Lösungsheft Mathematik zum Lehrbuch Klasse 8

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Lösungsheft
Mathematik

Zum Lehrbuch Mathematik, Klasse 8
(Titel-Nr. 00 08 10; Ausgabe 1986)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1988

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Siegrid Bellack, Walter Blaurock, Dr. Manfred Dennert, Prof. Dr. sc. Brigitte Frank, Dr. Horst Lemke, Dr. Günter Lorenz, Dr. Manfred Rehm, Dr. Wolfgang Schulz, Dr. Edellinde Siury und Doz. Dr. sc. Werner Stoye beteiligt.

Redaktion: Karlheinz Martin

Ausgabe 1986

Lösungsheft Mathematik : z. Lehrbuch Mathematik, Klasse 8. Nur für Lehrer. - 2. Aufl. - Berlin : Volk u. Wissen, 1988. - 72 S.

ISBN 3 - 06 - 002204 - 6

2. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/87 (DN 00 22 04 - 2)
LSV 0645
Zeichnungen: Birgit Werwigk
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung:
Polydruck Coswig, Zweigbetrieb des GGV Dresden
Redaktionsschluß: 2. Juni 1987
Bestell-Nr. 709 204 5
00450

Vorbemerkungen

Das Lösungsheft enthält die Lösungen der Schüleraufträge und Aufgaben des Lehrbuches

Mathematik, Klasse 8 (Titel-Nr. 00 08 10 - Ausgabe 1986).

Dabei wurden Konstruktionsaufgaben nicht und Beweisaufgaben nicht in jedem Fall berücksichtigt. Bei Anwendungsaufgaben wurde aus Gründen der Platzersparnis auf den Antwortsatz verzichtet.

Für Aufgaben, die eine größere Anzahl von Zahlen als Ergebnis zulassen, wurden im allgemeinen Lösungsvorschläge unterbreitet, die mit der Zeile eingeleitet werden: "Die folgenden Zahlen entsprechen der Aufgabenstellung." Auf diese Weise wird dem Lehrer die Möglichkeit gegeben, bei der Besprechung derartiger Aufgaben in der Klasse schnell auf einige Lösungen zurückgreifen zu können.

Nicht lösbare Aufgaben treten im Lehrbuch hin und wieder mit voller Absicht auf. Im Lösungsheft wurde in diesen Fällen die Abkürzung "n.l." (nicht lösbar) oder aber eine knappe Erklärung eingefügt.
Gelegentlich finden sich im Lösungsheft auch Rechenablaufpläne, mit denen die Tastenfolge beim Einsatz des Taschenrechners angegeben wird. Dabei wurde natürlich der Schulrechner SR 1 bevorzugt berücksichtigt, jedoch gibt es auch einige Hinweise für solche, die nicht über eine Vorrangautomatik verfügen. Bei diesen Ablaufplänen wie auch bei der Angabe von Lösungen, die mit Hilfe von Taschenrechnern ermittelt wurden, wurde die jeweilige Rechneranzeige in eckigen Klammern angegeben. Auch die Rechneranzeige von Zwischenergebnissen, die für die Kontrolle des vom Schüler eingeschlagenen Rechenweges von Interesse sein könnte, wurde im Lösungsheft mitunter erfaßt. (Dabei sollte man bedenken, daß mitunter durch unterschiedliche Rechenwege wie auch durch Rundungen der Zwischenergebnisse bei der Rechneranzeige geringfügige Abweichungen auftreten können. Diese Unterschiede beeinflussen aber nicht das sinnvoll gerundete Endergebnis.)

Rechneranzeige und Resultate geben auch Aufschluß darüber, wie die Gestalter des Lösungsheftes die Anwendung der Regeln beim Arbeiten mit Näherungswerten sehen. Die Rundungen, die beim Auftreten von Meßwerten oder von Näherungen im Zusammenhang mit unendlichen Dezimalbrüchen vorgenommen wurden, basieren auf den Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten, die in Klasse 6 eingeführt wurden.

Die Redaktion

A Arbeiten mit Variablen

Lerneinheit A 1: Zur Wiederholung

o 1

a) $x + y$	12;	− 28;	− 15	d) $x \cdot y$	− 108;	− 245;	36
b) $x - y$	24;	− 42;	− 9	e) $x : y$	− 3;	− 5;	4
c) $y - x$	− 24;	42;	9	f) $y : x$	$-\frac{1}{3}$;	$-\frac{1}{5}$;	$\frac{1}{4}$

o 2 a) 34,61 b) − 0,339 c) 23,2 d) 213,3
e) − 37,31 f) − 0,674 g) 115,11 h) 90,24
i) − 48,26 k) 0,0497 l) 1,2 m) − 26,4
n) 24,525774 o) 24,525774 p) 306,25 q) 6,25
r) 126,5625

Hinweis für r: In Klasse 7 wurde noch nicht der Speicher des Taschenrechners behandelt, so daß die Schüler bei Verwendung des Taschenrechners SR 1 (also eines Rechners ohne Klammertasten) i.a. zuerst die Klammer berechnen und das Ergebnis 3,2 notieren werden. Alsdann rechnen sie folgendermaßen weiter:

405 $\boxed{\div}$ 3,2 $\boxed{=}$.

o 3 a) 10,62 $\boxed{\times}$ 4,81 $\boxed{\div}$ 3,54 $\boxed{\div}$ 0,65 $\boxed{=}$ [22.2] oder
10,62 $\boxed{\div}$ 3,54 $\boxed{\times}$ 4,81 $\boxed{\div}$ 0,65 $\boxed{=}$ [22.2] .

Darüber hinaus verbleibt ohne Anwendung des Speichers, der zu diesem Zeitpunkt noch nicht eingeführt ist, die umständliche Möglichkeit, zuerst das Produkt 3,54 · 0,65 mit dem Rechner zu ermitteln, sich das Zwischenergebnis zu notieren und dann weiterzurechnen, also das Produkt 10,62 · 4,81 zu bilden und dies durch das notierte Ergebnis, nämlich durch 2,301, zu dividieren.

b) a $\boxed{\times}$ b $\boxed{\div}$ c $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$ oder a $\boxed{\div}$ c $\boxed{\times}$ b $\boxed{\div}$ d $\boxed{=}$

o 4 Ralf berechnete 5 + 7 · 3 und Beate (5 + 7) · 3 .
(Ralfs Rechner hat Vorrangautomatik, Beates Rechner nicht.)

o 5 a) $22 \boxed{+} 12 \boxed{=} \boxed{\times} 7 \boxed{=}$ [238.]

b) $53 \boxed{+} 19 \boxed{=} \boxed{\times} 9 \boxed{=}$ [648.]

o 6 a) $23 \boxed{x^2}$ [529.] oder $23 \boxed{\times} \boxed{=}$

oder $23 \boxed{\times} 23 \boxed{=}$

b) 4,796

o 7 a) Rechner mit Vorrangautomatik leisten die Aufgabe nach folgendem Ablaufplan:

$3 \boxed{\times} 5 \boxed{x^2} \boxed{=}$ [75.]

b) $3 \boxed{\times} 5 \boxed{=} \boxed{x^2}$ [225.]

o 8 0,5; 0,1; 0,2; 0,25; 0,125; 3,3333 -01 (d.h. 0,33...); E 0; 2

o 9 $79{,}15 \boxed{-} 77{,}9 \boxed{=} \boxed{1/x} \boxed{\times} 310 \boxed{=}$ [248.]

1. a) $-3{,}5 < 2{,}9$ b) $-26{,}7 < 1{,}5798$ c) $-6\,738 > -7\,683$

2. a) 14 b) -22 c) -12 d) 12 e) -72
f) -75 g) -104 h) -15 i) -22 k) 7

3. a) 60 b) -160 c) 49 d) 246 e) -6
f) 7 g) 17 h) $-5{,}6$ i) -11

4. a) falsch; denn $-5 + 17 = 12 \neq -12$ b) wahr
c) $-6 - 18 = -24 \neq 24$ d) $-70 - 120 = -190 \neq -50$
e) wahr f) $-25 + 10 = -15 \neq 15$ g) wahr
h) $(-3) \cdot 15 = -45 \neq 45$

5. a) falsch; denn $(-7) \cdot (-9) = 63 \neq -63$
b) $77 : (-11) = -7 \neq 7$ c) wahr
d) $(-48) : (-6) = 8 \neq -8$ e) $7 - 3 \cdot 5 = -8 \neq 20$
f) $3 \cdot 5 + 4 = 19 \neq 27$

6. Folgende Terme erfüllen die Aufgabenstellung:

$\boxed{15}$ a) $10 + 5$ b) n.l. c) $20 + (-5)$ d) $2 \cdot 7{,}5$
e) $(-2) \cdot (-7{,}5)$ f) n.l.

$\boxed{-21}$ a) n.l. b) $(-20) + (-1)$ c) $(+1) + (-22)$
d) n.l. e) n.l. f) $(-1) \cdot 21$

7. a) $-\frac{1}{6}$ b) $-\frac{7}{10}$ c) $-\frac{10}{9}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{7}{3}$ f) $-\frac{40}{27}$ g) $-\frac{15}{8}$

8. a) 41,77 b) 16,435 c) 336,317 d) 21,195 e) 3,008
f) $-$ 1,711

9. a) 1 108,8 c) $-$ 14,5 e) 100,056 44
b) 0 d) $-$ 22,11 f) $-$ 3,773

10. a) 3,761 d) $-$ 3,221 224 5 g) 2,791 719 8
b) $-$ 4,016 8 e) 0,839 621 8 h) 346,038
c) 3,613 2 f) 3,225 6 i) $-$ 21,413

11. a) 6 569 b) 10 c) $-$ 27,496 d) $-$ 1,4

12. a) 36,481 6 b) 0,409 6 c) 0,364 816 d) 36,048 016

13. a) $7{,}4 - 13{,}69 = -6{,}29$ b) $0{,}53 \cdot 9{,}241\,6 = 4{,}898\,048$
c) $36{,}5 : 16{,}81 = 2{,}171\,326\,6$ d) $57{,}997\,5^2 = 3\,363{,}71$
Hinweis: Bei d) ist 3 363,71 kein "genaues" Ergebnis; dieses müßte acht Stellen nach dem Komma haben (3 363,710 006 25).

14. a) 8,8 b) $-$ 75 c) 1 111

15. a) 13,868 b) $-$ 4,218 c) 0,107 d) 9,400
e) 0,818 f) 0,366 g) 5,776 h) 0,880
i) n.l. k) 283,068 l) 34,153 m) 25,279

16. a) 2,330 b) 0,184 c) 2,455
d) 1,772 e) 9,870

17.* a) $9 + 16 = 25$ b) $100 + 121 + 144 = 365 = 169 + 196$
c) $441 + 484 + 529 + 576 = 2\,030 = 625 + 676 + 729$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 7\,230$$

Als nächstfolgende Aussage dieser Art erhält man:

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 19\,855 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

und dann:

$$78^2 + 79^2 + \ldots + 84^2 = 85^2 + \ldots + 90^2 \;(= 45\,955).$$

o 10 a) Lars erhält nicht das richtige Ergebnis, denn er hat die Klammer nicht beachtet und den Term 6 + 12 · 13 - 8 berechnet.

o 12 In der Anzeige erscheinen der Reihe nach:
18; M 18; M 5; M 18; M 90.

o 13 - 41,617 647

o 15 314

1. a) 8,655 b) 9,99 c) - 0,785 d) 1,5 e) 54,54

2. a) 22,52 · 13,55 = 305,146 b) (- 0,22) · 10,95 = - 2,409
c) (- 7,98) · (- 0,78) = 6,224 4 d) 2,6 · 14,2 = 36,92
e) (- 9,95) · 6,57 = - 65,371 5

3. a) $\frac{3{,}498}{1{,}59} = 2{,}2$ b) $\frac{968}{880} = 1{,}1$ c) $\frac{72{,}9}{30} = 2{,}43$
d) $\frac{106{,}38}{-7{,}88} = -13{,}5$ e) $\frac{119{,}35}{-21{,}7} = -5{,}5$ f) $\frac{57{,}12}{56{,}42} = 1{,}012\ 407$

4. a) 9,5 · (- 19,83) = - 188,385 b) 5,7 : 20 = 0,285
c) (- 8,4) · 72,2 = - 606,48 d) 88,166 4 : 18,958 8 = 4,650 420 9

5. a) 106,624 - 28,749 = 77,875 b) 90 · (- 13,95) = - 1 255,5
c) 47,7 · 25,65 = 1 223,505 d) 26,664 : 33 = 0,808

6. a) 26,728 9 + 98,01 + 109,620 9 = 234,359 8
b) 342,25 + 31,36 + 486,202 5 = 859,812 5
c)* 0,672 4 - 12,816 4 - 56,25 = - 68,394

7.* Für den SR 1 ergibt sich die folgende Möglichkeit:

c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x \to M}$ e $\boxed{+}$ f $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{M+}$ a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$
$\boxed{\div}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{=}$

o 16

x	$2x - 1$	$-x + 1,5$	$\frac{1}{2}x - 3$
3	5	$-1,5$	$-\frac{3}{2}$
1,4	1,8	0,1	$-2,3$
0	-1	1,5	-3
-1	-3	2,5	$-3,5$
$-2,5$	-6	4	$-4,25$

o 17 a) $x = \frac{8}{3}$

b) $x > 3$

o 18 $3x + 7 = 28$;
$x = 7$

1.

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$
12	-6	6	18	-72	-2
-10	5	-5	-15	-50	-2
-1	1	0	-2	-1	-1
-12	-18	-30	6	216	$\frac{2}{3}$

2. a) -2; 28; -32; $-3,5$; 5,2; $-7,4$ b) -5

3. a) 10 b) 4 und -3 c) $-5,64$

4. a) Q_+, Q, R b) Q_+, Q, R c) Q_+, Z, Q, R
   d) N, Q_+, Q, Z, R e) $L = \emptyset$ f) $L = \emptyset$
   g) N, Q_+, Q, Z, R h) N, Q_+, Q, Z, R
   i) N, Q_+, Q, Z, R k) N, Q_+, Q, Z, R
   l) Q_+, Q, R m) $L = \emptyset$

5. a) $A \approx 69,4 \text{ cm}^2$ [69.397782] ; $u \approx 29,5$ cm [29.530971]
   b) $u \approx 18,0$ cm [17.970969]

6. a) $3n$; $5n$; $7n$; b) $3n + 2$; $5n + 2$; $7n + 2$
   c) n.l. d) $\frac{a + b}{2}$ e) $n + n^2$

7. a) z bedeutet: Masse des Körpers ($m = V \cdot \varrho$)
   b) z bedeutet: Kraftstoffverbrauch auf dem zurückgel. Weg

8. a) und b) falsch ($a = 0$) c) wahr ($a = 0$) d) wahr ($b = 0$)
   e) wahr (Für $b = -a$ gilt $a + b = 0$.) f) wahr (z.B. $a = b = 1$)
   g) falsch (Gegenbeispiel: Für $x = 5$ und $y = 1$ gilt $x \cdot y = 5 > 4$, aber $y < 2$.)
   h) wahr (Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$)

i) wahr k) wahr

l) wahr (Für n = 0 gilt $0 \mid n$. Vgl. Lehrbuch Mathematik, Klasse 6, Ausgabe 1984, Seite 7: "Jede natürliche Zahl ist Teiler von 0. Somit ist auch 0 Teiler von 0, und es gilt $0 \mid 0$.")

m) wahr (p = 2)

Lerneinheit A 4: Zusammenfassen in Summen

o 22 a) $4z$ b) $3ab$ c) $4x^3$

o 23 a) $x = -5$ b) $x = 3$

o 24 a) $5x + 3x = (5 + 3)x$ Distributivgesetz
$= 8x$

b) $9x - 7x = 9x + (-7x)$
$= (9 + (-7))x$ Distributivgesetz

o 25 a) -2 b) 20 Abkürzung durch Ordnen und Zusammenfassen der Glieder des Terms möglich.

1. a) $10x$ b) $\frac{2}{3}x$ c) $3{,}9x$ d) $\frac{1}{5}x$

2. 6; -7; $\frac{4}{3}$; 0,8; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{7}$; 1; -1; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{7}$; $-\frac{5}{9}$

4. a) $5x$; $-2x$; $5p$; $3x - 5y$; 0; t
b) $-0{,}4y$; $2{,}8x$; $-0{,}7a$; $-1{,}4z$
c) $2a + 7$; $-4e$; $4a - b$; $8x$

5. a) $x = 4$ b) $d = 9$ c) $y = 2$ d) $p = 3$

6. a) $-5u - 8v$ | -31; $-53{,}6$
b) $7v - 5u$ | -1; $24{,}4$
c) $\frac{1}{2}u - 2v$ | $-2{,}5$; $-9{,}2$
d) $-1{,}6u - 1{,}06v$ | $-6{,}92$; $-9{,}352$

7. a) $7x - 3y = 10$; ja b) $3x - 2y < 2$; nein
c) $-1{,}42x - 1{,}17y = -5{,}23$; ja
d) $11{,}26x + 4{,}4y > 70$; nein

8. a) x; $2x$; $2x + 5$; $2x + 5 - x = x + 5$
Man subtrahiert vom angesagten Ergebnis 5.

9. a) $\frac{1}{2}p$ b) $-\frac{1}{4}d$ c) $-\frac{1}{2}x - \frac{7}{5}$ d) $\frac{13}{8}d$

10. a) $-0{,}8\,b - 3{,}5$ b) $1{,}4\,f - 5{,}5\,g$ c) $8{,}21a - 7{,}386b - 7{,}194$

11. a) $9\,ab$ b) xy c) $-2\,m^3$ d) $10\,x^2 - 5\,x$

e) $y^2 - y$ f) $-4\,a^2 - ab$ g) $-9\,k^4$ h) $mn + 2\,n - 8\,m$

12.* a) $6\,ab + 15\,ac - 13\,bc$ b) $-50\,x^2 + 10\,y^2 + 60\,z^2$

14. a) $3\,k - 8\,x - \underline{\underline{5\,k}} + 3\,x = -2\,k - 5\,x$

b) $-8\,x + \underline{\underline{3\,x}} + \underline{\underline{5{,}2\,a}} + 5\,a = -5\,x + 10{,}2\,a$

16.* (1) $8\,a + 9\,b = 17\,ab$ wird realisiert durch $a = b = 0$ und durch $a = b = 1$.

(2) Jedes Paar $(a;\,b)$ mit $a \in R$ und $b \in R$ erfüllt die Gleichung.

(3) $a = b = 1$

(4) $ab - a = b$ wird z.B. durch $(0;\,0)$ und durch $(2;\,2)$ realisiert. Darüber hinaus ergibt sich wegen $a\,(b - 1) = b$, also $a = \frac{b}{b-1}$, daß alle Paare $(\frac{k}{k-1};\,k)$, ausgenommen $k = 1$, die Gleichung erfüllen.

(5) $5\,a + a = 5\,a^2$ wird realisiert durch $a_1 = 0$ und durch $a_2 = \frac{6}{5}$.

(6) $a_1 = 0;\ a_2 = \sqrt{2};\ a_3 = -\sqrt{2}$ (7) $a_1 = 0;\ a_2 = 2$

(8) $a_1 = 0;\ a_2 = 1$ (9) $a = 0$

Lerneinheit A 5: Addition von Summen

o 26 a) $278 + (345 + 122)$ b) $278 + 467 = 623 + 122 = 745$

o 27 Vereinfachen zu $-6\,x + y$; Termwert ermitteln:
$(-6) \cdot (-2) + (-3) = 9$

2. a) $7{,}9$ b) $-2a + c - 3{,}2$ c) $2\,ab + 10\,b^2$

d) $5\,x + 7$ e) $38\,c - 9\,d$ f) $5\,a^3 - a^2b$

g) $-\frac{1}{2}\,x + \frac{13}{4}$ h) $\frac{11}{15}\,a$ i) $3{,}6\,a - 7{,}2\,b$

k) $3\,a^2 + 5\,a + 4$ l) $4\,uv$

3. a) $7\,a + (5\,a + 7) = 12\,a + 7$ b) $(1 - 5x) + 8x = 1 + 3x$
c) $(2\,m^2 - 3\,mn) + (-m^2 - mn) = m^2 - 4\,mn$

4. a) $19{,}5\,x + 2{,}3\,y$ b) $-2\,x - 8{,}65\,y - 7$
c) $11{,}1\,x + 3{,}45\,y - 7$

5. a) $u - 2v$; $7{,}5 - 2 \cdot (-2{,}5) = 7{,}5 + 5 = 12{,}5$
   b) $-u - 5v$; $-7{,}5 - 5 \cdot (-2{,}5) = 5$

6. a) $u = -y + z + 10$
   b)* Für $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$ würde sich ergeben:
   $a = 7$; $b = 2$; $c = 2$.

