinder der Gruppe lesen die ABC-Zeitung?

10 + 7 = 17. 17 Schüler lesen die ABC-Zeitung. Alle Schüler der Hortgruppe lesen die ABC-Zeitung.

Aufgabe 2

$$2+2+2 \qquad 5+5-5$$
$$8+0-8 \qquad 9-2-6$$

2 + 2 + 2 = 6; 5 + 5 - 5 = 5; 8 + 0 - 8 = 0; 9 - 2 - 6 = 1

Aufgabe 3

$$18-8 \qquad 11+9$$
$$20-20 \qquad 14-0$$

18 - 8 = 10; 11 + 9 = 20; 20 - 20 = 0; 14 - 0 = 14

Aufgabe 4
Bestimme die Zahlen x:

$$8 - x > 6 \qquad 8 + x = 10 \qquad 5 - x = 0$$

$x = 0, 1$; $x = 2$; $x = 3$

Aufgabe 5
Gib bei den folgenden Zahlen den Vorgänger und den Nachfolger an.

10 1 15

9, 11; 0, 2; 14, 16

Aufgabe 6

e	$e-7$
17	
7	
20	
18	

e	$e-7$
17	10
7	0
20	13
18	11

Aufgabe 7
Zeichne:

Strecke	Länge
$\overline{OA}$	6 cm
$\overline{NL}$	ebenso lang wie $\overline{OA}$
$\overline{FR}$	1 cm kürzer als $\overline{OA}$

(Abweichung der Strecken ±1 mm)

10.19.2 2. Runde 1983, Klasse 1

Aufgabe 1
Welche Zahl musst du von 20 subtrahieren, um 18 zu erhalten?

$20 - x = 18$; $x = 2$

Aufgabe 2
Setze Zeichen so ein, dass Gleichungen entstehen:

14	2	16		14	4	10
20	10	10		20	11	9

z.B. 14 + 2 = 16; 14 - 4 = 10; 20 = 10 + 10; 20 - 11 = 9; oder entsprechende Gleichungen.

Aufgabe 3
Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

10 20 0 17 1 13

0 1 10 13 17 20

Aufgabe 4

19	
18	1
11	
	12
15	

19	
18	1
11	8
7	12
15	4

10.20 22. Olympiade 1984

10.20.1 1. Runde 1984, Klasse 1

Aufgabe 1

a) 4 + 6 - 5 b) $4 + a = 10$
5 - 2 - 3 $10 - m = 4$
14 + 6 - 5 $14 + d = 20$
15 - 2 - 3 $16 + e < 19$

a) 4 + 6 - 5 = 5; 5 - 2 - 3 = 0; 14 + 6 - 5 = 15; 15 - 2 - 3 = 10
b) $a = 6$; $m = 6$; $d = 6$; $e = 0, 1, 2$

Aufgabe 2
10 Jungpioniere einer 1. Klasse nahmen an einer Feier teil. Aus einer anderen 1. Klasse kommen 8 Jungpioniere zu dieser Feier.
Wie viel Jungpioniere nehmen aus beiden Klassen teil?

10 + 8 = 10; 18 Jungpioniere nehmen an der Feier teil.

Aufgabe 3
a) Nenne je eine Gleichung der Addition mit der Summe 8, 6, 0, 12.
b) Nenne 4 Gleichungen der Subtraktion; die erste Zahl soll immer 10 sein.

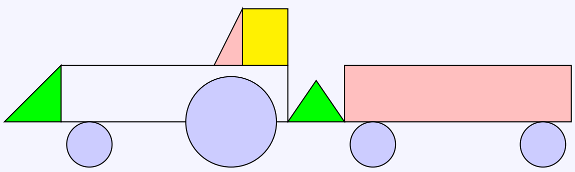
a) 4 Gleichungen der Addition mit der Summe 8, 6, 0 ,12
b) 4 Gleichungen der Subtraktion; die erste Zahl ist 10.

Aufgabe 4
Vergleiche und begründe: 7 und 10; 13 und 17; 20 und 14.

7 < 10, denn 7 + 3 = 10; 13 < 17, denn 13 + 4 = 17; 20 > 14, denn 20 - 6 = 14

Aufgabe 5

Wie viele Dreiecke, Rechtecke und Kreise brauchst du aus Papier, um das Bild legen zu können?



3 Dreiecke, 4 Kreise, 3 Rechtecke

Aufgabe 6
4 Heuhaufen und 3 Heuhaufen werden zusammengelegt.
Wie viel Heuhaufen ergibt das?

1 Heuhaufen

10.20.2 2. Runde 1984, Klasse 1

Aufgabe 1

a)

a	$a+4$
10	
12	
14	
11	
16	

b)

e	$18-e$
3	
4	
0	
2	
8	

a)

a	$a+4$
10	14
12	16
14	18
11	15
16	20

b)

e	$18-e$
3	15
4	14
0	18
2	16
8	10

Aufgabe 2
Schreibe zu folgenden Zahlen den Vorgänger und Nachfolger auf: 1; 10; 9; 18

0, 2; 9, 11; 8, 10; 17, 19

Aufgabe 3
Bilde Gleichungen:

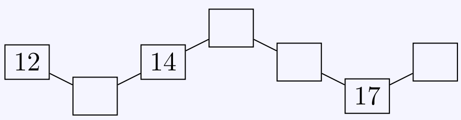
10 8 18   2 2 0

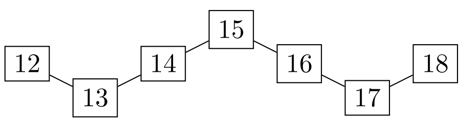
18 8 10   7 3 10

10 + 8 = 18; 18 - 8 = 10; 2 - 2 = 0; 7 + 3 = 10

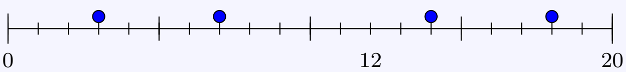
Aufgabe 4

Ergänze die fehlenden Zahlen:





Aufgabe 5
Ordne den Punkten die Zahlen zu.



Die Punkte sind den Zahlen 3, 7, 14 und 18 zugeordnet.

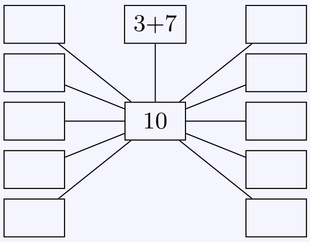
Aufgabe 6
a) Berechne die Summe der Zahlen 11 und 9.
b) Berechne die Differenz der Zahlen 16 und 3.

a) 11 + 9 = 20; b) 16 - 3 = 13

10.21 23. Olympiade 1985

10.21.1 1. Runde 1985, Klasse 1

Aufgabe 1
Finde weitere Möglichkeiten:



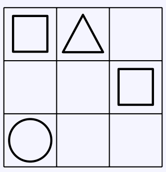
Weitere Möglichkeiten: 0 + 10, 1 + 9, 2 + 8, 4 + 6, 5 + 5, 6 + 4, 7 + 3, 8 + 2, 9 + 1, 10 + 0, 20 - 10, 15 - 5, 12 - 2 usw.

Aufgabe 2
Setze die Zeichen "+" und "-" in die Kästchen richtig ein.

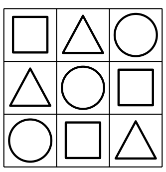
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3 & \square & 4 & \square & 2 & = & 9 \\ 10 & \square & 10 & \square & 1 & = & 19 \\ 20 & \square & 10 & \square & 4 & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3 & + & 4 & + & 2 & = & 9 \\ 10 & + & 10 & - & 1 & = & 19 \\ 20 & - & 10 & + & 4 & = & 14 \end{array}$$

Aufgabe 3



In jeder Zeile und jeder Spalte sollen die gleichen Figuren stehen. Zeichne die fehlenden Figuren ein.



Aufgabe 4

$3 + m = 10$ $\quad$ $10 - b = 3$ $\quad$ $8 + a = 14$ $\quad$ $15 - c = 7$

$m = 7$, $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$

Aufgabe 5
Zum Frauentag erfreuen die Jungpioniere der ersten Klassen ältere Bürger mit einem Programm. Aus der Klasse 1a beteiligten sich 8 Jungpioniere, aus der Klasse 1b 5 Jungpioniere und aus der Klasse 1c 7 Jungpioniere.
Wieviel Jungpioniere gestalten das Programm?

8 + 5 + 7 = 20. 20 Jungpioniere gestalten das Programm.

Aufgabe 6
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$, die 6 cm lang ist!
Zeichne eine Strecke $\overline{EF}$, die 2 cm kürzer ist als die Strecke $\overline{AB}$!

Die Strecke $\overline{EF}$ ist 4 cm lang.

10.21.2 2. Runde 1985, Klasse 1

Aufgabe 1
Setze die fehlenden Zeichen so ein, dass Gleichungen entstehen!

$12 \quad 8 = 20$	$16 - 6 \quad 10$
$20 \quad 6 \quad 14$	$17 + 0 \quad 17$

12 + 8 = 20; 16 - 6 = 10; 20 - 6 = 14; 17 + 0 = 17

Aufgabe 2
Vergleiche und begründe.

12 13	15 11
12 20	20 15

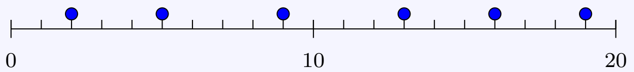
12 < 13, denn 12 + 1 = 13; 15 > 11, denn 15 - 4 = 11; 12 < 20, denn 12 + 8 = 20; 20 > 15, denn 20 = 15 + 5

Aufgabe 3

$6 - x = 0$	$4 + x = 10$
$8 - x = 8$	$x + 0 = 15$

$x = 6$, $x = 6$, $x = 0$, $x = 15$

Aufgabe 4
Ordne den Punkten die Zahlen zu.



Die Zahlen 2, 5, 9, 13, 16, 19

Aufgabe 5

Fülle die freien Kästchen aus.

<table>
<tr><td colspan="3">18</td></tr>
<tr><td>13</td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>11</td></tr>
<tr><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

18		
13	+	5
6	+	11
15	+	3
17	+	1

10.22 24. Olympiade 1986

10.22.1 1. Runde 1986, Klasse 1

Aufgabe 1
Ein Jungpionier spielt mit 3 Würfeln. Ein Würfel zeigt 5 Punkte, der zweite Würfel 1 Punkt. Wieviel Punkte zeigt der dritte Würfel, wenn alle Würfel zusammen 10 Punkte zeigen?

10 - 5 - 1 = 4. Der dritte Würfel zeigt 4 Punkte.

Aufgabe 2
Gib alle Zahlen a an, für die $a < 7$ gilt!

$a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Aufgabe 3
Es liegen ein roter, ein gelber und ein blauer Ball in der angegebenen Reihenfolge nebeneinander.

r g b

Wieviel Möglichkeiten gibt es noch, die Bälle in anderer Reihenfolge nebeneinanderzulegen? Zeichne die Möglichkeiten auf!

Es gibt noch 5 Möglichkeiten, u.a.

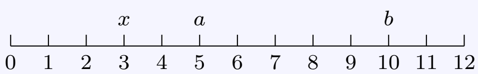
r b g   b g r

Aufgabe 4
Fülle die Tabelle aus!

z	$z+2$
7	
	6
15	
	20

z	$z+2$
7	9
4	6
15	17
18	20

Aufgabe 5
Du siehst einen Teil des Zahlenstrahls mit $x = 3$, $a = 5$ und $b = 10$.



Trage den Nachfolger von b ein. Berechnen $a - 2$ und $x + 7$.

Der Nachfolger ist 11. 5 - 2 = 3 und 3 + 7 = 10

Aufgabe 6
Setze die Zeichen ”<”, ”=”, ”>” richtig ein.

$7-2$	6	$3+3$	$9-3$
2	2	$8+1$	$4+4$
$9-0$	0		

$7-2<6$; $3+3=9-3$; $2=2$; $8+1>4+4$; $9-0>0$

10.22.2 2. Runde 1986, Klasse 1

Aufgabe 1
Setze die Zeichen ”<”, ”=”, ”>” ein. Begründe deine Entscheidung.

2	7	13	8
4	3	20	23
0	0		

2 < 7, denn 2 + 5 = 7; 13 > 8, denn 13 - 5 = 8; 4 > 3, denn 4 = 3 + 1; 20 < 23, denn 20 + 3 = 23; 0 = 0

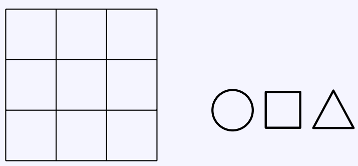
Aufgabe 2
Tina, Jan und Nico haben Flaschen gesammelt. Es wurden 50 Flaschen, 20 Flaschen und 14 Flaschen abgegeben.
Jan hat die wenigsten, Nico die meisten Flaschen gesammelt.
Wieviel Flaschen sammelte Jedes Kind?

Jan sammelte 14 Flaschen. Tina sammelte 20 Flaschen. Nico sammelte 50 Flaschen.

Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = 7$ cm und eine um 2 cm kürzere Strecke $\overline{MN}$!

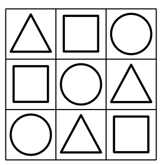
Strecke $\overline{MN}$ ist 5 cm lang.

Aufgabe 4



Trage die Symbole so in die Abbildung ein, dass in jeder Zeile eine andere Reihenfolge entsteht!

Eine Möglichkeit



Aufgabe 5
Setze in die Kästchen die Zeichen ”+” oder ”-” ein, so dass alle Gleichungen richtig sind:

$$14 \;\square\; 4 = 18$$
$$9 \;\square\; 10 \;\square\; 3 = 16$$
$$24 \;\square\; 10 \;\square\; 4 = 10$$

14 + 4 = 18; 9 + 10 - 3 = 16; 24 - 10 - 4 = 10

10.23 25. Olympiade 1987

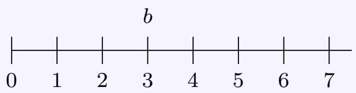
10.23.1 1. Runde 1987, Klasse 1

Aufgabe 1
Wurde richtig gerechnet?

a	$2a$	richtig ?
3	6	
1	1	
0	1	
4	8	

a	$2a$	richtig ?
3	6	ja
1	1	nein
0	1	nein
4	8	ja

Aufgabe 2
Das ist ein Zahlenstrahl. Vergleiche b mit den anderen Zahlen dieses Zahlenstrahls.



$b > 0, 1, 2$ und $b < 4, 5, 6, 7$

Aufgabe 3
Die sieben Zwerge wollen Abendbrot essen. Ein Zwerg sagt: "Auf unserem Tisch fehlt meine Tasse."
Einen anderen Zwerg fällt auf, dass auf dem Tisch 3 Teller fehlen.
Wieviel Teller und wieviel Tassen stehen auf dem Tisch?

4 Teller und 6 Tassen stehen auf dem Tisch.

Aufgabe 4
Wieviel Zahlen liegen zwischen dem Vorgänger von 3 und dem Nachfolger von 8?
Schreibe sie auf!

Die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, also sechs Zahlen, liegen dazwischen.

Aufgabe 5
Am Zelt sind insgesamt 9 rote, blaue und gelbe Luftballons befestigt. 3 sind gelb, 6 sind nicht rot.
Wieviel rote und wieviel blaue Luftballons hängen am Zelt?

3 rote und 3 blaue Luftballons sind am Zelt befestigt.

Aufgabe 6
Rechne aus, und ordne danach die Ergebnisse.

$$\begin{array}{rr} 3+7 & 1-1 \\ 0+2 & 2\cdot 3 \\ 13-4 & 4+4 \end{array}$$

3 + 7 = 10; 1 - 1 = 0; 0 + 2 = 2; $2 \cdot 3$ = 6; 13 - 4 = 9; 4 + 4 = 8
geordnete Zahlen: 0, 2, 6, 8, 9, 10

10.23.2 2. Runde 1987, Klasse 1

Aufgabe 1

a	$3+a$
5	
6	
2	
	3

a	$3+a$
5	8
6	9
2	5
0	3

Aufgabe 2
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ lege die Länge selbst fest.
Zeichne dann eine Strecke $\overline{CD}$, die 1 cm kürzer ist als $\overline{AB}$ und eine Strecke $\overline{MN}$, die 2 cm länger als $\overline{CD}$ ist.

(Drei Strecken, wobei auf die genaue Bezeichnung zu achten ist.)

Aufgabe 3
Kannst du die Beträge mit der angegebenen Zahl von Münzen zählen? Antworte mit Ja/Nein!

Betrag	Münzen	Antwort
51 Pf	2	
12 Pf	6	
9 Pf	4	
18 Pf	10	

Betrag	Münzen	Antwort
51 Pf	2	ja
12 Pf	6	nein
9 Pf	4	nein
18 Pf	10	ja

Aufgabe 4
Gibt es vier Zahlen, die größer als 5 und kleiner als 9 sind?

Nein, mit dieser Bedingung gibt es nur 3 Zahlen: 6, 7, 8

Aufgabe 5
Welche Zahl würdest du in das Kästchen schreiben? Begründe!

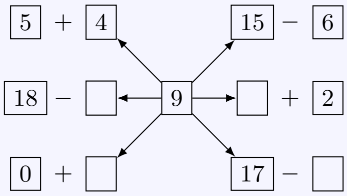
$$2, 4, 6, \square, 10, 12$$

Die Zahl 8 ist an diese Stelle zu setzen, weil die nachfolgende Zahl jeweils durch Addition mit 2 aus der vorangehenden Zahl entsteht.

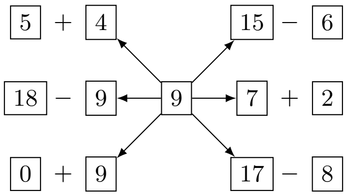
10.24 26. Olympiade 1988

10.24.1 1. Runde 1988, Klasse 1

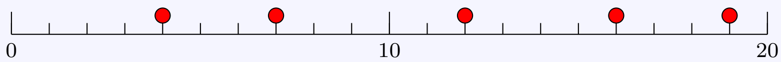
Aufgabe 1



Ergänze die jeweils fehlenden Zahlen.

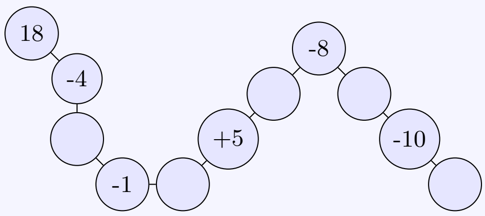


Aufgabe 2
Ordne den gekennzeichneten Punkten die Zahlen zu. Vergleiche jede dieser Zahlen mit 10.

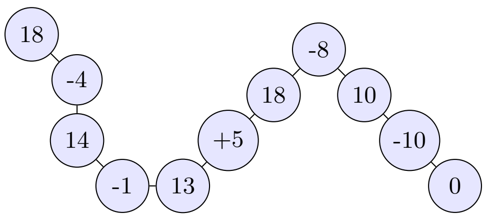


Die Zahlen sind 4, 7, 12, 16 und 19. 4 und 7 sind kleiner als 10, 12, 16 und 19 sind größer als 10.

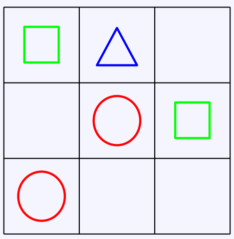
Aufgabe 3

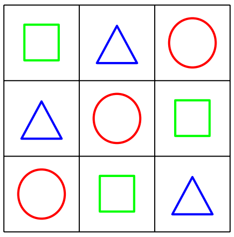


Rechne und trage die fehlenden Zahlen ein.



Aufgabe 4
In jeder Zeile und jeder Spalte sollen die gleichen Figuren stehen. Zeichne die fehlenden Figuren ein.





Aufgabe 5
Setze die Zeichen "<", ">" und "=" ein.

$$5 - 2 \quad \square \quad 3$$
$$6 \quad \square \quad 4 + 3$$
$$9 - 0 \quad \square \quad 0$$

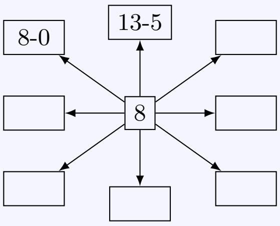
5 - 2 = 3; $6 < 4 + 3$; $9 - 0 > 0$

Aufgabe 6
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$, die 7 cm lang ist, und eine um 3 cm kürzere Strecke $\overline{CD}$.

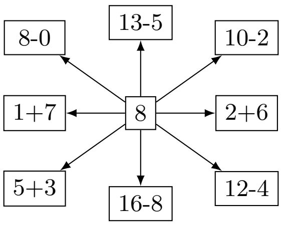
Die Strecke $\overline{CD}$ ist 4 cm lang. (Abweichung der Zeichnung ± 2 mm)

10.24.2 2. Runde 1988, Klasse 1

Aufgabe 1



Finde weitere Möglichkeiten.



Aufgabe 2
Welche Zahlen liegen zwischen dem Vorgänger von 9 und dem Nachfolger von 11?

9, 10, 11

Aufgabe 3
Setze in die Kästchen die Zeichen "+" und "-" so ein, dass richtige Gleichungen entstehen.

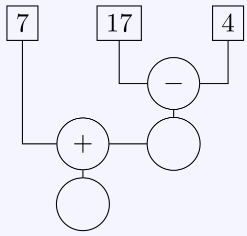
a) $2 + 6 \quad \square \quad 2 = 10$ b) $20 - 9 \quad \square \quad 7 = 18$
c) $9 + 10 \quad \square \quad 3 = 16$ d) $19 - 3 \quad \square \quad 4 = 12$

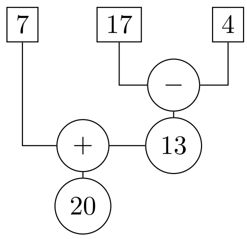
a) 2 + 6 + 2 = 10; b) 20 - 9 + 7 = 18; c) 9 + 10 - 3 = 16; d) 19 - 3 - 4 = 12

Aufgabe 4
Peter will für 8 Kinder Löffel und Gabeln auf dem Tisch legen. 6 Löffel und 4 Gabeln hält er in der Hand.
Was sagst du dazu?

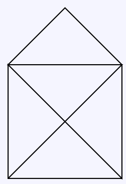
2 Löffel und 4 Gabeln liegen auf dem Tisch. Oder: 2 Löffel und 4 Gabeln muss Peter noch holen.

Aufgabe 5
Errechne die fehlenden Ziffern.





Aufgabe 6
Wie viel Dreiecke enthält diese Figur?

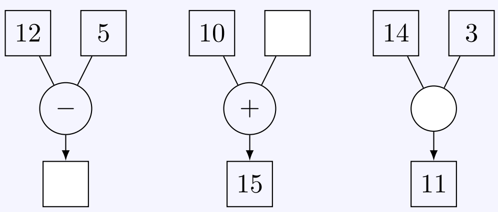


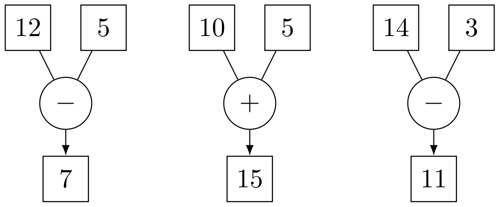
9 Dreiecke

10.25 27. Olympiade 1989

10.25.1 1. Runde 1989, Klasse 1

Aufgabe 1
Ergänze die fehlenden Zahlen und das fehlende Zeichen.





Aufgabe 2

Welche Tasse gehört zu welchem Teller?
Verbinde!

Zusammengehören die blau, weiß gepunkteten Tasse und Teller, sowie die rot-weiß gestreiften und Tasse und Teller mit der Blütenabbildung.

Aufgabe 3

14-5	13-7	12-8	11-4

6 8 9 4 7

Welche Ergebnisse gehören zu den Aufgaben? Zeichne Zuordnungspfeile.

14 - 5 = 9; 13 - 7 = 6; 12 - 8 = 4; 11 - 4 = 7

Aufgabe 4

Ergänze die fehlenden Zahlen.

7	+		=	1	2
9	+	3	=		
	+	6	=	1	2
8	+	4	=		

7	+	5	=	1	2
9	+	3	=	1	2
6	+	6	=	1	2
8	+	4	=	1	2

Aufgabe 5

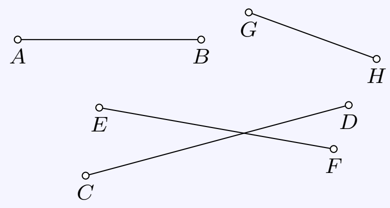
Ergänze die fehlenden Zahlen $(+, -, =)$.

5		6	=	11
11		4		7
9		5		14
15		7		8

5	+	6	=	11
11	-	4	=	7
9	+	5	=	14
15	=	7	+	8

Aufgabe 6

Welche Strecke ist die kürzeste? Wie lang ist die längste Strecke?



Die Längen der Strecken sind $\overline{AB} = 37$ mm, $\overline{CD} = 40$ mm, $\overline{EF} = 35$ mm und $\overline{GH} = 20$ mm.
Die kürzeste Strecke ist die Strecke $\overline{GH}$. Die längste Strecke $\overline{CD}$ ist 4 cm lang.

10.25.2 2. Runde 1989, Klasse 1

Aufgabe 1
a) Welche Zahlen liegen zwischen 12 und 16?
b) Welche Zahlen liegen zwischen dem Nachfolger von 4 und der Zahl 8?
c) Welche Zahlen liegen zwischen 5 und dem Vorgänger von 9?

a) 13, 14, 15, b) 6, 7, c) 6, 7

Aufgabe 2
Vervollständige.

u	$17 - u$
10	
3	
5	
1	

u	$17 - u$
10	7
3	14
5	12
1	16

Aufgabe 3
Vergleiche und begründe: 2 5; 12 15; 7 3; 13 9

$2 < 5$, da $2 + 3 = 5$; $12 < 15$, da $12 + 3 = 15$; $7 > 3$; da $3 + 4 = 7$; $13 > 9$, da $9 + 4 = 13$

Aufgabe 4
Zeichne eine Strecke $\overline{RS}$ von 7 cm Länge und eine Strecke $\overline{CD}$ die 3 cm länger ist.

Die Strecke $\overline{CD}$ muss 10 cm lang sein.

Aufgabe 5
Von den folgenden Zahlen sollen zwei gestrichen werden. Die Summe der anderen Zahlen muss 10 sein. $1, 2, 3, 4, 5$

1 und 4 gestrichen: $2 + 3 + 5 = 10$; oder 2 und 3 gestrichen: $1 + 4 + 5 = 10$

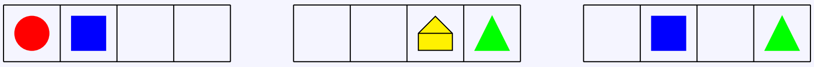
Aufgabe 6
Peter hat 12 Pfennig, Annett gibt ihm soviel dazu, dass er 20 Pfennig hat.
Wie viel Geld gibt Annett? Schreibe eine Gleichung.

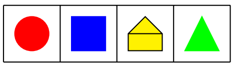
Annett gibt 8 Pfennig. $12 + 8 = 20$

10.26 28. Olympiade 1990

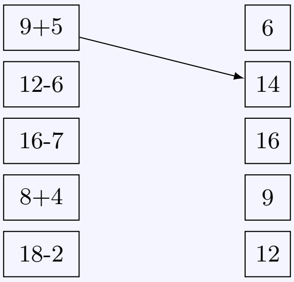
10.26.1 1. Runde 1990, Klasse 1

Aufgabe 1
Jeder Streifen soll die gleichen Bilder enthalten. Ergänze !



Lösung: 

Aufgabe 2
Ordne richtig zu!

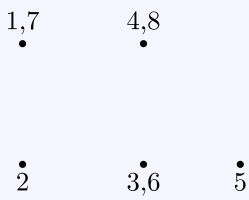


$9+5=14$; $12-6=6$; $16-7=9$; $8+4=12$; $18-2=16$

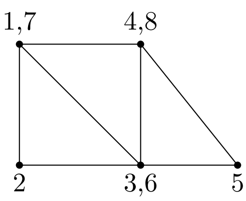
Aufgabe 3
Die farbigen Rechtecke stehen in der Folge der Zahlen angeordnet. Welche Zahlen gehören zu den Farben ?

Blau 19, Gelb 18, Rot 17, Grün 16, Weiß 15

Aufgabe 4
Verbinde die Punkte in der Folge der Zahlen. Bei einigen Punkten stehen zwei Zahlen.

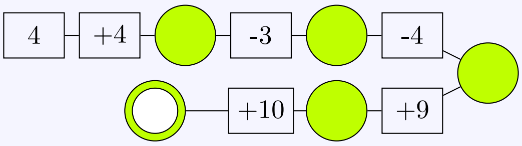


Welche Figuren erkennst du ? Wie viele sind es jeweils ?



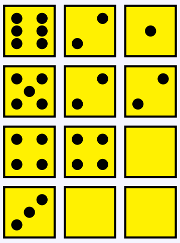
Figuren: 1 Quadrat, 3 Dreiecke; evtl. noch 1 Viereck, 1 Fünfeck

Aufgabe 5
Rechne und ergänze !



4 + 4 = 8 - 3 = 5 - 4 = 1 + 9 = 10 + 10 = 20

Aufgabe 6
Ergänze !



$$6 + 2 + 1 = 9$$
$$\bigcirc + 2 + \bigcirc = 9$$
$$\bigcirc + \bigcirc + 1 = 9$$
$$\bigcirc + 2 + \bigcirc = 9$$

Gleichungen: **5**+2+**2** = 9 ; **4**+**4**+1 = 9 ; **3**+2+**4** = 9

11 Klassenstufe 2

11.1 2. Olympiade 1964

Die 1. Olympiade wurde nicht in der Klassenstufe 2 durchgeführt.

11.1.1 1. Runde 1964, Klasse 2

Aufgabe 1
$81 - x = 35$
Wie groß ist x?

$x = 46$

Aufgabe 2
„Wieviel Geld hast du gespart?“ fragt Brigitte ihren Bruder.
Er antwortet: „In meinem Sparbuch sind drei 10-Pfennigmarken und eine Marke zu 50 Pfennig.“
Wieviel hat Brigittes Bruder gespart und wieviel fehlt ihm noch an 1 M?

Brigittes Bruder hat 80 Pfennig gespart; es fehlen ihm noch 20 Pfennig an 1 M.

Aufgabe 3
Inge kauft 2 Hefte zu je 8 Pfennig. Ihre Freundin braucht doppelt soviel Hefte. Sie zahlen gemeinsam und legen 1 DM-Stück auf den Ladentisch.
a) Wieviel Hefte kaufen die Mädchen und wieviel Geld bezahlen sie dafür?
b) Wieviel Geld gibt ihnen die Verkäuferin zurück?

a) $2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 \cdot 8 = 48$. Die Mädchen kaufen 6 Hefte und zahlen dafür 48 Pfennig.
b) Die Verkäuferin gibt 52 Pfennig zurück.

Aufgabe 4
Stelle einen Würfel auf den Tisch und setze einen zweiten darauf.
Wieviel Quadrate siehst du von allen Seiten und von oben?

9 Quadrate.

11.1.2 2. Runde 1964, Klasse 2

Aufgabe 1
Zeichne eine Strecke von 4 cm Länge, darunter eine zweite, die 3 cm länger ist.
Und nun zeichne noch eine dritte Strecke hinzu, die 5mal so lang ist wie die erste!
Wie lang sind die zweite und die dritte Strecke?

2. Strecke: $4 + 3 = 7$, d.h. 7 cm; 3. Strecke: $5 \cdot 4 = 20$, d.h. 20 cm

Aufgabe 2
In einer HO-Gaststätte wurden am Montag und Dienstag jeweils 12 kg Erbsen, am Donnerstag und Freitag je 9 kg Erbsen verbraucht. Am Sonnabend und Sonntag wurden doppelt soviel Kilogramm Erbsen benötigt wie an den ersten beiden Tagen der Woche zusammen.
a) Wieviel Kilogramm Erbsen wurden am Montag und Dienstag und wieviel Kilogramm am Donnerstag und Freitag verbraucht?
b) Wieviel Kilogramm Erbsen benötigte der Koch am Sonnabend und Sonntag?

a) $12 + 12 = 24$; 24 kg und $9 + 9 = 18$; 18 kg
b) $24 + 24 = 48$; 48 kg;

11.2 3. Olympiade 1965

11.2.1 1. Runde 1965, Klasse 2

Aufgabe 1
Eine LPG holt Saatkartoffeln ab. Auf dem ersten Wagen stehen bereits 35 volle Säcke. Auf der Rampe sind noch neun volle Säcke bereitgestellt. Es sollen zwei Wagen mit je 40 Säcken Saatkartoffeln beladen werden.
Wieviel Säcke müssen noch gefüllt werden?

80 - 35 - 9 = 36; Es müssen noch 36 Säcke gefüllt werden.

Aufgabe 2
Eine Klasse schätzt die Länge einer Strecke auf dem Schulhof 28 m. Zwei Jungen messen diese Strecke. Sie legen ein Messband von 20 m Länge einmal und messen dann noch 12 m.
Um wieviel Meter verschätzten sich die Schüler?

20 + 12 - 28 = 4. Die Schüler verschätzen sich um 4 m.

Aufgabe 3
Frau Günter kauft fünfzehn Brötchen. Für Sonntag legt sie neun zurück. Die übrigen verteilt sie am Sonnabend so, dass jeder zwei Stück erhält.
Wieviel Brötchen erhält jede dieser Personen am Sonntag?

(15 - 9) : 2 = 3, d.h. es sind 3 Personen. Somit erhält am Sonntag jeder 3 Brötchen.

Aufgabe 4
Ursel räumt ihren Schreibtisch auf. Sie findet dabei Hefte vom vergangenen Schuljahr.
Auf einer Seite sind nicht mehr alle Ziffern und Rechenzeichen deutlich erkennbar. Sie versucht herauszubekommen, wie die Aufgaben damals hießen.

$$2\star + \star 0 = 54 \qquad ; \qquad 7 \cdot \star = 1\star$$

$24 + 30 = 54$; $7 \cdot 2 = 14$

11.2.2 2. Runde 1965, Klasse 2

Aufgabe 1
Bernd kommt um 14 Uhr zu Wolfgang. Bis 16 Uhr arbeiten sie an den Schulaufgaben.
Als sie dann noch spielen wollen, sagt Bernd: Ïch darf nur drei Stunden bei dir bleiben!"
Wie lange können Bernd und Wolfgang noch spielen?

Sie können noch 1 Stunde spielen.

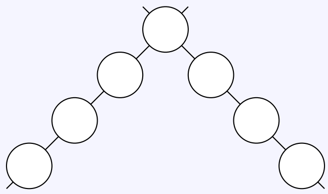
Aufgabe 2
Multipliziere eine Zahl a mit 6! Subtrahiere vom Ergebnis 4, so erhältst du 20.
Welche Zahl musst du für a einsetzen?

$a \cdot 6 - 4 = 20$ ergibt $a = 4$.

11.3 4. Olympiade 1966

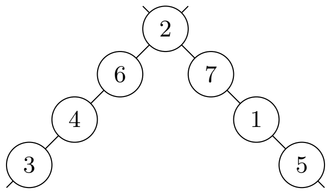
11.3.1 1. Runde 1966, Klasse 2

Aufgabe 1



Trage die Zahlen von 1 bis 7 so in die leeren Felder ein, dass die Summe der Zahlen auf jeder Geraden 15 ergibt.

Da 1 + 2 + ... + 7 = 28 ist und die zwei Summen 15 + 15 = 30 sind, muss in dem gemeinsamen Feld beider Summen die 2 stehen. Eine mögliche Verteilung ist



Aufgabe 2
Berechne das Dreifache von 8. Addiere zum Ergebnis 20.

$3 \cdot 8 + 20 = 44$

Aufgabe 3
Die Pioniere einer Berliner Schule überreichten den Komponenten Valentina Tereschkowa und Juri Gagarin als Erinnerungsgeschenk eine Mappe mit Zeichnungen. Aus sieben Klassen wurden jeweils sechs Zeichnungen ausgewählt.
Außerdem gaben der Zeichenlehrer der Schule und ein Mitglied des Elternbeirats eine Zeichnung für die Kosmonauten.
Wieviel Bilder enthält die Mappe?

$7 \cdot 6 = 42$, 42 + 1 + 1 = 44. Die Mappe enthält 44 Zeichnungen.

Aufgabe 4
Bestimme alle Zahlen x, für die gilt
$$25 < x \cdot 8 < 42$$

$$25 < 4 \cdot 8 < 42 \qquad ; \qquad 25 < 5 \cdot 8 < 42$$

11.3.2 2. Runde 1966, Klasse 2

Aufgabe 1

a	b	c	d
	$2a$	$b+3$	$53-c$
9			
6			
12			

a	b	c	d
	$2a$	$b+3$	$53-c$
9	18	21	32
6	12	15	38
12	24	27	26

Aufgabe 2
Berechne die Differenz aus dem Produkt und der Summe der Zahlen 9 und 2.

$9 \cdot 2 = 18$, $9 + 2 = 11$, 18 - 11 = 7. Die Differenz ist 7.

11.4 5. Olympiade 1967

11.4.1 1. Runde 1967, Klasse 2

Aufgabe 1
Subtrahiere von 17 dreimal dieselbe Zahl, so dass du 8 erhältst!
Wie heißt die Zahl?

Die Zahl heißt 3, da $17 - 3 \cdot 3 = 8$.

Aufgabe 2
Die Pioniere einer Gruppe wollen ihre Schneebälle mindestens 12 m weit werfen. Lothar wirft doppelt so weit. Martinas Ball fliegt 21 m weit.
a) Wie weit wirft Lothar?
b) Um wieviel Meter wirft Martina ihren Ball weiter als 12 m?

a) Lothar wirft 24 m weit. b) Martha wirft ihren Ball 9 m weiter als 12 m.

Aufgabe 3
Eine Pioniergruppe von 27 Kindern hat eine große Feier.
Drei Kinder haben zusammen Geburtstag. Die Erzieherin legt jedem Geburtstagskind zwei Apfel, acht Waffeln und fünf Sahnebonbons auf den Teller. Jedes der anderen 24 Kinder erhält einen Apfel.
Wieviel Äpfel, Waffeln und Bonbons verteilt die Erzieherin?

Sie verteilt 30 Äpfel, 24 Waffeln und 15 Bonbons.