7. a) $5x + (7y - \underline{3z})$ b) $(7u + \underline{(-4v)}) + (\underline{(-2u)} + v)$

   c)* Zum Beispiel: $2a + (\underline{3b} - \underline{a})$

   d)* Zum Beispiel: $6m + (\underline{(-p)} - 5n) + (\underline{9n} - \underline{6m})$

8. a) $n - 1$; $n + 1$ b) $n = 92$ 9. 33; 34 und 35

10.* a) Gauß bildete nacheinander
   - die Summe aus der ersten und der letzten Zahl,
   - die Summe aus der zweiten und der vorletzten Zahl usw.
   Jede dieser Teilsummen ergibt 41, und es sind 20 Teilsummen: $20 \cdot 41 = 820$
   b) $s = (1 + n)\frac{n}{2}$ b) 5 050

Lerneinheit A 6: Subtraktion von Summen

o 28 a) $375 - (25 + 215)$
   b) $375 - 240 = 135$; $375 - 25 = 350$; $350 - 215 = 135$

o 30

a	b	c	a − (b+c)	a − b + c	a − b − c
8	2	3	3	9	3
− 7	5	− 1	− 11	− 13	− 11
− 5	− 4	7	− 8	6	− 8
− 3	− 2	0	− 1	− 1	− 1

1. a) $-3x - 3y$ e) $4a - 7b$ i) $-2{,}6y - 0{,}7$
   b) $-21 + a$ f) $2a + 2b - c$ k) $11{,}5u + 4v$
   c) $6a + 7b$ g) $4x^2 + 6x$ l) $2a + 1{,}48b$
   d) $-3x + 3y$ h) $-31c + 18d$

2. a) $\frac{1}{2}x$ b) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$ c) $-35x + 11{,}1y$

   d) $-2{,}06a^2 + 11{,}7ab$ e) 0

3. a) $8x - (5x + 7) = 3x - 7$ b) $3 - 5a - (-7a) = 3 + 2a$

   c) $-11z - (5z - 7u) = 7u - 16z$

4. a) $(6m - 5n) + (-3n - 11m) = -5m - 8n$

   b) $(6m - 5n) - (-3n - 11m) = 17m - 2n$ bzw.

   $(-3n - 11m) - (6m - 5n) = 2n - 17m$

   c) Die Subtraktion ist nicht kommutativ. Es wurde nicht angegeben, welche Differenz als Minuend und welche als Subtrahend zu nehmen ist.

5. a) $17{,}4a - 2{,}1b$ c) $26{,}7a - 1{,}2b$

   b) $-17{,}4a + 2{,}1b$ d) $-26{,}7a + 1{,}2b$

   Die Ergebnisse von a und b wie auch von c und d sind zueinander entgegengesetzte Zahlen

6. Folgende Ergebnisse erfüllen die Aufgabenstellung:

   a) $3a - (4b + 6)$ oder $(3a - 4b) - 6$

   b) $5xy - (-3xz - 7yz)$ oder $(5xy + 3xz) - (-7yz)$

   c) $-4u^2 - (-11v + 7w)$ oder $(-4u^2 + 11v) - 7w$

7. a) $-10u - 2v$; 20,6 b) $-7u + 10v$; 33,8

   c)* $-2{,}5v^2 + 1$; $-6{,}225$

8. a) $3a - (\underline{\underline{4a}} - 5b)$

   b) $7x - (\underline{x} - (\underline{\underline{-3}}\,y))$ oder $7x - (\underline{\underline{3y}} - (\underline{\underline{-x}}))$

   c)* $-3c - (\underline{\underline{c}} - 8d) - (\underline{\underline{8d}} - \underline{\underline{e}})$ oder

   $-3c - (\underline{\underline{8d}} - 8d) - (\underline{\underline{c}} - \underline{\underline{e}})$

   d)* Für a gibt es eine, für b zwei und für c sechs Möglichkeiten.

9. a) $x = 2$ b) $z = 2{,}5$

10. $(a - b) + (c - d - e) = a - b + c - d - e$

$$= a + c - b - d - e$$

$$= (a + c) - (b + d + e)$$

11. $x = 9$

12. a) $7x - (5y - 3z) = 7x - 5y + 3z$

    b) $-(7x + 5y) - 3z = -7x - 5y - 3z$

13. a) $b - a = -(a - b)$ ist die entgegengesetzte Zahl zu $a - b$. Die entgegengesetzte Zahl zu einer Zahl ist dieser nur im Falle 0 gleich, also $a = b = 0$.

    b) $a - b = -(b - a)$

Lerneinheit A 7: Multiplikation von Produkten

o 32 a) 10 ab b) 210; − 105; 2,4

o 33 a) a^2; a^3; a^7

1. a) 6 x c) $\frac{1}{6}$ z e) 35 ab g) 18 ef
   b) − 2,6 y d) 0 f) − 27 xy h) 1,5 xy

2. a) 6 abc b) − 40 xyz c) − 8 mpq d) 0

3. a) − 1,025 k c) − 0,08 uv e) 0,375 rs
   b) − 5,4 v d) 4 pq f) 0

4. a) 15 m^2 b) 7,5 x^2 c) − 12,4 t^2 d) − 18 c^3
   e) x^5 f) − 3 a^6 g) − 6 c^4 h) − 6 a^3b
   i) − 2 a^2b^2 k) 2,25 x^3y^3 l) 0,952 x^3y^2 m) 0,756 d^4
   n) 60 $x^2y^2z^2$ o) 70 $a^2b^2v^2$

5.* a) 16 $a^4b^4c^4$ b) 8,5 $m^5n^3p^3$

6. a) 69 a^2b b) − 13 m^2n c)* x^2y

7. o,7 ab^2; 0,226 8

8. a) 7 y b) − 8 x c) − 9 u d) − 6 mn

10. a) Im Ergebnis wurde der Faktor b von 5 a^2b vergessen. Es muß heißen: 3,5 a^2b^3.
    b) Das Vorzeichen wurde falsch ermittelt; richtig: 15 abx.
    c) richtig
    d) Das Produkt der Variablen a^2 und a^3 liefert a^5; also 24 a^5.

Lerneinheit A 8: Division von Produkten

o 34 a) $\frac{2}{5}$ xy b) 12 x c) 8 y

o 35 Der gestellten Aufgabe entsprechen die Schreibweisen von Axel (20 · 12) : (3 · 4), von Christa 20 · 12 : (3 · 4) und von Elke $\frac{20 \cdot 12}{3 \cdot 4}$.

$(20 \cdot 12) : (3 \cdot 4) = 20 \cdot 12 : (3 \cdot 4) = 240 : 12 = 20$

$\frac{20 \cdot 12}{3 \cdot 4} = \frac{240}{12} = 20$

In jedem Fall wird klar festgelegt, daß der Quotient aus dem Dividenden 20 · 12 und dem Divisor 3 · 4 gebildet werden soll.

Beate würde beim Berechnen des Terms $(20 \cdot 12) : 3 \cdot 4$ zuerst das Produkt in der Klammer bilden und dann von links nach rechts schrittweise weiterrechnen:
$240 : 3 = 80; \quad 80 \cdot 4 = 320.$
Zum gleichen Ergebnis würde Daniel gelangen, dabei jedoch nicht einen Quotienten aus zwei Produkten, sondern ein Produkt ermitteln, von dem ein Faktor der Quotient $\frac{20 \cdot 12}{3}$ und der andere Faktor die Zahl 4 ist.

o 36 10; 40

1. a) $0{,}8\ abc$ b) $-3\ xy$ c) $1{,}8\ xy$ d) $4\ n^2$
2. a) $2\ a$ b) $-3\ m$ c) $\frac{3}{2}\ y$ d) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{4\ n}{m}$ f) $-\frac{a}{2\ x}$
3. a) $-2\ ab$ b) $3\ xz$ c) -3 d) y e) $-\frac{4}{r}$ f) $\frac{3\ a}{2\ x}$
4. a) $\frac{b}{2}$ b) $\frac{2\ y^2}{5}$ c) $\frac{3\ d}{5\ c}$ d) $\frac{3\ uv}{10}$
5. a) $4\ a$ b) $-3\ b$ c) $4\ xy$ d) $\frac{4}{m^2}$ e) $\frac{2\ b}{3\ a}$ f) $-\frac{5\ ab}{3}$
   g) $\frac{ab}{3\ c}$ h) $\frac{20\ x}{y}$ i) 0 k) $\frac{y}{5\ x}$
6.* a) $3\ ab + 5\ ab = 8\ ab$ b) $2\ x^2 - 0{,}3\ xy$
7. a) $\frac{-25\ ab^2}{-15\ a^2b} = \frac{5\ b}{3\ a}$

$5\ \boxed{\times}\ b\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{\div}\ a\ \boxed{=}$ oder $5\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{\times}\ b\ \boxed{\div}\ a\ \boxed{=}$

b) $5\ \boxed{\times}\ 2{,}3\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{\div}\ 0{,}37\ \boxed{=}\ [10.36036] \approx \underline{\underline{10{,}36}}$

$5\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ 0{,}65\ \boxed{=}\ [8.0553658] ; \underline{\underline{-8{,}06}}$

o 37 $4 \boxed{\times} 1{,}54 \boxed{+} 8 \boxed{\div} 3 \boxed{\times} 2{,}37 \boxed{=} \boxed{\times} 0{,}75 \boxed{=} [9{,}36]$

Bemerkung: Beim Arbeiten mit dem SR 1 beginnt man mit dem Klammerausdruck. Durch die Vorrangautomatik kann der Klammerinhalt von links nach rechts schrittweise abgearbeitet werden; dann jedoch muß unbedingt die Gleichheitstaste gedrückt werden, woran sich die Multiplikation mit 0,75 anschließt. Bei Rechnern mit Klammertasten kann ebenfalls mit dem Klammerinhalt begonnen werden, z.B. durch

$$4 \boxed{\times} 1{,}54 \boxed{=} \boxed{+} \boxed{(} 8 \boxed{\div} 3 \boxed{\times} 2{,}37 \boxed{)} \boxed{=} \boxed{\times} 0{,}75 \boxed{=}$$

oder man wendet die Klammer zweimal an:

$$0{,}75 \boxed{\times} \boxed{[(} \boxed{[(} 4 \boxed{\times} 1{,}54 \boxed{)]} \boxed{+}$$
$$\boxed{[(} 8 \boxed{\div} 3 \boxed{\times} 2{,}37 \boxed{)]} \boxed{)]} \boxed{=}$$

o 38 $3 \boxed{\times} 1{,}54 \boxed{+} 2 \boxed{\times} 2{,}37 \boxed{=}$

1. a) $21\,x - 35\,y$ b) $35\,u - 63\,v$ c) $-1{,}5\,x^2 + 0{,}3\,xy$
   d) $9\,a^2 - 9\,ab + 9\,ac$ e) $-21\,m^2 + 14\,mn - 35\,m$
   f) $-6\,a^2b - 3\,ac + 4\,a$ g) $\frac{1}{4}\,a^2 - \frac{1}{6}\,ab$

2. a) $0{,}49\,x^2y + 0{,}07\,xy - 0{,}28\,x$ b) $2\,u^3 + 3\,u^2 - 4\,u$
   c) $-10\,x^2 + 12\,xy$

3. a) $-9\,x + 7$ b) $xy + 6\,y$ c) $-uw + vw$
   d) $14\,ab - 27\,a$ e) $-14\,a - 44$
   f) $0{,}33\,x^3 - 8{,}64\,x^3y + 2{,}7\,xy$

4. a) $245{,}943\,6 \approx 245{,}94$ b) $71{,}08$

5. a) $3\,(x + (\underline{-\,y})) - 1{,}5\,x = 1{,}5\,x - 3\,y$
   b) $\underline{\underline{7\,u}}\,(4\,u^2 - 7\,u + 8) = 28\,u^3 - 49\,u^2 + 56\,u$
   c)* $5\,((\underline{\underline{-\,4x}}) - (\underline{\underline{-\,y}})) + 2\,x - 3\,y = -18\,x + 2\,y$

6.* <u>Nein</u>. Man kann die Überlegung folgendermaßen führen:
Wenn $-3(a-b) > 0$, so muß $(a-b) < 0$ gelten.
Begründung: Das Produkt aus einer negativen Zahl (-3) und einer positiven Zahl wäre negativ und damit kleiner als Null.
Da $a - b < 0$, ist $b > a$.

7. a) $x = 7$ b) $x = -3$ c) $x = 1$ d) n.l.

8. a) $11{,}25\ cm^2 \approx 11\ cm^2$
   b) Der Flächeninhalt wird um $5{,}4\ cm^2$ auf $16{,}65\ cm^2 \approx 17\ cm^2$ vergrößert.
   c) $A = a(b + x)$; $14{,}85\ cm^2$; $22{,}05\ cm^2$; $50{,}40\ cm^2$

9.* Die Maus klettert am 1. Tag $(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})$ Ellen, das sind $\frac{1}{3}$ Ellen, nach unten.
Die Katze klettert am 1. Tag $(1 - \frac{1}{4})$ Ellen, das sind $\frac{3}{4}$ Ellen, nach oben.
Somit verringert sich der Abstand nach einem Tag auf
$60 - (\frac{1}{3} + \frac{3}{4}) = (60 - \frac{13}{12})$ Ellen.
Die Tiere erreichen einander nach x Tagen, wenn $\frac{13}{12} \cdot x = 60$ gilt. Man erhält $x = 55{,}38..$ Tage. Die Katze erreicht also die Maus im Verlauf des 56. Tages.

Lerneinheit A 10: Ausklammern

o 39 a) 2 $\boxed{\times}$ 2,4 $\boxed{\times}$ 3,7 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ 2,4 $\boxed{\times}$ 1,8 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ [9.12]

b) Nach dem Distributivgesetz gilt
$2uv + 2uw = 2u(v + w)$.

c) v $\boxed{+}$ w $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\times}$ u $\boxed{=}$

o 40 $3(ab + 3ac)$; $a(3b + 9c)$

1. a) $5(x + 6y)$
   b) $2(4m^2 + 8mn - 22mn^2)$; $4(2m^2 + 4mn - 11mn^2)$
   $4m(2m + 4n - 11n^2)$; $-4m(-2m - 4n + 11n^2)$
   c) $7uv(-2u + 3 - 5v)$; $-7uv(2u - 3 + 5v)$
   d) $\frac{1}{2}b(a - \frac{1}{3}ab - 16b)$

Bemerkung:

Bei der Beurteilung der Schülerleistungen muß in den folgenden Aufgabengruppen bedacht werden, daß beim Ausklammern mitunter verschiedene Ergebnisse auftreten können. Im Lösungsheft wurde stets nur eine Möglichkeit dargestellt, wenn nicht durch eine entsprechende Aufgabenstellung - zum Beispiel wie in der Aufgabengruppe 1 (LE A 10) - gerade die verschiedenen Möglichkeiten des Ausklammerns Gegenstand der Untersuchung sein sollen.

Falls die Glieder noch zusammengefaßt werden können, wurde dies getan. Dadurch entfällt bei einigen Aufgaben das Ausklammern (vgl. Aufg. 3 c; Aufg. 3 l).

2. a) $5\,(a + b)$ b) $7\,(x - 2\,y)$ c) $0{,}6\,(x + 2\,y)$
   d) nicht sinnvoll; möglich wäre z. B. $3\,(a + \frac{7}{3}\,b)$
   e) $3\,(4\,a - 3\,b)$ f) $7\,u\,(v + w)$ g) $\pi\,(a - b)$
   h) $y\,(x + 1)$ i) $12\,a$ k) $11\,a\,(b - 1)$

3. a) $5\,b\,(3\,a - c)$ b) $24\,v\,(u - 3)$ c) $-\,36\,ab$
   d) $1{,}5\,x\,(1 + 3\,x)$ e) $\sqrt{3}\,(a + b^2)$ f) $-\,7\,u\,(3\,v + 5\,w)$
   g) $a\,(a - b)$ h) $a\,(a - 1)$ i) $7\,ab\,(a - 3\,b)$
   k) $y\,(y - 3)$ l) $-\,xy$ m) $13\,(2\,mn - 3\,pq)$

4. a) $4\,(u - 3\,uv - 6\,v)$ b) $9\,u\,(1 - 3\,v - 4\,v^2)$
   c) $x\,(x^2 + 2\,x - 1)$ d) $3\,a\,(b + 3\,c - 4\,d)$
   e) $x^2\,(x^2 + 4\,x - 1)$ f) $5\,ab^2\,(3\,a^2 - 5\,a + 1)$

5. a) ja
   b) nein; richtig wäre $-\,x\,(x^2 + x - 2)$
   c) nein; richtig wäre $a\,(3\,a^2 - 12\,a + 1)$

6. a) $5\,x + 15\,y - \underline{\underline{10\,z}} = 5\,(x + 3\,y - 2\,z)$
   b) $\underline{\underline{8\,a^2}} - 4\,ac - 8\,ad = 4\,a\,(2\,a - c - 2\,d)$

7. $15\,a^2b - 25\,a^2bc + 20\,a^2bd = 5\,a^2b\,(3 - 5\,c + 4\,d)$
   Daraus folgt: $5 \cdot (-\,0{,}8)^2 \cdot 1{,}9 \cdot \left[3 - 5\cdot 3{,}4 + 4\cdot(-\,2{,}6)\right]$
   $= -\,148{,}352$

Bemerkung:

Beim Arbeiten mit dem Schulrechner SR 1 zuerst die Klammer ausrechnen.

8. a) $x(x-3)=0$; $x_1=0$ und $x_2=3$ oder $L=\{0;\,3\}$.

b) $y(y+1)=0$; $y_1=0$ und $y_2=-1$

c) $7x(1-3x)=0$; $x_1=0$ und $x_2=\frac{1}{3}$

9.* $(7x+13y)(a-b)$ 10.* $\frac{15\,abc}{5\,a\,(b+c)}=\frac{3\,bc}{b+c}$; 6

Lerneinheit A 11: Multiplikation von Summen mit Summen

o 41 a) $A=(a+b)(c+d)$ b) $ac+ad+bc+bd$

1. a) $ac-ad+bc-bd$ b) $ac-ad-bc+bd$

c) $rs+r-3s-3$ d) $6mx-8my+3nx-4ny$

e) $10a^2+6a-5$ f) $11a-15$

g) $10a^2-19a-15$ h) $8ax+8a$

i) $8b^2-19bc-15c^2$

2. a) $16x^2-\frac{1}{4}y^2$ b) $1{,}8\,ab$

c) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$ d) $16z^2-8z+1$

e) $24{,}96\,u^2+3{,}38\,uv-3{,}9\,v^2$

f) $9x^2+24xy+16y^2$

3. a) $-x^2+3x+4$ b) $-9a^2+b^2$

4. a) $10a^2-13ab-6ac+4b^2+3bc$

b) $-x^2y+xy^2+3xyz-xz-3y^2z+yz$

c) $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$ d) a^3-b^3

5. a) $2axy-2a+3xy^2-3y$

b) $-2ax+2a-3xy+3y$

c) $4a-2ax+6ay-3xy+9y^2+6y$

d) $-x^2y+xy+x-1$

e) $x^2-3x-3xy+3y+2$

6. a) $2x^2+10x+14$ b) $17x+13$

7. a) $x=\frac{35}{17}$ b) $x=2$

8. a) $12\,xy$; $85{,}284$ b) $cx-cy$; $0{,}6$ c) -16

9. a) $(y + 4)(y + (\underline{\underline{-2}}))$ b) $(z + \underline{\underline{3}})(z - 5)$

c) $(2x + 3)(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{4}})$ d) $(a + 2)(\underline{\underline{a}} - \underline{\underline{2}})$

10.* a) $(x + y)(m + 10)$ b) $(a - b)(7 + u)$

c) $(a + b)(c - 2)$ d) $(x + 3)(x - 3)$

11.* In Klasse 6 wurde definiert:
Primzahlen heißen diejenigen natürlichen Zahlen, die größer als 1 und nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.
Für $n = 0$ ist $n^2 - 1 = -1$, also keine natürliche Zahl und demzufolge keine Primzahl.
Für $n = 1$ ist $n^2 - 1 = 0$. Auch das ist keine Primzahl.
Für $n = 2$ ist $n^2 - 1 = 3$. Das ist eine Primzahl.
Für $n > 2$ untersuchen wir $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$ und erhalten als Teiler außer 1 und $(n + 1)(n - 1) \neq 1$ mindestens noch den weiteren Teiler $(n + 1)$. Also alle Fälle mit $n > 2$ führen nicht auf Primzahlen.

Lerneinheit A 12: Beispiele für Beweisführungen unter Verwendung von Variablen

o 42 Wenn $n \mid a$ und $n \mid b$, so $n \mid a + b$.
Aus $n \mid a$ folgt: $n \cdot k = a$; aus $n \mid b$ folgt: $n \cdot l = b$,
$a + b = n \cdot k + n \cdot l = n \cdot (k + l)$
Das heißt: Es gibt eine natürliche Zahl $k + l$, die mit n multipliziert $a + b$ ergibt. Somit gilt $n \mid a + b$.

o 43 a) Die Summe von 4 (von 5) aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 4 (ist durch 5) teilbar.

b) Widerlegung der 1. Aussage:

$$s = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$$
$$= 4n + 6 = 2(2n + 3)$$

Es gibt keine natürliche Zahl, die, mit 4 multipliziert, die Zahl s ergibt.
Es genügt natürlich bereits ein Gegenbeispiel, zum Beispiel $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ mit $4 \nmid 10$, um die Aussage zu widerlegen.

Beweis der 2. Aussage:

$$s = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4)$$
$$= 5n + 10 = 5(n + 2) = 5 \cdot z \quad (z = n + 2)$$

Also: $5 \mid s$.

1. a) $n + 1$ b) $n - 1$ $(n \neq 0)$ c) $n + 2$ d) $n - 2$ $(n \geq 2)$

3. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl.
Es gelte $a = 2k + 1$ und $b = 2l + 1$. Dann ist
$$a + b = 2k + 1 + 2l + 1$$
$$= 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$$
$2(k + l + 1)$ ist eine gerade Zahl, denn sie ist durch 2 teilbar.

4. Es gelte $a = 2k + 1$, $b' = 2m + 1$, $c = 2n + 1$. Wir bilden
$$a + b + c = 2k + 1 + 2m + 1 + 2n + 1$$
$$= 2k + 2m + 2n + 2 + 1 = 2(k + m + n + 1) + 1.$$
Wir erhalten eine ungerade Zahl.

5. Es gelte
$$a + b + c + d + e = 2k + 2k{+}1 + 2k{+}2 + 2k{+}3 + 2k{+}4$$
$$= 10k + 10 = 2(5k + 5)$$

6. Es gelte
$$a \cdot b \cdot c = 2k(2k + 1)(2k + 2)$$
$$= 8k^3 + 12k^2 + 4k = 4(2k^3 + 3k^2 + k) = 4 \cdot z$$
Also $4 \mid a \cdot b \cdot c$

7.* Es gelte $a = 2k + 1$. Dann ist:
$$(2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$
Dabei ist $2k^2 + 2k = z$ eine natürliche Zahl. Mit $2 \cdot z + 1$ wird deutlich, daß das Quadrat einer jeden ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl ist.

8.* Es sei $a = 2k + 1$ und $b = 2l + 1$. Dann ist:
$$(2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1$$
$$= 2(2kl + k + l) + 1.$$

9.* Es gelte $a = 10k + l$ und $b = 10l + k$. Dann ergibt die Summe aus a und b:
$$a + b = 10k + l + 10l + k = 11k + 11l = 11(k + l).$$
Daraus folgt, daß 11 Teiler der Summe $a + b$ ist.

10. $(10x + 1)^2 = (10x)^2 + 2 \cdot 10x + 1 = (10x)^2 + 10x + (10x+1)$

11. $\gamma + \alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$ (Winkelsummensatz im Dreieck)
$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$; $\beta_1 = 180^\circ - \beta$ (Nebenwinkel)
$\gamma + 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$
$\gamma = \alpha + \beta - 180^\circ$

12.* Das Dreieck ABC setzt sich aus den Seiten a, b = a + 7, c = a - 2 zusammen, das Dreieck A'B'C' aus den Seiten a' = a, b' = 10, c' = 5 a.

$u = a + a + 7 + a - 2 = 3a + 5$

$u' = a + 10 + 5a = 6a + 10 = 2(3a + 5)$

Daraus folgt $u' = 2u$.

13.* $\left(\frac{a \cdot b}{c} + d\right) c = a \cdot b + c \cdot d$

B Ähnlichkeit

Lerneinheit B 1: Maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern

o 1 Ähnlich zur Figur a sind b, d und e.

o 3 a) Beim Maßstab 1 : 160 ist die Lokomotive in Wirklichkeit 160 · 122 mm = 19 520 mm = 19,52 m ≈ 19,5 m lang.

b) Spur N: 130 mm; Spur TT: 173 mm; Spur HO: 239 mm

1.

	Maßstab	Original	Bild
a)	1 : 40 000	400 m	1 cm
b)	1 : 25 000	400 m	1,6 cm
c)	1 : 500 000	10 km	2 cm
d)	5 000 : 1	5 µm	25 mm

	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AB} : \overline{CD}$	$\overline{CD} : \overline{AB}$
e)	7,0 cm	21 cm	1 : 3 oder $\frac{1}{3}$	3 : 1 oder 3
f)	2,8 cm	5,6 cm	1 : 2 oder 0,5	2 : 1 oder 2
g)	2,25 m	1,35 m	5 : 3 oder $\frac{5}{3}$	3 : 5 oder $\frac{3}{5}$
h)	71,2 cm	3,56 m	1 : 5 oder 0,2	5 : 1 oder 5

3.

	a) 1 : 87	b) 1 : 120	c) 1 : 160
3 000 mm	34,5 mm	25,0 mm	18,8 mm
1 435 mm	16,5 mm	12,0 mm	9,0 mm
2 740 mm	31,5 mm	22,8 mm	17,1 mm
2 680 mm	30,8 mm	22,3 mm	16,8 mm
2 265 mm	26,0 mm	18,9 mm	14,2 mm
1 233 mm	14,2 mm	10,3 mm	7,7 mm

4. a) $h_a = 6{,}0$ cm; $h_b = 10{,}0$ cm; $h_c = 10{,}62$ cm $\approx 10{,}6$ cm

c)* Wir beweisen $h_a : h_b = b : a$.

Wegen $A = \frac{1}{2}\, g \cdot h_g$ gilt $A = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$ und

$A = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b$ und weiter

$a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Da alle Stücke des Dreiecks größer als Null vorausgesetzt werden können, darf zur Verhältnisgleichung übergegangen werden:

$h_a : h_b = b : a$.

Lerneinheit B 2: Bewegungen und Kongruenz (Wiederholung)

o 4 a) Trapez 5 mit A'(9;2), B'(13;2), C'(11;4), D'(9;4).
b) Trapez 3 mit A'(11;10), B'(11;6), C'(9;8), D'(9;10). Die Spiegelgerade geht durch (12;0) und (0;12).
c) Trapez 2 mit A'(8;7), B'(8;11), C'(6;9), D'(6;7). Drehzentrum ist der Punkt (2;7); Drehwinkel 90°.

o 5 a) Zum Beispiel durch $\overrightarrow{DD''}$ mit anschließender Spiegelung an der Geraden D"C".
b) Zum Beispiel durch die Spiegelung an DC mit anschließender Verschiebung $\overrightarrow{DD''}$.

o 7 a) $\overline{BC}$ wird nur auf einen Punkt abgebildet. Das Bild des Vierecks weist nur Winkel von der Größe 0° auf.

o 8 a) Zum Beispiel: Verschiebung $\overrightarrow{AH}$ mit anschließender Spiegelung an der Geraden GH.

b) $\triangle IKM \cong \triangle ABD$, denn

$\overline{AB} \cong \overline{KM}$, $\overline{AD} \cong \overline{IK}$ und $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle IKM$ (Kongruenzs. sws)

$\triangle KML \cong \triangle BCD$, denn

$\overline{BC} \cong \overline{KM}$, $\overline{CD} \cong \overline{ML}$ und $\overline{BD} \cong \overline{KL}$ (Kongruenzsatz sss)

(Die Kongruenz der letzten beiden Streckenpaare kann jeweils durch die Betrachtung von Dreiecken im Gitterpapier nachgewiesen werden.)

ABCD $\ncong$ IKLM

2. D (2;3)

a) A'(5;3), B'(8;3), C'(8;6), D'(5;6)

b) A'(8;0), B'(8;3), C'(5;3), D'(5;0)

c) A'(5;-3), B'(5;0), C'(8;0), D'(8;-3)

4.

Original	A	B	C	D
Bild	N	Q	P	O

(1) Verschiebung $\overrightarrow{AN}$

(2) Drehung um N um 270°

(3) Spiegelung an NO

5. Folgende Bewegungen erfüllen die Aufgabenstellung:

a) Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{CD}$ <u>oder</u>

Orig.	A	B	C
Bild	F	E	D

Drehung um den Mittelpunkt von $\overline{CD}$ um 180°

Orig.	A	B	C
Bild	E	F	D

b) Nacheinanderausführung von $\overrightarrow{AG}$, der Drehung um G um 90° und der Spiegelung an GH

Orig.	A	B	C	D
Bild	G	F	E	H

c) Drehung um den Mittelpunkt von $\overline{CF}$ um 180° <u>oder</u>

Orig.	A	B	C	D	E
Bild	I	K	F	G	H

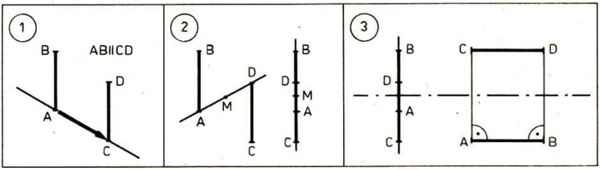
Nacheinanderausführung von $\overrightarrow{CF}$, der Drehung um F um 90° und der Spiegelung an FG

Orig.	A	B	C	D	E
Bild	H	G	F	K	I

d) Nacheinanderausführung der Drehung um C um 90° und Verschiebung $\overrightarrow{CM}$

Orig.	A	B	C	D	E	F
Bild	K	L	M	G	H	I

6.* <u>Verschiebung</u>: ja. Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AC}$, falls B und D in derselben Halbebene bezüglich AC liegen (↗ Bild 1).
<u>Drehung</u>: ja. Drehzentrum ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$, falls B und C in verschiedenen Halbebenen bezüglich AD liegen; Drehwinkel: 180° (↗ Bild 2).



<u>Spiegelung</u>: nein. Eine Spiegelung existiert nur dann, wenn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ auf ein und derselben Geraden liegen oder wenn ABCD ein Rechteck bildet (↗ Bild 3). Dabei ist die Mittelsenkrechte zu $\overline{AD}$ bzw. die Mittelsenkrechte zu $\overline{AC}$ Symmetrieachse.

7.* Folgende Bewegungen erfüllen die Aufgabenstellung:

a) (1) Spiegelung an der Mittelparallelen von g und h
(2) Drehung um 180° um einen Punkt der Mittelparallelen von g und h

b) (1) Spiegelung an einer Senkrechten zu g und h
(2) Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ mit $P \in g$ und $P' \in g$

c) (1) Spiegelung an g
(2) Drehung um einen Punkt P, $P \in g$, um 180°

d) Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ mit $P \in h$ und $P' \in g$

e) Eine solche Abbildung ist nicht möglich.

8. Außer der identischen Abbildung, die jeweils die Figur auf sich selbst abbildet, leisten zum Beispiel folgende Abbildungen das Verlangte:

a) Spiegelung an CD

Orig.	A	B	C
Bild	B	A	C

b) Drehung um M um 180°

Orig.	A	B	C	D
Bild	C	D	A	B

c) Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$

Orig.	A	B	C	D
Bild	B	A	D	C

d) Spiegelung an MC

Orig.	A	B	C
Bild	B	A	C

e) Spiegelung an AC

Orig.	A	B	C	D
Bild	A	D	C	B

f) Drehung um M um 180°

Orig.	A	B	C	D
Bild	C	D	A	B

g) Spiegelung an BD

Orig.	A	B	C	D
Bild	C	B	A	D

h) Spiegelung an MD

Orig.	A	B	C	D	E
Bild	B	A	E	D	C

9. a) F_1 und F_2 müssen beide gleichschenklig-rechtwinklig sein.
   b) und c) Kongruenz ist nicht möglich
   d) F_1 und F_2 müssen beide gleichschenklig stumpfwinklig sein. Der stumpfe Winkel liegt der Basis gegenüber und die Schenkel müssen gleich lang sein.
   e) F_1 und F_2 sind Quadrate gleicher Seitenlänge.
   f) F_1 und F_2 sind Rhomben mit gleich langen Seiten, die in einem Innenwinkel übereinstimmen.

10. a) <u>Voraussetzung</u>: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ und $\overline{AD} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$; $\overline{BE} \cong \frac{1}{2}\overline{BC}$
sowie $\sphericalangle ADF \cong \sphericalangle BEG = 90^\circ$

<u>Behauptung</u>: $\triangle AFD \cong \triangle GEB$

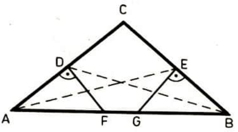
<u>Beweis</u>:

Aus $\overline{AD} \cong \frac{1}{2}\overline{AC}$ und $\overline{BE} \cong \frac{1}{2}\overline{BC}$ folgt in Verbindung mit $\overline{AC} \cong \overline{BC}$:

(1) $\overline{AD} \cong \overline{BE}$.

Da ferner auch

(2) $\sphericalangle FAD \cong \sphericalangle GBE$
(Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)



sowie

(3) $\sphericalangle ADF \cong \sphericalangle BEG$ (nach Voraussetzung)

gelten, sind die Dreiecke ADF und GBE nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent.

b) <u>Behauptung</u>: $\triangle AEC \cong \triangle BDC$

<u>Beweis</u>:

Es gilt

(1) $\sphericalangle ACE \cong \sphericalangle BCD$ (Winkel an der Spitze des Dreiecks ABC).

Ferner gelten

(2) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (nach Voraussetzung)

und wegen $\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \frac{1}{2}\,\overline{AC} \cong \frac{1}{2}\,\overline{BC} \cong \overline{CE}$

(3) $\overline{DC} \cong \overline{CE}$.

Damit sind die Dreiecke AEC und BDC nach dem Kongruenzsatz sws kongruent.

11. a) Die Kongruenz der Dreiecke ABD und FGH folgt aus $\overline{AD} \cong \overline{FH}$, $\overline{AB} \cong \overline{FG}$ und $\overline{BD} \cong \overline{GH}$. ($\overline{AB}$, $\overline{FG}$ sowie $\overline{BD}$, $\overline{GH}$ sind jeweils durch 4 Kästchen in der einen Richtung und 3 Kästchen in der Richtung senkrecht zur ersten bestimmt und damit gleich lang.) Kongruenzsatz sss.
Die Kongruenz der Dreiecke BCD und EFH folgt aus $\overline{DC} \cong \overline{FH}$, $\overline{BC} \cong \overline{EH}$ (beide Strecken sind durch 3 Kästchen in einer Richtung und 2 Kästchen in der Richtung senkrecht zur ersten bestimmt), $\overline{BD} \cong \overline{EF}$, Kongruenzsatz sss.

b) ABCD $\cong$ IKLM; denn $\overline{AD} \cong \overline{KI}$, $\overline{AB} \cong \overline{IM}$, $\overline{BD} \cong \overline{KM}$ sowie auch $\overline{DC} \cong \overline{KL}$, $\overline{BC} \cong \overline{ML}$, $\overline{BD} \cong \overline{KM}$.
EFGH $\cong$ NOPQ; denn $\overline{FG} \cong \overline{NQ}$, $\overline{GH} \cong \overline{QP}$, $\overline{FH} \cong \overline{NP}$ sowie auch $\overline{EH} \cong \overline{PO}$, $\overline{EF} \cong \overline{NO}$, $\overline{FH} \cong \overline{NP}$.

Lerneinheit B 3: Zentrische Streckungen

o 10 a) $\dfrac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \dfrac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \dfrac{\overline{ZC'}}{\overline{ZC}} = \dfrac{2}{1}$

b) D' liegt auf dem Strahl ZD mit $\overline{ZD'} : \overline{ZD} = 2 : 1$.

o 11 a)

Orig.	A	B	C	D	E	F	G
Bild	(12;0)	(6;4)	(8;12)	(6;14)	(-4;10)	(-4;-4)	(8;-6)

b)

Orig.	(3;0)	(1,5;1)	(2;3)	(1,5;3,5)	(-1;2,5)	(-1;-1)	(2;-1,5)
Bild	A	B	C	D	E	F	G

c) Jeder Punkt hat sich selbst zum Bildpunkt.

1. a) Streckung (Z; $\frac{1}{2}$)

Orig.	A	B	C	D	E	F	G
Bild	(3;0)	(1,5;1)	(2;3)	(1,5;3,5)	(-1;2,5)	(-1;-1)	(2;-1,5)

Orig.	(12;0)	(6;4)	(8;12)	(6;14)	(-4;10)	(-4;-4)	(8;-6)
Bild	A	B	C	D	E	F	G

b) Streckung (Z; 3)

Orig.	A	B	C	D	E	F	G
Bild	(18;0)	(9;6)	(12;18)	(9;21)	(-6;15)	(-6;-6)	(12;-9)

Orig.	(2;0)	$(1;\frac{2}{3})$	$(\frac{4}{3};2)$	$(1;\frac{7}{3})$	$(-\frac{2}{3};\frac{5}{3})$	$(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3})$	$(\frac{4}{3};-1)$
Bild	A	B	C	D	E	F	G

c) Streckung (Z; 1,5)

Orig.	A	B	C	D	E	F	G
Bild	(9;0)	(4,5;3)	(6;9)	(4,5;10,5)	(-3;7,5)	(-3;-3)	(6;-4,5)

Orig.	(4;0)	$(2;\frac{4}{3})$	$(\frac{8}{3};4)$	$(2;\frac{14}{3})$	$(-\frac{4}{3};\frac{10}{3})$	$(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3})$	$(\frac{8}{3};-2)$
Bild	A	B	C	D	E	F	G

2. a) Streckung (A; 2) mit A (1; 1)

Orig.	(3;1)	(1;2)	(0;0)	(-1;0)	(4;1)	(1;1)	(4;-2)	(-0,5;-0,5)
Bild	(5;1)	(1;3)	(-1;-1)	(-3;-1)	(7;1)	(1;1)	(7;-5)	(-2;-2)

b) Streckung (B; 0,5) mit B (3; 0)

Orig.	(3;1)	(1;2)	(0;0)	(-1;0)	(11;2)	(-1;2)	(11;-10)	(-7;-4)
Bild	(3;0,5)	(2;1)	(1,5;0)	(1;0)	(7;1)	(1;1)	(7;-5)	(-2;-2)

c) Streckung (C; 3) mit C (3; 1)

Orig.	(3;1)	(1;2)	(0;0)	(-1;0)	$(4\frac{1}{3};1)$	$(2\frac{1}{3};1)$	$(4\frac{1}{3};-1)$	$(1\frac{1}{3};0)$
Bild	(3;1)	(-3;4)	(-6;-2)	(-9;-2)	(7;1)	(1;1)	(7;-5)	(-2;-2)

3. a) Streckung (A; 2)

Orig.	C	H	G	F	B	X
Bild	E	P	N	L	C	T

X ist ein Punkt in der Mitte zwischen G und N.

b) Streckung (T; ?)

Orig.	S	N	T	O	Y	Z
Bild	Q	A	T	D	U	E

Aus dem ersten Punktepaar folgt k = 3.
Y ist ein Punkt mit $\frac{2}{3}$ Kästchen Abstand rechts neben O.

5. b) k = 2

Lerneinheit B 4: Konstruktion von Bildpunkten bei zentrischen Streckungen

o 14 b) $\overline{UV} \approx 5{,}70$ dm

1. a) $\overline{UV} : \overline{UW} = \overline{UX} : \overline{UY}$ b) $\overline{ON} : \overline{OM} = \overline{OQ} : \overline{OP}$

   c) $\overline{FG} : \overline{FH} = \overline{FI} : \overline{FK}$ d) $r : (r + s) = x : (x + y)$

2. a) $\overline{UY} = 12$ cm   b) $\overline{UX} = 10$ cm   c) $\overline{UV} \approx 83{,}3$ mm

   d) $\overline{UW} = 10{,}5$ cm   e) $\overline{UY} \approx 12{,}8$ cm   f) $\overline{UV} \approx 7{,}02$ m

6. A'(7,5;4), B'(6,1;9,6), C'(4,5;8,2), D'(- 1,2;2,8)

7. a) nein   b) ja   c) nein   d) ja   e) ja   f) nein

8. a) Zwei Möglichkeiten: $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$ und $\frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$; k = 2,5.

   b) Nach Satz B 6 gilt: Wenn $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$, so AB ∥ A'B'. Da hier bekannt ist, daß A' und B' Bilder von A bzw. B bei einer zentrischen Streckung sind, ist die Voraussetzung von Satz B 6 erfüllt. Also gilt AB ∥ A'B'.

Lerneinheit B 5: Der erste Strahlensatz

1. a) $\overline{AB} = 1$ cm; $\overline{ZD} = 2{,}5$ cm; $\overline{CD} = 0{,}5$ cm

   b) $\overline{ZB} = 5{,}4$ cm; $\overline{ZC} = 4{,}9$ cm; $\overline{CD} = 1{,}4$ cm

   c) $\overline{ZA} = \frac{220}{7}$ cm $\approx 31{,}4$ cm; $\overline{ZB} = \frac{290}{7}$ cm $\approx 41{,}4$ cm; $\overline{ZC} = 2{,}2$ cm

   d) $\overline{AB} = 3{,}3$ cm; $\overline{ZC} = 9{,}5$ cm; $\overline{ZD} = 12{,}8$ cm

   e) $\overline{ZA} = 3{,}3$ cm; $\overline{ZB} = 5{,}5$ cm; $\overline{CD} = 1{,}8$ cm

f) unendlich viele Lösungen

(Absichtlich sind im Lehrbuch auch Aufgabenstellungen enthalten, die keine Lösung oder viele Lösungen haben. Der Schüler soll aufmerksam und kritisch an die Aufgaben herangehen und nicht in Routine verfallen.)