Aufgabe 4

Welche geometrischen Körper erkennst du auf der Baustelle?

Auf dem Bild erkennt man Kegel, Quader, Pyramide und Zylinder (Säule).

11.4.2 2. Runde 1967, Klasse 2

Aufgabe 1
Ein Haus hat drei Stockwerke. Von einem Stockwerk zum anderen führen stets zwei Treppen mit je acht Stufen.
Wieviel Stufen muss man vom Erdgeschoss bis zum dritten Stockwerk steigen?

Bis zum dritten Stock muss man 48 Stufen steigen.

Aufgabe 2

a	b	$a+b$	$a-b$
19	8		
	7	52	
91			82

a	b	$a+b$	$a-b$
19	8	27	11
45	7	52	38
91	9	100	82

11.5 6. Olympiade 1968

11.5.1 1. Runde 1968, Klasse 2

Aufgabe 1
Pioniere einer 2. Klasse bringen Kaninchen und Hühner zur Ausstellung. Im Käfig sind fünf Köpfe und vierzehn Beine zu sehen.
Wie viel Kaninchen und wie viel Hühner sind es?

Es sind 2 Kaninchen und 3 Hühner.

Aufgabe 2
Verwende die Zahlen 8, 2 und 4 zweimal in der angegebenen Reihenfolge, so dass zwei verschiedene Gleichungen entstehen! Musst du addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren?
Wie heißen die Gleichungen?

Die Gleichungen lauten: $8 : 2 = 4$ und $8 = 2 \cdot 4$.

Aufgabe 3
Mutter gibt Ute 27 Pfennig zum Einkaufen mit. Es sind sechs Münzen.
Nenne Art und Anzahl der Münzen!

Ute hatte ein Zehnpfennigstück, drei Fünfpfennigstücke und zwei Einpfennigstücke.

Aufgabe 4
Zeichne mit Bleistift, Zirkel und Lineal
a) ein Verkehrszeichen mit quadratischer Form,
b) zwei Verkehrszeichen mit dreieckiger Form,
c) zwei kreisförmige Verkehrszeichen!

(Die Schüler sollen auf Papier mit quadratischen Kästchen zeichnen. Die Exaktheit der äußeren Begrenzungslinien ist ausschlaggebend.)

11.5.2 2. Runde 1968, Klasse 2

Aufgabe 1 Zu einer Zahl a addiere viermal die Zahl 4! Die Summe dieser Zahlen ist 21.
Wie heißt die Zahl a?

$a + 4 \cdot 4 = 21$ ergibt $a = 5$.

Aufgabe 2
Die Schüler einer 4. Klasse nähen sich ihre Werkschürzen selbst. Für zehn Schüler kauft die Lehrerin 6 Meter Stoff. In der Klasse sind aber 30 Schüler.
a) Wieviel Meter Stoff werden für alle 30 Schüler gebraucht?
b) Wieviel Meter Stoff muss die Lehrerin noch kaufen?

a) Für alle Schüler werden 18 Meter Stoff gebraucht.
b) Die Lehrerin muss noch 12 Meter Stoff kaufen.

11.6 7. Olympiade 1969

11.6.1 1. Runde 1969, Klasse 2

Aufgabe 1
Michael setzte in seinem Vorgarten am Sonnabend drei Stauden und bei den Nachbarn zwei Stauden. Das ist der dritte Teil der Stauden, die Michael am Freitag in den beiden Vorgärten gesetzt hatte. Wieviel Stauden hatte Michael am Freitag gepflanzt, um die Vorgärten zu verschönern?

Michael hatte am Freitag fünfzehn Stauden gesetzt.

Aufgabe 2
Das Produkt zweier Zahlen wurde um 2 vergrößert, und man erhielt 17. Beide Zahlen sind kleiner als 10.
Wie heißen die beiden Zahlen?

Die Zahlen heißen 5 und 3.

Aufgabe 3
Zwei Straßenwalzen fahren gleichzeitig an derselben Stelle in derselben Richtung ab. Die erste schafft 6 km in der Stunde, die zweite 8 km.
Wieviel Kilometer sind die beiden nach drei Stunden voneinander entfernt?

Die beiden Walzen sin 6 km entfernt.

Aufgabe 4
Welches ist die kleinste zweistellige Zahl?

Die kleinste zweistellige Zahl ist 10.

11.6.2 2. Runde 1969, Klasse 2

Aufgabe 1
Vor zwei großen Häusern treffen sich die Mieter und wollen einen Rasenplatz herrichten. Aus dem ersten Haus kommen 30 Personen, davon ist der dritte Teil Frauen.
Aus dem zweiten Haus kommen 28 Personen, davon sind 19 Männer.
Wieviel Frauen wollen mithelfen?

Es wollen insgesamt 19 Frauen mithelfen.

Aufgabe 2
Zeichne ein Rechteck! Lege auf einer Seite einen Punkt fest,und verbinde ihn mit einem gegenüberliegenden Eckpunkt des Rechtecks!
Wie heißen die beiden Figuren, die entstanden sind?

Dreieck und Trapez

11.7 8. Olympiade 1970

11.7.1 1. Runde 1970, Klasse 2

Aufgabe 1
Auf dem Bahnhof wird der Sonderzug für das Pioniertreffen zusammengestellt. Insgesamt hat der Zug 35 Achsen. 5 Wagen mit je 3 Achsen hängen schon an der Lokomotive.
Wieviel zweiachsige Wagen müssen noch angehängt werden?

10 zweiachsige Wagen müssen noch angehängt werden.

Aufgabe 2
Als der Sonderzug hält, fährt ein Güterzug vorbei. Peter zählt die Wagen: Gleich nach der Lokomotive fahren 5 geschlossene Wagen. Dann folgen 4 mal so viel offene Wegen. Am Schluss fahren 6 Kesselwagen.
Wieviel Wagen hat der Güterzug?

Der Güterzug hat 31 Wagen.

Aufgabe 3
Gudrun fährt auch zum Pioniertreffen. Zu ihrer Gruppe gehören 23 Jungpioniere. Sie werden auf drei Abteile verteilt. In 2 Abteilen sitzen jeweils 8 Pioniere.
Wieviel Pioniere sitzen im dritten Abteil?

Im dritten Abteil sitzen 7 Pioniere.

Aufgabe 4
Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ von 11 cm Länge! Gib auf dieser Strecke den Punkt C an, so dass die Strecke $\overline{AC}$ 5 cm kürzer ist als die Strecke $\overline{AB}$.
Wie lang ist die Strecke $\overline{AC}$?

Die Strecke $\overline{AC}$ ist 6 cm lang.

11.7.2 2. Runde 1970, Klasse 2

Aufgabe 1
Uwes Pioniergruppe wird beim Pioniertreffen bei Familien untergebracht. Die 18 Mädchen der Gruppe kommen zu Familien, die jeweils 3 Pioniere aufnehmen. Die 14 Jungen der Gruppe kommen zu Familien, die jeweils 2 Pioniere aufnehmen.
a) In wie viel Familien wurden die Mädchen aufgenommen?
b) In wie viel Familien wurden die Jungen aufgenommen?

a) In 6 Familien wurden die Mädchen aufgenommen.
b) In 7 Familien wurden die Jungen aufgenommen.

Aufgabe 2
Um 16.08 Uhr kam Uwes Gruppe auf dem Bahnhof an. Sie war 68 Minuten mit dem Sonderzug gefahren.
Wann hatte die Fahrt begonnen?

Die Fahrt hatte um 15.00 Uhr begonnen.

11.8 9. Olympiade 1971

11.8.1 1. Runde 1971, Klasse 2

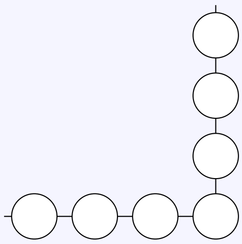
Aufgabe 1
Das neue Wohnhaus am Stadtrand hat 5 Stockwerke. In jedem Stockwerk gibt es 8 Wohnräume. Außerdem gibt es im Haus einen Klubraum, 6 Kellerräume und eine Waschküche.
Wieviel Räume hat das Wohnhaus?

$8 \cdot 5 + 1 + 6 + 1 = 48$. Das Wohnhaus hat 48 Räume.

Aufgabe 2
Auch ein Hochhaus wird gebaut. In 6 Stunden hebt der Kran 30 Platten in die Höhe.
Wieviel Platten werden vom Kran in einer Stunde in die Höhe gehoben?

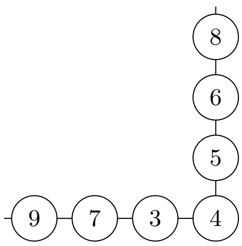
$30 : 6 = 5$. In einer Stunde hebt der Kran 5 Platten in die Höhe.

Aufgabe 3

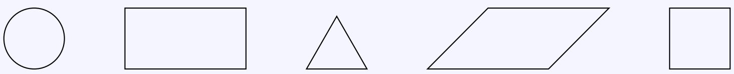


Trage die Zahlen von 3 bis 9 so in die Kreisfläche ein, dass die Summe auf jeder Geraden 23 ist.

Beispiel:



Aufgabe 4



a) Schreibe die Namen dieser Figuren auf!
b) Bei welchen Figuren verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander?

a) Quadrat, Dreieck, Kreis, Rechteck, Parallelogramm
b) Bei Quadrat, Rechteck und Parallelogramm verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel.

11.8.2 2. Runde 1971, Klasse 2

Aufgabe 1
In 5 Fenstern eines Wohnhauses sind zusammen 40 Glasscheiben.
Wieviel Scheiben sind in 3 Fenstern?

$40 : 5 = 8$; $3 \cdot 8 = 24$. In drei Fenstern sind 24 Scheiben.

Aufgabe 2
Multipliziere die Zahlen 7 und 6. Vom Produkt subtrahiere 5.
Schreibe die Gleichung und rechne.

$7 \cdot 6 - 5 = 37$

11.9 10. Olympiade 1972

11.9.1 1. Runde 1972, Klasse 2

Aufgabe 1
Beim Rudern der Männer werden aus der DDR 7 verschiedene Boote starten:
der Einer, zwei Zweier (ohne Steuermann), ein Zweier mit Steuermann, der Vierer ohne Steuermann, der Vierer mit Steuermann, der Achter mit Steuermann.
Wieviel Rudersportler werden starten?
(Beachte: Im SZweier ohne Steuermannßitzen zwei Ruderer. Im SZweier mit Steuermannßitzen drei Rudersportler. Achte genau auf alle Bezeichnungen!)

$1 + 4 + 3 + 4 + 5 + 8 + 1 = 26$. Aus der DDR werden 26 Rudersportler starten.

Aufgabe 2
Bei einem Wettkampf starteten aus der DDR 26 Sportler. Genau die Hälfte davon konnte eine Medaille erringen.
Wieviel Sportler aus der DDR erhielten eine Medaille?

$26 : 2 = 13$. Aus der DDR erhielten 13 Sportler eine Medaille.

Aufgabe 3
Beim Skispringen lag der weiteste Sprung bei 80 Metern. Der kürzeste Sprung lag bei 67 Metern.
Wieviel Meter Differenz lag zwischen diesen beiden Sprüngen?

$67 + x = 80$, $x = 13$. Zwischen beiden Sprüngen lag eine Differenz von 13 Metern.

Aufgabe 4
Veranschauliche dir die Länge der beiden (in Aufgabe 3) genannten Sprünge!
Zeichne dazu zwei zueinander parallele Strecken. Zuerst zeichne die Strecke $\overline{AB} = 80$ mm und dann die Strecke $\overline{CD} = 67$ mm!
(Die Punkte A und C sollen möglichst untereinander liegen.)

(Es dürfen Abweichungen von 1 mm je Strecke auftreten.)

11.9.2 2. Runde 1972, Klasse 2

Aufgabe 1
Beim Staffellauf (4 x 100 Meter) nehmen 8-Mannschaften am Endkampf teil.
Wieviel Läufer kämpfen insgesamt um den Sieg?

$8 \cdot 4 = 32$. Um den Sieg kämpfen 32 Läufer.

Aufgabe 2
Rechnen nach Diktat! (Dauer 3 bis 4 Minuten)

$6 \cdot 7$	$9 \cdot 0$	26 + 17	28 : 4
45 : 5	73 - 19	6 cm = ... mm	70 dm = ... m

$6 \cdot 7 = 42$, $9 \cdot 0 = 0$, 26 + 17 = 43, 28 : 4 = 7, 45 : 5 = 9, 73 - 19 = 54, 6 cm = 60 mm, 70 dm = 7 m

11.10 11. Olympiade 1973

11.10.1 1. Runde 1973, Klasse 2

Aufgabe 1
Eltern der Klasse 2a wollen Gäste zum Festival aufnehmen. 8 Eltern nehmen jeweils 3 Gäste, 7 Eltern jeweils 2 Gäste und 9 Eltern nehmen jeweils 1 Gast auf.
Wieviel Gäste werden von den Eltern der Klasse 2a aufgenommen?

Die Eltern der Klasse 2a wollen zum Festival 47 Gäste aufnehmen.

Aufgabe 2
a) $47 + a < 52 \qquad a = ... \qquad ; \qquad 93 - b < 88 \qquad b = ...$

b) Rechne folgende Aufgaben! 12 + 7 47 - 5

c) Vergleiche und begründe! 63 54 77 85.

a) $a = 0, 1, 2, 3, 4$; $b = 0, 1, 2, 3, 4$
b) 12 + 7 = 19; 47 - 5 = 42
c) 63 > 54, denn 54 + = 63; 77 < 85, denn 77 + 8 = 85

Aufgabe 3
Der Dividend ist 56. Der Divisor ist 7. Rechne.
Zum Quotienten addiere 14!

56 : 7 = 8; 8 + 14 = 22.

Aufgabe 4
a) Zeichne mit Hilfe der Parallelenschablone (oder auf Kästchen- bzw. Gitterpapier) ein Rechteck $ABCD$.
b) Welche Seiten haben die gleiche Länge?
c) Wie verlaufen die Seiten, die die gleiche Länge haben?

b) Gleiche Länge haben die gegenüberliegenden Seiten.
c) Die Seiten mit gleicher Länge verlaufen zueinander parallel.

11.10.2 2. Runde 1973, Klasse 2

Aufgabe 1
Im Raum der Klasse 2a einer Berliner Schule stehen 18 Betten für die Gäste zum Festival. Es kommen aber 32 Jugendliche.
Wieviel Gäste müssen noch in einem anderen Raum untergebracht werden?

32 - 18 = 14. Noch 14 Gäste müssen in einem anderen Raum untergebracht werden.

Aufgabe 2
Berechne zuerst die Summen und dann die Differenzen von 26 und 7, 83 und 8, 57 und 9.

26 + 7 = 33, 26 - 7 = 19; 83 + 8 = 91, 83 - 8 = 75; 57 + 9 = 66, 57 - 9 = 48.

11.11 12. Olympiade 1974

11.11.1 1. Runde 1974, Klasse 2

Aufgabe 1
a) 36 + 25 58 - 37 72 - 43 15 + 67
b) Berechne die fehlenden Zahlen.

a	b	$a+b$
37	43	
26		91
	32	77

36 + 25 = 61, 58 - 37 = 21, 72 - 43 = 29, 15 + 67 = 82

a	b	$a+b$
37	43	80
26	65	91
45	32	77

Aufgabe 2
Im Sport strengen sich alle Kinder sehr an. Horst wirft den Ball 18 Meter weit. Ines erreicht nur die Hälfte. Claudia wirft den Ball 5 Meter weiter als Ines.
a) Wieviel Meter erreicht Ines?
b) Wie weit wirft Claudia ihren Ball?

18 : 2 = 9; Ines erreicht 9 m. 9 + 5 = 14; Claudia wirft ihren Ball 14 m weit.

Aufgabe 3
Welche Zahl ist um 7 kleiner als die größte zweistellige Zahl?

99 - 7 = 92

Aufgabe 4
Regina erhält von der Nachbarin 37 Pfennig zum Einkaufen. Es sind 5 Münzen!
Nenne die Art und die jeweilige Anzahl der Münzen!

Ein 20-Pf-Stück, ein 10-Pf-Stück, ein 5-Pf-Stück und zwei 1-Pf-Stücke.

11.11.2 2. Runde 1974, Klasse 2

Aufgabe 1
Bestimme die Summe der Zahlen a und b! $a = 34$, $b = 27$

$a + b = 34 + 27 = 61$

Aufgabe 2

a	b	c	$a+b-c$
28	37	44	
16	45	27	
37	24	52	
56	35	73	

a	b	c	$a+b-c$
28	37	44	21
16	45	27	34
37	24	52	9
56	35	73	18

11.12 13. Olympiade 1975

11.12.1 1. Runde 1975, Klasse 2

Aufgabe 1

35 + 8 + 7 $\qquad$ 57 + 6 + 9 $\qquad$ $3 \cdot 6 + 8$
71 - 6 - 7 $\qquad$ 44 - 8 - 8 $\qquad$ 28 : 4 - 7

35 + 8 + 7 = 50; 57 + 6 + 9 =72; $3 \cdot 6 + 8 = 26$; 71 - 6 - 7 = 58; 44 - 8 - 8 = 28; 28 : 4 - 7 = 0

Aufgabe 2

$x + 12 = 48 \qquad 68 + b = 73$

$y - 13 = 62 \qquad 24 - d > 19$

$x = 36$; $b = 0$; $y = 75$; $d = 0, 1, 2, 3, 4$

Aufgabe 3
Zeichne ein beliebiges Viereck. Bezeichne seine Eckpunkte mit den Buchstaben A, B, C, D.
e) Wie heißen die Seiten des Vierecke?
b) Welche Strecken liegen sich gegenüber?

Die Anordnung der Buchstaben sollte entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgen.
a) Die Seiten heißen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ oder $\overline{AD}$.
b) $\overline{AB}$ liegt gegenüber von $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ liegt gegenüber von $\overline{DA}$.

Aufgabe 4
Zum Tag der Befreiung kommen sowjetische Pioniere und Komsomolzen in die Schule. 15 sowjetische Pioniere feiern mit den Jungpionieren und 17 mit den Thälmann-Pionieren. Acht Komsomolzen feiern mit den FDJ-Mitgliedern.
Wieviel sowjetische Gäste waren in der Schule?

15 + 17 + 8 = 40. Es waren 40 sowjetische Gäste in der Schule.

11.12.2 2. Runde 1975, Klasse 2

Aufgabe 1
a) Subtrahiere vom Produkt $7 \cdot 5$ die Zahl 6!

b) Die Summe der Zahlen 47 und 16 dividiere durch 9!

a) $7 \cdot 5 - 6 = 29$; b) (47+16) : 9 = 7

Aufgabe 2

a	b	$a+b$	$a-b$
22	13		
39	16		
68	32		
55	18		

a	b	$a+b$	$a-b$
22	13	35	9
39	16	55	23
68	32	100	36
55	18	73	37

11.13 14. Olympiade 1976

11.13.1 1. Runde 1976, Klasse 2

Aufgabe 1
Zwei Pioniergruppen gestalten zum 30. Jahrestag der SED eine Feier. Aus der einen Pioniergruppe nehmen 23 Pioniere an der Feier teil, aus der anderen Pioniergruppe 25 Pioniere.
Wieviel Pioniere nehmen aus beiden Pioniergruppen an der Feier teil?

23 + 25 = 48. 48 Pioniere nahmen aus beiden Pioniergruppen an der Feier teil.

Aufgabe 2
Errechne die Differenz der Zahlen 98 und 22!

98 - 22 = 76

Aufgabe 3
a)

$$45+23-34 \qquad 89-36+24$$
$$27+18-32 \qquad 74-26+31$$

b)

$$3\cdot 6+42 \qquad 10\cdot 2-14$$
$$21:3+45 \qquad 18:2+54$$

a) 45 + 23 - 34 = 34; 89 - 36 + 24 = 77; 27 + 18 - 32 = 13; 74 - 26 + 31 = 79
b) $3\cdot 6+42=60$; $10\cdot 2-14=6$; 21 : 3 + 45 = 52; 18 : 2 + 54 = 63

Aufgabe 4
Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = 4$ cm. Bestimmen einen Punkt C, der nicht auf dieser Strecke liegt. Verbinde C mit A und B. Benenne die entstandene Figur.

Die Genauigkeit ist zu beachten. In der Figur muss das Dreieck erkennbar sein. Die Figur ist ein Dreieck.

11.13.2 2. Runde 1976, Klasse 2

Aufgabe 1
8 m = ... cm ;   40 cm = ... dm ;   6 cm = ... mm

8 m = 80 cm ; 40 cm = 4 dm ; 6 cm = 60 mm

Aufgabe 2
Berechne die fehlenden Zahlen.

a	b	$a+b$
	31	75
	43	81
	22	66

e	i	$e \cdot i$
9	2	
3		9
10		50

a	b	$a+b$
44	31	75
38	43	81
44	22	66

e	i	$e \cdot i$
9	2	18
3		9 27
10	5	50

11.14 15. Olympiade 1977

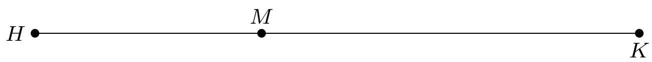
11.14.1 1. Runde 1977, Klasse 2

Aufgabe 1
Von 33 Pionieren einer Pioniergruppe konnten beim Pioniersportfest 8 Pioniere Medaillen erhalten, weil sie einen ersten zweiten oder dritten Platz belegten. Alle anderen Pioniere erhielten Urkunden für die Teilnahme.
Wieviel Pioniere dieser Gruppe erhielten Urkunden?

25 Pioniere dieser Gruppe erhielten Urkunden.

Aufgabe 2
Zeichne eine Strecke $\overline{HK}$ mit der Länge $\overline{HK} = 8$ cm! Kennzeichne auf der Strecke $\overline{HK}$ einen Punkt M so, dass $\overline{HM} = 3$ cm.
Bestimme die Länge von $\overline{MK}$.

$\overline{HM}$ muss 3 cm lang sein, $\overline{MK}$ 5 cm



Aufgabe 3
Rechne.

$$53 + 34 - 8 \qquad 38 + 36 + 26$$
$$64 - 0 + 1 \qquad 100 - 1 - 1$$
$$9 \cdot 2 + 2 \qquad 2 : 2 - 1$$

53 + 34 - 8 = 79; 38 + 36 +26 = 100; 64 - 0 + 1 = 65; 100 - 1 - 1 = 98; $9 \cdot 2 + 2 = 20$; 2 : 2 - 1 = 0

Aufgabe 4
Löse die Gleichungen.

$e = 20$; $a = 10$; $x = 1$ $45 + e = 65$; $80 + x = 81$; $a + 90 = 100$

Aufgabe 5
Berechne zuerst die Summe der Zahlen 65 und 23 und dann die Differenz der Zahlen 65 und 23!

65 + 23 = 88; 65 - 23 = 42

11.14.2 2. Runde 1977, Klasse 2

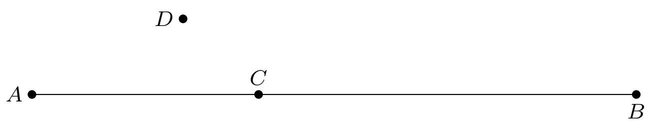
Aufgabe 1
Errechne die Summe der Zahlen 6 und 4. Addiere zu dieser Summe die Zahl 30.

6 + 4 = 10; 10 + 30 = 40

Aufgabe 2
Petra sammelte 6 kg Altpapier. Udo sammelte 2 kg mehr als Petra.
Wieviel kg Altpapier sammelten beide Kinder zusammen?

14 kg Altpapier sammelten beide Kinder zusammen: 6 + 6 + 2 = 14

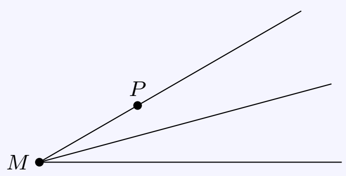
Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$. Kennzeichne auf der Strecke $\overline{AB}$ einen Punkt C.
Kennzeichne einen Punkt D, der nicht auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt!

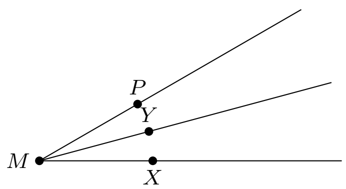


11.15 16. Olympiade 1978

11.15.1 1. Runde 1978, Klasse 2

Aufgabe 1
Gib auf jedem Strahl einen Punkt an, der ebenso weit von M entfernt ist wie der Punkt P.





Aufgabe 2
Bei der ABC-Mathematik-Olympiade erhielten 45 Schüler der Erich-Weinert-Oberschule eine Urkunde. In der Juri-Gagarin-Oberschule waren es 17 Schüler weniger, die eine Urkunde überreicht bekamen.
Wieviel Schüler der Juri-Gagarin-Oberschule erhielten eine Urkunde?

45 - 17 = 28. 28 Schüler der Juri-Gagarin-Oberschule erhielten eine Urkunde.

Aufgabe 3
a) 35 + 45 + 18 ; 68 - 42 - 26 ; 100 - 25 - 0

b) $5 \cdot 4 + 80$; $6 \cdot 4 - 20$; 3 : 3 + 99

a) 35 + 45 + 18 = 98; 68 - 42 - 26 = 0 ; 100 - 25 - 0 = 75
b) $5 \cdot 4 + 80 = 100$; $6 \cdot 4 - 20 = 4$; 3 : 3 + 99 = 100

Aufgabe 4
6 dm = ... cm ; 10 dm = ... cm ; 50 mm = ... cm

6 dm = 60 cm ; 10 dm = 100 cm ; 50 mm = 5 cm

Aufgabe 5
Löse die Ungleichung: $98 < x < 100$.

$x = 99$

Aufgabe 6
Multipliziere 8 mit 4, subtrahiere vom Produkt 15.

$8 \cdot 4 = 32; 32 - 15 = 17$

11.15.2 2. Runde 1978, Klasse 2

Aufgabe 1

a	$a \cdot 1$
9	
0	

$9 \cdot 1 = 9$; $0 \cdot 1 = 0$

Aufgabe 2

c	$c : 5$
45	
5	

45 : 5 = 9; 5 : 5 = 1

Aufgabe 3
Bilde aus je drei Zahlen eine Gleichung.

83 17 100; 2 3 6; 45 5 9

83 + 17 = 100 ; $2 \cdot 3 = 6$; 45 : 5 = 9

Aufgabe 4
Der große Zeiger einer Rathausuhr ist 2 m lang. Bei einer Armbanduhr ist der große Zeiger 2 cm lang.
Welcher Zeiger muss sich schneller drehen?

Die Zeiger drehen sich bei beiden Uhren gleich schnell.

Aufgabe 5
Herr Müller hat 16 Stuhlbeine hergestellt.
Wieviel Stühle kann er bauen?

16 : 4 = 4. Er kann 4 Stühle bauen.

Aufgabe 6
Addiere die Zahlen von 1 bis 10!

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$. Die Summe beträgt 55.

11.16 17. Olympiade 1979

11.16.1 1. Runde 1979, Klasse 2

Aufgabe 1
Im Wettbewerb zum 30. Geburtstag unserer Republik will die Pioniergruppe der Klasse 2a 36 Geschenke für einen Kindergarten basteln. 23 Geschenke sind schon fertig.
Wieviel Geschenke müssen noch gebastelt werden?

13 Geschenke müssen noch gebastelt werden.

Aufgabe 2
Unterstreiche die geraden Zahlen: $20, 3, 18, 4, 15$.

$\underline{20}, 3, \underline{18}, \underline{4}, 15$

Aufgabe 3
a) $93 - 41 - 0$; $\quad 22 + 39 - 9$; $\quad 44 + 44 - 44$

b) $6 \cdot 2 + 8 \cdot 4$; $\quad 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4$; $\quad 10 \cdot 3 - 10 \cdot 2$

c) $9 \cdot 3$; $\quad 24 : 4$; $\quad 4 \cdot 9$

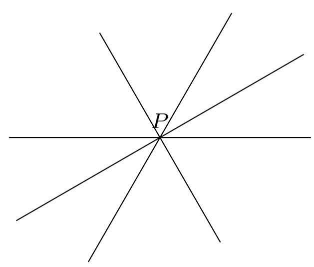
d) $x : 3 = 8$; $\quad 20 : x = 5$; $\quad x : 2 = 4$

a) $93 - 41 - 0 = 52$, $22 + 39 - 9 = 52$, $44 + 44 - 44 = 44$
b) $6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 44$, $4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 0$, $10 \cdot 3 - 10 \cdot 2 = 10$
c) $9 \cdot 3 = 27$, $24 : 4 = 6$, $4 \cdot 9 = 36$
d) $x = 24$, $x = 4$, $x = 8$

Aufgabe 4
Rechne um in
a) Dezimeter: 3 m ; 70 cm $\quad$ b) Zentimeter: 80 mm ; 4 dm $\quad$ c) Millimeter: 4 cm ; 7 cm.

a) 3 m = 30 dm; 70 cm = 7 dm;
b) 80 mm = 8 cm; 4 dm = 40 cm;
c) 4 cm = 40 mm; 7 cm = 70 mm.

Aufgabe 5
Zeichne vier verschiedene Geraden, die durch denselben Punkt P gehen.



11.16.2 2. Runde 1979, Klasse 2

Aufgabe 1
Inge rechnet 4 Gruppen mit je 5 Aufgaben. Peter rechnet in der gleichen Zeit 3 Gruppen mit je 6 Aufgaben.
Welches Kind rechnet in der gleichen Zeit mehr Aufgaben?

Inge rechnet in der gleichen Zeit mehr Aufgaben.

Aufgabe 2

a)

a	b	$a-b$
77	43	
93	29	
64	48	

b)

a	$a:4$
20	
40	
4	

a)

a	b	$a-b$
77	43	34
93	29	64
64	48	16

b)

a	$a:4$
20	5
40	10
4	1

Aufgabe 3
Schreibe unter jede Zahl ihr Doppeltes: 5 6 14

Das Doppelte: 10 12 28

Aufgabe 4
Errechne die Summe und die Differenz der Zahlen 26 und 15!

26 + 15 = 41 ; 26 - 15 = 11

Aufgabe 5
Ein Huhn braucht 3 Wochen, um 12 Eier auszubrüten.
Wie lange braucht es für 4 Eier?

Es braucht ebenfalls 3 Wochen.

11.17 18. Olympiade 1980

11.17.1 1. Runde 1980, Klasse 2

Aufgabe 1
a) $43 + 21 + 36$; $100 - 43 - 57$; $33 + 57 - 17$

b) $7 \cdot 5 - 5 \cdot 7$; $3 \cdot 1 - 0 \cdot 2$; $9 \cdot 2 + 9 \cdot 5$

c) $20 : 2$; $24 : 4$; $27 : 3$

a) $43 + 21 + 36 = 100$; $100 - 43 - 57 = 0$; $33 + 57 - 17 = 75$
b) $7 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0$; $3 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 3$; $9 \cdot 2 + 9 \cdot 5 = 63$
c) $20 : 2 = 10$; $24 : 4 = 6$; $27 : 3 = 9$

Aufgabe 2
Bilde Gleichungen:
5 5 25; 4 9 36; 18 3 6; 36 4 9

$5 \cdot 5 = 25$; $4 \cdot 9 = 36$; $18 : 3 = 6$; $36 = 4 \cdot 9$

Aufgabe 3
a) 8 m = ... cm;   90 mm = ... cm;   40 cm = ... dm

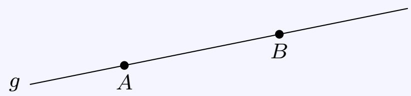
b) Wieviel Stunden sind von 18.00 Uhr bis 23.00 Uhr vergangen?
Wieviel Minuten sind es von 7.15 Uhr bis 7.55 Uhr?

a) 8 m = 80 cm; 90 mm = 9 cm; 40 cm = 4 dm
b) Erste Zeitdifferenz 5 Stunden, zweite 40 Minuten.

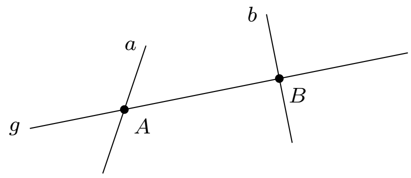
Aufgabe 4
Vergleiche und begründe mit der Addition! $66 < 100$

$66 < 100$, denn $66 + 34 = 100$

Aufgabe 5



Zeichne durch den Punkt B eine Gerade b, die auf der Geraden g senkrecht steht.
Zeichne durch den Punkt A eine Gerade a, die auf der Geraden g nicht senkrecht steht!



Aufgabe 6
Bei einem Pionierwettkampf im Kreis starteten aus einer Schule 26 Schüler. Genau die Hälfte konnte eine Medaille erringen.
Wieviel Schüler dieser Schule erhielten eine Medaille?

Aus dieser Schule erhielten 13 Schüler eine Medaille.

11.17.2 2. Runde 1980, Klasse 2

Aufgabe 1

a)

a	$4 \cdot a$
10	
8	
7	

b)

b	$b : 3$
3	
21	
15	

c)

x	y	$x - y$
56		32
100	5	
22		4

a)

a	$4 \cdot a$
10	24
8	16
7	12

b)

b	$b : 3$
3	1
21	7
15	5

c)

x	y	$x - y$
56	24	32
100	5	95
22	18	4

Aufgabe 2
a) Ordne die Zahlen der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl. 61   16   34   43   33

b) Schreibe alle ungeraden Zahlen zwischen 76 und 84 auf!

a) 16; 33; 34; 43; 61; b) 77; 79; 81; 83

Aufgabe 3
Berechne den Quotienten der Zahlen 36 und 4!

36 : 4 = 9

Aufgabe 4
Damit sie gar werden, müssen 3 Eier 5 Minuten lang kochen.
Wie lange muss man 6 Eier kochen lassen?

Auch 6 Eier muss man 5 Minuten kochen lassen.

11.18 19. Olympiade 1981

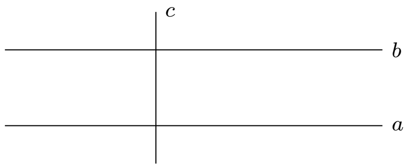
11.18.1 1. Runde 1981, Klasse 2

Aufgabe 1
Jungpioniere basteln für die 9 Mitglieder ihrer Patenbrigade kleine Geschenke, für Jedes Mitglied 2.
Wieviel Geschenke basteln die Jungpioniere?

Die Jungpioniere basteln 18 Geschenke.

Aufgabe 2
Zeichne zwei Geraden, die die gleiche Richtung haben!
Zeichne eine weitere Gerade, die diese beiden Geraden im rechten Winkel schneidet!

Zwei zueinander parallele Geraden, eine dritte Gerade, die diese beiden Geraden schneidet, und zwar im rechten Winkel, z.B.



Aufgabe 3
Welche Zahl musst du von 89 subtrahieren, um 81 zu erhalten? Bilde eine Gleichung!

89 - 8 = 81. Mann muss die 8 subtrahieren.

Aufgabe 4
100 mm = ... cm ;   10 dm = ... m ;   1 h = ... min

100 mm = 10 cm ; 10 dm = 1 m ; 1 h = 60 min

Aufgabe 5
a) $100 - 38 + 11$; $46 + 38 + 16$; $63 - 29 - 34$

b) $7 \cdot 3 + 2 \cdot 9$; $9 \cdot 3 - 3 \cdot 9$; $10 \cdot 5 - 8 \cdot 3$

c) $x \cdot 5 = 5$; $8 \cdot y = 16$; $10 \cdot 10 = a$

d) $18 : e = 9$; $a : 2 = 1$; $27 : 3 = x$

a) $100 - 38 + 11 = 73$; $46 + 38 + 16 = 100$; $63 - 29 - 34 = 0$
b) $7 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 39$; $9 \cdot 3 - 3 \cdot 9 = 0$; $10 \cdot 5 - 8 \cdot 3 = 26$
c) $x = 1$; $y = 2$; $a = 100$
d) $e = 2$; $a = 2$; $x = 9$

11.18.2 2. Runde 1981, Klasse 2

Aufgabe 1
Ermittle das Doppelte von $6 \cdot 2$; $5 \cdot 8$; $7 \cdot 3$.

24 ; 80 ; 42

Aufgabe 2
Susanne schätzte die Länge des Schulhofes auf 60 m. Steffen und Ulf messen. Sie legen ein Messband von 20 m Länge zweimal aus und messen dann noch einmal 14 m.
Um wieviel Meter verschätzte sich Susanne?

Susanne verschätzte sich um 6 Meter.

Aufgabe 3
a)

x	y	$x-y$
100	63	
96	49	
83	26	

b) $27 : a = 9$; $18 : a = 9$; $45 : a = 9$

a)

x	y	$x-y$
100	63	37
96	49	47
83	26	57

b) $a = 3$; $a = 2$; $a = 5$

Aufgabe 4
a)

$$75 - x = 28$$
$$57 + y = 82$$
$$x + y = 72$$

b) $a = 4 \cdot 5$; $b = a + 36$

a) $x = 47$, $y = 25$; b) $a = 20$, $b = 56$

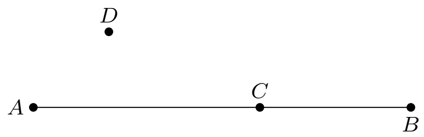
Aufgabe 5
7 Heuhaufen und 11 Heuhaufen werden zusammengetragen. Wie viel Heuhaufen ergibt das?

Das ergibt einen Heuhaufen.

11.19 20. Olympiade 1982

11.19.1 1. Runde 1982, Klasse 2

Aufgabe 1
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$.
Kennzeichne auf dieser Strecke einen Punkt C.
Kennzeichne einen Punkt D, der nicht auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.



Aufgabe 2
$64 - 29$; $77 - 43$; $35 + 48$

$64 - 29 = 35$; $77 - 43 = 34$; $35 + 48 = 83$

Aufgabe 3
$3 \cdot 4 + 9 \cdot 2$; $7 \cdot 10 + 5 \cdot 5$; $8 \cdot 2 - 4 \cdot 4$

$3 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 30$; $7 \cdot 10 + 5 \cdot 5 = 45$; $8 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0$

Aufgabe 4

a	b	$a : b$
27	3	
80	10	
6	2	

a	b	$a : b$
27	3	9
80	10	8
6	2	3

Aufgabe 5
Berechne von folgenden Zahlen: 20, 48, 34
a) das Doppelte b) die Hälfte!

a) 40, 96, 68; b) 10, 24, 17

Aufgabe 6
6. Rechne um in
a) Millimeter 7 cm 10 cm 8 cm
b) Zentimeter 90 mm 50 mm 10 mm.

a) 70 mm, 100 mm, 80 mm; b) 9 cm, 5 cm, 1 cm

Aufgabe 7
Alle 2. Klassen der Ernst-Thälmann-Oberschule beteiligen sich an dem Aufruf der ABC-Zeitung "Guten Tag, Heimatort!"

22 Jungpioniere helfen, die Grünanlage im Stadtbezirk sauber zu halten, 19 Jungpioniere helfen bei der Ausgestaltung einer Wandzeitung im Wohngebiet. 18 Jungpioniere erforschen, was in den Betrieben ihres Heimatortes hergestellt wird.
Wieviel Jungpioniere haben Aufträge übernommen?

59 Jungpioniere haben Aufträge übernommen.

11.19.2 2. Runde 1982, Klasse 2

Aufgabe 1
Bilde Aufgaben, und rechne sie aus:

Minuend	48	96	33	68
Subtrahend	12	51	11	59
Quotient				

48 - 12 = 36, 96 - 51 = 45, 33 - 11 = 22, 68 - 59 = 9

Aufgabe 2
Bilde Gleichungen: 21 7 14; 40 4 10; 7 5 35; 48 25 73

21 - 7 = 14 ; 40 = 4 $\cdot$ 10 ; 7 $\cdot$ 5 = 35 ; 48 + 25 = 73

Aufgabe 3
Berechne den Quotienten aus den Zahlen 45 und 5.

45 : 5 = 9

Aufgabe 4
Nenne die fehlenden Zahlen.

4			16			28			40

4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Aufgabe 5
Wenn 4 Katzen in einem Raum in vier Ecken sitzen, wie viel Augen sieht dann jede?

Jede Katze sieht 6 Augen.

11.20 21. Olympiade 1983

11.20.1 1. Runde 1983, Klasse 2

Aufgabe 1
Anke, Susanne und Steffen rechnen sehr gern. Sie bitten ihre Horterzieherin, ihnen Aufgaben zu stellen. Susanne hat 18 Aufgaben gerechnet.
Anke hat 13 Aufgaben mehr gerechnet. Steffen hat 2 Aufgaben weniger gerechnet als Anke.
Wieviel Aufgaben hat Anke, wie viel Aufgaben hat Steffen geschafft?

18 + 13 = 31, 31 - 2 = 29. Anke hat 31 Aufgaben gerechnet, Steffen hat 29 Aufgaben gerechnet.

Aufgabe 2
a) $100-28-17$; $47+18+35$; $66-25+41$

b) $6\cdot 5+5\cdot 6$; $2\cdot 1-0\cdot 2$; $10\cdot 5+2\cdot 10$

c) $a\cdot 2=2$; $7\cdot y=14$; $10\cdot 10=2$

d) $16:e=8$; $a:5=1$; $30:3=x$

a) $100-28-17=55$; $47+18+35=100$; $66-25+41=82$
b) $6\cdot 5+5\cdot 6=60$; $2\cdot 1-0\cdot 2=2$; $10\cdot 5+2\cdot 10=70$
c) $a=1$; $y=2$; $b=100$
d) $e=2$; $a=5$; $x=10$

Aufgabe 3
1 m = ... cm ; 40 mm = ... cm ; 10 cm = ... dm

1 m = 100 cm ; 40 mm = 4 cm ; 10 cm = 1 dm

Aufgabe 4
Addiere die Zahlen 1 bis 10.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55. Die Summe beträgt 55.

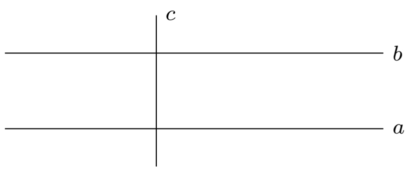
Aufgabe 5

$$75-x=28$$
$$57+y=82$$
$$x+y=72$$

75 - 47 = 28; 57 + 25 = 82; 47 + 25 = 72

Aufgabe 6
Zeichne zwei zueinander parallele Geraden und eine Gerade, die senkrecht auf diesen beiden Geraden steht.

Beispiel:



11.20.2 2. Runde 1983, Klasse 2

Aufgabe 1
Berechne das Fünffache von 7.
Berechne das Zehnfache von 5.
Berechne des Zweifache von 7.

35; 50; 14

Aufgabe 2
Subtrahiere und begründe!

$$66 - 25 = 41, \text{ denn } 41 + 25 = 66$$
$$78 - 42 =$$
$$96 - 53 =$$
$$84 - 12 =$$

78 - 42 = 36, denn 36 + 42 = 78; 96 - 53 = 43, denn 43 + 53 = 96; 84 - 12 = 72, denn 12 + 72 = 84

Aufgabe 3
Multipliziere 8 mit 4, subtrahiere vom Produkt die Zahl 15.

$8 \cdot 4 - 15 = 17$

Aufgabe 4

a)

a	$a : 5$
25	
45	
50	
5	

b)

x	$x \cdot 2$
8	
7	
6	
10	

a)

a	$a : 5$
25	5
45	9
50	10
5	1

b)

x	$x \cdot 2$
8	16
7	14
6	12
10	20

Aufgabe 5
Wie heißt es richtig?
"9 und 7 ist 15 oder 9 plus 7 gleich 15."

Richtig heißt es: 9 plus 7 ist gleich 16.

11.21 22. Olympiade 1984

11.21.1 1. Runde 1984, Klasse 2

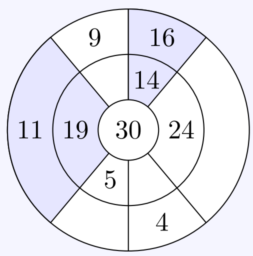
Aufgabe 1
1949 gab es in einer Stadt 17 Kindergärten. Jetzt verfügt die Stadt über 31 Kindergärten. Wieviel Kindergärten wurden seit Gründung der DDR in dieser Stadt neu gebaut?

Seit der Gründung der DDR wurden in dieser Stadt 14 Kindergärten neu gebaut.

Aufgabe 2

Fülle auf der Zahlenscheibe die leeren Felder aus!

Überlege, welche Zahlen gewählt werden müssen, wenn du die beiden Beispiele (dunkle Felder) beachtest!



Alle Summen müssen gleich 30 sein, d.h. für die fehlenden: 9 + 21 = 30, 5 + 25 = 30, 4 + 26 = 30 und 24 + 6 = 30.

Aufgabe 3
Welches Ergebnis erhältst du, wenn von der größten zweistelligen Zahl die kleinste zweistellige Zahl subtrahiert wird?
Begründe mit einer Gleichung!

99 - 10 = 89

Aufgabe 4
Beim Messen zweier Strecken stellt Ines fest, dass die Strecke $\overline{AB}$ = 5 cm und die Strecke $\overline{BC}$ = 3 cm lang sind.
Udo misst ebenfalls und erhält aber: $\overline{AB}$ = 50 mm und $\overline{BC}$ = 30 mm.
Gibt es einen Unterschied zwischen den gemessenen Strecken?

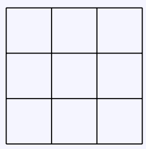
Ines und Udo haben gleiche Strecken gemessen.

Aufgabe 5
Größer, kleiner oder gleich? Setze für dieses Zeichen $\star$ die Vergleichszeichen ein!

$$63 - 20 \star 73 - 40$$
$$(7 + 8) - 5 \star 7 + (8 - 5)$$
$$28 \star 15 + 13$$
$$8 + 8 + 8 \star 8 \cdot 4$$

$63 - 20 > 73 - 40$; $(7 + 8) - 5 = 7 + (8 - 5)$; $28 = 15 + 13$; $8 + 8 + 8 < 8 \cdot 4$

Aufgabe 6



Wieviel Quadrate sind in der Abbildung enthalten?

14 Quadrate

11.21.2 2. Runde 1984, Klasse 2

Aufgabe 1
Bilde die Differenz der Zahlen 15 und 8. Multipliziere diese Differenz mit der Zahl 4.

$(15 - 8) \cdot 4 = 28$

Aufgabe 2
Dividiere die Summe der Zahlen 24 und 16 durch 5.

$(24 + 16) : 5 = 8$

Aufgabe 3

Start $\boxed{17} \xrightarrow{+36} \boxed{?} \xrightarrow{-9} \boxed{?} \xrightarrow{+23} \boxed{?}$ Ziel

Setze an Stelle der Fragezeichen die entsprechenden Zahlen!

$\boxed{17} \xrightarrow{+36} \boxed{53} \xrightarrow{-9} \boxed{44} \xrightarrow{+23} \boxed{67}$

Aufgabe 4

A

52 − 17

76 − 38 47 − 24

84 − 42 47 − 9

B

38

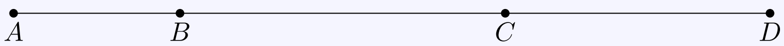
23

35 42

Ordne den Differenzen aus A durch Pfeile die entsprechenden Zahlen aus B zu!

Die Pfeile verlaufen: 76-38 zu 38; 52-17 zu 35; 47-24 zu 23; 84-42 zu 42; 47-9 zu 38

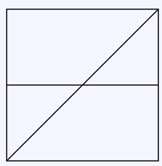
Aufgabe 5
Ermittle die Entfernung zwischen den Punkten B und C (siehe Zeichnung).



Die Punkte A und B sind 22 mm entfernt, die Punkte A und D sind 100 mm entfernt und die Punkte C und D sind 35 mm entfernt.

Die Punkte B und C sind 43 mm voneinander entfernt.

Aufgabe 6



Wieviel Dreiecke, Rechtecke und Quadrate sind in dieser Abbildung enthalten?

4 Dreiecke, 3 Rechtecke, 1 Quadrat

11.22 23. Olympiade 1985

11.22.1 1. Runde 1985, Klasse 2

Aufgabe 1

Summand		25	17
Summand	30		33
Summe	80	48	

Minuend		27	45
Subtrahend	16		27
Differenz	4	7	

Summand	50	25	17
Summand	30	23	33
Summe	80	48	50

Minuend	20	27	45
Subtrahend	16	20	27
Differenz	4	7	18

Aufgabe 2
Petra schätzt die Länge des Hortgartens auf 50 m. Ivo und Mario messen diese Strecke. Sie legen ein Messband von 20 m Länge zweimal aus und messen dann noch 12 m.
Um wieviel Meter verschätzte sich Petra?

$2 \cdot 20 + 12 = 52$ m; Petra verschätzte sich um 2 Meter.

Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke von 4 cm Länge, darunter eine zweite, die um 3 cm länger ist! Zeichne noch eine dritte Strecke, die dreimal so lang ist wie die erste!

Die zweite Strecke ist 7 cm lang, die dritte Strecke ist 12 cm lang.

Aufgabe 4
Stelle die Zahl 14 als Summe von ungeraden Zahlen dar, finde mindestens 4 Beispiele!

14 = 13 + 1, 11 + 3, 9 + 5, 7 + 7, aber auch 7 + 5 + 1 + 1, 5 + 5 + 3 + 1, usw.

Aufgabe 5

	A	
B		C
	D	

Ersetze die Buchstaben im Quadrat durch Zahlen:
A ist das Doppelte von C.
B ist der sechste Teil von A und C.
C ist das Produkt von 2 und 10.
D ist die Summe von A, B, C.

$A = 40, B = 10, C = 20, D = 70$

Aufgabe 6
$6 \cdot 5 + 4 \cdot 6$; $\quad 20 : 4 = x$; $\quad 5 \cdot 1 - 5 \cdot 0$; $\quad 6 \cdot a = 12$

$6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 48$; $x = 5$; $5 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 5$; $a = 2$

11.22.2 2. Runde 1985, Klasse 2

Aufgabe 1
Ein Bär kann 50 Jahre alt werden, ein Fuchs den fünften Teil davon; ein Wolf kann 5 Jahre älter werden als ein Fuchs.
Wie alt kann ein Wolf, wie alt ein Fuchs werden?

Ein Fuchs kann 10 Jahre und ein Wolf kann 15 Jahre alt werden.

Aufgabe 2
Welche Zahl ist um 40 größer als die Differenz der Zahlen 54 und 6?

Differenz 48; 48 + 40 = 88; Die Zahl heißt 88.

Aufgabe 3
$24 + x = 52$; $45 - b = 29$

$x = 28$, $b = 16$

Aufgabe 4
Setze alle fehlenden Zahlen ein.

a	b	$a+b$	$12+a$	$a-b$	$a \cdot b$	$10 \cdot a - b$
8	5					
9		11				

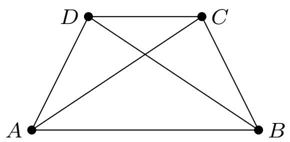
a	b	$a+b$	$12+a$	$a-b$	$a \cdot b$	$10 \cdot a - b$
8	5	13	20	3	40	75
9	2	11	21	7	18	88

Aufgabe 5
$50 - 24 + 36$; $24 + 36 + 32$; $45 + 26 - 11$; $100 - 27 - 42$

62 ; 60 ; 92 ; 31

Aufgabe 6

Lege vier verschiedene Punkte A, B, C, D fest. (siehe Abbildung)
Zeichne alle Geraden ein, die durch 2 Punkte gehen. Wie viele solche Geraden gibt es?



6 Geraden kann man zeichnen.

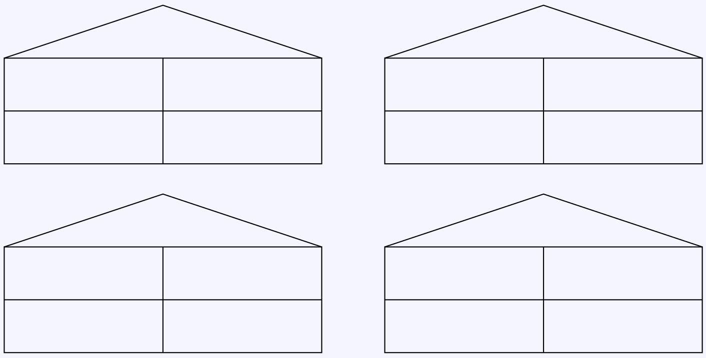
11.23 24. Olympiade 1986

11.23.1 1. Runde 1986, Klasse 2

Aufgabe 1
Susi, Peter und Jan sind Geschwister. Susi ist 12 Jahre alt, Peter ist fünf Jahre älter als Susi, und Jan ist doppelt so alt wie Susi.
Wie alt sind Peter und Jan?

Peter ist 17 Jahre alt und Jan 24 Jahre alt.

Aufgabe 2
Die Kinder Katy, Maik, Antje und Klaus wohnen in einem Haus. Katy wohnt nicht neben Klaus, Antje wohnt über Klaus, die beiden Jungen sind Nachbarn.
Überlege, wo die Kinder wohnen und trage ihre Namen in ein Haus ein. Wieviel Möglichkeiten findest du?



Es gibt genau zwei Möglichkeiten:

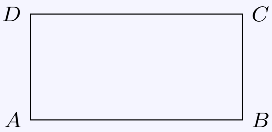
Antje	Katy
Klaus	Maik

Katy	Antje
Maik	Klaus

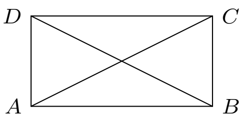
Aufgabe 3
Stelle die Zahl 10 durch Addition gleicher Summanden dar!
Gib alle Möglichkeiten an!

$10 = 5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Aufgabe 4



Zeichne ein Viereck mit den Eckpunkte A, B, C, D. Zeichne in das Viereck die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ein.
Wieviel Dreiecke findest du im Viereck $ABCD$?



Es entstehen 8 Dreiecke.

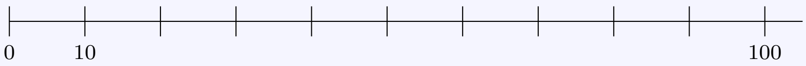
Aufgabe 5

Ergänze in dem Quadrat die leeren Felder durch Grundziffern.
Beachte dabei, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte des Quadrats die Summe 15 entstehen soll!

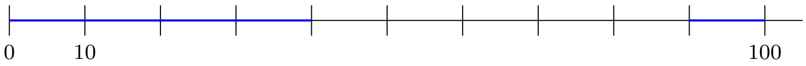
2	7	
9		
		8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Aufgabe 6



Zeichne mit Farbstift ein, auf welchem Teil des Zahlenstrahles die Zahlen b liegen, für die gilt: $b < 40$ und $b > 90$.



11.23.2 2. Runde 1986, Klasse 2

Aufgabe 1
Fülle die Tabelle aus.

a	b	$a+b$
12		45
7		18
	20	31
35	18	

a	b	$a+b$
12	33	45
7	11	18
11	20	31
35	18	53

Aufgabe 2
Bilde Gleichungen: 73 27 46; 24 18 42; 2 10 20.

$73 - 27 = 46; 24 + 18 = 42; 2 \cdot 10 = 20$

Aufgabe 3
Bei einem Schulwettbewerb der Klassen 1 bis 4 wurden 24 Preisträger ermittelt. Die Hälfte der Preisträger sind Schüler der K1asse 3, aus der Klasse 1 kommen 7 Preisträger weniger als aus der Klasse 3. Die Klasse 2 hat 4 Preisträger.
Wieviel Preisträger kommen aus der ersten, zweiten, dritten und vierten Klasse?

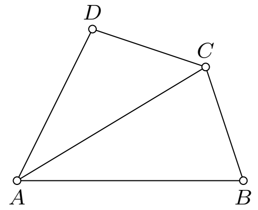
Preisträger aus Klasse 1: 5; Preisträger aus Klasse 2: 4; Preisträger aus Klasse 3: 12; Preisträger aus Klasse 4: 3.

Aufgabe 4
Entscheide, ob $2x$ richtig berechnet ist.

x	$2x$	Ist $2x$ richtig berechnet?
2	4	
7	13	
8	16	
3	6	

x	$2x$	Ist $2x$ richtig berechnet?
2	4	ja
7	13	nein
8	16	ja
3	6	ja

Aufgabe 5
Zeichne ein Viereck, und bezeichne die Eckpunkte mit A, B, c und D. Trage in das Viereck die Strecke $\overline{AC}$ ein.
Wieviel Dreiecke und wieviel Vierecke erkennst du?



2 Dreiecke , 1 Viereck

11.24 25. Olympiade 1987

11.24.1 1. Runde 1987, Klasse 2

Aufgabe 1
Ergänze die Tabelle.

a	$b = 2a$	$c = a - 2$	$d = b + 3$
4			
3			
5			

a	$b = 2a$	$c = a - 2$	$d = b + 3$
4	8	2	11
3	6	1	9
5	10	3	13

Aufgabe 2
Katja hat 6 Münzen in der Tasche. Können es insgesamt 27 Pfennige sein?
Begründe deine Antwort!

Das ist möglich. Begründung: eine 10-Pf-Münze, drei 5-Pf-Münzen, zwei 1-Pf-Münzen ergeben insgesamt 6 Münzen im Wert von 0,27 M.

Aufgabe 3
Trage in die leeren Felder Zahlen ein! Finde eine Lösung!

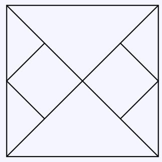
$$\begin{array}{ccccccc}
2 & + & \square & + & 3 & = & 9 \\
+ & & + & & + & & \\
\square & + & \square & + & \square & = & 9 \\
+ & & + & & + & & \\
\square & + & 4 & + & \square & = & 9 \\
\hline
9 & & 9 & & 9 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & + & 4 & + & 3 & = & 9 \\
+ & & + & & + & & \\
5 & + & 1 & + & 3 & = & 9 \\
+ & & + & & + & & \\
2 & + & 4 & + & 3 & = & 9 \\
\hline
9 & & 9 & & 9 & &
\end{array}$$

Aufgabe 4
Stelle die Zahl 16 durch Addition gleicher Summanden dar.
Gib alle Möglichkeiten an.

16 = 8 + 8 = 4 + 4 + 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Aufgabe 5



Wieviel Rechtecke und wieviel Dreiecke findest du?

3 Rechtecke, 12 Dreiecke

Aufgabe 6
Alle 21 Schüler der Klasse 2b beteiligten sich an einer Altstoffsammlung. 15 Schüler lieferten Altpapier ab und 18 Schüler Gläser.
Wieviel Schüler sammelten Altpapier und Gläser?

12 Schüler sammelten Altpapier und Gläser, denn 15 + 18 = 33 und 33 - 21 = 12.

11.24.2 2. Runde 1987, Klasse 2

Aufgabe 1
Ergänze die Tabelle.

a	$2 \cdot a + 2$
3	
2	
	10
	22

a	$2 \cdot a + 2$
3	8
2	6
4	10
10	22

Aufgabe 2
Verdoppelt man eine Zahl und addiert danach 20, so erhält man 26.
Wie heißt die Zahl?

Die Zahl heißt 3, denn 3 + 3 + 20 = 26.

Aufgabe 3
Wieviel Zahlen liegen zwischen dem Vorgänger und dem Nachfolger von 7?
Ordne alle ermittelten Zahlen und die 7 der Größe nach.

Eine Zahl liegt zwischen Vorgänger und Nachfolger von 7. Geordnet: $6 < 7 < 8$.

Aufgabe 4
Karin, Susi und Jan vergleichen ihre Ergebnisse im Weitsprung. Susi sprang weiter als Jan. Jan und Susi springen nicht so weit wie Karin.
Ordne die Schüler nach ihren Ergebnissen im Weitsprung!

Platz 1: Karin; Platz 2: Susi; Platz 3: Jan

Aufgabe 5
Für welche Zahlen x gilt folgende Ungleichung: $9 < 2 \cdot x < 15$?
Kontrolliere deine Antwort!

$x = 5, 6, 7$ denn $9 < 10 < 15$, $9 < 12 < 15$, $9 < 14 < 15$.

11.25 26. Olympiade 1988

11.25.1 1. Runde 1988, Klasse 2

Aufgabe 1
Berechne die Ergebnisse. Ordne dann die Ergebnisse, beginne mit dem größten.

$$\begin{array}{rrrr} 24-7 & 46-46 & 53+26 & 34+37 \\ 45-29 & 52-25 & 55+37 & 68+0 \end{array}$$

$24-7 = 17$, $46-46 = 0$, $53+26 = 79$, $34+37 = 71$, $45-29 = 16$, $52-25 = 27$, $55+37 = 92$, $68+0 = 68$.
Reihenfolge: 92, 79, 71, 68, 27, 17, 16, 0

Aufgabe 2
Eine Pioniergruppe geht in Karl-Marx-Stadt zum Schlossteich, um mit Booten zu fahren. 23 Pioniere steigen in die Boote. Die anderen 5 Pioniere warten am Ufer und spielen mit einem Ball.
Wie viele Pioniere gehören zur Gruppe?

$23 + 5 = 28$. Zur Gruppe gehören 28 Pioniere.

Aufgabe 3
Berechne b. $82 - b = 57$
Bestimme den Vorgänger und den Nachfolger von b. Berechne die Summe von Vorgänger und Nachfolger von b.

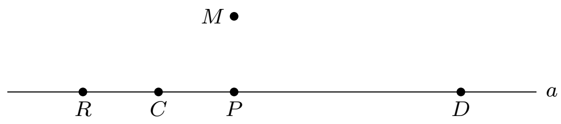
$b = 25$. Der Vorgänger ist 24, der Nachfolger 26 und deren Summe 50.

Aufgabe 4
Ergänze die Tabelle:

m	$m+26$
3	
	34
	85
47	

m	$m+26$
3	29
8	34
59	85
47	73

Aufgabe 5
Zeichne eine Gerade a.
Kennzeichne darauf eine Strecke $\overline{CD}$ von 4 cm Länge.
Zeichne einen Punkt M so, dass er nicht auf der Geraden a liegt.
Zeichne den Punkt P so, dass er zwischen den Punkten C und D liegt.
Zeichne den Punkt R so, dass er nicht zwischen den Punkten C und D liegt.



Der Punkt R muss nicht auf der Geraden a liegen.

Aufgabe 6
Ersetze die Buchstaben durch Zahlen.

$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & C \\ C & - & D & = & E \\ F & - & G & = & D \\ \hline C & - & E & = & \square \\ B & + & D & = & \square \end{array}$$

Es ist $A = 25 + 6$, $B = 54 - 3$, $E = 72 - 7$, $F = 92 - 7$. Berechne C, D und G.

$$\begin{array}{ccccc} 31 & + & 51 & = & 82 \\ 82 & - & 17 & = & 65 \\ 85 & - & 68 & = & 17 \\ \hline 82 & - & 65 & = & 17 \\ 51 & + & 17 & = & 68 \end{array}$$

Ergebnisse: $C = 82$, $D = 17$, $G = 68$

11.25.2 2. Runde 1988, Klasse 2

Aufgabe 1

a	b	$a-b$	r	f	richtiges Ergebnis
78	6	73			
93	42	51			
85	38	44			
66	59	8			

Überprüfe die Rechnungen. Kreuze richtig oder falsch an. Für falsche Ergebnisse rechne die richtigen.

a	b	$a-b$	r	f	richtiges Ergebnis
78	6	73		x	72
93	42	51	x		
85	38	44		x	47
66	59	8		x	7

Aufgabe 2
Bestimme die kleinste Zahl, die kleiner als 52 und größer als 25 ist.
Bestimme die kleinste Zahl, die größer als 34 und kleiner als 43 ist.

Die Zahlen 51 und 35.

Aufgabe 3
Errechne die fehlenden Zahlen.

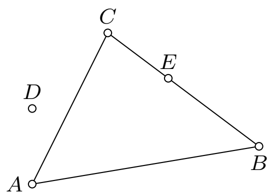
25	+	13	+	□	=	45
+		+		+		+
18	+	19	+	□	=	45
+		+		+		-
□	+	□	+	18	=	□
45	+	45	-	□	=	□

25	+	13	+	7	=	45
+		+		+		+
18	+	19	+	8	=	45
+		+		+		-
2	+	13	+	18	=	33
45	+	45	-	33	=	57

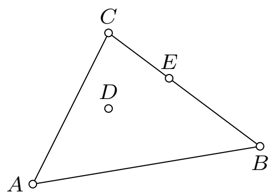
Aufgabe 4
Lege 56 Pf mit 3 Münzen und dann mit mehr als 4, aber nicht mehr als 7 Münzen.
Welche Möglichkeiten findet du?

50; 5; 1 (3 Münzen)
20; 20; 10; 5; 1 (5 Münzen)
20; 10; 10; 10; 5; 1 (6 Münzen)
20; 20; 5; 5; 5; 1 (6 Münzen)
50; 1; 1; 1; 1; 1; 1 (7 Münzen)

Aufgabe 5
Zeichne ein Dreieck ABC.
Kennzeichne einen Punkt D, der auf keiner der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ liegt.
Kennzeichne einen Punkt E, der zwischen den Punkten B und C liegt.



oder



Aufgabe 6
Im Pionierhaus "Juri Gagarin" gibt es Arbeitsgemeinschaften Mathematik für Schüler der 4., 5. und weiteren Klassen. In den beiden AG der Klasse 4 sind 15 und 17 Schüler, in denen der Klasse 5 sind 12, 14 und 17 Schüler.
Wie viel Schüler der 4. und 5. Klassen sind in AG Mathematik?

75 Schüler sind in AG Mathematik der Klassen 4 und 5.

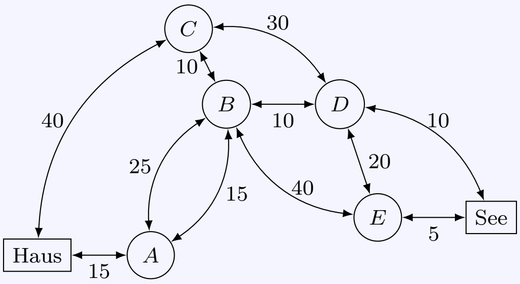
11.26 27. Olympiade 1989

11.26.1 1. Runde 1989, Klasse 2

Aufgabe 1
Peter kauft einen Zeichenblock für 37 Pfennig. Er legt zwei Münzen auf den Tisch und erhält 3 Pfennig zurück.
Mit welchen Münzen hat Peter bezahlt?

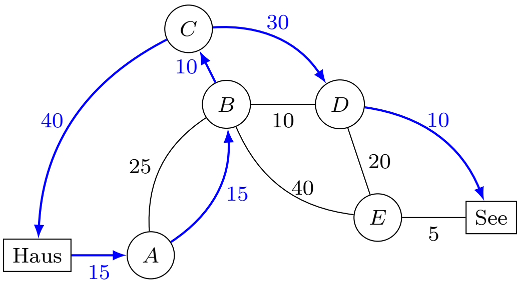
Peter bezahlt mit zwei 20-Pf-Stücken und erhält damit $2 \cdot 20$ Pf - 37 Pf = 3 Pfennig zurück.

Aufgabe 2



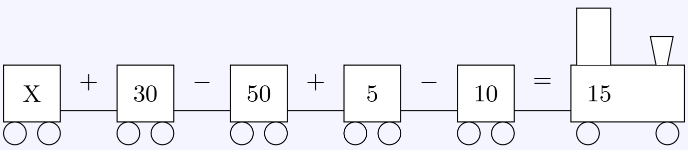
Steffi hat in eine Skizze eingetragen, wie viel Minuten man für die verschiedenen Wege benötigt. Vom Haus zum See ist Steffi 80 Minuten gewandert.
Welchen kann sie gegangen sein? Zeichne einen Weg farbig nach.
Schreibe die Zeiten heraus und addiere.

Es gibt zwei mögliche Wege, deren Wanderzeit 80 Minuten beträgt, zum ein vom Haus zu C, danach zu D und abschließend zum See oder vom Haus zu A, nach B (der 15 Minuten Weg!), nach C und D und zum See.



Für beide Wege ergibt sich die Wanderzeit zu 40 min + 30 min + 10 min = 80 Minuten bzw. 15 min + 15 min + 10 min + 30 min + 10 min = 80 Minuten.

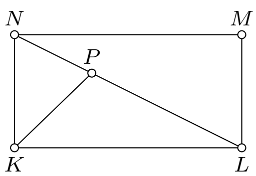
Aufgabe 3



Welche Zahl musst du in den letzten Wagen für X eintragen, damit eine richtige Gleichung entsteht: 30, 40, 50 oder 60?

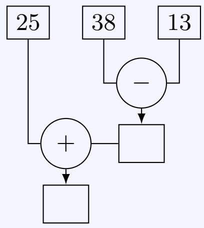
$X = 40$, da 40 + 30 - 50 + 5 - 10 = 15 ist.

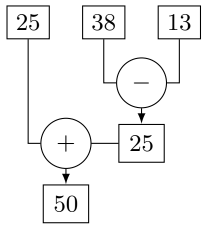
Aufgabe 4
Zeichne ein Viereck $KLMN$. Zeichne die Strecke $\overline{LN}$ ein. Kennzeichne zwischen den Punkten L und N einen Punkt P. Zeichne die Strecke $\overline{KP}$.
Wie viel Dreiecke erkennst du in der Figur?



Es entstehen vier Dreiecke: $\triangle KLN$, $\triangle LMN$, $\triangle KLP$ und $\triangle KPN$.

Aufgabe 5
Errechne die fehlenden Zahlen.





Aufgabe 6
Berechne

$$A = 25 + 3 \qquad H = 43 - 17$$
$$T = 65 + 27 \qquad L = 65 + 18 - 13$$

Ordne die Ergebnisse der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl. Schreibe die Buchstaben darunter.

Zahlen				
Buchstaben				

A = 25 + 3 = 28; H = 43 - 17 = 26; T = 65 + 27 = 92; L = 65 + 18 -13 = 70; geordnet: 25, 28, 70, 92

Zahlen	26	28	70	92
Buchstaben	H	A	L	T

11.26.2 2. Runde 1989, Klasse 2

Aufgabe 1
Addiere drei der zahlen, so dass die Summe 100 ist: 16, 54, 36, 22, 48, 30.
Suche noch eine Möglichkeit.

16 + 54 + 30 = 100 oder 16 + 36 + 48 = 100 oder 22 + 48 + 30 = 100

Aufgabe 2
Setze die Zeichen "$+x$", "$-$", "$=$" so, dass eine Gleichung entsteht:

$$24 \quad \square \quad 7 \quad \square \quad 3 \quad \square \quad 20$$

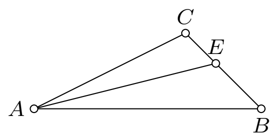
24 - 7 + 3 = 20

Aufgabe 3
René nimmt drei Würfel. Er würfelt 11 Punkte.
Trage ein, wie René gewürfelt haben kann. Suche noch andere Möglichkeiten:

1. Würfel	2. Würfel	3. Würfel

1. Würfel	2. Würfel	3. Würfel
6	4	1
6	3	2
5	3	3
5	2	4
5	1	5
4	5	3

Aufgabe 4
Zeichne ein Dreieck ABC. Kennzeichne zwischen den Punkte B und C einen Punkte E. Zeichne die Strecke $\overline{AE}$.
Wie viel Dreiecke erkennst du?



3 Dreiecke (ABE, ABC, AEC)

Aufgabe 5
a) Wie viel Zahlen gibt es, die größer als 35 und kleiner als 54 sind?
b) Welche dieser Zahlen sind Vielfache von 10?
c) Addiere die Vielfachen von 10.

a) 18 Zahlen; b) 40, 50; c) 40 + 50 = 90

Aufgabe 6
Zum 40. Jahrestag der DDR wollen Pioniere die Schule schmücken. Sie fertigen Fähnchen und Wimpel an. Bernd hat 15 Fähnchen und 17 Wimpel fertig. Sabine schaffte 18 Fähnchen und 13 Wimpel.

a) Wie viel Fähnchen haben sie fertig?
b) Wie viel Wimpel wurden geschafft?

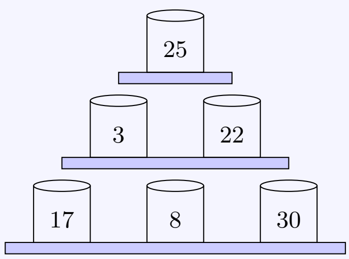
a) 15 + 88 = 33. 33 Fähnchen sind fertig.
b) 17 + 13 = 30. 30 Wimpel wurden geschafft.

11.27 28. Olympiade 1990

11.27.1 1. Runde 1990, Klasse 2

Aufgabe 1

Büchsenwerfen
Du erhältst einen Preis, wenn du 3 Büchsen triffst und dabei genau 50 Punkte erreichst.
Welche Büchsen musst du treffen? Gib alle Möglichkeiten an.



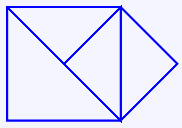
3 Möglichkeiten: 25 + 3 + 22 = 50 ; 25 + 17 + 8 = 50 ; 3 + 17 + 30 = 50

Aufgabe 2
Vater hat Benzin getankt. Er bezahlt mit einem 50 Mark-Schein. Er bekommt eine 5-Mark-Münze und eine 2 Mark-Münze zurück.
Für wie viel Mark hat Vater Benzin getankt?

50 - 5 - 2 = 43. Er hat für 43 Mark getankt.

Aufgabe 3

Wie viele Dreiecke erkennst du ?



5 Dreiecke

Aufgabe 4
Rechne ! Ordne die Ergebnisse, beginne mit der größten Zahl.
Schreibe die Buchstaben darunter. Lies.

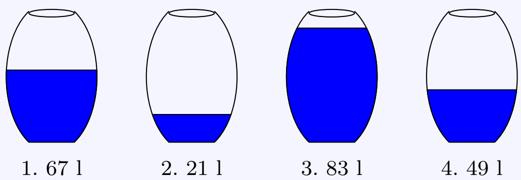
76 - 14	=	*T*
45 + 27	=	*S*
9 + 16	=	*P*
61 - 9	=	*O*

Zahlen				
Buchstaben				

T = 62 ; S = 72 ; P = 25 ; O = 52 ;

Zahlen	72	62	52	25
Buchstaben	S	T	O	P

Aufgabe 5
In jedem Fass sollen 83 Liter Wasser sein.



Wieviel Wasser muss in jedes Fass nachgegossen werden ?

1. 83 - 67 = 16, 16 Liter; 2. 62 Liter ; 3. 0 Liter ; 4. 34 Liter

Aufgabe 6
Ordne richtig zu!

18-7	63-24	72-35	83-15	94-46
39	68	11	48	37

18 - 7 = 11 ; 63 - 24 = 39 ; 72 - 35 = 37 ; 83 - 15 = 68 ; 94 - 46 = 48

12 Klassenstufe 3

12.1 1. Olympiade 1963

12.1.1 1. Runde 1963, Klasse 3

Aufgabe 1
„Hat die zweite Gruppe 100 Flaschen abgeliefert?“ fragt Thomas.
Hans erwidert: „Nein, wir haben nur 10 mehr als die Hälfte davon zur Sammelstelle gebracht.“
Wieviel Flaschen hat die Gruppe 2 zur Sammelstelle gebracht?

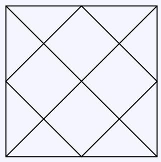
Die Gruppe 2 hat 60 Flaschen zur Sammelstelle gebracht.

Aufgabe 2
Für 5 Schutzumschläge bezahlt man im Schreibwarengeschäft 2,00 DM.
Wieviel Schutzumschläge bekommt man für 3,60 DM?

Für 3,60 DM bekommt man 9 Umschläge.

Aufgabe 3

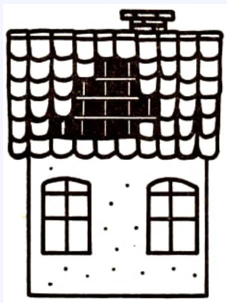
Wie viel Quadrate findest du in dieser Zeichnung?
Und wie viel Dreiecke sind es?



Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.

Aufgabe 4

Ein Dach soll repariert werden. In jeder Reihe liegen 10 Ziegel.
Wieviel Ziegel fehlen?



In der obersten, ersten Reihe fehlen 0 Ziegel, in der zweiten Reihe fehlen 2 Ziegel, in der dritten Reihe fehlen 3 Ziegel, in der vierten Reihe fehlen 4 Ziegel, in der fünften Reihe fehlen 4 Ziegel. Es fehlen insgesamt 13 Ziegel.