2. Folgende Verhältnisse erfüllen die Aufgabenstellung:

a) $\frac{\overline{VW}}{\overline{VX}}$; $\frac{\overline{VZ}}{\overline{VY}}$ b) $\frac{\overline{WX}}{\overline{VW}}$; $\frac{\overline{UT}}{\overline{VU}}$ c) $\frac{\overline{WX}}{\overline{VW}}$; $\frac{\overline{ZY}}{\overline{VZ}}$ d) $\frac{\overline{ZY}}{\overline{VY}}$; $\frac{\overline{UT}}{\overline{VT}}$ e) $\overline{ZF} : \overline{EF}$

f) $\overline{DZ} : \overline{EZ}$ g) $\overline{AC} : \overline{ZA}$ h) $\overline{AB} : \overline{BZ}$

4. a) $\overline{ZA} : \overline{BC} = \overline{ZD} : \overline{EF}$

Aus der Strahlensatzfigur mit dem Parallelenpaar g und h folgt nach dem ersten Strahlensatz:

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}}$, also auch (1) $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZE}}$.

Aus der Strahlensatzfigur mit dem Parallelenpaar h und k folgt nach dem ersten Strahlensatz:

$\frac{\overline{ZB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZE}}{\overline{EF}}$, also auch (2) $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.

Aus (1) und (2) folgt dann

$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, also auch $\frac{\overline{ZA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{EF}}$.

5. a) $\overline{UT} = 1$ cm; $\overline{VX} = 6$ cm; $\overline{WX} = 2$ cm; $\overline{VY} = 7{,}5$ cm; $\overline{ZY} = 2{,}5$ cm

b) $\overline{VU} = 3{,}4$ cm; $\overline{VW} \approx 3{,}6$ cm; $\overline{WX} \approx 2{,}4$ cm; $\overline{VZ} \approx 4{,}6$ cm; $\overline{VY} \approx 7{,}6$ cm

c) $\overline{VU} = 1{,}5$ cm; $\overline{VT} = 3$ cm; $\overline{WX} = 3$ cm; $\overline{VZ} = 3{,}5$ cm; $\overline{YZ} = 3{,}5$ cm

d) $\overline{VT} = 5{,}5$ cm; $\overline{VX} \approx 5{,}8$ cm; $\overline{WX} \approx 2{,}3$ cm; $\overline{VY} \approx 6{,}2$ cm; $\overline{YZ} \approx 2{,}5$ cm

e) $\overline{VU} = 5$ cm; $\overline{VW} \approx 4{,}4$ cm; $\overline{WX} \approx 3{,}6$ cm; $\overline{VY} \approx 19{,}1$ cm; $\overline{VZ} \approx 10{,}6$ cm

f) $\overline{VT} = 5$ cm; $\overline{VW} = 3$ cm; $\overline{VX} = 6$ cm; $\overline{VZ} = 3{,}5$ cm; $\overline{VY} = 7$ cm

Lerneinheit B 6: Der zweite Strahlensatz

o 18 a) $\overline{ZM} : \overline{MP} = \overline{ZN} : \overline{NQ}$ b) $\overline{ZQ} : \overline{ZN} = \overline{ZP} : \overline{ZM} = \overline{PQ} : \overline{MN}$

c) $\overline{ZP} : \overline{MP} = \overline{ZQ} : \overline{NQ}$

o 19 a) Zu $\overline{ZN}$ gehört $\overline{MN}$; zu $\overline{QP}$ gehören $\overline{ZQ}$ und $\overline{ZP}$.

b) Zu $\overline{ZD}$ gehört $\overline{BD}$; zu $\overline{AC}$ gehören $\overline{ZA}$ und $\overline{ZC}$.

1. a) $\overline{TV} = 9$ cm; $\overline{TR} = 8$ cm; $\overline{RU} = 4$ cm; $\overline{UV} = 15$ cm
   b) $\overline{TS} = 1{,}5$ cm; $\overline{TV} = 2{,}5$ cm; $\overline{TR} = 3{,}3$ cm; $\overline{RU} = 2{,}2$ cm
   c) $\overline{TS} = 6{,}8$ cm; $\overline{SV} = 1{,}7$ cm; $\overline{TU} = 6{,}5$ cm; $\overline{RU} = 1{,}3$ cm
   d) Nur UV = 19,6 cm kann ermittelt werden.
   e) Keine Lösung, da $\overline{TS} : \overline{TV} \neq \overline{SR} : \overline{VU}$.
   f)* Nach formaler Rechnung ergibt sich: $\overline{TV} = 65$ cm; $\overline{SV} = 30$ cm; $\overline{RU} = 48$ cm; $\overline{SR} = 14$ cm. Das kann aber nicht sein wegen $\overline{TS} + \overline{SR} < \overline{TR}$ bzw. $\overline{TV} + \overline{UV} < \overline{TU}$. (Die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt!)

2. a) 500 mm; 1 000 mm; 1 500 mm
   b) Schrägstreben: 177 cm; 197 cm; 227 cm
   Obergurt: 709 cm

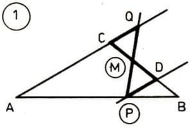
3. Folgende Streckenverhältnisse erfüllen die Aufgabenstellung:
   a) $\overline{ZB} : \overline{BD}$ b) $\overline{DF} : \overline{ZD}$ c) $\overline{ZB} : \overline{ZA}$ oder $\overline{ZF} : \overline{ZE}$

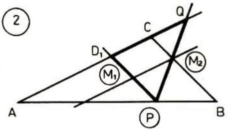
4. a) $\boxed{\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}}$

   Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:
   $$\frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}.$$
   Also gilt auch
   $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}} \quad \text{und weiter} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}.$$

5. Das Bild B 39 macht deutlich, daß die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes keine wahre Aussage ist; denn es ist eine Lage der schneidenden Geraden angegeben, bei der $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AC} : \overline{BD}$ gilt, ohne daß AC und BD parallel zueinander sind.

6.* <u>Erste Möglichkeit</u>: Parallele zu AC durch P schneide BC in D. M sei der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Die Gerade PM schneidet AC in Q, wobei $\overline{MQ} \cong \overline{PM}$ (↗ Bild 1).
   <u>Zweite Möglichkeit</u>: Parallele durch P zu BC schneide AC in D_1. M_1 sei der Mittelpunkt von $\overline{PD_1}$. Die Parallele zu AC durch M_1 schneide BC in M_2. PM_2 schneidet dann AC in Q, wobei $\overline{PM_2} \cong \overline{M_2Q}$ (↗ Bild 2).





Lerneinheit B 7: Praktische Anwendung der Strahlensätze

o 21 b) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{AB}}$

$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{BC}\,(\overline{AB} + \overline{BD})$

$\overline{AB}(\overline{DE} - \overline{BC}) = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$

$\overline{AB} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{\overline{DE} - \overline{BC}}$

$\overline{AB} = \dfrac{24,3 \cdot 16,5}{30,5 - 24,3}$ m

$\approx 64,669\ 4$ m

$\approx 64,7$ m

1. a) $\overline{AB} = 36,90$ m ≈ 37 m
   b) Im Falle $\overline{CB} : \overline{CD} = 1 : 1$ wird mit $\overline{DE}$ sofort die Breite des Flusses ermittelt. In den anderen Fällen braucht die Länge der Strecke $\overline{DE}$ nur mit 2 bzw. 4 multipliziert zu werden.
2. b) $\overline{DC} = 17,5$ m ≈ 18 m
3. 1,77 km $\approx$ 1,8 km (Durchmesser des Zehnpfennigstückes: 21 mm)

Lerneinheit B 8: Eigenschaften zentrischer Streckungen

4. a) Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ stehen im Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$. Nach der Eigenschaft 2 wird bei einer Streckung (Z;k) der Strecke $\overline{AB}$ das Bild $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ und der Strecke $\overline{BC}$ das Bild $\overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC}$ zugeordnet. Diese Bilder stehen im Verhältnis
   $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{k \cdot \overline{AB}}{k \cdot \overline{BC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
   zueinander.
   b) In diesem Fall wird der Nachweis über die Eigenschaft 4 geführt.
   c) Das gleichschenklige Trapez hat nach Eigenschaft 6 wieder ein Viereck zum Bild. Dabei bleibt nach Eigenschaft 1 die Parallelität des Streckenpaares erhalten. Ferner bleiben nach Eigenschaft 3 die Winkelgrößen erhalten, und nach Eigenschaft 2 werden beide Schenkel in der k-fachen Länge abgebildet, so daß sie auch im Bild gleich lang sind.
5. a) Wahre Aussage - Eigenschaften 6, 5 und 4.
   b) Falsche Aussagen - die Formulierung "Jedes Rechteck" schließt Rechtecke mit unterschiedlich langen anliegenden Seiten ein, so daß nach Eigenschaft 2 auch die Bilder dieser Seiten unterschiedlich lang sind.

5. c) Wahre Aussage - Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm. Demzufolge ist auch jedes Bild, das wiederum ein Rechteck ist, gleichzeitig auch ein Parallelogramm.

6.* a) ja b) ja c) nein (Kreisbilder sind Ellipsen)
d) nein (schneiden einander auf g)

Lerneinheit B 9: Ähnlichkeitsabbildungen und ähnliche Figuren

o 26 A'B'C' : ABC = 1 : 1; A"B"C" : ABC = 2 : 1

o 27 A'B'C' : ABC = 2 : 1; A"B"C" : ABC = 2 : 1

o 28 Auf ABCDEF wird eine zentrische Streckung $(Z; \frac{1}{2})$ angewendet, wobei Z ein Kästchen oberhalb M liegt. Dann wird das gewonnene Bild A'B'C'D'E'F' an g gespiegelt.

o 29 a) Jede Bewegung kann als Nacheinanderausführung dieser Bewegung und der identischen Abbildung (einer zentrischen Streckung mit dem Streckungsfaktor 1) aufgefaßt werden.

b) Jede zentrische Streckung kann als Nacheinanderausführung dieser zentrischen Streckung und der identischen Abbildung (Verschiebung $\overrightarrow{PP}$ oder Drehung um einen Punkt P mit dem Drehwinkel 0°) aufgefaßt werden.

2. a) $F_1 \nsim F_2$

b) $F_1 \sim F_2$

A	B	C	$\overline{AB}$
F	E	D	$\overline{EF}$

c) $F_1 \sim F_2$

A	B	C	$\overline{BC}$
E	D	F	$\overline{DF}$

d) $F_1 \sim F_2$

A	B	C	$\overline{AB}$
E	F	D	$\overline{EF}$

oder

A	B	C	$\overline{AB}$
E	D	F	$\overline{DE}$

e) $F_1 \sim F_2$

A	B	C	D	$\overline{AB}$
E	H	G	F	$\overline{EH}$

4. Folgende Antworten sind möglich:

a) Eine Strecke wird bei jeder Bewegung als gleich lange Strecke abgebildet, bei Ähnlichkeitsabbildungen nur im Falle, daß keine Streckung mit $k \neq 1$ beteiligt ist.

4. b) Der Umlaufsinn eines n-Ecks bleibt bei jeder zentrischen Streckung erhalten, nicht aber bei allen Ähnlichkeitsabbildungen (da eine Spiegelung beteiligt sein kann).
   c) Es gibt keine Eigenschaft, die alle Ähnlichkeitsabbildungen haben aber nicht alle Bewegungen. (Bewegungen sind eine echte Teilmenge der Ähnlichkeitsabbildungen.)

5. Ja bei a), d), e); nein bei b) und c).

Lerneinheit B 10: Nacheinanderausführung von Ähnlichkeitsabbildungen

o 31 Aus den Prämissen folgt für den Punkt A des Dreiecks:

(1) $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{1}{2}$ und (2) $\frac{\overline{ZA''}}{\overline{ZA'}} = \frac{3}{1}$ und weiter aus (1)

(1a) $\overline{ZA'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZA}$.

Daraus ergibt sich beim Einsetzen in (2):

$$\frac{\overline{ZA''}}{\overline{ZA}} = \frac{3}{2}\,.$$

Weiter kann man zeigen, daß

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A''C''}}{\overline{AC}}$$

gilt, so daß $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$.

1. $(Z_3;3)$ mit $Z_3\,(-1{,}5;2{,}5)$

3. a) $(Z;\frac{4}{3})$ b) $(Z;\frac{1}{2})$ c) $(Z;1)$, identische Abbildung

4. a) 18 cm und 30 cm b) 1,5 cm und 2,5 cm
   c) 48 cm und 80 cm

5.

	k_1	k_2	k_3
a)	1,5	3	4,5
b)	2	2	4
c)	3	$\frac{5}{3}$	5

Lerneinheit B 11: Ähnlichkeit von Vielecken, insbesondere von Dreiecken

o 33 (1) $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADC = 90^\circ$
$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle DAC = \alpha$

(2) $\triangle ABC \sim \triangle DBC$

$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle CDB = 90^\circ$
$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DBC = \beta$

In beiden Fällen ist die Ähnlichkeit der Dreiecke nach dem Hauptähnlichkeitssatz erwiesen. Aus (1) und (2) kann man auf (3) $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ schließen.

o 34 a) Wir beziehen uns auf den Satz B 15 und ordnen die Eckpunkte der beiden Rechtecke einander folgendermaßen zu (↗ Bild B 66 im Lehrbuch):

A	B	C	D
F	G	H	E

Die einander zugeordneten Innenwinkel sind gleich groß (90°). Für die einander zugeordneten Seiten gilt:

$\overline{AB} : \overline{FG}$ $(= \overline{CD} : \overline{HE}) = 8 : 4 = 2$ und

$\overline{BC} : \overline{GH}$ $(= \overline{AD} : \overline{FE}) = 6 : 3 = 2.$

Also gilt ABCD $\sim$ EFGH.

b) Zuordnung:

A	B	C	D
M	I	K	L

Die einander zugeordneten Innenwinkel sind jeweils gleich groß.

Für die einander zugeordneten Seiten gilt:

$\overline{AB} : \overline{MI}$ $(= \overline{DC} : \overline{KL}) = 8 : 8 = 1$ und

$\overline{BC} : \overline{IK}$ $(= \overline{AD} : \overline{LM}) = 6 : 5 = 1{,}2.$

Also gilt ABCD $\not\sim$ IKLM.

1. a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, denn $\frac{\overline{AC}}{\overline{EF}} = \frac{50\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 5$ und $\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{70\ \text{cm}}{14\ \text{cm}} = 5$ und $\frac{\overline{BC}}{\overline{DF}} = \frac{60\ \text{cm}}{12\ \text{cm}} = 5.$

   b) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, denn $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ und $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DEF$ und $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle EDF$ (wsw)

   c) $\triangle ABC \not\sim \triangle DEF$, denn $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle EFD = 44{,}4^\circ$, aber weder $\overline{AB} : \overline{FD} = \overline{CB} : \overline{EF}$ $(70 : 42 \neq 60 : 45)$ noch $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{CB} : \overline{FD}$ $(70 : 45 \neq 60 : 42)$.

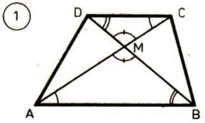
   d) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, denn $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle EFD = 78{,}5^\circ$ und $\overline{AC} : \overline{DF} = \overline{AB} : \overline{DE}$ $(50 : 60 = 70 : 84)$, wobei der Winkel ACB der größeren Seite gegenüberliegt.

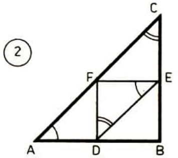
e) Ähnlichkeit kann nicht nachgewiesen werden, da zwar
$\sphericalangle$ CAB $\cong$ $\sphericalangle$ FDE = 57,1° und $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF}$
(70 : 35 = 60 : 30), aber der Winkel CAB liegt der kürzeren Seite gegenüber.

f) $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ FED, denn $\sphericalangle$ ABC $\cong$ $\sphericalangle$ FED = 44,4° und $\overline{AB} \cong \overline{FE}$ sowie $\overline{BC} \cong \overline{ED}$ (sws).

2. a) Voraussetzung: Ein beliebiges Trapez ABCD (AB ∥ CD) wird durch seine beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in die 4 Dreiecke ABM, BMC, CMD und DMA zerlegt (↗ Bild 1).
Behauptung: $\triangle$ ABM ~ $\triangle$ CDM
Beweis (nach dem Hauptähnlichkeitssatz):
$\sphericalangle$ BAM $\cong$ $\sphericalangle$ DCM und $\sphericalangle$ ABM $\cong$ $\sphericalangle$ CDM.

b) $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DM}}$
Die Diagonalen teilen einander im Verhältnis der Grundseiten.
Im Parallelogramm sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang, d. h., die Diagonalen halbieren einander.





3.* Voraussetzung: Es gilt $\overline{CF} \cong \overline{FA}$; $\overline{CE} \cong \overline{EB}$; $\overline{AD} \cong \overline{DB}$
Behauptung: $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF (↗ Bild 2)
Beweis: In einem ersten Schritt wird die Parallelität von FE zu AB mit Hilfe der Umkehrung des ersten Strahlensatzes gezeigt. Da
$\overline{CF} : \overline{CA} = \overline{CE} : \overline{CB}$ (= 1 : 2), gilt FE ∥ AB.
(Entsprechend kann man zeigen, daß CB ∥ FD und AC ∥ DE)
Wegen DE ∥ AC ist $\sphericalangle$ CAB $\cong$ $\sphericalangle$ EDB, und wegen FE ∥ AB ist $\sphericalangle$ EDB $\cong$ $\sphericalangle$ FED, also auch $\sphericalangle$ CAB $\cong$ $\sphericalangle$ FED (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).
Entsprechend findet man $\sphericalangle$ ACB $\cong$ $\sphericalangle$ FDE, und es folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF.

4. a) Zwei Quadrate sind stets einander ähnlich (Innenwinkel 90°; alle Seitenverhältnisse gleich)

   b) Zwei Rhomben sind nur dann einander ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen.

   c)* Zwei Rechtecke sind nur dann einander ähnlich, wenn zwei benachbarten Seiten des einen Rechtecks zwei benachbarte Seiten des anderen Rechtecks so zugeordnet werden können, daß die beiden Seitenverhältnisse aus je einer Seite und der jeweils zugeordneten gleich sind.

   Zwei Parallelogramme sind einander ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und wenn die diesem Winkel anliegenden Seiten des einen Parallelogramms mit den entsprechenden Seiten des anderen Parallelogramms jeweils gleiche Seitenverhältnisse bilden.

   Zwei rechtwinklige Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie außer in dem rechten Winkel noch in einem weiteren Winkel übereinstimmen.

   Zwei gleichschenklige Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze übereinstimmen.

5. Die Trapeze sind nicht einander ähnlich, da

   $\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}} = 1$ und $\frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} > 1$.

6. Die Rechtecke sind nicht einander ähnlich, da für die Breiten $\frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$ und für die Höhen $\frac{800}{900} = \frac{8}{9}$ gilt.

7. AEFD $\not\sim$ ABCD, da nicht gilt $\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$ $(2 : 3 \neq 3 : 4)$

Lerneinheit B 12: Ähnlichkeit von krummlinig begrenzten Figuren und von Körpern

o 36 Auf die Parallelität von AB und A'B' (analog BC und B'C' sowie AC und A'C') kann mit Hilfe der Umkehrung des ersten Strahlensatzes geschlossen werden. Es gilt

$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'} = 1 : 3.$

b) Aus $\overline{ZB} : \overline{ZB'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ und $\overline{ZB} : \overline{ZB'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ folgt $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$.
(Die anderen Beziehungen ergeben sich entsprechend.)

o 37 Die Größe einer Kugel hängt nur vom Radius ab. Für je zwei Kugeln mit ihren Radien r_1 bzw. r_2 kann man stets eine Ähnlichkeitsabbildung angeben, die M_2 in M_1 überführt und eine zentrische Streckung umfaßt, für die $r_2 = k \cdot r_1$ ist.

o 38 Durch die zentrische Streckung (A;4) wird im Bild B 74 folgende Zuordnung der Punkte erzielt:

A	B	C	D	E	F	G	H
A	I	K	L	N	O	P	M

Dabei gilt $\overline{AI} = 4 \cdot \overline{AB}$, $\overline{AK} = 4 \cdot \overline{AC}$ usw.

Die Würfelkanten stehen im Original und im Bild senkrecht aufeinander. Einander entsprechende Kanten stehen sämtlich im Verhältnis 1 : 4 zueinander. Alle Würfel sind zueinander ähnlich.