12.1.2 2. Runde 1963, Klasse 3

Aufgabe 1
Von Rostock fuhren gleichzeitig zwei Autos nach Berlin: Ein „Trabant“ und ein „Wartburg“.
Der „Trabant“ fuhr in jeder Stunde 60 km, der „Wartburg“ 80 km.
Wieviel km fuhr der „Trabant“ in 3 Stunden?
Wieviel km fuhr der „Wartburg“ in 3 Stunden?
Wieviel km ist der „Wartburg“ nach drei Stunden dem „Trabant“ voraus?

Der „Trabant“ fuhr 180 km in 3 Stunden. Der „Wartburg“ fuhr 240 km in 3 Stunden. Der „Wartburg“ ist dem „Trabant“ nach 3 Stunden um 60 km voraus.

Aufgabe 2
Suche die fehlenden Zahlen. Es muss stets dieselbe Zahl herauskommen, wenn du die Zahlen waagerecht, senkrecht und von einer Ecke zur schräg gegenüberliegenden zusammenzählst.

80	180	40
-	100	-
160	-	-

80	180	40
60	100	140
160	20	120

12.2 2. Olympiade 1964

12.2.1 1. Runde 1964, Klasse 3

Aufgabe 1
$a : b = c$, $b = 6$; $c = 9$. Wie groß ist a?

$a = 54$

Aufgabe 2
Rainer, Horst und Klaus helfen den Nachbarn beim Kohlentragen. Rainer trägt 40 Eimer Kohlen in den Keller, Horst trägt nur den 4. Teil davon. Klaus bringt 15 Eimer Kohlen mehr als Horst in den Keller.
a) Wieviel Eimer Kohlen trägt Horst in den Keller und wieviel trägt Klaus?
b) Wieviel Eimer Kohlen tragen alle drei Jungen zusammen?

a) Horst trägt 10 Eimer Kohlen in den Keller, Klaus trägt 25 Eimer.
b) Alle drei Jungen zusammen tragen 75 Eimer Kohlen in den Keller.

Aufgabe 3
In der Küche eines Ferienlagers waren 95 kg Mehl, 73 kg Zucker, 24 kg Dauerwurst und 17 kg Fett vorhanden. An einem Tage wurden davon 28 kg Mehl, 15 kg Zucker, 9 kg Dauerwurst und 6 kg Fett verbraucht.
Wieviel kg Mehl, Zucker, Wurst und Fett blieben übrig?

Es blieben 67 kg Mehl, 58 kg Zucker, 15 kg Dauerwurst und 11 kg Fett übrig.

Aufgabe 4
Stelle dir einen Turm vor, der aus würfelförmigen Bausteinen errichtet ist. Er steht auf dem Tisch! 25 Quadrate sind von allen Seiten und von oben zu sehen.
Überlege, aus wieviel Würfeln der Turm besteht!

Der Turm besteht aus 6 Würfeln.

12.2.2 2. Runde 1964, Klasse 3

Aufgabe 1
Drei Pioniere sammeln zusammen 139 kg Schrott, Der erste Pionier brachte 36 kg zur Abgabestelle, der zweite doppelt soviel.
Wieviel Kilogramm Schrott hat der dritte Pionier gesammelt?

36 + 36 = 72, 72 kg Schrott, 139 - 72 - 36 = 31; 31 kg Schrott.

Aufgabe 2
In einer LPG gibt es je Arbeitseinheit 7 M und dazu noch 8 kg Kartoffeln, 5 kg Gemüse und 3 kg Getreide, Eine. Bäuerin erarbeitet in 14 Tagen 7 Arbeitseinheiten.
Wieviel Mark bekommt die Bäuerin ausgezahlt, und wieviel Kilogramm Lebensmittel erhält sie insgesamt für die 7 Arbeitseinheiten?

$7 \cdot 7 = 49$; 49 M ...; $7 \cdot 8 = 56$; 56 kg Kartoffeln ...; $7 \cdot 5 = 35$; 35 kg Gemüse...; $7 \cdot 3 = 21$; 21 kg Getreide
56 + 35 + 21 = 112; 112 kg Lebensmittel

12.3 3. Olympiade 1965

12.3.1 1. Runde 1965, Klasse 3

Aufgabe 1
Der Zugschaffner kontrolliert die Fahrkarten der Reisenden. Im ersten Wagen sitzen 68 Reisende, im zweiten sind es 105 und im dritten 89. Auf der folgenden Station steigen in den ersten Wagen 13 Reisende ein, aus dem zweiten steigen 27 Personen aus und in den dritten Wagen steigen 24 dazu.

a) Wieviel Reisende befinden sich jetzt nach Abfahrt des Zuges in den einzelnen Wagen?
b) Wieviel zugestiegene Reisende müssen ihre Fahrkarten noch vorzeigen?

a) Im ersten Wagen befanden sich 81 Reisende, im zweiten 78 und im dritten 113 Reisende.
b) 37 Reisende müssen noch ihre Fahrkarten vorzeigen.

Aufgabe 2

$$\begin{array}{rcrcr} 34 & + & a & = & 40 \\ 40 & \cdot & 10 & = & b \\ b & \cdot & a & = & c \\ \hline c & : & (a-b)+44 & = & 56 \end{array}$$

Welche Zahlen musst du für a, b und c einsetzen?

$a = 6$; $b = 4$; $c = 24$; $24 : (6 - 4) + 44 = 56$

Aufgabe 3
Eine Schulklasse fährt ins Ferienlager,
Sie fährt 2 Stunden mit einem Bus, der 34 km in einer Stunde zurücklegt. Mt der Eisenbahn fährt sie noch 5 Stunden, in jeder Stunde 35 km.
Wieviel Kilometer fährt die Klasse?

Die Klasse fährt 243 km.

Aufgabe 4
Der Bus, mit dem die Schulklasse reist, fährt um 7.36 Uhr im Heimatort ab. Auf dem Bahnhof hat die Klasse 28 Minuten Wartezeit. Vom Zielbahnhof geht sie 15 Minuten bis zum Lager.
Wann trifft die Klasse im Lager ein?

Um 15.19 Uhr trifft die Klasse im Ferienlager ein.

12.3.2 2. Runde 1965, Klasse 3

Aufgabe 1
a) Suche die fehlenden Zahlen, so dass die Summe waagerecht und senkrecht jeweils mit 250 ermittelt wird!

120	-	-
70	-	90
-	80	-

b) Berechne anschließend den Unterschied zwischen den Summen und den Diagonalen.

120	80	50
70	90	90
60	80	110

b) Der Unterschied beträgt 120.

Aufgabe 2
Zeichne ein Rechteck mit den Seiten 4 cm und 10 cm!
Zerlege dieses Rechteck in Quadrate, von denen zwei die Seitenlänge 4 cm haben!
Wie lang sind die Seiten der anderen beiden möglichen Quadrate?

Die Seitenlänge der beiden anderen möglichen Quadrate beträgt jeweils 2 cm.

12.4 4. Olympiade 1966

12.4.1 1. Runde 1966, Klasse 3

Aufgabe 1
Juri Gagarin startete als erster Mensch am 12. April 1961 in den Weltraum. Am 6. August des gleichen Jahres begab sich German Titow als zweiter Mensch auf seinen Flug ins Weltall.
Wieviel Tage lagen zwischen diesen beiden Raumflügen?

13. April bis 30. April	= 18 Tage
Mai	= 31 Tage
Juni	= 30 Tage
Juli	= 31 Tage
bis 5. August	= 5 Tage
	115 Tage

Zwischen den beiden Flügen liegen 115 Tage.

Aufgabe 2
Erst am 20. Februar 1962 startete der erste amerikanische Kosmonaut John Glenn. Wieviel Tage nach German Titows Start gelang dieser Flug?

7. August bis 31. August	= 25 Tage
November	= 30 Tage
Dezember	= 31 Tage
Januar	= 31 Tage
bis 19. Februar	= 19 Tage
	136 Tage

Zwischen den beiden Flügen liegen 136 Tage.

Aufgabe 3
Die größte Erdentfernung bei Gagarins Flug betrug 327 km, bei Titows Flug waren es 224 km. Um wieviel Kilometer war Gagarin weiter von der Erde entfernt?

327 km - 224 km = 103 km. Gagarin war 103 km weiter von der Erde entfernt.

Aufgabe 4
Errechne im untenstehenden Quadrat für jede Zeile und für jede Spalte die Summe 480!
Setze die errechneten Zahlen in die freien Felder!

120	220	
		130
160		

120	220	140
200	150	130
160	110	210

12.4.2 2. Runde 1966, Klasse 3

Aufgabe 1
German Titow war ungefähr 25 Stunden und 30 Minuten im Weltall. Bei einer Übung übte er alle Handgriffe dreimal jeweils 90 Minuten lang, damit er beim Flug alle Aufgaben erfüllen konnte.
a) Wieviel Stunden und Minuten übte er?
b) Wieviel Stunden länger als die Übung dauerte der Weltraumflug?

a) $3 \cdot 90 = 270$; $270 : 60 = (240 : 60) + 30 = 4 + 30$
German Titow übte 270 Minuten. 270 Minuten sind 4 Stunden und 30 Minuten.
b) 25 Std. 30 Min - 4 Std. 30 Min = 21 Std., German Titow war 21 Stunden länger im Kosmos als die Übungen dauerten.

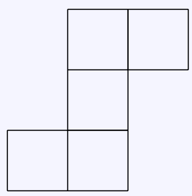
Aufgabe 2
Ich denke mir eine Zahl und addiere 490. Von der Summe subtrahiere ich 725 und erhalte 75.
Wie heißt die gedachte Zahl?

Die gedachte Zahl heißt 310.

12.5 5. Olympiade 1967

12.5.1 1. Runde 1967, Klasse 3

Aufgabe 1



Aufgepasst! Peter hat das nebenstehende Netz eines Würfels gezeichnet:
Er will daraus einen Würfel falten.
a) Ist das möglich?
b) Begründe deine Antwort!

a) Nein, b) Ein Würfel hat sechs Begrenzungsflächen. (Dieses Netz hat nur fünf Quadrate, o. ä.)

Aufgabe 2
Gerda hat 2 Paar rote und 2 Paar blaue Söckchen gleicher Größe gewaschen. Sie hängen ungeordnet zum Trocknen auf der Leine. Am Abend will sie 1 Paar gleicher Farbe abnehmen.
Da es schon dunkel ist, kann sie die Farben nicht unterscheiden.
Wieviel Söckchen muss Gerda mindestens abnehmen, damit sei ein passendes Paar hat? (Probiere mit Stäbchen!)

Gerda muss mindestens 3 Söckchen abnehmen.

Aufgabe 3
Karin und Gert wollen die Breite des Klassenzimmers abschreiten. Es ist 3,60 m breit. Karin macht stets 40 cm lange Schritte. Gert macht stets 60 cm lange Schritte.
Wieviel Schritte benötigt jedes der beiden Kinder?

Karin macht 9 Schritte; Gert mach 6 Schritte.

Aufgabe 4
Im Tierpark sind hinter einer Glasscheibe drei Schlangen zu sehen. Die erste Schlange ist 2 m lang. Die zweite Schlange ist um das Doppelte länger als die erste Schlange. Die dritte Schlange ist doppelt so lang wie die erste Schlange.
a) Wie lang ist die zweite Schlange?
b) Wie lang ist die dritte Schlange?

a) Die zweite Schlange ist 6 m lang.
b) Die dritte Schlange ist 4 m lang.

12.5.2 2. Runde 1967, Klasse 3

Aufgabe 1
Die Differenz zwischen 810 und a beträgt 350. Wie heißt die Zahl a?

$a = 460$

Aufgabe 2
Multipliziere jede der Zahlen a, b, c mit jeder der Zahlen x, y, z!
Rechne mit den Zahlen $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, $x = 7$, $y = 15$, $z = 20$.

$$\begin{array}{rrr} 8 \cdot 7 = 56 & 7 \cdot 7 = 49 & 5 \cdot 7 = 35 \\ 8 \cdot 15 = 120 & 7 \cdot 15 = 105 & 5 \cdot 15 = 75 \\ 8 \cdot 20 = 160 & 7 \cdot 20 = 140 & 5 \cdot 20 = 100 \end{array}$$

12.6 6. Olympiade 1968

12.6.1 1. Runde 1968, Klasse 3

Aufgabe 1
Helga zählt die Vögel, die nach und nach zum Futterhäuschen kommen. Nach einer Viertelstunde sagt sie zu ihrer Schwester: ”Bis jetzt waren es ebenso viele, wie der Tag Stunden hat.”
Nach einer weiteren Viertelstunde sagt sie: ”Wenn du nun noch das Vierfache von 9 addierst, weißt du, wieviel Vögel bis jetzt ins Futterhäuschen kamen.”
Wieviel Vögel hatte Helga gezählt?

Helga hat 60 Vögel gezählt.

Aufgabe 2
a) In einer Schule sollen in 9 Klassenräumen die Fensterrahmen gestrichen werden. Jeder Klassenraum hat 3 Doppelfenster.
Wieviel Fensterrahmen müssen gestrichen werden?
b) Das Elternaktiv streicht die Fensterrahmen in 5 Räumen. In den anderen Räumen übernimmt die Patenbrigade die Arbeit.
Wieviel Fensterrahmen werden von den Eltern und wieviel werden von der Patenbrigade gestrichen?

a) Es müssen 54 Fensterrahmen gestrichen werden,
b) Das Elternaktiv streicht 30 und die Patenbrigade streicht 24 Fensterrahmen.

Aufgabe 3
Im Schulgarten sollen Sträucher in Reihen von 8 m Länge gepflanzt werden, in jede Reihe 10 Sträucher. Die Schule kaufte 50 Sträucher.
Wieviel Meter beträgt die Gesamtlänge der Reihen, die bepflanzt werden können?

Die Gesamtlänge der Reihen beträgt 40 m.

Aufgabe 4
Setze im nebenstehenden Zahlen-Quadrat die fehlenden Zahlen ein!
Die Summe der Zahlen in jeder Reihe muss gleich 26 sein! Die Zahlen in den stark umrandeten Kästchen müssen drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sein.

□	4	
2	□	13
	9	□

9	4	13
2	11	13
4	9	13

12.6.2 2. Runde 1968, Klasse 3

Aufgabe 1
In der Zeitung "Neues Deutschland"war am 13. August 1967 zu lesen:
"Die Kosten für die Ernte mit dem Mähbinder betragen je Hektar (ein Hektar hat 10000 Quadratmeter) 304 Mark. Der Einsatz eines Mähdreschers kostet je Hektar nur 187 Mark."
Wieviel Mark spart eine LPG ein, wenn sie 10 Hektar Weizen mit dem Mähdrescher abernten lässt?

Die LPG spart durch den Einsatz des Mähdreschers 1170 Mark ein.

Aufgabe 2
Zeichne ein Rechteck und ein Quadrat!
Schreibe auf, worin sich diese beiden Vierecke voneinander unterscheiden!

Konstruktion mit Hilfe von zwei rechtwinkligen Zeichendreiecken; rechter Winkel und Parallelverschiebung.
Ein Quadrat hat vier gleich lange Seiten. Bei einem Rechteck sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

12.7 7. Olympiade 1969

12.7.1 1. Runde 1969, Klasse 3

Aufgabe 1
Eine Hausgemeinschaft will einen gemeinsamen Ausflug mit dem Omnibus machen. Die Plätze in diesem Omnibus reichen für 35 Personen nicht aus. 19 Erwachsene und 14 Kinder steigen in den Bus. Er ist nicht voll besetzt.
Wie viele Plätze hat der Bus?

Der Omnibus hat 34 Plätze.

Aufgabe 2
Für welche Zahlen x gilt $49 > 8 \cdot x > 31$?

$x = 4, 5, 6$

Aufgabe 3
Drei Zahlen zwischen 40 und 50 lassen sich durch keine Zahl außer durch sich selbst und durch 1 dividieren.
Welche Zahlen sind das?

Es sind die Zahlen 41, 43 und 47.

Aufgabe 4
Du hast die Zahlen 24, 8 und 7. Bilde mit den ersten beiden Zahlen eine Aufgabe! Mit dem Ergebnis dieser Aufgabe und der Zahl 7 bilde die nächste Aufgabe. Das Ergebnis soll 21 sein.
Rechne so: $24 \square 8 = a$, $a \square 7 = 21$.

$24 : 8 = 3$; $3 \cdot 7 = 21$

12.7.2 2. Runde 1969, Klasse 3

Aufgabe 1
Zeichne ein Rechteck und halbiere seine Fläche!
Welche verschiedenen Figuren können dabei entstehen?

Zwei Rechtecke (im Sonderfall zwei Quadrate) oder zwei Dreiecke.

Aufgabe 2
Gerhard will Fahnenhalter anbringen. Er bezahlt für 4 gleich große Dübel und zwei Fahnenhalter insgesamt 1 Mark. Peter kauft drei Dübel derselben Sorte und bezahlt 30 Pfennig.
Wieviel kostet ein Fahnenhalter?

Ein Dübel kostet 10 Pfennig, d.h. zwei Fahnenhalter zusammen 60 Pfenning. Ein Fahnenhalter kostet 30 Pfennig.

12.8 8. Olympiade 1970

12.8.1 1. Runde 1970, Klasse 3

Aufgabe 1
In den drei Schulen einer Stadt gibt es zusammen 63 Pioniergruppen. Aus jeder Gruppe können 4 Pioniere zum Pioniertreffen fahren. Sie werden von 6 gleich großen Omnibussen abgeholt.
Wieviel Pioniere sitzen in jedem Bus?

In jedem Bus sitzen 42 Pioniere.

Aufgabe 2
Die Fahrstrecke zum Pioniertreffen ist 500 km lang. Jeder Bus verbraucht für 100 km 24 l Kraftstoff.
Wieviel Liter Kraftstoff benötigen alle 6 Busse zusammen für die ganze Fahrstrecke?,

Alle Busse benötigen zusammen 720 l Kraftstoff.

Aufgabe 3
An einer geschlossenen Bahnstrecke missen die Busse halten. Alle Pioniere zählen die Wagen des vorüberfahrenden Güterzuges: Gleich hinter der Lokomotive fahren 7 geschlossene Wagen. Dann folgen 4 mal so viele Wagen, die mit Kohlen beladen sind. Am Schluss fahren Kesselwagen.
Wieviel Kesselwagen hatte der Güterzug, wenn die Pioniere insgesamt 59 Wagen zählten?

Am Schluss des Güterzuges fahren 24 Kesselwagen.

Aufgabe 4
Der dritte Teil einer Strecke ist 4 cm lang. Rolfs Federtasche ist 3 mal so lang wie die Hälfte der Strecke.
Wie lang ist Rolfs Federtasche? Rolfs Federtasche ist 18 cm lang.

12.8.2 2. Runde 1970, Klasse 3

Aufgabe 1
Die Differenz von 811 und einer zweiten Zahl ist 488. Wie heißt das Doppelte der zweiten Zahl?

Das Doppelte der zweiten Zahl heißt 646.

Aufgabe 2
917 Pioniere wurden beim Pioniertreffen in 4 Schulen untergebracht. Die erste Schule nahm 305, die zweite Schule nahm 186 und die dritte nahm 202 Pioniere auf.
Wieviel Pioniere wurden in der vierten Schule untergebracht?

In der vierten Schule wurden 224 Pioniere untergebracht.

12.9 9. Olympiade 1971

12.9.1 1. Runde 1971, Klasse 3

Aufgabe 1
Rolf wurde am 5. März 1971 9 Jahre alt. In 3 Jahren wird er viermal so alt sein wie das Haus, in dem er wohnt.
In welchem Jahr wurde das Haus fertig?

Das Haus wurde 1971 fertig.

Aufgabe 2

Setze die Zahlen 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8 so in die Felder ein, dass die Summe jeder Zeile gleich 18 ist!

7			1
6			4

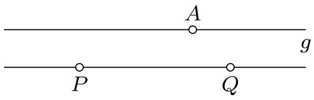
7	2	8	1
1	8	2	7
4	5	3	6
6	3	5	4

Diese Lösung ist nur ein Beispiel.

Aufgabe 3
In einem Wohnbaus beträgt die Zahl der Wohnungen dritten Teil der Zahl der Bewohner. In jedem der 12 Stockwerke gibt es 9 Wohnungen.
Wieviel Menschen wohnen in diesem Haus?

$12 \cdot 9 = 108$; $108 \cdot 3 = 324$. In diesem Haus wohnen 324 Menschen.

Aufgabe 4
Zeichne die Strecke $\overline{PQ}$ 5 cm lang! Jetzt zeichne einen Punkt A, der nicht auf der Strecke $\overline{PQ}$ liegt! Dann zeichne die Gerade g, die durch den Punkt A geht und parallel zur Strecke $\overline{PQ}$ verläuft!



12.9.2 2. Runde 1971, Klasse 3

Aufgabe 1
Bodo will die Zahl der Fenster errechnen, die auf einer Seite des Hochhauses zu sehen sind. In 14 Stockwerken sind es jeweils 9 Fenster. Im Erdgeschoss beträgt die Zahl der Fenster nur den dritten Teil, weil dort die Türen sind.
Wieviel Fenster hat das Hochhaus an einer Seite?

$14 \cdot 9 + 3 = 129$; Bodo errechnet 129 Fenster.

Aufgabe 2
Wenn man die Zahl a um 7 verkleinert und das Ergebnis auf das Neunfache erhöht, so erhält man 108.
Wie heißt die Zahl a?

$108 : 9 = 12$; $12 + 7 = a$; $a = 19$

12.10 10. Olympiade 1972

12.10.1 1. Runde 1972, Klasse 3

Aufgabe 1
Schreibe die folgenden zweistelligen Zahlen ab:
12; 24; 63; 92; 61;
a) Schreibe daneben zweistellige Zahlen mit jeweils vertauschter Reihenfolge der Grundziffern, z, B, 12; 21 usw.!
b) Berechne die Differenzen, die zwischen den nebeneinanderstehenden Zahlen bestehen!
c) Nenne die größte Zahl, durch die sich alle diese Differenzen teilen lassen!

a) 12, 21; 24, 42; 63, 36; 92, 29; 61, 16
b) $21 - 12 = 9$; $42 - 24 = 18$; $63 - 36 = 27$; $92 - 29 = 63$; $61 - 16 = 45$
c) Alle Differenzen lassen sich durch 9 teilen.

Aufgabe 2
An einem Eishockeyturnier nehmen insgesamt neun Mannschaften teil. Zu jeder Mannschaft gehören 17 Spieler. Vier Mannschaften nehmen am Endkampf um die Medaillen teil
a) Wieviel Sportler nehmen am gesamten Turnier teil?
b) Wieviel Sportler bestritten den Endkampf?
c) Wieviel Sportler konnten am Kampf um die Medaillen nicht teilnehmen?

a) $17 \cdot 9 = 153$, Am Eishockeyturnier nahmen insgesamt 153 Spieler teil.
b) $17 \cdot 4 = 68$, Den Endkampf bestritten 68 Spieler,
c) $17 \cdot 5 = 85$ oder 153 - 68 = 85, Am Endkampf um die Medaillen konnten 85 Spieler nicht teilnehmen.

Aufgabe 3
Beim Ski-Abfahrtslauf der Herren lag der Start in einer Höhe von 2255 m. Die Streckenlänge betrug 2890 m. Das Ziel lag in einer Höhe von 1415 m.
Um wieviel Meter höher als das Ziel lag der Start?

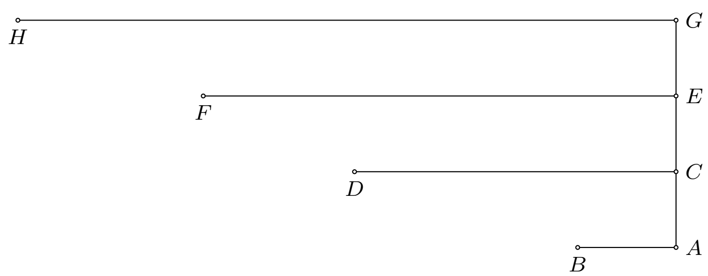
$2255 = 1415 = 840$, Der Start lag 840 m höher als das Ziel.

Aufgabe 4
Auf einer Ski-Langlaufstrecke gibt es vier Schießstände, Diese vier Schießstände haben folgende Entfernungen vom Start:

1. Schießstand 3,6 km	3. Schießstand 12,5 km
2. Schießstand 8,5 km	4. Schießstand 17,4 km

Auf folgende Weise kannst du die Entfernungen vom Start bis zu den Schießständen veranschaulichen: Zeichne eine Gerade k! Lege auf k die Punkte A, C, E und G im Abstand von jeweils 2 cm fest! Zeichne jetzt durch jeden dieser Punkte eine Gerade, die senkrecht auf k steht! Von den Punkten A, C, E und G lege die Strecken $\overline{AB} = 2{,}6$ cm, $\overline{CD = 8{,}5}$ cm, $\overline{EF} = 12{,}5$ cm und $\overline{GH} = 17{,}4$ cm fest!

Es entsteht folgende Zeichnung:



12.10.2 2. Runde 1972, Klasse 3

Aufgabe 1
Der Start zum Skilanglauf über 50 km erfolgte 8.30 Uhr. Der Sieger erreichte das Ziel um 10.59 Uhr.
a) Wie lange lief der Sieger?
b) Um welche Zeit erreichte der zweite Läufer das Ziel, wenn er 2 h 37 min lief?

a) Der Sieger lief 2 h 29 min.
b) Der zweite Läufer erreichte 11.07 Uhr das Ziel.

Aufgabe 2
Die beiden Zehnkämpfer aus der DDR erreichten in Mexiko folgende Leistungen:

Sportarten	Manfred Tiedtke	Joachim Kirst
Läufe 100 m, 400 m, 1500 m, 110 m (Hürden)	2778	2821
Weitsprung, Hochsprung, Stabhochsprung	2610	2628
Kugelstoßen, Diskuswurf, Speerwurf	2163	2412
gesamt:		

a) Wieviel Punkte erreichte Joachim Kirst?
b) Wieviel Punkte erreichte Manfred Tiedtke?
c) Wieviel Punkte mehr erreichte Joachim Kirst als Manfred Tiedtke?

a) Joachim Kirst erreichte 7861 Punkte.
b) Manfred Tiedtke erreichte 7551 Punkte.
c) Joachim Kirst erreichte 310 Punkte mehr.

12.11 11. Olympiade 1973

12.11.1 1. Runde 1973, Klasse 3

Aufgabe 1
In vier Berliner Schulen werden zusammen 1136 Festivalgäste untergebracht, Die erste Schule nahm 234, die zweite 328 und die dritte 258 Gäste auf.
Wieviel Gäste werden in der vierten Schule untergebracht?

$24 + 338 + 258 = 820$; $1136 - 820 = 3167$ oder $36 = 234 - 328 - 258 = 316$:
In der vierten Schule wurden 218 Gäste untergebracht:

Aufgabe 2
Für welche Zahlen x gilt $82 > x \cdot 9 > 62$?

$x = 7, 8, 9$

Aufgabe 3
Die Differenz von 434 und einer zweiten Zahl beträgt 962. Berechne die Hälfte der zweiten Zahl.

$434 + 962 = 1396$; $1396 : 2 = 698$, Die Hälfte der zweiten Zahl beträgt 698.

Aufgabe 4
Zeichne einen Streifen! Nun zeichne zwei Geraden, die nicht parallel sind und die diesen Streifen nicht rechtwinklig schneiden (die aber innerhalb des Streifens keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben)!
Wie heißt dieses Viereck?

Das Viereck heißt Trapez.

12.11.2 2. Runde 1973, Klasse 3

Aufgabe 1
Setze in die folgenden Aufgaben das richtige Rechenzeichen, so dass die Ergebnisse aller vier Aufgaben gleich sind!
$6584...1758 = a$
$9826...2484 = b$
$8889...1547 = c$
$1227...6115 = d$

Das gemeinsame Ergebnis heißt 7342.

Aufgabe 2
Der Minuend heißt 8453, der Subtrahend heißt 6232. Die Differenz multipliziere mit 3!

$8453 - 6232 = 2221$; $2221 \cdot 3 = 6663$

12.12 12. Olympiade 1974

12.12.1 1. Runde 1974, Klasse 3

Aufgabe 1
In einem Neubaublock gehören zu jedem der 5 Stockwerke gleich viel Fensterscheiben; insgesamt hat das Haus 75 Fensterscheiben. Vier Etagen eind fertig verglast. In der 5. Etage sind erst 8 Scheiben eingesetzt.
a) Wieviel Scheiben gehören zu jedem Stockwerk?
b) Wieviel Scheiben fehlen noch im 5. Stockwerk?

a) $75 : 5 = 15$. Zu jedem Stockwerk gehören 15 Scheiben.
b) $15 - 8 = 7$. Im 5. Stockwerk fehlen noch 7 Scheiben.

Aufgabe 2
Bärbel geht in eine große Schule, Thomas in eine kleinere Schule mit weniger Schülern. Beide Schulen hatten für das unterdrückte chilenische Volk Geld gespendet.
Bärbel sagte zu Thomas: ”Wir haben 2400 Mark auf das Spendenkonto eingezahlt.”Thomas erwiderte: ”Wir haben nicht so viel gesammelt, aber 10 Mark mehr als die Hälfte eures Beitrages haben wir doch geschafft.”
Wieviel Mark hatte die kleinere Schule für Chile gespendet?

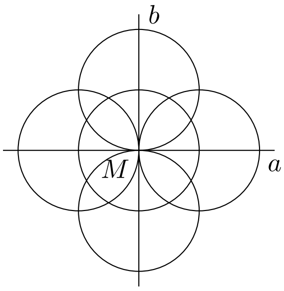
$2400 : 2 = 1200$; $1200 + 10 = 1210$. Die kleinere Schule hatte 1210 Mark für Chile gespendet.

Aufgabe 3

a	b	$a + b = c$	$875 - c$
266	350		
437	520		
102	773		

a	b	$a + b = c$	$875 - c$
266	350	616	259
437	520	957	n.l.
102	773	875	0

Aufgabe 4
Zeichne etwa in die Mitte deines Blattes eine Gerade a und eine Gerade b, die die Gerade a senkrecht schneidet! Den Schnittpunkt bezeichne mit M. Nun zeichne um M einen Kreis mit dem Radius 2 cm!
Es entstehen vier Schnittpunkte. Um diese Schnittpunkte zeichne ebenfalls je einen Kreis! Diese Kreise sollen wieder einen Radius von 2 cm haben.



12.12.2 2. Runde 1974, Klasse 3

Aufgabe 1
Von 375 Wohnungen, die nach dem Plan für 1973 in Brandenburg gebaut werden sollten, wurden bis März 90 Wohnungen fertig. Weitere 47 Wohnungen wurden bis Juni fertig.
Wieviel Wohnungen mussten die Bauarbeiter bis zum Jahresende noch bauen, um ihren Plan für 1973 zu erfüllen?

$375 - 90 = 285$; $285 - 47 = 238$. Die Bauarbeiter von Brandenburg mussten bis zum Jahresende noch 238 Wohnungen bauen.

Aufgabe 2
$a = 9$, $b = 628$; Zum Sechsfachen von a addiere die Hälfte von b.

$9 \cdot 6 = 54$; $628 : 2 = 314$; $54 + 314 = 368$

12.13 13. Olympiade 1975

12.13.1 1. Runde 1975, Klasse 3

Aufgabe 1
Die Mutter soll ihrer kranken Tochter im Abstand von jeweils einer halben Stunde viermal eine Tablette geben.
a) Wieviel Minuten liegen zwischen dem Verabreichen der ersten und der vierten Tablette?
b) Gibt das Ergebnis in Stunden und Minuten an.

Zwischen den beiden Zeitpunkten liegen 90 min, d.h. 1 h 30 min.

Aufgabe 2
Das Achtfache der Differenz von 850 und 236 dividiere durch 4.

$(850 - 236) \cdot 8 : 4 = 614 \cdot 8 : 4 = 1228$

Aufgabe 3
Rechne!

a	b	$a + b = c$	$c - 1$	$c + 1$
2954	906			
934	766			
2357	6243			
3762	2238			
4427	573			

a	b	$a + b = c$	$c - 1$	$c + 1$
2954	906	3860	3859	3861
934	766	1700	1699	1701
2357	6243	8600	8599	8601
3762	2238	6000	5999	6001
4427	573	5000	4999	5001

Aufgabe 4
Zeichne um den Punkt M einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! Nun zeichne eine Gerade a, die den Kreis nicht berührt und nicht schneidet! Danach zeichne parallel zu a die Gerade g, die den Kreis in zwei Punkten schneidet! Bezeichne die Schnittpunkte mit A und B!
a) Wie heißt die Strecke $\overline{AB}$?
b) Wie heißt die Strecke $\overline{AB}$ auch, wenn sie durch den Mittelpunkt des Kreises geht?

a) Die Strecke $\overline{AB}$ (die den Kreis in zwei Punkten schneidet) heißt Sehne.
b) Wenn die Strecke $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt sie auch Durchmesser.

12.13.2 2. Runde 1975, Klasse 3

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} (1808+968):8 &= a \\ 1808+968:8 &= b \\ 7\cdot(568-235) &= c \\ 2409:(9001-8998) &= d \\ 256+97\cdot 6-4 &= e \end{aligned}$$

$a = 347$, $b = 1929$, $c = 2331$, $d = 803$, $e = 834$

Aufgabe 2
In einer Schule gibt es 279 Thälmannpioniere. Der dritte Teil dieser Pioniere ist wegen vieler guten Taten zu einem Freundschaftstreffen mit sowjetischen Pionieren eingeladen.
a) Wieviel Thälmannpioniere nehmen am Freundschaftstreffen teil?
b) Wie lange dauerte das Freundschaftstreffen, wenn es um 15.45 Uhr begann und um 18.20 Uhr endete?
Gib die Zeitdauer in Stunden und Minuten an!

a) Am Freundschaftstreffen nahmen 93 Thälmannpioniere teil.
b) Das Freundschaftstreffen dauerte 2 h 35 min.

12.14 14. Olympiade 1976

12.14.1 1. Runde 1976, Klasse 3

Aufgabe 1
Die Mitglieder einer Jugendbrigade richten Wohnungen von älteren Bürgern vor. Der Wert betrug 1200 Mark. Sie halfen beim Verlegen von Kabeln. Dieser Wert betrug 2100 Mark. Im Betrieb sparten sie Material ein. Dieser Wert betrug 1500 Mark.
Wieviel Mark betrug der Wert, den die Jugendbrigade abrechnen konnte?

1200 + 2100 + 1500 = x. Die Jugendbrigade erarbeitete 4800 M.

Aufgabe 2
Berechne die Summe und die Differenz von 56 und 23.

56 + 23 = 79;   56 - 23 = 33

Aufgabe 3

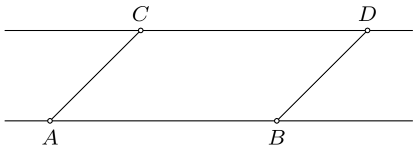
a) $4200 + x = 5000$ $6200 - x = 6000$ b)

a	$a \cdot 100$
7	
0	
10	

$x = 800$; $x = 200$

a	$a \cdot 100$
7	700
0	0
10	1000

Aufgabe 4
Zeichne zwei parallele Geraden. Lege auf einer Geraden eine Strecke von 5 cm fest und auf der zweiten Geraden eine genauso lange Strecke. Vervollständige so, dass ein Parallelogramm entsteht.



12.14.2 2. Runde 1976, Klasse 3

Aufgabe 1
Rechne! $399 + 4003 + 76 + 9$

$399 + 4003 + 76 + 9 = 4487$

Aufgabe 2
9 kg = ... g;   100 cm = ... mm;   ... km = 4000 m

9 kg = 9000 g;   100 cm = 1000 mm;   4 km = 4000 m

12.15 15. Olympiade 1977

12.15.1 1. Runde 1977, Klasse 3

Aufgabe 1
Schreibe die größte dreistellige Zahl auf. Welche Zahl musst zu dieser Zahl addieren, um 1000 zu erhalten?

Die größte dreistellige Zahl ist 999. Zu ihr muss man 1 addieren, um 1000 zu erhalten.

Aufgabe 2
Kennzeichne einen Punkt M. Zeichne um den Punkt M einen Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm. Wie groß ist der Durchmesser des Kreises?

Punkt und Kreis zeichnen. Der Durchmesser ist 10 cm groß.

Aufgabe 3
Rechne!

a) 1647 - 432	b) 4853 - 1520	c) 1700 - 1589
d) 5637 + 33 + 6 + 1536	e) 9 + 27 + 6351 + 2003	

1647 - 432 = 1215;   4853 - 1520 = 3333;   1700 - 1589 = 111;   7608;   8390

Aufgabe 4
Vervollständige die Tabelle.

a	b	$a + b$
420		620
5000	2	
999	1	
9000		10000
1		100

a	b	$a+b$
420	200	620
5000	2	5002
999	1	1000
9000	1000	10000
1	99	100

12.15.2 2. Runde 1977, Klasse 3

Aufgabe 1
Rechne!

4 m 70 cm + 40 cm; 8 m - 90 cm
2 m 20 cm + 30 cm; 6,10 M - 30 Pf

5,10 m; 7,10 m; 2,50 m; 5,80 M

Aufgabe 2
In einem Stadtteil gab es 1685 Wohnungen. In den letzten fünf Jahren wurden dort 275 Wohnungen gebaut. Wieviel Wohnungen gibt es jetzt in diesem Stadtteil?

$1685 + 275 = 1960$. Jetzt gibt es in dem Stadtteil 1960 Wohnungen.

Aufgabe 3
Berechne die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Die kleinste dieser Zahlen ist 1999.

$1999 + 2000 + 2001 = 6000$. Die Summe ist 6000.

Aufgabe 4

a	b	$a \cdot b$
6	7	
7		42
10		100
	3	3

a	b	$a \cdot b$
6	7	42
7	6	42
10	10	100
1	3	3

12.16 16. Olympiade 1978

12.16.1 1. Runde 1978, Klasse 3

Aufgabe 1
1400 - 900; 3600 + 700; 3700 + 2200; 2200 - 1200

$1400 - 900 = 500$; $3600 + 700 = 4300$; $3700 + 2200 = 5900$; $2200 - 1200 = 1000$

Aufgabe 2
5001 + 99 + 378; 3042 + 4236 + 426; 3033 - 1216; 4876 - 928

5478; 7704; 1817; 3948

Aufgabe 3
Bestimme die Zahl x, für die gilt: $999 < x < 1001$.