1. Bedingung: $R_1 : r_1 = R_2 : r_2$

2. a) $a_o = 5$ cm; $b_o = 3$ cm b) $b_o = 21$ cm; $h^* = 16$ cm
   c) $b_o = 10$ cm; $h = 21$ cm d) $a = 12$ cm; $b = 6$ cm

3. Es liegt keine Ähnlichkeit vor.

Lerneinheit B 13: Umfang und Inhalt ähnlicher Figuren

o 39 a) Das Vierfache ($k^2 = 2^2 = 4$)
b) $A_1 = 100\ m^2$; $A_2 = 900\ m^2$ ($u_2 = 3\ u_1$; $A_2 = 3^2 A_1$)

o 41 a) Die Maße eines Lilliputaners zu denen von Gulliver verhalten sich wie 1 : 12; entsprechend müßten sich die Körpermassen wie $1 : 12^3 = 1 : 1\,728$ verhalten. Die Ration von 1 728 Lilliputanerrationen war richtig bemessen.
b) $1 : 12^2 = 1 : 144$; also Stoff für 144 Lilliputaner-Anzüge.
c) 3 375 Lilliputaner-Rationen und 225 Anzüge

1. Erste Zeile: $u' = 22$ cm; $A' = 20\ cm^2$
   Zweite Zeile: $a' = 7$ cm; $A' = 61{,}25\ cm^2$
   Dritte Zeile: $a' = 12$ cm; $u' = 54$ cm

3. Aus $u_1 : u_2 : u_3 = 2 : 3 : 4$ folgen $u_2 = \frac{3}{2} u_1$ und $u_3 = 2 u_1$.
Nach Satz B 16 gilt $A_2 = \frac{9}{4} A_1$ wie auch
$A_3 = 4 A_1$. Unter Nutzung der Beziehung
$A_1 + A_2 + A_3 = 232 \text{ cm}^2$ erhält man $A_1 = 32 \text{ cm}^2$,
$A_2 = 72 \text{ cm}^2$, $A_3 = 128 \text{ cm}^2$.

4. Doppelte Kantenlängen; Materialaufwendungen stehen im Verhältnis 1 : 4.

5.*

	a	b	c	d
A	2 400 cm^2	24 cm^2	0,24 cm^2	0,0024 cm^2
V	8 000 cm^3	8 cm^3	0,008 cm^3	0,000 008 cm^3
A:V	0,3/cm	3/cm	30/cm	300/cm

Allgemein: A : V = 6 : a; je kleiner a, desto größer A : V und auch das Verhältnis Oberfläche : Gewichtskraft.

Lerneinheit B 14: Konstruktion mit Hilfe der Ähnlichkeit

o 42 Dreieck ABC mit a = b = 3 cm und c = 2 cm zeichnen, Schenkel verlängern, geforderte Schenkellänge abtragen (1. Strahlensatz)

o 43 a) Die zentrische Streckung $(C_1; k_1)$ liefert $a = k_1 \cdot a_1$ sowie $b = k_1 \cdot b_1$. Durch das Einzeichnen der Parallelen AB zu A_1B_1 ist nach dem ersten Strahlensatz gesichert:
$\overline{C_1A} : \overline{C_1A_1} = \overline{C_1B} : \overline{C_1B_1}$ bzw. $b : b_1 = a : a_1 = k_1$,
woraus $b = k_1 b_1$ und $a = k_1 a_1$ folgen.
Die Schüler können aus der Zeichnung b = 4,1 cm ablesen und dann $k_1 = \frac{b}{b_1} = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{4{,}1 \text{ cm}} \approx 0{,}61$ berechnen.

3. Je nach Maßstab und Zeichengenauigkeit
2,4 m × 1,4 m bzw. 2,35 m × 1,41 m.

1. 10 m 2. a) 38,525 m $\approx$ 38,5 m b) 25,957 m $\approx$ 26,0 m

3. Das sehr flache Dreieck liefert nur recht ungenaue Werte:
a) etwa 60 m, b) etwa 5°, c) 45°.
Unter der Steigung der Straße verstehen wir den Tangens des Neigungswinkels. (Vgl. Meyers Universallexikon, Band II, Stichwort: Gefälle) Rechnerisch ergäbe sich:
a) 56 m, b) $4{,}57^\circ$.
Wird die Fahrbahn selbst für die Rechnung benutzt, so geht man vom Sinus aus, der bei kleinen Winkeln nur unwesentlich vom Tangens abweicht. Nach dem Sinus ergäbe sich in dieser Aufgabe ein Neigungswinkel von $4{,}59^\circ$, so daß zur Beantwortung der Frage b dieser Umstand keine Rolle spielt. Dagegen hängt die Beantwortung von c von der richtigen Begriffsbildung ab: Beim Neigungswinkel von 45° werden 100 % nur erreicht, wenn der Tangens betrachtet wird.

4. a) $a : b = b : \frac{a}{2}$; $a \cdot b = 1\ m^2$

b)

A_0	841 mm × 1 189 mm	A_3	297 mm × 420 mm
A_1	594 mm × 841 mm	A_4	210 mm × 297 mm
A_2	420 mm × 594 mm	A_5	148 mm × 210 mm
		A_6	105 mm × 148 mm

5. a) Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $\sphericalangle AMS = 7{,}2^\circ$ und so für den Erdumfang
$u : 5\,000$ Stadien $= 360^\circ : 7{,}2^\circ$
b) 250 000 Stadien $\approx$ 46 000 km
c) $\Delta u = 6\,000$ km; $\frac{\Delta u}{u} = 0{,}15 = 15\ \%$

6.* $s : h = F_G : F_H$ mit $s = 169$ cm, $h = 43$ cm, $F_G = 1\,200$ N.
$F_H = 273$ N; $F_N = 1\,168$ N.

2. (Maßangaben in Zentimeter) Hier und bei den folgenden Aufgaben wurde jeweils auf Millimeter gerundet. Man beachte, daß es sich nicht um Meßwerte handeln soll.

	a)	b)	c)	d)
$\overline{CD}$	2,236 ≈ 2,2	3,0	3,003 ≈ 3,0	3,219 ≈ 3,2
a	3,354 ≈ 3,4	4,243 ≈ 4,2	3,723 ≈ 3,7	4,904 ≈ 4,9
b	3,0	4,243 ≈ 4,2	5,082 ≈ 5,1	4,266 ≈ 4,3
c	4,5	6,0	6,3	6,5

3.

	a)	b)	c)	d)
h	2,5 cm	2,6 cm	2,9cm	2,2 cm
a	3,9 cm	2,9 cm	4,1 cm	4,2 cm
b	3,2 cm	5,4 cm	4,0 cm	2,5 cm

4. Maßangaben in Zentimeter

	a)	b)	c)	d)
$\overline{BC}$	6,7	6,2	6,4	2,9
p	5	4,9	2,0	2,6
q	4	3,1	19	0,6
h	4,5	3,9	6,1	1,3

5.* (Der Kathetensatz ist den Schülern zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt.)

a) Aus (2) $a : p = c : a$ folgt (↗ LB S. 71)

$\frac{a \cdot a}{p} = c$;

aus (3) $b : q = c : b$ folgt

$\frac{b \cdot b}{q} = c$.

Wir setzen gleich und erhalten

$\frac{a \cdot a}{p} = \frac{b \cdot b}{q}$, mithin $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$.

b) Flächeninhaltsgleichheit (im rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten gleichzeitig Höhen)

Lerneinheit B 17: Der Höhensatz

1. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{BF}^2$; $\overline{CD} \cdot \overline{DE} = \overline{DF}^2$; $\overline{AF} \cdot \overline{EF} = \overline{CF}^2$

2. a) $p \cdot q = 36\ cm^2$ b) 3 cm und 12 cm c) 5 cm und 20 cm

3. a) Die kleinstmögliche Hypotenuse erhält man für den Fall eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks: $p = q = h$. Man erhält also $c = 7$ cm.
   b)* Die größtmögliche Hypotenuse gibt es nicht.

4. a) 2,36 cm ≈ 2,4 cm b) 4,85 cm ≈ 4,8 cm

Lerneinheit B 18: Der Kathetensatz

o 50 a) Die Rechteckseite $\overline{KL}$ muß kleiner als die Seite des Quadrates sein, wenn man mit dem Hypotenusenabschnitt beginnt. Da aber auch mit der Hypotenuse unter Anwendung des Thaleskreises begonnen werden kann - vgl. Aufgabe b - so lautet die Antwort: ja.
b) Zeichnen der (längeren)Rechteckseite ; errichten des Halbkreises (Thaleskreises) über der Strecke; Kreisbogen mit dem Radius a von einem Endpunkt der Strecke und ermitteln des Punktes C des rechtwinkligen Dreiecks; fällen des Lotes von C auf die Strecke und ermitteln des Höhenfußpunkts D.

1. $\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$; $\overline{AE} \cdot \overline{EF} = \overline{CE}^2$; $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AF}^2$;
$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CF}^2$; $\overline{CE} \cdot \overline{CD} = \overline{CF}^2$; $\overline{CE} \cdot \overline{DE} = \overline{EF}^2$

2. (alle Angaben in cm und gerundet)

	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{DB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$
a)	8,3	5,3	3,0	4,0	6,7	5,0
b)	10,6	3,9	6,7	5,1	6,4	8,4
c)	6,2	2,0	4,2	2,9	3,5	5,1
d)	5,5	2,4	3,1	2,7	3,7	4,1
e)	11,4	9,3	2,1	4,4	10,3	4,9
f)	5,8	5,0	0,8	2,0	5,4	2,2

3. a) $\overline{QR} = 5,3$ cm b) $\overline{QR} = 7,6$ cm c) $\overline{QR} = 2,4$ cm

o 52 a) $h \approx 20{,}78$ cm b) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

1. a) 25 cm b) 2,9 cm c) 6,5 cm d) 2,9 cm
   e) 40,3 mm f) 6,75 dm g) 27,6 m

2. a) $\overline{RP} = 8{,}5$ cm b) $\overline{PQ} = 2{,}0$ cm c) $\overline{RP} = 2{,}7$ cm d) $\overline{RP} = 9$ m
   e) $\overline{QR} = 5{,}95$ dm f) $\overline{PQ} = 3{,}72$ m g) n.l., da $\overline{PR} < \overline{PQ}$

3. a) 6 cm b) 4,5 dm c) 5,71 dm

4. $a = \sqrt{21{,}2^2 + 17{,}6^2}$ cm $= [27.553584]$ cm
   $u \approx 110$ cm [110.21434]
   $A = 35{,}2$ cm $\cdot$ 42,4 cm $\approx 1\,490$ cm^2 [1492,48]

5. a) $d = \sqrt{10^2 - 7^2}$ cm $\approx 7{,}1$ cm [7.1414284]
   b) $e = \sqrt{10^2 + 15^2}$ cm ≈ 18 cm [18.027756]

6. a) $a = [6.5817931]$ cm; $u \approx 19{,}7$ cm [19.745379]
   b) $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

7. a) $\overline{AC} \approx 4{,}5$ cm; $\overline{BD} \approx 6{,}4$ cm; $\overline{AD} = 5$ cm; $\overline{DF} \approx 9{,}4$ cm
   $\overline{AF} \approx 12{,}2$ cm; $\overline{CE} \approx 8{,}5$ cm
   b)* Die Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{DE}$ mögen einander im Punkt S schneiden. Dann gilt nach dem zweiten Strahlensatz
   $5 : x = 3 : (8 - x)$, woraus $x = 5$ folgt. Über
   $\overline{DS} = \sqrt{5^2 + 5^2}$ cm und $\overline{SE} = \sqrt{3^2 + 3^2}$ cm erhält man
   $\overline{DE} \approx 11{,}3$ cm [11.313708] und entsprechend $\overline{AE} = 13$ cm.

8. $d_R = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$; $7 \cdot \sqrt{3} \approx 12{,}1$ cm [12.124356]

9. a) Kantenlängen etwa 5,2 cm; 3,7 cm; 1,5 cm
   $d_R \approx 6{,}6$ cm [6.5559134]
   b) $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

10.* a) Horizontale Achsen im Bild B 99: $s_1 \approx 4{,}2$ cm
   Vertikale Achse im Bild: $s_3 \approx 4{,}2$ cm
   (Alle 3 Körperachsen haben die gleiche Länge.)
   b) Höhe einer Seitenfläche: $h = [2.5980762]$ cm
   Inhalt einer Seitenfläche: $A_1 = [3.8971143]$ cm^2
   Oberfläche des Oktaeders: $A_0 \approx 31$ cm^2 [31.176915]

Lerneinheit B 20: Umkehrung des Satzes des Pythagoras

1. a) ja, ∢ BCA b) ja, ∢ BAC c) ja, ∢ ABC
   d) nein e) ja, ∢ BAC f) nein
   g) nein h) ja, ∢ BAC

2. 6 cm

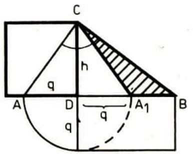
3. a) Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn $b^2 = 2\,a^2$.
   b) Das Dreieck ist spitzwinklig, wenn $b^2 < 2\,a^2$.
   (Zur Begründung denken wir uns die Spitze des Dreiecks beweglich längs des Lotes auf die Basis des Dreiecks. Das Dreieck wird spitzwinklig, wenn wir den Abstand der Spitze von der Basis vergrößern und damit auch die Schenkel verlängern, so daß die rechte Seite der Gleichung $b^2 = 2\,a^2$ vergrößert wird.)
   c) Das Dreieck ist stumpfwinklig, wenn $b^2 > 2\,a^2$.
   Die Umkehrungen gelten ebenfalls.

4. Nur die Umkehrungen von a und d sind wahre Aussagen.

5. a) ja; $13^2 = 5^2 + 12^2$
   b) Tripel natürlicher Zahlen a, b und c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man Pythagoreische Zahlen. Beispiele dafür sind: (3; 4; 5), (8, 15, 17), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29). Wendet man auf ein Pythagoreisches Dreieck eine zentrische Streckung an, so erhält man wieder ein pythagoreisches Dreieck.

Lerneinheit B 21: Umkehrungen von Höhen- und Kathetensatz

o 56 a) "Wird in einem Dreieck eine Seite c durch die zugehörige Höhe h in die Abschnitte p und q geteilt, so gilt $h^2 = p \cdot q$ genau dann, wenn das Dreieck rechtwinklig und c die Hypotenuse in diesem Dreieck ist."



b) Obwohl auch in dem Fall, der im Bild dargestellt ist, $h^2 = p \cdot q$ gilt, ist das Dreieck A_1BC nicht rechtwinklig.

o 57 Angenommen, es gilt die Umkehrung nicht, dann gibt es auf AB einen Punkt B_1 und eine Strecke $\overline{DB_1} = p_1 \neq p$, so daß gilt
$a^2 = c \cdot p_1$ (nach dem Kathetensatz, angewandt auf $\triangle AB_1C$).
Nach der Voraussetzung gilt aber $a^2 = c \cdot p$, so daß $c \cdot p_1 = c \cdot p$ folgt. Das ist nur möglich, wenn $p_1 = p$, was aber ausgeschlossen wurde (Widerspruch). Somit ist die Annahme, daß das Dreieck nicht rechtwinklig ist, falsch.

1. a) ja b) ja c) nein (es gilt $\overline{DB} \cong \overline{BC}$) d) nein

2. a) rechter W. b) stumpfer W. c) spitzer W. d) stumpfer W.

Lerneinheit B 22: Anwendungen

o 58 a) $\overline{AB} \approx 6{,}7$ Einheiten [6.7082039]
b) $\overline{AB} \approx 5{,}4$ Einheiten [5.3851648]
c) $\overline{PQ} \approx 6{,}4$ Einheiten [6.4031242]

o 59 a) 384 m b) $a \approx 72{,}8$ m; $u \approx 291{,}3$ m [291.32598]

1. $\overline{OA} = 13$ cm; $\overline{OB} = 25$ cm; $\overline{OC} = 10$ cm; $\overline{OD} = 17$ cm;
$\overline{OE} = 15$ cm; $\overline{OF} = 3$ cm

2. a) 10,3 cm [10.29563] b) 8,6 cm [8.6023253] c) 5,7 cm [5.6568542]
d) 7,2 cm [7.1512237] e) 5,3 cm [5.3075418] f) 6,0 cm [6.0166436]
g) 10,9 cm [10.878419] h) 13,5 cm [13.502963]

3. 12,65 cm + 6,71 cm + 12,65 cm + 6,71 cm = 38,72 cm $\approx$ 38,7 cm

4. b) 5 cm; auf dem Kreis um O mit r = 5 cm
c) Folgende Punkte erfüllen die Aufgabenstellung:
(− 5;0); (4;3); (2;4,58); (3,5;3,57)

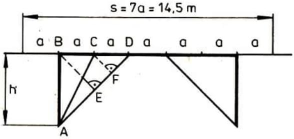
5.* a) $x^2 + y^2 = r^2$
b) Wenn ein Punkt P auf dem Kreis K um O mit dem Radius r liegt, so gilt für seine Koordinaten (x; y) die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.
c) Die Umkehrung ist eine wahre Aussage.
d) $x^2 + y^2 \leqq r^2$

6. $h \approx 4{,}6$ mm [4.5825757] 7. $h \approx 73$ m [72.56032]

8. Firsthöhe: $h \approx 1{,}3$ m. (Der angezeigte Wert [1.2990381] wird gleich weiterverwendet.)
Länge des Obergurtes: $l_1 \approx 2{,}6$ m
Länge der Schrägstrecke: $l_2 = 0{,}75$ m

9. Obergurt: 7 211 mm [7211.1026]
Diagonalen: 2 404 mm und 3 333 mm
Senkrechten: 1 333 mm und 2 667 mm

10.* $h = 2{,}8$ m; $a = 2{,}07$ m



$$\overline{AD} = \sqrt{(2\cdot 2{,}07)^2 + 2{,}8^2}\ \text{m} = 5{,}00\ \text{m}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2{,}07^2 + 2{,}8^2}\ \text{m} = 3{,}48\ \text{m}$$

Zwischenrechnung zur Ermittlung von $\overline{BE}$:

$$\overline{BE}^2 = h^2 - \overline{AE}^2 = 4\,a^2 - (\overline{AD} - \overline{AE})^2$$

$$\overline{AE} = \frac{h^2 - 4\,a^2 + \overline{AD}^2}{2 \cdot \overline{AD}} = 1{,}57\ \text{m}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{2{,}8^2 - 1{,}57^2}\ \text{m} = 2{,}32\ \text{m}$$

Zwischenrechnung zur Ermittlung von $\overline{CF}$:

$$\overline{CF}^2 = a^2 - \overline{FD}^2 = \overline{AC}^2 - (\overline{AD} - \overline{FD})^2$$

$$\overline{DF} = \frac{a^2 - \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2}{2 \cdot \overline{AD}} = 1{,}72\ \text{m}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{a^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{2{,}07^2 - 1{,}72^2}\ \text{m} = 1{,}16\ \text{m}$$

11.* 12 Fuß

Komplexe Übungen im Kapitel B

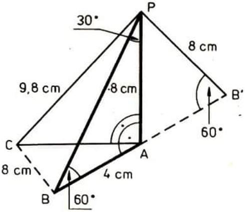
1. $A_{ACGE} \approx 42{,}78\ \text{cm}^2$; $A_{ACF} \approx 26{,}2\ \text{cm}^2$

2. ja bei a), c), d), e), f); nein bei b).
Weitere mögliche Schnittfiguren: Gleichschenkliges Dreieck; Trapez; Fünfeck.

3. Zu prüfen ist, ob gilt $a_o : a = b_o : b$.
a) ja b) nein c) ja

6. Der Körper wird von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt (Achtflächner oder Oktaeder).

7. Man ergänzt das Dreieck BAP zu einem gleichschenkligen Dreieck PBB' und erhält damit sogleich ein gleichseitiges Dreieck:



$\sphericalangle PBA = 60^\circ$; $\overline{BA} = 4$ cm.
Aus $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{BA}^2$ folgt
$\overline{PA} = \sqrt{48}$ cm $\approx 6,9$ cm.
Im $\triangle$ CAP erhält man
durch $\overline{CA}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PA}^2$
$\overline{CA} = \sqrt{48}$ cm $\approx 6,9$ cm,
und, da $\overline{CA} \cong \overline{PA}$ und $\sphericalangle CAP = 90^\circ$, folgt $\sphericalangle ACP = \sphericalangle APC = 45^\circ$.
(Die Winkel BCP und BPC können von den Schülern noch nicht ermittelt werden.)

8.* 12 Rhomben, die keine Quadrate sind.

9. $r = \sqrt{3^2 + 13^2}$ mm $\approx 13,3$ mm [13.341664]

10. Im Satz B 15 wird vermerkt, daß auch die Reihenfolge der Eckpunkte zu beachten ist. Das macht im vorliegenden Fall deutlich, daß keine Ähnlichkeit vorliegt.

11. a) $\overline{AB} = 2\sqrt{21}$ cm $\approx 9,2$ cm [9.1651514] b) $\overline{CD} = 6$ cm

14. a) 220 km [225.77865]
b) 68 km [68.192375] bzw. 82 km [82.405704]
c) rund 31 m hoch

15. a) Ja; aus dem Zahlentripel (3,4,5) kann durch Multiplikation mit 2 [Anwendung des Ähnlichkeitssatzes (sss)$_\sim$] das Zahlentripel (6,8,10) gewonnen werden, welches die Bedingung erfüllt.
b) Nein; das Quadrat einer ungeraden Zahl (2 a + 1) ist stets eine ungerade Zahl ($4a^2 + 4a + 1$). Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl:
$2a + 1 + 2b + 1 = 2(a + b + 1)$.
Demnach würde in diesem Fall nach dem Satz des Pythagoras mit dem Hypotenusenquadrat eine ungerade Maßzahl mit der Summe der Kathetenquadrate aber eine gerade Maßzahl entstehen.

16. a) $A_I \approx 217{,}45\ cm^2$; $A_{II} \approx 560{,}35\ cm^2$

b) $A_I = A_{II} = 608\ cm^2$ c) $A_I = A_{II} = 256\ cm^2$

17. Die Angabe über die längsten Seiten liefert der Streckungsfaktor k, denn $a' = ka$, also $35\ cm = k \cdot 21\ cm$ mit $k = \frac{5}{3}$. Weiter folgt wegen $u' = k \cdot u$ für die Umfänge: $u = 60\ cm$; $u' = 100\ cm$.

18. $h_1 = 3{,}2\ cm$; $a_2 \approx 2{,}4\ cm$; $h_2 \approx 2{,}0\ cm$
Beide Dreiecke können nicht eindeutig konstruiert werden, da der dritte Eckpunkt auf der Parallelen im Abstand h zur Grundlinie a nicht fixiert ist.

21. a) Ja; B kann 575 m hoch sein.
b) Nein; B kann nur 718 m hoch sein.
c) Ja; B kann 1 180 m hoch sein.
d) Nein; B kann nur 657 m hoch sein.

22. Die 326,8 m lange Projektion ergibt auf der Karte im Maßstab 1 : 40 000 eine 8 mm lange Strecke.

23. a) 323 m ≈ 320 m b) Der Wert 323 m erweist sich als ein Mindestwert, da die geneigte Strecke bei der Projektion auf die Horizontale auf jeden Fall eine Verkürzung erfährt.

24. Die Steigung liegt mit 2 % noch um 0,5 % unter dem zulässigen Höchstwert.

25. b) Teilstücke: 129 m; 53,7 m; 89,1 m; 138 m
Gesamtlänge: 410 m; Luftlinie: 397 m

26. a) $\overline{AB} = 5\ 320$ m
b)* F ist auf $\overline{DE}$ so festzulegen, daß man von C aus längs CF noch am Berg vorbeisehen kann. Wegen $\overline{FG} : \overline{CF} = m : n$ ergibt sich $\overline{FG} = 2\ 430$ m.

27. a) Bei 2 Lagen: 2 286 mm; bei 3 Lagen: 3 347 mm.
b) Bei 2 Lagen: 203 Rohre; bei 3 Lagen: 294 Rohre.

C Lineare Funktionen

Lerneinheit C 1: Zuordnungen; Funktionen

o 1 $x = 7 \cdot 0{,}80 + 0{,}50 = 6{,}10$

$y = 3{,}5 \cdot 0{,}80 + 0{,}50 = 3{,}30$

$z \cdot 0{,}80 + 0{,}50 = 5{,}30; \quad z = 6$

o2 a) 5,027 cm b) 21,14 cm c) 172,8 cm d) 2,827 cm

o3

gegebene Zahl	91	124	119	121	86	94	85	90
gerundete Zahl	90	120	120	120	90	90	90	90

o4

Originalpkt.	A	B	C	I	E	K
Bildpunkt	L	H	G	K	E	I

1. a)

Eingangswerte	6,2	- 1,9	4	0	$-\pi$
zugeordnete W.	6,2	1,9	4	0	π

b)

Eingangswerte	6	1,5	- 2	0,5	- 3,5	3,5
zugeordnete W.	-6	-1,5	2	- 0,5	3,5	- 3,5

c)

Eingangswerte	18	18	24	24	56	56	27	5	39	39
zugeordnete W.	2	3	2	3	2	7	3	5	3	13

d)

Eingangswerte	A	C	D	F	L	N	P
zugeordnete W.	Rostock	Neubrandenburg	Potsdam	Erfurt	Erfurt	Gera	Potsdam

e)

Eingangswerte	zugeordnete Werte
Wasser	Wasserstoff / Sauerstoff
Schwefelsäure	Schwefel / Wasserstoff / Sauerstoff
Kohlendioxid	Kohlenstoff / Sauerstoff
Salzsäure	Chlor / Wasserstoff
Kochsalz	Natrium / Chlor
Kalziumsulfat	Kalzium / Schwefel / Sauerstoff

f)*

1977	166 Mrd. M	1981	194 Mrd. M
1978	173 Mrd. M	1982	202 Mrd. M
1979	180 Mrd. M	1983	210 Mrd. M
1980	187 Mrd. M	1984	218 Mrd. M

2. a) Funktionen sind 1 a, b, d und f, denn es handelt sich um eindeutige Abbildungen.
   b) Zu jedem Eingangswert gibt es <u>nur einen</u> zugeordneten Wert.

3. Sowohl a als auch b stellen Funktionen dar, denn es liegt Eindeutigkeit vor.

Lerneinheit C 2: Funktionen als Mengen geordneter Paare

o 5 a) Nur (7; 14) und (100; 200) gehören zur Funktion. (1,5; 3) gehört nicht dazu, weil es sich im Def.Ber. nur um natürliche Zahlen handelt.
   b) y = 24; x = 48; x = 1 620; y = 284
   (0,2; y) kann nicht zu der betreffenden Funktion gehören, da der Def.-Bereich nur aus den natürlichen Zahlen besteht.

1. a)

x	2	5	1	-2	-3	0
y	10	19	7	-2	-5	4

   b) f(2) = 10; f(4) = 16; f(-1) = 1; f(0) = 4
   f(2) + f(3) = 10 + 13 = 23; f(0) + f(6) = 4 + 22 = 26
   c) f(a) = 3 · a + 4 usw.

2. a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $x \in R$; $x \neq 0$ c) y = 0

   d)

x	5	2	-5	$\frac{1}{2}$	-2,5	1	-0,25	$\frac{3}{5}$	$-\frac{13}{17}$
f(x)	0,2	0,5	-0,2	2	-0,4	1	-4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{13}$

3. a) f(2) = 0,5; f(-7) = - 0,142 85; f(0,3) = 3,333 333 3;
   f(0,19) = 5,263 157 9; f(- 0,002) = - 500

   b)

x	1,8	0,67	- 602	5 327	0,002 5
f(x)	0,555 55	1,492 537 3	- 0,001 661 1	0,000 187 72	400

4. a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

5. a)

x	0	1	2	3	4	5	1,5	0,25
$\sqrt{x}$	0	1	1,414 213 6	1,732 050 8	2	2,236 068	1,224 744 9	0,5

b) Jeder nichtnegativen reellen Zahl wird ihre Quadratwurzel zugeordnet.

c) Für negative Zahlen sind keine Quadratwurzeln definiert.

Lerneinheit C 3: Graphische Darstellung von Funktionen im Koordinatensystem

o 6 a) $P_1(2;2)$, $P_2(3;1)$, $P_3(-3;1,5)$, $P_4(-2;2,5)$,
$P_5(-1;-3)$, $P_6(2;-1,5)$, $P_7(1,5;-3)$, $P_8(-3;-1)$

1. a) $P_1(3;1)$, $P_2(2;3)$, $P_3(0;3)$, $P_4(-1;1)$,
$P_5(0;-2)$, $P_6(1;0)$, $P_7(2;-1)$, $P_8(2;-2)$

b) $P_1(0,5;2)$, $P_2(0;3)$, $P_3(-3;3)$, $P_4(-3,5;2)$,
$P_5(-3,5;-1)$, $P_6(-2,5;-3)$, $P_7(-0,5;-3)$, $P_8(0,5;-1)$

5. a) Zu jeder reellen Zahl gehört ein Quadrat, mit anderen Worten: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist für alle reellen Zahlen definiert.

6. Funktionen sind a, c, e, f und g.

Lerneinheit C 4: Direkte Proportionalität; Funktionen $f(x) = mx$

1. a) ja; $y = 0,05 \cdot x$ b) nein

c) ja; $m = \varrho \cdot V$ d) nein, falls Zählermiete berücksichtigt wird

(Gleichungen der Form $y = mx + n$ sind in dieser Lerneinheit noch nicht zu erwarten.)

e) ja; $p = \frac{F}{A}$

3. b) Für $m \geqq 0$ gilt: Wenn m größer wird, dann wird auch α größer. $\alpha = 90^{\circ}$ ist nicht möglich, da in diesem Fall keine eindeutige Zuordnung und damit keine Funktion vorliegt. Für $m < 0$ gilt: Wenn m kleiner wird, dann wird auch α kleiner.

c) Es gilt <u>nicht</u>: $\alpha \sim m$

4. Die Graphen der beiden Funktionen sind Spiegelbilder voneinander, wobei an der y-Achse gespiegelt wird.

5\. a) $\frac{1}{4}$ h $\hat{=}$ 23,75 km; im Bild abgelesen: <u>25 km</u>,
1 h $\hat{=}$ 95 km; abgelesen: <u>95 km</u>,
75 min = $\frac{5}{4}$ h; $\frac{5}{4}$ h $\hat{=}$ 118,75 km; abgelesen: <u>120 km</u>

b) 50 km $\hat{=}$ 0,53 h; abgelesen <u>$\frac{1}{2}$ h</u>,

120 km $\hat{=}$ 1,26 h; abgelesen <u>1 $\frac{1}{4}$ h</u>,

200 km $\hat{=}$ 2,11 h, das sind 2 h 6 min; abgelesen: <u>2 $\frac{1}{8}$ h</u>

Lerneinheit C 5: Funktionen f(x) = mx + n und ihre graphische Darstellung

o 9 Die Punkte liegen auf ein und derselben Geraden.

o 11 b) Die Gerade, die nur im 1. und 3. Quadranten liegt, ist Graph einer linearen Funktion (Proportionalität).
Die Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, ist Graph einer konstanten Funktion.
Die Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft, ist nicht Graph einer Funktion, denn zu x = − 1 gehören unendlich viele y-Werte.
Alle Geraden, die weder zur x-Achse noch zur y-Achse parallel sind, sind Graphen von linearen Funktionen.

1\. a) 11,55 M; 13,80 M; 9,75 M; 12,15 M; 16,50 M
b) $y = 0{,}15\,x + 9{,}00$; $x \in N$

2\. Linear sind die Funktionen a, b, c, d, g, h, i, k, l, m und p.

3\. a) ja; m = 1 000, n = − 1 000
b) nein; y = 3, also m = 0
c) nein; $f(x) = 0 \cdot x + 4{,}5$, also m = 0
d) ja; $f(x) = -x$, also $m = -1$, $n = 0$
e) ja; $f(x) = \frac{1}{2}x$, also $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$
f) nein; $f(x) = \frac{2}{x}$, also nicht die Form $f(x) = mx + n$
g) nein; der Graph der Funktion ergibt keine Gerade

4\. a) Zur Funktion gehören (2;6), (−1;−30), (0;−18)
b) (2;2 600), (5;6 200), (0;200), (−3;−3 400), (−10;−11800)
c) (1;16), (12,5;200), (1,187 5;19), (0;0), (−1;−16)

6\. Konstante Funktionen wurden in 2 e, 2 f, 3 b und 3 c angegeben.

7. a) 2,5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 2,3 $\boxed{=}$, 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$, ...

b) 1 $\boxed{-}$ 12,2 $\boxed{=}$, 1,5 $\boxed{=}$, ...

Lerneinheit C 6: Der Einfluß von m und n auf den Graph von $f(x) = mx + n$

o 12 a) Der Graph von $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$ ergibt sich aus dem Graph von $g(x) = \frac{3}{4}x$, in dem der Graph von $g(x)$ um 1 in Richtung der negativen y-Achse verschoben wird.

b) Die Graphen von f und g sind zueinander parallel.

c) Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt $P(0;-1)$.

o 13 a) Die Gerade steigt, wenn $m > 0$.

b) Die Gerade fällt, wenn $m < 0$.

c) Für $m = 0$ verläuft die Gerade parallel zur x-Achse im Abstand n.

1. a) Jede Gleichung $f(x) = \frac{2}{3}x + n$ $(n \in R)$ löst die Aufgabe.

b) Jede Gleichung $f(x) = mx + n$ $(m, n \in R;\ m > \frac{2}{3})$ l.d. Aufg.

c) Jede Gleichung $f(x) = mx + n$ $(m, n \in R;\ 0 < m < \frac{2}{3})$.

d) Jede Gleichung $f(x) = mx - 1,5$ $(m \in R;\ m < 0)$ l. d. Aufg.

2. a) Beide Graphen schneiden die y-Achse im Punkt $S(0;3)$; eine Gerade steigt, die andere fällt.

b) Beide Graphen schneiden die y-Achse im Punkt $S(0;-3)$; eine Gerade steigt, die andere fällt.

3. Bild C 20 a: (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 > 0;\ n_2 < 0$
Vergleich: $m_1 = m_2;\ n_1 > n_2$

Bild C 20 b: (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 < 0;\ n_2 > 0$
Vergleich: $m_1 > m_2;\ n_1 = n_2$

Bild C 20 c: (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 > 0;\ n_2 < 0$
Vergleich: $m_1 > m_2;\ n_1 > n_2$

Bild C 20 d: (1) $m_1 > 0;\ n_1 > 0$ (2) $m_2 < 0;\ n_2 < 0$
Vergleich: $m_1 > m_2;\ n_1 > n_2$

4. $(-\frac{1}{2};2)$, $(6,75;16,5)$, $(-\frac{5}{2};-2)$; $(-\frac{3}{2};0)$, $(-5,75;-8,5)$

5.

	Funktionsgleichung	steigend (s), fallend (f), konstant (c)	S(0;y)	Quadranten (von links nach rechts)
a)	$f(x) = 2x + 3$	s	(0;3)	III II I
b)	$f(x) = -2x + 5$	f	(0;5)	II I IV
c)	$f(x) = 5x - 2$	s	(0;-2)	III IV I
d)	$f(x) = -5x - 3$	f	(0;-3)	II III IV
e)	$f(x) = 0 \cdot x$	c	(0;0)	x-Achse
f)	$f(x) = 7$	c	(0;7)	II I
g)	$f(x) = 2{,}4x - 1{,}2$	s	(0;-1,2)	III IV I
h)	$f(x) = -7x$	f	(0;0)	II IV
i)	$f(x) = -0{,}9x - 0{,}9$	f	(0;-0,9)	II III IV

Lerneinheit C 7: Ermitteln des Anstiegs einer linearen Funktion

o 14 a) $\overline{AB} = 1$ LE; $\overline{BC} = \frac{1}{2}$ LE; $\overline{CD} = 2$ LE; $\overline{DE} = 1$ LE;

$\overline{FG} = x_1 - x_2$; $\overline{GH} = f(x_1) - f(x_2)$

b) $\triangle ABC \sim \triangle CDE$; $\triangle ABC \sim \triangle FGH$; $\triangle CDE \sim \triangle FGH$

c) jeweils 1 : 2

d) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = m$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = m$; $\frac{\overline{GH}}{\overline{FG}} = m$, wobei jeweils $m = \frac{1}{2}$

o 15 Bei Beschäftigung mit diesem Auftrag ist der Zweck erfüllt, wenn die Schüler merken, daß die Aufgabenstellung nicht einfach zu erfüllen ist. Ein mögliches Ergebnis wäre $f(x) = -1{,}5x + 3{,}5$.

o 16 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(0) - f(2{,}5)}{0 - 2{,}5} = \frac{3{,}5 - 0}{0 - 2{,}5} = -\frac{3{,}5}{2{,}5} = -\frac{7}{5}$

$f(x) = -\frac{7}{5}x + \frac{7}{2}$

Diese Gleichung beschreibt die Gerade besser, weil das Dreieck OP_2P_0 größer ist als das zuerst benutzte.

1. a) $m = 1$; $f(x) = x + 1$ b) $m = -6$; $f(x) = -6x$

c) $m = 2{,}7$; $f(x) = 2{,}7x - 1{,}3$ d) $m = -3{,}2$; $f(x) = -3{,}2x + 2{,}4$

e)* $m = 7$; $f(x) = 7x - 2$ f) $m = -4{,}8$; $f(x) = -4{,}8x - 12$

2. Folgende Untersuchungen sind möglich:

a) $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \neq \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$, denn $\frac{5}{1} \neq \frac{3}{1}$

b) $\frac{f(2,5) - f(0)}{2,5} \neq \frac{f(0) - f(-1,5)}{0 - (-1,5)}$, denn $\frac{2,5}{2,5} \neq \frac{-1,5}{1,5}$

c) und d) entsprechend

3. a) (1) $f(x) = x + 2$ und (2) $g(x) = x - \frac{1}{2}$

b) (1) $f(x) = 2x + 2$ und (2) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

c) (1) $f(x) = 3x + 2$ und (2) $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

d) (1) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1,6$ und (2) $g(x) = -\frac{5}{6}x - 2$

4. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x$ b) $f(x) = x + 1$ c) $f(x) = -0,8x - 0,8$

5. g_{AB}: $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$ g_{AC}: $f(x) = \frac{5}{2}x + 3$ g_{BC}: $f(x) = 3$

6. a) ja, linear b) $y = 7,5x + 20$

c) $f(16) = 140$ ist nicht möglich, da Wasser bei normalem Druck bei 100 °C siedet.

7. c) $v = f(\vartheta) = m \cdot \vartheta + 332 \frac{m}{s}$

m schwankt etwa zwischen 0,6 und 0,75 in Abhängigkeit von dem Paar, das hierzu untersucht wird:

$P_1(-30^\circ; 313 \frac{m}{s})$; $P_2(-16^\circ; 323 \frac{m}{s})$; $m = \frac{323 - 313}{-16 + 30} = \frac{10}{14} \approx 0,71$

$P_3(12^\circ; 339 \frac{m}{s})$; $P_4(0^\circ; 332 \frac{m}{s})$; $m = \frac{339 - 332}{12} = \frac{7}{12} \approx 0,58$

d) $v \approx 333 \frac{m}{s}$ $(340 \frac{m}{s}; 347 \frac{m}{s})$

Lerneinheit C 8: Graphisches Lösen von Gleichungen

o 17 a) ja b) $L = \{0;1;2\}$ o 18 5,5 km; 2 km; 5 km

o 19 a) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

o 20 $x_1^2 = (-2,2)^2 = 4,84$; $x_2^2 = 2,2^2 = 4,84$

1. a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = 1,2$ d) $x = 3,2$

2. a) $x = 1,9$ b) $x = -0,6$ c) $x = -0,35$ d) $x = 0,4$

3. a) $x = 2$ b) $x = 1,6$ c) $x = -1$ d) $x = 0,5$

4. a) $L = \{2; -2\}$ b) $L = \{1,5; -1,5\}$ c) $L = \{0\}$ d) $L = \emptyset$

5.* a) $L = \{7; -7\}$ b) $L = \{5; -1\}$

6. a) $L = \{3; -3\}$ b) $L = \{3,5; -3,5\}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \{2; -2\}$

Lerneinheit C 9: Nullstellen von Funktionen

o 22 a) Jede lineare Funktion hat höchstens eine (d.h. eine oder keine) Nullstelle.

b) Der Graph einer linearen Funktion liegt auf einer Geraden, die nicht parallel zur x-Achse ist und somit genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse hat. Dieser Schnittpunkt kann jedoch außerhalb des Definitionsbereiches der Funktion liegen; in diesem Fall hat die Funktion keine Nullstelle.

1. a) $x_0 \approx -0,8$ b) $x_1 \approx -1,4$; $x_2 \approx 1,4$
   c) $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ d) keine Nullstellen

3. a) $x_0 = 0,5$ b) $x_0 = 1,7$ c) keine Nullstelle
   d) $x_0 = 0,8$ e) keine Nullstelle f) $x_0 = 5$

4. Es gibt beliebig viele lineare Funktionen mit der jeweils geforderten Nullstelle, so wie es auch unendlich viele Geraden gibt, die durch einen Punkt $(x_1;0)$ gehen.

5. a) $x_0 = \frac{2}{3}$ b) $x_0 = -6$ c) keine Nullstelle
   d) $x_0 = -4$ e) $t_0 = \frac{420}{39} \approx 10,769\,231$ f) keine Nullstelle

6. a) $m = -2$ b) $m = 2$ c) $m = -0,5$ d) $m = -5$

7.* a) $P_1(\frac{2}{3};0)$, $P_2(0;-2)$ b) $P_1(-\frac{395}{54};0)$, $P_2(0;3,95)$ $\left[-\frac{395}{54} \approx -7,3148\right]$

Lerneinheit C 10: Wiederholung der Umformungsregeln für Gleichungen

o 24 a) $0(0 + 2) = 0(0 + 3)$

$$0 = 0$$

b) Peter hat durch x dividiert, was nur zulässig ist, wenn $x \neq 0$ ist. Der Fall $x = 0$ muß also gesondert untersucht werden. Indem man 0 in die Ausgangsgleichung einsetzt, überprüft man, ob diese Zahl Lösung ist oder nicht.

1. Lösungen sind in a) 4,1; b) 5,4; c) 1,2; d) 1,5; - 1,5.

2. b) ja, $x = 2$

   c) Nein; jede Zahl ist Lösung. Also ist die Äquivalenz zur Ausgangsgleichung nicht vorhanden.