$x = 1000$

Aufgabe 4

$b-1$	b	$b+1$
	640	
	9000	
	3820	

$b-1$	b	$b+1$
639	640	641
8999	9000	9001
3819	3820	3821

Aufgabe 5
Von welcher Zahl musst du neun subtrahieren, um 712 zu erhalten?

Die Zahl heißt 721.

Aufgabe 6
Zeichne zwei Kreise. Der eine Kreis soll einen Durchmesser von sechs Zentimeter haben, der zweite Kreis einen Radius von drei Zentimetern.

1. Kreis 3 cm Radius; 2. Kreis 3 cm Radius

Aufgabe 7
Schreibe als Meter: 305 cm; 4 m 20 cm; 30 cm; 4 cm

3,05 m; 4,20 m; 0,30 m; 0,04 m

12.16.2 2. Runde 1978, Klasse 3

Aufgabe 1
Der Mond hat einen Durchmesser von 3476 km. Welchen Durchmesser hat er bei Halbmond?

Der Mond hat immer den gleichen Durchmesser von 3476 km.

Aufgabe 2
Löse die Gleichungen!
a) $2500 + x = 3000$; b) $2800 - x = 2000$

a) $x = 500$; b) $x = 800$

Aufgabe 3
a) Wieviel Minuten sind 3 Stunden und 48 Minuten?
b) Wieviel Kilogramm sind 3 kg und 6000 g?
c) Wieviel Meter sind 9 m und 800 cm?

228 Minuten; 9 kg; 17 m

Aufgabe 4
Runde auf das Vielfache von Hundert: 5146 9936

5000 und 10000

Aufgabe 5
Ordne die Zahlen der Größe nach, beginne mit der größten.
2728 4360 4630 2727

4630 > 4360 > 2728 > 2727

Aufgabe 6
Multipliziere die Differenz der Zahlen 52 und 45 mit 8.

52 - 45 = 7; 7 · 8 = 56

12.17 17. Olympiade 1979

12.17.1 1. Runde 1979, Klasse 3

Aufgabe 1
Die Klasse 3a hat in Vorbereitung auf den 30. Geburtstag unserer Republik 120 Mark auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Klasse 3b überwies 98 Mark. Wieviel Mark mehr als die Klasse 3b zahlte die Klasse 3a auf das Solidaritätskonto ein?

Die Klasse 3a zahlte 22 Mark mehr aus das Solidaritätskonto ein.

Aufgabe 2

a)	5600 - 900	582 + 2000	8000 - 480	7302 - 102
b)	28 : 7	8 · 7	56 : 8	54 : 9
c)	680 + x = 730	6800 - a = 3800		

a) 5600 - 900 = 4700; 582 + 2000 = 2582; 8000 - 480 = 7520; 7302 - 102 = 7200
b) 28 : 7 = 4; 8 · 7 = 56; 56 : 8 = 7; 54 : 9 = 6; c) x = 50, a = 3800

Aufgabe 3
a) 5426 + 83 + 287 b) 4836 + 2708 c) 4836 - 2708

5426 + 83 + 287 = 5796; 4836 + 2708 = 7544; 4836 - 2708 = 2128

Aufgabe 4
Bestimme alle Zahlen x, die Vielfache von 10 sind und die folgenden Ungleichungen erfüllen.
a) $80 + x < 110$ b) $120 - x > 80$

a) x = 10,20; b) x = 10,20,30

Aufgabe 5
Errechne die Differenz und die Summe der Zahlen 3243 und 406.

3243 - 406 = 2837; 3243 + 406 = 3649

Aufgabe 6
Zeichne eine Schmuckkante aus vier Kreisen, drei Quadraten und vier anderen Rechtecken.

Jede Schmuckkante, die die geometrischen Gebilde enthält.
Eine Bedingung ist die Sauberkeit der Zeichnung. Die Größe, den Abstand und die Reihenfolge der geometrischen Figuren können die Schüler frei wählen.

12.17.2 2. Runde 1979, Klasse 3

Aufgabe 1
Setze die fehlenden Zahlen ein.

$$\begin{array}{r} 34* \\ +232 \\ \hline **5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5347 \\ +*32* \\ \hline 7**8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 443 \\ +*4* \\ \hline 1287 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ +232 \\ \hline 575 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5347 \\ +2321 \\ \hline 7668 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 443 \\ +844 \\ \hline 1287 \end{array}$$

Aufgabe 2
3 min = s; 120 min = h; 480 s = min

3 min = 180 s; 120 min = 2 h; 480 s = 6 min

Aufgabe 3

a	b	$a+b$
680	320	
380		850
	400	700

a	b	$a-b$
1000	990	
300		200
700	700	

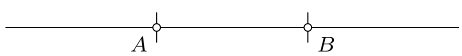
a	b	$a+b$
680	320	1000
380	470	850
300	400	700

a	b	$a-b$
1000	990	10
300	100	200
700	700	0

Aufgabe 4
Zwei Jungen fahren die gleiche Strecke. Der eine braucht drei Stunden und zehn Minuten, der andere 190 Minuten. Welcher von beiden fährt schneller?

Beide Jungen fahren gleich schnell.

Aufgabe 5
Zeichne eine Gerade g, und gib zwei Punkte A und B an, die auf g liegen.
Zeichne durch die Punkte A und B Geraden, die senkrecht auf der Geraden stehen.



Aufgabe 6
Jedes Jahr wird die ABC-Mathematik-Olympiade durchgeführt, in diesem Jahr zum 17. Mal. In welchem wurde die erste ABC-Olympiade durchgeführt?

Die 1. ABC-Mathematik-Olympiade wurde 1963 durchgeführt.

12.18 18. Olympiade 1980

12.18.1 1. Runde 1980, Klasse 3

Aufgabe 1
$4100 - 600 \qquad 560 + 700 \qquad 3102 - 9 \qquad 2600 - 1900$

$4100 - 600 = 3500$; $560 + 700 = 1260$; $3102 - 9 = 3093$; $2600 - 1900 = 700$

Aufgabe 2

e	d	$e : d$
49		7
	9	8
64	8	
100		10

e	d	$e : d$
49	7	7
72	9	8
64	8	8
100	10	10

Aufgabe 3
Errechne die Summe aus drei unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen, die kleinste von ihnen ist 1209?

$1209 + 1210 + 1211 = 3630$

Aufgabe 4
Berechne b! $\qquad m = 570 + 720 \qquad b = m - 500$

$m = 1290$; $b = 790$

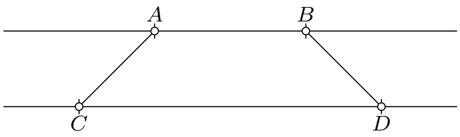
Aufgabe 5
a) Wieviel Kilogramm sind 5 t 6 t ?
b) Wieviel Tonnen sind 10000 kg 1000 kg ?
c) Wieviel Gramm sind 4 kg 350 g 6 kg 5 g ?
d) Erhöhe jeden Betrag um 75 Pf, gibt die Ergebnisse in Mark mit Kommaschreibweise an!
175 Pf 525 Pf

a) 5 t = 5000 kg; 6 t = 6000 kg
b) 10000 kg = 10 t; 1000 kg = 1 t
c) 4 kg 350 g = 4350 g; 6 kg 5 g = 6005 g
d) 175 Pf + 75 Pf = 250 Pf = 2,50 M; 525 Pf + 75 Pf = 600 Pf = 6,00 M

Aufgabe 6
Bei den Olympischen Spielen wird unter anderem ein 10000-m-Lauf ausgetragen. Gelaufen werden 400-m Runden. Wieviel Runden müssen die Sportler bei dieser Strecken laufen?

25 Runden

Aufgabe 7
Zeichne zwei zueinander parallele Geraden. Lege auf jeder der beiden Geraden eine beliebig lange Strecke fest. Vervollständige die Zeichnung so, dass ein Trapez entsteht.
Bezeichne die Eckpunkte.



12.18.2 2. Runde 1980, Klasse 3

Aufgabe 1
Vergleiche! Begründe durch Addition! 2500 mit 3800

$2500 < 3800$, da $2500 + 1300 = 3800$

Aufgabe 2
Ordne der Flüsse nach ihrer Länge. Beginne mit dem kürzesten Fluss

Elbe	1165 km	Wolga	3690 km	Spree	398 km
Oder	912 km	Neiße	256 km		

Neiße 256 km, Spree 398 km, Oder 912 km, Elbe 1165 km, Wolga 3690 km

Aufgabe 3
Ein Kutter befindet sich 100 km vom Hafen entfernt im offenen Meer. Der Kapitän erhält die Nachricht, dass in 4 Stunden ein Sturm ausbrechen wird. Gelangt der Kutter noch rechtzeitig in den Hafen, wenn er 28 km pro Stunde zurücklegen kann? Rechne und schreibe den Antwortsatz auf.

Rechnung: $4 \cdot 28 = 112$, $112 > 100$.
Antwort: Der Kutter erreicht den Hafen rechtzeitig.

Aufgabe 4
$8258 - 4123$ $\quad 4831 - 1210$ $\quad 7725 + 5 + 38 + 756$

$8258 - 4123 = 4135$, $\quad 4831 - 1210 = 3621$, $\quad 7725 + 5 + 38 + 756 = 8524$

Aufgabe 5
Rechne in die nächstkleinere Einheit um.
3 dm; 7 Wochen; 6 min; 8 Jahre; 9 t; 4 h; 10 kg

3 dm = 30 cm; 7 Wochen = 49 Tage; 6 min = 360 s; 8 Jahre = 96 Monate; 9 t = 9000 kg; 4 h = 240 min; 10 kg = 10000 g

Aufgabe 6
In einer Familie sind sechs Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder hat die Familie?

Die Familie hat 7 Kinder.

12.19 19. Olympiade 1981

12.19.1 1. Runde 1981, Klasse 3

Aufgabe 1
Alle 3.Klassen der Erich-Weinert-Oberschule beteiligen sich an der ABC-Aktion "Schnüffelnase". Die Klasse 3 a sammelte 186 kg Altpapier, die Klasse 3 b nur den dritten Teil davon. Die Klasse 3 c hatte doppelt soviel wie die Klasse 3 b und 9 Kilogramm mehr.
Wieviel Kilogramm Altpapier sammelte die Klasse 3 c?

Sammelergebnis der Klasse 3 b: $186 : 3 = 62$ kg. Sammelergebnis der Klasse 3 c: $62 \cdot 2 + 9 = 133$ kg.

Aufgabe 2
4 km = ... m; 360 s = ... min; 6000 g = ... kg; 420 min = ... h

4 km = 4000 m; 360 s = 6 min; 6000 g = 6 kg; 420 min = 7 h

Aufgabe 3
a) 4000 + 88; 570 + 380; 2800 + 900
b) 980 - 650; 4600 - 800; 10000 - 4500
c) 60 : 3; 96 : 4; 720 : 9
d) $9 \cdot 88$; $300 \cdot 7$; $60 \cdot 8$

a) 4000 + 88 = 4088; 570 + 380 = 950; 2800 + 900 = 3700
b) 980 - 650 = 330; 4600 - 800 = 3800; 10000 - 4500 = 5500
c) 60 : 3 = 20; 96 : 4 = 24; 720 : 9 = 80
d) $9 \cdot 88 = 792$; $300 \cdot 7 = 2100$; $60 \cdot 8 = 480$

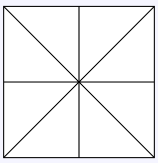
Aufgabe 4
Ordne die folgenden Zahlen so zu Paaren, dass beim Addieren immer die gleiche Summe entsteht.
43 202 100 175 98 257 125 200

Die Summe ist jeweils 300. Paare sind (43, 257), (100, 200), (98, 202), (125, 175)

Aufgabe 5
Um wieviel ist die größte dreistellige Zahl größer als die kleinste dreistellige Zahl?

999 - 100 = 899. Die größte dreistellige Zahl ist um 899 größer als die kleinste dreistellige Zahl.

Aufgabe 6
Wieviel Quadrate und wieviel Dreiecke enthält diese Figur?



Es sind 6 Quadrate und 12 Dreiecke.

12.19.2 2. Runde 1981, Klasse 3

Aufgabe 1

a)

a	b	$a \cdot b$
8	600	
7		4900
	600	5400

b)

c	d	$c : d$
6400	8	
5400		600
	6	400

a)

a	b	$a \cdot b$
8	600	4800
7	700	4900
9	600	5400

b)

c	d	$c : d$
6400	8	800
5400	9	600
2400	6	400

Aufgabe 2
Addiere den Quotienten der Zahlen 490 und 7 zu 7000.

490 : 7 = 70, 7000 + 70 = 7070

Aufgabe 3
a) $368 + 8005 + 97 + 909$
b) Subtrahiere von 10000 die Zahl 8005. Subtrahiere von 10000 die Zahl 482.

a) 9379; b) 1995 und 9518

Aufgabe 4
Wieviel Minuten sind es von 20.35 Uhr bis 21.10 Uhr, von 7.55 Uhr bis 8.45 Uhr, von 11.55 Uhr bis 12.05 Uhr.

Von 20.35 Uhr bis 21.10 Uhr sind es 35 Minuten, von 7.55 Uhr bis 8.45 Uhr sind es 50 Minuten, von 11.55 Uhr bis 12.05 Uhr sind 10 Minuten.

Aufgabe 5
Zwei fahren die gleiche Strecke, der eine braucht 2 Stunden, der andere 120 Minuten. Welche von beiden fährt schneller?

Beide fahren gleich schnell.

12.20 20. Olympiade 1982

12.20.1 1. Runde 1982, Klasse 3

Aufgabe 1
$2300 - 800$ $7800 + 600$ $3996 + 9$ $3002 - 8$

$2300 - 800 = 1500$, $7800 + 600 = 8400$; $3996 + 9 = 4005$; $3002 - 8 = 2994$

Aufgabe 2
$467 + 8$ $358 - 9$ $560 + 600$ $720 - 400$

$467 + 8 = 475$, $358 - 9 = 349$; $560 + 600 = 1160$; $720 - 400 = 320$

Aufgabe 3
Rechen schriftlich: $438 + 8006 + 98 + 728$

$438 + 8006 + 98 + 728 = 9270$

Aufgabe 4

a	b	$a : b$
27	3	
48		6
	7	8
54		6

a	b	$a : b$
27	3	9
48	8	6
56	7	8
54	9	6

Aufgabe 5
Verringere jeden Betrag um 70 Pfenning. 2,35 M; 13,20 M; 82,06 M

2,35 M - 0,70 M = 1,65 M; 13,20 M - 0,70 M = 12,50 M; 82,06 M - 0,70 M = 81,36 M

Aufgabe 6
Zeichne fünf zueinander parallele Geraden. Jeder Abstand soll 1 cm betragen.

Genauigkeit: Abweichung < 1 mm

Aufgabe 7
Die Schüler der 1., 2., 3. und 4. Klasse der Karl-Marx-Oberschule verpflichten sich in diesem Schuljahr 300 Mark für die Solidarität zu spenden.
Die Klasse 1 spendete 48,70 M, die Klasse 2 spendete 40,50 M, die Klasse 3 spendete 53,20 M, die Klasse 4 spendete 61,80 M.

a) Wieviel Mark haben alle 4 Klassen gespendet ?
b) Wieviel Mark müssen noch gespendet werden, wenn die Verpflichtung erfüllt werden soll?

a) Alle 4 Klassen spendeten 204,20 Mark.
b) Es müssen noch 95,80 M gespendet werden.

12.20.2 2. Runde 1982, Klasse 3

Aufgabe 1
Wieviel Gramm fehlen an einem Kilogramm ? 600 g; 350 g; 470 g; 100 g.

400 g, 650 g, 530 g, 900 g

Aufgabe 2
a) Wieviel Tage haben 6 Wochen?
b) Wieviel Monate sind 1 Jahr und 8 Wochen?

a) 42 Tage; b) 14 Monate

Aufgabe 3

e	Ist e Vielfaches von 10?
60	
75	
840	
9871	

e	Ist e Vielfaches von 10?
60	ja
75	nein
840	ja
9871	nein

Aufgabe 4

16,25 M + 75 Pf   38,48 M + 52 Pf   99,36 M + 64 Pf

17,00 M; 39,00 M; 100,00 M

Aufgabe 5

a) $77 + e < 81$ b) $93 - f > 90$

a) $e = 0{,}1{,}2{,}3$; b) $f = 0{,}1{,}2$

Aufgabe 6
Dividiere und begründe die Ergebnisse mit Hilfe der Multiplikation.
40 durch 4; 24 durch 3; 40 durch 5

$40 : 4 = 10$, den $4 \cdot 10 = 40$; $24 : 3 = 8$, den $3 \cdot 8 = 24$; $40 : 5 = 8$, den $5 \cdot 8 = 40$

Aufgabe 7
Wenn von sieben Schwestern jede einen Bruder hat, wieviel Geschwister sind insgesamt in der Familie?

8 Geschwister sind in der Familie.

12.21 21. Olympiade 1983

12.21.1 1. Runde 1983, Klasse 3

Aufgabe 1

a)	380 + 390	2600 - 800	980 - 650
b)	60 : 3	720 : 8	56 : 7
c)	$400 \cdot 7$	$50 \cdot 8$	$6 \cdot 9$
d)	1647 - 432	4853 - 1591	3846 - 2733

a) 770, 1800, 330; b) 20, 90, 8; c) 4900, 400, 54; d) 1215, 3262, 1113

Aufgabe 2
Schreibe die größte dreistellige Zahl auf. Welche Zahl musst du zu dieser Zahlen addieren, um 1000 zu erhalten?

Die größte dreistellige Zahl ist 999. Zu ihr muss man 1 addieren, um 1000 zu erhalten.

Aufgabe 3

	wahr	falsch
101 und 103 sind ungerade Zahlen		
34 ist durch 4 ohne Rest teilbar		
Der dritte Teil von 25 ist 6		
$25 \cdot 15 > 400$		

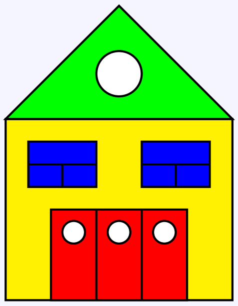
Die erste Aussage ist richtig, die zweite falsch, die dritte falsch und die vierte richtig.

Aufgabe 4

$$7 \text{ km} = \quad \text{m}, \quad 2 \text{ h} = \quad \text{min}, \quad 7 \text{ cm} = \quad \text{mm}, \quad 3 \text{ kg} = \quad \text{g}$$

7 km = 7000 m; 2 h = 120 min; 7 cm = 70 mm; 3 kg = 3000 g

Aufgabe 5



Wieviel Kreise und wieviel Vierecke sind in dem Bild enthalten?

Im Bild sind 4 Kreise und 17 Rechtecke (Haus, jede Tür einzeln, 2 mal 2 Türen, 1 mal 3 Türen und in jedem Fenster 5 Rechtecke) enthalten.

Aufgabe 6
Ergänze das Rechteck so, dass die Summe in jeder Zeile und Spalte diesselbe Zahl ergibt.

75	12	57
	48	
39		21

75	12	57
30	48	66
39	84	21

Die Summe einer Spalte bzw. Zeile ist 144.

Aufgabe 7
In der Hortgruppe der Klasse 3a sind 18 Schüler. Nachmittags spielen sie im Freien. Der 3. Teil der Schüler spielt mit dem Ball, der 6. Teil klettert am Klettergerüst, der 2. Teil spielt Verstecken. Wieviel Kinder sind nicht beschäftigt?

Der 3. Teil sind 6 Schüler, der 6. Teil 3 Schüler und der 2. Teil 9 Schüler. Da 6 + 3 + 9 = 18 ist, ist kein Kind nicht beschäftigt.

12.21.2 2. Runde 1983, Klasse 3

Aufgabe 1

a	b	$a+b$
420	200	
5000		5002
	1	1000
9000	1000	

a	b	$a+b$
420	200	620
5000	2	5002
999	1	1000
9000	1000	10000

Aufgabe 2
5 m + 10 cm; 2 m 20 cm + 30 cm; 8 m - 90 cm; 6,10 M - 30 Pf

5 m + 10 cm = 5 m 10 cm; 2 m 20 cm + 30 cm = 2 m 50 cm; 8 m - 90 cm = 7 m 10 cm; 6,10 M - 30 Pf = 5 M 80 Pf

Aufgabe 3
Suche die fehlenden Ziffern.

$$\begin{array}{r} 536 \\ +35 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ +986 \\ \hline 1168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 536 \\ +357 \\ \hline 893 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 182 \\ +986 \\ \hline 1168 \end{array}$$

Aufgabe 4
Löse die Gleichungen:

$$x + 47 = 547 \qquad y - 60 = 380 \qquad 570 + z = 710$$

$x = 500$; $y = 440$; $z = 140$

Aufgabe 5
Ein Betrieb hat drei Schornsteine. Der erste ist 29 m hoch, der zweite ist 25 cm höher und der dritte noch 65 cm höher. Was kommt heraus?

Rauch kommt heraus.

12.22 22. Olympiade 1984

12.22.1 1. Runde 1984, Klasse 3

Aufgabe 1
Beil einem Wettbewerb konnten viele Jungpioniere Preise erreichen.
Drei Jungpioniere erhielten einen 1. Preis,
Fünf Jungpioniere einen 2. Preis und
acht Jungpioniere einen 3. Preis.
Für einen 1. Preis wird ein Wertgutschein von 15,- M, für einer 2. Preis ein Wertgutschein von 10,- M und für einen 3. Preis ein Wertgutschein von 5,- M vergeben,
Wieviel Mark mussten insgesamt beim Kauf der Wertgutscheine ausgegeben werden?

Es wurden insgesamt 135,- M für Wertgutscheine ausgegeben.

Aufgabe 2
Multipliziere die größte dreistellige Zahl mit der kleinsten zweistelligen Zahl!

$999 \cdot 10 = 9990$

Aufgabe 3
In einem Neubaugebiet entstehen 430 Wohnungen. Davon sind 215 Zwei-Raum-Wohnungen und 96 Drei-Raum-Wohnungen.
Wieviel Vier-Raum-Wohnungen werden gebaut, wenn in diesem Neubaugebiet nur Zwei-, Drei- und Vier-Raum-Wohnungen gebaut werden?

Es werden 119 Vier-Raum-Wohnungen gebaut.

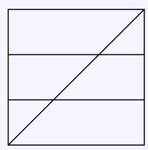
Aufgabe 4
Wieviel dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 1, 2, 3 schreiben, wenn jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vorkommt?

6 dreistellige Zahlen: 123, 132, 213, 231, 312, 321

Aufgabe 5
Vergleiche! 3 m 5 cm mit 350 cm; 4 km 500 m mit 4500 m; 4 kg 500 g mit 4050 g

3 m 5 cm $<$ 350 cm; 4 km 500 m $=$ 4500 m, 4 kg 500 g $>$ 4050 g

Aufgabe 6
Wieviel Dreiecke, Trapeze, Rechtecke und Quadrate erkennst du?



6 Dreiecke, 12 Trapeze, 6 Rechtecke, 1 Quadrat

12.22.2 2. Runde 1984, Klasse 3

Aufgabe 1
Kurt will die Zahl der Fenster errechnen, die auf einer Seite eines elfstöckigen Hochhauses zu sehen sind. In zehn Stockwerken sind jeweils 9 Fenster. Im 1. Stockwerk beträgt die Zahl der Fenster nur den dritten Teil der Fenster eines anderen Stockwerkes, weil dort Türen sind.
Wieviel Fenster hat das Hochhaus an dieser Seite?

$10 \cdot 9 = 90$, $9 : 3 = 3$, $90 + 3 = 93$. Die Seite des Hochhauses hat 93 Fenster.

Aufgabe 2
Von 100 kg geerntetem Getreide werden etwa verwendet: 22 kg für Nahrungsmittel, 5 kg als Saatgut und 3 kg als Rohstoff für verschiedene Industriezweige.
Der Rest wird für die Ernährung der Tiere verwendet. Berechne diesen Rest!

22 kg + 5 kg + 3 kg = 30 kg, 100 kg - 30 kg = 70 kg, Für die Ernährung der Tiere werden 70 kg verwendet.

Aufgabe 3

a	b	$a+b$
530		930
1000	5	
	1	1000

a	b	$a-b$
125	8	
	5	1000
513		39

a	b	$a+b$
530	400	930
1000	5	1005
999	1	1000

a	b	$a-b$
125	8	117
1005	5	1000
513	474	39

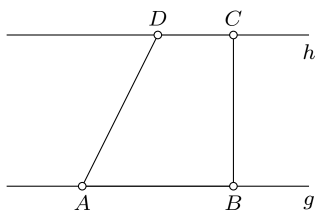
Aufgabe 4
Berechne
a) die Summe von 396 und 2448
b) die Differenz der Zahlen 3500 und 2501

a) 2844 b) 3250

Aufgabe 5
Rechne! 8 kg - 50 g; 5 m 30 cm - 50 cm; 10 M - 4,50 M; 2 min 15 s - 30 s

7 kg 950 g oder 7950 g; 4 m 80 cm oder 480 cm; 1 min 45 s oder 105 s; 5,50 M

Aufgabe 6
Zeichne die parallelen Geraden g und h!
Zeichne auf der Geraden g die Punkte A und B und auf der Geraden h die Punkte C und D ein! Verbinde die Punkte so, dass ein Trapez entsteht!



12.23 23. Olympiade 1985

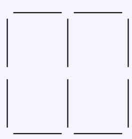
12.23.1 1. Runde 1985, Klasse 3

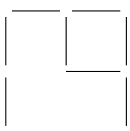
Aufgabe 1
Berechne

a	b	$a+b$	$a-b$
7			3
	0	0	
	25		1000
	10	20	

a	b	$a+b$	$a-b$
7	4	11	3
0	0	0	0
1025	25	1050	1000
10	10	20	0

Aufgabe 2
In der Abbildung ist eine Figur mit 10 gleichen Hölzchen gelegt. Lege ein Hölzchen so um, dass in der Figur zwei Quadrate entstehen.



Eine Lösung ist zum Beispiel 

Aufgabe 3
Setze für A und B Zahlen ein, aber beachte die Zeichen "+" und "-" und "·".

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{A} & + & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\
+ & & \cdot & & - \\
\mathrm{A} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{B} \\
\hline
\mathrm{B} & - & \mathrm{B} & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
2 & + & 2 & = & 4 \\
+ & & \cdot & & - \\
2 & \cdot & 2 & = & 4 \\
\hline
4 & - & 4 & = & 0
\end{array}$$

Aufgabe 4
Gib alle Punktzahlen an, die bei einem Würfelspiel mit 2 normalen Würfeln ermittelt werden können)

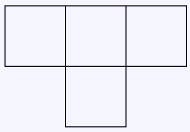
Alle natürlichen Zahlen a mit $2 \leq a \leq 12$ können ermittelt werden. Natürlich genügt das Aufzählen der Zahlen als Lösung.

Aufgabe 5
In einem Korb liegen 5 gelbe und 3 rote Kugeln. Man kann in den Korb hineingreifen, aber die Kugeln nicht erkennen.

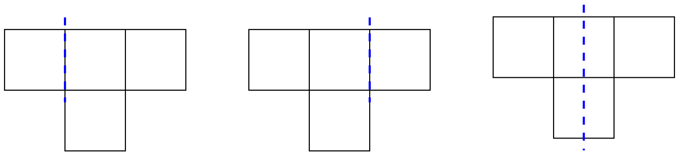
Wie oft muss man in den Korb greifen, um ganz sicher 2 Kugeln herauszuholen, die die gleiche Farbe haben?
(Man kann jeweils nur eine Kugel herausholen.) Versuche die Lösung im Kopf zu ermitteln, gelingt es dir nicht, dann kannst du es auch ausprobieren.

Man muss dreimal in den Korb greifen, um sicher zwei gleichfarbige Kugeln herauszuholen.

Aufgabe 6
Zerschneide die Figur mit einem Schnitt so, dass die entstehenden Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können. Finde zwei Möglichkeiten!



Folgende drei Schnitte sind möglich. Die entsprechenden Teile sind entsprechend zusammenzulegen.



12.23.2 2. Runde 1985, Klasse 3

Aufgabe 1
Vergleiche! a) $a = 37$, $b = 73$; b) $a = 5001$ g, $b = 5$ kg; c) $a = 3$ km 5 m, $b = 3050$ m

a) $a < b$ (oder $37 < 73$); b) $a > b$ (oder 5001 g $>$ 5000 g); c) $a < b$ (oder 3005 m $<$ 3050 m)

Aufgabe 2
Katrin und Jörg haben gemeinsam Altstoffe gesammelt. Den Erlös von 10,- M wollen sie sich so teilen, dass Katrin 2,00 M mehr erhält als Jörg.
Wieviel Geld erhält Katrin und wieviel Jörg?

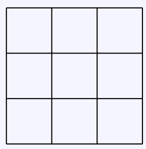
Katrin erhält 6 M und Jörg 4 M.

Aufgabe 3
Die Zahl 1000 lässt sich durch acht Grundziffern 8 auch so darstellen:
$1000 = 888 + 88 + 8 + 8 + 8$
Stelle die Zahl 100 durch sieben Grundziffern 4 dar!

$100 = 44 + 44 + 4 + 4 + 4$

Aufgabe 4

Setze in die einzelnen Felder der angegebenen Figur die Zahlen 1, 2, 3 so ein, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte die Summe 6 entsteht!



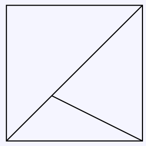
Lösungen sind zum Beispiel:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

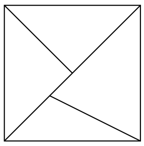
2	2	2
2	2	2
2	2	2

Aufgabe 5

a) Wieviel Vierecke und wieviel Dreiecke enthält die Abbildung ?
b) Zeichne eine Strecke so in die Abbildung ein, dass sich die Anzahl der Vierecke nicht verändert, die Anzahl der Dreiecke sich aber auf sechs erhöht!



a) Die Abbildung enthält ein Viereck und vier Dreiecke.

b) Folgende Abbildung erfüllt die Forderung: 

Aufgabe 6
Ein Garten mit einer quadratischen Fläche soll einen Zaun bekommen. Dazu werden Pfähle benutzt, die jeweils 2,5 m auseinander stehen. Eine Seite des Gartens ist 20 m lang.
Wieviel Pfähle werden benötigt?

Es werden 32 Pfähle benötigt.

12.24 24. Olympiade 1986

12.24.1 1. Runde 1986, Klasse 3

Aufgabe 1
Zur Erneuerung eines großen Wohnhauses sind insgesamt 36 Maurer, Dachdecker und Elektriker beschäftigt. Der vierte Teil aller Arbeiter sind Elektriker. Auf der Baustelle arbeiten 16 Maurer.
Wieviel Dachdecker und Elektriker arbeiten auf der Baustelle?

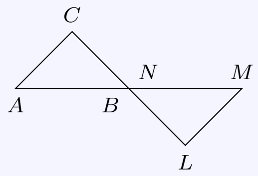
Der vierte Teil von 36 ist 9. 36 - 9 Elektriker - 16 Maurer = 11. Auf der Baustelle arbeiten 9 Elektriker und 11 Dachdecker.

Aufgabe 2
Die Quadrate sind durch Grundziffern zu ersetzen, die nicht unbedingt gleich sein müssen.

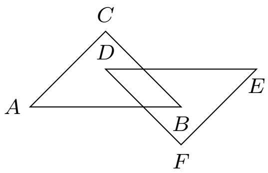
a) $\begin{array}{r} 5\,\square\,3\,2 \\ +\,\square\,2\,6\,\square \\ \hline 9\,9\,\square\,9 \end{array}$ b) 100 - □□ - □□ - □□ = 1 c) 1000 - □□□ = 1

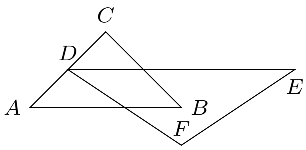
a) $\begin{array}{r} 5\,7\,3\,2 \\ +\,4\,2\,6\,7 \\ \hline 9\,9\,9\,9 \end{array}$ Zum Beispiel: b) 100 - 33 - 33 - 33 = 1; c) 100 - 999 = 1

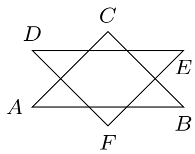
Aufgabe 3
Die beiden Dreiecke in der Abbildung haben einen gemeinsamen Punkt.



Zeichne jeweils zwei Dreiecke so, dass sie zwei gemeinsame Punkte, drei gemeinsame Punkte, sechs gemeinsame Punkte haben.







Aufgabe 4
Ein beladener LKW fährt von Halle nach Leipzig, ein vollbesetzter Bus von Leipzig nach Halle. Die Fahrt beginnen LKW und Bus zum gleichen Zeitpunkt.
Der Bus fährt im Durchschnitt 60 km in der Stunde, der LKW 50 km in der Stunde. Nach 30 min begegnen sie sich.
Ist zu diesem Zeitpunkt der Bus oder der LKW von Leipzig weiter entfernt?

Beide Fahrzeuge sind, wenn sie sich treffen gleich weit von Leipzig entfernt.

Aufgabe 5
Marion hatte bei einem Laufwettbewerb der Start verpasst und lief als letzte Läuferin ab. Sie konnte aber, nachdem sie Birgit, Karin, Carola, Gabi und Katja überholt hatte, noch Dritte werden.
Wieviel Schülerinnen nahmen am Lauf teil?

Da sie 5 Läuferinnen überholte und nur zwei vor ihr ins Ziel kamen, waren es $5 + 1 + 2 = 8$ Läuferinnen.

Aufgabe 6
Löse folgende Gleichungen:

$$3 \cdot x \cdot 4 = 12, \qquad 3 + a + 4 = 12, \qquad b = 7 - 2 + 8$$

$x = 1$; $a = 5$; $b = 13$

12.24.2 2. Runde 1986, Klasse 3

Aufgabe 1
Löse folgende Gleichungen!
a) $a \cdot 5 = 15$, b) $x \cdot 7 = 42$, c) $d \cdot 3 = 33$, d) $b \cdot 12 = 48$

a) $a = 3$; b) $x = 6$; c) $d = 11$; d) $b = 4$

Aufgabe 2
Alle 30 Jungpioniere einer Gruppe treiben regelmäßig Sport oder basteln in einer AG der Schule, 26 von ihnen treiben Sport, 15 basteln.
Wieviel Jungpioniere treiben Sport und basteln?

11 Schüler sind sportlich aktiv und arbeiten in der AG Basteln mit.

Aufgabe 3
Zeichne zwei Geraden, die sich im Punkt P schneiden! Kann man eine dritte Gerade so zeichnen, dass insgesamt vier Schnittpunkte entstehen?

Drei sich schneidende Geraden können höchstens drei Schnittpunkte haben.

Aufgabe 4
40 l Benzin sollen in mehrere Kanister eingefüllt werden, Es sind nur 5-l- und 10-l-Kanister vorhanden. Welche Möglichkeiten des Einfüllens gibt es?

Möglichkeiten: a) $8 \cdot 5$ l; b) 10 l, 5 l, 5 l, 5 l, 5 l, 5 l, 5 l; c) 10 l, 10 l, 5 l, 5 l, 5 l, 5 l
d) 10 l, 10 l, 10 l, 5 l, 5 l; e) 10 l, 10 l, 10 l, 10 l

Aufgabe 5

x	Ist x durch 10 teilbar?
720	
55	
3777	
30	

x	Ist x durch 10 teilbar?
720	ja
55	nein
3777	nein
30	ja

Aufgabe 6
Wieviel Kätzchen laufen hintereinander?
Eins läuft ganz stolz voran, eins zwischen zweien und noch eins schließt sich an.

Es sind insgesamt drei Kätzchen.

12.25 25. Olympiade 1987

12.25.1 1. Runde 1987, Klasse 3

Aufgabe 1
Marko ist ein Jahr älter als Tina. Tina ist ein Jahr älter als Marei. Addiert man das Alter der Kinder, so erhält man 27 Jahre. Wie alt ist jedes Kind?

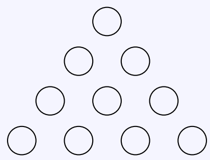
Marei ist 8 Jahre, Tina 9 Jahre und Marko 10 Jahre alt. Die Lösung ist durch inhaltliche Überlegungen zu finden.

Aufgabe 2
Setze in die Kästchen der Zahlenschlange die Rechenzeichen "+" und "-" so ein, dass das Ergebnis 8 ist.

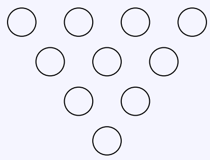
$$\boxed{7}\quad\boxed{6}\quad\boxed{5}\quad\boxed{4}\quad\boxed{3}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}\quad=\quad\boxed{8}$$

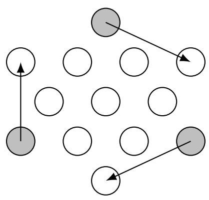
7 + 6 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 8

Aufgabe 3
Zehn Spielsteine liegen auf dem Tisch.



Gelingt es dir, drei Spielsteine umzulegen, damit folgende Figur entsteht?





Hinweis: Es werden nur die Spielsteine an den Ecken so bewegt, dass diese Steine danach wieder einen Eckstein bilden.

Aufgabe 4
Von einer dreistelligen Zahl ist bekannt: Sie ist kleiner als 200 und endet mit der Ziffer 5. Die mittlere Ziffer ist die kleinste natürliche Zahl. Wie heißt die Zahl?

Die Zahl heißt 105.

Aufgabe 5
Iris kauft für 105 Pf. beim Bäcker ein. Jörg bezahlt 1,10 M und Uwe kaufte 3 Stücke Kuchen zu je 0,30 M.
Wer musste den größten Betrag zahlen, wer den kleinsten?

Jörg musste den größten Betrag zahlen und Uwe den kleinsten.

Aufgabe 6
Sascha hat Fische geangelt. Wenn Vater und Mutter je 3 Fische, Sascha sowie seine Schwester und sein Bruder je 2 Fische essen, dann bleibt ein Fisch übrig.
Wieviel Fische hat Sascha geangelt?

Sascha hat 13 Fische geangelt.