3. a) $x = 3$, $x = 5$, $x = 2$ b) $L = \{0;1;2;3;4;5\}$

4.* a) $x = 3$; $x = 1{,}5$; $x = 2$; $x = 5$; $x = 0$ b) $x \geq 0$, $x \in R$

5. a) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$ b) $x = 3$ c) $x = 4$

   d) $x_1 = 4{,}7$; $x_2 = -4{,}7$ e) $x_1 = 12{,}54$; $x_2 = -12{,}54$

   f) $x = 3{,}5$

6. a) $x = 2{,}5$ b) $x = 1{,}4$ c) $x = 4$ d) $x = 75{,}6$

   e) $x = 0{,}4$ f) $x = -2$ g) $x = -16$ h) $x = -26{,}4$

   i) $x = -0{,}6$ k) $x = 3$ l) $x = 2$ m) $x = 1{,}2$

7. a) $x_1 = 4$; $x_2 = -4$ b) keine Lösung

   c) $x_1 = 1{,}15$; $x_2 = -1{,}15$

9.* a) $x = 0$ b) $x = 8$

10. a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 6$

11. a) -24 b) -96 c) 20 d) 280 e) $-5x - 14$

    f) -6 g) $5x - 10$ h) $73x - 20$

12. a) $x = 12$ b) $x = 6$ c) $x = -2$ d) $x = 15$

    e) $x = 8$ f) $x = 2$ g) $x = 4$ h) $x = -5$

13. a) $x = 20$ b) $x = -\frac{100}{11} \approx -9{,}1$ c) $x = 1$ d) $x = 11$

14. a) $x = 4{,}274\,193\,6 \approx 4{,}3$ b) $x = 10{,}832\,317 \approx 10{,}8$

15.* a) $m = 1$ $(x = 12)$, $m = 2$ $(x = 6)$, $m = 3$ $(x = 4)$,

    $m = 4$ $(x = 3)$, $m = 6$ $(x = 2)$, $m = 12$ $(x = 1)$

    b) ja, $m = \frac{1}{2}$ c) $m \in \{1;2;3;6\}$

Lerneinheit C 11: Lineare Gleichungen mit Brüchen

1. a) $x = 14$ b) $x = 12$ c) $x = 24$ d) $x = 216$

   e) $x = -2$ f) $x = 15$ g) $x = -\frac{140}{3}$ h) $x = -5$

2. a) $x = 5$ b) $x = 3$ c) $x = \frac{31}{5}$ d) $x = -2$

   e) $x = -\frac{1}{6}$ f) $x = 9$ g) $x = -1$ h) $x = 5$

3. Folgende Zahlen erfüllen die Aufgabenstellung:

a) $a = 0;\ b = 1;\ c = 11$ b) $a = 0;\ b = 1;\ c = 19$

c) $a = 0;\ b = 1;\ c = -3$ d) $a = 2{,}5;\ b = 3;\ c = 2{,}5$

4. a) $a = b \cdot c;\ b = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{b}$ b) $a = (c + 3)\,b;\ b = \frac{a}{c+3}$; $c = \frac{a}{b} - 3$

c) $a = \frac{b \cdot c}{6};\ b = \frac{6\,a}{c}$; $c = \frac{6a}{b}$ d) $a = b - c;\ b = a + c$; $c = b - a$

5. a) Flächeninhalt eines Dreiecks; $h_c = \frac{2\,A}{c}$

b) Winkelsumme im Dreieck; $\beta = 180 - \alpha - \gamma$

c) Volumen eines Quaders; $c = \frac{V}{ab}$

d) Streckenverhältnis; $\overline{ZA} = \frac{\overline{ZA'}}{k}$

e) Flächeninhalt eines Trapezes; $h = \frac{2\,A}{a + c}$

f) Geschwindigkeit bei geradliniger gleichförmiger Bewegung; $s = v \cdot t$

g) wie f; $t = \frac{s}{v}$

h) Hebelgesetz; $F_2 = \frac{l_1}{l_2} \cdot F_1$

i) Dichte; $V = \frac{m}{\varrho}$ k) Leistung; $t = \frac{W}{P}$

l) Druck; $A = \frac{F}{p}$ m) Wärme; $\Delta T = \frac{Q}{cm}$

6. a) $a = \sqrt{c^2 - b^2};\quad b = \sqrt{c^2 - a^2};\quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) $F = \frac{W}{s};\quad s = \frac{W}{F}$ c) $\alpha = \frac{\Delta l}{l \cdot \Delta T};\quad l = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta T};\quad \Delta T = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l}$

Lerneinheit C 12: Lösen von Sachaufgaben

1. a) x und $x + 19$ b) x und $x - 34{,}5$ c) x und $x + 260$

d) $x,\ x + 3$ und $x - 5$

e) a, b, c sind die Seiten; es gilt $a = 2\,b;\ c = 2\,b - 2$ cm

2. $(76-x) \cdot 3 = 210;\quad x = 6$

3. $3\,x = (x + 18) - 16;$ 1 und 19

4. $2{,}6\ \mathrm{m} \cdot x + 1{,}0\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} = 9{,}4\ \mathrm{m}^2$; $x \approx 3{,}2\ \mathrm{m}$ [3.1538462]

5. $10\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{m} + \frac{1}{2} \cdot 10\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{m} + x = 160\ \mathrm{m}^2$; $x = 10\ \mathrm{m}^2$

6. $A = 10\,580\ \mathrm{m}^2$

7. 0,45 N und 1,05 N

8. 10, 9, 7 Ringe

9. nein ($\frac{839}{3} \notin N$)

10. 60, 62, 64, 66

11.* 9 und 7

12.* $1 \cdot x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x = 1$; $x = \frac{12}{17}\ \mathrm{h} \approx 42\ \mathrm{min}$ [42.352941]

Komplexe Übungen im Kapitel C

1. $b = 1$

2. a) $n_1 = -3$; $n_2 = -5$; $n_3 = 4$; $n_4 = 2$

3. a) $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$
   b) $m_1 = m_2$ und $n_1 \neq n_2$
   c) $m_1 \neq m_2$

4. b) $f(x) = 2x + 4$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
   c) $x_0 = -2$ und $x_0 = 8$

5. b) $x_0 \approx 0{,}7$ [0.68181] d) $P(0;-1{,}5)$, $Q(0{,}68;0)$
   e) $\overline{PQ} = 1{,}65$ [1.6469396] g) $g(x) = 2{,}2x - 3$
   h) Die Strahlen OS und OR werden von Parallelen PQ und RS geschnitten. Das Dreieck ORS ist Bild von $\triangle$ OPQ bei der zentrischen Streckung (O;2).
   i) $A \approx 0{,}51\ \mathrm{cm}^2$

6. $f(x) = \frac{1}{3}x + 6$

7. a) $f(x) = -2{,}5x + 1{,}5$ b) $f(x) = -3x - 2{,}5$

8.* a) Ja, näherungsweise. (Die Fahrtkosten werden dabei nach der Tarifentfernung ermittelt und gerundet – vgl. Kursbuch der Deutschen Reichsbahn, Binnenverkehr.)
   b) Ja, näherungsweise, wobei durch den unterschiedlichen Zuschlag zwischen Zone 1 und Zone 2 eine Sprungstelle zu beachten ist.
   c) Auch hier gibt es in bestimmten Bereichen lineare Funktionen, wobei jedoch noch stärker differenziert wird.

9. b) $\vartheta = f(W) = 0{,}45 \, \frac{^{o}C}{kg} \cdot W + 18 \, ^{o}C$

c) $51{,}8 \, ^{o}C$ d) 138 kJ

10. a) noch 40 min b) 250 min = 4 h 10 min

11. b) nein c) nein ($1\,000 \cdot 894 \neq 2\,000 \cdot 776$)

12. a) nach 36 Tagen (Abnahme : 10 t in 6 Tagen)

b) Verbrauch an einem Tag: $\frac{10}{6}$ t

Verbrauch in einem Jahr: 608,3 t ≈ 610 t

c) Neuer Verbrauch an einem Tag: $\frac{10}{6} \cdot 0{,}938 \text{ t} = 1{,}563 \text{ t}$

Der Vorrat von 60 t reicht rund 38 Tage [38.379531].

d) Einsparung je Tag: $\frac{10}{6} \cdot 0{,}062$ t [1.0333 - 01]

Einsparung je Jahr: 37,7 t [37.716667]

14. a) $x = 3$ b) $x = 16$ c) $x = \frac{1}{3}$ d) $x = -16$

e) $x = 192$ f) $x = \frac{1}{192}$ g) $x = 32$ h) $x = \frac{1}{3}$

i) $x_1 = 32$; $x_2 = -4$ k) $x_1 = -16$; $x_2 = 32$

l) $x_1 = 8$; $x_2 = -3$ m) $x_1 = 6$; $x_2 = -4$

15. $x = 5{,}26$ m; $y = 2{,}75$ m 16. 30 und 50

17. 85 g : 15 g = 250 g : x; x ≈ 44 g [44.117647]

18. 100 kg · 7 % = (100 kg − x) · 25 %; x = 72 kg

19. $\overline{AB} \approx 380$ m [378.18182]

20. a) $x = 0{,}782\,08 \approx 0{,}78$ b) $x = 1{,}794\,805\,2 \approx 1{,}8$

c) $x = 3$ d) $x = 0$ e) $x = 7$ f) $x = 4$

21.* Fahrtstrecke: 2,5 km

$0{,}8 \cdot x + 0{,}5 = x$. Daraus folgt $x = 2{,}5$.

23.*

7 $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ [1.]; 7 $\boxed{+}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ [2.];

7 $\boxed{+}$ 7 $\boxed{+}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$ [3.]

D Stereometrie

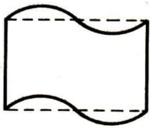
Lerneinheit D 1: Prismen und Kreiszylinder (Wiederholung)

o 2 a) Die Seitenkanten stehen senkrecht auf Grund- und Deckfläche.

o 3 a) $V \approx 23{,}383\ \text{cm}^3$ ($A_G = [3.897\ 114\ 3]$; $V = [23.382\ 686]$)

b) $V \approx 42{,}412\ \text{cm}^3$ $[42.411\ 501]$

o 4 c) Nein. Es ergibt sich eine Figur, die mit dem nebenstehenden Bild angedeutet wurde. Hinweis: Ein Parallelogramm ist stets der Mantel eines geraden Kreiszylinders.



o 5 Prisma: $A_o = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} + 3\ ah$

$\approx 61{,}79\ \text{cm}^2$ $[61.794\ 229]$

Kreiszylinder: $A_o = 2\pi a^2 + 2\pi ab$

$\approx 70{,}69\ \text{cm}^2$ $[70.685\ 835]$

1. c) $V \approx 153\ 725\ \text{mm}^3$ $[153.725]$

$A_o \approx 17\ 470\ \text{mm}^2$ $[174.7]$

2. $V \approx 464\ 406\ \text{mm}^3$ $[464\ 405.93]$

$A_o \approx 33\ 364\ \text{mm}^2$ $[33\ 363.714]$

3. $a = b = \sqrt{\frac{2 \cdot 138}{3{,}6}}\ \text{cm} \approx 8{,}8\ \text{cm}$ $[8.755\ 950\ 4]$; $b \approx 12{,}4\ \text{cm}$ $[12.388\ 511]$

4. a) $h \approx 3{,}2\ \text{cm}$ $[3.183\ 098\ 9]$ b) $d \approx 2{,}5\ \text{cm}$ $[2.523\ 132\ 5]$

5. Bild D 2 a: $V = a^2 \cdot 12\ \text{cm}$; $a = \sqrt{\frac{300}{12}}\ \text{cm} = 5{,}0\ \text{cm}$

$d_A = 13{,}0\ \text{cm}$

Bild D 2 b: $h = \frac{24\ 700}{22^2}\ \text{mm} \approx 51\ \text{mm}$ $[51.033\ 058]$

$d_R = \sqrt{d_A^{\ 2} + h^2} \approx 60\ \text{mm}$ $[59.769\ 332]$

Bild D 2 c: $b \approx 37\ \text{mm}$ $[37.080\ 992]$

$V \approx 6{,}95\ \text{cm}^3$ $[6\ 952.686\ 1]$

6. $\varrho = 1{,}7\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $m = V \cdot \varrho$; $m \approx 3{,}3\ \mathrm{kg}$ [3 331.32]

7. $\varrho \approx 7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ [7.809 202 6]

8. $h = \frac{4 \cdot 2\,000}{\pi \cdot 15^2}\ \mathrm{cm} \approx 11{,}3\ \mathrm{cm}$ [11.317 685]

9. $V \approx 24{,}5\ \mathrm{dm^3}$
Folgende Werte erfüllen die Aufgabenstellung

h	25 cm	30 cm	35 cm
d	36 cm	33 cm	30 cm

10. a) Das Volumen verdreifacht (vervierfacht) sich.
b) Das Volumen verringert sich auf ein Viertel (es vergrößert sich auf das 4,5-fache).

11.* (1) $V = \pi \frac{d_1^2}{4} \cdot h_1 = \pi \frac{d_2^2}{4} \cdot h_2$ mit $h_1 : h_2 = 1 : 2$

Daraus folgt: $d_1^2 \cdot h_1 = d_2^2 \cdot 2\,h_1$

$d_1 = \sqrt{2}\,d_2$, also $d_1 : d_2 = \sqrt{2} : 1.$

(2) $V = \pi \frac{d_1^2}{4} \cdot h_1 = \pi \frac{d_2^2}{4} \cdot h_2$ mit $d_1 : d_2 = 1 : 2$

Daraus folgt: $d_1^2 \cdot h_1 = 4\,d_1^2 \cdot h_2$

$h_1 = 4\,h_2$, also $h_1 : h_2 = 4 : 1.$

12. (1) $h = 12\ \mathrm{cm}$: $V = \frac{u^2}{4\pi} \cdot h \approx 380\ \mathrm{cm^3}$ [381.971 87]

(2) $h = 20\ \mathrm{cm}$: $V \approx 230\ \mathrm{cm^3}$ [229.183 12]

Lerneinheit D 2: Dritte Potenzen und Kubikwurzeln

o 6 a) $V \approx 2\,048\ \mathrm{cm^3}$ b) $V \approx 2\,050\ \mathrm{cm^3} = 2{,}05\ \mathrm{dm^3}$
c) $5{,}16^3 \approx 137{,}388$ ($5^3 = 125$)
$23{,}84^3 \approx 13\,549{,}4$ ($20^3 = 8\,000$)
$293{,}5^3 \approx 25\,282\,700$ ($300^3 = 27\,000\,000$)
$0{,}47^3 \approx 0{,}103\,823$ ($0{,}5^3 = 0{,}125$)
$0{,}086\,2^3 \approx 0{,}000\,640\,50$ ($0{,}1^3 = 0{,}001$)

o 7 $3{,}58^3 = 45{,}88$; $35{,}8^3 = 45\,880$; $0{,}358^3 = 0{,}045\,88$
Aus $35{,}8 = 3{,}58 \cdot 10$ folgt $35{,}8^3 = 3{,}58^3 \cdot 10^3 = 3{,}58^3 \cdot 1\,000$
Aus $0{,}358 = 3{,}58 \cdot \frac{1}{10}$ folgt $0{,}358^3 = 3{,}58^3 \cdot \frac{1}{10^3} = 3{,}58^3 \cdot \frac{1}{1\,000}$.

o 8 a) $\sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{81{,}2} = 10 \cdot 4{,}33 = 43{,}3$

$\sqrt[3]{1\,000} \cdot \sqrt[3]{812} = 10 \cdot 9{,}33 = 93{,}3$

b) $\sqrt[3]{0{,}536} = 0{,}812$; $\sqrt[3]{0{,}053\,6} = 0{,}377$; $\sqrt[3]{0{,}005\,36} = 0{,}175$

c) $26{,}5^3 > 20^3 = 8\,000$, also hätte in der Aufgabe eine größere Zahl als 8 000 stehen müssen.
Mit Hilfe der Tafel erhält man
$\sqrt[3]{1\,861} = \sqrt[3]{1\,000 \cdot 1{,}861} = 10 \cdot \sqrt{1{,}861} = 10 \cdot 1{,}23 = 12{,}3$.
Fehler: Es wurde bei 18,61 anstelle von 1,861 abgelesen.

o 9 a) $\sqrt[3]{4\,791} = 16{,}858\,1$ kein genauer Wert der Wurzel. Beim Ausmultiplizieren $16{,}858\,1 \cdot 16{,}858\,1 \cdot 16{,}858\,1$ müßte sich in der zwölften Stelle nach dem Komma eine 1 ergeben.

b) $13 = \sqrt[4]{28\,561}$

1. a) 185,193; 1 771,561; 0,512; 714,516 98;
0,000 008; 87 528 400; 5 177,72; 0,000 000 015 625

b) 314,432; 0,314 432; 729 000; 0,000 729;
2 571,35; 2 571 300 000; 0,000 000 125; 8 741 820

2. a) 3,350 14; 7,217 65; 5,039 68; 1,085 77;
9,608 18; 0,960 818; 8,490 18; 8

b) 4,081 66; 0,879 366; 8,793 66; 0,5;
10,772 2; 13; 2,800 77; 1,3

3. a) Die Werte für 1^3, 2^3, 3^3, ..., 9^3 sind exakte Werte.

b)* Tafelwert: $2{,}3^3 = 12{,}17$
Das Produkt $2{,}3 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}3$ erfordert 3 Dezimalstellen, wobei die letzte wegen $3^3 = 27$ eine 7 ist. Das macht offenkundig, daß der Näherungswert 12,17 durch Aufrunden entstanden ist. Der genaue Wert ist also 12,<u>167</u>.

4. $\varrho = 7{,}8\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; 2 192 kg [2 191 885.8]

5. $V = \frac{1}{4}\pi \cdot 17{,}8^2 \cdot 17{,}8 \cdot \pi \approx 13{,}9\ \text{dm}^3$ [13 915.525]

6. $1{,}45\ \text{hl} = 145\,000\ \text{cm}^3$;

$a = \sqrt[3]{145\,000}\ \text{cm} + 2 \cdot 0{,}5\ \text{cm} \approx 53{,}5\ \text{cm}$ [53.535 9]

7. Stahl: $\varrho = 7{,}8\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 2{,}3$ cm [2.340 46]
Kupfer: $\varrho = 8{,}93\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 2{,}2$ cm [2.237 26]
Aluminium: $\varrho = 2{,}7\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 3{,}3$ cm [3.333 33]

8. $V = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} \cdot 2a$; $a = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 755}{\sqrt{3}}}$ cm $\approx 9{,}6$ cm [9.552 98]

Lerneinheit D 3: Das Volumen schiefer Prismen

o 10 b) Gerades Prisma: Grundfläche ist das Trapez ABCD, Höhe ist repräsentiert durch $\overline{AE}$.
Schiefes Prisma: Grundfläche ist das Rechteck DCGH, Höhe ist repräsentiert durch das Lot von C auf AB.

c) $V = 169\ \text{cm}^3$

1. a) $V = 99{,}2\ \text{cm}^2$ b) $h = 5$ cm c) $a = 5$ cm
d) $a \approx 5{,}2$ cm [5.177 693 5]

2. a) Die Seitenflächen eines geraden Prismas sind Rechtecke, die Seitenflächen eines schiefen Prismas sind Parallelogramme. Da eins der Vierecke, das im Fall des geraden Prismas Grundfläche ist, im Fall des schiefen Prismas Seitenfläche wird, kann es nur ein Parallelogramm sein. Somit kommen nur vierseitige Prismen in Betracht.

b)

	ein	zwei	drei Rechtecke
dreiseitig	ja	nein	ja
vierseitig	ja	ja 1)	nein
fünfseitig	ja	ja 1)	nein

1) Dann müssen zwei Seiten der Grundfläche zueinander parallel sein.

3. a) $V = 41{,}16\ \text{cm}^3$ $\approx 41\ \text{cm}^3$ b) $h = \sqrt{s^2 - (\frac{b}{2})^2} \approx 5{,}4$ cm [5.431 160 1]
$V \approx 89\ \text{cm}^3$ [88.636 532]
c) $s \approx 5{,}6$ cm [5.556 977 6]; $b \approx 1{,}7$ cm [1.748 511 19]
d) $h \approx 3{,}7$ cm [3.698 435 3]; $s = \sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2} \approx 4{,}1$ cm [4.136 725 8]
$A_o = 2\,(as + ab + bh) \approx 57\ \text{cm}^2$ [57.159 558]

7. Stahl: $\varrho = 7{,}8\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 2{,}3$ cm [2.340 46]

Kupfer: $\varrho = 8{,}93\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 2{,}2$ cm [2.237 26]

Aluminium: $\varrho = 2{,}7\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $a \approx 3{,}3$ cm [3.333 33]

8. $V = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} \cdot 2a$; $a = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 755}{\sqrt{3}}}$ cm $\approx 9{,}6$ cm [9.552 98]

Lerneinheit D 3: Das Volumen schiefer Prismen

o 10 b) Gerades Prisma: Grundfläche ist das Trapez ABCD, Höhe ist repräsentiert durch $\overline{AE}$.