12.25.2 2. Runde 1987, Klasse 3

Aufgabe 1
Trage in die Zahlenfolgen die fehlenden Zahlen ein.

a) 2, 4, □, 8, 10 b) 280, 285, □, 295, 300
c) 3, □, 11, 15, 19 d) □, 20, 30

a) 2, 4, 6, 8, 10; b) 280, 285, 290, 295, 300; c) 3, 7, 11, 15, 19; 10, 20, 30

Aufgabe 2
Bernd und Petra streiten sich. Bernd sagt: "Jedes Trapez ist ein Rechteck".
Petra sagt: "Jedes Rechteck ist ein Trapez."
Wer hat recht ? Begründe deine Entscheidung.

Rechtecke sind spezielle Trapeze - also hat Petra recht. Bernds Aussage wäre mit einem Beispiel zu widerlegen.

Aufgabe 3
Vier Mannschaften spielen bei einem Wettbewerb gegeneinander. Es spielt jede Mannschaft einmal gegen jede andere Mannschaft.
Wieviel Spiele werden insgesamt durchgeführt ? Begründe deine Antwort.
Du kannst dir auch eine Tabelle anfertigen und daraus das Ergebnis ermitteln.

Jede Mannschaft muss drei Spiele durchführen. Insgesamt werden 6 Spiele absolviert.

Aufgabe 4
Ergänze die Tabelle!

a	a-5
13	
	7314
	5
312	
3004	

a	a-5
13	8
7319	7314
10	5
312	307
3004	2999

Aufgabe 5
Ein Spaziergänger geht 5 km in einer Stunde, ein Fahrradfahrer fährt viermal so schnell, ein Mopedfahrer fährt dreimal so schnell wie ein Fahrradfahrer.
Wieviel km fährt ein Mopedfahrer in einer Stunde mehr als ein Fahrradfahrer?

Mit einem Fahrrad fährt man in einer Stunde 20 km und mit einem Moped 60 km in einer Stunde. Demzufolge fährt ein Mopedfahrer in einer Stunde 40 km mehr als ein Fahrradfahrer.

12.26 26. Olympiade 1988

12.26.1 1. Runde 1988, Klasse 3

Aufgabe 1
Vergleiche.
a) $a = 2305$, $b = 2503$ b) $d = 7001$ g, $e = 7$ kg   c) $g = 3$ m 5 cm, $h = 350$ cm

a) $a = 2305 < b = 2503$, b) $d = 7001$ g $> e = 7$ kg $= 7000$ g, c) $g = 3$ m 5 cm $= 350$ cm $= h = 350$ cm

Aufgabe 2
Ordne die Zahlen der Reihe nach weiter ein.

$a = 4121, 413, 705, 1180, 3400, 914, 283, 537, 3607, 812, 927, 2156, 4106, 357, 89$

	4121
$a < 839$	

$a > 839$	4121, 4106, 3607, 3400, 2156, 1180, 927, 914
$a < 839$	812, 705, 537, 413, 357, 283, 89

Aufgabe 3
Berechne

a	b	$a+b$
81	45	
	35	1070
77	73	
	0	0

a	b	$a+b$
81	45	126
1035	35	1070
77	73	150
0	0	0

Aufgabe 4
Vor dem Pionierhaus "Juri Gagarin" in Karl-Marx-Stadt treffen sich die Mitglieder der AG Mathematik. Klaus, Bernd und Andreas haben jeder für jedes der Mädchen Anne, Steffi, Sabine, Iris und Katrin eine Knobelaufgabe vorbereitet.
Wie viel Aufgaben sind es insgesamt?

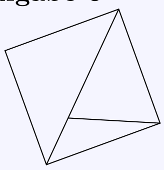
3 Jungen, 5 Mädchen. $3 \cdot 5 = 15$. Sie haben 15 Knobelaufgaben vorbereitet.

Aufgabe 5
Setze für A und B Zahlen ein, aber beachte die Zeichen "+", "-" und "·".

$$\begin{array}{ccccc} A & + & A & = & B \\ + & & \cdot & & - \\ A & \cdot & A & = & B \\ \hline B & - & B & = & 0 \end{array}$$

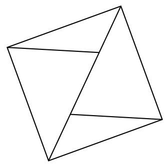
$$\begin{array}{ccccc} 2 & + & 2 & = & 4 \\ + & & \cdot & & - \\ 2 & \cdot & 2 & = & 4 \\ \hline 4 & - & 4 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 6



a) Wie viel Vierecke und wie viel Dreiecke enthält die Abbildung?
b) Zeichne eine Strecke so in die Abbildung ein, dass sich die Anzahl der Dreiecke erhöht, die Anzahl der Vierecke unverändert bleibt.

a) 1 Viereck, 4 Dreiecke

b) 

12.26.2 2. Runde 1988, Klasse 3

Aufgabe 1
Entscheide, ob wahr oder falsch.

	w	f
a) 101 und 103 sind ungerade Zahlen		
b) $9 \cdot 8 + 7 = 7 + 8 \cdot 9$		
c) $12 \cdot 3 - 5 < 11 \cdot 4 - 15$		
d) 34 ist durch 4 ohne Rest teilbar		
e) $6 \cdot 7 + 9 \cdot 3 > 2 \cdot 9 + 7 \cdot 6$		
f) $12 \cdot 4 : 6 = 12 : 4 \cdot 6$		

a) w ; b) w ; c) f ; d) f ; e) w ; f) f

Aufgabe 2
In einem Korb liegen 5 blaue und 3 rote Kugeln. Man kann in den Korb hineingreifen und immer nur eine Kugel herausnehmen, die Kugeln sind nicht zu erkennen.
Wie oft muss man in den Korb greifen, um mit Sicherheit zwei Kugeln mit gleicher Farbe zu haben?

Man muss dreimal in den Korb greifen, um sicher zwei gleichfarbige Kugeln herauszunehmen.

Aufgabe 3

Stelle fest, nach welcher Vorschrift die Werte für y berechnet sind. Ergänze die fehlenden Zahlen.

(1) $y = x \cdot x - 1$ (2) $y = x + 3$ (3) $y = x \cdot 6$

a)

x	y
5	30
3	18
	48
4	

b)

x	y
3	8
1	
	24
6	35

a) Gleichung (3)

x	y
5	30
3	18
8	48
4	24

b) Gleichung (1)

x	y
3	8
1	0
5	24
6	35

Aufgabe 4
Notiere die größte vierstellige und die kleinste dreistellige Zahl, die man mit verschiedenen Ziffern schreiben kann. Berechne deren Summe.

9876 + 102 = 9978

Aufgabe 5
Vervollständige das magische Quadrat so, dass die Summe der Zahlen in jeder Reihe und Spalte

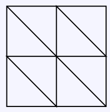
6	16	
	8	
		10

immer 24 ist.

6	16	2
4	8	12
14	0	10

Aufgabe 6

Wie viele Quadrate und wie viel Dreiecke erkennst du?

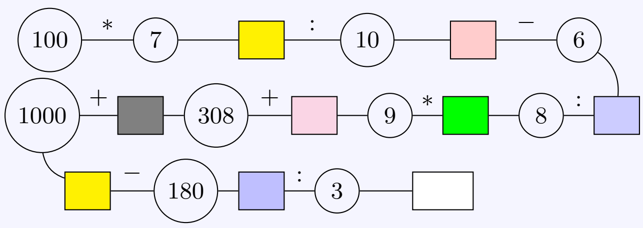


5 Quadrate und 10 Dreiecke

12.27 27. Olympiade 1989

12.27.1 1. Runde 1989, Klasse 3

Aufgabe 1
Rechne. Schreibe die Ergebnisse in die leeren Kästchen:



Die Berechnungskette ist:
100 * 7 = 700 : 10 = 70 - 6 = 64 * 8 = 8 * 9 = 72 + 308 = 380 + 1000 = 1380 - 180 = 1200 : 3 = 400

Aufgabe 2
Berechne die Zahlen.

A	B	C	D	E

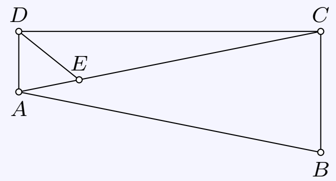
A : das Vierfache von Hundert
B : die Hälfte von A
C : die Summe von D und E
D : A vermindert um B
E : das Zehnfache von D

A	B	C	D	E
400	200	2200	200	2000

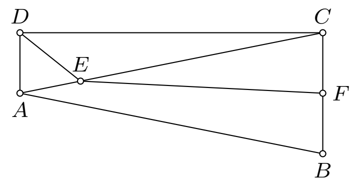
Aufgabe 3
Sven, Anja und Torsten wohnen in einer Straße. Sven wohnt im Haus mit der Nummer, die um 20 größer ist als die Nummer von Anjas Haus. Anjas Hausnummer ist fünfmal so groß wie Torstens. Torstens Hausnummer ist die kleinste zweistellige Zahl.
Berechne die drei Hausnummern.

Torstens Hausnummer ist die 10. Dann hat Anja die Hausnummer 50 und Sven die Hausnummer 70.

Aufgabe 4

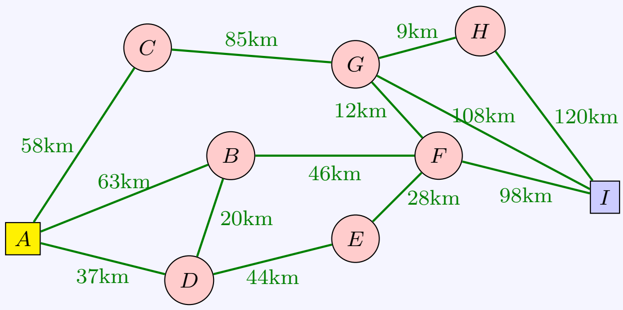


Zeichne zwischen B und C einen Punkt F und die Strecke $\overline{EF}$.
Wie viel Dreiecke und wie viel Vierecke enthält die Figur dann?



Die Figur hat 5 Dreiecke: $\triangle AED$, $\triangle DEC$, $\triangle ACD$, $\triangle FCE$, $\triangle ABC$ und 3 Vierecke: $ABCD$, $ABFE$, $EFCD$.

Aufgabe 5



Suche den kürzesten Weg von A nach I. Schreibe die Buchstaben der Orte auf, durch die dabei gefahren wird.

Der kürzeste Weg verläuft von A nach I über die Punkte: A - D – B - F - I und hat eine Länge von 201 km.

Aufgabe 6
Bestimme die kleinste Zahl y, für die gilt:

$$5683 > y > 2399$$

Dividiere diese Zahl durch 100.

$y = 2400$; $2400 : 100 = 24$

12.27.2 2. Runde 1989, Klasse 3

Aufgabe 1
Vier Städte (S, I, K, B) renovieren ihre Marktplätze, um die Festveranstaltung zum 40. Jahrestag würdig zu feiern.
Sabine wohnt nicht in der größten Stadt.
Irene wohnt in der Stadt, die größer ist als die von Bernd.
Klaus wohnt in der Stadt, die kleiner ist als die Stadt, in der Sabine wohnt.
Die Städte, in denen Klaus und Bernd wohnen sind gleich groß.
Ordne die Städte nach ihrer Größe. Beginne mit der größten.

I, S, K, B oder I, S, B, K

Aufgabe 2

Vervollständige.

```
a)     3 ? 9 7            b)     2 ? 4 2
     - ? 2 3 ?                 - ? 8 ? 5
     ----------                ----------
       1 3 ? 7                     8 2 ?
```

```
a)     3 5 9 7            b)     2 6 4 2
     - 2 2 3 0                 - 1 8 1 5
     ----------                ----------
       1 3 6 7                     8 2 7
```

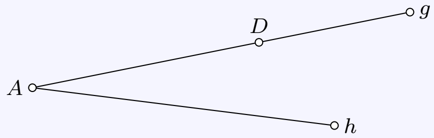
Aufgabe 3
Ergänze die fehlenden Zahlen.
a) 20, 40, □, □, 100   b) 20, 40, 80, □, □, 640   c) □, 60, 110, 160, □, □

a) 20, 40, 60, 80, 100;   b) 20, 40, 80, 160, 320, 640;   c) 10, 60, 110, 160, 210, 260

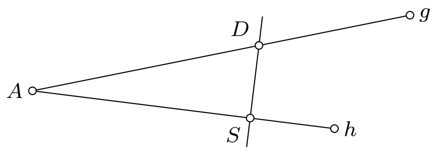
Aufgabe 4
Berechne y.
a) $d = 576 + 386$, $\quad y = d - 463$
b) $e = 3784 - 489$, $\quad y = 5680 - e$

a) $d = 962, y = 499$; b) $e = 3295, y = 2385$

Aufgabe 5
Vervollständige die Abbildung.



Zeichne durch D eine zu h senkrechte Gerade. Die Schnittpunkt mit h nenne S.



Aufgabe 6
Um wie viel ist 8563 − 1492 kleiner als das Zehnfache von 937?

8563 - 1492 = 7071; $937 \cdot 10 = 9370$, 9370 - 7071 = 2299.
8563 − 1492 ist um 2299 kleiner als das Zehnfache von 937.

12.28 28. Olympiade 1990

12.28.1 1. Runde 1990, Klasse 3

Aufgabe 1
Ergänze die fehlenden Ziffern.

$$\begin{array}{rcccc} & & 7 & \square & 6 \\ + & 2 & \square & 8 & \square \\ \hline & 2 & 9 & 6 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 7 & \square & 5 & \square \\ - & \square & 1 & \square & 2 \\ \hline & 4 & 5 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & 7 & 8 & 6 \\ + & 2 & 1 & 8 & 3 \\ \hline & 2 & 9 & 6 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 7 & 6 & 5 & 8 \\ - & 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 5 & 1 & 6 \end{array}$$

Aufgabe 2
Überprüfe! Wer rechnet richtig? Korrigiere, wenn nötig.

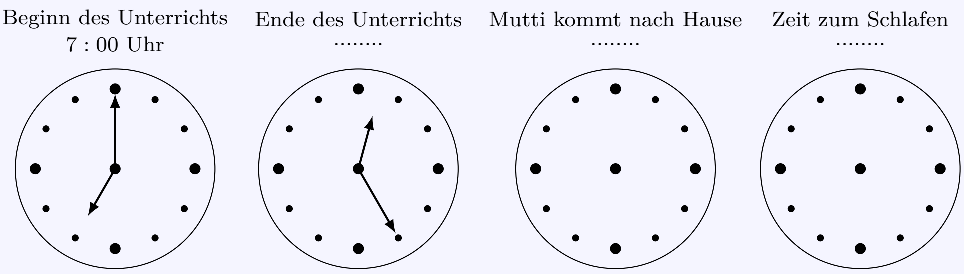
1. Karin: $70 + a = 120 \quad \Rightarrow \quad a = 140$
2. Sven: $b + 700 = 1400 \quad \Rightarrow \quad b = 700$
3. Kay: $430 - d = 370 \quad \Rightarrow \quad d = 50$

Sven rechnet richtig. Karin rechnet falsch, richtig ist $a = 50$. Kay verrechnet sich ebenso. Richtig ist $d = 60$.

Aufgabe 3
Ines, Grit und Maria sind zusammen 100 kg schwer. Jede ist schwere als 30 kg.
Wie schwer könnte jedes Mädchen sein? Gib drei Möglichkeiten an.

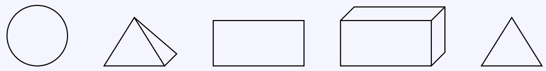
Möglichkeit	Ines	Grit	Maria	Summe
1.	30 kg	40 kg	30 kg	100 kg
2.	35 kg	30 kg	35 kg	100 kg
3.	25 kg	35 kg	40 kg	100 kg

Aufgabe 4
Ergänze!



2. Uhr: 12:25 Uhr

Aufgabe 5
Ordne richtig zu.



Pyramide	Kreis	Dreieck	Viereck	Quader

Von links nach rechts sind abgebildet: Kreis, Pyramide, Rechteck, Quader, Dreieck

Aufgabe 6
Berechne die Zahlen.

- A ist das Vierfache der kleinsten dreistelligen Zahl,
- B ist die Hälfte der kleinsten vierstelligen Zahl,
- C ist die Summe von D und E,
- D ist B minus A,
- E ist die Summe von B und D.

kleinste dreistellige Zahl 100, d.h. $A = 400$, analog $B = 500$. Somit folgt $D = 100$, $E = 600$, $C = 700$

13 Klassenstufe 4

Die Zusammenstellung der Aufgaben der Klassenstufe 4 ist nicht vollständig und wird später ergänzt.

13.1 1. Olympiade 1963

13.1.1 1. Runde 1963, Klasse 4

Aufgabe 1
Detlef spart für ein Fahrrad. Es soll 360,00 DM kosten.
Als er gefragt wird, wieviel Geld ihm noch fehle, sagt er: „Wenn ich sechsmal soviel Geld hätte wie ich bereits habe, hätte ich genug.“
Wieviel Geld hat Detlef schon gespart?

x sei das Geld, das Detlef hat. Dann ist $6x = 360$ und somit $x = 60$. Detlef hat 60,00 DM gespart.

Aufgabe 2
Der erste Sputnik wog 83,600 kg. Der zweite Sputnik war 424,700 kg schwerer als der erste Sputnik. Und der dritte Sputnik war 813,700 kg schwerer als der zweite Sputnik.
Wie schwer waren der zweite und der dritte Sputnik?

83,600 + 424,700 = 508,300 und 508,300 + 813,700 = 1322,000.
Der zweite Sputnik wog 508,300 kg, der dritte Sputnik 1322 kg.

Aufgabe 3
Uwe sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.“
Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

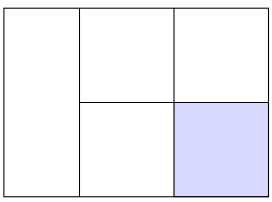
Die Mutter ist 42 - 2 = 40 Jahre alt. Bruder und Uwe sind zusammen 20 Jahre. Da 20 = 9 + 11 ist, folgt: Uwe ist 9 Jahre, sein Bruder 11 Jahre und seine Mutter 40 Jahre alt.

Aufgabe 4
Ein Betrieb hat zwei Autos vom Typ „Wartburg“. Das eine Auto fuhr in einer Woche 600 km und das andere 900 km.
Wieviel Liter Benzin brauchte jedes Auto, wenn das zweite, das 900 km fuhr, 27 Liter mehr verbrauchte als das erste?

Das zweite Auto fährt 300 km weiter und benötigt dafür 27 Liter. Für 900 km sind es somit 81 Liter. Damit ergibt sich:
Das erste Auto verbrauchte 54 l Benzin. Das zweite Auto verbrauchte 81 l Benzin.

13.1.2 2. Runde 1963, Klasse 4

Aufgabe 1
Zeichne ein Rechteck, das 7 cm lang und 5 cm breit ist. Unterteile die Länge so, dass ein Quadrat und ein Rechteck entstehen.
Das Quadrat zerlege in 4 kleine Quadrate.
Wie lang sind die Seiten eines kleinen Quadrates?



Das große Quadrat hat die Seitenlänge 5 cm, womit die Seiten des gesuchten Quadrats 2,5 cm lang sind.

Aufgabe 2
Frage: Findest du heraus, wie die Zahlen heißen müssen? Bei dieser Aufgabe fehlen einige Ziffern.

```
  3 x 8
+ 2 3 x
-------
  x 0 2
```

Die Einerziffer von 23x muss 4 sein, da $8 + 4 = 12$. Für die Addition der Zehner tritt ein Übertrag auf, wodurch 3x8 zu 368 wird. Die Aufgabe lautet also

```
  3 6 8
+ 2 3 4
-------
  6 0 2
```

Aufgabe 3
Multipliziere! $2093 \cdot 63$

131 859

Aufgabe 4
Ordne folgende Zahlen der Größe nach! (Beginne mit der größten Zahl!)

80472; 236451; 2364510; 80274

2 364 510; 236 451; 80 472; 80 274

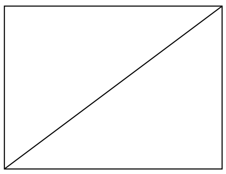
Aufgabe 5
a) Wieviel Millimeter sind 53 cm?
b) Wieviel Kilogramm sind 7 t?

a) 530 mm; b) 7000 kg

Aufgabe 6
Bilde aus $8 < 56$ Gleichungen, indem du ausgleichst
a) durch Addition
b) durch Subtraktion
c) durch Multiplikation
d) durch Division!

$48 + 8 = 56$; $8 = 56 - 48$; $7 \cdot 8 = 56$; $8 = 56 : 7$

Aufgabe 7
a) Zeichne ein Rechteck, das 36 mm breit und 48 mm lang ist.
b) Zeichne in dieses Rechteck eine Diagonale (eine Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Rechtecks).
c) Miss diese Diagonale und gib ihre Länge an.



Die Länge der Diagonale beträgt 60 mm.

Aufgabe 8
30 Pioniere der Klasse 4 halfen der Paten-LPG beim Nachlesen der Kartoffeln. Je zwei Pioniere bekamen einen Korb. Jeder Korb fasste 12 kg Kartoffeln. Die Pioniere füllten jeden Korb dreimal. Wieviel Kilogramm Kartoffeln sammelten sie?

15 Gruppen füllten dreimal den Korb mit 12 kg Kartoffeln, d.h. $15 \cdot 3 \cdot 12 = 540$ kg.

13.2 2. Olympiade 1964

13.2.1 1. Runde 1964, Klasse 4

Aufgabe 1
$(a + b) : c = x$. $a = 5432$; $b = 589$; $c = 3$
Frage: Wie groß ist x?

Einsetzen der Größen ergibt $(5432 + 589) : 3 = 6021 : 3 = 2007$, also $x = 2007$.

Aufgabe 2
Uwe bekam ein Buch geschenkt. Es ist 72 Seiten stark.
Er las an 2 Tagen den 4. Teil des Buches. An jedem der 2 Tage las er gleichviel.
Wieviel Seiten las er an einem Tag?

Der vierte Teil von 72 ist 19. Uwe las somit an einem Tag 9 Seiten des Buches.

Aufgabe 3
Für 3 Handtücher vom gleichen Preis bezahlt die Mutter 4,62 DM.
Wieviel Mark würden 7 Handtücher dieser Sorte kosten?

Ein Handtuch kostet 1,54 DM. 7 Handtücher würden 10,78 DM kosten.

Aufgabe 4
Vermindere das Produkt der Zahlen 7 und 600 so, dass das Ergebnis 4000 ist.
Frage: Wie groß ist der Subtrahend?

Gesucht ist x mit $7 \cdot 600 - x = 4000$. Der Subtrahend x ist 200.

13.2.2 2. Runde 1964, Klasse 4

Aufgabe 1
Aus 4 kg Weizenmehl werden 10 kleine Weißbrote gebacken.
a) Wieviel kleine Weißbrote können aus 40 dt Mehl hergestellt werden?
b) Und wieviel große Weißbrote, die doppelt so schwer sind wie die kleinen, könnten daraus gebacken werden?

40 dt = 4000 kg; 4000 : 4 = 1000; 1000 * 10 = 10000
a) 10000 kleine Weißbrote. 10000 : 2 = 5000
b) 5000 große Weißbrote.

Aufgabe 2
Setze die fehlenden Ziffern ein!

```
   *75*26
-  20*1*5
-   *607*
---------
   471147
```

```
   775326
-  208105
-   96074
---------
   471147
```

13.3 3. Olympiade 1965

13.3.1 1. Runde 1965, Klasse 4

Aufgabe 1
Du kannst aus folgenden Zahlen verschiedene Additionsaufgaben mit dem Ergebnis 1000 aufstellen. Dabei können nicht immer alle angegebenen Zahlen verwendet werden.
250, 160, 180, 120, 130, 210, 110, 140, 360.
Beispiel: 250 + 360 + 180 + 210 = 1000
Stelle zwei weitere Aufgaben aus diesen Zahlen zusammen!

$130 + 360 + 210 + 180 + 120 = 1000 \quad , \quad 360 + 110 + 120 + 250 + 160 = 1000$

Aufgabe 2
Eine Maschine füllt und wiegt in 2 Stunden 400 Säcke Brikettes.
Für wieviel Arbeitskräfte verrichtet diese Maschine die Arbeit, wenn 10 Arbeiter in 2 Stunden zusammen nur 200 Säcke mit der Schaufel füllen und abwiegen können?

Die Maschine ersetzt 20 Arbeiter.

Aufgabe 3
Eine Großkonditorei verbrauchte in vier Tagen 3 t Zucker: am 1. Tag 16 Säcke, am 2. Tag 17 Säcke, am 3. Tag 15 Säcke und am 4. Tag 12 Säcke.
Wieviel Kilogramm Zucker verbrauchte der Betrieb am 4, Tag weniger als am 1., 2. bzw, 3. Tag?

Am 4. Tag 200 kg weniger als am 1. Tag. Am 4. Tag 250 kg weniger als am 2. Tag.
Am 4. Tag 150 kg weniger als am 3. Tag.

Aufgabe 4
Ein Betrieb kann für Feiern und Theaterbesuche in einem Jahr 7390 M ausgeben. In den Monaten Januar, Februar, März, April und Mai verbrauchte der Betrieb jeweils 540 M.
Wieviel kann der Betrieb in jedem weiteren Monat ausgeben, wenn jeweils der gleiche Betrag verwendet werden soll und außerdem 700 M davon für den Laienspielzirkel bereitstehen?

Der Betrieb kann 570 M ausgeben.

13.3.2 2. Runde 1965, Klasse 4

Aufgabe 1
Suche die Zahlen, die folgende Ungleichungen erfüllen:

$$270 < x < 274 \qquad ; \qquad 14 > y > 11$$

Berechne alle möglichen Produkte! Wie groß ist die Summe dieser Produkte?

$(271 + 272 + 273) \cdot (12 + 13) = 20400$

Aufgabe 2
Ein Rechteck ist 4 cm 8 mm breit und doppelt so lang.
Berechne die Summen aller Seitenlängen des Rechtecks!

$2 \cdot 4$ cm 8 mm $+ 2 \cdot 2 \cdot 4$ cm 8 mm $= 28$ cm 8 mm

13.4 4. Olympiade 1966

13.4.1 1. Runde 1966, Klasse 4

Aufgabe 1

Mit welchen Zahlen wurde gerechnet?

$$\begin{array}{lr} & 7*929 \\ + & 87** \\ \hline & 85722 \\ - & ***5 \\ \hline & 81087 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76929 \\ +\ 8793 \\ \hline 85722 \\ -\ 4635 \\ \hline 81087 \\ \hline\hline \end{array}$$

Aufgabe 2
German Titow war ungefähr 25 Stunden und 30 Minuten im Weltall. Eine Erdumkreisung dauerte bei ihm etwa 90 Minuten. Wievielmal umkreiste Titow die Erde?

25 h und 30 min sind insgesamt 1530 min. 1530 : 9 = 170. Titow umkreiste die Erde etwa 170 mal.

Aufgabe 3
Konstruiere ein Quadrat mit der Seitenlänge von 6 cm. Zeichne dann die beiden Diagonalen ein. - Nun erkennst du vier Dreiecke: schneide sie aus und vergleiche sie durch Aufeinanderlegen.
Überlege wieviel Quadratzentimeter groß die Fläche jedes der vier Dreiecke ist?

Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 6 cm $\cdot$ 6 cm $= 36$ cm^2. Die vier Dreiecke sind flächengleich. Damit hat ein Dreieck einen Flächeninhalt von 9 cm^2.

Aufgabe 4
Berechne alle möglichen Produkte aus den Zahlen a und b, wenn gilt: $501 < a < 505$ und $28 > b > 25$!
Wie groß ist die Summe aller dieser Produkte?

$a = 502, 503, 504,\ b = 26, 27 \qquad (502 + 503 + 504) \cdot (26 + 27) = 79977$

13.4.2 2. Runde 1966, Klasse 4

Aufgabe 1

a	b	c	d	
	$a \cdot 10$	$b + 3800$		$c + d$
73				50000
58				50000
112				50000
270				50000

a	b	c	d	
	$a \cdot 10$	$b + 3800$		$c + d$
73	730	4530	45470	50000
58	580	4380	45620	50000
112	1120	4920	45080	50000
270	2700	6500	43500	50000

Aufgabe 2

$$5706 + 35560 = a$$
$$a - 8346 = b$$
$$b : 40 = 6$$

Probe: $c + 177 = 1000$

$a = 41266$; denn $3706 + 35560 = 41266$
$b = 32920$; denn $41266 - 8346 = 32920$
$c = 823$; denn $32920 : 40 = 823$
Prode: $823 + 177 = 1000$

13.5 5. Olympiade 1967

13.5.1 1. Runde 1967, Klasse 4

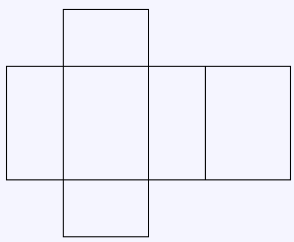
Aufgabe 1
Inge hat 5 Hefte in der Mappe. Sie legt noch 1 Heft für Musik, Werken und Geometrie dazu. Von diesen Heften sammelt die Lehrerin jeweils ein Arbeitsheft für Mathematik und für Deutsch ein. In der letzten Stunde verteilt sie 56 neue Übungshefte gleichmäßig an ihre 28 Schüler.
a) Wieviel Hefte bekommt jeder Schüler?
b) Wieviel Hefte hat Inge jetzt?

a) Jeder Schüler bekommt 2 Hefte. b) Inge hat jetzt 8 Hefte.

Aufgabe 2
Auf dem Balkon stehen 8 Blumenkästen. In jeden Kasten sollen gleich viele Geranien gepflanzt werden.
Insgesamt benötigt die Mutter 32 Stück. Mit den alten Stauden kann Mutter nur 5 Kästen vollständig bepflanzen. Für den sechsten Kasten behält sie noch 3 Stauden übrig.
a) Wieviel alte Stauden verwendet die Mutter?
b) Wieviel neue Pflanzen muss sie kaufen?

a) Die Mutter verwendet 23 alte Stauden.
b) Sie muss 9 neue Pflanzen kaufen.

Aufgabe 3
Kerstin zeichnet das Netz eines Körpers.
a) Wie heißt der Körper, den Kerstin daraus falten kann?
b) Gib die Maße dieses Körpers an!



a) Es ist ein Quader.
b) Länge: 4,8 cm, Breite: 3,6 cm, Höhe 2,4 cm

Aufgabe 4
Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen. Rechne!

$$5720 - p = 4500$$
$$p + r = 3900$$
$$r : 20 = z$$

Probe: $10000 - r - p = 5966 = z$

$p = 1220$; $r = 2680$; $z = 134$.

13.5.2 2. Runde 1967, Klasse 4

Aufgabe 1
Berechne die Produkte $8 \cdot 93$ und $9 \cdot 82$.
Bestimme die Zahlen, die zwischen den beiden Produkten liegen. Addiere diese Zahlen.

Die Produkte heißen 744 und 738. Die Zahlen heißen 739, 740, 741, 742 und 743. Die Summe ist 3705.

Aufgabe 2
Im Jahre 1964 wurden in der Hauptstadt Berlin insgesamt 6973 neue Wohnungen gebaut. Wir nehmen an, dass in jede neue Wohnung durchschnittlich 3 Personen eingezogen sind.
Wieviel Personen erhielten dann im Jahre 1964 in Berlin eine neue Wohnung?

20919 Personen erhielten 1964 in Berlin eine neue Wohnung

13.6 6. Olympiade 1968

13.6.1 1. Runde 1968, Klasse 4

Aufgabe 1
Horst fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Um 7.45 Uhr hat er die halbe Strecke zurückgelegt. Der Unterricht beginnt um 8.00 Uhr. Wenn er mit gleichem Tempo weiterfährt, so ist er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn in der Schule.
a) Wieviel Minuten Fahrzeit benötigt Horst für die gesamte Wegstrecke?
b) Wann fuhr Horst von zu Hause fort?

a) Horst benötigt 20 Minuten für den Schulweg.
b) Horst fuhr 7.35 Uhr von zu Hause fort.

Aufgabe 2
Jeder von vier Brüdern einer Familie sagt: Ïch habe 2 Schwestern."
Wieviel Kinder gehören zur Familie?

Zur Familie gehören 6 Kinder.

Aufgabe 3
Verknüpfe die Zahlen 230, 740, 400, 170, 60 durch Addition und Subtraktion so miteinander, dass das Ergebnis gleich Null ist!

$230 + 400 + 170 - 740 - 60 = 0$

Aufgabe 4
Drei Eisenbahnwagen sind mit der gleichen Anzahl Kinder besetzt. Im ersten Sagen sitzen 24 Jungen und doppelt soviel Mädchen. Im zweiten Wagen ist der sechste Teil der Kinder Jungen; die übrigen sind Mädchen. Im dritten Wagen ist der vierte Teil der Kinder Mädchen und die übrigen sind Jungen.
a) Wieviel Jungen und wieviel Mädchen sitzen in den drei Wagen?
b) Wieviel Kinder sind das insgesamt?

a) In allen drei Wagen saßen 90 Jungen und 126 Mädchen.
b) Insgesamt saßen 216 Kinder in den Wagen.

13.6.2 2. Runde 1968, Klasse 4

Aufgabe 1
a) Setze die fehlenden Zahlen ein!

$$\begin{array}{rr} & 32591* \\ + & 7*92 \\ + & 1985*4 \\ \hline & *7*512 \end{array}$$

b) Wenn du die Quersumme des Ergebnisses durch 3 dividierst, musst du 7 erhalten. Rechne!

a) $325916 + 47092 + 198504 = 571512$; b) Quersumme: 21 2. AB, BC, CD, DA, AC

Aufgabe 2
Zeichne ein Rechteck mit seinen beiden Diagonalen! Bezeichne alle Schnittpunkte, und schreibe alle Strecken auf, die du erkennst!

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}, \overline{AE}, \overline{EC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{ED}$

13.7 7. Olympiade 1969

13.7.1 1. Runde 1969, Klasse 4

Aufgabe 1
Wie alt ist Peter?
Er sagt: "Meine Mutter ist 18 Jahre älter, als unsere Republik in diesem Jahr wird. Sie ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich zusammen, und ich bin 3 Jahre jünger als mein Bruder."

Peter ist 8 Jahre alt.

Aufgabe 2
Wenn man die Zahl 12 345 679 mit einer einstelligen Zahl multipliziert, erhält man ein Produkt, in dem nur die Grundziffer 1 auftritt.
Wie heißt diese einstellige Zahl?

$9 \cdot 12345679 = 111111111$

Aufgabe 3
Zeichne die Punkte P, Q, R, S, T so, dass jeweils 2 Punkte auf einer Geraden liegen!
Wieviel Geraden erhältst du höchstens?

Ich erhalte (höchstens) 5 Geraden.

Aufgabe 4
Der Flächeninhalt eines neuen Spielplatzes ist quadratisch und beträgt 1600 m^2.
Wie lang ist eine Seite des Spielplatzes!
Wieviel Meter Zaun sind für drei Seiten notwendig?

Eine Seite ist 40 m lang. Für 3 Seiten sind 120 m Zaun notwendig.

13.7.2 2. Runde 1969, Klasse 4

Aufgabe 1
Für welche gerade natürliche Zahl x gilt $64 - 8 \cdot x > 32$?

$x = 2$

Aufgabe 2
In einem Stadtbezirk wurden 260 groß Wohnungen renoviert. Der zehnte Teil der Wohnungen hat 55 m^2 Wohnfläche, der vierte Teil der Wohnungen hat 67 m^2 and der Rest 80 m^2 Wohnfläche pro Wohnung.
Berechne die Gesamtwohnfläche aller renovierten Wohnungen!

1430 m^2 + 4355 m^2 + 13520 m^2 = 19305 m^2

13.8 8. Olympiade 1970

13.8.1 1. Runde 1970, Klasse 4

Aufgabe 1
Zum Pioniertreffen fahren aus der Stadt 7 Busse. Die Fahrstrecke beiträgt 600 km, Zusammen verbrauchen die Busse 1008 l Kraftstoff, Jeder Bus benötigt die gleiche Menge.
a) Wieviel Liter Kraftstoff verbraucht ein Bus für die Gesamtstrecke?
b) Wieviel Liter verbraucht ein Bus für 100 km?
c) Wieviel kostet der Kraftstoff für einen Bus, wenn der Preis für einen Liter 70 Pf beträgt?

a) Ein Bus verbraucht für die Gesamtstrecke 144 l Kraftstoff.
b) Für 100 km verbraucht ein Bus 24 l Kraftstoff.
c) Der Kraftstoff für einen Bus kostet 100,80 M.

Aufgabe 2
Genau um 8.04 Uhr fahren die Busse zum Pioniertreffen ab. Nach 90 Minuten machen sie eine Pause von 22 min. Nach weiteren 2 Stunden Fahrt ist 1 h 8 min lang Mittagspause.
Um welche Uhrzeit kommen sie an, wenn sie nach der Mittagspause noch 1 Stunde fahren?

Die Busse kommen (nach 6 h) um 14.04 Uhr an.

Aufgabe 3
Aus einem Bezirk fahren 886 Teilnehmer mit einem Sonderzug zum Pioniertreffen. In vier zweiachsigen Wagen sitzen jeweils 46 Pioniere. In 5 dreiachsigen Wagen haben jeweils 54 Pioniere Platz gefunden. In den vierachsigen Wagen sitzen jeweils 72 Pioniere.
a) Wieviel Pioniere fahren in vierachsigen Wagen?
b) Wieviel vierachsige Wagen hat der Sonderzug?
c) Wieviel Achsen haben die Wagen des Sonderzuges insgesamt?

a) In den vierachsigen Wagen fahren 432 Pioniere.
b) Der Sonderzug hat 6 vierachsige Wagen.
c) Die Wagen, des Sonderzuges haben zusammen 47 Achsen.

Aufgabe 4
Zeichne den Strahl h mit dem Anfangspunkt A! Lege auf h den Punkt G so fest, dass $\overline{AG} = 2{,}9$ cm!
Lege dann den Punkt B auf h so fest, dass $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie $\overline{AG}$!
Nimm nun $\overline{AB}$ in den Zirkel, und zeichne Kreisbogen um A und B! Den Schnittpunkt der Kreisbogen bezeichne mit C, und verbinde C mit A und B!
Gib die genaue Bezeichnung für das Dreieck ABC an!

Die Konstruktionsbeschreibung ergibt ein "gleichgeitiges Dreieck".

13.8.2 2. Runde 1970, Klasse 4

Aufgabe 1
Beim Pioniertreffen kommen die Pioniere eines Bezirks in Privatquartiere. 23 Familien nehmen jeweils 2 Pioniere auf, 117 Pioniere sind zu Gast bei Familien, die jeweils 3 Pioniere aufnehmen. Der Rest der 239 Pioniere kommt zu Familien, die immer 4 Gäste beherbergen.
a) Wieviel Pioniere kommen in Viererquartiere?
b) Bei wieviel Pamilien wohnen Junge Pioniere?

a) 76 Pioniere kommen in Viererquartieren unter.
b) Bei 81 Familien wohnen Junge Pioniere.

Aufgabe 2
Dividiere die Differenz von 6 000 397 und 5 999 979 durch 19, und du erhältst die erste Ziffer eines Datums, das im Jahre 1970 eine besondere Rolle spielt.
Gib das vollständige Datum an!

Ich erhalte die Ziffer 2. Das Datum ist der 22. 4. 1970, der 100. Geburtstag Lenins.

13.9 9. Olympiade 1971

13.9.1 1. Runde 1971, Klasse 4

Aufgabe 1
In einer Stadt gibt es 20 neue Häuser. In jedem dieser Häuser wohnen rund 450 Menschen. Insgesamt wohnt in den neuen Häusern der dritte Teil aller Einwohner dieser Stadt.
Wieviel Einwohner hat diese Stadt?

In der Stadt wohnen 27000 Menschen.

Aufgabe 2
Im neuen Stadtzentrum bauen die Arbeiter ein Hochhaus mit 23 Stockwerken. Jetzt gießen sie den Teil für die Treppen and die Fahrstühle aus Beton. In einer Stunde wächst dieser Teil um 11 cm.
a) Um wieviel Meter wächst dieser Teil an einem Tag, wenn 15 Stunden gearbeitet wird?
b) In 50 Tagen haben die Arbeiter den Betonteil fertig. Wie hoch ist er geworden?

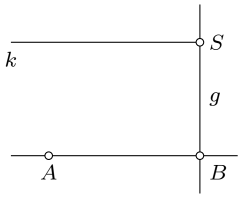
a) An einem Tag wächst der Betonteil um 1,65 m.
b) Der Teil wird 82,50 m hoch.

Aufgabe 3
Für eine Fahrt zwischen dem Betonwerk und der Baustelle benötigt ein LKW 38 min. Das Entladen dauert 16 min.
Um welche Zeit beginnt der LKW seine zweite Fahrt im Betonwerk, wenn die erste um 7.16 Uhr begonnen wurde und das Beladen im Betonwerk 13 min dauert?

Der LKW beginnt seine zweite Fahrt um 9.01 Uhr.

Aufgabe 4
Zeichne eine beliebige Strecke $\overline{AB}$ und lege den Punkt S fest, der nicht auf $\overline{AB}$ liegt!
a) Zeichne von S aus einen Strahl k, der die gleiche Richtung wie $\overline{AB}$ hat!
b) Zeichne durch S eine Gerade g, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht!

Beispiel:



13.9.2 2. Runde 1971, Klasse 4

Aufgabe 1
Auf der ”Fischerinsel” in Berlin sind schon 4 Hochhäuser fertig. In jedem dieser Hochhäuser wohnen in 20 Stockwerken mit jeweils 20 Wohnungen etwa 940 Menschen:
a) Wieviel Wohnungen sind in den 4 Hochhäusern jetzt schon bewohnt?
b) Wieviel Menschen ungefähr werden dort wohnen können, sobald das fünfte Hochhaus fertig sein wird?

a) Es sind schon 1600 Wohnungen bewohnt.
b) Ungefähr 4700 Menschen werden dort wohnen.

Aufgabe 2
Addierst du zum Zehnfachen von x die Zahl 830, so erhältst du 1000. Wie heißt die Zahl x?

$x = 17$

13.10 10. Olympiade 1972

13.10.1 1. Runde 1972, Klasse 4

Aufgabe 1
An den Vorläufen auf der 100-m-Strecke starten jeweils 8 Sportlerinnen. Jeweils die beiden besten können am Endlauf teilnehmen.
Wieviel Sportlerinnen nahmen an den Vorläufen teil, wenn 8 von ihnen den Endlauf bestreiten?

$8 : 2 = 4$; $4 \cdot 8 = 32$. An den Vorläufen nahmen 32 Läuferinnen teil.

Aufgabe 2
Eine Runde für die Läufer in einem Stadion ist 400 m lang. Berechne, wieviel Runden die Läufer bei den unten angegebenen Laufstrecken zurücklegen müssen! Sind es mehr als eine Runde oder mehr als mehrere volle Runden, so gib auch die restlichen Meter an für:
a) den 800-m-Lauf; b) den 1500-m-Lauf; c) den 3000-m-Hindernislauf;
d) den 5000-m-Lauf; e) den 10000-m-Lauf!

a) 800 : 400 = 2, 2 Runden
b) 1500 : 400 = 3 Rest 300, 3 Runden 300 m
c) 3000 : 400 = 7 Rest 200, 7 Runden und 200 m
d) 5000 : 400 = 12, Rest 200, 12 Runden und 200 m
e) 10000 : 4 = 25, 25 Runden

Aufgabe 3
Wie groß war ein Hochspringer, wenn er mit 2,24 m seine Körpergröße um 39 cm übersprang?

724 cm - 39 cm = 185 cm = 1,85 m; Der Hochsprungsieger war 1,85 m groß.

Aufgabe 4
Beim Biathlon müssen die Skiläufer 20 km weit laufen und unterwegs viermal schießen. Die Entfernung vom Start beträgt
bis zum ersten Schießplatz 23,6 km,
bis zum zweiten Schießplatz 8,5 km,
bis zum dritten Schießplatz 12,8 km,
bis zum vierten Schießplatz 17,4 km.

Zur Veranschaulichung der Laufstrecke zeichne folgendes Viereck!
Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ = 3,6 cm! Senkrecht zu $\overline{AB}$ zeichne von A aus die Strecke $\overline{AD}$ = 7,2 cm und senkrecht zu $\overline{AB}$ von B aus die Strecke $\overline{BC}$ = 4,9 cm! Jetzt verbinde die Punkte C und D durch eine Gerade!
a) Wie heißt das Viereck, das du gezeichnet hast?
b) Der Weg der Langläufer führt von A (Start) über B (erster Schießplatz) und C (zweiter Schießplatz), über D (dritter Schießplatz) nach A (Ziel) zurück. Der vierte Schießplatz ist nicht eingezeichnet.
Zeichne auf $\overline{AD}$ den Punkt P als Ort für den vierten Schießplatz ein, und gib die Länge der Strecke $\overline{AP}$ an!

a) Das Viereck heißt rechtwinkliges Trapez.
b) Die Strecke $\overline{AP}$ ist 2,6 cm lang oder: $\overline{AP}$ = 2,6 cm.

13.10.2 2. Runde 1972, Klasse 4

Aufgabe 1
In Mexiko siegte der Afrikaner Mamo Wolde in rund 2 h und 20 min beim Marathonlauf, der 42,195 km lang ist.
a) Gib den fünften Teil der Marathonstrecke an!
b) Wieviel Minuten benötigt der Sieger für den fünften Teil der Strecke? (Damit wir leichter rechnen können, nehmen wir an, dass er stets mit demselben Tempo lief.)

a) 42,195 : 5 = 8,439, Der fünfte Teil der Marathonstrecke beträgt 8,439 km.
b) 140 : 5 = 28. Der Sieger benötigte für den fünften Teil der Strecke 28 min.

Aufgabe 2
Bei der 7,5-km-Skistaffel erreichten bei den letzten Olympischen Winterspielen die vier DDR-Läufer folgende Zeiten:
der erste Läufer 36 min 48 s,
der zweite Läufer 36 min 22 s,
der dritte Läufer 35 min 25 s,
der vierte Läufer 33 min 21 s.
Gib die Gesamtzeit aller vier Läufer nach Stunden, Minute und Sekunden an!

140 min 116 s = 141 min 56 s = 2 h 21 min 56 s. Die Gesamtzeit aller Läufer beträgt 2 h 21 min 56 s.

13.11 11. Olympiade 1973

13.11.1 1. Runde 1973, Klasse 4

Aufgabe 1
In einem Berliner Stadtbezirk sollen 22436 Festivalgäste untergebracht werden, 18530 finden bei Familien und in Betrieben Quartier. Der Rest wird gleichmäßig auf 18 Schulen verteilt.
Wieviel Gäste werden in jeder der 18 Schulen untergebracht?

In jeder Schule werden 217 Gäste untergebracht.

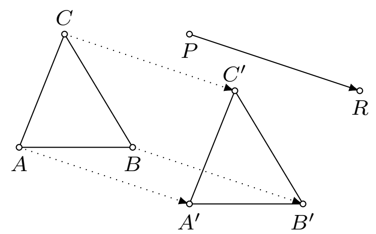
Aufgabe 2
a) $16883 - a < 16878$
b) Mit den Ziffern der errechneten Lösungsmenge bilde in umgekehrter Reihenfolge eine Zahl!
c) Dividiere diese Zahl durch 37.

a) $a = 0, 1, 2, 3, 4$; b) Die Zahl heißt 43210; c) $43210 : 37 = 1167$ Rest 3

Aufgabe 3
Um Geld für die X. Weltfestspiele spenden zu können, sammelten Jörg, Uwe und Rolf Flaschen. Zusammen erhielten sie 4,40 M. Uwe sammelte dreimal so viel Flaschen wie Jörg, und Rolf sammelte so viel wie Uwe und Jörg zusammen.
Wieviel Flaschen sammelte jeder der Jungen, wenn es für eine Flasche 5 Pf gab?

Jörg sammelte 171 Flaschen, Uwe 33 und Rolf 44.

Aufgabe 4
a) Zeichne etwa in die Mitte deiner Heftseite ein beliebiges Dreieck ABC.
b) Zeichne einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PR}$ (so dass du die Verschiebung in deinem Heft ausführen kannst) mit einer Verschiebungsweite von 3,5 cm!
c) Bestimme durch die Verschiebung $\overrightarrow{PR}$ das Bild des Dreiecks ABC, und bezeichne dessen Eckpunkte mit A', B' und C'.



13.11.2 2. Runde 1973, Klasse 4

Aufgabe 1
Vergrößere das 34 fache von 3715 um den achten Teil von 51400.

$3715 \cdot 34 = 126310$; $51400 : 8 = 6425$; $126310 + 6425 = 132735$

Aufgabe 2
Drei Klassen sammelten für die Weltfestspiele. Die Klasse 4a sammelte 33,75 M. Die Klasse 4b erreichte nur den dritten Teil des Betrages von Klasse 4a. Die Klasse 4c erreichte bisher das Vierfache des Betrages der Klasse 4b.
a) Wieviel Mark hat die Klasse 4c mehr gesammelt als die Klasse 4a?
b) Wieviel Mark sammelten die Klassen insgesamt?

a) Die Klasse 4c hat 1,25 Mark mehr als Klasse 4 gesammelt.
b) Insgesamt sammelten alle drei Klassen 90,- Mark.

13.12 12. Olympiade 1974

13.12.1 1. Runde 1974, Klasse 4

Aufgabe 1
In einer Straße haben auf der einen Seite die Hauseingänge Nummern mit ungeraden Zahlen. Die andere Straßenseite hat Hausnummern mit geraden Zahlen.
Ines und Gebhardt wohnen in einem langen Neubaublock. Dieser hat mehrere Eingänge. Sie haben die Nummern 9 bis 17.
Wieviel Wohnungen gibt es in diesem Neubaublock, wenn zu jedem Eingang 18 Wohnungen gehören?

Die Hausnummern sind 9, 11, 13, 15 und 17. Daraus folgt $5 \cdot 18 = 90$. In diesem Neubaublock gibt es 90 Wohnungen,

Aufgabe 2
Berechne die Summe $a + b : c$ für $a = 53732$, $b = 14019$, $c = 3$!

$53732 + 14019 : 3 = 53732 + 4673 = 58405$

Aufgabe 3

Berechne die fehlenden Ziffern!

$$\begin{array}{rr} & 62*43 \\ + & 3*7*86 \\ \hline & 945721 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 83269* \\ - & 809*1 \\ \hline & 551771 \end{array}$$

$628435 + 317286 = 945721$; $9832692 - 280921 = 551771$

Aufgabe 4
Denke genau nach! Du sollst einen Kreis zeichnen, dessen Durchmesser den siebenten Teil der Strecke $\overline{AB}$ beträgt! $\overline{AB} = 56$ cm.
Rechne und zeichne!

$56 : 7 : 2 = 4$. Der Radius des Kreises beträgt 4 cm.

13.12.2 2. Runde 1974, Klasse 4

Aufgabe 1
$a < b < c$ Schreibe diese Ungleichung mit folgenden Zahlen auf!
a ist der unmittelbare Vorgänger von b;
$b = 800000 : 2$
c ist der unmittelbare Nachfolger von b.

$b = 800000 : 2 = 400000$. Daraus folgt für $a < b < c$: $399999 < 400000 < 400001$

Aufgabe 2
Jedes der beiden Autos eines Betriebes vom "Wartburg"verbraucht für jeweils 100 km 9 l Benzin. Das eine fuhr 900 km.
Wieviel Kilometer fuhr das zweite Auto, wenn es 27 l Benzin weniger verbrauchte als das erste?

$27 : 9 = 3$ (Mit 27 l Benzin fährt das zweite Auto 300 km.)
$900 - 300 = 600$. Das zweite Auto fuhr 600 km.

13.13 13. Olympiade 1975

13.13.1 1. Runde 1975, Klasse 4

Aufgabe 1
Rechen im Kopf:
5627895 + 6; 10001 - 9; 332 + 407; 105 - 96; $5 \cdot 25$; 78 : 3

5627901; 9992; 739; 9; 125; 26

Aufgabe 2
Löse die Ungleichungen:

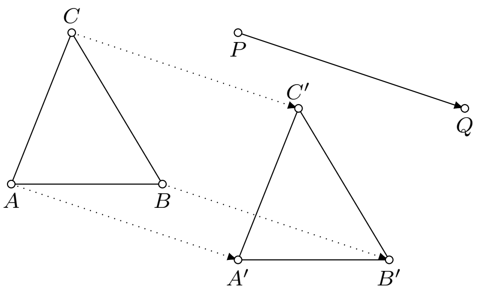
$$\begin{array}{lll} 17997 < a < 18003 & 100003 - d > 99998 & 409002 > b > 408998 \\ 83 < 28 \cdot x < 141 & 632589 + c < 632593 & 74 > 657 : y > 64 \end{array}$$

$a = 17998, 17999, 18000, 18001, 18002$; $b = 409001, 409000, 408999$, $c = 0, 1, 2, 3$, $d =$ 0,1,2,3,4,
$x =$ 3,4,5, $y = 9$

Aufgabe 3
Addiere zum Quotienten von 900536 und 14 des Sechsfache von 5946.

900536 : 14 + 5946 $\cdot$ 6 = 100000

Aufgabe 4
Zeichne links auf der oberen Hälfte deiner Heftseite drei beliebige Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. (Abstand nicht kürzer als 2 cm). Dann verbinde die drei Punkte.
Nun zeichne einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ mit einer Verschiebungsweite von 3,5 cm (Richtungssinn von links oben nach rechts unten). Bestimme jetzt das Bild des Dreiecks $A'B'C'$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$.



13.13.2 2. Runde 1975, Klasse 4

Aufgabe 1
Das Fünfzehnfache einer Zahl ist größer als 299 und kleiner als 301.
a) Schreibe die Angaben als Ungleichung.
b) Wie heißt die gesuchte Zahl?

a) $299 < 15 \cdot x < 301$; b) $x = 20$, denn $20 \cdot 15 = 300$ und $299 < 300 < 301$.

Aufgabe 2
In die DDR kamen 864 Komsomolzen. Die eine Hälfte beteiligte sich an einem Subbotnik für Chiles Patrioten. Die andere Hälfte half den FDJlern beim Anlegen von Spielplätzen und Grünflächen. Am nächsten Tag fuhren die sowjetischen Freunde in drei gleichstarken Gruppen in verschiedene Bezirke der DDR.
a) Wieviel Komsomolzen beteiligten sich am Subotnik ?
b) Wieviel Komsomolzen gehörten zu jeder der drei Gruppen ?

a) $864 : 2 = 432$. Am Subbotnik beteiligten sich 432 Komsomolzen.
b) $864 : 3 = 288$. Zu jeder der drei Gruppen gehörten 288 Komsomolzen.

13.14 14. Olympiade 1976

13.14.1 1. Runde 1976, Klasse 4

Aufgabe 1
Drei Jugendbrigaden rechnen die Werte ab, die sie über den Plan hinaus geschafft haben:
Die Brigade "Ernst Thälmann" erwirtschaftete Material in einem Wert von 14800 Mark und sparte durch Neuerervorschläge 20300 Mark ein.
Die Brigade "Juri Gagarin" erarbeitete durch Arbeitseinsätze 7400 Mark und durch Anwendung guter Erfahrungen noch das Vierfache des Betrages dazu.
Die Brigade "VIII. Parteitag" konnte durch Erfolge im Wettbewerb 19700 Mark und durch weitere Maßnahmen die Hälfte dieses Betrages abrechnen.
a) Welche Brigade erreichte den höchsten Betrag?
b) Wieviel Mark betrug der Wert, den diese Jugendbrigaden über den Plan hinaus geschafft haben?

"E.Th.": $14800 + 20300 = 35100$
"J.G.": $7400 \cdot 5 = 37000$
"VIII.P.": $19700 : 2 = 9850$; $9850 + 19700 = 29550$
Die Brigade "Juri Gagarin" erreicht den höchsten Betrag.

Aufgabe 2
Subtrahiere vom Produkt der Zahlen 70 und 8 die Zahl 200.

$70 \cdot 8 = 560$; $560 + 200 = 760$

Aufgabe 3
Berechne die fehlenden Zahlen.

a)

a	b	$a \cdot b$
80000	20000	
90000		0
40000 40000		

b)

$a + 10$	a	$a - 10$
	5005	
	3100	
	6000	

a)

a	b	$a - b$
80000	20000	60000
90000	90000	0
40000 40000	0	

b)

$a + 10$	a	$a - 10$
5015	5005	4995
3110	3100	3090
6010	6000	5990

Aufgabe 4
Zeichne zwei Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt M. Der Radius des einen Kreises soll 3 cm lang sein. Der Radius des anderen Kreises ist ein Zentimeter länger.

Kreise mit den Radien 3 cm und 4 cm.

13.14.2 2. Runde 1976, Klasse 4

Aufgabe 1
a) Wende das schriftliche Verfahren an. $42938 + 89209$; $66728 + 28908$
b) Wende das schriftliche Verfahren an. $65308 - 22536$; $33617 - 28908$

a) 132147; 95636   b) 42772; 18411

Aufgabe 2
Rechne um! 38000 m = ... km;   7,006 t = ... kg;   370 cm = ... m

38000 m = 38 km; 7,006 t = 7006 kg; 370 cm = 3,70 m

13.15 15. Olympiade 1977

13.15.1 1. Runde 1977, Klasse 4

Aufgabe 1
Rechne!
54786 + 5478 + 547864 + 547,   2380067 - 987654 - 98765 - 9876
$538 \cdot 9$,   742 : 7

608674;   1283772;   4842;   106

Aufgabe 2
Addiere zur Differenz der Zahlen 583876 und 97645 die Zahl 60.

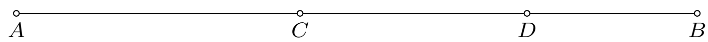
583876 - 97645 = 486231; 486231 + 60 = 486291

Aufgabe 3
Magdeburger Pioniere waren in Berlin, um einen Auftrag der Pionierstafette "Roter Oktober" zu erfüllen. In zwei Gruppen fahren sie wieder nach Hause.
Die Gruppe A fährt mit dem Städteexpress "Börde". Dieser fährt um 15.46 Uhr in Berlin ab und erreicht Magdeburg um 17.48 Uhr.
Die Gruppe B fährt mit dem Schnellzug. Der Schnellzug D 644 brauch für diese Strecke 2 h 21 min.
Wieviel Reisezeit weniger benötigen die Pioniere im Express "Börde" als die im Schnellzug?

Die Fahrzeit des Expresszuges beträgt 2 h 2 min. Die Gruppe A benötigt 19 min weniger Fahrzeit als die Gruppe B.

Aufgabe 4
Eine Strecke AB hat eine Länge $AB = 12$ cm. Auf AB liegen die Punkte C und D. Die Länge $AD = 9$ cm und die Länge $CB = 7$ cm. Zeichne. Bestimme die Länge der Strecke CD.

$CD = 4$ cm

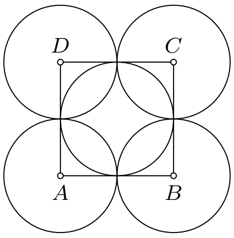


13.15.2 2. Runde 1977, Klasse 4

Aufgabe 1
Rechne!
2 km 730 m + 520 m;   3 t 650 kg - 760 kg;   6 m 283 mm + 940 mm

3 km 250 m; 2 t 890 kg; 7 m 223 mm

Aufgabe 2
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 4$ cm. Verbinde A mit C und B mit D. Zeichne um jeden Eckpunkt und den Schnittpunkt von AC mit BD einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ cm.



Aufgabe 3

a	b	$a \cdot b$
10	0	
90	3	
10		10000
	10	750

a	b	$a \cdot b$
10	0	0
90	3	270
10	1000	10000
75	10	750

13.16 16. Olympiade 1978

13.16.1 1. Runde 1978, Klasse 4

Aufgabe 1
Eine Pioniergruppe plant eine Wanderung. Auf der Karte im Maßstab 1 : 100000 ist der Wanderweg 18 cm lang. Wie lang ist der Wanderweg in Wirklichkeit?

Der Wanderweg ist 18 km lang.

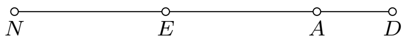
Aufgabe 2
Multipliziere 402 g mit 7. Gib das Produkt in Kilogramm an.

492 · 7 = 3444; 3444 g= 3,444 kg

Aufgabe 3
29404 + 738999 + 643 + 89; 7328406 - 339826 - 906 - 6046
807 · 8; 3476 · 7; 552 : 6

769140; 6981628; 6456; 24332; 92

Aufgabe 4
Zeichne einer Gerade g. Lege auf g eine Strecke ED fest.
Gib einen Punkt A an, der zwischen E und D liegt. Gib einen Punkt N an, der nicht zwischen E und D liegt.



Aufgabe 5
Was ist schwerer, eine Tonne Kies oder eine Tonne Heu?

Beide Massen sind gleich.

Aufgabe 6
Bestimme die Zahlen x, für die gilt: 76998 > x > 77001.

$x = 76999, 77000$

13.16.2 2. Runde 1978, Klasse 4

Aufgabe 1
Bestimme die kleinste Zahl x, für die gilt: 13575 < x < 13598.

Die kleinste Zahl x, die die Ungleichung erfüllt, heißt 13776.

Aufgabe 2
433 t = ... kg; 3,06 km = ... m; 3700 m = ... km

433 t = 433000 kg; 3,06 km = 3060 m; 3700 m = 3,700 km

Aufgabe 3
Ein Radfahrer und ein Motorradfahrer fahren zwischen Stralsund und Rostock einander entgegen und treffen sich.
Welcher von beiden ist beim Treffen weiter von Rostock entfernt?

Beide sind von Rostock gleich weit entfernt.

Aufgabe 4

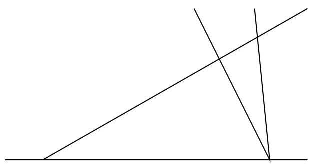
a	b	$a:b$
10000	100	
1000		1000
	20	5
	5	2

a	b	$a:b$
10000	100	10
1000	1	1000
100	20	5
10	5	2

Aufgabe 5
Wenn man von einer Zahl x das Produkt der Zahlen 20 und 8 subtrahiert, erhält man die Zahl 89.
Wie heißt die Zahl x?

Die Zahl x heißt 249.

Aufgabe 6
Zeichne vier Geraden so, dass zwei Dreiecke entstehen.

z.B. 

13.17 17. Olympiade 1979

13.17.1 1. Runde 1979, Klasse 4

Aufgabe 1
In einer Ausstellung zum 30. Jahrestag der Gründung der DDR werden in einer Viertelstunde 110 Besucher gezählt. Mit wieviel Besuchern kann man in einer Stunde rechnen?

Es kann mit 440 Besuchern in einer Stunde gerechnet werden.

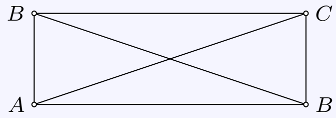
Aufgabe 2

a)	$3000 \cdot 5$	$7 \cdot 4088$
b)	$3000 : 5$	$1206 : 3$
c)	$72346 + 8406 + 68$	$22248 - 1086 - 346$

a) 15000, 28616; b) 600, 402; c) 80820, 20816

Aufgabe 3
Untersuche, ob im Rechteck $ABCD$ folgendes gilt; antwortete mit ja oder nein.

AB ist parallel zu CD	
AB ist parallel zu AD	
BC steht senkrecht auf AB	
BD steht senkrecht auf AC	



AB ist parallel zu CD ja; AB ist parallel zu AD: nein, BC steht senkrecht auf AB: ja, BD steht senkrecht auf AC: nein

Aufgabe 4
Rechne! $16 \cdot 16$; $68 \cdot 68$; $8 \cdot 8 \cdot 8$

256; 4624; 512

Aufgabe 5

a	$7 \cdot a$	$9 \cdot a$
19		
15		
	77	
0		

a	$7 \cdot a$	$9 \cdot a$
19	133	171
15	105	135
11	77	99
0	0	0

Aufgabe 6
Wieviel Minuten sind $70 \cdot 30$ min ? Rechne um in Stunden.
Wieviel Pfennige sind $87 \cdot 20$ Pf ? Rechne um in Mark.

2100 min = 35 Stunden; 1740 Pf = 17,40 M

13.17.2 2. Runde 1979, Klasse 4

Aufgabe 1
Welche Vielfachen von 100000 erfüllen die folgende Ungleichung ? $300000 < x < 800000$.

$x = 400000, 500000, 600000, 700000$

Aufgabe 2
Wieviel Sekunden sind 8 min; 12 min; 30 min ?
Wieviel Stunden sind 180 min; 420 min; 60 min ?

480 s; 720 s; 1800 s; 3 h; 7 h; 1 h

Aufgabe 3
Welches Ergebnis gehört zu welcher Aufgabe?

$63 \cdot 42$	$33 \cdot 18$	$19 \cdot 5$	$30 \cdot 7$
95	210	594	2646

$63 \cdot 42 = 2646$, $33 \cdot 18 = 594$, $19 \cdot 5 = 95$, $30 \cdot 7 = 210$

Aufgabe 4
Dividiere die Summe der Zahlen 2504 und 6078 durch 7!

$2504 + 6078 = 8582$; $8582 : 7 = 1226$

Aufgabe 5
Ein Stück Zaun wird erneuert. In regelmäßigen Abständen von 4 m wird je ein Pfosten gesetzt. Insgesamt werden 10 neue Pfosten gesetzt. Wie weit sind der erste und der zehnte Pfosten voneinander entfernt?

Die Pfosten sind 36 m voneinander entfernt.

13.18 18. Olympiade 1980

13.18.1 1. Runde 1980, Klasse 4

Aufgabe 1
Bei jedem Vorlauf über 100 m starten 8 Sportlerinnen. Die beiden besten Läuferinnen werden am Endlauf teilnehmen. Wieviel Sportlerinnen nahmen an den Vorläufen teil, wenn 8 von ihnen den Endlauf bestreiten.

Anzahl der Vorläufe: $8 : 2 = 4$, Ermittlung der Anzahl der an den Vorläufen Sportlerinnen: $4 \cdot 8 = 32$.

Aufgabe 2
Berechnen die Summe aus 185 und 307. Um wieviel ist 583 größer?

$185 + 307 = 492$; $583 - 492 = 91$

Aufgabe 3
Löse die Gleichungen. $531 + 882 + a = 1740$; $2444 - 2080 - f = 18$

$531 + 882 + a = 1740 \to a = 327$; $2444 - 2080 - f = 18 \to f = 346$

Aufgabe 4
Ordne die Produkte der Größe nach. $27 \cdot 4$; $52 \cdot 6$; $17 \cdot 0$; $81 \cdot 3$

$27 \cdot 4 = 108$; $52 \cdot 6 = 312$; $17 \cdot 0 = 0$; $81 \cdot 3 = 243$
Ordnen der Größe nach: 0; 108; 243; 312

Aufgabe 5
An einigen Gebäuden in Berlin findet man römische Zahlzeichen. Sie geben an, wann die Gebäude errichtet worden sind. Welche Jahrezahlen werden angegeben?

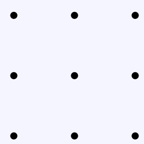
Museum für Deutsche Geschichte	MDCCVI
Deutsche Staatsoper	MDCCXLIII
Deutsche Staatsbibliothek	MCMXIII

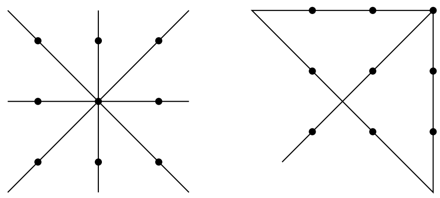
Museum für Deutsche Geschichte: 1706; Deutsche Staatsoper: 1743; Deutsche Staatsbibliothek: 1913

Aufgabe 6
Wie lang sind die folgenden auf einer Karte im Maßstab 1 : 100000 gezeichneten Strecken in Wirklichkeit?
1 cm; 35 cm; 10 cm

1 km; 35 km; 10 km

Aufgabe 7
Zeichne vier Geraden so, dass jeder Punkt des folgenden Bildes auf mindestens einer dieser Geraden liegt und keine der Geraden zu einer anderen parallel ist.





oder ähnliche Lösungen

13.18.2 2. Runde 1980, Klasse 4

Aufgabe 1

$48756 - 3382 - 214 \qquad 15326 + 2809 + 707$
$9 \cdot 2085 \qquad 59105 : 9$

$48756 - 3382 - 214 = 45160$; $15326 + 2809 + 707 = 18842$; $9 \cdot 2085 = 18765$; $59105 : 9 = 6567$

Aufgabe 2
Welche Zahlen erfüllen folgende Gleichungen?

$$540 + x = 700$$
$$5400 + x = 7000$$
$$54000 + x = 70000$$
$$540000 + x = 700000$$

160; 1600; 16000; 160000

Aufgabe 3

a	b	c	$a * (b + c)$	$a : (b - c)$
240000	5	3		
56000	3	5		
60000	5	5		

a	b	c	$a * (b + c)$	$a : (b - c)$
240000	5	3	30000	120000
56000	3	5	7000	n.l.
60000	5	5	6000	n.l.

Aufgabe 4
a) Rechne um in Minuten: 2 h; 240 s; 360 s
Rechne um in Sekunden: 3 min; 10 min; 5 h
b) Gib das Dreißigfache an: 7 M; 8 dt; 5 t

a) 120 min, 4 min, 6 min; 180 s, 600 s, 18000 s; b) 210 M, 240 dt, 150 t

Aufgabe 5
Addiere zum Produkt aus 7 und 28976 der Zahl 84567.

$28976 \cdot 7 = 202832$; $202832 + 84567 = 287399$

Aufgabe 6
Ein "Wartburg" fährt von A nach B, ein "Trabant" von B nach A. Welcher der beiden ist weiter von A entfernt, wenn sich beide begegnen?

Beide Wagen sind von A gleich weit entfernt.

13.19 19. Olympiade 1981

13.19.1 1. Runde 1981, Klasse 4

Aufgabe 1
Im Rahmen des Auftrages "Pioniersignal - X. Parteitag" leisten die beiden 4. Klassen der Friedrich-Engels-Oberschule Tinur-Hilfe. In der Klasse 4 a sind es 17 Thälmannpioniere. Das sind 7 Thälmannpioniere mehr als die Hälfte der Schüler, die sich aus der Klasse 4 b beteiligten.
Wieviel Thälmannpioniere der Klasse 4 b leisten Timur-Hilfe?

Hälfte der Timur-Helfer aus Klasse 4 b: 17 - 7 = 10, Anzahl der Schüler: $10 \cdot 2 = 20$
In der Klasse 4b leisten 20 Thälmannpioniere Timur-Hilfe.

Aufgabe 2
a) $307536 + 63001 + 286 + 4028$
b) $8726 - 1503 - 826$
c) $3063 \cdot 735$
d) $50463 : 7$

a) 374851; b) 6397; c) 2251305; d) 7209

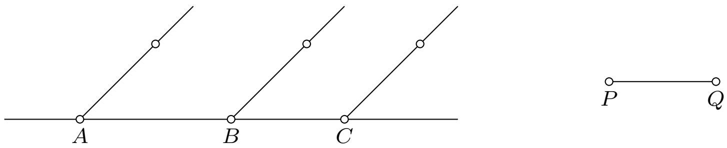
Aufgabe 3
a) 8 min = ... s, 150 min = ... h ... min, 6 cm = ... mm, 5 km = ... m
b) Gibt den zehnten Teil an: 5 M, 3 kg, 4 cm

a) 8 min = 480 s, 150 min = 2 h 30 min, 6 cm = 60 mm, 5 km = 5000 m
b) 50 Pf, 300 g, 4 mm

Aufgabe 4
Wie groß ist die Summe, wenn der eine Summand 1360 und der andere das 50fache dieser Zahl ist?

$1360 \cdot 50 = 68000$; $68000 + 1360 = 69360$

Aufgabe 5
Zeichne drei Punkte A, B und C, die auf ein und derselben Geraden liegen. Zeichen eine Strecke $\overline{PQ}$. Zeichen von A, B und C Strahlen, die parallel zueinander sind.
Trage auf diesen Strahlen von ihren Anfangspunkten aus die Strecke $\overline{PQ}$ ab.



13.19.2 2. Runde 1981, Klasse 4

Aufgabe 1

a	b	c	$a \cdot b + c$	$a \cdot b - c$	$a + b \cdot c$
500	3	100			
15000	7	10000			

a	b	c	$a \cdot b + c$	$a \cdot b - c$	$a + b \cdot c$
500	3	100	1600	1400	800
15000	7	10000	115000	95000	85000

Aufgabe 2
Löse die Gleichungen.

$$6538 + 1603 + x = 14000 \qquad y - 835 - 642 = 526$$

$x = 5859$; $y = 2003$

Aufgabe 3
Runde auf Kilogramm! 3,085 kg, 5,750 kg, 1380 g

3 kg; 6 kg; 1 kg

Aufgabe 4
Ermittle jeweils die kleinste und die größte Zahl, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.
a) $100000 < x < 1000000$
b) $345000 < y < 445000$
c) $270000 < a < 720000$

a) $x = 100001; x = 999999$, b) $x = 345001; x = 444999$, c) $x = 270001; x = 719999$

Aufgabe 5
An der Außenwand eines Schiffes hängt eine Leiter. Die unterste Sprosse berührt das Wasser. Die einzelnen Sprossen sind 20 cm voneinander entfernt. Nach wieviel Stunden erreicht das Wasser ide zweite Sprosse, wenn der Wasserspiegel in einer Stunde um 10 cm steigt?

Das Wasser erreicht die zweite Sprosse nie.

13.20 20. Olympiade 1982

13.20.1 1. Runde 1982, Klasse 4

Aufgabe 1

$67254720 + 6076564 + 150047 \quad 567846 - 228346 - 339500$
$437 \cdot 82 \quad 51381 : 9$

$67254720 + 6076564 + 150047 = 73481331$; $567846 - 228346 - 339500 = 0$; $437 \cdot 82 = 35834$; $51381 : 9 = 5709$

Aufgabe 2

$625 - x = 0 \quad 300 : b = 1 \quad 1000 - a = 1 \quad 52 + 0 = k$

$x = 625$; $b = 300$; $a = 999$; $k = 52$

Aufgabe 3
Vermehre 1000 um 90. Vermindere 1000 um 90. Teile 240 in sechs gleiche Teile. Vergrößere 7000 um 3000.

1090; 910; 40; 10000

Aufgabe 4

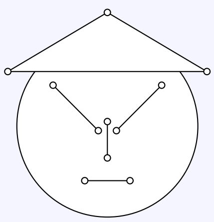
180 s = ... min 48 h = ... Tage 3 Wochen = ... Tage 4 h = ... min

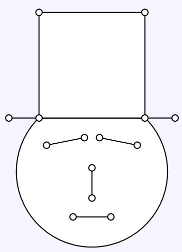
180 s = 3 min; 48 h = 2 Tage; 3 Wochen = 21 Tage; 4 h = 240 min

Aufgabe 5
Auf eine Karte im Maßstab 1:100000 wurden folgende Strecken gemessen: 3 cm, 7 cm und 10 cm. Wie lang sind diese Strecken in Wirklichkeit?

30 km, 70 km, 100 km

Aufgabe 6
Stelle fest, wieviel durch markierte Eckpunkte begrenzte Strecken die Figur a) und die Figur b) enthält.


a)


b)

20 Strecken (a: 7 Strecken, b: 13 Strecken)

Aufgabe 7
Michael sagt: "Ich denke mir eine Zahl. Sie ist der Vorgänger der kleinsten Zahl, die mit 6 gleichen Grundziffern geschrieben wird." Welche Zahl ist das ?

111110

Aufgabe 8
Die Pioniere und die Mitglieder der FDJ einer Oberschule wollen dazu beitragen, des VII. Pioniertreffen in Dresden zu finanzieren. Zu diesem Zwecke sammelten sie Sekundärrohstoffe. Bisher bekamen sie folgende Beträge: 45 Mark, 33 Mark, 121 Mark, 67 Mark.

a) Für wieviel Mark müssen die Pioniere und Mitglieder der FDJ noch Sekundärrohstoffe sammeln, damit sie den Betrag von 300 Mark für das VII. Pioniertreffen überweisen können?
b) Pioniere und Mitglieder der FDJ werden zu gleichen Teilen für die Restbetrag Sekundärrohstoffe sammeln. Wieviel Mark müssen dann von jeder Organisation überweisen werden?

a) Die Pioniere und Mitglieder der FDJ müssen noch für 34 Mark Sekundärrohstoffe sammeln.
b) Jede Organisation überweist 17 Mark.