Schiefes Prisma: Grundfläche ist das Rechteck DCGH, Höhe ist repräsentiert durch das Lot von C auf AB.

c) $V = 169\ \text{cm}^3$

1. a) $V = 99{,}2\ \text{cm}^2$ b) $h = 5$ cm c) $a = 5$ cm

d) $a \approx 5{,}2$ cm [5.177 693 5]

2. a) Die Seitenflächen eines geraden Prismas sind Rechtecke, die Seitenflächen eines schiefen Prismas sind Parallelogramme. Da eins der Vierecke, das im Fall des geraden Prismas Grundfläche ist, im Fall des schiefen Prismas Seitenfläche wird, kann es nur ein Parallelogramm sein. Somit kommen nur vierseitige Prismen in Betracht.

b)

	ein	zwei	drei Rechtecke
dreiseitig	ja	nein	ja
vierseitig	ja	ja[1)]	nein
fünfseitig	ja	ja[1)]	nein

1) Dann müssen zwei Seiten der Grundfläche zueinander parallel sein.

3. a) $V = 41{,}16\ \text{cm}^3 \approx 41\ \text{cm}^3$ b) $h = \sqrt{s^2 - (\frac{b}{2})^2} \approx 5{,}4$ cm [5.431 160 1]; $V \approx 89\ \text{cm}^3$ [88.636 532]

c) $s \approx 5{,}6$ cm [5.556 977 6]; $b \approx 1{,}7$ cm [1.748 511 19]

d) $h \approx 3{,}7$ cm [3.698 435 3]; $s = \sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2} \approx 4{,}1$ cm [4.136 725 8]

$A_o = 2\,(as + ab + bh) \approx 57\ \text{cm}^2$ [57.159 558] o 19 b) Da auf beide Figuren mit den Flächeninhalten A_1 bzw. A_2 eine räumliche Streckung mit dem gleichen Faktor $k = \frac{h^*}{h}$ angewendet wurde, weisen die Schnittfiguren Flächeninhalte A'_1 bzw. A'_2 auf, denen die Beziehung $A'_1 = k^2 \cdot A_1$ bzw. $A'_2 = k^2 \cdot A_2$ zugrunde liegt. Wenn nun $A_1 = A_2$ ist, so muß auch $A_1' = A_2'$ gelten.

o 20 a) Das Volumen der Pyramide ist gewiß kleiner als das Volumen eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleich großer Höhe.

b) Das Bild D 21 macht deutlich, daß die entsprechende Pyramide innerhalb des Prismas ein kleineres Volumen hat, als der Keil mit dem Volumen $V_{Keil} = \frac{1}{2} A_G \cdot h$. (Durch einen Schnitt senkrecht zur Grundfläche durch die Mitten zweier gegenüberliegender Grundkanten kann man erkennen, daß der halbe Keil jeweils die Hälfte des halben Prismas einnimmt.)

1. $A_G = 394{,}8\ cm^2$; $V \approx 2\,395\ cm^3$ [2 395.12] $\approx 2{,}4\ dm^3$

2. $h_a = 7{,}2\ cm$, $A_G = 15{,}12\ cm^2$; $V \approx 60\ cm^3$ [60.48]

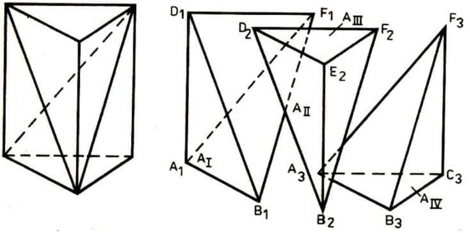
3. a) $A_G = 36\ cm^2$; $V = 288\ cm^3$
   $h_a \approx 24{,}2\ cm$ [24.186 773]; $A_O \approx 326\ cm^2$ [326.241 28]
   b) $A_G = 96\ m^2$; $V = 512\ m^3$
   $h_b \approx 17{,}1\ m$; $h_a \approx 16{,}5\ m$; $A_O \approx 430{,}6\ m^2$ [430.613 13]

4. $h \approx 21{,}7\ cm$

5. a) $h \approx 17\ mm$; $V \approx 1{,}3\ cm^2$ [1 271.686 9]
   $h_a \approx 18{,}5\ mm$; $A_o \approx 781{,}2\ mm^2$ [781.214 89] $\approx 7{,}8\ cm^2$
   b) $A_o \approx 3{,}0\ cm^2$ [302.675 52] c) $V \approx 2{,}7\ cm^3$ [2 735.052 4]

6. a) Das Volumen der Pyramide verdoppelt sich ebenfalls.
   b) Das Volumen verringert sich auf ein Viertel.
   c) Das Volumen vergrößert sich auf das Achtfache.

7.* Ein Vergleich der Pyramiden $A_1 B_1 D_1 F_1$ und $B_2 E_2 D_2 F_2$ mit F_1 bzw. F_2 als Spitze ergibt Volumengleichheit, denn $A_I = A_{II}$, und die Höhen beider Pyramiden (mit Buchstaben nicht angebbar) sind ebenfalls gleich lang.



Ein Vergleich der Pyramiden $D_2E_2F_2B_2$ und $A_3B_3C_3F_3$ mit B_2 bzw. F_3 als Spitze ergibt ebenfalls Volumengleichheit, denn $A_{III} = A_{IV}$, und die Höhen $\overline{B_2E_2}$ und $\overline{C_3F_3}$ sind ebenfalls gleich lang.

Da nachgewiesen werden konnte, daß die erste und die zweite wie auch die zweite und die dritte Pyramide jeweils volumengleich sind, kann geschlossen werden, daß auch die erste und die dritte volumengleich sind.

8. a) $V \approx 8{,}8\ m^3$ [8.778]
$h_1 = 1\ 750$ mm; $h_2 = 2\ 164$ mm; $A_o \approx 19\ m^2$ [18.959 4]

Lerneinheit D 7: Kreiskegel und ihr Volumen

o 23 b) $A' = 3\ cm^2$ in beiden Fällen. (Begründung: Der Schnitt in 8 cm Höhe erzeugt einen Kreiskegel – bzw. eine Pyramide – mit der Höhe 4 cm. Dieser Kegel kann als das Ergebnis einer zentrischen Streckung (S; $\frac{1}{3}$) angesehen werden. Für die Höhen gilt z.B.

$h' = \frac{1}{3} h = \frac{1}{3} \cdot 12\ cm = 4\ cm.$

Dann gilt für die Flächeninhalte

$A' = k^2 \cdot A = \frac{1}{9} \cdot 27\ cm^2 = 3\ cm^2$.)

1. a) $165\ cm^3$ b) $2\ 795\ cm^3$ c) $104\ cm^3$ d) $190\ cm^3$

2. a) $r \approx 4{,}0$ cm; $d \approx 8{,}0$ cm; $A_G \approx 50{,}3\ cm^2$; $s \approx 6{,}8$; $V \approx 92{,}2\ cm^3$
b) $r \approx 3{,}3$ cm; $d \approx 6{,}6$ cm; $u \approx 20{,}7$ cm; $A_G = 34\ cm^2$; $s \approx 5{,}6$ cm
c) $r = 2{,}2$ cm; $u \approx 13{,}8$ cm; $A_G \approx 15{,}2\ cm^2$; $h \approx 9{,}1$ cm; $s \approx 9{,}3$ cm

2. d) $r \approx 2{,}4$ cm; $d \approx 4{,}9$ cm; $u \approx 15{,}2$ cm; $h \approx 12{,}3$ cm; $s \approx 12{,}5$ cm

   e) $r = 3{,}25$ cm; $u \approx 20{,}4$ cm; $A_G \approx 33{,}2\ cm^2$; $h \approx 7{,}1$ cm; $V \approx 78{,}4\ cm^3$

3. $V \approx 45\ cm^3$ [44.898 595]

4. $V_{Zyl} \approx 591\ cm^3$ [591.640 44]; $V_{Kegel} \approx 197\ cm^3$ [197.213 48]

   Abfall: $394\ cm^3$ [394.426 96]

5. a) $r = 23$ m (Beim Böschungswinkel von 45° sind Höhe und Radius gleich lang.) $V \approx 12\ 700\ m^3$ [12 741.253]

   b) $r = 39{,}8$ m; $V \approx 38\ 200\ m^3$ [38 223.758]

6.* Wenn mit x die Vergrößerung des Radius bei weiterer Aufschüttung bezeichnet wird, so gilt nach dem 1. Strahlensatz:

   $2{,}1 : x = 1{,}5 : 0{,}5.$

   Es wurden rund $9{,}5\ m^3$ [9.492 845 8] Abraum aufgeschüttet.

   Eine weitere Möglichkeit der Berechnung – ohne die Ermittlung von x – wird durch die Nutzung der Gleichung $V_2 = k^3 \cdot V_1$ möglich, wobei k als Quotient $\frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$ errechnet wird. Danach ist

   $V_2 = 2{,}370\ 37 \cdot 6{,}927\ 211\ 8\ m^3 = 16{,}420\ 055\ m^3$

   und die Aufschüttung ergibt sich als Differenz

   $16{,}420\ 055\ m^2 - 6{,}927\ 211\ 8\ m^3 = 9{,}492\ 843\ 3\ m^3 \approx 9{,}5\ m^3.$

Lerneinheit D 8: Mantel- und Oberflächeninhalt gerader Kreiskegel

o 24 $A_M = \frac{1}{2}\pi ds$; $A_O = \frac{1}{4}\pi d^2 + \frac{1}{2}\pi ds = \frac{1}{2}\pi d(\frac{1}{2}d + s)$

o 25 a) $A_O = 96\pi\ m^2 \approx 300\ m^2$

   b) $A_{O1} = 301{,}44\ m^2$; $A_{O2} = 301{,}593\ 6\ m^2$

   Wenn $r = 6$ m und $h = 8$ m Näherungswerte sind, so reicht es, wenn man für π den Näherungswert 3 verwendet.

1. a) $94{,}247\ 78\ cm^2 \approx 94\ cm^2$ b) $28{,}878\ 87\ cm^2 \approx 29\ cm^2$ c) $83{,}055\ 856\ cm^2 \approx 83\ cm^2$

   d) $138{,}033\ 73\ cm^2 \approx 138\ cm^2$ e) $109{,}592\ 89\ cm^2 \approx 110\ cm^2$ f) (wie e)

2. a) $r \approx 10{,}2$ cm; $h \approx 69{,}3$ cm; $A_M \approx 2\ 243\ cm^2$; $A_O \approx 2\ 570\ cm^2$

   b) $u \approx 219{,}9$ cm; $s \approx 82{,}8$ cm; $A_M \approx 9\ 104\ cm^2$; $A_O \approx 12\ 953\ cm^2$

   c) $r \approx 7{,}0$ cm; $u \approx 44{,}1$ cm; $h \approx 5{,}8$ cm; $s \approx 9{,}1$ cm

   d) $u \approx 31{,}3$ cm; $h \approx 11{,}5$ cm; $A_M \approx 197{,}5\ cm^2$; $s \approx 12{,}6$ cm

3. $A_O \approx 379\ cm^2$

4. Das geviertelte Filterpapier stellt den Mantel des Trichters dar, wobei $s = 5$ cm; $d = 5$ cm; $A_G \approx 19{,}63$ cm^2; $h \approx 4{,}33$ cm und $V \approx 28$ cm^3 [28.340 615].

5.* a) $b \approx 126$ mm [125.66371]; $r = 20$ mm
$h \approx 56{,}6$ mm [56.568 542]; $V \approx 23{,}7$ cm^3 [23 695.376]
b) $b \approx 188$ mm [188.495 56]; $r = 30$ mm
$h \approx 52{,}0$ mm [51.961 524]; $V \approx 49{,}0$ cm^3 [48 972.583]
c) $b \approx 282{,}7$ mm [282.743 34]; $r = 45$ mm
$h \approx 39{,}7$ mm [39.686 27]; $V \approx 84{,}2$ cm^3 [84 157.712]

6. $u_{Kegelgr.} \approx 14{,}7$ cm [14.660 766]; $r_{Kegel} \approx 2{,}\overline{3}$ cm; $h \approx 2{,}6$ cm
$A_o \approx 42{,}8$ cm^2 [42.760 566]; $V \approx 14{,}9$ cm^3 [14.873528]

Lerneinheit D 9: Kugeln und ihr Volumen

o 28 a) Kugelradius b) 8 cm

1. a) 1,910 dm^3 [1 912.318 9] b) 15,3 dm^3 [15 298.551]
c) 144 dm^3 [143 793.21] d) 18,0 dm^3 [17 974.151]

2. a) $r \approx 4{,}3$ cm [4.251 96]; $d \approx 8{,}5$ cm
b) $r \approx 19{,}7$ cm [1.973 585]; $d \approx 39{,}5$ cm
c) $r \approx 9{,}2$ cm [0.916 055]; $d \approx 18{,}3$ cm

3. Der Ballon verdrängt rund 41,6 m^3 Luft [41.629 747], die eine Masse von rund 54 kg hat [53.702 373]

4. Die Kugel aus Kork hat ein Volumen von 523,6 dm^3 und eine Masse von rund 126 kg [125 663.71].

5. $V = \frac{2}{3}\pi\,(7{,}5^3 - 6{,}5^3)$ cm$^3 \approx 308{,}4$ cm^3 [308.399 68]
$m \approx 2{,}4$ kg [2 424.021 5] (bei $\varrho = 7{,}86$ g $\cdot$ cm^{-3})

6. $r \approx 3{,}5$ cm [3.501 408 8]; $V \approx 180$ cm^3; $\varrho = 0{,}50$ g $\cdot$ cm^{-3}

7. a) $\varrho_{Stahl} = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot 6}{\pi \cdot d^3} = \frac{m \cdot 6 \cdot \pi^2}{u^3} \approx 7{,}18\ \frac{g}{cm^3}$ [7.182 216 9]

b) $V_{Stahlmantel} = \frac{4}{3}\pi\,(r_1^3 - r_2^3) \approx 234$ cm^3 [234.274 85]

$m_{Stahlmantel} \approx 1{,}68$ kg [1 682.093 4]

$m_{Blei} \approx 5{,}57$ kg [5 567.906 6]

1.

d	1	2	3	4	5	6
A_o	π	4π	9π	16π	25π	36π
V	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{27}{6}\pi$	$\frac{64}{6}\pi$	$\frac{125}{6}\pi$	$\frac{216}{6}\pi$

2. a) $r \approx 7$ cm, $V \approx 1\,438$ cm^3 [1 437.622 1]
   b) $r \approx 8{,}9$ cm; $V \approx 2\,974$ cm^3 [2 973.538 4]
   c) $r \approx 2{,}1$ m; $V \approx 38{,}8$ m^3 [38.815 801]

3. a) $d \approx 50$ cm; $V \approx 65{,}4$ dm^3 [65350.363]; $A_o \approx 78{,}5$ dm^2 [7846.0204]
   b) $d \approx 65{,}3$ cm; $V \approx 145$ dm^3 [145482.44]; $A_o \approx 134$ dm [13376.973]
   c) $d \approx 3{,}2$ cm; $V \approx 16{,}9$ cm^3 [16.886846]; $A_o \approx 31{,}8$ cm^2 [31.830989]

4. a) 77,45 hl ≈ 77,5 hl   b) $A_o \approx 17{,}58$ m$^2 \approx 17{,}6$ m^2

5. 201 m^2 6.* Die Haut ist $\frac{1}{1000}$ mm = 1 μm dick.
   $V_{Tropfen} = 33{,}51$ mm^3; $A_o = 31\,416$ mm^2

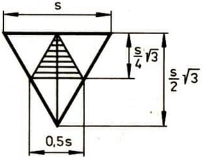
Komplexe Übungen im Kapitel D

2. a) $V = 23{,}38$ cm$^2 \cdot 5{,}311$ cm $\approx 41{,}4$ cm^3 [41.397 554]
   $A_o = 23{,}38$ cm$^2 + 6 \cdot 8{,}869$ cm$^2 \approx 76{,}6$ cm^2 [76.596 969]
   b) $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 8{,}2^3$ cm$^3 \approx 65$ cm^3 [64.979 342]
   $A_o = \sqrt{3} \cdot 8{,}2^2$ cm$^2 \approx 1{,}2$ dm^2 [116.463 1]

3. $A_o = 2\sqrt{3} \cdot 5{,}6^2$ cm$^2 \approx 1{,}1$ dm^2 [108.634 23]

4.* b) $A_o = 6\,a^2\sqrt{2}$; $V = 2\,a^3$

5.* b) Die Würfelkante habe die Länge a, und die Diagonale einer Würfelseitenfläche, die auch Kante eines großen einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders ist, habe die Länge s. Dann ergibt sich für die vier Seitenflächen des großen Tetraeders:



$A = \frac{1}{2}\,s \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\,s^2\sqrt{3}.$

Verbindet man die Seitenmitten einer Tetraederfläche wie im nebenstehenden Bild, so zerlegt man die Fläche in vier kongruente gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{s}{2}$ und der Höhe $\frac{s}{4}\sqrt{3}$.

__Die Oberfläche__ des zu bestimmenden Körpers setzt sich aus den Mantelflächen der 8 kleinen regelmäßigen Tetraeder zusammen, also aus 24 dieser im Bild schraffiert gezeichneten Dreiecke. Man erhält

$A_o = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}$

oder, da $s = a\sqrt{2}$,

$A_o = 3\, a^2 \sqrt{3}$.

__Das Volumen__ kann aus der Differenz aus Würfelvolumen ($V = a^3$) und Volumen des Restkörpers (12 volumengleiche Pyramiden mit $A_o = \frac{1}{4}a^2$ und $h = \frac{a}{2}$) errechnet werden. Man erhält also:

$V_{Restkörper} = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$

und weiter $V = a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$.

6.* a) Großer Kegel: $D \approx 10{,}6$ cm [10.606 601]; $V_g \approx 156{,}2\ cm^3$ [156.19506]

kleiner Kegel: $d \approx 2{,}6$ cm [2.6066]; $V_k \approx 2{,}3\ cm^3$ [2.3123882]

Restkörper: $V_R \approx 153{,}9\ cm^3$ [153.88267]

b) Großer Kegel: $V_g \approx 55{,}2\ cm^3$ [55.223313]

Da die Schnittebene höher liegt als die Höhe des großen Kegels erreicht, ist kein Schnitt möglich.

7. a) $s \approx 234$ mm [233.72847]

$A_o \approx 1\,205\ cm^2$ [120 451.78]; $V \approx 3\,022\ cm^3$ [3 022 316.8]

b) $s_1 \approx 141$ mm [140.65561]; $s_2 \approx 234$ mm (s.o.)

$A_o \approx 823\ cm^2$ [82 331.358]; $V \approx 1\,770\ cm^3$ [1 770 287.4]

8. 21,5 % [21.460 184]

9. etwa 20 %

10. $h \approx 34$ cm [33.953 054]

$s \approx 35$ cm [34.771 538]; $A_M \approx 820\ cm^2$ [819.285 06]

11. Blei: $\varrho = 11{,}34\ \frac{g}{cm^3}$; $n = \frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \varrho} = \frac{3 \cdot 5\,000}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}5^3 \cdot 11{,}34}$

a) $n \approx 841$ Kugeln b) $n \approx 6\,736$ Kugeln

12. $10{,}5\ dm^3$ [10 457.959]

13. Die Maße sind mit dem prozentualen Fehler 1,1 % behaftet.

$A_o = \pi d^2 + \pi dh \approx 50{,}0\ dm^2$ [4 976.282 8]

$4\,865\ cm^2 \leqq A_o \leqq 5\,089\ cm^2$

14. $V \approx 21{,}7\ cm^3$ [21 724.113]; $\varrho_{Stahl} = 7{,}8\ \frac{g}{cm^3}$

$m \approx 169$ g [169.448 08]

15. $V \approx 8{,}4\ cm^3$ [8 403.760 3]; $m \approx 68\ g$ [68 070.458]

16.* $r_1 \approx 35{,}0\ cm$ [35.014087]; $r_2 \approx 33{,}5\ cm$ [33.525 511]
Diff. (Wanddicke): rund 15 mm [1.488 575 6]

17. b) rund 43 500 m^3 Erdstoff c) rund 16 580 m^2

18. 30 m^2

19. a) 52 900 m^2 b) 2 570 000 m^3 [2 574 466.6] c) 486000 t
d) etwa 7 % [7.261 944 4]

20. 78 g

21. a) 98 cm^3 [98.467 336] b)* 209,7 g NaOH ($\varrho = 2{,}13\ g \cdot cm^{-3}$)
46,5 %

22. 0,08 mm

23. a) $A_o \approx 5{,}1 \cdot 10^8\ km^2$ [$5.099\ 0 \cdot 10^8$]
$V \approx 1{,}1 \cdot 10^{12}\ km^3$ [$1.082\ 5 \cdot 10^{12}$]
b) $A_o \approx 1{,}518\ 3 \cdot 10^8\ km^2$
$V \approx 1{,}759\ 2 \cdot 10^{11}\ km^3$
c) $V \approx 1{,}408\ 6 \cdot 10^{18}\ km^3$
$1{,}30 \cdot 10^6$ [1 301 260.7] Erdkugeln haben die gleiche Größe wie die Sonne.

24.* $A_{oGlobus} : A_{oErde} = 1 : (2{,}3 \cdot 10^{14})$
$V_{Globus} : V_{Erde} = 1 : (3{,}5 \cdot 10^{21})$

Kurzwort: 002204 Loesungsh. Mathe 8
ISBN 3-06-002204-6