13.20.2 2. Runde 1982, Klasse 4

Aufgabe 1
a) Runde auf Vielfaches von 10: 3512; 4548; 80
a) Runde auf Vielfaches von 1000: 3827; 693; 38516

a) 3510, 4550, 80; b) 4000, 1000, 39000

Aufgabe 2
Vergleiche folgende Zahlen:

$$4756 \text{ und } 397600 \qquad 493567 \text{ und } 492578 \qquad 69374 \text{ und } 69396$$

$4756 < 397600$; $493567 > 492578$; $69374 < 69396$

Aufgabe 3

$$(6789 - 4318) : 7 \quad (4 \cdot 10) : 5$$
$$(7 + 3) \cdot (19 + 8) \quad 4 \cdot (10 : 5)$$

$(6789 - 4318) : 7 = 353$; $(4 \cdot 10) : 5 = 8$; $(7 + 3) \cdot (19 + 8) = 270$; $4 \cdot (10 : 5) = 8$

Aufgabe 4
Löse die folgenden Gleichungen.

$$5 \cdot x = 35000, \qquad x \cdot 9 = 630000; \qquad 1 \cdot x = 93867$$

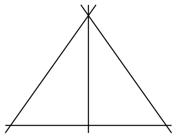
$x = 7000$, $x = 70000$, $x = 98867$

Aufgabe 5

a	b	c	$a \cdot c$	$b \cdot c$	$(a+b) \cdot c$
10	7	9			
9	25		36		
3	20	5			

a	b	c	$a \cdot c$	$b \cdot c$	$(a+b) \cdot c$
10	7	9	90	63	153
9	25	4	36	100	136
3	20	5	15	100	115

Aufgabe 6
Zeichne 3 Geraden so, dass ein Dreieck entsteht.
Zeichen eine weitere Gerade so, dass 2 Dreiecke entstehen.



oder ähnlich

Aufgabe 7
Fünf Soldaten fangen gleichzeitig an, ihre Stiefel zu putzen. Ein Paar Stiefel säubern, einreiben und blank putzen dauert genau 12 Minuten.
Wann sind alle Soldaten mit dem Stiefelputzen fertig?

Nach 12 Minuten

13.21 21. Olympiade 1983

13.21.1 1. Runde 1983, Klasse 4

Aufgabe 1
a) 4287886 + 43087 + 2086 + 4028
b) 728021 - 3246 - 4666 - 50739
c) $2065 \cdot 235$
d) 65277 : 9

a) 4337087; b) 669370; c) 485275; d) 7253

Aufgabe 2
Subtrahiere von 3182100 das Produkt der Zahlen 56823 und 56. Um wieviel ist die Differenz größer als 10?

$56823 \cdot 56 = 3182088$; $3182100 - 3182088 = 12$. Die Differenz ist um 2 größer als 10.

Aufgabe 3
Die Hortgruppe der Klasse 4a lieferte 348 Flaschen zu je 10 Pf., Schrott zu 9,80 M und Zeitungen ab. Die Sammlung dieser Sekundärrohstoffe brachte insgesamt 57,10 M ein. Wieviel Geld erhalten die Hortkinder für die Zeitungen?

Flaschen: $348 \cdot 0{,}10$ M = 34,80 M. 57,10 M - 34,80 M - 9,80 M = 12,50 M. Die Hortkinder erhielten 12,50 M für die Zeitungen.

Aufgabe 4
Löse die Gleichungen.
a) $200 \cdot x = 5000$
b) $y \cdot 90 = 4500$
c) $70 \cdot \mathrm{v} = 2800$
d) $w \cdot 400 = 32000$

a) 25; b) 50; c) 40; d) 80

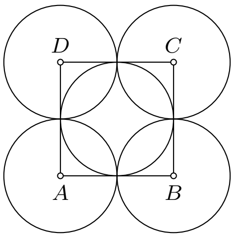
Aufgabe 5
Vergleiche die Produkte
a) $7 \cdot 19$ ... $3 \cdot 19$
b) $11 \cdot 13$ ... $13 \cdot 11$
c) $60 \cdot 50$ ... $4 \cdot 500$

a) $7 \cdot 19 = 113 > 57 = 3 \cdot 19$; b) $11 \cdot 13 = 143 = 143 = 13 \cdot 11$; c) $60 \cdot 50 = 3000 > 2000 = 4 \cdot 500$

Aufgabe 6
Aus 30 g Blütennektar entstehen 10 g Bienenhonig. Wieviel Gramm Blütennektar sind für 1 kg Bienenhonig notwendig?

1 kg = 1000 g; 1000 : 10 = 100; 30 g · 100 = 3000 g. Aus 3000 g Blütennektar werden 1 kg Bienenhonig.

Aufgabe 7
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 4$ cm. Verbinde A mit C und B mit D. Zeichne um jeden Eckpunkt und dem Schnittpunkt von AC und BD einen Kreise mit dem Radius $r = 2$ cm.



13.21.2 2. Runde 1983, Klasse 4

Aufgabe 1
Rechne!
2 km 730 m + 520 m, 3 t 650 kg - 760 kg, 6 m 283 mm + 940 mm

2 km 730 m + 520 m = 3 km 250 m, 3 t 650 kg - 760 kg = 2 t 890 kg, 6 m 283 mm + 940 mm = 7 m 223 mm

Aufgabe 2
Löse folgende Gleichungen:
a) $4 \cdot y = 3924$; b) $w \cdot 6 = 2814$; c) $t : 3 = 2109$

$y = 981$; $w = 469$; $t = 6327$

Aufgabe 3
Vervollständige die Tabelle.

e	Nachfolger von e	Vorgänger von e	Nachfolger des Doppelten von e	Doppeltes des Nachfolgers von e
100				
		204		
	18			

e	Nachfolger von e	Vorgänger von e	Nachfolger des Doppelten von e	Doppeltes des Nachfolgers von e
100	101	99	201	202
205	206	204	411	412
17	18	16	35	36

Aufgabe 4
Rechne in die nächstkleinere Einheit um!
4 km; 7 kg; 8 min; 5 cm

4000 m; 7000 g, 480 s, 50 mm

Aufgabe 5
Bilde Gleichungen, die die Lösung 12, 800, 2400, 460 haben.

z.B. $a + 3 = 15$; $8 \cdot 100 = b$; $3000 - c = 600$; $920 : d = 2$

Aufgabe 6
Runde auf Vielfaches von 10!
4548, 1004, 3822, 6396, 791

4550, 1000, 3820, 6400, 790

Aufgabe 7
Ein Tier hat zwei rechte und zwei linke Beine, zwei Beine vorn und zwei hinten.
Wieviel Beine hat es ?

Das Tier hat 4 Beine.

13.22 22. Olympiade 1984

13.22.1 1. Runde 1984, Klasse 4

Aufgabe 1
Vergleiche! a) $x = 7, y = 0$, b) $x = 17, y = 17$, c) $x = 83, y = 38$

a) $x > y$ (oder $7 > 0$); b) $x = y$ (oder $17 = 17$); c) $x > y$ (oder $83 > 38$)

Aufgabe 2
Gib für die folgende Additionsaufgabe eine Lösung an!

$$\begin{array}{r} \text{VATER} \\ +\ \text{MUTTER} \\ \hline \text{ELTERN} \end{array}$$

Versuche es, indem du z, B, die Zahl 4 einsetzt! Gibt es noch andere Lösungen? Wenn ja, gib diese an!

Lösungen sind z.B.
$59624 + 16624 = 236248$; $60249 + 352249 = 412498$;
$20374 + 693374 = 713748$; $89625 + 146625 = 236250$.

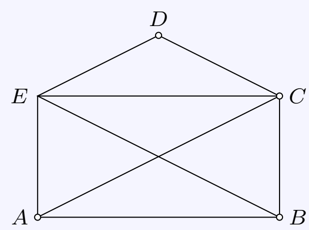
Aufgabe 3
Die Mathematik ist nicht immer so ernst:
Welche Begriffe (ihr kennt sie alle) können durch folgende Umschreibung erklärt werden?
a) Wie nennt man ein Dreieck, dem man eine Seite weggenommen hat?
b) Wie nennt man einen Winkel, dem man beide Schenkel ausgerissen hat?
c) Was bleibt übrig, wenn man dem Dreieck das Ei wegnimmt?

a) Winkel; b) Punkt; c) Dreck

Aufgabe 4
Eine Schnecke kriecht an einem Tag 70 cm an einer Mauer hinauf und nachts 30 cm hinunter.
Nach wieviel Tagen hat die Schnecke die Mauerhöhe von 3,90 m erreicht?

Nach 9 Tagen hat die Schnecke eine Höhe von 3,90 m erreicht. Hier muss beachtet werden, dass die Schnecke die genannte Höhe am 9. Tag erreicht hat, auch wenn sie danach wieder nach unten kriecht.

Aufgabe 5
Untersuche, ob in der angegebenen Figur folgendes gilt, und antworte mit ja oder nein.
a) $\overline{AE}$ parallel $\overline{CD}$
b) $\overline{AC}$ senkrecht $\overline{AB}$
c) $\overline{BC}$ senkrecht $\overline{CE}$
d) $\overline{DC}$ parallel $\overline{EC}$
e) $\overline{EC}$ parallel $\overline{AB}$
f) $\overline{EC}$ senkrecht $\overline{CB}$



a) nein; b) nein; c) ja; d) nein; e) ja; f) ja

Aufgabe 6
Drei Autos fahren von Berlin nach Halle, Sie benutzen dieselben Straßen und fahren zur gleichen Zeit ab. Der Trabant fährt in 10 Minuten 12 km; der Lada in 15 Minuten 20 km und der Wartburg in 20 Minuten 25 km. Die Fahrzeuge verändern vom Start an ihre Geschwindigkeit nicht.
Welchen Abstand haben sie nach einer Stunde?

Der Wartburg fährt in einer Stunde 75 km, der Trabant fährt in einer Stunde 72 km; der Lada fährt in einer Stunde 80 km.
Der Abstand (nach einer Stunde) beträgt: Von Wartburg zu Trabant 3 km; von Wartburg zu Lada 5 km; von Trabant zu Lada 8 km.

13.22.2 2. Runde 1984, Klasse 4

Aufgabe 1
a) Die Zahlen 0, 1, 2, ..., 10 erfüllen die Ungleichung.
b) 11 erfüllt die Ungleichung.
c) Alle Zahlen, die größer als 36 sind, erfüllen die Ungleichung.

Welche Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $2 + x < 13$; b) $12 < x + 2 < 14$; c) $x - 31 > 5$

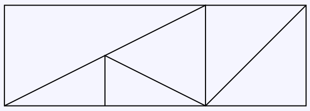
Aufgabe 2
Von Moskau nach Kiew fliegt ein Flugzeug 70 Minuten. Der Zug fährt 15 Stunden und 40 Minuten (von Moskau nach Kiew).
Wieviel Minuten benötigt ein Reisender mehr, wenn er nicht das Flugzeug, sondern den Zug benutzt? Gib diese Zeit auch in Stunden und Minuten an!

Der Reisende benötigt 870 Minuten mehr, wenn er nicht mit dem Flugzeug, sondern mit dem Zug fährt. Das sind 14 Stunden und 30 Minuten.

Aufgabe 3
Eine Flasche mit Korken kostet 1,10 M. Die Masche ist eine Mark teurer als der Korken,
Wieviel kostet die Flasche und wieviel der Korken?

Die Flasche kostet 1,05 M, der Korken 0,05 M.

Aufgabe 4
Wieviel Dreiecke gibt es in dieser Abbildung?



Acht Dreiecke

Aufgabe 5
Vervollständige folgende Tabelle!

a	Nachfolger von a	Vorgänger des des Nachfolgers von a	Vorgänger von a
27			
83			
1			

27	28	27	26
83	84	83	82
1	2	1	0

Aufgabe 6
Peter, Jürgen, Frank und Michael bestreiten ein Schachturnier. Peter gewinnt gegen Jürgen, Frank verliert gegen Peter, Michael gewinnt gegen Peter.
Welches Ergebnis wird erzielt, wenn Michael und Frank gegeneinander spielen?

Natürlich kann man dieses Ergebnis nicht voraussagen.

13.23 23. Olympiade 1985

13.23.1 1. Runde 1985, Klasse 4

Aufgabe 1
Welche Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $x + 3 < 10$; b) $43 < 5x < 68$; c) $37 > 3x + 27 > 34$

a) $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; b) $x = 9, 10, 11, 12, 13$; c) $x = 3$

Aufgabe 2
Bei einem Pioniermanöver wird durch den Manöverstab eine Geheimschrift festgelegt. Dazu werden alle Buchstaben des Alphabets nach einer besonderen Vorschrift durch natürliche Zahlen dargestellt. Dabei werden B durch 4, C durch 6, E durch 10 und N durch 28 ersetzt.
Durch die Teilnehmer soll das Wort 12 36 18 10 8 10 28 entziffert werden.
Überlege, nach welcher Vorschrift die Buchstaben dargestellt wurden, und entziffere das Wort!

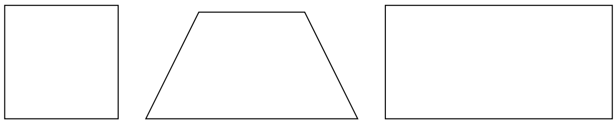
Das Wort bedeutet: FRIEDEN
Die Vorschrift könnte etwa so angegeben werden:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \end{array}$$

oder in ähnlicher Art

Aufgabe 3
Konstruiere je ein Trapez mit zwei gleich langen, drei gleich langen und vier gleich langen Seiten!

Eine mögliche Lösung ist: vier gleich lange Seiten (Quadrat); drei gleich lange Seiten; zwei gleich lange Seiten (Rechteck).



Aufgabe 4
Die Zeiger einer Uhr zeigen die Zeit 14.15 Uhr an.
Wie oft überstreichen sich die beiden Zeiger bis 15.00 Uhr? Wie oft stehen in diesen 45 Minuten die Zeiger senkrecht aufeinander?

Die Zeiger überstreichen sich in dieser Zeit nicht. Zweimal stehen die Zeiger senkrecht aufeinander.

Aufgabe 5
Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach, obwohl einige Grundziffern (*) unlesbar sind.
344*0; *9*; ***1; 83; 1000; 354*1

$83 < *9* < 1000 < ***1;\qquad 344*0 < 354*1$

Aufgabe 6

a	b	$3a$	Nachfolger von $a+b$
7	1000		
	3	15	
		9	10

a	b	$3a$	Nachfolger von $a+b$
7	1000	21	1008
5	3	15	9
3	6	9	10

13.23.2 2. Runde 1985, Klasse 4

Aufgabe 1
Von einer dreistelligen natürlichen Zahl ist bekannt, dass sie gerade ist, die letzte Ziffer um zwei kleiner ist als die mittlere Ziffer und diese halb so groß wie die erste Ziffer.
Ermittle solche Zahlen!

420; 842

Aufgabe 2
Welche natürliche Zahlen x erfüllen die folgenden Ungleichungen?
a) $x - 3 < 5$; b) $114 > 99 + x > 108$; c) $0 < 3x < 12$

a) $x = 3, 4, 5, 6, 7$; b) $x = 10, 11, 12, 13, 14$; c) $x = 1, 2, 3$

Aufgabe 3
Klaus hat 4 verschiedene Schlüssel für 4 verschiedene Schlösser seiner Schubfächer. Er weiß, dass er jeweils mit einem bestimmten Schlüssel auch nur ein Schloss öffnen kann.
Wie oft muss er im ungünstigsten Fall probieren, damit er für jedes Schloss den richtigen Schlüssel findet?

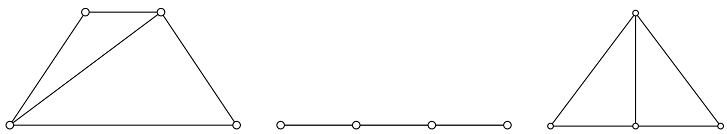
Er muss 10 (9) mal probieren. Hier kommt es darauf an, ob man für den letzten Schlüssel noch eine "Probeërlaubt.

Aufgabe 4
Die Pioniergruppe organisiert zum Gruppennachmittag eine Fischbörse. Thomas verschenkt an Katrin, Uwe und Horst junge Fische. Zuerst erhält jeder einen Fisch. Danach bekommt Katrin 7 Fische, Uwe 3 Fische und Horst 9 Fische von Thomas.
Plötzlich stellen alle Pioniere fest, dass jeder nun 30 Fische besitzt.
Wieviel Fische hatten Katrin, Uwe, Horst und Thomas vor der Börse in ihren Aquarien?

Thomas hatte 52 Fische; Katrin hatte 22 Fische ; Uwe hatte 26 Fische; Horst hatte 20 Fische

Aufgabe 5
Durch 4 verschiedene Punkte A, B, C, D sind Geraden zu zeichnen. Dabei sollen zwei der Punkte auf einer Geraden liegen.
Fertige eine Skizze an! Was muss beachtet werden?

Mögliche Lösungen sind:



Aufgabe 6
Für eine Gruppenfahrt plant die Pioniergruppe (25 Pioniere), 265,- M auszugeben. Davon bezahlt der Pionierleiter 40,- M.
Wieviel muss von jedem Pionier der Gruppe bezahlt werden?

Von jedem Pionier müssen 9,- M bezahlt werden.

13.24 24. Olympiade 1986

13.24.1 1. Runde 1986, Klasse 4

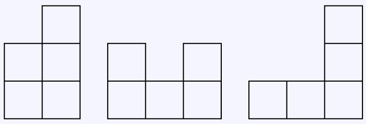
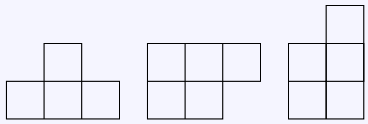
Aufgabe 1
Bernd macht das Sammeln von Sportlerfotos viel Spaß. Er sagt zu seinem Freund Ingo: "Wenn ich die Hälfte meiner Fotos verschenke, von der verbliebenen Hälfte wieder die Hälfte verschenke und vom Rest nochmals die Hälfte, könnte ich dir höchstens 4 Bilder zeigen."
Wieviel Fotos gehören Bernd?

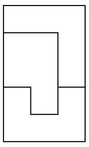
Bernd könnte noch 4 Fotos zeigen, dann gehören ihm insgesamt 32 Fotos. Bernd könnte noch 3 Fotos zeigen, dann gehören ihm insgesamt 24 Fotos. Bernd könnte noch 2 Fotos zeigen, dann gehören ihm insgesamt 16 Fotos. Bernd hätte noch 1 Foto, dann gehören ihm insgesamt 8 Fotos. Bernd bat also mindestens 8, aber höchstens 32 Fotos.

Aufgabe 2
Tanja denkt sich eine Zahl, verdreifacht sie und addiert 25, Ihr Ergebnis lautet 40.
Welche Zahl hat sich Tanja gedacht? Stelle für diesen Rechenweg eine Gleichung auf!

Die gedachte Zahl heißt 5, denn $a \cdot 3 + 25 = 40$.

Aufgabe 3
Kann man aus den abgebildeten Figuren jeweils ein Rechteck zusammensetzen? Zeichne die gefundenen Lösungen auf!

a)  b) 

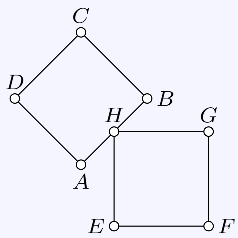
a)  b) nicht möglich

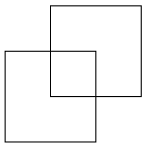
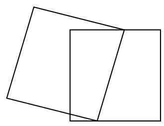
Aufgabe 4
Ermittle alle Zahlen x, die durch 5 teilbar sind und für die gilt: $12 < x < 33$!

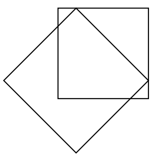
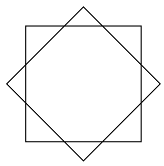
$x = 15, 20, 25, 30$

Aufgabe 5

Zwei gleich große Quadrate haben einen gemeinsamen Punkt.
Zeichne die beiden Vierecke so, dass sie zwei gemeinsame Punkte, drei gemeinsame Punkte, vier gemeinsame Punkt, acht gemeinsame Punkte haben!



Zwei gemeinsame Punkte  Drei gemeinsame Punkte 

Vier gemeinsame Punkte  Acht gemeinsame Punkte 

Aufgabe 6
Fülle die Kästchen so mit Grundziffern aus, dass alle Rechnungen stimmen!

$$\begin{array}{ccccccc}
10 & : & 2 & + & \square & = & 9 \\
+ & & + & & + & & + \\
14 & : & 2 & - & \square & = & 3 \\
+ & & + & & + & & + \\
\square & - & \square & - & 2 & = & 7 \\
\hline
36 & - & \square & - & 10 & = & 19
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
10 & : & 2 & + & 4 & = & 9 \\
+ & & + & & + & & + \\
14 & : & 2 & - & 4 & = & 3 \\
+ & & + & & + & & + \\
12 & - & 3 & - & 2 & = & 7 \\
\hline
36 & - & 7 & - & 10 & = & 19
\end{array}$$

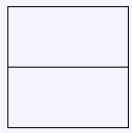
13.24.2 2. Runde 1986, Klasse 4

Aufgabe 1
Löse folgende Gleichungen!
a) $200 + x = 280$; c) $5b = 17$ b) $400 - b = 250$ d) $20 + c = 20$

a) $x = 80$; b) $b = 150$; c) nicht lösbar; d) $c = 0$

Aufgabe 2

Wieviel Vierecke, Trapeze und Quadrate erkennst du in der Abbildung?



Drei Vierecke, drei Trapeze und ein Quadrat.

Aufgabe 3
Karin, Tanja, Sven und Torsten vergleichen die Telefonnummern ihrer Eltern. Dabei stellen sie fest: Tanjas Telefonnummer enthält nur ungerade Zahlen; Svens Telefonnummer ist eine ungerade Zahl,und Torstens Telefonnummer ist die größte Zahl!
Welche der Telefonnummern 7 56 78, 7 53 19, 6 26 23 und 7 54 20 haben die Eltern der Kinder?

Name	Telefon-Nr.
Tanja	7 53 19
Sven	6 26 23
Torsten	7 56 78
Karin	7 54 20

Aufgabe 4
Ein 80 cm langer Kupferdraht soll in vier gleich lange Stücke zerschnitten werden.
Wieviel Schnitte sind dazu notwendig?

Es sind drei Schnitte notwendig.

Aufgabe 5
Ermittle alle Zahlenpaare $(a; b)$ für die gilt: $0 < a \cdot b < 5$

$$ds_{19} = (18)(27)$$

.

(1; 1), (2; 1), (3; 1), (1; 2), (2; 2), (4; 1), (1; 3), (1; 4)

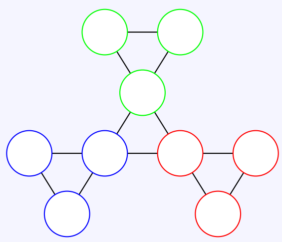
Aufgabe 6
Algen bedecken einen Teil der Scheibe eines Aquariums. Sie wachsen sehr schnell, und am nächsten Tag ist bereits die doppelte Fläche bewachsen. An jedem weiteren Tag verdoppelt sich die bewachsene Fläche. Am 5. Tag ist die Scheibe zur Hälfte zugewachsen.
Wann ist sie vollkommen mit Algen bedeckt?

Am 6. Tag.

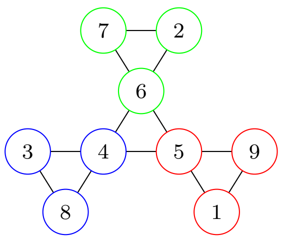
13.25 25. Olympiade 1987

13.25.1 1. Runde 1987, Klasse 4

Aufgabe 1
Trage in das Schema die Zahlen von 1 bis 9 so ein, das die Summen der drei Zahlen in den Ecken des roten, blauen und grünen Dreiecks jeweils gleich groß sind.



Eine Lösung ist zum Beispiel:

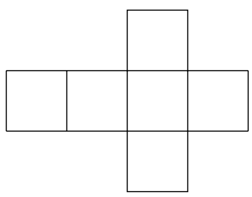


Aufgabe 2
Die Summe zweier Zahlen beträgt 132. Ein Summand endet mit der Ziffer Null. Streicht man von dem Summanden diese Null, so erhält man den anderen Summanden.
Wie heißen diese beiden Summanden?

$120 + 12 = 132$

Aufgabe 3
Gibt es einen Würfel, dessen sechs Seitenflächen alle Trapeze sind? Wenn ja, so zeichne das Netz eines solchen Würfels.

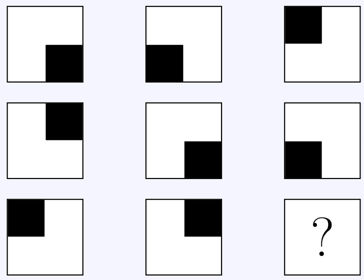
Da jedes Quadrat ein Trapez ist, gibt es einen solchen Würfel. Würfelnetz:



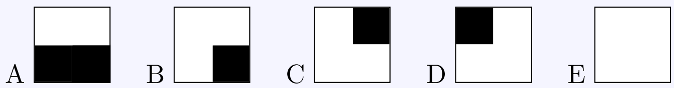
Aufgabe 4
Überprüfe folgende Aussagen:
a) Das Produkt der kleinsten 2stelligen Zahl mit der kleinsten 3stelligen Zahl ist gleich der kleinsten vierstelligen Zahl.
a) Das Produkt der größten 2stelligen Zahl mit der größten 3stelligen Zahl ist gleich der größten vierstelligen Zahl.

a) Die kleinste 2stellige Zahl ist 10, die kleinste 3stellige Zahl ist 100, die kleinste 4stellige Zahl ist 1000. $10 \cdot 100 = 1000$ ist ein wahre Aussage.
a) Die größte 2stellige Zahl ist 99, die größte 3stellige Zahl ist 999, die größte 4stellige Zahl ist 9999. $99 \cdot 999 = 9999$ ist ein falsche Aussage. Möglich ist auch der Hinweise auf die letzte Ziffer des Produkts.

Aufgabe 5
Die Quadrate sind in der Abbildung nach einer Regel angeordnet.



Welches der Quadrate



würdest du an die Stelle des Fragezeichens setzen?
Schau dir genau die Zeilen und auch die Spalten an. Erkennst du die Regel?

Lösung: B,
Regel: Das schwarze Quadrat dreht sich in jeder Zeile im Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt des großen Quadrates; in jeder Spalte entgegengesetzt zur Uhrzeigerrichtung.

Aufgabe 6
Versuche die folgenden Zahlen der Größe nach zu ordnen, obwohl einige Grundziffern ($\times$) nicht lesbar sind.
$\times 2$; 990; $\times 28$; $\times\times 1 \times$; $992\times$; 123; 93

$992\times$, $\times\times 1\times$, 990, $\times 28$, 123, 93, $\times 2$

13.25.2 2. Runde 1987, Klasse 4

Aufgabe 1
Löse folgende Gleichungen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen.

$$3280 + a = 3330$$
$$a + b = 200$$
$$c : a = 4$$
$$a + b + c + d = 500$$

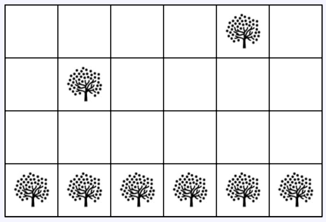
$a = 50$; $b = 150$; $c = 200$; $d = 100$

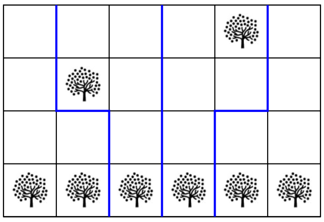
Aufgabe 2
Sven spart für ein Fahrrad. Es kostet 330 Mark. Wenn er sechsmal so viel Geld gespart hat, wie er bereits besitzt, kann es das Rad kaufen.
Wieviel Geld hat Sven bereits gespart?

Sven hat bereit 55 Mark gespart, denn $6 \cdot 55 = 330$.

Aufgabe 3

Ein Garten mit acht Obstbäumen (s. Abb.) soll so in vier gleichgroße Gärten aufgeteilt werden, dass in jedem Garten zwei Obstbäume stehen. Die Bäume können nicht verpflanzt werden.
Wie muss die Aufteilung erfolgen?





Aufgabe 4
Ordne die vier Zahlen a, b, c, d der Größe nach: $b < c$; $a > b$; $b < d$; $c > a$; $a > d$

$b < d < a < c$

Aufgabe 5
Für das Verlegen einer 6 km langen Gasleitung sind 40 Tage vorgesehen. An jedem Tag wird eine gleichlange Strecke geschafft.
Wieiviel m sind nach dem 30. Tag noch zu verlegen.

Am 30. Tag sind 4,5 km verlegt, also sind noch 1500 m zu verlegen.
Die Lösung ist auf vielfältigste Weise möglich, auch mit Hilfe einer Skizze.

13.26 26. Olympiade 1988

13.26.1 1. Runde 1988, Klasse 4

Aufgabe 1

a	b	$a \cdot b$
18	7	
	8	424
70		630
	6	4518

a	b	$a \cdot b$
18	7	126
53	8	424
70	9	630
753	6	4518

Aufgabe 2
Von zwei Zahlen a und b berechnet Katy die Summe. Die Zahl a ist Nachfolger des Vierfachen von 857, die Zahl b ist um 200 kleiner als der dritte Teil von 12600.
Gib die Zahlen a und b und deren Summe an.

$a = 3429$, $b = 4000$, $a + b = 7429$

Aufgabe 3
Peter errechnet die Summe von drei Zahlen a, b und c.
Die Zahl a ist um 100 größer als Differenz der Zahlen 50700 und 30200.
Die Zahl b ist Nachfolger des Siebenfachen von 583.
Die Zahl c ist dritter Teil des Vorgängers von 2101.
Gib die Zahlen a, b und c und deren Summe an.

$a = 20600$, $b = 4082$, $c = 700$ und $a + b + c = 25382$.

Aufgabe 4
Ermittle a.

$$\boxed{a} \xrightarrow{\cdot 8} \bigcirc \xrightarrow{+4400} \bigcirc \xrightarrow{:\,4} \boxed{2000}$$

$a = 450$

13.26.2 2. Runde 1988, Klasse 4

Aufgabe 1
Vervollständige die Tabelle.

x	y	$x + y$
75		93
	25	1007
2983	88	
5777		5826

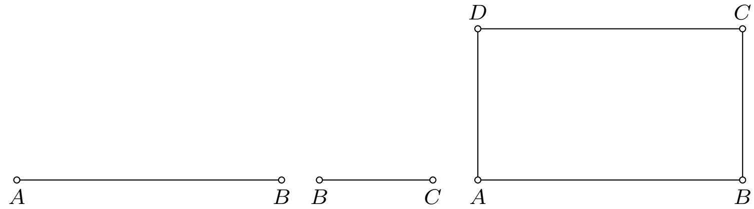
x	y	$x + y$
75	18	93
982	25	1007
2983	88	3071
5777	49	5826

Aufgabe 2
Löse die Gleichungen.

$783 : a = 9 \qquad 5398 - b = 867$
$c \cdot 3 = 11502 \qquad 2807 - d = 693$

$a = 87$, $b = 4520$, $c = 39834$, $d = 2114$

Aufgabe 3
Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ von 7 cm Länge und eine Strecke $\overline{BC}$ von 4 cm Länge.
Zeichne ein Parallelogramm mit den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, so dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ senkrechte aufeinander stehen.
Wie kannst du die entstandene Figur auch nennen?



Viereck, Trapez, Rechteck

Aufgabe 4
Eine Fahrt mit der Pioniereisenbahn im Küchwald geht über eine Strecke von 2,3 km. Normal gibt es täglich 5 Fahrten.
Wie viel Kilometer fährt die Pioniereisenbahn in 8 Tagen?

92 km fährt die Pioniereisenbahn in acht Tagen.

13.27 27. Olympiade 1989

13.27.1 1. Runde 1989, Klasse 4

Aufgabe 1
Berechne a und b und entscheide, ob $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ gilt. Kreuze die richtige Antwort an.

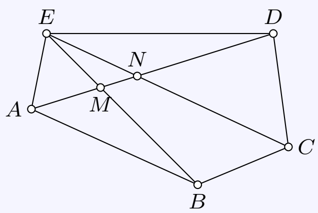
a	b	$a < b$	$a > b$	$a = b$
$5 \cdot 5$	$4 \cdot 6$			
1001	$999 + 2$			
$28 \cdot 10$	$280 : 10$			
$15 + 0$	$15 \cdot 0$			
$2 \cdot 2$	$2 + 2$			

a	b	$a < b$	$a > b$	$a = b$
$5 \cdot 5$	$4 \cdot 6$		x	
1001	$999 + 2$			x
$28 \cdot 10$	$280 : 10$		x	
$15 + 0$	$15 \cdot 0$		x	
$2 \cdot 2$	$2 + 2$			x

Aufgabe 2
Wie groß ist die Differenz zwischen der größten dreistelligen Zahl und der kleinsten dreistelligen Zahl?

999 - 100 = 899

Aufgabe 3
Wie viele Dreiecke und Vierecke findest du in der Figur? Gib die Dreiecke und Vierecke mit ihren Eckpunkten an.



11 Dreiecke (ABM, ABE, AME, ANE, ADE, BCE, CDN, CDE, DEN, DEM, MNE)
6 Vierecke ($ABCD$, $ABCN$, $ABCE$, $BCNM$, $BCDM$, $BCDE$)

Aufgabe 2

Ordne den Buchstaben die Zahlen zu.

B	E	R	L	I	N

$$L = 600 : 10$$
$$R \cdot L = 420$$
$$E + R = 15$$
$$B = E \cdot 100 - L$$
$$I + L = 700 : R$$
$$B + E + R + L + I + N = 860$$

B	E	R	L	I	N
740	8	7	60	40	5

13.27.2 2. Runde 1989, Klasse 4

Aufgabe 1
Vervollständige die Tabelle.

m	n	$m-n$
2847		2801
	3000	5200
46600		42400
180030	50010	

m	n	$m-n$
2847	46	2801
8200	3000	5200
46600	4200	42400
180030	50010	130020

Aufgabe 2
Ermittle m.

$$\boxed{3000} \xrightarrow{\cdot 8} \bigcirc \xrightarrow{+16000} \bigcirc \xrightarrow{:\, m} \boxed{10000}$$

$$\boxed{3000} \xrightarrow{\cdot 8} 24000 \xrightarrow{+16000} 40000 \xrightarrow{:\, 4} \boxed{10000}$$

$m = 4$

Aufgabe 3
Du würfelst mit drei Würfeln. Kann die Summe der Augen
a) 20 b) 14 c) 2 sein?
Begründe deine Entscheidung.

a) Nein, denn mit drei Würfeln kann man höchstens 18 würfeln.
b) Ja, es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B. 6, 6, 2 oder 6, 5, 3 oder 4, 4, 6, ...
c) Nein, denn mit drei Würfeln würfelt man mindestens 3.

Aufgabe 4
Ordne folgende Zahlen ein: 20784, 586, 780000, 14300, 1200000, 87, 23007, 50740, 860070 und 125.

$x < 999$	$10000 < x < 30000$	$300000 < x$

Welche Zahl hast du nicht eingeordnet?

$x < 999$	$10000 < x < 30000$	$300000 < x$
586	20784	780000
87	14300	1200000
125	23007	860700

Nicht eingeordnet wurde 50740. Sie ist größer als 999, größer als 30000, kleiner als 300000, gehört also in keine Spalte.

13.28 28. Olympiade 1990

13.28.1 1. Runde 1990, Klasse 4

Aufgabe 1
Wie spät ist es am Ende der 5. Unterrichtsstunde, wenn die Schule um 7 Uhr beginnt und eine Unterrichtsstunde 45 min dauert?
Erste Pause: 10 min
Zweite Pause (Milchpause): 15 min
Dritte Pause (Hofpause): 20 min
Vierte Pause: 10 min

7 Uhr + 5· 45 min + 10 min + 15 min + 20 min + 10 min = 7 Uhr + 280 min = 11 h 40 min
Es ist 11.40 Uhr.

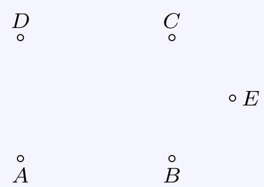
Aufgabe 2
Setze Klammern so, dass die Aufgaben richtig sind!
a) $42 \cdot 8 + 12 = 840$, b) $53 - 5 \cdot 14 - 4 = 480$

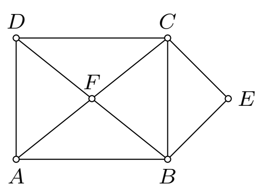
a) $42 \cdot (8 + 12) = 840$, b) $(53 - 5) \cdot (14 - 4) = 480$

Aufgabe 3

Zeichne die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$.
Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mit F!

Welche und wie viele Dreiecke erkennst du?
Welche und wie viele Vierecke erkennst du?





Dreiecke: ABF, ABC, ABD, ACD, ADF, BEC, BCF, BCD, CFD
Vierecke: $ABCD$, $ABEC$, $BECF$, $BECD$

Aufgabe 4
Vervollständige!

14	49	
63		
		56

Die Summe jeder Zeile und jeder Spalte soll 105 sein.

14	49	42
63	35	7
28	21	56

Aufgabe 5
5. Berechne jeweils alle Zahlen x!
a) $58 < x < 72$ und x sei Vielfaches von 7!
b) $x < 870$ und x sei Vielfaches von 100 und größer als 560!
c) $5840 > x > 5620$ und x sei Vielfaches von 50!

a) $x = 63, 70$; b) $x = 600, 700, 800$; c) $x = 5650, 5700, 5750, 5800$

Aufgabe 6
Vervollständige.

a) $\begin{array}{cccccc} & 5 & \square & \square & 4 \\ - & \square & 5 & 6 & \square \\ \hline & 2 & 7 & 5 & 6 \end{array}$; b) $1\,\square\,\square\,\square : 5 = 295$; c) $\dfrac{\square\,9\,\square\,7 \cdot \square}{1\,5\,2\,5\,6}$

a) $\begin{array}{cccccc} & 5 & 3 & 2 & 4 \\ - & 2 & 5 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 7 & 5 & 6 \end{array}$; b) $1\,4\,7\,5 : 5 = 295$; c) $\dfrac{1\,9\,0\,7 \cdot 8}{1\,5\,2\,5\,6}$